www.e-rara.ch

Johannis Bernoulli, ... Opera Omnia, Tam Antea Sparsim Edita, quam hactenus inedita

Quo continentur Anekdota

Bernoulli, Johann

Lausannae & Genevae, 1742

ETH-Bibliothek Zürich

Shelf Mark: Rar 5026: 4

Persistent Link: https://doi.org/10.3931/e-rara-3597

www.e-rara.ch
Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien – von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material – from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d'imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L'éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes – des débuts de l'imprimerie jusqu'au 20e siècle.

e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

Nutzungsbedingungen Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titelinformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

Terms of Use This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

Conditions d'utilisation Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

Condizioni di utilizzo Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]

Visual Library

7289 (Rar)
Rar 5026:4

Bibliothek
der Churpfälzischen Staatswirthschafts
Hohen Schule.

JOHANNIS

BERNOULLI,

M. D. MATHESEOS PROFESSORIS,
Regiarum Societatum PARISIENSIS, LONDINENSIS, PETROPOLITANÆ,
BEROLINENSIS, *Socii* &c.

OPERA OMNIA,

TAM ANTEA SPARSIM EDITA,
quam hactenus inedita.

TOMUS QUARTUS,

Quo continentur

ANEKΔOTA.



LAUSANNÆ & GENEVÆ,

Sumptibus MARCI-MICHAELIS BOUSQUET & Sociorum.

MDCCXLIII.

ETH-BIBLIOTHEK ZÜRICH

Exc. Bibliotheca Universitatis Heidelbergensis

D

Bibliothek
der Churpfälzischen Staatswirthschafts
Hohen Schule.



JOHANNIS BERNOULLI
OPERA
ANEKΔOTA.

ANALYTICA.

****

N°. CL.

DE SERIEBUS VARIA.

PROPOSITIO I.

PROBLEMA.

Seriei fractionum, quarum numeratores & denominatores arithmetice sint progressionales, invenire terminum infinitesimum.

Sit Series $\frac{a}{c}, \frac{a+b}{c+e}, \frac{a+2b}{c+2e}, \frac{a+3b}{c+3e}, \ldots\ldots \frac{a+mb}{c+me}$, &c.

Si itaque pro numero infinito ponatur n, erit terminus infinite-

simus $= \frac{a+nb}{c+ne}$. Sit ille $= x$. Ergo $cx+nex = a+nb$, & $cx-a = nb-nex$: Dividendo per $b-ex$, erit $n = \frac{cx-a}{b-ex}$. Quia autem numerator hujus fractionis est finitus [nam infinitus esse non potest, alias x deberet esse æqualis infinito, ideoque esset $b-ex$ negativa quantitas; ergo etiam $\frac{cx-a}{b-ex}$; quod est absurdum,] erit $b-ex = 0$, proinde $b = ex$, & $x = b:e$. Hic itaque est terminus infinitesimus. *Q. E. I.*

PROPOSITIO II.

Problema.

Seriei infinitæ fractionum, quarum numeratores sint arithmetice, denominatores geometrice progressionales, invenire summam.

Sit $a:c$ primus terminus, b communis differentia numeratorum, e ratio in qua crescunt denominatores; fiet itaque hæc progressio $\frac{a}{c}+\frac{a+b}{ce}+\frac{a+2b}{cee}+\frac{a+3b}{ce^3}$, &c. hujus progressionis summa ita invenitur: Dividantur primo numeratores in suas partes, ut fiat $\frac{a}{c}+\frac{a+b}{ce}+\frac{a+b+b}{cee}+\frac{a+b+b+b}{ce^3}$ &c. potest autem hæc progressio in alias infinitas pure geometricas resolvi, videlicet in has A, B, C, D, &c.

A, $\frac{a}{c}+\frac{a}{ce}+\frac{a}{cee}+\frac{a}{ce^3}$ &c. summa est $\frac{ae}{ce-c}$

B.... $\frac{b}{ce}+\frac{b}{cee}+\frac{b}{ce^3}$ &c. summa $\frac{b}{ce-c}$

C..... $\frac{b}{cee}+\frac{b}{ce^3}$ &c. summa $\frac{b}{cee-ce}$

D..... $\frac{b}{ce^3}$ &c. summa $\frac{b}{ce^3-cee}$

quarum summæ, juxta vulgarem regulam, inveniri possunt. Summæ autem Serierum B, C, D, &c. à serie B incipientium consti-

conſtituunt aliam Seriem infinitam geometricam [ut ex operatione patet], cujus Seriei ſummæ, ſi addatur ſumma Seriei A, habebitur ſumma ſummarum, ſeu ſumma Seriei propoſitæ: Ergo ſummæ Serierum B, C, D, conſtituunt hanc Seriem geometricam $\frac{b}{ce-c} + \frac{b}{cee-ce} + \frac{b}{ce^3-cee}$ &c. cujus ſummæ $\frac{be}{cee-2ce+c}$ addatur ſumma Seriei $A = \frac{ae}{ce-c}$, & habebitur $\frac{aee-ae+be}{cee-2ce+c}$ = ſummæ Seriei propoſitæ. *Q. E. F.*

PROPOSITIO III.

PROBLEMA.

Seriei hujus $\frac{a}{b\times(b+c)} + \frac{a}{(b+c)\times(b+2c)} + \frac{a}{(b+2c)\times(b+3c)}$ &c. *ſummam invenire.*

Hæc Series ex hac $\frac{a}{b} + \frac{a}{b+c} + \frac{a}{b+2c} + \frac{a}{b+3c}$ reſolvi poteſt hoc modo: $\frac{a}{b} = \frac{a}{b+c} + \frac{ac}{b\times(b+c)}$; $\frac{a}{b+c} = \frac{a}{b+2c} + \frac{ac}{(b+c)\times(b+2c)}$; $\frac{a}{b+2c} = \frac{a}{b+3c} + \frac{ac}{(b+2c)\times(b+3c)}$ &c. Ergo $\frac{a}{b} + \frac{a}{b+c} + \frac{a}{b+2c} + \frac{a}{b+3c}$ &c. $= \frac{a}{b+c} + \frac{a}{b+2c} + \frac{a}{b+3c}$ + &c. $+ \frac{ac}{b\times(b+c)} + \frac{ac}{(b+c)\times(b+2c)} + \frac{ac}{(b+2c)\times(b+3c)}$; ideoque $\frac{a}{b} = \frac{ac}{b\times(b+c)} + \frac{ac}{(b+c)\times(b+2c)} + \frac{ac}{(b+2c)\times(b+3c)}$ + &c. & $\frac{a}{bc} = \frac{a}{b\times(b+c)} + \frac{a}{(b+c)\times(b+2c)} + \frac{a}{(b+2c)\times(b+3c)}$ + &c.

COROLLARIUM I.

Hinc ſi Series propoſita ſit finita, & numerus terminorum $= m$, erit omnium ſumma $= \frac{ma}{bb+mbc}$. Hoc patet ex operatione.

COROL-

COROLLARIUM II.

Si proponatur Series fractionum, cujus numeratores sint æquales, denominatores vero numeri trigonales $\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \frac{1}{21}$, &c. summa sic investigabitur. Ponatur $a = b = c = 1$; habebitur ergo per Prop. hanc, summa Seriei $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}$ &c. $= 1$. Hæc Series autem est subdupla illius, quia hujus denominatores sunt dupli illius: Ergo illius summa est 2. Summa propositæ Seriei finitæ est $= \frac{2ma}{bb + mbc} = \frac{2m}{1 + m}$.

COROLLARIUM III.

Sequitur ex his, progressionis harmonicæ $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ &c. summam esse infinitam; nam ob

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \text{&c.} = 1$$
$$\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \text{&c.} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \text{&c.} = \frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{20} + \text{&c.} = \frac{1}{4}$$

erit $\frac{1}{2} + \frac{2}{6} + \frac{3}{12} + \frac{4}{20} + \text{&c.}$ vel, fractionibus ad minimos terminos redactis, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \text{&c.} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \text{&c.}$ Quod si utriusque progressionis summa esset finita, sequeretur totum æquale esse suæ parti: nam prior incipit a posterioris termino secundo. Ergo summa est infinita. *Q. E. D.*

PROPOSITIO IV.

THEOREMA.

Seriei $\frac{2b+c}{b^2 \times (b+c)^2} + \frac{2b+3c}{(b+c)^2 \times (b+2c)^2} + \frac{2b+5c}{(b+2c)^2 \times (b+3c)^2} + \text{&c.}$ *summa* $= \frac{1}{bbc}$.

Demonst-

Demonstratio hujus deducitur ut supra, ex progressione

$$\frac{1}{b^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(b+2c)^2} + \frac{1}{(b+3c)^2} + \&c.$$

COROLLARIUM.

$$\frac{3}{1^2} + \frac{5}{3^2} + \frac{7}{6^2} + \frac{9}{10^2} + \&c. = 4;$$

$$\frac{1}{(4-1)^2} + \frac{2}{(16-1)^2} + \frac{3}{(36-1)^2} + \frac{4}{(64-1)^2} + \frac{5}{(100-1)^2} = \frac{8}{7}$$

PROPOSITIO V.

THEOREMA.

Seriei $\frac{1a}{1\times 2} + \frac{2a}{1\times 2\times 3} + \frac{3a}{1\times 2\times 3\times 4} + \frac{4a}{1\times 2\times 3\times 4\times 5} + \&c.$ *summa est* $= a$.

Demonstratio hujus desumitur ab hac Serie

$\frac{a}{1} + \frac{a}{1\times 2} + \frac{a}{1\times 2\times 3} + \frac{a}{1\times 2\times 3\times 4} + \&c.$ ut in Propositione penultima factum.

COROLLARIUM.

Hinc $\frac{1}{1\times 2} + \frac{4}{1\times 2\times 3} + \frac{9}{1\times 2\times 3\times 4} + \&c. = \frac{1}{1} + \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{1\times 2\times 3} + \frac{1}{1\times 2\times 3\times 4} + \&c.$

Nam resolvatur prior hoc modo

$$\frac{1}{1\times 2} + \frac{2}{1\times 2\times 3} + \frac{3}{1\times 2\times 3\times 4} + \&c. = 1 = \frac{1}{1}$$

$$\frac{2}{1\times 2\times 3} + \frac{3}{1\times 2\times 3\times 4} + \&c. = \frac{1}{2} = \frac{1}{1\times 2}$$

$$\frac{3}{1\times 2\times 3\times 4} + \&c. = \frac{1}{6} = \frac{1}{1\times 2\times 3}$$

&c. &c.

Q. E. D.

PROPOSITIO VI.

PROBLEMA.

Aliarum Serierum ſummam invenire:

$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\frac{1}{256}+$ &c. $=2$. ſubtrahatur $\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}$ &c. $=\frac{4}{3}$. Ergo $\frac{1}{4}+\frac{3}{16}+\frac{7}{64}+\frac{15}{256}+$ &c. $=\frac{2}{3}$ ☉. Loco ſubtrahendi addatur hæc Series $\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+$ &c. $=\frac{4}{3}$, proveniet $\frac{2}{1}+\frac{3}{4}+\frac{5}{16}+\frac{9}{64}+$ &c. $=\frac{10}{3}$ ☽. Ubi notandum quod in Serie ☉ inventa, numeratores ſint in ratione dupla aucta unitate; in ☽ vero inventa in eadem ratione ſed diminuta unitate.

$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{243}+\frac{1}{729}+$ &c. $=\frac{3}{2}$. Subtrahatur $\frac{1}{1}+\frac{1}{9}+\frac{1}{81}+\frac{1}{729}+$ &c. $=\frac{9}{8}$ prodibit $\frac{2}{9}+\frac{8}{81}+\frac{26}{729}+$ &c. $=\frac{3}{8}$ ☿; ſi vero addatur $\frac{1}{1}+\frac{1}{9}+\frac{1}{81}+$ &c. $=\frac{9}{8}$, proveniet $\frac{2}{1}+\frac{4}{9}+\frac{10}{81}+\frac{28}{729}+$ &c. $=\frac{21}{8}$ ♀; ubi iterum advertitur, quod numeratores in Serie ☿ ſint in ratione tripla aucta binario, in ♀ vero in eadem ratione ſed eodem numero diminuta.

PROPOSITIO VII.

Poteſt inveniri ratio quam habent ſummæ (etiamſi incognitæ) duarum Serierum.

Ex. gr. hoc modo: Series ſequens

$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}$ &c. æquatur ſuis

partibus

partibus, videlicet Seriebus $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+$ &c. $=2$ & $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+$ &c. $=\frac{2}{3}$, & $\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{40}+$ &c. $=\frac{2}{5}$; & $\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}+\frac{1}{56}+$ &c. $=\frac{2}{7}$, & ita consequenter. Erit ergo $\frac{2}{1}+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\frac{2}{7}+\frac{2}{9}$ &c. $=$ Seriei propositæ $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ &c., ideoque $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}$ &c., dimidia est Seriei propositæ. Ex quo rursum patet Seriem propositam esse infinitam, nam quia $\frac{1}{1}<\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}<\frac{1}{4}$ & $\frac{1}{5}<\frac{1}{6}$ &c. erit $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+$ &c. $<\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}$ &c. Ergo si proposita Series esset finita, sequeretur $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+$ &c. non esse æqualem dimidiæ Seriei propositæ. Quod est absurdum.

Eodem modo, si proponatur Series $\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\frac{1}{49}+$ &c. $=$ Seriebus $\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}$ &c. $=\frac{4}{3}$ & $\frac{1}{9}+\frac{1}{36}+\frac{1}{144}$ &c. $=\frac{4}{3\times 9}$ & $\frac{1}{25}+\frac{1}{100}+\frac{1}{400}+$ &c. $=\frac{4}{3\times 25}$ &c. Ergo $\frac{4}{3\times 1}+\frac{4}{3\times 9}+\frac{4}{3\times 25}+\frac{4}{3\times 49}$ &c. $=\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+$ &c. ideoque, multiplicando per 3, $\frac{4}{1}+\frac{4}{9}+\frac{4}{25}+\frac{4}{49}+$ &c. $=\frac{3}{1}+\frac{3}{4}+\frac{3}{9}+\frac{3}{16}+\frac{3}{25}+$ &c. ablatis æqualibus $\frac{1}{1}+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+$ &c. $=\frac{3}{4}+\frac{3}{16}+\frac{3}{36}+$ &c. Ergo summa terminorum imparium Seriei propositæ est ad summam terminorum parium ut 3 ad 1.

Si denominatores Seriei propositæ essent cubi numerorum naturalium; inveniretur summam imparium terminorum esse ad summam parium ut 7 ad 1.

Generaliter : Si denominatores ſint quæcunque poteſtas numerorum naturalium; erit ſumma terminorum imparium ad ſummam parium ut eadem poteſtas diminuta unitate ad unitatem.

PROPOSITIO VIII.

PROBLEMA.

Seriei, cujus numeratores ſint in progreſſione geometrica aucta communi quadam quantitate, denominatores vero in quacunque alia majore progreſſione geometrica, ſummam invenire.

Sit primus terminus $\frac{a}{e}$, ratio in qua aſcendunt numeratores & denominatores ſit $\frac{c}{m}$, communis quantitas b; procreabitur itaque hæc Series $\frac{a}{e}+\frac{ac+b}{em}+\frac{acc+bc+b}{emm}+\frac{ac^3+bcc+bc+b}{em^3}$ &c. cujus ſumma invenitur reſolvendo hanc Seriem in alias

$$\begin{array}{rrrrl} \frac{a}{e} & + \frac{ac}{em} & + \frac{acc}{emm} & + \frac{ac^3}{em^3} \text{ &c.} & = \frac{am}{em-ec} \\ & \frac{b}{em} & + \frac{bc}{emm} & + \frac{bcc}{em^3} \text{ &c.} & = \frac{b}{em-ec} \\ & & \frac{b}{emm} & + \frac{bc}{em^3} \text{ &c.} & = \frac{b}{emm-emc} \\ & & & \frac{b}{em^3} \text{ &c.} & = \frac{b}{em^3-ecmm} \\ & & & \text{&c.} & \text{&c.} \end{array}$$

quarum ſummæ, omiſſa tantiſper prima, conſtituunt hanc Seriem geometricam $\frac{b}{em-ec}+\frac{b}{emm-ecm}+\frac{b}{em^3-ecmm}$ &c. quæ eſt æqualis $\frac{bm}{emm-ecm-em-ec}$. Addatur prima $\frac{am}{em-ec}$; provenit $\frac{amm-am+bm}{emm-ecm-em+ec}$ = ſummæ Seriei propoſitæ.

PRO-

PROPOSITIO IX.

THEOREMA.

Summa Seriei $\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2}$ &c. $)))))}}}$ *est* $=2$.

Sit si potest $=2+a$: Ergo eorum quadrata erunt æqualia, id est, $4+4a+aa=2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2}$ &c. $))))}}$: Ergo [subtractis utrinque æqualibus] $2+4a+aa=\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2}$ &c. $))))}=2+a$. *Quod est absurdum.*

Si nunc dicatur esse æqualem $2-a$; erit ergo $4-4a+aa=2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2}$ &c. $))))}$ & [subtractis utrinque æqualibus] $2-4a+aa=\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2}$ &c. $))))}=2-a$, ideoque transponendo & dividendo per a, erit $a=3$, & supra $2>a$, quæ repugnant; quin potius summa Seriei propositæ est $=2$. *Q. E. D.*

COROLLARIUM.

Eodem modo demonstratur $\sqrt{(6+\sqrt{(6+\sqrt{(6+\sqrt{(6}$ &c. $))))}=3$, & $\sqrt{(12+\sqrt{(12+\sqrt{(12+\sqrt{(12}$ &c. $))))}=4$, & $\sqrt{(20+\sqrt{(20+\sqrt{(20+\sqrt{(20}$ &c. $))))}=5$ &c. Et generaliter $\sqrt{(a+\sqrt{(a+\sqrt{(a+\sqrt{(a+\sqrt{(a+}$ &c. $)))))}$ summa ita invenitur. Ponatur summa æqualis x: Ergo ipsorum quadrata æquantur $xx=a+\sqrt{(a+\sqrt{(a+\sqrt{(a+\sqrt{(a}$ &c. $))))}$: aufer utrinque æqualia, remanebit $xx-a=\sqrt{(a+\sqrt{(a+\sqrt{(a+\sqrt{(a}$ &c. $))))}=x$, proinde $xx=x+a$ & $x=\frac{1}{2}+\sqrt{(\frac{1}{4}+a)}$.

Hinc si series ita proponatur $\sqrt[3]{(a+\sqrt[3]{(a+\sqrt[3]{(a+\sqrt[3]{(a}$ &c.$))))}$; summa ita invenitur. Ponatur $=x$: ergo $x^3-a=\sqrt[3]{(a+\sqrt[3]{(a+\sqrt[3]{(a+\sqrt[3]{(a}$ &c. $))))}=x$; proinde $x^3-x-a=0$ & universaliter $\sqrt[n]{(a+\sqrt[n]{(a+\sqrt[n]{(a+\sqrt[n]{(a}$ &c. $))))}$ pro æquatione habebitur $x^n-x-a=0$.

PROPOSITIO X.

THEOREMA.

Si sint duæ Series figuratæ immediate sibi subsequentes, & sit ubique summa terminorum primæ ad totidem maximo æqualium ut 1 *ad* r; *erit & ubique summa terminorum secundæ ad totidem maximo æqualium ut* 1 *ad* r+1.

Est enim per naturam Serierum figuratarum, & per hypothesin:

$$\left\{\begin{array}{l} a\ldots o \\ \vdots\ \ \vdots \\ \vdots\ \ \vdots \\ n\left\{\begin{array}{l} b\ldots f \\ c\ldots g \\ d\ldots h \\ e\ldots i \\ \quad k \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$k+i+h+g+f\ldots+o = \frac{ne}{r} + \frac{(n-1)d}{r} + \frac{(n-2)c}{r} + \frac{(n-3)b}{r} \ldots + \frac{(n-n+1)a}{r}$ = (connexis homologis) $\frac{n.(e+d+c+b\ldots+a)}{r} - \frac{1d-2c-3b\ldots-n(+1)a}{r}$ = (per naturam Serierum) $\frac{nk-i-h-g-f\ldots-o}{r}$, ideoque $rk+r(i+h+g+f\ldots+o) = nk-i-h-g-f\ldots-o$. & reducta æquatione invenitur $nk-rk = (r+1)(i+h+g+f\ldots+o)$; dividatur utrumque per $r+1$, addaturque dein utrique k, habebitur $\frac{(n+1).k}{r+1} = k+i+h+g+f\ldots+o$. &c. *Q. E. D.*

COROLLARIUM.

Patet hinc cujuslibet Seriei figuratæ quamlibet summam terminorum habere ad totidem maximo æqualium rationem constantem. Series enim unitatum, quæ est prima omnium figuratarum, habet hanc proprietatem requisitam; sequitur itaque ex Propositione secundam Seriem eandem proprietatem habere; & ex secunda demonstratur, tertiam; ex tertia, quartam; ex quarta, quintam &c; & ita consequenter omnes in infinitum usque. *Q. E. D.*

PRO-

PROPOSITIO XI.

THEOREMA.

Esto numerus quilibet n datus, & fractio quælibet assumta $\frac{a}{b}$, *ex qua formetur hæc altera* $\frac{b}{(n-1)a+2b}$, *& ex hac formetur eadem lege tertia* $\frac{(n-1)a+2b}{(n-1)b+2(n-1)a+4b}$, *ex tertia quarta, & sic deinceps, considerato scilicet semper numeratore ut a & denominatore ut b; erit terminus infinitesimus* $\frac{1}{1+\sqrt{n}} = \frac{-1+\sqrt{n}}{-1+n}$.

Cum enim terminus infinitesimus suo proximo termino seu sequenti censeatur æqualis, esto terminus infinitesimus $\frac{x}{y}$; ergo sequens ex natura Seriei erit $\frac{y}{(n-1)x+2y}$; adeoque $\frac{x}{y} = \frac{y}{(n-1)x+2y}$; reducatur æquatio & habebitur $y = x + x\sqrt{n}$, unde $\frac{x}{y} = \frac{x}{x+x\sqrt{n}} = \frac{1}{1+\sqrt{n}} = \frac{-1+\sqrt{n}}{-1+n}$. *Q. E. D.*

COROLLARIUM.

Hinc patet ratio extrahendi commodissime radicem quadratam numeri propositi n, per approximationem continuam: Incipiatur namque a quacunque fractione $\frac{a}{b}$, & continuetur Series, servata lege in Propositione exhibita, donec termini se mutuo insequentes sensibiliter non differant, vocetur unus ex illis V, erit ergo $V =$ (quam proxime) $\frac{1}{1+\sqrt{n}} = \frac{-1+\sqrt{n}}{-1+n}$, unde $\sqrt{n} = \frac{1-V}{V} = (n-1)V+1$.

ALITER.

Ponatur $\frac{a}{b} = \frac{(n+1)ab}{aa+bb}$, & reliqua fiant ut ante; dabit terminus infinitesimus hujus Seriei $\frac{a}{b}$, $\frac{(n+1)ab}{aa+bb}$, &c. immediate radicem quæsitam $\sqrt{n}$.

Simili modo extrahitur radix cubica ex numero dato n: ponendo scil. $\frac{a}{b} = \frac{(n+1)abb}{a^3+b^3}$; imo & cujuscunque potestatis p, hoc modo $\frac{a}{b} = \frac{(n+1)ab^{p-1}}{a^p+b^p}$.

ADHUC ALITER ET FACILIUS.

Fiat $\frac{a}{b} = \frac{a^{p-1}+nb^{p-1}}{(a+b)a^{p-2}}$; erit ultima fractio radix potestatis p ex numero n.

N°. CLI.

METHODUS

Exhibendi summas progressionum finitarum per numerorum naturalium quamcunque potentiam datam procedentium; imo cujusvis alterius progressionis finitæ constantis terminis utcunque complicatis, modo contineant quantitates rationales & integras.

SIt ex. gr. progressio quadratorum $1+4+9+16.....+mm$, cujus summa quæritur. Hæc ponatur esse $am^3+bmm+cm$ (per a, b, c, intelligo coëfficientes incognitos ipsarum m^3, mm, m). Aucto nunc numero terminorum unitate, habebitur, ponendo ubique $m+1$ loco m, in assumta quantitate $am^3+bmm+cm$, hæc

$+cm$, hæc altera $am^3+3amm+3am+a$
$+bmm+2bm+b$
$+cm+c$

quæ per consequens æqualis esse debet expositæ progressioni, una cum termino post mm sequenti, qui est $mm+2m+1$; ideoque erit æquatio inter quantitatem hanc ex assumta generatam & inter ipsam assumtam, auctam termino post mm sequenti, $mm+2m+1$. Hinc si æquatio ad o redigatur; observata terminorum homogeneitate habebitur

$$\left.\begin{array}{r} +3amm+3am+a \\ -1mm+2bm+b \\ -2m+c \\ -1 \end{array}\right\} = o$$

Singulos ergo terminos æquando o, reperitur $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{6}$; & per consequens $am^3+bmm+cm$, id est $1+4+9+16.\ldots\ldots+mm$ est $= \frac{1}{3}m^3+\frac{1}{2}mm+\frac{1}{6}m = \frac{2m^3+3mm+m}{6} = \frac{2m^3+3mm+m}{1.2.3}$. Sit nunc generaliter potentia numerorum naturalium n, & quæratur summa progressionis finitæ $1^n+2^n+3^n+4^n+5^n\ldots\ldots+m^n$. Assumatur ergo itidem hæc quantitas [pro quæsita summa] $am^{n+1}+bm^n+cm^{n-1}+dm^{n-2}+$ &c. & augeatur unitate numerus terminorum m; unde provenit

$$\begin{array}{rrrrrrrrr} am^{n+1}+(n+1)am^n+\frac{(n+1).n}{1.2}am^{n-1}+\frac{(n+1).n.(n-1)}{1.2.3.}am^{n-2}, & \&c. \\ +bm^n+n.bm^{n-1}+\frac{n.(n-1)}{1.2}bm^{n-2}, & \&c. \\ +cm^{n-1}+(n-1)cm^{n-2}, & \&c. \\ +dm^{n-2}, & \&c. \end{array}$$

$$= a\,m^{n+1} + b\,m^{n} + cm^{n-1} + d\,m^{n-2} + \&c.$$
$$+ m^{n} + nm^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2.}\,m^{n-2}$$
$$+ \frac{n.(n-1).(n-2)}{1.2.3}\,m^{n-3} + \&c.$$

Æquatione reducta ad o, & obſervata homogeneitate terminorum, oritur

$$\left.\begin{array}{l} +(n+1).am^{n} + \frac{(n+1).n}{1.2}\,am^{n-1} + \frac{(n+1).n.(n-1)}{1.2.3}\,am^{n-2} + \&c. \\ -1\,m^{n} \quad + nbm^{n-1} + \frac{n.(n-1)}{1.2}\,bm^{n-2} + \&c. \\ \qquad - nm^{n-1} + (n-1)\,cm^{n-2} + \&c. \\ \qquad\qquad - \frac{n.(n-1)}{1.2}\,m^{n-2} + \&c. \end{array}\right\} = o$$

Singulis itaque terminis cum o æquatis, innoteſcent coëfficientes

$$a = \frac{1}{n+1}$$

$$b = 1 - \frac{n+1}{1.2}\,a$$

$$c = \frac{n}{1.2} - \frac{(n+1).n}{1.2.3}\,a - \frac{n}{1.2}\,b$$

$$d = \frac{n.(n-1)}{1.2.3} - \frac{(n+1).n.(n-1)}{1.2.3.4}\,a - \frac{n.(n-1)}{1.2.3}\,b - \frac{n-1}{1.2}\,c$$

$$e = \frac{n.(n-1).(n-2)}{1.2.3.4} - \frac{(n+1).n.(n-1).(n-2)}{1.2.3.4.5}\,a - \frac{n.(n-1).(n-2)}{1.2.3.4}\,b$$
$$- \frac{(n-1).(n-2)}{1.2.3}\,c - \frac{n-2}{1.2}\,d,$$

&c.

quibus explicitis, erit

$$a = \frac{1}{n+1}$$

$$b = \frac{1}{2}$$

$$c = \frac{n}{3.4}$$

$$d = o$$

$$e =$$

$e = -\frac{n.(n-1).(n-2)}{1.2.3.4.5.6}$

$f = 0$

$g = \frac{n.(n-1).(n-2).(n-3).(n-4)}{1.2.3.4.5.6.7.6}$

$h = 0$

$i = -\frac{3n.(n-1).(n-2).(n-3).(n-4).(n-5).(n-6)}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10}$

$k = 0$

$l = \frac{5n.(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.6.}$

$m = 0$

&c.

EXEMPLUM.

Quæritur ſumma omnium numerorum integrorum ad decimam poteſtatem elevatorum, quorum radices in millenario continentur; id eſt: quæritur ſumma hujus progreſſionis $1^{10} + 2^{10} + 3^{10} + 4^{10} + 5^{10} \ldots, . + 1000^{10}$. Hoc in caſu, cum ſit $n = 10$, & $m = 1000$, erunt $a = \frac{1}{11}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{5}{6}$, $d = 0$, $e = -1$, $f = 0$, $g = 1$, $h = 0$, $i = -\frac{1}{2}$, $k = 0$, $l = \frac{5}{66}$, adoque ſumma totius progreſſionis erit $= \ldots = 91,409,924,241,424,243,424,241,924,242,500$.

COROLLARIUM.

Si n eſt numerus negativus vel fractio; ſumma acquiret terminos infinitos. Hinc licet numeros irrationales plures ex. gr. $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} \ldots + \sqrt{1000}$; per unicam Seriem conſtantem terminis mere rationalibus exprimere; cum alioquin unuſquiſque numerus irrationalis peculiarem poſcat legem.

N°. CLII.

Summatio Seriei $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2}$ &c.

seu $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16}$ + &c.

I.

LEIBNITIUS ostendit per methodum, quam dedit in *Actis Lipsi.* 1693, p. 180, dato arcu circuli x, fore sinum y [sumto radio vel sinu toto $= 1$] expressum per hanc Seriem $y = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \frac{x^7}{2.3\ldots7}$ + &c. Quam eandem Seriem anno sequenti 1694, p. 438, & 439 *, inveni per aliam methodum universalem; Et anno 1722, p. 398, eorund. *Actor.*† adhuc per aliam methodum, & quidem sine adminiculo Calculi differentialis.

II.

Quod si jam detur y, palam est, infinitos esse valores ipsius x eidem y respondentes, ob infinitos infinitarum dimensionum terminos ipsius x; quot nimirum sunt radices in hac æquatione dimensionis infinitæ $x - \frac{1}{2.3}x^3 + \frac{1}{2.3.4.5}x^5 - \frac{1}{2.3\ldots7}x^7$ + &c. $- y = 0$. Cujus singulæ radices, totidem arcus exhibentes, eidem sinui y respondent.

III.

Sit nunc sinus y infinite parvus, seu $= 0$, erit utique primus arcus x sinui y æqualis, seu etiam $= 0$, ipsaque æquatio, divisa per x, abibit in hanc $1 - \frac{1}{2.3}xx + \frac{1}{2.3.4.5}x^4 - \frac{1}{2.3\ldots7}x^6$ + &c. $= 0$. Liquet autem, præter arcum illum initialem infinite parvum seu 0, qui, divisa æquatione per x, jam est sequestra-

* N°. XXI. pag. 127. *Tom. I.* † N°. CXXVII. pag. 533. *Tom. II.*

queſtratus, reliquos omnes eſſe vel ſemicircumferentiam, vel duplam ſemicircumferentiam, vel triplam, vel quadruplam, vel quintuplam, & ita in infinitum; quippe qui arcus ſinguli habent ſinum ſuum = 0. Liquet etiam, præter hos arcus nullum alium dari, qui habeat ſuum ſinum = 0.

IV.

Nominando itaque ſemicircumferentiam circuli = c; continebuntur radices omnes prædictæ æquationis in hac progreſſione, c, $2c$, $3c$, $4c$, $5c$, &c. in infinitum continuata. Ut autem æquatio iſta mutetur in aliam, quæ incipiat a maxima dimenſione litteræ incognitæ; ponamus $x = 1 : z$; adeoque $xx = 1 : zz$, $x^4 = 1 : z^4$ &c. poſitoque exponente infiniteſimo $2n$, prodibit hæc æquatio $1 - \frac{1}{2.3.} \times \frac{1}{zz} + \frac{1}{2.3.4.5} \times \frac{1}{z^4} - \frac{1}{2.3...7} \times \frac{1}{z^6} \ldots + \frac{1}{2.3.4...2n+1} \times \frac{1}{z^{2n}} = 0$; quæ multiplicata per z^{2n} dat hanc $z^{2n} - \frac{1}{2.3} z^{2n-2} + \frac{1}{2.3.4.5} z^{2n-4} - \frac{1}{2.3...7} z^{2n-6} \ldots \frac{1}{2.3.4...2n+1} = 0$.

V.

Hujus autem æquationis (quæ omnes ſuos terminos habet parium dimenſionum) radix $zz = 1 : xx$, hoc eſt = vel $1 : cc$, vel $1 : 4cc$, vel $1 : 9cc$, vel $1 : 16cc$, vel &c. Adeoque, cum ex natura æquationum algebraïcarum coëficiens ſecundi termini mutato ſigno ſit æqualis ſummæ omnium radicum, erit ſane $\frac{1}{2.3}$ ſeu $\frac{1}{6} = \frac{1}{cc} + \frac{1}{4cc} + \frac{1}{9cc} + \frac{1}{16cc} +$ &c. proinde $\frac{cc}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} +$ &c. $= \frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} +$ &c. Unde patet ſummam Seriei fractionum, quarum numeratores ſunt unitates, denominatores vero quadrata numerorum naturalium

esse subsextuplum quadrati semicircumferentiæ cujus radius = 1, vel (quod eodem recidit) subsextuplum quadrati totius circumferentiæ cujus diameter = 1.

VI.

SCHOLIUM I.

Atque ita satisfactum est ardenti desiderio Fratris mei, qui agnoscens summæ hujus pervestigationem difficiliorem esse quam quis putaverit, ingenue fassus est, omnem suam industriam fuisse elusam: Si quis *inveniat*, inquit, *nobisque communicet, quod industriam nostram elusit hactenus, magnas de nobis gratias feret.* Vid. Tractat. *de Seriebus infinitis.* p. 254. Utinam Frater superstes esset!

VII.

Simili modo inveniri potest summa Seriei fractionum, cujus, existentibus numeratoribus inter se æqualibus, denominatores procedunt ut quadrata, vel cubi, vel biquadrata, vel qualescunque potentiæ denominatorum 1, 4, 9, 16, 25, &c. hoc est, ut $1, 4^2, 9^2, 16^2, 25^2$ &c. vel ut $1, 4^3, 9^3, 16^3, 25^3$, &c. vel in genere ut $1, 4^m, 9^m, 16^m, 25^m$, &c. aut quia ipsi numeri 1, 4, 9, 16, 25 &c. sunt quadrati numerorum naturalium 1, 2, 3, 4, 5, &c. poterit inveniri summa Seriei fractionum cujus denominatores sunt quælibet potentiæ pares numerorum naturalium, nempe hujus Seriei fractionum

$$1 + \frac{1}{2^{2m}} + \frac{1}{3^{2m}} + \frac{1}{4^{2m}} + \frac{1}{5^{2m}} + \&c.$$

VIII.

Hujus investigationis fundamentum petitur ex elegantissimo Theoremate *Newtoniano*, quod sine demonstratione extat in illius *Algebra* p. 251, Edit. Lond. anni 1707: cujus autem demonstrationem ego inveni: ubi traditur modus quo ex coëficienti-

ficientibus terminorum datæ alicujus æquationis determinantur ſumma non tantum radicum, ſed & ex radicibus ſumma quadratorum, cuborum, quadrato-quadratorum &c.

IX.

Ita ejus regulæ ductu, æquationis noſtræ §. 4 expreſſæ $z^{2n} - \frac{1}{2.3} z^{2n-2} + \frac{1}{2.3.4.5.} z^{2n-4} \ldots . \frac{1}{2.3 \ldots 2n+1} = 0$, radices $\frac{1}{cc}$, $\frac{1}{4cc}$, $\frac{1}{9cc}$, &c. habebunt pro ſumma quadratorum $(\frac{1}{c^4} + \frac{1}{4^2 c^4} + \frac{1}{9^2 c^4} + \frac{1}{16^2 c^4} + \text{&c.})$ hanc quantitatem ex primo & ſecundo coëfficiente deductam $(\frac{1}{2.3})^2 - \frac{2}{2.3.4.5} = \frac{1}{36} - \frac{1}{60} = \frac{1}{90}$. Eſt itaque $1 + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{16^2} + \text{&c.}$ ſeu $1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \text{&c.} = \frac{c^4}{90}$.

X.

Sic pariter radices $\frac{1}{cc}$, $\frac{1}{4cc}$, $\frac{1}{9cc}$, $\frac{1}{16cc}$ &c. obtinebunt pro ſumma cuborum $(\frac{1}{c^6} + \frac{1}{4^3 c^6} + \frac{1}{9^3 c^6} + \frac{1}{16^3 c^6} + \text{&c.})$ hanc quantitatem ex primo, ſecundo & tertio coëfficiente, ſeu ex coëfficientibus termini ſecundi, tertii & quarti elicitam $(\frac{1}{2.3}) \times \frac{1}{90} - (\frac{1}{2.3.4.5}) \times (\frac{1}{2.3}) + \frac{3}{2.3 \ldots 7} = \frac{1}{940}$; Proinde erit $1 + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{16^3} + \text{&c.}$ ſeu $1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{2}{4^6} + \text{&c.} = \frac{c^6}{940}$.

XI.

Ex iſtis eliciemus ſummam hujus Seriei $1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \text{&c.}$

atque ita succeſſive progredi licebit ad altiores dimenſiones numerorum naturalium, modo exponentes ſint numeri pares; quomodo vero Series tractandæ ſint, ſi denominatores terminorum ſunt numeri naturales ad dimenſiones impares elevati, ex. gr. ſi hæc ſimpliciſſima proponatur Series $1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} +$ &c. cujus utique ſumma eſt finita, nondum conſtat per hanc noſtram methodum. Invitantur Analyſtæ, ut defectui ſuccurrant.

XII.

SCHOLIUM II.

Supponitur cæterum, æquationem noſtram §. 4 inventam $z^{2n} - \frac{1}{2.3} z^{2n-2} + \frac{1}{2.3.4.5.} z^{2n-4} - \ldots \frac{1}{2.3.4 \ldots 2n+1} = 0$, nullas continere radices impoſſibiles, ſeu imaginarias, nullas quoque admixtas habere (ut in ſolutione Problematum ſubinde accidit) radices peregrinas, præter illas genuinas $\frac{1}{cc}, \frac{1}{4cc}, \frac{1}{9cc}, \frac{1}{16cc}$, &c. Alias vacillaret fundamentum deſumtum ex notiſſima illa proprietate coëfficientium. Neutrum autem hic timendum eſſe, ſatis eſt probabile vel ex ipſa Seriei generatione. Cum præſertim per regulam NEWTONI traditam p. 242, ad noſtram æquationem infinitam probe applicatam, fere omnino pateat nullas in illa contineri radices impoſſibiles.

APPENDIX.

Eſto circuli radius $= 1$, tangens alicujus arcus $= t$, erit arcus cui reſpondet t, hoc eſt $\int \frac{dt}{1+tt} = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 +$ &c. Hoc jam invenit LEIBNITIUS. Sed ſine alternatione ſignorum inveni ego hanc ſeriem $\int \frac{dt}{1+tt} = \frac{t}{1.(1+tt)^1} + \frac{2t^3}{1.3.(1+tt)^2} + \frac{2.4.t^5}{1.3.5.(1+tt)^3} + \frac{2.4.6.t^7}{1.3.5.7.(1+tt)^4} +$ &c.

Poſito

Posito sinu $= x$, erit, ut dudum constat, arcus $= x + \frac{1}{2.3}x^3 + \frac{1.3}{2.4.5}x^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7.}x^7 +$ &c. Sed sine successione signorum reperi ego hanc seriem $\frac{x}{1(1-xx)^{1:2}} - \frac{x^3}{3(1-xx)^{3:2}} + \frac{x^5}{5(1-xx)^{5:2}} - \frac{x^7}{7(1-xx)^{7:2}} +$ &c. $= \int \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}} = \int \frac{dx}{(1-xx)^{1:2}}$. Hinc itaque $\int \left(\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}} \int \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}\right) = \int \frac{x\,dx}{1-xx} - \frac{1}{3}\int \frac{x^3\,dx}{(1-xx)^3} + \frac{1}{5}\int \frac{x^5\,dx}{(1-xx)^5} - \frac{1}{7}\int \frac{x^7\,dx}{(1-xx)^4} +$ &c.

Ex serie secunda fit $\int \left(\frac{dt}{1+tt} \int \frac{dt}{1+tt}\right) = \int \frac{t\,dt}{1.(1+tt)^2} + \frac{2}{1.3} \int \frac{t^3\,dt}{(1+tt)^3} + \frac{2.4}{1.3.5} \int \frac{t^5\,dt}{(1+tt)^4} + \frac{2.4.6}{1.3.5.7.} \int \frac{t^7\,dt}{(1+tt)^5} +$ &c. cujus singuli termini sunt integrabiles. Si vero, post integrationem peractam & more solito rectificatam, ponatur $t = \infty$; prodibit ista Series $\frac{1}{1.2} + \frac{2}{1.3.4} + \frac{2.4}{1.3.5.6} + \frac{2.4.6}{1.3.5.7.8} +$ &c. cujus adeo summa (posita semicircumferentia $= c$) erit $= \frac{1}{8}cc$.

N°. CLIII.

PROBLEMA.

Maximum terminum binomii ad quamcunque dimensionem elevati invenire.

SIT $a + b$ binomium, & c numerus dimensionis; erit $(a+b)^c = a^c + \frac{c}{1}a^{c-1}b + \frac{c.(c-1)}{1.2.}a^{c-2}bb + \frac{c.(c-1).(c-2)}{1.2.3.}a^{c-3}b^3$; Quæritur maximus hujus Seriei terminus?

Hic ibi erit, ubi duo subsequentes sunt æquales. Sit igitur numerus quotus termini quæsiti $= x$, & quia subsequens

huic debet esse æqualis, dividatur subsequens per antecedentem, & proveniet ex natura Seriei $\frac{c-x+1}{x} \times \frac{b}{a}$; quod erit (ob æquale divisum per æquale) æquale unitati, id, quod hanc format æqualitatem $\frac{cb-bx+b}{ax} = 1$, vel $cb - bx + b = ax$; Ergo $x = \frac{cb+b}{a+b}$ = numero quoto termini maximi quæsiti. *Q. E. I.*

Hinc si $\frac{cb+b}{a+b}$ est numerus integer, duo erunt termini maximi; nam subsequens invento est æqualis. Sin autem $\frac{cb+b}{a+b}$ non est numerus integer; erunt duo termini subsequentes quidem æquales; sed, ob numerum quotum non integrum, neuter in Serie existet, ideoque unicus erit maximus terminus; nempe ille qui inter utrumque imaginarium includitur: proinde numerus fractus $\frac{cb+b}{a+b}$ ad proximam unitatem augendus est, ad habendum verum numerum quoti termini maximi quæsiti.

EXEMPLUM.

Sit $a = 2$, $b = 6$, $c = 7$, erit $\frac{cb+b}{a+b} = 6$ = numero integro, quod indicio est 6^{tum} & 7^{mum} terminum esse maximos, utpote æquales. Si vero $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$, erit $\frac{cb+b}{a+b} = \frac{24}{7} = 3\frac{3}{7}$ = numero non integro; quod denotat quartum terminum, eumque solum, esse maximum. Sic si $a = 2$, $b = 1$, $c = 6$, erit $\frac{cb+b}{a+b} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$; ideoque maximus terminus erit tertius.

PRO-

PROBLEMA.

Data progressione arithmetica, ab unitate incipiente, & eo modo disposita quo hic vides; invenire Seriem transversalem, cujus summa omnium sit maxima.

1 2 3 4 5 6
7 8 9 10 11
12 13 14 15
16 17 18
19 20
21

Sit numerus terminorum primæ Seriei transversalis $= a$, numerus quotus Seriei quæsitæ $= x$. Ex natura progressionis arithmeticæ, primi & ultimi Serierum transversalium, sic se habebunt.

$1, 2, 3, 4 \ldots\ldots\ldots\ldots a$
$a+1, \ldots\ldots\ldots\ldots 2a-1$
$2a \ldots\ldots\ldots\ldots 3a-3$
$2a-2 \ldots\ldots\ldots\ldots 4a-6$
$4a-5 \ldots\ldots\ldots\ldots 5a-10$
$\vdots$
$ax-a-\frac{xx+3x}{2} \ldots\ldots ax-\frac{xx+x}{2}$

Est autem numerus terminorum Seriei quæsitæ $= a-x+1$; ergo summa Seriei quæsitæ erit $= (x^3-3axx-3xx+2aax+5ax+2x-aa-a):2$, & posito $x+1$ loco x, proveniet summa Seriei subsequentis $= (x^3-3axx+2aax-ax-x+aa+a):2$. Si itaque, ad modum præcedentem, æquatio instituatur inter has duas quantitates, invenietur $x = a+\frac{1}{2}-\sqrt{(\frac{1}{3}aa+\frac{1}{3}a+\frac{1}{4})}$. Sic si hæc quantitas est numerus integer, erunt duæ Series transversales maximæ: Sin minus, quantitas inventa ad proximam unitatem augenda est, & unica erit Series transversalis maxima.

N°. CLIV.

DE ALEA, SIVE ARTE CONJECTANDI,

PROBLEMATA QUÆDAM.

PROBLEMA I.

ALiquot Colluſores teſſera ludunt, quorum primus certum numerum jactuum habet; quæritur quot jactus ſecundo, tertio, quarto, quinto adjudicandi ſint ante ludum, ita ut ſors ſingulorum fiat æqualis?

Sit numerus facierum teſſeræ quibus obtinetur $= a$, & numerus facierum quibus perditur $= b$, numerus jactuum primi Colluſoris $= c$, numerus Colluſoris quoti $= n$, & numerus jactuum Colluſoris quoti, una cum jactibus præcedentium $= x$. In uno jactu ſunt a caſus ad obtinendum, & b ad perdendum; ergo ſors unius jactus $= \frac{a}{a+b}$. In primo duorum jactuum ſunt a caſus ad obtinendum, & b ad perveniendum ad ſortem $\frac{a}{a+b}$; ergo ſors duorum jactuum $= \frac{ab}{(a+b)^2} + \frac{a}{a+b}$. In primo trium jactuum ſunt a caſus ad 1, & b ad $\frac{ab}{(a+b)^2} + \frac{a}{a+b}$; ergo ſors trium jactuum $= \frac{abb}{(a+b)^3} + \frac{ab}{(a+b)^2} + \frac{a}{a+b}$. Eodem modo habetur ſors quatuor jactuum $= \frac{ab^3}{(a+b)^4} + \frac{abb}{(a+b)^3} + \frac{ab}{(a+b)^2} + \frac{a}{a+b}$. Et ſors c jactuum $= \frac{ab^{c-1}}{(a+b)^c} + \frac{ab^{c-2}}{(a+b)^{c-1}} \ldots\ldots \frac{a}{a+b} =$ (quia eſt progreſſio geometrica) $1 - b^c : (a+b)^c =$ ſorti primi Colluſoris. Pari ratione erit

erit fors x jactuum $= 1 - b^x : (a+b)^x$; quia autem singulorum Colluſorum ſors eadem ponitur, erit $1 - b^x : (a+b)^x = n - nb^c : (a+b)^c$, aut $1 - n + nb^c : (a+b)^c = b^x : (a+b)^x$; ideoque Log. $(1 - n + nb^c : (a+b)^c) = x\,lb - x\,l(a+b)$; ideoque $x = l(1 - n + nb^c : (a+b)^c) : (lb - l(a+b))$, a quo ſi auferatur numerus jactuum præcedentium [qui habetur ponendo $n - 1$ pro n] reſtabit

$$\frac{l(2 - n + (n-1)b^c : (a+b)^c) - l(1 - n + nb^c : (a+b)^c)}{l(a+b) - lb}$$

$=$ numero jactuum quæſito.

ALITER.

Quoniam tantundem eſt, & eadem expectatio habetur, ſi unica teſſera aliquot jactus inſtituendi ſint, quam cum totidem teſſeris unicus jactus eſt faciendus; ponatur loco numeri jactuum primi Colluſoris numerus teſſerarum $= c$, & loco numeri jactuum Colluſoris quoti una cum jactibus præcedentium, numerus teſſerarum $= x$. Patet ex Arte combinandi, quod c teſſeræ (ob $a+b$ facies unius teſſeræ) variari poſſint $(a+b)^c$ caſibus, & b^c caſibus quibus nulla facies ipſarum a cadit, id eſt, quibus perditur; ideoque ſunt $(a+b)^c - b^c$ caſus quibus obtinetur: Invenitur ergo ſors Colluſoris primi $= ((a+b)^c - b^c) : (a+b)^c = 1 - b^c : (a+b)^c$, ut ante. Pariter erit ſors x jactuum $= 1 - b^x : (a+b)^x$; reliqua peraguntur ut prius.

PROBLEMA II.

Datis faciebus a + b *unius tesseræ; quæritur quot vicibus cum unica tessera, seu, quod tantundem est, quot tesseris unica vice aliquis suscipere possit ut jaciat unam, duas,* 3, 4, &c. n, *ex faciebus a.*

Esto numerus tesserarum $= x$, erunt $(a+b)^x$ casus quibus x tesseræ variari possunt, b^x casus quibus nulla facies ipsarum a cadit, $\frac{x}{1} b^{x-1} a^1$ casus quibus una, $\frac{x.(x-1).}{1.2}$ $b^{x-2} a^2$ casus quibus duæ, $\frac{x.(x-1).(x-2)}{1.2.3} b^{x-3} a^3$ quibus tres &c. Si itaque unam ex faciebus a jacere debeat; erunt $(a+b)^x - b^x$ casus quibus lucratur: si duas, $(a+b)^x - b^x - \frac{x}{1} b^{x-1} a$ casus: si tres, $(a+b)^x - b^x - \frac{x}{1} b^{x-1} a - \frac{x.(x-1)}{1.2} b^{x-2} a^2$ casus; si n facies suscipiantur; erunt $(a+b)^x - b^x - \frac{x}{1} b^{x-1} a - \frac{x.(x-1)}{1.2} b^{x-2} a^2 \ldots\ldots - \frac{x(x-1)\ldots(x-n+2)}{1.2.3\ldots n-1} b^{x-n+1} a^{n+1}$ casus; ideoque si quæratur fors, erit illa $= \frac{1}{2}$; quod hanc dabit æquationem $-\frac{1}{2} + (a+b)^x - b^x - \frac{x}{1} b^{x-1} a^1 - \frac{x.(x-1)}{1.2} b^{x-2} a^2$ &c. $= 0$. *Q. E. I.*

PROBLEMA III.

Petrus & Paulus, *quorum dexteritates sint æquales inter se, datis globis numero* p & q *certent; jam post ludos aliquot peractos desint* Petro *ludi* f *quominus victor evadat*, Paulo *vero desint ludi* g. *Quæritur ratio inter ipsorum sortes?*

Solutio

Solutio ex ſequenti tabella habetur. Eſto $p+q=m$

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{p.(p-1).(p-2)....(p-f+1)}{m.(m-1)....(m-f+1)}\,1+\frac{q.(q-1).(q-2)...(q-g+1)}{m.(m-1)....(m-g+1)}\,o\\
\frac{pq.(p-1).(p-2)...(p-f+2)}{m.(m-1)....(m-f+1)}\,A+\frac{pq.(q-1).(q-2)...(q-g+2)}{m.(m-1)....(m-g+1)}\,\alpha\\
\frac{pq.(p-1).(p-2)...(p-f+3)}{m.(m-1)....(m-f+2)}\,B+\frac{pq.(q-1).(q-2)...(q-g+3)}{m.(m-1)....(m-g+2)}\,\mathfrak{G}\\
\frac{pq.(p-1).(p-2)...(p-f+4)}{m.(m-1)....(m-f+3)}\,C+\frac{pq.(q-1).(q-2)...(q-g+4)}{m.(m-1)....(m-g+3)}\,\gamma\\
\vdots\qquad\qquad\vdots\\
\frac{pq}{m.(m-1)}\,X\qquad\qquad\frac{pq}{m.(m-1)}\,\xi
\end{array}\right\}=\text{Expectationi }Petri$$

NB. Intelligo per A, B, C, D, &c. expectationes *Petri* cum ipſi deſunt ludi 1, 2, 3, 4 &c. & *Paulo* ludi g; & per α, $\mathfrak{G}$, γ, δ &c. expectationes *Petri*, cum ipſi deſunt ludi f, & *Paulo* ludi 1, 2, 3, 4 &c.

PROBLEMA IV.

Petrus *ludit cum* Paulo *teſſeris*, *hac conditione*, *ut ſi medium arithmeticum proportionalem jaciat inter maximum & minimum jactum*, *vel ſi plura puncta jaciat quam iſte medius proportionalis*, *ille lucretur*; *ſin minorem jactum faciat*, *lucretur* Paulus. *Quæritur ratio ſortium* ?

SOLUTIO.

Si numerus teſſerarum eſt impar quicunque, liquet ſortes inter ſe eſſe æquales. Si vero ſit par, ſit ille $=2n$, ita ut numerus caſuum, quibus jactus omnes variare poſſunt, ſit 6^{2n}; inter hos erunt $\frac{(7n-1).(7n-2).(7n-3).....(5n+1)}{1.2.3.4.....(2n-1)}$

casus, quibus medius arithmeticus inter extremos cadere potest; adeoque sors *Petri* est ad sortem *Pauli* ut $6^{2n} + \frac{(7n-1).(7n-2)....(5n+1)}{1.2.3....(2n-1)}$ ad $6^{2n} - \frac{(7n-1).(7n-2)...(5n+1).}{1.2.3...(2n-1)}$;

PROBLEMA V.

Duo ludores A & B ludunt una tessera, hac conditione, ut A tres jactus faciat continuos, numeretque puncta quæ tribus istis jactibus jecerit in unam summam; B vero tot faciat jactus quot puncta A primo jactu jecerit, omnia jacta puncta pariter collecturus in unum: Qui autem majorem punctorum summam habuerit, ille lucrabitur; Quod si vero utriusque punctorum numerus sit æqualis, tunc depositum bipartientur. Quæritur ratio sortis utriusque?

R. Sors A est ad sortem B ut 4200563 ad 5877133.

PROBLEMA VI.

Cateris positis ut prius, sit æqualem uterque habuerint punctorum summam, tunc etiam A vincet. Quæritur sortium ratio?

R. Sors A est ad sortem B ut 282571 ad 347285.

PROBLEMA. VII.

Dato numero Electorum, qui sit multiplex ternarii, non tamen minor senario; Duo autem ex Electoribus A & B se declaraverint faventes alicui ex Candidatis C. Quæritur quantam spem habeat C, seu quænam sit probabilitas, ut A & B in unam eandemque trium Electorum classem per sortem collocentur.

SOLUTIO.

Sit numerus Electorum $= 6 + 3n$. Dico probabilitatem quæsitam fore $= \frac{1+n}{5+3n}$; Hoc est probabilitas ut A & B in eadem classe conjungantur, est ad probabilitatem eventus contrarii ut $1+n$ ad $4+2n$.

COROL-

COROLLARIUM I.

Si 6 sint Electores, erit ratio expectationis ad metum siniſtri ſucceſſus, ut 1 ad 4.

COROLLARIUM II.

Si numerus Electorum eſſet infinitus, foret illa ratio ut 1 ad 2.

COROLLARIUM III.

Hinc quo major eſt Electorum numerus, eo favorabiliorem expectationem habet *C.* Quod paradoxum eſſe videtur.

N°. CLV.

GEOMETRICA.

PROPOSITIO I.

THEOREMA.

Si per quodvis punctum A *in Triangulo quovis rectilineo* BCD *ex ſingulis angulis ducantur rectæ ad latera oppoſita; erunt ſolida ex tribus laterum ſegmentis, non contiguis, facta inter ſe æqualia; nempe* CF×DE×BG=DF×CG×BE. TAB. LXXVII. *Fig.* 1.

DEMONSTRATIO.

Producta BF, agantur DH & CI parallelæ ipſis AC & AD. Jam, ob ſimilia Triangula ACI, HDA, ut & AFC, HFD, erit CF:FD=AI:AH=AI:AB[CG:GB]+AB:AH[BE:ED]; id eſt, CF:FD=CG×BE:BG×DE. Ergo CF×BG×DE=DF×CG×BE. *Q. E. D.*

PROPOSITIO II.

PROBLEMA.

Datis in peripheria circuli duobus punctis A *&* B, *invenire tertium quoddam in illa, ut* C, *ita ut ductis* AC, BC *&* *perpendiculari* BD, *lineæ* AD *&* BD *simul sumtæ sint æquales lineis* BC *&* DC *simul sumtis.*

SOLUTIO.

TAB. LXXVII. *Fig.* 2.

Ducatur subtensa AB, biseceturque illa in H, & per punctum H agatur diameter HI, voceturque AH, vel HB $= a$, GH $= c$, radius FG $= b$, HE $= x$; erit AE $= \sqrt{(aa+xx)}$. Nunc, ob similia Triangula AHE & ABD, est AE $[\sqrt{(aa+xx)}]$: AH $[a]$ = AB $[2a]$: AD $[\frac{2aa}{\sqrt{(aa+xx)}}]$, & AH $[a]$: HE $[x]$ = AD $[\frac{2aa}{\sqrt{(aa+xx)}}]$: BD $[\frac{2ax}{\sqrt{(aa+xx)}}]$. Quia GE $= c+x$, & IE $= 2b-c-x$, erit rectangulum GEI $= 2bc+2bx-cc-2cx-xx$ = rectangulo AEC, proinde $\frac{2bc+2bx-cc-2cx-xx}{\sqrt{(aa+xx)}}$ = EC, & $\frac{2bc+2bx-cc-2cx-xx}{\sqrt{(aa+xx)}} + \sqrt{(aa+xx)} = \frac{aa+2bc+2bx-cc-2cx}{\sqrt{(aa+xx)}}$ = AC. Ergo AC $-$ AD $[DC] = \frac{-aa+2bc+2bx-cc-2cx}{\sqrt{(aa+xx)}}$; & BD^2 $[\frac{4aaxx}{aa+xx}]$ + DC^2 $[(a^4+4bbcc+4bbxx+c^4+4ccxx-4aabc-4aabx+2aacc+4aacx+8bbcx-4bc^3-12bccx-8bcxx+4c^3x):(aa+xx)]$ = BC^2. Jam autem quia AD + BD debet esse = BC + DC, erit etiam AD + BD $-$ DC = BC, id est, $(3aa+2ax-2bc-2bx+cc+2cx):\sqrt{(aa+xx)} = \sqrt{(4aaxx+a^4+4bbcc+4bbxx+c^4+4ccxx-4aabc-4aabx+2aacc+4aacx+8bbcx-4bc^3-12bccx-8bcxx+4c^3x):\sqrt{(aa+xx)}}$.

Abjecto

Abjecto communi denominatore, ſumantur numeratorum quadrata, erit,

$$\begin{array}{llll} +4aaxx & -4aabx & +a^4 & \\ +4bb & +4aac & +c^4 & \\ +4cc & +8bbc & +4bbcc & = \\ -8bc & -12bcc & -4aabc & \\ & +4c^3 & +2aacc & \\ & & -4bc^3 & \end{array} \quad \begin{array}{llll} 4aaxx & +12a^3x & +9a^4 & \\ +4bb & -12aab & +c^4 & \\ +4cc & +12aac & +4bbcc & \\ -8ab & -8abc & -12aabc & \\ +8ac & +4acc & +6aacc & \\ -8bc & +8bbc & -4bc^3 & \\ & -12bcc & & \\ & +4c^3 & & \end{array}$$

Reducta hac æquatione, provenit $xx = \left\{ \begin{array}{ll} -3a^2x & -2a^3 \\ +2ab & +2abc \\ -2ac & -acc \\ +2bc & \\ -cc & \end{array} \right\} : (2c-2b)$.

Ut autem hæc æquatio paucioribus literis & terminis habeatur, quæratur valor ipſius b, & quidem ſic: IHG rectangulum $=$ AH^2, id eſt $2bc - cc = aa$, proinde $b = (aa+cc) : 2c$; ſi itaque loco b, ſubſtituatur valor hic inventus, habebitur $xx = ((a^3 - 2aac - acc)x - a^3c) : (cc - aa)$ & $x = (\frac{1}{2}a^3 - aac - \frac{1}{2}acc + \sqrt{(\frac{1}{4}a^6 + \frac{1}{2}a^4cc + \frac{1}{4}aac^4)}) : (cc - aa)$; aut, quia ex poſteriori quantitate radix poteſt extrahi, fit $x = (a^3 - aac) : (cc - aa)$ & $x = (-acc - aac) : (cc - aa)$, vel dividatur numerator & denominator prioris per $a - c$, & poſterioris per $-a - c$, proveniet $x = aa : (-a - c)$ & $x = ac : (a - c)$. Ubi notandum eſt quod prior radix inventa valeat, ſi punctum C quæratur in minori arcu AGB, poſterior autem, ſi idem illud in majori AIB.

CONSTRUCTIO.

Sumatur HK $=$ HG ad utramque partem, & agatur KL parallela ipſi HG, & quidem in priori caſu ſurſum & æqualis ipſi AH, in poſteriori deorſum & æqualis HG; perque puncta L ducantur lineæ AC; deſignabunt hæ lineæ in periphe-

ria Circuli duo puncta C, adeo ut, ductis BC & perpendicularibus BD, sint AD + BD = BC + DC.

PROPOSITIO III.

PROBLEMA.

TAB. LXXVII. *Fig.* 3. *In data linea* BF *ad diametrum Circuli* GH *perpendiculari ; invenire punctum* F *ita comparatum , ut ducta* FC *tangens Circulum sit æqualis lineæ* CD *perpendiculari ad eandem diametrum.*

SOLUTIO.

Intelligatur ductam esse AC, & CE parallelam diametro GH; voceturque radius circuli AC = a, AB = b, & AD = x, erit DC = $\sqrt{(aa - xx)}$. Quia nunc angulus ACF est rectus, ob tangentem CF, & angulus DCE etiam rectus, ob CE parallelam GH ; erit, ablato communi ACE, reliquus ACD = reliquo FCE : est autem CDA = CEF, utpote uterque rectus ; erunt ideo Triangula ADC & CEF similia ; proinde AC[a] : DC[$\sqrt{(aa - xx)}$] = CF[$\sqrt{(aa - xx)}$] : CE seu DB[$(aa - xx) : a$] = $b + x$; erit reducendo æquationem $xx = -ax - ab + aa$, & $x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}aa - ab)}$.

PROPOSITIO IV.

PROBLEMA.

TAB. LXXVII. *Fig.* 4. *Si a puncto quodam peripheriæ Circuli , ut* B, *infinitæ ducantur lineæ* BF, *arcusque* BF, *quos subtendunt , bisecentur in* D, *& a punctis bisectionis agantur lineæ* DE, *parallelæ diametro* BA, *donec occurrant lineis* BF *in* E ; *invenire naturam curvæ , quam puncta* E *describunt ?*

SOLU-

SOLUTIO.

Ducatur AD ex centro A, & EC perpendicularis ad BA: Sit radius AB = a, BC = x, & CE = y. Quia nunc arcus BF per hypotheſin biſectus eſt in D, erit AD perpendicularis ad BF; proinde Triangula AGB & ACH ſunt ſimilia: eſt autem Triangulum AGB etiam ſimile Triangulo BCE; ergo Triangulum ACH eſt ſimile Triangulo BCE, ideoque EC [y]: CB [x] = AC [$a - x$]: CH [$(ax - xx) : y$]. Quia vero Triang. ACH & DHE etiam ſunt ſimilia, erit EH: HC = DH: HA & *componendo* EC [y]: HC [$(ax - xx) : y$]. DA [a]: HA [$(aax - axx) : yy$]. Nunc iterum CH [$(ax - xx) : y$]: HA [$(aax - axx) : yy$] = $1 : \frac{a}{y}$ = BC [x]: BE [$ax : y$], cujus quadratum BE^2 [$aaxx : yy$] = BC^2 [xx] + CE^2 [yy] & $aaxx = xxyy + y^4$, tandemque $y^4 + xxyy - aaxx = 0$.

PROPOSITIO V.

PROBLEMA.

Si a puncto quodam peripheriæ Circuli ut B, *infinitæ ducantur lineæ* BF, *arcuſque* BF *quos ſubtendunt biſecentur in* D, *& a punctis biſectionis demittantur lineæ* DC *normales ad diametrum* BA, *quæ lineas* BF *ſecent in* E; *invenire naturam Curvæ quam puncta* E *deſcribunt?* TAB. LXXVII. *Fig.* 5.

SOLUTIO.

Ducatur AD ex centro A, & DC perpendicularis ad BA (ut prius): Sit radius AB = a, BC = x, & CE = y. Quia nunc arcus BF per hypotheſin biſectus eſt in D, erit AD perpendicularis ad BF, Triangula BCE & AHB ſunt ſimilia; eſt autem Triangulum AHB ſimile Triangulo ACD; Ergo Triangulum BCE eſt ſimile Triangulo ACD, ideo-

que CE [y] : BC [x] = AC [$a - x$] : CD [$(ax - xx) : y$] cujus quadratum CD^2 [$(aaxx - 2ax^3 + x^4) : yy$] = rectang. BCG [$2ax - xx$] & $aaxx - 2ax^3 + x^4 = 2axyy - xxyy$. Divisum utrumque per x, erit $aax - 2axx + x^3 = 2ayy - xyy$; tandemque $x^3 - 2axx + aax + yyx - 2ayy = 0$.

PROPOSITIO VI.

PROBLEMA.

TAB. LXXVII. *Fig.* 6.

Data in dato Circulo ABC *subtensa* AC; *invenire in majoris segmenti peripheria punctum* B, *ita ut ducta per centrum* D *linea* BDH, *terminata a subtensa* AC, *sit media proportionalis inter ductas* BA *&* BC.

SOLUTIO.

Sit BD vel DG = a, AF vel FC = b, DF = $\sqrt{(aa - bb)} = c$, DH = x, FH = $\sqrt{(xx - cc)}$. Quia nunc HD : DB = HF : FE, erit FE = $\sqrt{(xx - cc)}\, a : x$ & AE = $(bx - a\sqrt{(xx - cc)}) : x$ & EC = $(bx + a\sqrt{(xx - cc)}) : x$, quia etiam HD : DF = HB : BE, erit BE = $(cx + ac) : x$, est autem AE^2 + EB^2 = AB^2, & EC^2 + BE^2 = BC^2; erit ergo AB = $\sqrt{((aax + bbx + ccx + 2acc - 2ab\sqrt{(xx - cc)}) : x)}$ & BC = $\sqrt{((aax + bbx + ccx + 2acc + 2ab\sqrt{(xx - cc)}) : x)}$. Substituatur utrobique valor ipsius $cc = aa - bb$, & habebitur AB = $\sqrt{((2aax + 2a^3 - 2abb - 2ab\sqrt{(xx - aa + bb)}) : x)}$ & BC = $\sqrt{((2aax + 2a^3 - 2abb + 2ab\sqrt{(xx - aa + bb)}) : x)}$. Quoniam itaque debet esse AB : BH = BH : BC, erit rectangulum ABC = BH^2, id est $\sqrt{(4a^4xx - 4aabbxx + 8a^5x - 8a^3bbx + 4a^6 - 4a^4bb) : x} = aa + 2ax + xx$. Multiplica utrumque per x, & divide per $x + a$, & invenies $xx + ax = \sqrt{(4a^4 - 4aabb)}$ & $xx = -ax + \sqrt{(4a^4 - 4aabb)}$; ergo erit $x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}aa + \sqrt{(4a^4 - 4aabb)})}$.

Idem

Idem PROBLEMA *faciliori modo ſolvere.*

Serventur eædem litteræ quæ prius, videlicet DB = *a*, DF = *c*, DH = *x*, & ducatur CG; ideoque erit angulus BCG = recto = BEA & BGC = BAE, quia inſiſtunt eidem ſegmento BC, proinde Triangula ABE & BGC ſimilia ſunt, idcirco AB: BE = BG: BC; hincque rectangulum ABC = EBG; ſed eſt HD: DF = HB: BE, id eſt $x : c = x + a : \frac{ac+cx}{x}$ = BE, ideoque rectangulum EBG = $(2aac + 2acx) : x$ = ABC. Hoc autem æquale debet eſſe BH^2, erit ergo $(2aac + 2acx) : x = aa + 2ax + xx$; multiplica utrumque per *x*, & divide per $a + x$, habebis $xx + ax = 2ac$, proinde $x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}aa + 2ac)}$. TAB. LXXVII. *Fig.* 7.

CONSTRUCTIO.

Producatur diameter OI ad K, ita ut IK ſit = DF, & diametro OK deſcribatur circulus KLO, cujus peripheriæ occurrat recta IL tangens circulum ICO in I, & a medio ipſius DI puncto M applicetur MN = ductæ ML, radioque DN deſcribatur circulus HNH ſecans ſubtenſam AC in punctis H, H; per quæ & per centrum D, ſi ducantur rectæ HDB, deſignabunt in peripheria puncta B quæſita, ut videlicet BH ſit media inter ductas BA, BC.

DEMONSTRATIO.

Quia NM = ML, erit NM^2 [$ND^2 + DM^2 + NDI$] = ML^2 [$MI^2 + IL^2$], & ablatis æqualibus, erit $ND^2 + NDI = IL^2$ = KIO; eſt autem $ND^2 + NDI$ = IND = BHD; ergo BHD = KIO, ideoque DH: KI vel FD [BH: BE] = IO: BH; proinde BH^2 = BE × IO = EBG = ABC [ut in analyſi demonſtratur]; ergo AB: BH = BH: BC. *Q. E. D.*

PROPOSITIO VII.

PROBLEMA.

TAB. LXXVII. *Fig.* 8. *Quæritur natura curvæ* ABCG, *ut ducta a puncto dato* D *utcunque recta* DBC, *intercepta inter puncta intersectionis* BC *sit semper æqualis constanti.*

Sit BC $=1$, DB $=x$, BE $=y=a+bx+cx^2+cx^3+fx^4+gx^5+hx^6$ &c. Quoniam igitur DB: DC $=$ BE: CF erit CF $=a:x+a$
$+b+bx$
$+cx+cxx$
$+exx+ex^3$
$+fx^3+fx^4$
$+gx^4+gx^5$
$+hx^5+hx^6$ &c. &;

ob identitatem relationis duorum punctorum in curva ad puncta in axe erit etiam CF $=+a$
$+b+bx$
$+c+2cx+cxx$
$+e+3ex+3exx+ex^3$
$+f+4fx+6fxx+4fx^3+fx^4$
$+g+5gx+10gxx+10gx^3+5gx^4+gx^5$
$+h+6hx+15hxx+20hx^3+15hx^4+6hx^5+hx^6$
&c.

Ergo, comparando dimensiones æquales, invenietur pro coëfficientibus $a=0$, $c+e+f+g+h=0$, $c+3e+4f+5g+6h=0$, $2e+6f+10g+15h=0$, $3f+10g+20h=0$, $4g+15h=0$, $5h=0$. Quoniam autem provenit $h=0$, erunt pariter omnes aliæ litteræ $=0$, quod indicio est, hoc modo Problema non posse solvi. Ponatur ergo punctum D inter A &

A & G; erit, cæteris positis ut prius, ob DB : DC = BE : CF = $a : x - a$
$+b - bx$
$+cx - cxx$
$+exx - ex^3$
$+fx^3 - fx^4$
$+gx^4 - gx^5$
$+hx^5 - hx^6$
&c.

=, ob identitatem relationis punctorum in curva,
$+a$
$+b - bx$
$+c - 2cx + cxx$
$+e - 3ex + 3exx - ex^3$
$+f - 4fx + 6fxx - 4fx^3 + fx^4$
$+g - 5gx + 10gxx - 10gx^3 + 5gx^4 - gx^5$
$+h - 6hx + 15hxx - 20hx^3 + 15hx^4 - 6hx^5 + hx^6$
&c.

unde comparando dimensionum æqualium coëfficientes, reperientur $a = 0$, $c + e + f + g + h = 0$, $-3c - 3e - 4f - 5g - 6h = 0$, $+2c + 2e + 6f + 10g + 15h = 0$, $-5f - 10g - 20h = 0$, $+2f + 4g + 15h = 0$, $-7h = 0$, $-2h = 0$; Ex quo concluditur litteras b, c, e, esse arbitrarias, ceteræ vero erunt $a = 0$, $f = -2c - 2e$, $g = c + e$, $h = 0$; ideoque substitutis hisce valoribus, habebitur æquatio quæsita pro natura curvæ, talis $y = bx + cxx + ex^3 - (2c - 2e)x^4 + (c + e)x^5$. Rursum inde patet, quod hæc Series continuari possit quantum placuerit, ita ut infinita genera curvarum, præter Circulum, e vestigio exhiberi possint, quæ lineas rectas per punctum quoddam datum ductas capiant æquales.

Nota, quod punctum D possit etiam, imo nonnunquam debeat esse extra A, G, sed tunc CD + DB statuitur = unitati.

Conferatur Nrus. XXX, pag. 158, *Tom. I.* ubi Solutio hujus Problematis exstat, sed sine Demonstratione.

DE ANALYSI INFINITORUM VARIA.

****

N°. CLVI.

Modus resolvendi æquationem $(ax+by)\,dx+(cx+ey)\,dy=0$, *per logarithmos circulares, sine præcedente separatione indeterminatarum.*

Conferatur Nrus. CXXXVI. *Tom. III*, pag. 108.

Ponatur $\pi\int\frac{(\alpha^2y\,dx-\alpha^2x\,dy).(\mathfrak{G}-\varepsilon)}{\alpha\alpha(x+\mathfrak{G}y)^2+(x+\varepsilon y)^2}+l(\alpha\alpha(x+\mathfrak{G}y)^2+(x+\varepsilon y)^2)=C.$

Differentietur hæc æquatio ut habeatur

$$\begin{array}{llll} +2\alpha\alpha x\,dx & +2\alpha\alpha\mathfrak{G}y\,dx & +2\alpha\alpha\mathfrak{G}x\,dy & +2\alpha\alpha\mathfrak{G}\mathfrak{G}y\,dy=0 \\ +2x\,dx & +2\varepsilon y\,dx & +2\varepsilon x\,dy & +2\varepsilon\varepsilon y\,dy \\ +(\mathfrak{G}\pi-\varepsilon\pi)\alpha^2y\,dx & +\alpha^2x\,dy.(-\mathfrak{G}\pi+\varepsilon\pi) & & \end{array}$$

Hujus termini comparentur cum terminis homogeneis æquationis propositæ; prodibunt valores litterarum assumtarum $\alpha, \mathfrak{G}, \varepsilon, \pi$; Tot enim occurrunt comparationes instituendæ, quot sunt assumtæ litteræ. Earum itaque valores, substituti in æquatione suppositа, formabunt eam convenientem æquationi propositæ &c. Supereſt ut ostendam quantitatem $\pi\int\frac{(\alpha\alpha y\,dx-\alpha\alpha x\,dy).(\mathfrak{G}-\varepsilon)}{\alpha\alpha.(x+\mathfrak{G}y)^2+(x+\varepsilon y)^2}$ exprimere arcum circuli; quod sic facio:

$$\frac{(\alpha\alpha y\,dx-\alpha\alpha x\,dy).(\mathfrak{G}-\varepsilon)}{\alpha\alpha.(x+\mathfrak{G}y)^2+(x+\varepsilon y)^2}=\frac{\frac{(\alpha\alpha y\,dx-\alpha\alpha x\,dy)}{(x+\mathfrak{G}y)^2}\times(\mathfrak{G}-\varepsilon)}{\alpha\alpha+\left(\frac{x+\varepsilon y}{x+\mathfrak{G}y}\right)^2}.$$

Est autem numerator hujus fractionis differentiale ipsius $\frac{x+\varepsilon y}{x+\mathfrak{G}y}$ multiplicatum per α^2: Quare descriptus arcus circuli radio α, cujus tangens $=\frac{x+\varepsilon y}{x+\mathfrak{G}y}$, erit $=\int\frac{(\alpha^2y\,dx-\alpha^2x\,dy).(\mathfrak{G}-\varepsilon)}{\alpha\alpha.(x+\mathfrak{G}y)^2+(x+\varepsilon y)^2}$, qui arcus π vicibus sumtus, & additus logarithmo $l(\alpha\alpha(x+\mathfrak{G}y)^2+(x+\varepsilon y)^2)$ dabit æquationem integralem propositæ canonicæ differentialis primi gradus $(ax+by)\,dx+(cx+ey)\,dy=0$.

SCHO-

N.° CLV.

Fig. 1.

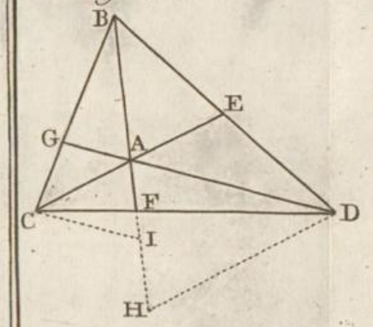


Fig. 2.

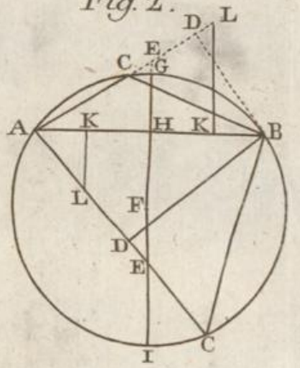


Fig. 3.

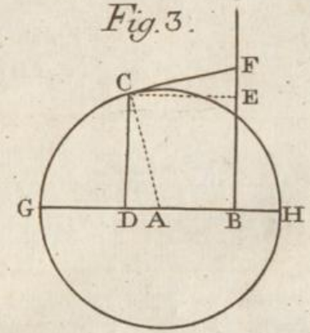


Fig. 4.

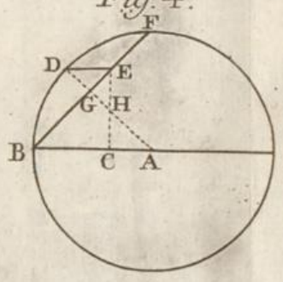


Fig. 5.

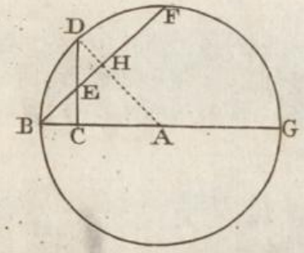


Fig. 8.

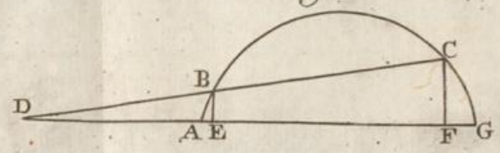


Fig. 7.

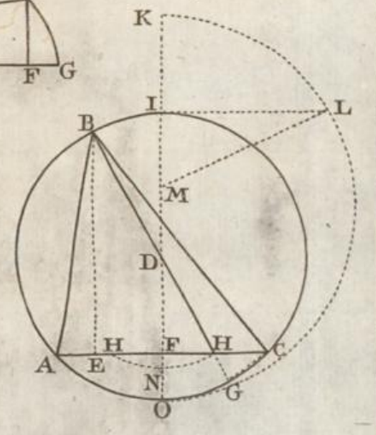
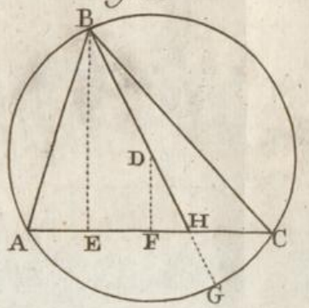


Fig. 6.



SCHOLION.

Potest, brevitatis gratia, in $(x+\varepsilon y)^2$, negligi x, & poni simpliciter $\pi \int \frac{\alpha^2 \varepsilon x dy - \alpha^2 \varepsilon y dx}{\alpha\alpha(x+\mathfrak{G}y)^2+\varepsilon\varepsilon yy} + l(\alpha\alpha(x+\mathfrak{G}y)^2+\varepsilon\varepsilon yy) = C$. Quæ differentiata dat hanc $2\alpha\alpha x dx + 2\alpha\alpha\mathfrak{G}y dx + 2\alpha\alpha\mathfrak{G}x dy + 2\alpha\alpha\mathfrak{G}\mathfrak{G}y dy = 0$
$- \pi\alpha^2\varepsilon y dx + \pi\alpha^2\varepsilon x dy + 2\varepsilon\varepsilon y dy$,
comparandam terminotenus cum $axdx + bydx + cxdy + eydy = 0$; faciendo scilicet $2\alpha\alpha = a$, $2\alpha\alpha\mathfrak{G} - \pi\alpha^2\varepsilon = b$, $2\alpha\alpha\mathfrak{G} + \pi\alpha^2\varepsilon = c$, $2\alpha\alpha\mathfrak{G}\mathfrak{G} + 2\varepsilon\varepsilon = e$. Ex prima habetur $\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}a}$, ex secunda & tertia $4\alpha\alpha\mathfrak{G} = b+c$, & $2\pi\alpha^2\varepsilon = c-b$, unde porro fluit $\mathfrak{G} = (b+c):2a$, $2\alpha\alpha\mathfrak{G}\mathfrak{G} = (b+c)^2 : 4a$, adeoque ex quarta $(b+c)^2 : 4a + 2\varepsilon\varepsilon = e$, hinc $\varepsilon^2 = (4ae - (b+c)^2) : 8a$. Quoniam vero $2\pi\alpha^2\varepsilon = c-b$, inde $\pi = (c-b) : 2\alpha^2\varepsilon = (2c - 2b) : \sqrt{(2aae - \frac{1}{2}a(b+c)^2)}$. Inveniuntur itaque litterarum assumtarum hi quatuor valores $\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}a}$, $\mathfrak{G} = (b+c):2a$, $\varepsilon = \sqrt{((4ae-(b+c)^2):8a)}$, $\pi = (2c-2b):\sqrt{(2aae - \frac{1}{2}a(b+c)^2)}$. His substitutis emergit quæsita æquatio in terminis finitis hæc
$$\frac{2c-2b}{\sqrt{(2aae-\frac{1}{2}a.(b+c)^2)}} \int \frac{\frac{1}{4}\sqrt{(2aae-\frac{1}{2}a.(b+c)^2)}.(xdy-ydx)}{\frac{1}{2}a.(x+\frac{b+c}{2a}y)^2 + \frac{4ae-(b+c)^2}{8a}yy}$$
$$+ l\tfrac{1}{2}a.(x+\frac{b+c}{2a}y)^2 + \frac{4ae-(b+c)^2}{8a}yy = C.$$
Est enim in assumta formula $\frac{\alpha^2\varepsilon x dy - \alpha^2\varepsilon y dx}{\alpha\alpha.(x+\mathfrak{G}y)^2+\varepsilon\varepsilon yy}$ idem quod $(\frac{\alpha^2\varepsilon x dy - \alpha^2\varepsilon y dx}{(x+\mathfrak{G}y)^2}) : (\alpha\alpha + \frac{\varepsilon\varepsilon yy}{(x+\mathfrak{G}y)^2})$ id quod nihil aliud est, quam elementum arcus circuli, cujus radius $= \alpha = \sqrt{\frac{1}{2}a}$, & tangens $= \frac{\varepsilon y}{x+\mathfrak{G}y}$
$= (y\sqrt{\frac{(4ae-(b+c)^2}{8a}}) : (x+\frac{b+c}{2a}y)$. Porro quantitas sub signo logarithmicali rite ordinata abit in hanc $l(\frac{1}{2}axx + \frac{(b+c)^2}{2}xy + \frac{1}{2}eyy)$; Ergo si prædictus arcus dicatur $= A$, erit æquatio finita satisfaciens canonicæ hæc $\frac{2c-2b}{\sqrt{(2aae-\frac{1}{2}a.(b+c)^2)}} \times A$
$+ l(\frac{1}{2}axx + \frac{b+c}{2}xy + \frac{1}{2}eyy) = C.$

COROLLARIUM.

Hinc liquet $4ae$ debere esse $\triangleright (b+c)^2$ ut hæc methodus succedat. Altera vero, quæ per meros logarithmos peragitur requirit contrarium, ut nimirum $4ae$ sit $\triangleleft (b+c)^2$: adeoque quodlibet particulare exemplum per alterutram methodum solvi potest, excepto unico casu quo $4ae = (b+c)^2$. Hunc autem in scripto *Petropolin* missso §. 19 *, peculiari modo solutum dedi, monstrans eum lineæ rectæ convenire.

Applicatio ad Exemplum de curva velocitatum in Cycloide. Vid. Nus. CLXXXIII, infra.

Æquatio hujus curvæ est $sds - gvds + vdv = 0$. Supponendo igitur $x = s$ & $y = v$, erit hic $a = 1$, $b = -g$, $c = 0$, $e = 1$. Quibus substitutis in æquatione finita generali, prodit $\frac{2g}{\sqrt{(2-\frac{1}{2}gg)}} \times A + l(\frac{1}{2}ss - \frac{1}{2}gsv + \frac{1}{2}vv) = C$, quæ evanescente v, dat $\frac{2g}{\sqrt{(2-\frac{1}{2}gg)}} \times 0 + 2la - l2 = C$, quia tangens arcus A etiam evanescit, & s evadit = longitudini totius descensus, quam vocavi a, sicuti longit. ascensus $= 6$. Unde vera æquatio correcta hæc est $\frac{2g}{\sqrt{(2-\frac{1}{2}gg)}} \times A + l(ss - gsv + vv) - 2la = 0$, quæ evanescente v & ipsa tota evanescet. Sed existente $s = 0$, tangens arcus A fit $= \frac{\sqrt{(2-\frac{1}{2}gg)}}{-g}$, ubi notandum etiamsi hic tangens sit negativa, ideo arcum ipsum non esse negativum, sed potius quadrante majorem, & affirmativum, seu complementum ad duos quadrantes ejus qui quadrante minor pro tangente habet $\frac{\sqrt{(2-\frac{1}{2}gg)}}{+g}$. Vocetur igitur hic arcus quadrante major $= Q+B$. Et erit in casu $s = 0$, $\frac{2g}{\sqrt{(2-\frac{1}{2}gg)}} \times (Q+B) + 2lv - 2la = 0$,

* N°. CXXXVI, *Tom. III*, pag. 121.

$= 0$, unde $lv = la - \frac{g}{\sqrt{(2 - \frac{1}{2}gg)}} \times (Q + B)$. Haud absimili ratiocinio concluditur, pro ascensu fore $lv = l\mathfrak{C} + \frac{g}{\sqrt{(2 - \frac{1}{2}gg)}} \times (Q - B)$; Qui duo valores consentire deprehenduntur cum illis, quos per separationem indeterminatarum invenimus *; sicuti patebit attentione facta ad id quod in uno modo assumtus sit radius $= 1$, in altero vero $= \sqrt{\frac{1}{2}}$; & quod in uno est B, id in altero sit complementum ad quadrantem.

NOTA. Poterat pro multiplo arcus simpliciter poni .... $\int \frac{\pi x dy - \pi y dx}{\alpha\alpha.(x + \mathfrak{C}y)^2 + \varepsilon\varepsilon yy}$; hic enim pariter habentur quatuor assumtæ litteræ $\alpha, \mathfrak{C}, \varepsilon, \pi$, adeoque sufficientes ad quatuor comparationes instituendas. Et ita semper invenitur tangens arcus simpli, qui aliquoties sumtus dat $\int \frac{\pi x dy - \pi y dx}{\alpha\alpha.(x + \mathfrak{C}y)^2 + \varepsilon\varepsilon yy}$. Est enim $\frac{\pi x dy - \pi y dx}{\alpha\alpha.(x + \mathfrak{C}y)^2 + \varepsilon\varepsilon yy} = \left(\frac{\pi x dy - \pi y dx}{(x + \mathfrak{C}y)^2}\right) : \left(\alpha\alpha + \frac{\varepsilon\varepsilon yy}{(x + \mathfrak{C}y)^2}\right)$ $\frac{\pi}{\alpha\alpha\varepsilon}\left(\frac{\alpha\alpha\varepsilon x dy - \alpha\alpha\varepsilon y dx}{(x + \mathfrak{C}y)^2}\right) : \left(\alpha\alpha + \frac{\varepsilon\varepsilon yy}{(x + \mathfrak{C}y)^2}\right)$. Est vero numerator hujus fractionis differentiale ipsius $\frac{\varepsilon y}{x + \mathfrak{C}y}$ multiplicatum per $\alpha\alpha$, sumtum $\frac{\pi}{\alpha\alpha\varepsilon}$ vicibus. Adeoque $\int \frac{\pi x dy - \pi y dx}{\alpha\alpha.(x + \mathfrak{C}y)^2 + \varepsilon\varepsilon yy}$ designabit arcum circuli $\frac{\pi}{\alpha\alpha\varepsilon}$ vicibus sumti, cujus radius $= \alpha$, & tangens $= \frac{\varepsilon y}{x + \mathfrak{C}y}$. Quare, si statuatur $\pi \int \frac{x dy - y dx}{\alpha\alpha.(x + \mathfrak{C}y)^2 + \varepsilon\varepsilon yy}$ $+ l(\alpha\alpha.(x + \mathfrak{C}y)^2 + \varepsilon\varepsilon yy) = C$, dabit ea differentiata,

$$\begin{array}{l} 2\alpha\alpha x dx + 2\alpha\alpha\mathfrak{C}y\,dx + 2\alpha\alpha\mathfrak{C}x dy + 2\alpha\alpha\mathfrak{C}^2 y dy = 0 \\ \quad - \pi y dx \quad + \quad \pi x dy \quad + 2\varepsilon\varepsilon y dy \end{array}$$

comparandam cum proposita $axdx + bydx + cxdy + eydy = 0$. Faciendo ergo $2\alpha\alpha = a, 2\alpha\alpha\mathfrak{C} - \pi = b, 2\alpha\alpha\mathfrak{C} + \pi = c, 2\alpha\alpha\mathfrak{C}\mathfrak{C} + 2\varepsilon\varepsilon = e$, & quærendo valores litterarum, invenietur nunc $\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}}a$, $\mathfrak{C} = (b + c) : 2a, \pi = \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}b; \varepsilon = \sqrt{(4ae - (b + c)^2)} : \sqrt{8}a$.

* N°. CLXXXIII, infra.

His ergo valoribus ſubſtitutis in formula habetur $\frac{c-b}{2}$

$$\int \frac{x\,dy - y\,dx}{\frac{1}{2}a(x+\frac{b+c}{2a}y)^2 + \frac{4ae-(b+c)^2}{8a}yy} + l\left(\tfrac{1}{2}a(x+\tfrac{(b+c)}{2a}y)^2 + \frac{4ae-(b+c)^2}{a}yy\right) = C.$$

Reliqua fiunt ut ſupra.

Propoſita jam ſit æquatio canonica ſecundi ordinis, cujus reſolutio pendeat a logarithmis partim, partim a rectificatione arcus circularis, $(axx+bxy+cyy)dx+(exx+fxy+gyy)dy=0$.

Hic jam pono hanc integralem ſatisfacere $\pi\int \frac{x\,dy-y\,dx}{\alpha\alpha.(x+\mathfrak{G}y)^2+\varepsilon\varepsilon yy} + \lambda l(x+\mu y) + l((x+\mu y)\times\alpha\alpha.(x+\mathfrak{G}y)^2+\varepsilon\varepsilon yy) = C.$ Differentiata enim dat æquationem etiam ſecundi ordinis, & adſunt ſex litteræ aſſumtæ pro totidem comparationibus inſtituendis. Adeoque reſolvetur propoſita.

Propoſita æquatio canonica tertii ordinis poſtulat, ut integralis hoc pacto ponatur: $\pi\int \frac{x\,dy-y\,dx}{\alpha\alpha.(x+\mathfrak{G}y)^2+\varepsilon\varepsilon yy} + \Phi\int \frac{x\,dy-y\,dx}{\gamma\gamma.(x+\sigma y)^2+\theta\theta yy} + l(\alpha\alpha.(x+\mathfrak{G}y)^2+\varepsilon\varepsilon yy)\times(\gamma\gamma.(x+\delta y)^2+\theta\theta yy)) = C.$ Et ita habentur octo aſſumtæ litteræ pro totidem comparationibus faciendis.

Pro canonica quarti ordinis, addenda eſt ad aſſumtam adhuc $\lambda l(x+\mu y)$. Et ita procedendum in infinitum. Hac methodo poteſt æquatio canonica $(ax+by)dx+(cx+ey)dy=0$, reſolvi per meros logarithmos, ubi rei natura hoc permittit, ut faciliori forſan modo perveniatur ad æquationem exponentialem, quam edocui in *Commentariis Petropolit.* * In hunc finem ita procedo. Fiat $\pi\int \frac{x\,dy-y\,dx}{\alpha\alpha.(x+\mathfrak{G}y)^2-\varepsilon\varepsilon yy} + l(\alpha\alpha.(x+\mathfrak{G}y)^2-\varepsilon\varepsilon yy) = C.$ Quod ſi differentietur, habebitur

$$2\alpha\alpha x\,dx + 2\alpha\alpha\mathfrak{G}y\,dx + 2\alpha\alpha\mathfrak{G}x\,dy + 2\alpha\alpha\mathfrak{G}^2 y\,dy = 0,$$
$$- \pi y\,dx + \pi x\,dy - 2\varepsilon\varepsilon y\,dy$$

compa-

* N°. CXXXV, *Tom. III*, pag. 108.

comparanda cum propoſita $axdx+bydx+cxdy+eydy=0$, ubi nulla eſt alia differentia, quam quod hic ſemper habeatur $-\varepsilon\varepsilon$ pro $+\varepsilon\varepsilon$. Faciendo ergo $2\alpha\alpha=a$, $2\alpha\alpha\mathfrak{G}-\pi=b$, $2\alpha\alpha\mathfrak{G}+\pi=c$; nunc vero $2\alpha\alpha\mathfrak{G}\mathfrak{G}-2\varepsilon\varepsilon=e$, & quærendo valores litterarum invenietur $\alpha=\sqrt{\frac{1}{2}a}$, $\mathfrak{G}=(b+c):2a$, $\pi=\frac{1}{2}c-\frac{1}{2}b$; ſed $\varepsilon=\sqrt{((b+c)^2-4ae)}:\sqrt{8a}$. His ergo valoribus ſubſtitutis in formula habetur

$$\frac{c-b}{2}\int\frac{xdy-ydx}{\frac{1}{2}a.(x+\frac{b+c}{2a}y)^2-(\frac{(b+c)^2-4ae}{8a})yy}+$$

$l(\frac{1}{2}a(x+\frac{b+c}{2a}y)^2-\frac{(b+c)^2-4ae}{8a}yy)=C$. Hinc ergo, & ex præcedentibus, patet formulam noſtram pendere ex logarithmis quotieſcunque $(b+c)^2\rhd 4ae$, ſed ex rectificatione arcus circularis quando $(b+c)^2\lhd 4ae$. In poſteriori caſu rem jam vidimus; In priori caſu vero res ita peragitur: In aſſumta expreſſione habetur $\frac{xdy-ydx}{\alpha\alpha.(x+\mathfrak{G}y)^2-\varepsilon\varepsilon yy}=(\frac{xdy-ydx}{(x+\mathfrak{G}y)^2}):(\alpha\alpha-\frac{\varepsilon\varepsilon yy}{(x+\mathfrak{G}y)^2})$

$=$ [poſito $\frac{\varepsilon y}{x+\mathfrak{G}y}=z$] $\frac{\frac{1}{\varepsilon}dz}{\alpha\alpha-zz}=\frac{1}{2\alpha\alpha\varepsilon}\times\frac{2\alpha\alpha dz}{\alpha\alpha-zz}=\frac{1}{2\alpha\alpha\varepsilon}(\frac{\alpha dz}{\alpha+z}+\frac{\alpha dz}{\alpha-z})$. Ergo integrando & multiplicando per π, prodibit $\pi\int\frac{xdy-ydx}{\alpha\alpha.(x+\mathfrak{G}y)^2-\varepsilon\varepsilon yy}=\frac{\pi}{2\alpha\varepsilon}l\frac{\alpha+z}{\alpha-z}$, & reponendo pro z ejus valorem $\frac{\varepsilon y}{x+\mathfrak{G}y}$, prodibit $\pi\int\frac{xdy-ydx}{\alpha\alpha.(x+\mathfrak{G}y)^2-\varepsilon\varepsilon yy}=\frac{\pi}{2\alpha\varepsilon}$

$l((\alpha+\frac{\varepsilon y}{x+\mathfrak{G}y}):(\alpha-\frac{\varepsilon y}{x+\mathfrak{G}y}))=\frac{\pi}{2\alpha\varepsilon}l\frac{\alpha x+\alpha\mathfrak{G}y+\varepsilon y}{\alpha x+\alpha\mathfrak{G}y-\varepsilon y}$

Adeoque ſubſtitutis pro α, $\mathfrak{G}$, ε, π eorum valoribus, habetur æquatio logarithmica hæc $\frac{c-b}{\sqrt{((b+c)^2-4ae)}}\times$

$$l\frac{x\sqrt{\frac{1}{2}a}+\frac{b+c}{2\sqrt{2a}}y+y\sqrt{((b+c)^2-4ae)}:\sqrt{8a}}{x\sqrt{\frac{1}{2}a}+\frac{b+c}{2\sqrt{2a}}-y\sqrt{((b+c)^2-4ae)}:\sqrt{8a}}+l(\frac{1}{2}a(x+\frac{b+c}{2a}y)^2$$

$$-\frac{(b+c)^2-4ae}{8a}yy)=C.$$

Quia autem $\frac{1}{2}a.\left(x+\frac{b+c}{2a}y\right)^2-\frac{(b+c)^2-4ae}{8a}yy=\left(x\sqrt{\frac{1}{2}a}+\frac{b+c}{2\sqrt{2a}}y+\frac{y\sqrt{((b+c)^2-4ae)}}{2\sqrt{2a}}\right)\times\left(x\sqrt{\frac{1}{2}a}+\frac{b+c}{2\sqrt{2a}}y-\frac{y\sqrt{((b+c)^2-4ae)}}{2\sqrt{2a}}\right)$; poterit æquatio inventa, per $\sqrt{((b+c)^2-4ae)}$ prius multiplicata ita exprimi $(c-b)\,l\left(x\sqrt{\frac{1}{2}a}+\frac{b+c}{2\sqrt{2a}}y+\frac{y\sqrt{((b+c)^2-4ae)}}{2\sqrt{2a}}\right)-(c-b)\,l\left(x\sqrt{\frac{1}{2}a}+\frac{b+c}{2\sqrt{2a}}y-\frac{y\sqrt{((b+c)^2-4ae)}}{2\sqrt{2a}}\right)+\sqrt{((b+c)^2-4ae)}\,l\left(x\sqrt{\frac{1}{2}a}+\frac{b+c}{2\sqrt{2a}}y+\frac{y\sqrt{((b+c)^2-4ae)}}{2\sqrt{2a}}\right)+\sqrt{((b+c)^2-4ae)}\,l\left(x\sqrt{\frac{1}{2}a}+\frac{b+c}{2\sqrt{2a}}y-\frac{y\sqrt{((b+c)^2-4ae)}}{2\sqrt{2a}}\right)=C$. Habebitur transfeundo a logarithmis ad numeros, $\left(x\sqrt{\frac{1}{2}a}+\frac{b+c}{2\sqrt{2a}}y+\frac{y\sqrt{((b+c)^2-4ae)}}{2\sqrt{2a}}\right)^{c-b+\sqrt{((b+c)^2-4ae)}}\times\left(x\sqrt{\frac{1}{2}a}+\frac{b+c}{2\sqrt{2a}}y-\frac{y\sqrt{((b+c)^2-4ae)}}{2\sqrt{2a}}\right)^{-c+b+\sqrt{((c+b)^2-4ae)}}=C$. Et omnia ſub parentheſibus multiplicando per $2\sqrt{2a}$; erit $(2ax+(b+c)y+y\sqrt{((b+c)^2-4ae)})^{c-b+\sqrt{((b+c)^2-4ae)}}\times(2ax+(b+c)y-y\sqrt{((b+c)^2-4ae)})^{-c+b+\sqrt{((c+b)^2-4ae)}}=C$: vel, brevitatis gratia, ſcribendo m pro $\sqrt{((b+c)^2-4ae)}$, prodit tandem hæc æquatio $(2ax+(b+c+m)y)^{c-b+m}\,(2ax+(b+c-m)y)^{-c+b+m}=C$; eodem prorſus modo ut inveni in priori Schediaſmate edito in *Comment. Petropolitanis* *.

* N°. CXXXV, *Tom. III*, pag. 120.

PROBLE-

N°. CLVII.

PROBLEMA.

Invenire conditiones separabilitatis differentialium in æquationibus hujus formæ $as^m ds + bu^q s^p ds = du$.

SOLUTIO.

Cas. 1. Si $m = p$, patet separari posse dividendo per $a + bu^q$.

Cas. 2. Fiat $u = z^\alpha$, adeoque $du = \alpha z^{\alpha-1} dz$; quibus substitutis prodit $as^m ds + bz^{\alpha q} s^p ds = \alpha z^{\alpha-1} dz$; ubi si ponatur $m = \alpha q + p = \alpha - 1$ [ut nimirum indeterminatæ s & z eundem in omnibus terminis dimensionis numerum efficiant, adeoque per regulam generalem separabiles evadant] habebitur $m = (p+q) : (1-q)$.

Cas. 3. Fiat $u = xy$, adeoque $du = x\,dy + y\,dx$; per substitutionem provenit $as^m ds + bx^q y^q s^p ds = x\,dy + y\,dx$. Ponatur $bx^q y^q s^p ds = x\,dy$, & $as^m ds = y\,dx$. Ut vero ubique æquationi satisfiat, sit $q = 1$; mutabitur prior in hanc $by s^p ds = dy$, ac proinde $bs^p ds = y^{-1} dy$; datur itaque y per s: sit ergo $y = S$; quo substituto in altera $as^m ds = y\,dx$, oritur $as^m ds = S\,dx$, adeoque $\frac{as^m}{S} ds = dx$; dabitur ergo etiam x per S, sit igitur $x = \Sigma$: unde [existente $q = 1$] erit u [xy] $= S\Sigma$. Hac methodo jam usus sum in *Actis Lipsi.* A. 1697, *p.* 115 *, pro solutione æquationis similis a Fratre meo mihi propositi.

* N°. XXXV, *Tom. I*, pag. 175.

Caſ. 4. Fiat $s = z^{\alpha}$, adeoque $ds = \alpha z^{\alpha-1} dz$; quæ ſubſtituantur, & orietur $\alpha a z^{\alpha m+\alpha-1} dz + \alpha b u^{q} z^{\alpha p+\alpha-1} dz = du$; quare ut indeterminatæ ubique eaſdem dimenſiones obtineant, ponendum eſt $\alpha m + \alpha - 1 = 0 = q + \alpha p + \alpha - 1$; ex priori habetur $m = (1-\alpha):\alpha$; ex altera vero $q = 1 - \alpha - \alpha p$; ubi notandum numerum α eſſe arbitrarium. Ex. gr. aſſumta $\alpha = \frac{1}{2}$, erit $m = 1$, & $q = (1-p):2$. Hic caſus ex ſecundo etiam deduci poteſt, atque ſi eliminetur α, ad eandem conditionem pervenietur.

Caſ. 5. Dantur etiam caſus, in quibus æquatio propoſita ad algebraicam omnino reduci poteſt. Hoc modo: $as^{m} ds + bu^{q} s^{p} ds = du = \alpha du + (1-\alpha) du$. Ponatur $as^{m} ds = \alpha du$, & $bu^{q} s^{p} ds = (1-\alpha) du$, ſeu $bs^{p} ds = (1-\alpha) u^{-q} du$; per utriuſque integrationem provenit $\frac{a}{m+1} s^{m+1} = \alpha u$, & $\frac{b}{p+1} s^{p+1} = \frac{1-\alpha}{-q+1} u^{-q+1}$; prior dat $u = \frac{a}{\alpha(1+m)} s^{m+1}$, altera vero $u = \left(\frac{b(1-q)}{(1-\alpha)(1+p)}\right)^{1:(1-q)} s^{(1+p):(1-q)}$. Ut igitur hi duo valores ipſius u identificentur, coæquandæ ſunt tam dimenſiones, quam coëfficientes; h. e. fiat $m+1 = (1+p):(1-q)$ & $a:\alpha(1+m) = \left(\frac{b(1-q)}{(1-\alpha)(1+p)}\right)^{1:(1-q)}$; unde primo habetur $m = (p+q):(1-q)$; quæ eſt eadem conditio jam *Caſ.* 2, & 4, inventa pro ſeparabilitate tantum. Secundo erit $\left(\frac{a}{\alpha.(1+m)}\right)^{1-q} = \frac{b.(1-q)}{(1-\alpha).(1+p)}$, vel ſubſtituto valore ipſius $1+m$, $\left(\frac{a.(1-q)}{\alpha.(1+p)}\right)^{1-q} = \frac{b.(1-q)}{(1-\alpha).(1+p)}$, hoc eſt $\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{1-q} \times \left(\frac{1-q}{1+p}\right)^{1-q} = \frac{b}{1-\alpha} \times \frac{1-q}{1+p}$, adeoque $\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{1-q} \times \left(\frac{1-q}{1+p}\right)^{-q} = \frac{b}{1-\alpha}$; reducta æquatione habetur

$b\,a^{1-q} = (1-a) \times a^{1-q} \times \left(\frac{1-q}{1+p}\right)^{-q} = (1-a) \times a^{1-q} \times (1-q)^{-q} \times (1+p)^{q}$. Cujus radix a determinat quæsitum.

Ex quo patet æquationem $as^m\,ds + bu^q\,s^p\,ds = du$ [quando nempe $m = (p+q) : (1-q)$,] non tantum ad separabilitatem differentialium reduci, sed omnino algebraice exprimi posse, ei quippe respondet hæc $\frac{a}{a.(1+m)}\,s^{1+m} = u$; adeo ut curva, cujus natura per dictam æquationem differentialem determinatur, esse possit ex Parabolarum genere.

ALITER ET FACILIUS.

Ponatur æquationem propositæ respondentem esse $\pi\,s^{\epsilon} = u$, erit $\epsilon\pi\,s^{\epsilon-1}\,ds = du$. Substituendo in proposita loco u^q & du ipsarum valores, mutabitur in hanc $as^m\,ds + b\,\pi^q\,s^{\epsilon q+p}\,ds = \epsilon\pi\,s^{\epsilon-1}\,ds$, h. e. $as^m + b\pi^q\,s^{\epsilon q+p} = \epsilon\pi\,s^{\epsilon-1}$; quæ ut fiant perfecte æqualia, faciendum est $m = \epsilon q + p = \epsilon - 1$, & $a + b\,\pi^q = \epsilon\pi$; ex priori venit $m = (p+q) : (1-q)$ & $\epsilon = (1+p) : (1-q)$, ut ante; altera vero $b\,\pi^q - \epsilon\pi + a = 0$, dat $b\,\pi^q + \frac{-1-p}{1-q}\pi + a = 0$, cujus radix π erit parameter Parabolæ quæsitæ: adeoque in casu quo $m = (p+q) : (1-q)$, æquationi propositæ $as^m\,ds + bu^q\,s^p\,ds = du$ satisfacit hæc algebraïca $\pi\,s^{(1+p):(1-q)} = u$.

N°. CLVIII.

FORMULÆ REDUCTIONUM.

Videantur N^ri. CXIV & CXV, *Tom. II*, pag. 402.

I. $\int \frac{dx}{(e+fx^q)^n} = \int \frac{1}{(e+fx^q)^n} \times dx = \frac{x}{(e+fx^q)^n} + nq \int \frac{fx^q\,dx}{(e+fx^q)^{n+1}}$

$= \frac{x}{(e+fx^q)^n} + nq \int \frac{e+fx^q}{(e+fx^q)^{n+1}}\,dx - nq \int \frac{e\,dx}{(e+fx^q)^{n+1}} =$

$\frac{x}{(e+fx^q)^n} + nq \int \frac{dx}{(e+fx^q)^n} - nq \int \frac{e\,dx}{(e+fx^q)^{n+1}}$: Unde $nq\,e \int \frac{dx}{(e+fx^q)^{n+1}} = \frac{x}{(e+fx^q)^n} + (nq-1) \int \frac{dx}{(e+fx^q)^n}$.

Coroll. I. Existente $nq = 1$, erit $\frac{dx}{(e+fx^q)^{n+1}}$ absolute integrabile, utpote cujus integrale $= \frac{1}{e} \times \frac{x}{(e+fx^q)^n}$.

Coroll. II. $\int \frac{dx}{(e+fx^q)^{n+1}}$ dependet a $\int \frac{dx}{(e+fx^q)^n}$, & per eandem rationem $\int \frac{dx}{(e+fx^q)^n}$ a $\int \frac{dx}{(e+fx^q)^{n-1}}$, & ita porro; usquedum, suppositio n numero integro & affirmativo, perveniatur ad $\int \frac{dx}{e+fx^q}$; a quo per consequens dependet $\int \frac{dx}{(e+fx^q)^n}$ nisi fortassis $(n-1).q = 1$; quo casu esset hoc absolute integrabile, ut & quicquid ab hoc dependet, nempe $\int \frac{dx}{(e+fx^q)^{n+m}}$.

II. $\int \frac{e\,dx}{e+fx^q} = \int \frac{e+fx^q}{e+fx^q}\,dx - \int \frac{fx^q\,dx}{e+fx^q} = x - \int \frac{fx^q\,dx}{e+fx^q}$;

adeo-

adeoque $f\int\frac{x^q\,dx}{e+fx^q}=x-e\int\frac{dx}{e+fx^q}$; hinc ergo $\int\frac{x^q\,dx}{e+fx^q}$ dependet a $\int\frac{dx}{e+fx^q}$.

III. $\int\frac{e\,dx}{(e+fx^q)^2}=\int\frac{e+fx^q}{(e+fx^q)^2}\,dx-\int\frac{fx^q\,dx}{(e+fx^q)^2}=$ $\int\frac{dx}{e+fx^q}-\int\frac{fx^q\,dx}{(e+fx^q)^2}$; unde $f\int\frac{x^q\,dx}{(e+fx^q)^2}=\int\frac{dx}{e+fx^q}-e\int\frac{dx}{(e+fx^q)^2}$; = [per primam] $\frac{1}{q}\int\frac{dx}{e+fx^q}-\frac{1}{q}\times\frac{x}{e+fx^q}$; adeoque $fq\int\frac{x^q\,dx}{(e+fx^q)^2}=\frac{-x}{e+fx^q}+\int\frac{dx}{e+fx^q}$. Hinc igitur $\int\frac{x^q\,dx}{(e+fx^q)^2}$ dependet a $\int\frac{dx}{e+fx^q}$.

IV. $\int\frac{dx}{(e+fx^q)^{n+1}}=\frac{1}{e}\int\frac{e+fx^q}{(e+fx^q)^{n+1}}\,dx-\frac{1}{e}\int\frac{fx^q\,dx}{(e+fx^q)^{n+1}}$ $=\frac{1}{e}\int\frac{dx}{(e+fx^q)^n}-\frac{f}{e}\int\frac{x^q\,dx}{(e+fx^q)^{n+1}}$. Itaque $\frac{f}{e}\int\frac{x^q\,dx}{(e+fx^q)^{n+1}}$ $=\frac{1}{e}\int\frac{dx}{(e+fx^q)^n}-\int\frac{dx}{(e+fx^q)^{n+1}}=$ [per primam] $\frac{1}{e}\int\frac{dx}{(e+fx^q)^n}-\frac{1}{nqe}\times\frac{x}{(e+fx^q)^n}-\frac{nq-1}{nqe}\times\int\frac{dx}{(e+fx^q)^n}=$ $\frac{1}{nqe}\int\frac{dx}{(e+fx^q)^n}-\frac{1}{nqe}\times\frac{x}{(e+fx^q)^n}$; adeoque $nfq\times\int\frac{x^q\,dx}{(e+fx^q)^{n+1}}$ $=\int\frac{dx}{(e+fx^q)^n}-\frac{x}{(e+fx^q)^n}$. Hinc ergo $\int\frac{x^q\,dx}{(e+fx^q)^{n+1}}$ dependet a $\int\frac{dx}{(e+fx^q)^n}$.

V. Quia $\int \frac{x^q\,dx}{(e+fx^q)^{n-1}} = \int \frac{ex^q+fx^{2q}}{(e+fx^q)^n}\,dx = e\int \frac{x^q\,dx}{(e+fx^q)^n} + f\int \frac{x^{2q}\,dx}{(e+fx^q)^n}$; patet $\int \frac{x^{2q}\,dx}{(e+fx^q)^n} = \frac{1}{f}\int \frac{x^q\,dx}{(e+fx^q)^{n-1}} - \frac{e}{f}\int \frac{x^q\,dx}{(e+fx^q)^n}$, hoc est per præced. a $\int \frac{dx}{e+fx^q}$ dependere.

VI. Eodem modo demonstratur $\int \frac{x^{3q}\,dx}{(e+fx^q)^n}$, $\int \frac{x^{4q}\,dx}{(e+fx^q)^n}$ & [sumto p pro numero integro & affirmativo] generaliter $\int \frac{x^{pq}\,dx}{(e+fx^q)^n}$ dependere a $\int \frac{dx}{e+fx^q}$. Quod est THEOR. V *.

VII. Quia, per Coroll. I, Prop. I, existente $nq = 1$, erit $\frac{dx}{(e+fx^q)^{n+1}}$ absolute integrabile, & quia per ipsam Prop. I, $\int \frac{dx}{(e+fx^q)^{n+2}}$ dependet a $\int \frac{dx}{(e+fx^q)^{n+1}}$, atque $\int \frac{dx}{(e+fx^q)^{n+3}}$ a $\int \frac{dx}{(e+fx^q)^{n+2}}$, & ita deinceps, sequitur [assumto k pro quolibet numero integro affirmativo, excepta cyphra] fore $\int \frac{dx}{(e+fx^q)^{1:q+k}}$ absolute quadrabilem. Quod est THEOR. I. †

VIII. Quia etiam, per Propositionem IV, $nfq\int \frac{x^q dx}{(e+fx^q)^{n+1}} = \int \frac{dx}{(e+fx^q)^n} - \frac{x}{(e+fx^q)^n}$, existente vero $nq - q = 1$, per Coroll. II, est $\int \frac{dx}{(e+fx^q)^n}$ absolute quadrabilis; erit per con-

* N°. CXLV, *Tom. II*, pag. 418. † Ibid. pag. 417.

consequens etiam $\int \frac{x^q\,dx}{(e+fx^q)^{(2q+1):q}}$ absolute quadrabilis.

IX. Quia $\int \frac{x^{2q}\,dx}{(e+fx^q)^n} = \frac{1}{f}\int \frac{x^q\,dx}{(e+fx^q)^{n-1}} - \frac{e}{f}\int \frac{x^q\,dx}{(e+fx^q)^n}$, per V; hæ vero partes simul non possunt esse quadrabiles; sequitur $\int \frac{x^{2q}\,dx}{(e+fx^q)^n}$ non esse quadrabilem. Idem etiam valet de $\int \frac{x^{3q}\,dx}{(e+fx^q)^n}$, $\int \frac{x^{4q}\,dx}{(e+fx^q)^n}$, & in genere de $\int \frac{x^{pq}\,dx}{(e+fx^q)^n}$, quamvis interim singulæ dependeant a $\int \frac{dx}{e+fx^q}$.

X. $\int \frac{dx}{(e+fx^q)^{1:q+k}} = \int \frac{(e+fx^q)\,dx}{(e+fx^q)^{1:q+k+1}}$; quia itaque, per VII, totum est quadrabile, & per eandem etiam pars $\int \frac{e\,dx}{(e+fx^q)^{1:q+k+1}}$; erit quoque reliquum $ff\frac{x^q\,dx}{(e+fx^q)^{1:q+k+1}}$ quadrabile.

XI. Pariter $\int \frac{x^q\,dx}{(e+fx^q)^{1:q+k+1}} = \int \frac{(ex^q+fx^{2q})\,dx}{(e+fx^q)^{1:q+k+2}}$. Ergo quia, per præced. totum est quadrabile; ut & ablatum; erit etiam quadrabile reliquum $ff\frac{x^{2q}\,dx}{(e+fx^q)^{1:q+k+2}}$.

XII. Per processus continuationem probabitur generaliter, quadrabilem esse hanc Formulam $\int \frac{x^{pq}\,dx}{(e+fx^q)^{1:q+k+p}}$. Quod est

THEOR. II. *

* Ibid. pag. 417.

XIII. Quia itaque $\int \frac{x^{pq}\,dx}{(e+fx^q)^{1:q+k+p}} =$ [dividendo numeratorem & denominatorem per $x^{1+kq+pq}$] $\int \frac{x^{-kq-1}\,dx}{(ex^{-q}+f)^{1:q+k+p}}$; Ergo nominando e per f, f per e, $-q$ per $+q$, erit $\int \frac{x^{kq-1}\,dx}{(e+fx^q)^{-1:q+k+p}}$ quadrabilis. Quod est THEOR. III. & IV. *

XIV. Porro quia $\int \frac{x^{pq}\,dx}{(e+fx^q)^n} =$ [dividendo numeratorem & denominatorem per x^{qn}] $\int \frac{x^{pq-nq}\,dx}{(ex^{-q}+f)^n}$; ergo etiam nominando e per f, & f per e, & $-q$ per $+q$, prodibit $\int \frac{x^{nq-pq}\,dx}{(e+fx^q)^n}$; vel, vocando $n-p$ per $-p$, provenit $\int \frac{x^{-pq}\,dx}{(e+fx^q)^n}$ dependens a $\int \frac{dx}{e+fx^q}$. Quod est THEOR. VI. † Hæc dudum inventa habui.

NB. *Theorema* VII facile reducitur ad *Theor.* V, ponendo tantum $x^{l+1} = z$. Et Theor. VIII est tantum Corollarium utriusque.

Alia Methodus pro reductione Formulæ $dx : \sqrt[n]{(x^n + a)}$ Petropoli *nuper missæ.*

Ponatur $\sqrt[n]{(x^n+a)} = xz$, unde $x^n + a = x^n z^n$, seu $(z^n - 1)x^n = a$, vel $x^n = a:(-1+z^n)$. Hinc $nlx =$

* Ibid. pag. 417, 418. † Ibid. pag. 418.

$= la - l(-1+z^n)$; differentiando $dx:x = -z^{n-1} dz:(z^n-1)$. Per substitutionem assumptæ quantitatis xz pro $\sqrt[n]{(x^n+a)}$, provenit $dx:\sqrt[n]{(x^n+a)} = dx:xz$, ubi pro $dx:x$ substituatur valor inventus $-z^{n-1} dz:(z^n-1)$; emergit $dx:\sqrt{(x^n+a)} = -z^{n-2} dz:(z^n-1)$.

Pro EULERI nostri, vel Filii mei *Danielis* expressione $dx:\sqrt[n]{(a+bx^n)}$ sic pariter procedo. Pono $\sqrt[n]{(a+bx^n)} = xz$, $a+bx^n = x^n z^n$, $(z^n-b)x^n = a$, $x^n = a:(z^n-b)$, $nlx = la - l(z^n-b)$, $dx:x = -z^{n-1} dz:(z^n-b)$. Per substitutionem xz pro $\sqrt[n]{(a+bx^n)}$ habetur $dx:\sqrt[n]{(a+bx^n)} = dx:xz = -z^{n-2} dz:(z^n-b)$. Quæ fractio cum sit rationalis, patet reduci posse ad quadraturam Circuli, vel ad Logarithmos; sed non video dari casus absolute quadrabiles.

GENERALIUS.

Sit formula reducenda $dx:\sqrt[n]{(ax^p+bx^n)}$. Pono, ut ante, $ax^p+bx^n = x^n z^n$, $(z^n-b)x^n = ax^p$, $z^n-b = ax^{p-n}$, $l(z^n-b) = la+(p-n)lx$, $nz^{n-1} dz:(z^n-b) = (p-n)dx:x$. Hinc $dx:\sqrt[n]{(ax^p+bx^n)} = dx:xz = \frac{n}{p-n} z^{n-2} dz:(z^n-b)$.

COROLL. Vocetur $p = q+n$, & erit $dx:\sqrt{(ax^{q+n}+bx^n)} = dx:x\sqrt[n]{(ax^q+b)}$; quæ nova est formula reducibilis.

No. CLIX.

RESOLUTIO

Binomii $1 \pm x^n$ *in ſuos Factores reales duarum dimenſionum.*

SIT primo n numerus par, adhibito ſigno ſuperiori $+$, a cujus quippe reſolutione etiam reſolutio reliquorum Caſuum dependet. Hunc in finem, formo Tabellam ſequentem, quæ incipit a ſimpliciſſimis & ad magis compoſitos progreditur, unde aliqua progreſſionis Lex eluceſcet.

TAB. I.

1 $1+xx = 1+xx$

2 $1+x^4 = (1+xx+x\sqrt{2}).(1+xx-x\sqrt{2})$

3 $1+x^6 = (1+xx).(1+xx+x\sqrt{3}).(1+xx-x\sqrt{3})$

4 $1+x^8 = (1+xx+x\sqrt{(2+\sqrt{2})}).(1+xx-x\sqrt{(2+\sqrt{2})}).$
$(1+xx+x\sqrt{(2-\sqrt{2})}).(1+xx-x\sqrt{(2-\sqrt{2})})$

5 $1+x^{10} = (1+xx).(1+xx+x\sqrt{\tfrac{1}{2}}.\sqrt{(5+\sqrt{5})}).(1+xx-x\sqrt{\tfrac{1}{2}}.\sqrt{(5+\sqrt{5})}).$
$(1+xx+x\sqrt{\tfrac{1}{2}}.\sqrt{(5-\sqrt{5})}).(1+xx-x\sqrt{\tfrac{1}{2}}.\sqrt{(5-\sqrt{5})})$

6 $1+x^{12} = (1+xx+x\sqrt{2}).(1+xx-x\sqrt{2}).(1+xx+x\sqrt{(2+\sqrt{3})}).$
$(1+xx-x\sqrt{(2+\sqrt{3})}).(1+xx+x\sqrt{(2-\sqrt{3})}).$
$(1+xx-x\sqrt{(2-\sqrt{3})})$

7 $1+x^{14} = (1+xx).(1+xx+px).(1+xx-px).(1+xx+qx).$
$(1+xx-qx).(1+xx+rx).(1+xx-rx)$

NB. Litteræ p, q & r determinantur per tres ſequentes æquationes $pp+qq+rr = 7$
$ppqq+pprr+qqrr = 14$
$ppqqrr = 7$

9 $1+x^{16}=(1+xx+x\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{2})})}).(1+xx-x\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{2})})}).$
$(1+xx+x\sqrt{(2+\sqrt{(2-\sqrt{2})})}).(1+xx-x\sqrt{(2+\sqrt{(2-\sqrt{2})})}).$
$(1+xx+x\sqrt{(2-\sqrt{(2-\sqrt{2})})}).(1+xx-x\sqrt{(2-\sqrt{(2-\sqrt{2})})}).$
$(1+xx+x\sqrt{(2-\sqrt{(2+\sqrt{2})})}).(1+xx-x\sqrt{(2-\sqrt{(2+\sqrt{2})})}).$

8 $1+x^{18}=(1+xx).(1+xx+px).(1+xx-px).(1+xx+qx).(1+xx$
$-qx).(1+xx+rx).(1+xx-rx).(1+xx+sx).(1+xx-sx).$

NB. Litteræ p, q, r & s determinantur per compendium ita:

$1+x^{18}=(1+x^6).(1-x^6+x^{12})=(1+xx).(1+xx+x\sqrt{3}).(1+xx$
$-x\sqrt{3}).(1+x^4+pxx).(1+x^4+qxx).(1+x^4+rxx)$

ubi p, q & r sunt tres radices hujus æquationis $z^3-3z+1=0$, quarum minima est Chorda decimæ octavæ partis circumferentiæ, media est Chorda $\frac{15}{18}$ circumferentiæ, & maxima negative sumenda est Chorda $\frac{7}{18}$ circumferentiæ. Est vero

$1+x^4+pxx=(1+xx+x\sqrt{(2-p)}).(1+xx-x\sqrt{(2-p)})$
$1+x^4+qxx=(1+xx+x\sqrt{(2-q)}).(1+xx-x\sqrt{(2-q)})$
$1+x^4+rxx=(1+xx+x\sqrt{(2-r)}).(1+xx-x\sqrt{(2-r)})$

Adeoque

$1+x^{18}=(1+xx).(1+xx+x\sqrt{3}).(1+xx-x\sqrt{3}).(1+xx+x\sqrt{(2-p)}).$
$(1+xx-x\sqrt{(2-p)}).(1+xx+x\sqrt{(2-q)}).(1+xx-x\sqrt{(2-q)}).$
$(1+xx+x\sqrt{(2-r)}).(1+xx-x\sqrt{(2-r)}).$

SCHOLIUM.

Constructio hujus Tab. I fundatur in hac altera

TAB. II.

3 $1+x^6=(1+xx).(1-xx+x^4)$
5 $1+x^{10}=(1+xx).(1-xx+x^4-x^6+x^8)$
7 $1+x^{14}=(1+xx).(1-xx+x^4-x^6+x^8-x^{10}+x^{12})$
9 $1+x^{18}=(1+xx).(1-xx+x^4-x^6+x^8-x^{10}+x^{12}-x^{14}+x^{16})$
11 $1+x^{22}=(1+xx).(1-xx+x^4-x^6+x^8-x^{10}+x^{12}-x^{14}+x^{16}-x^{18}+x^{20})$
13 $1+x^{26}=(1+xx).(1-xx+$ &c.)
&c. &c. = &c. &c.)

Ut autem factores compositi $1-xx+x^4-x^6+x^8-x^{10}+$&c. resolvantur in simplices, incipiatur a primo $1-xx+x^4$, qui

ponatur $=(1+xx+px).(1+xx-px.)$, unde erit $1-xx+x^4=1+(2-p^2)xx+x^4$, id quod dat $p=\sqrt{3}$; & sic erit $1-xx+x^4=(1+xx+x\sqrt{3}).(1+xx-x\sqrt{3})$. Ponatur jam $1-xx+x^4-x^6+x^8=(1+xx+px).(1+xx-px).(1+xx+qx).(1+xx-qx)$; quod actu multiplicatum facit $1-xx+x^4-x^6+x^8=1+4xx+6x^4+4x^6+x^8$, hinc,

$$\begin{array}{l} -pp \quad -2pp-pp \\ -qq \quad -2qq-qq \\ +ppqq \end{array}$$

comparatis terminis homogeneis, habetur $4-pp-qq=-1$, $6-2pp-2qq+ppqq=+1$; ex priori fit $pp+qq=5$, ex posteriori autem $ppqq=5$, seu $pq=\sqrt{5}$ & $2pq=2\sqrt{5}$; proinde $pp\pm 2pq+qq=5\pm 2\sqrt{5}$; extractaque radice $p\pm q=\sqrt{(5\pm 2\sqrt{5})}$, hinc $(p+q).(p-q)$ sive $pp-qq=\sqrt{5}$, addendo itaque & subtrahendo ipsi $pp+qq=5$, oritur $2pp=5+\sqrt{5}$, & $2qq=5-\sqrt{5}$, tandemque $p=\sqrt{\frac{1}{2}}.\sqrt{(5+\sqrt{5})}$ & $q=\sqrt{\frac{1}{2}}.\sqrt{(5-\sqrt{5})}$. Quibus substitutis erit $1-xx+x^4-x^6+x^8=(1+xx+x\sqrt{\frac{1}{2}}.\sqrt{(5+\sqrt{5})}).(1+xx-x\sqrt{\frac{1}{2}}.\sqrt{(5+\sqrt{5})}).(1+xx+x\sqrt{\frac{1}{2}}.\sqrt{(5-\sqrt{5})}).(1+xx-x\sqrt{\frac{1}{2}}.\sqrt{(5-\sqrt{5})})$.

NB. Possunt valores ipsarum pp & qq determinari hac æquatione $zz-5z+5=0$.

Porro ponatur $1-xx+x^4-x^6+x^8-x^{10}+x^{12}=(1+xx+px).(1+xx-px).(1+xx+qx).(1+xx-qx).(1+xx+rx).(1+xx-rx)$; quibus actu multiplicatis, habetur $1-xx+x^4-x^6+x^8-x^{10}+x^{12}=$

$$\begin{array}{lllll} 1+6xx & +15x^4 & +20x^6 & +15x^8 & +6x^{10}+x^{12} \\ -pp & -4pp & -6pp & -4pp & -pp \\ -qq & -4qq & -6qq & -4qq & -qq \\ -rr & -4rr & -6rr & -4rr & -rr \\ & +ppqq & +2ppqq & +ppqq & \\ & +pprr & +2pprr & +pprr & \\ & +qqrr & +2qqrr & +qqrr & \\ & & -ppqqrr & & \end{array}$$

Collatis

Collatis terminis homogeneis, emergit $pp+qq+rr=7$, $ppqq+pprr+qqrr=14$, & $ppqqrr=7$. Valores litterarum pp, qq, rr, habentur ſumendo tres radices hujus æquationis $z^3-7zz+14z-7=0$. Obſervando legem progreſſionis, inveniuntur factores ſequentis $1-xx+x^4-x^6+x^8-x^{10}+x^{12}-x^{14}+x^{16}$; adhibitis nempe pp, qq, rr, ss, erit illa =

$$\begin{array}{llllllll}
1+8xx & +28x^4 & +56x^6 & +70x^8 & +56x^{10} & +28x^{12} & +8x^{14} & +x^{16} \\
-pp & -6pp & -15pp & -20pp & -15pp & -6pp & -pp & \\
-qq & -6qq & -15qq & -20qq & -15qq & -6qq & -qq & \\
-rr & -6rr & -15rr & -20rr & -15rr & -6rr & -rr & \\
-ss & -6ss & -15ss & -20ss & -15ss & -6ss & -ss & \\
 & +ppqq & +4ppqq & +6ppqq & +\&c. & +\&c. & & \\
 & +pprr & +4pprr & +6pprr & \&c. & \&c. & & \\
 & +ppss & +4ppss & +6ppss & & & & \\
 & +qqrr & +4qqrr & +6qqrr & & & & \\
 & +qqss & +4qqss & +6qqss & & & & \\
 & +rrss & +4rrss & +6rrss & & & & \\
 & & -ppqqrr & -2ppqqrr & & & & \\
 & & -ppqqss & -2ppqqss & & & & \\
 & & -pprrss & -2pprrss & & & & \\
 & & -qqrrss & -2qqrrss & & & & \\
 & & & +ppqqrrss & & & &
\end{array}$$

Ex comparatione homogeneorum prodit $pp+qq+rr+ss=9$, $ppqq+pprr+ppss+qqrr+qqss+rrss=27$, $ppqqrr+ppqqss+pprrss+qqrrss=30$, $ppqqrrss=9$. Quare quatuor Radices hujus æquationis $z^4-9z^3+27zz-30z+9=0$, dabunt valores litterarum pp, qq, rr, ss.

Conjectis iſtis Valoribus litterarum pp, qq, rr, &c. pro quolibet caſu in Tabellam; apparebit illa ut ſequitur.

TAB. III.

Pro caſu
- Tertio $1+x^6$ habetur $z-3=0$
- Quinto $1+x^{10}$ .... $zz-5z+5=0$
- Septimo $1+x^{14}$ .... $z^3-7zz+14z-7=0$
- Nono $1+x^{18}$ .... $z^4-9z^3+27zz-30z+9=0$
- Undecim. $1+x^{22}$ .... $z^5-11z^4+44z^3-77zz+55z-11=0$.

Generaliter vero hos Casus determinare licet, faciendo,

$$1 + x^{4n+2} = (1 + xx).(1 - xx + x^4 - x^6 \ldots . x^{4n})$$

tum ponendo $1 - xx + x^4 - x^6 \ldots . x^{4n} = (1 + xx + px).(1 + xx - px).(1 + xx + qx).(1 + xx - qx).(1 + xx + rx).(1 + xx - rx)$. &c. Prodibit observata lege progressionis, quæ in eo consistit, ut numeri puri præfixi potestatibus xx, x^4, x^6 &c. sint coëfficientes terminorum binomii ad $2n$ elevati, deinde numeri præfixi litteris pp, qq, rr &c. coëfficientes sint binomii ad $2n-2$ elevati, postea numeri ipsis $ppqq$, $pprr$, &c. coëfficientes binomii ad $2n - 4$ elevati, & ita porro; hæc æquatio

$$(1 - xx + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + \ldots . x^{4n}) =$$
$$1 + \frac{2n}{1}xx + \frac{2n.2n-1}{1.2}x^4 + \frac{2n.2n-1.2n-2}{1.2.3}x^6 + \frac{2n.2n-1.2n-2.2n-3}{1.2.3.4}x^8 + \&c.$$
$$- P - \frac{2n-2}{1}P - \frac{2n-2.2n-3}{1.2}P - \frac{2n-2.2n-3.2n-4}{1.2.3.}P$$
$$+ Q + \frac{2n-4}{1}Q + \frac{2n-4.2n-5}{1.2}Q$$
$$+ R - \frac{2n-6}{1}R$$
$$+ S$$

Intelligo per P summam omnium $pp + qq + rr +$ &c. per Q summam omnium productorum ex singulis binis $ppqq + pprr + qqrr +$ &c. per R summam omnium productorum ex singulis ternis $ppqqrr +$ &c. per S summam omnium ex singulis quaternis $ppqqrrss +$ &c. per T summam omnium ex singulis quinis $ppqqrrsstt +$ &c. Et ita deinceps.

Hinc ponendo $\left.\begin{matrix}\frac{2n}{1} \\ -P\end{matrix}\right\} = -1, \left.\begin{matrix}+\frac{2n.2n-1}{1.2} \\ -\frac{2n-2}{1}P \\ +Q\end{matrix}\right\} = +1.$

$+2n.$

$$\left.\begin{array}{l} +\dfrac{2n.\,2n-1.2n-2}{1.\,2.\,3} \\ -\dfrac{2n-2.\,2n-3}{1.\,2}P \\ +\dfrac{2n-4}{1}Q \\ -\quad R \end{array}\right\} = -1, \left\{\begin{array}{l} +\dfrac{2n.\,2n-1.2n-2.2n-3}{1.\,2.\,3.\,4} \\ -\dfrac{2n-2.2n-3.2n-4}{1.\,2.\,3}P \\ +\dfrac{2n-4.2n-5}{1.\,2}Q \\ -\dfrac{2n-6}{1}R \\ +\quad S \end{array}\right\} = +1, \&c.$$

Invenientur ſucceſſive ſingula P, Q, R, S, T, &c. poſteriora ex prioribus; erit namque

$P = 2n + 1.$

$Q = (2n-2)P - \dfrac{2n.\,2n-1}{1.\,2} + 1,$

$R = (2n-4)Q - \dfrac{2n-2.\,2n-3}{1.\,2}P + \dfrac{2n.\,2n-1.2n-2}{1.\,2.\,3} + 1,$

$S = \&c.$

Ut nunc determinentur etiam caſus comprehenſi ſub num. 2, 4, 6, &c. Tab. I, ubi exponens poteſtatis xx eſt numerus pariter par, qui in hactenus pertractatis erat impariter par, conſideranda eſt Tabula ſequens.

TAB. IV.

Pro caſu {
Secundo $1+x^4 = (1+xx+px).(1+xx-px)$
Quarto $1+x^8 = (1+xx+px).(1+xx-px).(1+xx+qx).(1+xx-qx)$
Sexto $1+x^{12} = (1+xx+px).(1+xx-px).(1+xx+qx).(1+xx-qx).(1+xx+rx).(1+xx-rx)$
⋮
$2n^{\circ}.\ 1+x^{4n} = (1+xx+px).(1+xx-px).(1+xx+qx).(1+xx-qx).(1+xx+rx).(1+xx-rx).$ &c. &c.
}

ad-

adhibendo tot litteras p, q, r &c. quot sunt unitates in n.

Hoc modo acquiritur per actualem multiplicationem, quod sequitur in Tab. V.

TAB. V.

$$
\begin{array}{|l|l}
2 & 1+x^4 = 1+2xx+x^4 \\
 & \quad -pp \\
4 & 1+x^8 = 1+4xx+6x^4+4x^6+x^8 \\
 & \quad -pp-2pp-pp \\
 & \quad -qq-2qq-qq \\
 & \quad +ppqq \\
6 & 1+x^{12} = 1+6xx+15x^4+20x^6+15x^8+6x^{10}+x^{12} \\
 & \quad -pp-4pp-6pp-4pp-pp \\
 & \quad -qq-4qq-6qq-4qq-qq \\
 & \quad -rr-4rr-6rr-4rr-rr \\
 & \quad +ppqq+2ppqq+ppqq \\
 & \quad +pprr+2pprr+pprr \\
 & \quad +qqrr+2qqrr+qqrr \\
 & \quad -ppqqrr \\
2n & 1+x^{4n} = 1+\frac{2n}{1}xx+\frac{2n.2n-1}{1.2}x^4+\frac{2n.2n-1.2n-2}{1.2.3}x^6+\frac{2n.2n-1.2n-2.2n-3}{1.2.3.4}x^8+\&c. \\
 & \quad -P-\frac{2n-2}{1}P-\frac{2n-2.2n-3}{1.2}P-\frac{2n-2.2n-3.2n-4}{1.2.3}P \\
 & \quad +Q+\frac{2n-4}{1}Q+\frac{2n-4.2n-5}{1.2}Q \\
 & \quad -R-\frac{2n-6}{1}R \\
 & \quad +S
\end{array}
$$

Hic ex comparatione homogeneorum patet, coëfficientes terminorum intermediorum ponendos esse $= 0$, hoc est

$$
\left.\begin{array}{l} -P \end{array}\right\}^{2n} = 0, \qquad \left.\begin{array}{l} \frac{2n.2n-1}{1.2} \\ -\frac{2n-2}{1}P \\ +Q \end{array}\right\} = 0,
$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{2n.\,2n-1.\,2n-2}{1.\,2.\,3} \\ -\frac{2n-2.2n-3}{1.\,2}P \\ +\frac{2n-4}{1}Q \\ -R \end{array}\right\}=0, \qquad \left.\begin{array}{l} \frac{2n.\,2n-1.\,2n-2.\,2n-3}{1.\,2.\,3.\,4} \\ -\frac{2n-2.2n-3.2n-4}{1.\,2.\,3}P \\ +\frac{2n-4.\,2n-5}{1.\,2}Q \\ -\frac{2n-6}{1}R \\ +S \end{array}\right\}=0, \&c.$$

Hoc pacto inveniuntur P, Q, R, S, T, &c. posteriora ex prioribus, nempe.

$P = 2n$

$Q = (2n-2)P - \frac{2n.2n-1}{1.\,2}$

$R = (2n-4)Q - \frac{2n-2.2n-3}{1.\,2}P + \frac{2n.2n-1.2n-2}{1.\,2.\,3}$,

$S =$ &c.

Id si ad casus speciales successive applicetur, obtinebitur.

TAB. VI.

Pro casu

Secundo	$1+x^4 \ldots z-2=0.$
Quarto	$1+x^8 \ldots zz-4z+2=0.$
Sexto	$1+x^{12} \ldots z^3-6zz+9z-2=0.$
Octavo	$1+x^{16} \ldots z^4-8z^3+20zz-16z+2=0.$
Decimo	$1+x^{20} \ldots z^5-10z^4+35z^3-50zz+25z-2=0.$

Harum æquationum radices dant suas respective quantitates pp, qq, rr &c.

Quod nunc attinet ad easdem illas formulas, adhibito signo negativo —, & existente n numero pari, liquet eas resolvi posse ut exhibet Tabula sequens.

TAB. VII.

1 $1 - xx = 1 - xx$ seu $(1 + x).(1 - x)$
2 $1 - x^4 = (1 - xx).(1 + xx)$
3 $1 - x^6 = (1 - xx).(1 + xx + x^4)$
4 $1 - x^8 = (1 - xx).(1 + xx + x^4 + x^6) = (1 - xx).(1 + xx).(1 + x^4)$
5 $1 - x^{10} = (1 - xx).(1 + xx + x^4 + x^6 + x^8)$
6 $1 - x^{12} = (1 - xx).(1 + xx + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10})$
$= (1 - xx).(1 + xx).(1 + x^4 + x^8)$
7 $1 - x^{14} = (1 - xx).(1 + xx + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10} + x^{12})$
8 $1 - x^{16} = (1 - xx).(1 + xx + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10} + x^{12} + x^{14})$
$= (1 - xx).(1 + xx).(1 + x^4 + x^8 + x^{12})$
$= (1 - xx).(1 + xx).(1 + x^4).(1 + x^8)$
9 $1 - x^{18} = (1 + xx).(1 + xx + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10} + x^{12} + x^{14} + x^{16})$
10 $1 - x^{20} = (1 - xx).(1 + xx + x^4 \ldots\ldots\ldots\ldots + x^{16} + x^{18})$
$= (1 - xx).(1 + xx).(1 + x^4 + x^8 + x^{12} + x^{16})$.

Qui casus omnes, ceu liquet, resolvuntur per Methodum ad Tab. III. explicatam.

SCHOLIUM.

Possunt etiam resolvi primo in factores duos dimensionis dimidiæ, & deinde qui gaudet signo — & numero dimensionis pari iterum in duos factores dimensionis dimidiæ, idque iterum donec ad dimensionem imparem perveniatur; atque ita tandem res reducta sit ad resolutionem binomiorum dimensionis imparis, quod negotii post Exemplum aliquod aggrediemur.

Sit ex. gr. $1 - x^{20}$ resolvendum: Ponatur $1 - x^{20} = (1 + x^{10}).(1 - x^{10}) = (1 + x^{10}).(1 + x^5).(1 - x^5)$; Primus istorum factorum $1 + x^{10}$ resolutus est in superioribus, reliqui duo resolventur per nunc tradenda.

TAB. VIII.

N.° CLX.

Fig. 1.

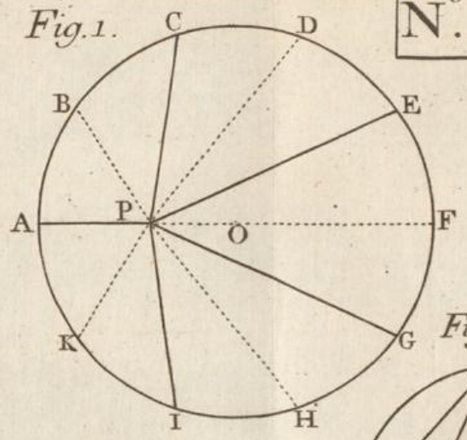


Fig. 2.

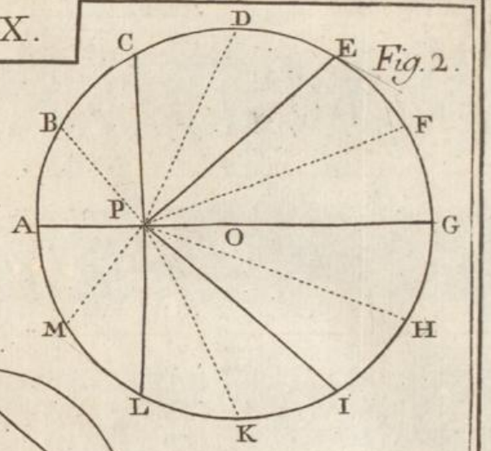
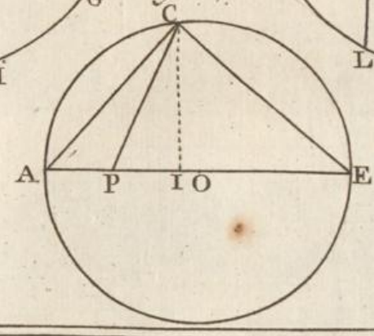


Fig. 3.



N.° CLXIII.

Fig. 1.

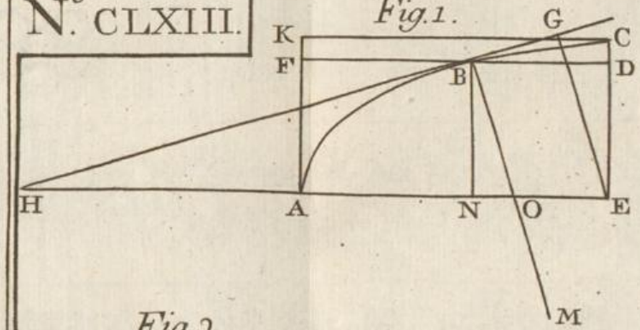


Fig. 2.

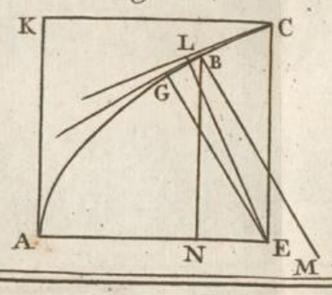
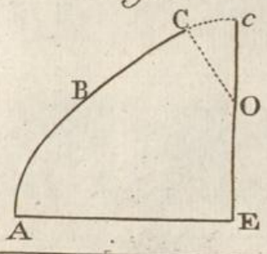


Fig. 3.



N.° CLXIV.

Fig. 1.

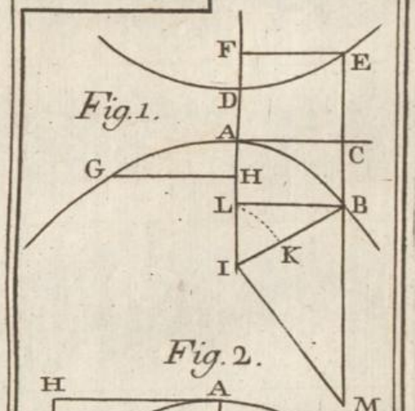
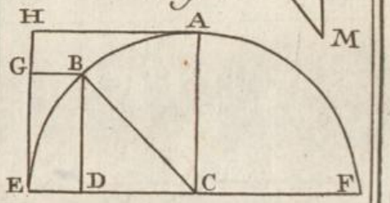


Fig. 2.



TAB. VIII.

Continens resolutionem binomiorum potestatum imparium.

$$\begin{array}{l|l} 1 & 1 \pm x = 1 \pm x. \\ 2 & 1 \pm x^3 = (1 \pm x).(1 \mp x + xx) \\ 3 & 1 \pm x^5 = (1 \pm x).(1 \pm x + xx \mp x^3 + x^4) \\ 4 & 1 \pm x^7 = (1 \pm x).(1 + x + xx \mp x^3 + x^4 \mp x^5 + x^6) \end{array}$$

Hi autem factores resolvuntur simili modo ut supra factum post Tab. III, vel quod commodius est: Fiat $x = yy$, hoc enim modo reducuntur formulæ ad exponentes pares dimensionum, habebitur nempe

$$\begin{array}{l|l} 1 & 1 \pm x = 1 \pm x = 1 \pm yy \\ 2 & 1 \pm x^3 = (1 \pm x).(1 \mp x + xx) = (1 \pm yy).(1 \mp yy + y^4) \\ 3 & 1 \pm x^5 = (1 \pm x).(1 \mp x + xx \mp x^3 + x^4) = (1 \pm yy). \\ & \qquad (1 \mp yy + y^4 \mp y^6 + y^8) \end{array}$$

Ergo &c.

N°. CLX.

INVESTIGATIO & DEMONSTRATIO THEOREMATIS *COTESIANI.*

INter Opuscula postrema *Rogeri* COTESII apud *Cantabrigienses* Professoris, collecta & edita ab ejus Successore *Roberto* SMITH, reperitur aliquod Theorema ad Cyclometriam pertinens, quod SMITHIUS exposuit, sed sine demonstratione, verbis sequentibus.

„ Si quærantur factores Binomii $a^\lambda \pm x^\lambda$, indice λ existente „ quolibet integro; dividatur circuli circumferentia ABCD, „ cujus centrum O, in totidem partes æquales AB, BC, „ CD, DE, EF, &c. quot sint unitates in 2λ, & ab om- TAB. LXXVIII. N°. CLX. *Fig.* 1 & 2.

 „ nibus

„ nibus divisionibus ad punctum quodvis P in OA radio, si „ opus producto, situm, ducantur rectæ AP, BP, CP, DP, „ EP, FP, &c; deinde positis $OA = a$, $OP = x$; con- „ tentum sub omnibus AP, CP, EP, &c. sumtis a divisio- „ nibus alternis per integrum circuitum, adæquabit $a^{\lambda} - x^{\lambda}$ vel „ $x^{\lambda} - a^{\lambda}$, prout P fuerit intra vel extra circulum: & conten- „ tum sub reliquis BP, DP, FP, &c. in locis reliquis al- „ ternis, adæquabit $a^{\lambda} + x^{\lambda}$. Exempli gratia, si λ sit 5; divi- „ datur circumferentia in 10 partes æquales, eritque $AP \times$ „ $CP \times EP \times GP \times IP = OA^5 - OP^5$, existente P in- „ tra circulum: Et $BP \times DP \times FP \times HP \times KP = OA^5$ „ $+ OP^5$. Similiter si λ sit 6; divisa circumferentia in 12 „ partes æquales, erit $AP \times CP \times EP \times GP \times IP \times LP$ „ $= OA^6 - OP^6$, existente P intra circulum: Et $BP \times$ „ $DP \times FP \times HP \times KP \times MP = OA^6 + OP^6$.

Hujus Theorematis, haud sane inelegantis, demonstrationem suppresserat COTESIUS, nec eam dederat SMITHIUS. Exhibuit postea aliquam PEMBERTONUS, eidem Libro *Cotesiano* * insertam, sed tam longam, tam intricatam, ut tædiosum sit examinare, utrum omnia recte se habeant, nullusque lateat paralogismus. Felicioribus vero auspiciis rem aggressus Clarissimus MOIVREUS, Vir profunde doctus atque in analyticis versatissimus, dedit hujus Theorematis eruendi viam expeditissimam, & quidem ad alia hujus generis longissime se porrigentem, quousque impar Adversarius penetrare non poterat. Methodus *Moivreana* petita est ex natura Serierum, ut vocat, recurrentium, quæ licet in obscurissimis disquisitionibus plerumque magno sint auxilio, nonnullis tamen ista operandi methodus non satis naturalis esse videtur. Quare statim suspicabar perveniri posse modo directo, & sine magno labore, ad veritatem Theorematis *Cotesiani*, ope Seriei universalis, quam olim dedi, pro dividendo arcu circulari in partes quotcunque

* In *Epistola ad amicum de* COTESII *inventis*, Lond. 1722. 4°.

que æquales. Etenim in *Actis Lipſ.* anni 1701, p. 171. * illa Series conſpicitur, ubi poſitis radio circuli = 1, chorda arcus dati = a, chorda arcus ſubmultipli = z, chorda ejus complementi ad ſemicirculum = $\sqrt{(4-zz)} = y$, erit [ſupponendo arcum dividendum eſſe in partes numero n] æquatio generalis quæ ſequitur $a = zy^{n-1} - \frac{n-2}{1} zy^{n-3} + \frac{n-3.n-4}{1.2} zy^{n-5} - \frac{n-4.n-5.n-6.}{1.2.3} zy^{n-7} + \&c.$

Eſto jam $a = 0$, hoc eſt, ſit vel tota circumferentia, vel dupla circumferentia, vel tripla, vel quadrupla, vel &c. ſecanda in partes numero n; utpote in quibus ſingulis caſibus fit $a = 0$; erit dividendo per z, hæc æquatio

$$0 = y^{n-1} - \frac{n-2}{1} y^{n-3} + \frac{n-3.n-4}{1.2} y^{n-5} - \frac{n-4.n-5.n-6}{1.2.3} y^{n-7} + \frac{n-5.n-6.n-7.n-8}{1.2.3.4} y^{n-9} - \&c.$$

cujus adeo radices y, ſeu $\sqrt{(4-zz)}$ determinant non tantum z, ſeu chordam arcus ſubmultipli, ſed etiam chordas hujus arcus dupli, tripli, quadrupli, quintupli, ſextupli, &c., quia ſinguli hi arcus conſtituunt partes ſimiles circumferentiæ, vel ſimplæ, vel duplæ, vel triplæ, vel quadruplæ, vel quintuplæ, vel ſextuplæ &c. Hoc eſt, ſi æquatio exprimatur per zz ejuſque poteſtates, concipiaturque Polygonum regulare laterum n circulo inſcriptum; deſignabunt radices æquationis quadratum, tum lateris, tum ſingularum diagonalium.

Sit ex. gr. $n = 7$, hoc eſt, ſit Heptagonum circulo inſcriptum, æquatio noſtra univerſalis abit in hanc $0 = y^6 - 5y^4 + 6yy - 1$, & ſubſtituto $4 - zz$ pro yy, prodibit hæc altera $0 = z^6 - 7z^4 + 14zz - 7$, cujus tres radices zz indicabunt quadratum, tum lateris Polygoni, tum utriuſque diagonalium: ſunt enim in Heptagono duo diagonalium reſpective æqualium paria. Vocentur ergo quadratum lateris = pp, quadratum diagonalis minoris = qq, & quadratum diagonalis majoris = rr,

* N°. LXIX. pag. 387, *Tom.* I.

erit, ex natura æquationum, $pp+qq+rr=7$, $ppqq+pprr+qqrr=14$, & $ppqqrr=7$. Formetur Tabula ejuſmodi æquationum valores ipſarum z determinantium, pro aſſumtione ſucceſſiva numeri n; quæ ita ſe habebit pro imparibus, & pro paribus.

Pro numeris imparibus formabitur

TAB. I.

Aſſumto numero		prodibit
$n=3$		$zz-3=0$
$n=5$		$z^4-5zz+5=0$
$n=7$		$z^6-7z^4+14zz-7=0$
$n=9$		$z^8-9z^6+27z^4-30zz+9=0$
$n=11$		$z^{10}-11z^8+44z^6-77z^4+55zz-11=0$

Pro numeris paribus, formabitur hæc altera

TAB. II.

Aſſumto numero		prodibit
$n=4$		$zz-2=0$
$n=6$		$z^4-4zz+3=0$
$n=8$		$z^6-6z^4+10zz-4=0$
$n=10$		$z^8-8z^6+21z^4-20zz+5=0$
$n=12$		$z^{10}-10z^8+36z^6-56z^4+35zz-6=0$.

Ex quibus patet numeros poſtremos [quibus pro ſcopo noſtro opus habemus] ſemper æquales eſſe numeris n quibus reſpondent in imparibus, ſemiſſes vero eſſe numerorum n quibus reſpondent in paribus. Unde concludendum, in quolibet Polygono regulari imparium laterum productum ex quadrato lateris omnibuſque quadratis diagonalium in ſemicirculo contentarum, ſeu, quod tantundem eſt, productum ex omnibus diagonalibus totius Polygoni duobuſque lateribus, eſſe æquale potentiæ, tot vicibus ſumtæ quot ſunt latera, radii circuli Polygono circumſcripti, cujus potentiæ exponens eſt numerus laterum minus unitate. Ita ſi numerus laterum Polygoni ſit quilibet impar $2m+1$; voceturque radius circuli Polygono circumſ-

cumſcripti $= c$, erit factum illud ex diagonalibus omnibus & duobus lateribus $= (2m+1) \times c^{2m}$.

Concluditur porro productum illud in Polygonis parium laterum, æquari potentiæ, dimidio tot vicibus ſumtæ quot ſunt latera, radii circuli Polygono circumſcripti, cujus exponens eſt numerus laterum demto binario. Poſito namque numero laterum $2m$, dictoque radio $= c$, erit productum $= m \times c^{2m-2}$.

Sciendum autem hic non computari diametrum pro diagonali, etſi omnium diagonalium ſit maxima; id quod ex eo venit, quia æquatio ſuperior $o = y^{n-1} - \frac{n-2}{1} y^{n-3} + \frac{n-3 \cdot n-4}{1 \cdot 2} y^{n-5}$ &c, in caſu numerorum parium, diviſa fuit per y, unde & ipſa $y = o$, ſeu $\sqrt{(4 - zz)} = o$, quæ dat $z = 2$, quæque adeo eſt ex numero radicum, ſequeſtrata fuit. Quod itaque diameter etiam in numerum diagonalium referenda ſit, [uti certe referri debet,] oportet tantum multiplicare adhuc $m \times c^{2m-2}$ per $2c$, & ita productum totale erit $= 2m \times c^{2m-1}$. Unde generaliter, in numeris paribus æque ac imparibus, res eodem modo ſe habet, atque in forma Theorematis ita enunciari poteſt.

THEOREMA.

In Polygono regulari quocunque, cujus numerus laterum $= n$, *& radius circuli circumſcripti* $= c$; *factum ex omnibus diagonalibus & binis lateribus contiguis, tanquam etiam diagonalibus conſideratis, erit* $= nc^{n-1}$, *hoc eſt, æquale potentiæ radii* [*cujus exponens* $n - 1$] *tot vicibus ſumtæ quot ſunt unitates in* n.

Hoc Theorema viam ſternit ad demonſtrandum Theorema *Coteſianum*; quod nunc ſuſcipimus, præmittendo Lemma ſequens.

LEM-

LEMMA.

TAB. LXXVIII. N°. CLX. Fig. 3.

Sit in circulo ACE, *cujus centrum* O, *chorda quælibet* AC *ad extremitatem diametri* AE *ducta, ſitque punctum* P *datum & invariabile in diametro, a quo tendat recta* PC: *dico fore* $PC^2 = AP^2 + \frac{OP}{OE} \times AC^2$.

DEMONSTRATIO.

Demiſſo perpendiculo CI, habetur $PC^2 = AC^2 + AP^2 - 2AP \times AI = AC^2 + AP^2 - \frac{2AP}{2AO} \times AI \times AE = AC^2 + AP^2 - \frac{AP}{AO} \times AC^2 = \frac{AO - AP}{AO} \times AC^2 + AP^2 = AP^2 + \frac{OP}{AO} \times AC^2 = AP^2 + \frac{OP}{OE} \times AC^2$. *Q. E. D.*

COROLL. I. Hinc etiam ducta CE chorda complementi ad ſemicirculum; erit $PC^2 = EP^2 - \frac{OP}{OE} \times CE^2 = AP^2 + \frac{OP}{OE} \times AC^2$.

COROLL. II. Proinde $(PC^2 - AP^2) \times \frac{OE}{OP} = AC^2$; ut & $(-PC^2 + EP^2) \times \frac{OE}{OP} = CE^2$.

COROLL. III. Nec non $(EP^2 - AP^2) \times \frac{OE}{OP} = AC^2 + CE^2 = AE^2 = 4OE^2$.

His ita demonſtratis, ſit ut in præcedentibus $AC = z$, $CE = y$, $OA = OE = 1$, $OP = x$; & præterea $PC = t$, $AP = 1 - x = g$; erit $zz = \frac{1}{x} \times (tt - gg)$. Hoc valore ipſius zz ſucceſſive ſubſtituto in æquationibus Tabularum primæ & ſecundæ, prodibit, retentis primo & ultimo termino quibus opus habemus, ac neglectis intermediis in quibus variabilis

riabilis *tt* reperitur, pro Polygonis imparium & parium laterum Tabula ſequens.

TAB. III.

Pro imparibus.

Poſito $\left\{\begin{array}{l} n=3 \\ n=5 \\ n=7 \\ n=9 \\ n=11 \end{array}\right\}$ erit $\left\{\begin{array}{l} +\frac{1}{x}tt-\frac{1}{x}gg-3=0. \\ +\frac{1}{xx}t^4\ldots+\frac{1}{xx}g^4+\frac{5}{x}gg+5=0 \\ +\frac{1}{x^3}t^6\ldots-\frac{1}{x^3}g^6-\frac{7}{xx}g^4-\frac{14}{x}gg-7=0 \\ +\frac{1}{x^4}t^8\ldots+\frac{1}{x^4}g^8+\frac{9}{x^3}g^6+\frac{27}{xx}g^4+\frac{30}{x}gg+9=0 \\ +\frac{1}{x^5}t^{10}\ldots-\frac{1}{x^5}g^{10}-\frac{11}{x^4}g^8-\frac{44}{x^3}g^6-\frac{77}{xx}g^4-\frac{55}{x}gg-11=0 \end{array}\right.$

TAB. IV.

Pro paribus.

Poſito $\left\{\begin{array}{l} n=4 \\ n=6 \\ n=8 \\ n=10 \\ n=12 \end{array}\right\}$ erit $\left\{\begin{array}{l} +\frac{1}{x}tt-\frac{1}{x}gg-2=0 \\ +\frac{1}{xx}t^4\ldots+\frac{1}{xx}g^4+\frac{4}{x}gg+3=0 \\ +\frac{1}{x^3}t^6\ldots-\frac{1}{x^3}g^6-\frac{6}{xx}g^4-\frac{10}{x}gg-4=0 \\ +\frac{1}{x^4}t^8\ldots+\frac{1}{x^4}g^8+\frac{8}{x^3}g^6+\frac{21}{xx}g^4+\frac{20}{x}gg+5=0 \\ +\frac{1}{x^5}t^{10}\ldots-\frac{1}{x^5}g^{10}-\frac{10}{x^4}g^8-\frac{36}{x^3}g^6-\frac{56}{xx}g^4-\frac{35}{x}gg-6=0 \end{array}\right.$

In duabus his Tabulis videre eſt, coëfficientes numerales eſſe eoſdem qui conſpiciuntur in Tab. I, & II, cujus quidem neceſſitas ex conſtructione ipſarum Tabularum ſtatim apparet; hoc tantum diſcimine, quod ibi ſint ſigna alternantia, hic vero contigua. Nunc in hoc ſubſtituantur valores ipſius *gg*, ejuſque po-

poteſtatum, qui ſunt $gg = 1 - 2x + xx$, $g^4 = 1 - 4x + 6xx - 4x^3 + x^4$, $g^6 = 1 - 6x + 15xx - 20x^3 + 15x^4 - 6x^5 + x^6$, $g^8 = 1 - 8x + 28xx - 56x^3 + 70x^4 - 56x^5 + 28x^6 - 8x^7 + x^8$, $g^{10} = 1 - 10x + 45xx - 120x^3 + 210x^4 - 252x^5 + 210x^6 - 120x^7 + 45x^8 - 10x^9 + x^{10}$, & ſic porro. Quo facto mutabitur Tabula præcedens in hunc alteram.

TAB. V.

Pro imparibus

Poſito { $n = 3$, $n = 5$, $n = 7$, $n = 9$, $n = 11$ } erit {

$\frac{1}{x}gg + 3 = (1 + x + xx) : x$

$\frac{1}{xx}g^4 + \frac{5}{x}gg + 5 = (1 + x + xx + x^3 + x^4) : xx$

$\frac{1}{x^3}g^6 + \frac{7}{xx}g^4 + \frac{14}{x}gg + 7 = (1 + x + xx + x^3 + x^4 + x^5 + x^6) : x^3$

$\frac{1}{x^4}g^8 + \frac{9}{x^3}g^6 + \frac{27}{xx}g^4 + \frac{30}{x}gg + 9 = (1 + x + xx + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8) : x^4$

$\frac{1}{x^5}g^{10} + \frac{11}{x^4}g^8 + \&c. \ldots = (1 + x + xx + \ldots x^{10}) : x^5$

}

TAB. VI.

Pro paribus.

Si { $n = 4$, $n = 6$, $n = 8$, $n = 10$, $n = 12$ } erit {

$\frac{1}{x}gg + 2 = (1 + xx) : x$

$\frac{1}{xx}g^4 + \frac{4}{x}gg + 3 = (1 + xx + x^4) : xx$

$\frac{1}{x^3}g^6 + \frac{6}{xx}g^4 + \frac{10}{x}gg + 4 = (1 + xx + x^4 + x^6) : x^3$

$\frac{1}{x^4}g^8 + \frac{8}{x^3}g^6 + \frac{21}{xx}g^4 + \frac{20}{x}gg + 5 = (1 + xx + x^4 + x^6 + x^8) : x^4$

$\frac{1}{x^5}g^{10} + \frac{10}{x^4}g^8 + \ldots = (1 + xx + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10}) : x^5$

}

Cum

Cum igitur in Tab. III, æquationum termini ultimi & invariabiles designent productum omnium radicum $\frac{1}{x}tt$, hoc est, omnium quadratorum linearum PC ex puncto fixo P ductarum in angulos singulos Polygoni in alterutro semicirculo contentos, diviso quolibet quadrato per x, vel, quod idem est, productum linearum ipsarum ad singulos angulos totius Poligoni ductarum, exceptis tamen illis [vel una in Polygono imparium laterum, vel utraque in Polygono parium laterum] quæ ad angulos diametro contiguos ducuntur, divisa interim unaquaque linea per $\surd x$, vel quod perinde est, diviso producto ipso per x elevatum ad semi-numerum omnium linearum ad angulos totius Polygoni [exceptis diametro contiguis] eductarum. Hinc ergo liquet, si omissis x, xx, x^3, &c. quæ dividunt tt, t^4, t^6, &c. ab una parte & ab altera parte ipsa illa producta, utpote utrobique ejusdem dimensionis, sumantur producta illa, & æquentur quantitatibus istis cuique numero n competentibus $1+x+xx+x^3$ &c. pro imparibus, & $1+xx+x^4+x^6$ &c. pro paribus; fore, pro quolibet numero impare $2m+1$, productum omnium linearum in angulos ductarum, excepta ea quæ in angulum diametro contiguum ducitur, $= 1+x+xx+x^3 \ldots +x^{2m}$, & pro quolibet numero pari $2m$, factum ex lineis in omnes Polygoni angulis ductis, exceptis iis quæ in utrumque angulum diametro contiguum ducitur, esse $= 1+xx+x^4+x^6 \ldots +x^{2m-2}$. Ut vero valor habeatur duorum horum productorum completorum, quæ nempe fiunt multiplicando lineas eductas in angulos Polygoni prorsus omnes, nihil aliud agendum, quam ut, pro imparibus lateribus, factum ex lineis PC multiplicetur adhuc per eam quæ deest, nempe per PA seu $1-x$, & ita habebitur $(1+x+xx+x^3 \ldots +x^{2m}) \times (1-x) = 1-x^{2m+1}$; pro paribus autem, ut factum ex iisdem lineis PC multiplicetur porro per ambas quæ desunt, nempe per PA & PE, hoc est, per $1-x$ & $1+x$, seu

TAB. LXXVIII. N°. CLX. *Fig.* 2.

per $1 - xx$; ſicque obtinebitur $(1 + xx + x^4 + x^6 \ldots\ldots + x^{2m-2}) \times (1 - xx) = 1 - x^{2m}$. Ex qua utraque æquatione perſpicitur, quod ſi ad Polygoni regularis [laterum ſive pariumſive imparium] angulos ſingulos, ex puncto quodam in diametro per angulum quendam tranſeunte ſumto, ducantur totidem rectæ; erit exiſtente numero laterum vel angulorum quocunque $= n$, & diſtantia puncti $= x$, productum ex omnibus iſtis rectis $= 1 - x^n$. Id quod primam conſtituit partem Theorematis *Coteſiani*. Altera ex prima facillime fluit: Ecce quomodo. Diviſis bifariam ſingulis arcubus quos ſubtendunt latera Polygoni, novum concipiatur Polygonum duplo plurium laterum, ad cujus angulos ſingulos rurſus eductæ ſunt rectæ; harum ergo productum erit $= 1 - x^{2n}$; quod ſi dividatur per productum prius $1 - x^n$, prodibit productum linearum alternatim ſumtarum $= 1 + x^n$, quarum prima cadit perpendiculariter in latus primum prioris Polygoni. Quæ pars eſt altera Theorematis prædicti. *Q. E. D.*

PRO-

N°. CLXI.

PROBLEMA.

Æquationes differentiales incompletas cujuscunque gradus reddere completas, hoc est, *eas transmutare in alias, in quibus nulla differentialis supponatur constans.*

Confer. TAYLOR *de Method. increm.* p. 8.

POsita dx constante,

Sit $dy = z\,dx$ erit $\frac{dy}{dx} = z$

$ddy = dz\,dx = t\,dx^2$ $\frac{dz}{dx} = t$

$d^3y = dt\,dx^2 = v\,dx^3$ $\frac{dt}{dx} = v$

$d^4y = dv\,dx^3 = r\,dx^4$ $\frac{dv}{dx} = r$

$d^5y =$ &c.

Differentiando, positis omnibus variabilibus, emerget

$$dz = d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dx\,ddy - dy\,ddx}{dx^2}$$

$$dt = d\left(\frac{dz}{dx}\right) = d\left(\frac{dx\,ddy - dy\,ddx}{dx^3}\right) = \text{&c.}$$

$$dv = d\left(\frac{dt}{dx}\right) = d\left(\frac{1}{dx} \times d\left(\frac{dx\,ddy - dy\,ddx}{dx^3}\right)\right) = \text{&c.}$$

$$dr = d\left(\frac{dv}{dx}\right) = d\left(\frac{1}{dx} \times d\left(\frac{1}{dx} \times d\left(\frac{dx\,ddy - dy\,ddx}{dx^3}\right)\right)\right) = \text{&c.}$$

&c. = &c.

Hinc, pro incompletis dy, ddy, d^3y, &c. ſubſtituantur completa, ut ſequitur.

Incompl. Compl.

$dy = dy = dy$

$ddy = dzdx = (dxddy - dyddx) : dx$

$d^3y = dtdx^2 = dx^2 . d((dxddy - dyddx) : dx^3)$

$= (1dx^2 d^3y - 3dxddxddy + 3ddx^2 dy - 1dxdyd^3x) : dx^2$

$d^4y = dvdx^3 = dx^3 . d(\frac{1}{dx} . d((dxddy - dyddx) : dx^3))$

$= (dx^3 d^4y - 6dx^2 ddxd^3y + 15dxddx^2 ddy - 15ddx^3 dy - 4dx^2 d^3x ddy + 10dxddxd^3x dy - dx^2 d^4x dy) : dx^3$

$d^5y = drdx^4 =$ &c.

SCHOLIUM.

Hujus Regulæ eſt uſus in transformandis differentialibus conſtantibus in alias conſtantes. Ex. gr. Si dy debeat eſſe conſtans, hoc tantum agendum, ut deleantur termini in quibus reperiuntur ddy, d^3y, d^4y, &c. Ita quoque ſi quævis functio, ex differentialibus ſolis, vel ex differentialibus & finitis compoſita, fieri debeat conſtans, ex. gr. ſi deſideretur ut fiat conſtans elementum curvæ, hoc eſt $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; nam ex hac ſuppoſitione ſequitur $dxddx + dyddy = 0$; adeoque ſi in formulis noſtris completarum pro ddy ſubſtituatur $-dxddx : dy$, & quod inde provenit, ſi in æquatione aliqua incompleta, ubi dx ſupponitur conſtans, ſubſtituatur porro pro ddy; ejuſque differentiale pro d^3y, & ita deinceps quouſque opus eſt, reſultabit æquatio in qua erit $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ conſtans. Vel, quod eodem recidit, & clarius intelligitur, mutetur ſtatim propoſita æquatio incompleta, ubi dx conſtans, in æquationem completam; ſubſtituendo ſcilicet pro incompletis ddy, d^3y, &c. eorum reſpondentes completos, qui ſunt $(dxddy - dyddx) : dx$, $(dx^2 d^3y - 3dxddxddy + 3ddx^2 dy - dxdyd^3x,) : dx^2$, &c. deinde in æquatione completa, quæ inde emergit, ſupponatur aliquod ex differentialibus compoſitum conſtans, ex. gr. quod ſupra aſſumſimus $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$,

&

& quod vocemus $= dv$, unde fluit $ddy = -dxddx : dy$ $= -dxddx : \sqrt{(dv^2 - dx^2)}$, $d^3y = (-ddx^2 - dxd^3x) : dy$ &c. Hos itaque valores in æquatione completa oportet surrogare pro ddy, d^3y, &c. & inde lucrabimur novam æquationem, in qua constans erit dv, seu $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, & quæ proin propositæ [ubi dx erat constans] est æquivalens. Similiter, si velimus propositam mutare in aliam, in qua sit ex. gr. ydx seu elementum areæ constans, erit $dydx + yddx = 0$, adeoque $dy = -yddx : dx$; $ddy = (-dydxddx + yddx^2 - ydxd^3x) : dx^2$ $=$ [scribendo pro dy ejus valorem $-yddx : dx$] $(2yddx^2 - ydxd^3x) : dx^2$; $d^3y =$ &c. Vel, quod hic præstat, ut eliminemus ddx, d^3x, &c. erit $ddx = -dxdy : y$, $d^3x = (2dy^2dx - ydxddy) : yy$. Quod si igitur, in æquatione completa, substituamus pro ddy, d^3y, &c. eorum valores in ddx, d^3x, &c. vel pro ddx, d^3x, &c. eorum valores in dy, ddy, &c. expressos, acquiremus utroque modo æquationem in qua erit ydx constans, loco propositæ, ubi erat dy constans.

N°. CLXII.

REDUCTIO

Æquationis $y^m\,ddy = qx^n\,dx^p\,dy^{2-p}$ *ad æquationem differentialem primi gradus, ubi supponitur* $ddx = 0$.

Ponatur $y = tx^a$, adeoque $dy = x^a\,dt + atx^{a-1}\,dx$; & $ddy = x^a\,ddt + 2ax^{a-1}\,dxdt + (aa - a)tx^{a-2}\,dx^2$, quibus in proposita substitutis, mutabitur illa in hanc (A)...

$t^m\,x^{am}(x^a\,ddt + 2ax^{a-1}\,dxdt + (aa - a)tx^{a-2}\,dx^2)$ $= qx^$

$= qx^n dx^p (x^a\,dt + atx^{a-1}\,dx)^{2-p}$. Posito autem $dx = xzdt$, erit ddx seu $0 = xzddt + xdzdt + xzzdt^2$, unde $ddt = -dzdt : z - zdt^2$. Substituto hoc valore in A habebitur [rite procedendo] hæc altera æquatio (B).. $t^m x^{am+a}((2a-1)zdt^2 + (aa-a)tzzdt^2 - dzdt : z) = qx^{n+p+2a-pa} z^p dt^2 (1+atz)^{2-p}$. Ut nunc littera x evanescat, ejus exponentes sunt ponendi æquales, nempe $am+a = n+p+2a-pa$; unde emergit $a = (n+p) : (m+p-1)$, atque resultabit, dividendo per dt, æquatio differentialis primi gradus, constans tantum ex duabus indeterminatis z & t, earumque differentialibus primis, quæ erit hæc (C)...$(2a-1)\,t^m\,zzdt + (aa-a)\,t^{m+1}\,z^3dt - t^m\,dz = qz^{p+1}\,dt\,(1+atz)^{2-p}$. Ubi si quocunque modo, per separationem indeterminatarum, vel aliter, haberi potest relatio inter z & t, habebitur etiam ea inter x & y. Facto enim $x = c^{\int zdt}$, & $y = tx^a = tx^{(n+p):(m+p-1)}$ $= tc^{(n+p)\int zdt : (m+p-1)}$, obtinetur quæsitum.

COROLLARIUM I.

Si $m+p = 1$, erit $a = \infty$, adeoque etiam $y = tx^a = tx^\infty = \infty$. Hinc in hoc casu Problema non solvitur per hanc methodum, sed solvi potest, si æquatio proposita ita mutatur, ut dy sit constans; quod fieri potest.

COROLLARIUM II.

Si $n+p = 0$, hoc est, si $n = -p$, erit $y = tx^0 = t$, & $a = 0$. Unde inventa æquatio in hanc abit $-t^m\,zzdt - t^m dz = qz^{p+1}\,dt$, vel $-t^m dz = (t^m zz + qz^{p+1})\,dt$. Ubi si præterea $p = 1$, fit æquatio separabilis & simul integrabilis, nem-

nempe hæc $-dz:zz=dt+qdt:t^m$, quæ integrata dat $b+1:z=t+\frac{q}{1-m}t^{1-m}$, unde $z=(1-m):((1-m)t+qt^{1-m}+bm-b)$; quare æquatio propoſita in hanc abiens $y^m\,ddy=q\,dx\,dy:x$ conſtrui poteſt ſumendo $y=t$, & $x=c^{\int((1-m)\,dt:((1-m)t+qt^{1-m}+bm-b))}$; vel ſimpliciter ſumendo $x=c^{\int((1-m)dy:((1-m)y+qy^{1-m}+bm-b))}$.

Si exponens eſt logarithmicabilis, prodit æquatio algebraïca. Ex. gr. Si $m=-1$, erit $x=c^{\int(2dy:(2y+qyy-2b))}$, adeoque $lx=\int(2dy:(2y+qyy-2b))=$ alicui Logarithmo, excepto tamen caſu quo $2b$ aſſumitur $=-1:q$, hoc enim caſu fit $\int(\frac{2}{q}dy:(yy+\frac{2}{q}y+\frac{1}{qq}))=-\frac{2}{q}:(y+\frac{1}{q})=$ quantitati algebraïcæ.

COROLLARIUM III.

In eodem caſu quo $n+p=0$, ſi præterea $p=2$, adeoque $n=-2$, & ſi $m=-1$; ita ut æquatio noſtra generalis $y^m\,ddy=qx^n dx^p dy^{2-p}$ abeat in hanc $y\,ddy=qx^{-2}dx^2dy^0$ ſeu $xx\,ddy=qy\,dx^2$; mutata æquatio per Regulam dat $-t^{-1}dz=(t^{-1}zz+qz^3)\,dt$, vel $-dz:zz=(1+qtz)\,dt$, quæ integrari poteſt ſequenti modo: Ponatur $tz=v$, unde $t=v:z$ & $dt=(z\,dv-v\,dz):zz$; quibus ſurrogatis, erit $dz:zz=(1+qv)\,(zdv-vdz):zz$, vel $\frac{dz}{z}=\frac{1+qv}{-1+v+qvv}dv$ $=\frac{1}{2}\times\frac{1+2qv}{-1+v+qvv}dv+\frac{1}{2}\times\frac{dv}{-1+v+qvv}=\frac{1}{2}(\frac{1+2qv}{-1+v+qvv}dv$ $+\frac{dv}{(qv+\alpha).(v+\beta)})=\frac{1}{2}\times(\frac{1+2qv}{-1+v+qvv}dv+\frac{\varepsilon\,dv}{qv+\alpha}+\frac{\eta\,dv}{v+\beta})$, unde habetur $lfz=\frac{1}{2}(l(-1+v+qvv)+\frac{\varepsilon}{q}l(v+\frac{\alpha}{q})$

$+\eta l(v+\beta))$; & $fz = (-1+v+qvv)^{\frac{1}{2}} \times (v+\frac{\alpha}{q})^{\varepsilon:2q} \times (v+\beta)^{\frac{1}{2}\eta}$: vel propter $v = tz$, $fz = (-1+tz+qttzz)^{\frac{1}{2}} \times (tz+\frac{\alpha}{q})^{\varepsilon:2q} \times (tz+\beta)^{\frac{1}{2}\eta}$, quæ est æquatio terminis finitis constans. Ergo &c. Pro constructione ponatur $f = 1$, erit $z = (-1+v+qvv)^{\frac{1}{2}} \times (v+\frac{\alpha}{q})^{\varepsilon:2q} \times (v+\beta)^{\frac{1}{2}\eta}$, & $dz = (tdv - vdt) : tt$ [propter $v = tz$]; ergo etiam habebitur zdt in meris v & dv; adeoque etiam $x = c^{\int zdt}$ & $y = t$.

ALITER ET GENERALIUS PRO HOC CASU.

Ex æquatione (B) patet, existente $n+p=0$, faciendum esse $am+a = 2a-pa$, quod cum dividi possit per a, ita ut tantum sit $m+p=1$, relinquitur utique a arbitrarium; adeoque, omni in casu ubi $n+p=0$, & $m+p=1$; id quod facit $p = 1-m$ & $n = m-1$. Æquatio nostra inventa C. . . . . $(2a-1)t^m zzdt + (aa-a)t^{m+1}z^3dt - t^m dz = qz^{p+1}dt(1+atz)^{2-p}$, quæ mutatur in hanc (D). . . . $(2a-1)t^m zzdt + (aa-a)t^{m+1}z^3dt - t^m dz = qz^{2-m}dt(1+atz)^{1+m}$, permittit a liberum; quod proinde ita sumere licet, ut æquatio fiat integrabilis. In casu ergo proposito $y^{-1}ddy = qx^{-2}dx^2$, ubi $n+p=0$, $m=-1$, $n=-2$, $p=2$; lubet desttruere, in æquatione D, terminum primum $(2a-1)t^m zzdt$, faciendo $2a-1=0$ seu $a=\frac{1}{2}$; hoc enim dat $-\frac{1}{4}z^3dt - t^{-1}dz = qz^3dt$, hoc est, reductione peracta, $-4dz : z^3(4q+1)tdt$; quod integrando habetur $4 : zz+b^2 = (4q+1)tt$, seu $4 = (4q+1)ttzz - bbzz$; unde $z = 2 : \sqrt{((4q+1)tt-bb)}$. Cum itaque $x = c^{\int zdt}$, hoc est, $lx = \int zdt$, seu $dx : x = zdt$, erit $\int(dx:x) = \int zdt = \int(2dt : \sqrt{((4q+1)tt-bb)})$; adeoque integrando per Logarithmos, erit $lfx = \frac{2}{\sqrt{(4q+1)}} \times l(t+\sqrt{(tt$

—

$-\frac{bb}{4q+1}))=$ [ponendo $\frac{bb}{4q+1}=ee$] $\frac{2e}{b}\times l(t+\sqrt{(tt-ee)})$; atque $fx=(t+\sqrt{(tt-ee)})^{2e:b}$. Porro quia $y=tx^a=tx^{1:2}=t\sqrt{x}$, prodibit $y=\frac{t}{\sqrt{f}}(t+\sqrt{(tt-ee)})^{e:b}$. Ut nunc æquatio habeatur per x & y expressa, eliciatur valor ipsius t, ope primæ æquationis $fx=(t+\sqrt{(tt-ee)})^{2e:b}$. Quod sic fit: $(fx)^{b:2e}=t+\sqrt{(tt-ee)}$, adeoque $(fx)^{b:2e}-t=\sqrt{(tt-ee)}$ quadrando $(fx)^{b:e}-2(fx)^{b:2e}t+tt=tt-ee$; hinc $t=((fx)^{b:e}+ee):2(fx)^{b:2e}$. Hoc valore substituto in altera æquatione $y=t\sqrt{x}$; prodibit $y=((fx)^{b:e}+ee)\sqrt{x}:2(fx)^{b:2e}$; vel $2yf^{b:2e}x^{b:2e-1:2}=f^{b:e}x^{b:e}+ee$, vel etiam $y=\frac{1}{2}f^{b:2e}x^{b:2e+1:2}+\frac{1}{2}eef^{-b:2e}x^{-b:2e+1:2}$; sed quia $b:e=\sqrt{(4q+1)}$, & $ee=bb:(4q+1)$, substituantur hi valores; eritque $y=\frac{1}{2}f^{\frac{1}{2}\sqrt{(4q+1)}}x^{\frac{1}{2}\sqrt{(4q+1)}+\frac{1}{2}}+\frac{bb}{8q+2}f^{-\frac{1}{2}\sqrt{(4q+1)}}x^{-\frac{1}{2}\sqrt{(4q+1)}+\frac{1}{2}}$. Aut, quia f & b sunt arbitrariæ, possunt pro coëfficientibus $\frac{1}{2}f^{\frac{1}{2}\sqrt{(4q+1)}}$ & $\frac{bb}{8q+2}f^{-\frac{1}{2}\sqrt{(+q+1)}}$ poni duæ litteræ simplices a & c; & habebitur $y=ax^{\frac{1}{2}+\sqrt{(q+\frac{1}{4})}}+cx^{\frac{1}{2}-\sqrt{(q+\frac{1}{4})}}$.

COROLL. IV.

In fine *Coroll.* 2, ubi inventum est $lx=\int(2dy:(2y+qyy-2b))$, si sumatur $b=0$, erit $lx=\int(2dy:(2y+qyy))=lfy-l(+2qy)=l(fy:(2+qy))$, adeoque $x=fy:(2+qy)$, & reductis suppletisque homogeneis, $2x+qyx=fy$. Ex quo patet curvam esse posse Hyperbolam. Quod si vero relinquatur b arbitrarium, erit $lx=\int(2dy:(2y+qyy-2b)=\int(\frac{2}{q}dy:(yy+\frac{2}{q}y-\frac{2}{q}b))=\int\frac{\alpha dy}{y+f}+\int\frac{\mathfrak{G}dy}{y+g}=\alpha l(y+f)+\mathfrak{G}l(y+g)$; adeoque assumta nova arbitraria erit $nx=(y+f)^{\alpha}\times(y+g)^{\mathfrak{G}}$. Sed per Calculum inveniuntur $\alpha=1:\sqrt{(1+2bq)}$, $\beta=-1:\sqrt{(1+2bq)}$;

$f = \frac{1}{q} - \sqrt{(\frac{1}{qq} + \frac{2}{q}b)}$, $g = \frac{1}{q} + \sqrt{(\frac{1}{qq} + \frac{2}{q}b)}$. Hinc æquatio generaliſſima $nx = (y + \frac{1}{q} - \sqrt{(\frac{1}{qq} + \frac{2}{q}b)})^{1:\sqrt{(1+2bq)}} \times (y + \frac{1}{q} + \sqrt{(\frac{1}{qq} + \frac{2}{q}b)})^{-1:\sqrt{(1+2qb)}}$, vel quod eodem recidit, debite reducendo $(nx)^{\sqrt{(1+2bq)}} \times (y + \frac{1}{q} + \sqrt{(\frac{1}{qq} + \frac{2}{q}b)}) = y + \frac{1}{q} - \sqrt{(\frac{1}{qq} + \frac{2}{q}b)}$, vel demum omnia multiplicando per q, & ponendo a pro $n^{\sqrt{(1+2bq)}}$, erit $ax^{\sqrt{(1+2bq)}} \times (qy + 1 + \sqrt{(1+2bq)}) = qy + 1 - \sqrt{(1+2bq)}$; quæ ergo generaliter ſatisfacit huic æquationi $ddy : y = q\,dx\,dy : x$. Porro quia q afficitur per arbitrariam b, poteſt $\sqrt{(1+2bq)}$ conſiderari ut arbitrarium : vocetur ergo c, & ſic æquatio inventa abit in hanc ſimpliciſſimam $ax^c(qy + c + 1) = qy - c + 1$.

Nota. Poteſt caſus propoſitus $x\,ddy = qy\,dx\,dy$ ſine applicatione ad Regulam generalem (quæ applicatio eſt operoſa) facilius ſolvi hoc modo. $\int x\,ddy = x\,dy - \int dx\,dy = x\,dy - y\,dx + a\,dx$; hoc ergo $= \int qy\,dx\,dy = \frac{1}{2}qyy\,dx$; & ita res redacta eſt ad differentiales primas. Reliqua per indeterminatarum ſeparationem peraguntur. Poſito $a = 0$, prodit caſus particularis $2x + qyx = fy$. Simili modo caſus proponendi in *Coroll.* 5, 6 & 7, ad differentias primas reducuntur, ſine recurſu ad Regulam noſtram generalem. Sit enim relinquendo m in tota ſua extenſione, $y^m ddy = qdxdy : x$, erit $x\,ddy = qy^{1-m}dx\,dy$; idque ut prius integrando, prodit $\int x\,ddy = x\,dy - y\,dx = \frac{q}{1-m}y^{1-m}dx + a\,dx$. Quo reducto fit $(1 - m\,dy) : (qy^{1-m} + (1-m)y + (1-m)a) = dx : x$. Cætera abſolvuntur ut in *Coroll.* 5, pro caſu $m = 2$.

SCHOLIUM.

Interdum non patet quomodo æquatio ad differentiales primas reducta ſeparationem admittat; ſed ut ſupra monuimus, mutari poteſt æquatio, ante illam reductionem, ut quibuſdam in caſibus

casibus perveniri possit ad differentiales primas, sine recursu ad Regulam, si nimirum ex invariabili dx fiat variabilis, & vicissim ex variabili dy fiat invariabilis. Sic generalis nostra æquatio $y^m ddy = qx^n dx^p dy^{2-p}$ transformatur hoc modo in hanc, $-y^m ddx = qx^n dx^{p+1} dy^{1-p}$. Si $m = 1$, & $p = 0$, habetur pro priori, $yddy = qx^n dy^2$, quæ ægre reducitur per Regulam, sed posita dy invariabili, transformatur in hanc $-yddx = qx^n dxdy$, quæ per consuetam integrationem dat $-ydx + xdy = \frac{q}{n+1} x^{n+1} dy + ady$. &c. separabilem.

COROLL. V.

Si in æquatione *Coroll.* 2. $y^m ddy = qdxdy : x$, habeatur $m = 2$, ita ut resolvenda jam sit $yyddy = qdxdy : x$, erit nunc $lx = \int \frac{-dy}{-y+qy^{-1}+b} = \int \frac{ydy}{yy-by-q} = \int \frac{\alpha dy}{y+f} + \int \frac{\epsilon dy}{y+g} = \alpha l(y+f) + \epsilon l(y+g)$, adeoque assumpta nova arbitraria n, erit $nx = (y+f)^\alpha \times (y+g)^\epsilon$. Sed hic per calculum reperiuntur $\alpha = (-\frac{1}{2}b + \sqrt{(\frac{1}{4}bb+q)}) : 2\sqrt{(\frac{1}{4}bb+q)}$, $\beta = (\frac{1}{2}b + \sqrt{(\frac{1}{4}bb+q)}) : 2\sqrt{(\frac{1}{4}bb+q)}$, $f = -\frac{1}{2}b + \sqrt{(\frac{1}{4}bb+q)}$, $g = -\frac{1}{2}b - \sqrt{(\frac{1}{4}bb+q)}$; unde æquatio generalissima pro hoc casu erit $nx = (y-\frac{1}{2}b+\sqrt{(\frac{1}{4}bb+q)})^{(-\frac{1}{2}b+\sqrt{(\frac{1}{4}bb+q)}):2\sqrt{(\frac{1}{4}bb+q)}} \times (y-\frac{1}{2}b-\sqrt{\frac{1}{4}bb+q})^{(\frac{1}{2}b+\sqrt{(\frac{1}{4}bb+q)}):2\sqrt{(\frac{1}{4}bb+q)}}$ vel etiam $(nx)^{2\sqrt{(\frac{1}{4}bb+q)}} = (y-\frac{1}{2}b+\sqrt{(\frac{1}{4}bb+q)})^{-\frac{1}{2}b+\sqrt{(\frac{1}{4}bb+q)}} \times (y-\frac{1}{2}b-\sqrt{(\frac{1}{4}bb+q)})^{\frac{1}{2}b+\sqrt{(\frac{1}{4}bb+q)}}$, vel adhuc aliter multiplicando primum factorem membri posterioris per $(y-\frac{1}{2}b+\sqrt{(\frac{1}{4}bb+q)})^b$, deinde quod provenit, per alterum factorem actu etiam multiplicando, tandemque productum per $(y-\frac{1}{2}b+\sqrt{(\frac{1}{4}bb+q)})^b$ iterum dividendo; quo rite

observato, prodibit $nx^{2\sqrt{(\frac{1}{4}bb+q)}} = (yy-by-q)^{\frac{1}{2}b+\sqrt{(\frac{1}{4}bb+q)}} \times (y-\frac{1}{2}b+\sqrt{(\frac{1}{4}bb+q)})^{-b}$. Ut fractiones in exponentibus tollantur, eorum sumantur dupla; eritque $nx^{2\sqrt{(bb+4q)}} = (yy-by-q)^{b+\sqrt{(bb+4q)}} \times (y-\frac{1}{2}b+\sqrt{(\frac{1}{4}bb+q)})^{-2b}$; verum etiam, ut exponentium irationalitas abeat, possum arbitrariam b ita sumere ut $bb+4q$ evadat quadratum perfectum: sit itaque $b = e-q:e$, unde fit $bb+4q = ee+2q+qq:ee$ & $\sqrt{(bb+4q)} = e+q:e$; quibus ergo substitutis, habebitur $nx^{2e+2q:e} = (yy-(e-q:e)y-q)^{2e} \times (y+q:e)^{-2e+2q:e}$; vel multiplicando exponentes per $\frac{1}{2}e$, erit $nx^{ee+q} = (yy-(e-q:e)y-q)^{ee} \times (y+q:e)^{-ee+q}$; & fractionibus sublatis in factoribus, multiplicando æquationem per e^q, prodibit $ne^q x^{ee+q} = (eyy-(ee-q)y-eq)^{ee} \times (ey+q)^{-ee+q}$; & [quoniam $eyy-eey+qy-eq = (y-e) \times (ey+q)$, & propter arbitrariam n, pro ne^q scribi potest a], orietur tandem æquatio simpliciſſima hæc $ax^{ee+q} = (y-e)^{ee} \times (ey+q)^q$, respondens generaliter huic $yyddy = qdxdy:x$. Quod si assumatur arbitraria $ee = q$, prodibit $axx = (yy-q)\sqrt{q}$, vel pro arbitraria a scribendo $c\sqrt{q}$, resultat $cxx = yy-q$, æquatio ad Hyperbolam; quæ ergo inter infinitas alias curvas satisfacit æquationi propositæ $yyddy = qdxdy:x$.

COROLL. VI.

Sit porro in æquatione *Coroll.* 2, $y^m ddy = qdxdy:x$, sit $m = \frac{1}{2}$; adeo ut resolvenda veniat $ddy\sqrt{y} = qdxdy:x$; erit $lnx = \int \frac{dy}{y+2q\sqrt{y}-b} =$ [posito $zz = y$] $\int \frac{2zdz}{zz+2qz-b} = \int$

$= \int \frac{\alpha dz}{z+f} + \int \frac{\mathfrak{G} dz}{z+g} = \alpha l(z+f) + \mathfrak{G} l(z+g)$; proinde $nx = (z+f)^{\alpha} \times (z+g)^{\mathfrak{G}}$. Dat autem calculus $f = q - \sqrt{(qq+b)}$, $g = q + \sqrt{(qq+b)}$, $\alpha = (-q+\sqrt{(qq+b)}) : \sqrt{(qq+b)}$, $\mathfrak{G} = (q+\sqrt{(qq+b)}) : \sqrt{(qq+b)}$. Hinc fluit $nx = (z+q-\sqrt{(qq+b)})^{(-q+\sqrt{(qq+b)}) : \sqrt{(qq+b)}} \times (z+q+\sqrt{(qq+b)})^{(q+\sqrt{(qq+b)}) : \sqrt{(qq+b)}}$, vel elevando utrumque ad $\sqrt{(qq+b)}$, erit $(nx)^{\sqrt{(qq+b)}} = (z+q-\sqrt{(qq+b)})^{-q+\sqrt{(qq+b)}} \times (z+q+\sqrt{(qq+b)})^{q+\sqrt{(qq+b)}}$. Quia vero b arbitrarium, erit ipsum $\sqrt{(qq+b)}$ arbitrarium; ponatur ergo $\sqrt{(qq+b)} = e$. Unde emergit $(nx)^e = (z+q-e)^{-q+e} \times (z+q+e)^{q+e}$; resubstituendo pro z ejus valorem $\sqrt{y}$, & scribendo a pro n^e, prodit tandem æquatio inter x & y, quæ hæc est $ax^e = (\sqrt{y}+q-e)^{-q+e} \times (\sqrt{y}+q+e)^{q+e}$; complectens omnes possibiles curvas huic æquationi $ddy\sqrt{y} = qdxdy : x$ respondentes.

Coroll. VII.

Liceat denique addere hoc *Corollarium*, quo relinquitur n in tota sua extensione: sed ponatur arbitraria $b = 0$, vocetur-que $1 - m = h$, erit pro casu *Coroll.* 2. $lnx = \int (h dy : (hy + qy^b)) = \int (hy^{-b} dy : (hy^{1-b} + q)) = \frac{1}{1-b} l(hy^{1-b} + q)$. Hinc ergo assumpto a pro n^{1-b} provenit $ax^{1-b} = hy^{1-b} + q$, hoc est $ax^m = (1-m)y^m + q$, quæ quidem pro qua-libet m respondet æquationi $y^m ddy = qdxdy : x$, sed non om-nes possibiles curvas complectitur.

RE-

REDUCTIO

æquationis $y^m d d y = q x^n dx^p dy^{2-p}$

ad genus Parabolarum.

Sit æquatio formulæ propositæ respondens $y = \alpha x^{\zeta}$; proinde $dy = \alpha\zeta x^{\zeta-1} dx$, & $ddy = (\alpha\zeta\zeta - \alpha\zeta) x^{\zeta-2} dx^2$. His valoribus in proposita surrogatis, orietur $(\alpha^{m+1}\zeta\zeta - \alpha^{m+1}\zeta) x^{\zeta m+\zeta-2} dx^2 = q\alpha^{2-p}\zeta^{2-p} x^{n+p-2+2\zeta-\zeta p} dx^2$. Ut ambo membra identificentur, æquandi sunt coëfficientes, ut & exponentes, nimirum:

A . . . $\alpha^{m+1}\zeta\zeta - \alpha^{m+1}\zeta = q\alpha^{2-p}\zeta^{2-p}$.

B . . . $\zeta m + \zeta - 2 = n + p - 2 + 2\zeta - \zeta p$.

Ex æquatione B habetur $\zeta = (n+p) : (m+p-1)$, quo substituto pro ζ in æquatione A, resultabit $\alpha = \left(\frac{q.(n+p)^{1-p} \times (m+p-1)^p}{n-m+1}\right)^{1:(m+p-1)}$

& hoc modo fiet $y = \alpha x^{\zeta} = \left(\frac{q.(n+p)^{1-p} \times (m+p-1)^p}{n-m+1}\right)^{1:(m+p-1)}$ $x^{(n+p):(m+p-1)}$. Adeoque $(n-m+1) y^{m+p-1} = (q.(n+p)^{1-p} \times (m+p-1)^p) x^{n+p}$ *Q. E. F.*

COROLL. I.

Pro casu speciali $yyddy = xdx^2$, ubi $m = 2$, $n = 1$, $p = 2$, $q = 1$, habetur $0y^3 = 3x^3$; proinde $x = 0$, pro qualibet y.

COROLL. II.

Si $m+p = 1$, erit $(n-m+1) = 0\, x^{n+p} = 0$. Quod est contradictio, nisi forsan $n-m+1 = 0$, seu $n+1 = m$; adeoque $n+1+p = 1$, unde $p = -n$.

COROLL. III.

Si $n+p = 0$, erit $(n-m+1) y^{m+p-1} = 0$; proinde $y = 0$ pro qualibet x.

PROBLE-

N°. CLXIII.

PROBLEMA.

Rectificare Curvam datam, per aliam formulam quam per $\int\sqrt{(dx^2+dy^2)}$.

Solutio.

Sit curva ABC primo rectangula, hoc est, cujus tangentes in punctis extremis A & C sint sibi invicem perpendiculares. Sint AF vel NB $=x$, FB vel AN $=y$, arcus AB $=s$, radius osculi in B seu BM $=r$. Sit applicata ultima KC vel AE $=b$; sit EG perpendicularis ad tangentem BH, adeoque parallela ipsi BM. TAB. LXXVIII. N°. CLXIII *Fig.* 1.

Erit HN $= xdy : dx$, unde HE $= xdy : dx + b - y$. Porro $ds : dx =$ BH : BN $=$ HE : EG; unde EG $= (xdy + (b-y)dx) : ds$. Fiat nunc MB $[r]$: EG $[(xdy+(b-y)dx) : ds] = ds$ ad quartam, erit hæc quarta $= (xdy+(b-y)dx) : r$. Atqui per naturam Reptoriarum [alibi demonstratam a me] ejus integrale, per totam curvam ABC sumtum, dat ipsam longitudinem curvæ ABC, seu totam s; quod est Theorema habens in quibusdam exemplis elegantes proprietates.

Exemplum I.

Sit curva ABC Elastica notissima, seu Lintearia, cujus natura hæc est, ut sit $y = \int(xxdx : \sqrt{(1-x^4)})$, nominando scilicet ultimam applicatam KC vel AE $= b$, & ultimam abscissam AK vel EC $= 1$. Notum est etiam quemlibet arcum AB esse $\int(dx : \sqrt{(1-x^4)})$; invenitur vero $r = 1 : 2x$, qui-

bus ſubſtitutis, prodit $(x\,dy+(b-y)\,dx) : r = (2x^4\,dx + 2x(b-y)\,dx\,\sqrt{(1-x^4)}) : \sqrt{(1-x^4)} = 2x^4\,dx : \sqrt{(1-x^4)} + 2x\,dx\,(b-y)$. Integretur, quoad fieri poteſt; eritque pro arcu AB, quod ſequitur; $2\int(x^4\,dx : \sqrt{(1-x^4)}) + bxx - yxx + \int x\,x\,dy = [\text{ob } x\,x\,dy = x^4\,dx : \sqrt{(1-x^4)}]\; 3\int(x^4\,dx : \sqrt{(1-x^4)}) + x\,x\,(b-y)$; unde tota curva ABC [ubi $b = y$] erit $= 3\int(x^4\,dx : \sqrt{(1-x^4)})$, adeoque evadente $x = 1$, habebimus hanc proprietatem, ut ſit $\int(dx : \sqrt{(1-x^4)}) = 3\int(x^4\,dx : \sqrt{(1-x^4)})$.

EXEMPLUM II.

Sit nunc curva ABC generalius expreſſa per $y = \int(x^n\,dx : \sqrt{(1-x^{2n})})$; reliquis poſitis ut prius; erit quilibet arcus $AB = \int(dx : \sqrt{(1-x^{2n})})$, & reperietur $r = 1 : n\,x^{n-1}$. Hiſce ſubſtitutis in generali $(x\,dy+(b-y)\,dx) : r$, prodibit $(x\,dy+(b-y)\,dx) : r = n\,x^{2n}\,dx : \sqrt{(1-x^{2n})} + n\,x^{n-1}\,dx\,(b-y)$. Quod integratum, quoad fieri poteſt, dabit arcum $AB = n\int(x^{2n}\,dx : \sqrt{(1-x^{2n})}) + b\,x^n - y\,x^n + \int x^n\,dy = [\text{ob } x^n\,dy = x^{2n}\,dx : \sqrt{(1-x^{2n})}]\; (n+1)\int(x^{2n}\,dx : \sqrt{(1-x^{2n})}) + (b-y)\,x^n$. Unde exiſtente $b = y$, evaneſcet ſecundus terminus $x^n\,(b-y)$; eritque tota curva ABC $= (n+1)\int(x^{2n}\,dx : \sqrt{(1-x^{2n})})$; proinde evadente $x = 1$, erit hæc proprietas, ut ſit ſemper $\int(dx : \sqrt{(1-x^{2n})}) = (n+1)\int(x^{2n}\,dx : \sqrt{(1-x^{2n})})$.

COROLLARIUM.

In caſu quo $n = 2$, incidimus in exemplum præcedens: ſed ſi $n = 1$, erit $\int(dx : \sqrt{(1-xx)}) = 2\int(xx\,dx : \sqrt{(1-xx)})$, quod utrumque dependet a circulo; & examinando per communem viam, deprehendentur ambo membra, in ſuppoſitione $x = 1$, deſinere

desinere in quadrantes circulorum æqualium, id quod generalem nostram methodum mirifice confirmat.

TAB. LXXVIII. N°. CLXXIII. Fig. 2 & 3.

Sit nunc curva ABC obliquangula, hoc est, sit angulus ACE acutus; manente interim angulo CAE recto.

Pro hoc casu, ex puncto C ducta sit tangens CL, in eamque normalis EL. Ex dato angulo acuto ECL & ex data longitudine CE, dabitur utique CL, quæ dicatur $= t$.

Jam ad faciendum angulum ACE rectum, concipiatur ad extremitatem C adjungi arculum radii infinite parvi, qui centrum habeat in recta EC, ipsique C quam proximum, ita ut coalescat cum curva ABC; faciatque hoc pacto angulum rectum cum CA, nempe angulum KCE. Res ista talem habet faciem ut videre est in *Figura* 3; ubi ABC est curva proposita, ad cujus extremitatem C, adjunctus concipitur arculus circuli C*c*, cujus radius infinite parvus CO vel *c*O, ita ut centrum O sit in ultima applicata *c*E, quæ ab ipsa CE distare non censetur; sicuti pariter AB*c* ab ipsa ABC longitudine non differt. Sic itaque A*c*E jam est rectus, cum antea alter ACE esset acutus; adeoque jam considerabimus AB*c* tanquam curvam in casu *Fig.* 1. Ut autem habeatur summa omnium elementorum $(x\,dy + (b - y)\,dx) : r$ pro toto arcu AB*c*, addenda ei est summa eorum quæ pertinent ad arculum circularem C*c*, quæ ut facile intelligitur æqualis est ipsi tangenti CL, hoc est $= t$. Hinc longitudo arcus ABC seu AB*c* $= t + \int((x\,dy + (b - y)\,dx) : r)$.

Exemplum.

Sit ABC iterum Elastica, non integra quidem, sed tantum ejus portio, cujus altitudo vel ultima applicata KC, vel AE, nominetur iterum b; abscissa vero ultima AK, vel EC, quæ antea erat $= 1$, nunc sit $= a$; erit, ex natura Elasticæ, tangens CL seu $t = a\sqrt{(1 - a^4)}$; adeoque longitudo curvæ ABC seu AB*c*, hoc est, $t + \int((x\,dy + (b - y)\,dx) : r) = a\sqrt{(1 - a^4)} + 3\int(x^4\,dx : \sqrt{(1 - x^4)})$; ubi notandum integrationem instituendam

tuendam esse, non per totam unitatem, sed tantum per ejus portionem a; atque ita habebimus, evadente $x = a$, hanc proprietatem, ut sit $\int (dx : \sqrt{(1 - x^4)}) = a\sqrt{(1 - a^4)} + 3\int (x^4 dx : \sqrt{(1 - x^4)})$. Similiter in aliis procedendum.

Coroll. I.

Si a sumitur = toti unitati, evanescit $a\sqrt{(1 - a^4)}$, eritque tantum $\int (dx : \sqrt{(1 - x^4)}) = 3\int (x^4 dx : \sqrt{(1 - x^4)})$, ut fieri par est; relabimur enim in primum casum supra explicatum.

Coroll. II.

Hinc in omni casu, modo a sit minor unitate, erit $\int (dx : \sqrt{(1 - x^4)}) - 3\int (x^4 dx : \sqrt{(1 - x^4)})$, hoc est, $\int ((dx - 3x^4 dx) : \sqrt{(1 - x^4)}) = a\sqrt{(1 - a^4)}$; adeoque integrabilis, in casu quo x evadit $= a$.

N°. CLXIV.

DE TRANSFORMATIONIBUS ET RECTIFICATIONIBUS CURVARUM.

PROBLEMA I.

Curvas parabolicas cujusvis gradus transformare in alias alius generis curvas algebraicas, ejusdem longitudinis.

Sit numerus potestatis, a qua denominatur Parabola, $= n$; parameter $= 1$; unde æquatio ad Parabolam $x^n = y$; ideoque elementum curvæ $= \sqrt{(nn x^{2n-2} dx^2 + 1 dx^2)}$. Jam ut habeantur duæ aliæ coordinatæ quam x^n & x, oportet quadratum

tum elementi curvæ $nnx^{2n-2}dx^2 + 1dx^2$ disponere in duo alia quadrata, quorum latera sunt integrabilia; hæc autem quadrata sunt, $nnx^{2n-2}dx^2 - 2nx^{n-1}dx^2 + dx^2$ & $+2nx^{n-1}dx^2$; quorum radices sunt, $\pm nx^{n-1}dx \mp dx$ & $\pm\sqrt{2n}\,x^{n-1}dx^2$; earum ergo integralia $\pm x^n \mp x$ & $\pm \frac{2}{n+1}x^{(n+1):2}\sqrt{2n}$ erunt coordinatæ curvæ novæ ipsi Parabolæ longitudine æqualis.

In Parabola communi, ubi $n=2$, erunt novæ coordinatæ $\pm xx \mp x$ & $\frac{4}{3}x^{3:2}$, unde si ponatur $xx - x = s$ & $\frac{4}{3}x^{3:2} = t$, reperietur, pro natura curvæ novæ, hæc æquatio [sumta a pro constante ad implendas homogeneas] $81t^4 = \pm 432astt + 144aatt \pm 256as^3$.

PROBLEMA II.

Idem præstare pro curvis hyperbolicis cujusvis gradus, ad asymtoton.

Sit numerus potestatis, a qua denominatur Hyperbola $= n$; latus constans $= 1$; unde æquatio ad Hyperbolam, $y = 1 : x^n$; ideoque elementum curvæ $= \sqrt{(nnx^{-2n-2}dx^2 + 1dx^2)}$. Reliqua faciendo ut supra, reperietur, pro coordinatis novæ curvæ ipsi Hyperbolæ longitudine æqualis, $+x^{-n} + x$, & $\frac{2}{1-n}x^{(1-n):2}\sqrt{2n}$.

SCHOLIUM.

In Hyperbola communi regula nostra cessat; altera enim ordinata curvæ novæ evadit infinita: unde nihil habetur. Ad hunc defectum resarciendum, en alium modum. Quadratum elementi curvæ, $x^{-4}dx^2 + 1dx^2$, distribui poterit in duo alia quadrata, si ponamus radicem unius esse $-x^{-2}dx + mx^p dx$, ideoque quadratum $x^{-4}dx^2 - 2mx^{p-2}dx^2 + mmx^{2p}dx^2$; si

auferatur a $x^{-4}dx^2 + 1dx^2$, remanebit $2mx^{p-2}dx^2 - mmx^{2p}dx^2 + 1dx^2$, quod ut fiat quadratum perfectum, oportet duplum rectangulum inter radices partium signo + affectarum æquari parti signo — affectæ, id est $2x^{\frac{1}{2}p-1}\sqrt{2m} = mmx^{2p}$; adeoque, ut tam dimensiones quam coëfficientes ipsius x utrobique sint eædem, erunt $\frac{1}{2}p - 1 = 2p$ & $2\sqrt{2m} = mm$; unde discimus sumendum esse $p = -\frac{2}{3}$ & $m = 2$; ergo radices duorum quadratorum quæsitorum erunt $-x^{-2}dx + 2x^{-\frac{2}{3}}dx$ & $-2x^{-\frac{4}{3}}dx + 1dx$, quarum itaque integralia $x^{-1} + 6x^{1:3}$ & $6x^{-1:3} + x$, seu, usurpando expressiones communes, $1 : x + 6\sqrt[3]{x}$ & $6 : \sqrt[3]{x} + x$, dabunt coordinatas curvæ novæ ipsi Hyperbolæ ordinariæ longitudine æquales.

NB. Hæc Regula etiam porrigitur ad Parabolas & Hyperbolas in genere, cujusvis sint gradus.

PROBLEMA III.

Invenire curvam algebraïcam, cujus partes sint proportionales segmentis circuli.

Posito radio circuli $= 1$, & abscissa super diametro ex centro sumta $= x$, erit elementum spatii circularis, seu differentia duorum semi-segmentorum $= dx\sqrt{(1 - xx)}$; hoc ergo in elementum curvæ alicujus transformandum est, quod sic facio; quadratum elementi $1dx^2 - xxdx^2$ distribuatur in duo quadrata, latera habentia integrabilia; sumendo pro uno $1dx^2 - 2mxxdx^2 + mmx^4dx^2$, & pro altero $2mxxdx^2 - xxdx^2 - mmx^4dx^2$, [hæc enim simul faciunt $1dx^2 - xxdx^2$]; eorum autem latera sunt $\pm 1dx \mp mxxdx$ & $xdx\sqrt{(2m - 1 - mmxx)}$, quorum integralia $\pm x \mp \frac{1}{3}mx^3$, & $\frac{2m-1-mmxx}{3mm}\sqrt{(2m - 1 - mmxx)}$, erunt coordinatæ quæsitæ.

PRO-

PROBLEMA IV.

Data portione curvæ parabolicæ communis; invenire aliam curvam algebraicam, cum qua juncta illa portio parabolica sit rectificabilis.

Conf. Num. XLIX, Tom. I, *pag.* 251.

Esto proposita portio parabolica AB, vertex A, semi-parameter AD; centro A & semiaxe transverso AD descripta Hyperbola æquilatera DE, facit [ut notum est] spatium ADEC æquale rectangulo sub recta DA & curva AB; huicque per consequens proportionale. Si ergo etiam ad complementum hujus spatii, nempe ad DFE, invenitur curva proportionalis, erit utique inventa, una cum data AB, proportionalis toti spatio, seu rectangulo CF; adeoque rectificabilis. Id autem sic efficitur: Ponatur $AD = a$, $DF = x$; erit $FE = \sqrt{(2ax + xx)}$ & quadratum differentiæ spatii $DFE = 2axdx^2 + xxdx^2$, quod manifeste distribuitur in duo quadrata $2axdx^2$ & $xxdx^2$ latera habentia $dx\sqrt{2ax}$ & xdx integrabilia; quippe quæ sunt $\frac{2}{3}x\sqrt{2ax}$ & $\frac{1}{2}xx$. Si igitur fiat nova curva AG, cujus coordinatæ AH, HG sint $xx : 2a$ & $2x\sqrt{2ax} : 3a$, erit composita GAB rectificabilis, nempe æqualis rectangulo CF diviso per AD.

TAB. LXXVIII. N°. CLXIV. *Fig.* 1.

SCHOLIUM.

Ut habeatur natura curvæ AG, ponatur AH, seu $xx : 2a = r$, & HG seu $2x\sqrt{2ax} : 3a = t$; reperietur hæc æquatio $512ar^3 = 81t^4$, quæ docet curvam AG esse Parabolam cubico-biquadraticam, cujus parameter $= \frac{512}{81}a = 6\frac{26}{81}a = 3\frac{15}{81}$ parametri Parabolæ propositæ. Poterit jam, omissa Hyperbola DE, Problema confici. Est enim BI normalis ad Parabolam æqualis ipsi FA, ideoque centro I, radio IL subtangente, æquali nimirum semi-parametro DA, descriptus arcus LK relinquet $BK = x = DF$; quocirca si ad parametrum Parabolæ & ad BK sumatur tertia proportionalis AH; erit, ducta applicata, arcus AG quæsitus, qui cum AB æquatur lineæ rectæ IM,

quæ habetur prolongando CB, cui occurrit recta IM ad BI perpendicularis; erit enim $IM = \frac{IB \times BI}{LI} = \frac{AC \times CE}{AD}$.

PROBLEMA V.

Invenire curvam algebraïcam, cum qua datus arcus circuli sit rectificabilis.

TAB. LXXXVIII. N°. CLXIV. *Fig. 2.*

Sit semi-circulus EAF, centrum C, perpendicularis CA, arcus datus AB: qui multiplicatus per $\frac{1}{2}$ CA producit sectorem CAB. Ductis AH & BG parallelis diametro occurrentibus perpendiculari EH; quæremus curvam algebraïcam, quæ multiplicata per $\frac{1}{2}$ CA producat spatium AHGB: evidens enim est illam curvam satisfacturam, quippe quæ cum arcu AB conjuncta, & multiplicata per $\frac{1}{2}$ CA, producit rectilineum CAHGBC. Illam autem invenimus hoc modo: Sit $CA = a$, $CD = x$, erit differentiale spatii $AHGB = (ax - xx)\,dx : \sqrt{(aa - xx)}$, adeoque elementum curvæ quæsitæ $= (2x - 2xx : a)\,dx : \sqrt{(aa - xx)}$; cujus quadratum $(4xx - \frac{8x^3}{a} + \frac{4x^4}{aa})\,dx^2 : (aa - xx)$ distribuendum est duas partes latera habentes integrabilia. Ponantur pro lateribus quæsitis $(mx\sqrt{(1:a)} + nxx\sqrt{(1:a^3)})\,dx : \sqrt{(a - x)}$ & $(px\sqrt{(1:a)} + qxx\sqrt{(1:a^3)})\,dx : \sqrt{(a + x)}$; horumque quadrata $(mmxx : a + 2mnx^3 : aa + nnx^4 : a^3)\,dx^2 : (a - x)$ & $(ppxx : a + 2pqx^3 : aa + qqx^4 : a^3)\,dx^2 : (a + x)$ in unam summam collecta

$$\left.\begin{array}{l} +mmxx + 2mnx^3 : a + nnx^4 : aa \\ \quad + mmx^3 : a + 2mnx^4 : aa + nnx^5 : a^3 \\ +ppxx + 2pqx^3 : a + qqx^4 : aa \\ \quad - ppx^3 : a - 2pqx^4 : aa - qqx^5 : a^3 \end{array}\right\} dx^2 : (aa - xx)$$

debent æquari quadrato elementi curvæ quæsitæ $(4xx - 8x^3 : a + 4x^4 : aa)\,dx^2 : (aa - xx)$; ideoque si omisso denominatore communi $aa - xx$, æquationes instituantur inter terminos pari utrobique dimensione ipsius x affectos, nempe $mm + pp = 4$

$2mn$

$2mn + mm + 2pq - pp = -8$, $nn + 2mn + qq - 2pq = 4$, & $nn - qq = 0$, quibus reductis incipiendo a postrema æquatione, reperietur tandem hæc æquatio $n^8 + 24n^4 + 16 = 8n^6 + 32nn$. Quæ ut porro reduci possit, subtrahendum est ab utroque membro $32n^4$ & remanebit $n^8 - 8n^4 + 16 = 8n^6 - 32n^4 + 32nn$; extracta utrobique radice, provenit $n^4 - 4 = (2n^3 - 4n)\sqrt{2}$; diviso utroque per $nn - 2$, habebitur $nn + 2 = 2n\sqrt{2}$, adeoque $n = \sqrt{2}$; unde si per calculum quærantur valores reliquarum litterarum, patebit omnes inter se & ipsi n fore æquales; nimirum $q = p = m = n = \sqrt{2}$; hoc tamen cum discrimine ut si n & q sint affirmativæ, reliquæ m & p debeant esse negativæ, vel vice versa; $q = -p = -m = n = \pm\sqrt{2}$; erunt itaque $(\mp x\sqrt{(2:a)} \pm xx\sqrt{(2:a^3)})\,dx : \sqrt{(a-x)}$ & $\mp x\sqrt{(2:a)} \pm xx\sqrt{(2:a^3)}\,dx : \sqrt{(a+x)}$ differentiales coordinatarum curvæ quæsitæ, quarum ergo integrales $(\pm 4aa \pm 2ax \mp 6xx)\sqrt{(2a-2x)} : 15a\sqrt{a}$, & $(\pm 12aa \mp 6ax \pm 2xx)\sqrt{(2a+2x)} : 5a\sqrt{a}$ dabunt ipsas coordinatas, adeoque etiam ipsam curvam algebraïcam quæsitam. *Q. E. F.*

Hæc ergo curva, una cum arcu AB, erit æqualis spatio CAHGB diviso per $\frac{1}{2}a$, æquali $2a - \frac{2a+x}{a}\sqrt{(aa-xx)} =$ lineæ rectæ. Unde in casu CD = CE, erit compositum ex arcu, seu quadrante AE, & curva, æquale diametro.

ALITER.

Sit jam ED $= x$; erit, per prius dicta, quadratum elementi curvæ quæsitæ $(4xx - 8x^3 : a + 4x^4 : aa)dx^2 : (2ax - xx)$; quod ut distribui possit in duas partes latera habentes integrabilia, ponatur pro lateribus quæsitis $(mx\sqrt{(1:a)} + nxx\sqrt{(1:a^3)})\,dx : \sqrt{(2a-x)}$ & $(px\sqrt{(1:a)} + qxx\sqrt{(1:a^3)})\,dx : \sqrt{x}$, quorum quadrata si in unam colligantur summam provenit

$$\frac{\begin{array}{l}2ppxx + 4pqx^3 : a + 2qqx^4 : aa \\ \quad - ppx^3 : a - 2pqx^4 : aa - qqx^5 : a^3 \\ \quad + mmx^3 : a + 2mnx^4 : aa + mnx^5 : a^3\end{array}}{2ax - xx}\,dx^2 = \frac{4xx - 8x^3 : a + 4x^4 : aa}{2ax - xx}\,dx^2$$

institutis æquationibus inter terminos homogeneos, pervenitur ad hanc æquationem $n^4 + 2n^3\sqrt{2} + 4nn + 4n\sqrt{2} + 4 = 0$, cujus radix est $n = -\sqrt{2}$; reliquis factis, ut supradictum, reperietur iterum $q = -p = -m = n = \pm\sqrt{2}$. Erunt itaque $(\mp x\sqrt{(2:a)} \pm xx\sqrt{(2:a^3)})dx : \sqrt{(2a-x)}$ & $(\mp x\sqrt{(2:a)} \pm xx\sqrt{(2:a^3)})dx : \sqrt{x}$ differentiales coordinatarum curvæ quæsitæ, quarum ergo integrales $(\mp 8aa \mp 2ax \mp 2xx)\sqrt{(4a-2x)} : 5a\sqrt{a}$ & $(\mp 10ax \pm 6xx)\sqrt{2x} : 15a\sqrt{a}$ dabunt coordinatas ipsas, hoc est curvam quæsitam, quæ cum arcu BE erit = spatio CBGE diviso per $\frac{1}{2}a = \frac{a+x}{a}\sqrt{(2ax-xx)}$ = lineæ rectæ. Unde in casu ED = EC, erit arcus, seu quadrans AE, cum curva, æqualis diametro, ut ante.

N°. CLXV.

DE EVOLUTIONE SUCCESSIVA ET ALTERNANTE

Curvæ cujuscunque in infinitum continuata, tandem Cycloidem generante;

SCHEDIASMA CYCLOMETRICUM.

TAB. LXXVIII. N°. CLXV.

SIT curva quælibet ADB, cujus tangentes in A & B ad se invicem perpendiculares, atque ideo oppositis coordinatis parallelæ; productis itaque axe CA & tangente BF in infinitum, evolvi intelligatur ADB, incipiendo evolutionem in A; quæ inde describitur AEF, evolvatur quoque incipiendo a fine F, & inde descripta FGH porro evolvatur initio facto ab H, & sic fiat in infinitum alterna evolutio, inchoando quamlibet evolutionem a puncto in quo præcedens finitur. Dico post evolutiones in infinitum continuatas, curvas tunc postremo generatas fore Cycloides identicas, qualiscunque fuerit primitiva curva ADB, ex qua reliquæ generantur. Et quidem tam

tam promte convergunt ad Cycloidem, ut, poſt paucas evolutiones, ab ea ſenſibiliter non diſcrepent generatæ per evolutionem.

Hujus rei veritas attente conſideranti facile patebit.

Sit nunc ADB quadrans circuli, cujus longitudo dicatur $= a$, radius CA vel CB $= 1$; dicantur etiam AEF $= b$, HIK $= c$, MNO $= e$, QRS $= f$, &c. Ex puncto quolibet D ducta tangente DE, agantur etiam tangentes EG GI, IL, LN, &c. quæ alternatim ad ſe invicem erunt parallelæ, DE, GI, LN &c. ut & EG, IL, LP &c. conſtituuntque angulos rectos in, E, G, I, L &c.

Ponatur AD $= z$, erit $1 : dz =$ ED : dAE $=$ GE : dHG $=$ IG : dHI $=$ LI : dMC $=$ NL : dMN $=$ &c. Sunt autem ex natura evolutionis, rectæ ED, IG NL, &c. æquales arcubus reſpective ſumtis AD, HG, ML, &c. Et rectæ GE, LI, PN, &c. $=$ FE, KI, ON &c. hoc eſt $= b -$ AE, $c -$ HI, $e -$ MN &c. Hinc invenitur AE $= \frac{zz}{1.2}$, HG $= bz - \frac{z^3}{1.2.3}$ HI $= \frac{bzz}{1.2} - \frac{z^4}{1.2.3.4}$, ML $= ez - \frac{bz^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5}$, MN $= \frac{czz}{1.2} - \frac{bz^4}{1.2.3.4} + \frac{z^6}{1.2.3..6}$, QP $= ez - \frac{cz^3}{1.2.3} + \frac{bz^5}{1.2.3.4.5} - \frac{z^7}{1.2.3...7}$, QR $= \frac{ezz}{1.2} - \frac{ez^4}{1.2.3.4} + \frac{bz^6}{1.2.3..6} - \frac{z^8}{1.2.3....8}$ &c. His in ordinem digeſtis, ſequentes duas formo Tabellas, quarum prior ſervit pro curvis, quæ tangunt inferiorem parallelam CQ, altera pro iis, quæ tangunt ſuperiorem BS.

TAB. I.

$$AE = \frac{zz}{1.2}$$

$$HI = \frac{bzz}{1.2} - \frac{z^4}{1.2.3.4}$$

$$MN = \frac{czz}{1.2} - \frac{bz^4}{1.2.3.4} + \frac{z^6}{1.2.3..6}$$

$$QR = \frac{ezz}{1.2} - \frac{cz^4}{1.2.3.4} + \frac{bz^6}{1.2.3..6} - \frac{z^8}{1.2.3....8}$$

&c. = &c.

TAB. II.

$$AD = z$$

$$HG = bz - \frac{z^3}{1.2.3}$$

$$ML = cz - \frac{bz^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5}$$

$$QP = ez - \frac{cz^3}{1.2.3} + \frac{bz^5}{1.2.3.4.5} - \frac{z^7}{1.2.3...7}$$

&c. = &c.

Abeunte D in B, fiet $z = a$; quo ſubſtituto ubique, habebitur AEF ſeu b, HIK ſeu c, MNO ſeu e, QRS ſeu f, &c. earumque evolutæ, ADB, HGF, MLK, QPO &c. unde ſequentes duæ conduntur Tabulæ.

TAB. III.

$$AEF = b = \frac{aa}{1.2}$$

$$HIK = c = \frac{baa}{1.2} - \frac{a^4}{1.2.3.4}$$

$$MNO = e = \frac{caa}{1.2} - \frac{ba^4}{1.2.3.4} + \frac{a^6}{1.2.3..6}$$

$$QRS = f = \frac{eaa}{1.2} - \frac{ca^4}{1.2.3.4} + \frac{ba^6}{1.2.3..6} - \frac{a^8}{1.2.3....8}$$

&c. $= g =$ &c.

TAB. IV.

TAB. IV.

$$ADB = a$$

$$HGF = ba - \frac{a^3}{1.2.3}$$

$$MLK = ca - \frac{ba^3}{1.2.3} + \frac{a^5}{1.2.3.4.5}$$

$$QPO = ea - \frac{ca^3}{1.2.3} + \frac{ba^5}{1.2.3.4.5} - \frac{a^7}{1.2.3...7}$$

$$\&c. = \&c.$$

Quod si jam appropinquare lubeat ad determinandam veram rationem diametri ad circumferentiam Circuli, sumo aliquam ex curvis TAB. III determinatis, tanquam veram Cycloidem considerando, utpote a qua post paucas evolutiones nihil fere discrepat: deinde substituo successive valores ipsarum b, c, e &c. donec perveniam ad curvam quam seligo, ex. gr. ad QRS, quæ post septimam evolutionem producitur; & sic oriuntur longitudines singularum curvarum per quadrantes circulares expressæ, ut videre est in sequenti Tabella.

TAB. V.

$$AEF = b = aa \times \frac{1}{1.2}$$

$$HIK = c = a^4 \times \frac{5}{1.2.3.4}$$

$$MNO = e = a^6 \times \frac{61}{1.2.3..6}$$

$$QRS = f = a^8 \times \frac{1385}{1.2.3....8}$$

Cum itaque QRS habeatur pro semi-Cycloide, cujus basis est erecta perpendicularis $QT = CB = 1$, & proinde ST diameter circuli ejus generatoris, cujus diametri duplum $=$ QRS; erit $QT : 2ST\,[QRS] =$ ut semicircumferentia ad 2 diametros $=$ ADB: 2AC. Adeoque $1 : a^8 \times \frac{1385}{1.2.3....8} = a : 2$;

unde sequitur $a^9 = \frac{2 \times 1.2.3.4...8}{1385} = \frac{16128}{277}$; atque extracta radice nonæ potestatis, fit $a = \frac{135}{86}$, seu $4a = \frac{270}{43}$, hoc, est, circumferentia continet radium $6\frac{12}{43}$, ipsumque adeo diametrum $3\frac{6}{43}$ vicibus, quod monstrat rationem paulo minorem *Archimedea*, quæ est $3\frac{1}{7}$, vel $3\frac{6}{43}$. Per logarithmos calculus est facilior.

SCHOLIUM.

Potest autem facilius indagari ratio inter circumferentiam circuli & diametrum, sine extractione radicum, & sine comparatione Cycloidis: Considerando nimirum, post evolutiones multoties repetitas, tandem longitudines curvarum utriusque ordinis convergere ad sensibilem æqualitatem. Quocirca si æquatio instituatur inter curvas utriusque ordinis, sat bene a prima remotas, quarum una ex altera generatur, ex. gr. QRS ex QPO, dabitur statim ratio inter quadrantem circularem ejusque radium quam proxime; etenim valor generatæ expressus per a ad potestatem elevatam cujus exponens æqualis est numero curvarum, semper una tantum dimensione major est, quam valor curvæ generantis, seu immediate præcedentis.

Condenda est in hunc finem Tabula VI, ex supputatione curvarum Tab. IV, exhibitarum; eaque ita se habet, ut monstrat Tabula sequens.

TAB. VI.

$$ADB = a$$

$$HGF = ba - \frac{a^3}{1.2.3} = a^3 \times \frac{2}{1.2.3}$$

$$MLK = ca - \frac{ba^3}{1.2.3} + \frac{a^5}{1.2.3.4.5} = a^5 \times \frac{16}{1.2.3.4.5}$$

$$QPO = ea - \frac{ca^3}{1.2.3} + \frac{ba^5}{1.2.3.4.5} - \frac{a^7}{1.2.3...7} = a^7 \times \frac{272}{1.2.3...7.}$$

Ponamus

Ponamus itaque QRS = QPO, & habebimus $a^8 \times \frac{1385}{1.2.3...8}$ $= a^7 \times \frac{272}{1.2.3...7}$; unde dividendo per a^7, & reducendo numeros ad unam partem, obtinemus ſtatim $a = \frac{2176}{1385}$, adeoque $2a = \frac{4352}{1385}$, & ſic erit ſemicircumferentia ad radium, ſive tota circumferentia ad diametrum, ut 4352 ad 1385. Ut pateat quam parum abludat a proportione *Archimedea*, fiat ut 22 ad 7, ita 4352 ad quartum, qui erit $1384\frac{8}{11}$, hoc eſt $\frac{3}{11}$ unitatis minor quam 1385, adeoque noſtra analogia tantillo minor eſt, quam *Archimedea*. Scimus autem *Archimedeam* [utpote juſto majorem] in exceſſu peccare; noſtra igitur proprius ad veram accedit.

Si quis vellet Tabulas noſtras 5^{am} & 6^{am} per aliquot adhuc gradus continuare, perveniret ſtatim ad numeros rationis incredibili modo veris appropinquantis.

Volumus autem utramque Tabulam una curva augere, quod, quomodo fiat, facile patet ex lege progreſſionis litterarum *b*, *c*, *e*, *f*, *g*, &c. atque lubet binas iſtas Tabulas conflare in unam Tab. VII extenſam ad decimam curvam a quadrante circuli ADB incluſive ſumpto. Ubi notandum, curvam ipſam ADB vocari I; AEF, II; HGF, III; HIK, IV; MLK, V; & ita ſequentes. Tabula VII, quæ inde formatur, hæc eſt.

TAB.

TAB. VII.

Curva I $= a$

..... II $= b = \frac{aa}{1.2}$

..... III $= ba - \frac{a^3}{1.2.3}$

..... IV $= c = \frac{baa}{1.2} - \frac{a^4}{1.2.3.4}$

..... V $= ca - \frac{ba^3}{1.2.3} + \frac{a^5}{1.2.3.4.5}$

..... VI $= e = \frac{caa}{1.2} - \frac{ba^4}{1.2.3.4} + \frac{a^6}{1.2.3...6}$

.... VII $= ea - \frac{ca^3}{1.2.3} + \frac{ba^5}{1.2.3.4.5} - \frac{a^7}{1.2.3..7}$

... VIII $= f - \frac{eaa}{1.2} - \frac{ca^4}{1.2.3.4} + \frac{ba^6}{1.2.3..6} - \frac{a^8}{1.2.3...8}$

... IX $= fa = \frac{ea^3}{1.2.3} + \frac{ca^5}{1.2.3.4.5} - \frac{ba^7}{1.2.3...7} + \frac{a^9}{1.2.3...9}$

X $= g = \frac{faa}{1.2} - \frac{ea^4}{1.2.3.4} + \frac{ca^6}{1.2.3...6} - \frac{ba^8}{1.2.3...8} + \frac{a^{10}}{1.2.3...10}$

XI $= ga - \frac{fa^3}{1.2.3} + \frac{ea^5}{1.2.3.4.5} - \frac{ca^7}{1.2.3....7} + \frac{ba^9}{1.2.3...9} - \frac{a^{11}}{1.2.3...11}$

XII $= h = \frac{gaa}{1.2} - \frac{fa^4}{1.2.3.4} + \frac{ea^6}{1.2.3...6} - \frac{ca^8}{1.2.3...8} + \frac{ba^{10}}{1.2.3...10} - \frac{a^{12}}{1.2.3...12}$

Generatio & continuatio hujus Tabulæ fiet manifesta, modo attendatur ad progressionem litterarum, b, c, e &c. & unius cujusque constructio ex præcedentibus. Aliquid laboris requiritur ad supputandos singularum litterarum valores; reperi autem [salvo errore calculi] fore eos, ut sequitur in hoc adjecto laterculo.

TAB.

TAB. VIII.

Curva I $= a = a(1)$

.... II $= b = a^2(\frac{1}{1.2})$

.... IV $= c = a^4(\frac{5}{24}) = a^4(\frac{5}{1.2.3.4})$

.... VI $= e = a^6(\frac{61}{1.2.3...6})$

.... VIII $= f = a^8(\frac{1385}{1.2.3....8})$

.... X $= g = a^{10}(\frac{50521}{1.2.3....10})$

.... XII $= b = a^{12}(\frac{2702765}{1.2.3.....12})$.

Ex his facile fupputantur curvæ intermediæ numerorum imparium: Erunt namque ordine, ut fequens monftrat laterculus.

TAB. IX.

Curva III $= a^3(\frac{2}{1.2.3})$

.... V $= a^5(\frac{16}{1.2.3.4.5})$

.... VII $= a^7(\frac{272}{1.2.3...7})$

.... IX $= a^9(\frac{7936}{1.2.3.....9})$

.... XI $= a^{11}(\frac{353792}{1.2.3.....11})$

Difponendo nunc ambos laterculos fecundum ordinem curvarum, prodit

TAB. X.

Curva I $= a\,(1)$

.... II $= a^2\,(\frac{1}{1.2})$

.... III $= a^3\,(\frac{2}{1.2.3})$

.... IV $= a^4\,(\frac{5}{1.2.3.4})$

.... V $= a^5\,(\frac{16}{1.2.3.4.5})$

.... VI $= a^6\,(\frac{61}{1.2.3...6})$

.... VII $= a^7\,(\frac{272}{1.2.3....7})$

.... VIII $= a^8\,(\frac{1385}{1.2.3.....8})$

.... IX $= a^9\,(\frac{7936}{1.2.3.....9})$

.... X $= a^{10}\,(\frac{50521}{1.2.3.....10})$

.... XI $= a^{11}\,(\frac{353792}{1.2.3.....11})$

.... XII $= a^{12}\,(\frac{2702765}{1.2.3.....12})$

.... XIII $= a^{13}\,(\frac{22368256}{1.2.3.....13})$

.... XIV $= a^{14}\,(\frac{199360981}{1.2.3.....14})$

Videamus nunc, quam promte convergant longitudines curvarum ad æqualitatem, & inde appropinquetur mira celeritate ad veram rationem inter quadrantem circuli & radium; id quod fit æquando ſucceſſive ſingularum valores cum valore proxime inſequentis. Ponatur itaque

I =

I = II. hoc est, $a = aa(\frac{1}{1.2})$. unde $a:1$ seu ratio quadrantis ad radium $= 2:1$, justo major.

II = III. h. e. $a^2(\frac{1}{2}) = a^3(\frac{2}{1.2.3})$: unde $a:1 = 3:2$, justo minor.

III = IV. h. e. $a^3(\frac{2}{1.2.3}) = a^4(\frac{5}{1.2.3.4})$. unde $a:1 = 8:5$..major.

IV = V. h. e. $a^4(\frac{5}{1.2.3.4}) = a^5(\frac{16}{1.2.3.4.5})$. unde $a:1 = 25:16$..minor.

V = VI. h. e. $a^5(\frac{16}{1.2.3.4.5}) = a^6(\frac{61}{1.2.3....6})$. unde $a:1 = 96:61$..major.

VI = VII. h. e. $a^6(\frac{61}{1.2.3....6}) = a^7(\frac{272}{1.2.3....7})$. unde $a:1 = 427:272$..minor.

VII = VIII. h. e. $a^7(\frac{272}{1.2.3....7}) = a^8(\frac{1385}{1.2.3..8})$. unde $a:1 = 2176:1385$..major.

VIII = IX. h. e. $a^8(\frac{1385}{1.2.3..8}) = a^9(\frac{7936}{1.2.3..9})$. unde $a:1 = 12456:7936$..minor.

IX = X. h. e. $a^9(\frac{7936}{1.2.3..9}) = a^{10}(\frac{50521}{1.2.3...10})$. unde $a:1 = 79360:50521$..major.

X = XI. h. e. $a^{10}(\frac{50521}{1.2.3..10}) = a^{11}(\frac{353792}{1.2.3...11})$. unde $a:1 = 555731:353792$..minor.

XI = XII. h. e. $a^{11}(\frac{353792}{1.2.3..11}) = a^{12}(\frac{2702765}{1.2.3..12})$. unde $a:1 = 4245504:2702765$. major.

XII = XIII. h. e. $a^{12}(\frac{2702765}{1.2.3...12}) = a^{13}(\frac{22368256}{1.2.3....13})$. unde $a:1 = 35135945:22368256$. min.

XIII = XIV. h. e. $a^{13}(\frac{22368256}{1.2.3....13}) = a^{14}(\frac{199360981}{1.2.3.... 14})$. unde $a:1 = 313155584:199360981$. maj.

&c. = &c.

Sumendo antecedentium quadrupla, habebimus rationes appropinquantes circumferentiæ ad radium, vel faciendo, ut quilibet consequens ad quadruplum antecedentis, ita radius, qui ponatur = 10, 000, 000, ad quartum, qui dabit numerum partium circumferentiæ, ad verum celeriter accedentem. Fiat itaque

1°. 1 : 8 = 10, 000, 000 : 80, 000, 000, qui numerus justo major est.
2°. 2:12 = 10, 000, 000: 60, 000, 000, qui justo minor est.
3°. 5:32 = 10, 000, 000: 64, 000, 000, justo major.
4°. 16:100 = 10,000,000:62,500,000, justo minor.
5°. 61:384 = 10, 000, 000 : 62, 950, 820, justo major.
6°. 272:1708 = 10, 000,000 : 62, 794, 117, justo minor.
7°. 1385:8704 = 10, 000, 000 : 62, 844, 766, justo major.
8°. 7936:49860 = 10, 000, 000 : 62, 827, 621, justo minor.
9°. 50521:317440 = 10, 000, 000: 62,833, 277, justo major.
10°. 353792:2222924 = 10, 000, 000 : 62, 831, 381, justo minor.
11°. 2702765:16982016 = 10, 000, 000 : 62, 832, 011, justo major.
12°. 22368256:140543780 = 10,000,000:62,831, 800, justo minor.
13°. 199360981:1252462336 = 10, 000,000:62,831,871, justo major.

N°. CLXVI.

PROBLEMA.

In superficie quacunque curva ducere lineam inter duo puncta brevissimam.

SOLUTIO *.

TAB. LXXIX. N°. CLXVI. *Fig.* 1.

SIT AE = x, EB = y, & a puncto B erigi intelligatur recta Bb = z, normalis ad planum AEB & superficiei curvæ occurrens in b, & detur æquatio quævis exprimens relationem trium coordinatarum x, y, z, qua relatione natura superficiei determinatur.

Esto jam linea quæsita lbc, a cujus singulis punctis l, b, c cadere intelligantur in subjectum planum AEB normales lL, bB, cC, formantes projectionem [curvæ quæsitæ] LBC. Concipiatur planum IBb, cujus sectio communis cum plano AEB, quæ

* *Hanc Solutionem communicavit Auctor cum Cl.* KLINGENSTIERNA *in Universitate* Upsalensi *Matheseos Professore sub finem Anni* 1728, *quam ipse* KLINGENSTIERNA *postea ita in chartam conjecit, ut hic extat.*

quæ eſt recta IB, tangat projectam LBC in elemento BC, quare planum IB*b* curvam quæſitam *lbc* ſtringet in elemento *bc*.

Concipiatur etiam planum *b*GI ſuperficiem curvam tangens in *b*, & occurrens plano AEB in communi ſectione GI, ac plano IB*b* in communi ſectione *b*I, quæ [quia utrumque planorum *b*GI & IB*b* curvam quæſitam ſtringit in elemento *bc*] erit productio ejuſdem elementi *bc*, adeoque curvam in hoc elemento continget. Producatur BE, donec ſectioni IG occurrat in G, & a puncto G demittatur ad BI normalis GH, quæ proinde perpendicularis erit ad planum IB*b*. A puncto H demittatur in rectam *b*I normalis H*b*, & a puncto *b* in rectam *c*C normalis *be*. His factis, dicatur EF = BD = dx, DC = dy, BC = $be = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = ds$, $ce = dz$, ſubtangens BG, quæ ex natura ſuperficiei datur in x, y & z, = T.

Fundamentum Solutionis ſequentis in eo conſiſtit, quod planum per tria curvæ quæſitæ puncta infinite propinqua tranſiens, rectum ſit ad planum quod ſuperficiem curvam tangit. Quærendi itaque ſunt duo anguli: unus quem planum contingens *b*GI facit cum plano IB*b*; alter vero, quem planum per tria curvæ quæſitæ puncta tranſiens facit cum eodem plano IB*b*. Inventis his angulis, ſtatuenda eſt eorum ſumma æqualis angulo recto, & habebitur æquatio Problemati ſatisfaciens.

Hunc in finem ita procedendum: Ob ſimilitudinem triangulorum CBD, BGH, eſt CB [ds]: BD [dx] = BG [T]: GH; unde GH = $Tdx : ds$.

Ob ſimilitudinem eorundem triangulorum BCD, GBH, eſt BC [ds] : CD [dy] = GB [T] : BH; unde BH = $Tdy : ds$.

Ob ſimilitudinem triangulorum *ceb*, *b*BI, eſt *ce* [dz]: *eb* [ds] = *b*B [z]: BI; unde BI = $zds : dz$.

Ex BI [$zds : dz$] ſubtrahatur BH [$Tdy : ds$], & relinquitur IH = $zds : dz - Tdy : ds$.

Ob ſimilitudinem triangulorum *bce*, IH*b*, eſt *bc* [$\sqrt{(ds^2 + dz^2)}$]: *ce* [dz] = IH [$\frac{zds}{dz} - \frac{Tdy}{ds}$]: H*b*; unde H*b*

$= [\frac{z\,ds}{dz} - \frac{T\,dy}{ds}] \times dz : \sqrt{(ds^2 + dz^2)} = (z\,ds^2 - T\,dy\,dz) : ds\sqrt{(ds^2 + dz^2)}$.

Jam quia GH normalis eſt ad planum IB*b* & H*b* normalis ad rectam *b*I, quæ eſt ſectio communis planorum IB*b* & *b*GI, erit triangulum H*b*G in plano ad utrumque planorum IB*b* & *b*GI recto; adeoque, ob angulum GH*b* rectum, *b*H : HG = radius : tang. anguli inclinationis H*b*G. Sumta itaque unitate pro radio, erit tangens anguli inclinationis $H\,b\,G = \frac{HG}{Hb} = \frac{T\,dx\sqrt{(ds^2 + dz^2)}}{z\,ds^2 - T\,dy\,dz}$.

Angulus alter, quem planum per tria curvæ quæſitæ *l b c* puncta infinite propinqua tranſiens facit cum plano IB*b*, ita inveſtigatur.

TAB. LXXIX N°. CLXVI. *Fig.* 2, & 3.

In projecta LBC [*Fig.* 2, concipienda eſt ut portio infinite parva ſuperficiei cylindroïdicæ, plicatæ in linea *b*B, ita ut LB & BC ſint duo elementa curvæ LBC, quæ eſt baſis cylindroïdis] ſint tria puncta L, B, C, quorum diſtantiæ LB, BC ſint æquales & infinite parvæ; ſintque in curva quæſita *l b c* tria puncta correſpondentia *l*, *b*, *c*, per quæ tranſeat dictum planum. Producantur LB ad ϛ [*Fig.* 3], & *lb* ad β, ut fiant Bϛ = BC, & *b*β = *bc* = *bp*, factiſque reliquis, ut in figura, & poſitis LB = BC = *ds* conſtantibus, erit *fc* = — *ddz*, & ob ſimilitudinem triangulorum *bce*, *fcp*, *bc* [$\sqrt{(ds^2 + dz^2)}$] : *be* [*ds*] = *fc* [— *ddz*] : *cp*; unde *cp* = — *dsddz* : $\sqrt{(ds^2 + dz^2)}$. Ut inveniatur *p*β, ſeu quæ ipſi æqualis cenſeri debet, Cϛ, ſit [*Fig.* 3] curva projecta LBC, BC = *ds*, BD = *dx*, CD = *dy*, tangens ad B recta Bϛ, in quam a puncto C cadat normalis Cϛ & a puncto ϛ in CD normalis ϛO.

Ob ſimilitudinem triangulorum BCD, ϛCO, erit BD [*dx*] : BC [*ds*] = CO [*ddy*] : Cϛ. Ergo Cϛ = *dsddy* : *dx* = *p*β.

Jam quia *cp* & *c*β normales ſunt ad *bc*, quæ eſt communis ſectio plani IB*b* ſeu CB*b*, & plani per tria puncta *l*, *b*, *c*, tranſeuntis, erit triangulum *cp*β in plano ad utrumque iſtorum pla-

planorum recto, adeoque ob angulum $cp\beta$ rectum, erit $cp : p\beta$ = radius : tang. anguli inclinationis $pc\beta$. Sumta itaque unitate pro radio, erit tangens anguli inclinationis $pc\beta$, $= \frac{p\beta}{cp}$ $= \frac{ds\,ddy : dx}{-ds\,ddz : \sqrt{(ds^2+dz^2)}} = \frac{-ddy\sqrt{(ds^2+dz^2)}}{dx\,ddz}$.

Quoniam igitur, per fundamentum Solutioni præmissum, angulus $pc\beta$ + angulo HbG [*Fig.* 1] = angulo recto; erit productum tangentium istorum angulorum = quadrato radii = 1. Unde ducta tangente anguli $pc\beta$, modo inventa, $-ddy\sqrt{(ds^2+dz^2)} : dx\,ddz$ in tangentem anguli HbG, quæ supra inventa erat $Tdx\sqrt{(ds^2+dz^2)} : (zds^2 - Tdydz)$, habetur æquatio Problemati satisfaciens; $\frac{Tdx\sqrt{(ds^2+dz^2)}}{zds^2 - Tdydz} \times \frac{-ddy\sqrt{(ds^2+dz^2)}}{dx\,ddz} = 1$, vel $(ds^2+dz^2)\,Tddy = (Tdzdy - zds^2)\,ddz$.

SCHOLIUM I. *

Hic est animadvertendum, quod Cl. KLINGENSTIERNA omisit, posse scil. superficiem curvam datam etiam considerari sectam planis parallelis ipsi AE per puncta B transeuntibus & plano AEB perpendicularibus, quæ sectiones facient in superficie curva, alias lineas curvas datas, quarum subtangentes ad singula puncta B spectantes dicantur = θ. Unde mutatis T in θ, dy in dx, & ddy in ddx, prodibit hæc alia æquatio Problemati satisfaciens $(ds^2+dz^2)\,\theta\,ddx = (\theta dzdx - zds^2)\,ddz$; aut quia $-dxddx = dyddy$, prodibit multiplicando per $-Tdx : dy$, $(ds^2+dz^2)\,\theta\,Tddy = (-\theta Tdzdx^2 : dy + Tzdxds^2 : dy)\,ddz$. Est autem, quod facile demonstrari potest generaliter pro quacunque curva in superficie ad lubitum descripta, semper $\frac{\theta dy + Tdx}{\theta T} = \frac{dz}{z}$, adeoque $\theta Tdz = \theta zdy + Tzdx$; unde substituto valore ipsius θTdz, in æquatione ultimo inventa, resultabit $(ds^2+dz^2)\,\theta\,Tddy = (-\theta zdx^2 - Tzdx^3 : dy + Tzdx$

TAB. LXXIX. N°. CLXVI. *Fig.* 1.

* *Scholii hujus, ut & sequentium sunt ipsius Authoris verba.*

$Tzdxds^2 : dy)ddz = [$ ſubſtituendo dy^2 pro $ds^2 - dx^2]$, $(-\theta dx^2 + Tdydx)zddz$. Ponantur porro loco θT & z, eorum proportionales $\theta dy + Tdx$ & dz; abit æquatio in hanc $(ds^2+dz^2) \times (\theta dy + Tdx)ddy = (-\theta dx^2 + Tdydx)dzddz$, hoc eſt, $\frac{dzddz}{ds^2+dz^2} = \frac{\theta dy + Tdx}{-\theta dx+Tdy} \times \frac{ddy}{dx}$, vel $= \frac{\theta ddx - Tddy}{\theta dx - Tdy}$.

Nota. Eadem æquatio immediate deducitur etiam ex primo inventa $(ds^2 + dz^2)Tddy = Tdzdy - zds^2)ddz$. Hanc enim multiplicando per θ, & poſtea pro θTdz ſubſtituendo ejus valorem $\theta zdy + Tzdx$, oritur $(ds^2 + dz^2)\theta Tddy = (\theta zdy^2 + Tzdydx - \theta zds^2)ddz = [$ ob $dy^2 - ds^2 = -dx^2]$ huic $(-\theta dx^2 + Tdydx)zddz$, ſcriptoque $\theta dy + Tdx$ & dz pro θT & z, quibus ſunt proportionales; habebitur $(ds^2 + dz^2) \times (\theta dy + Tdx)ddy = (-\theta dx^2 + Tdydx)dzddz$, & proinde $\frac{dzddz}{ds^2+ds^2} = \frac{\theta dy + Tdx}{-\theta dx+Tdy} \times \frac{ddy}{dx} = \frac{\theta ddx - Tddy}{\theta dx - Tdy}$, ut ante.

Pro tribus coordinatis x, y, z, ſcribatur t, x, y; ſitque æquatio naturam ſuperficiei curvæ exprimens, ut facit Cel. EULERUS *, hæc $Pdx = Qdy + Rdt$; erit [ponendo $dt = o$] $Pdx = Qdy$, adeoque $P : Q = dy : dx = y : T$, unde $T = Qy : P$; ponendo nunc $dx = o$, erit $Qdy = -Rdt$, id eſt, $-R : Q = dy : dt = y : \theta$, hinc $\theta = -Qy : R$. Quare in formula mea $\frac{dzddz}{ds^2+dz^2} = \frac{\theta ddx - Tddy}{\theta dx - Tdy}$, ſi pro x, y, z, T, θ, ſcribatur reſpective $t, x, y, Qy : P, -Qy : R$, & pro ds, quod mihi conſtans ſupponitur, ponatur $\sqrt{(dt^2 + dx^2)}$, prodibit $\frac{Pddt + Rddx}{Pdt + Rdx} = \frac{dyddy}{dt^2+dx^2+dy^2}$.

Si in æquatione mea priori $(ds^2 + dz^2)Tddy = (Tdzdy - zds^2)ddz$ litteræ *Euleriana* adhibeantur, & pro T ſcribatur $Qy : P$, emergit æquatio paulo ſimplicior $\frac{Qddx}{Qdxdy - Pdt^2 - Pdx^2} = \frac{ddy}{dt^2+dx^2+dy^2}$.

In

* *Comment. Acead. Petrop.* Tom. III. pag. 110 ſeqq.

In altera vero, modo supra exposita, $(ds^2 + dz^2)\,\theta\,ddx = (\theta dz dx - z ds^2)\,ddz$, adhibitis rursus litteris *Eulerianis*; ut pro θ scribendo $-Qy : R$, resultat æquatio parum differens a præcedente $\frac{Q\,d\,dt}{Q dt dy + R dt^2 + R dx^2} = \frac{d\,dy}{dt^2 + dx^2 + dy^2}$.

Quod si conferantur membra priora harum duarum æquationum, redibit æquatio naturam superficiei curvæ exprimens, $Pdx = Q dy + R dt$, plane ut fieri oportuit: sunt enim illæ duæ æquationes æquivalentes.

SCHOLIUM II.

Methodus hactenus explicata solvendi Problema de Linea brevissima ducenda in superficie data, inservit etiam Solutioni aliorum hujusmodi Problematum difficiliorum, ad quæ communes methodi mere analyticæ ægrius forsan, aut plane non pertingent. Ex. gr. proponatur hoc

PROBLEMA.

Ducere in superficie data lineam curvam, cujus in puncto quolibet planum osculans datam habeat inclinationem ad planum tangens superficiem datam in eodem puncto.

Voco autem *planum osculans*, quod transit per tria curvæ quæsitæ puncta infinite sibi invicem propinqua.

SOLUTIO.

Si inclinationis angulus sit omnino rectus, coincidit hoc Problema cum præcedente: est enim curva quæsita ipsa brevissima, pro qua dedimus æquationem. Sit vero nunc angulus ille inclinationis obliquus, cujus tangens data sit $= n$. Constat ex Theoremate meo in *Actis Lipsi.* 1722, mens. Jul. publicato *, si duorum angulorum tangentes sint a & b, fore tangentem eorum summæ $= (a+b) : (1 - ab)$, sumta nimirum unitate pro si-

* N°. CXXVII. pag. 527, 528. *Tom. II.*

nu toto, seu tangente anguli semirecti. Quandoquidem igitur angulus noster inclinationis ostensus est, in Solutione præcedenti, constare ex duabus partibus, quarum una pro tangente habet $Tdx\sqrt{(ds^2+dz^2)} : (zds^2 - Tdydz)$ quæ vocetur $= a$, alterius vero tangens $-ddy\sqrt{(ds^2+dz^2)} : dxddz$, quæ dicatur b; quibus substitutis in $(a+b) : (1-ab)$, & quod provenit æquando ipsi n, habebitur $\left(\frac{Tdx\sqrt{(ds^2+dz^2)}}{zds^2 - Tdydz} + \frac{-ddy\sqrt{(ds^2+dz^2)}}{dxddz}\right) : \left(1+\frac{Tddy\times(ds^2+dz^2)}{zds^2ddz - Tdydzddz}\right) = n$, seu $\frac{Tdx\sqrt{(ds^2+dz^2)}}{zds^2 - Tdydz} + \frac{-ddy\sqrt{(ds^2+dz^2)}}{dxddz} = \frac{nzds^2ddz - nTdydzddz + nTddy\times(ds^2+dz^2)}{zds^2ddz - Tdydzddz}$.

Reducto priori membro ad communem denominatorem, & posterioris utroque termino per dx multiplicato, ita ut utrumque membrum etiam habeat communem denominatorem; quo proin neglecto, orietur $(Tdx^2ddz - zds^2ddy + Tdydzddy) \times \sqrt{(ds^2+dz^2)} = nzds^2dxddz - nTdydxdzddz + nTdxddy \times (ds^2+dz^2)$. Quæ æquatio si tractetur ut supra factum in *Nota* post *Scholium* I, eruetur, operatione rite peracta, hæc altera æquatio: $(\theta dxdyddz + Tdx^2ddz - \theta dxdzddy + Tdzdyddy)\sqrt{(ds^2+dz^2)} = n\theta dx^2dzddz - nTdxdydzddz + (n\theta dyddy + nTdxddy)\times(ds^2+dz^2)$. Utraque igitur harum duarum æquationum satisfacit Problemati.

COROLLARIUM.

Dantur casus speciales, in quibus æquatio supra inventa $(ds^2+dz^2)Tddy = (Tdzdy - zds^2)ddz$ ad differentias primas reduci potest. Sit v. gr. superficies curva data ejus naturæ, ut omnes illius sectiones, planis ad rectam AE normalibus factæ, sint lineæ rectæ ordinatis EB parallelæ, cujus generis superficies *Cylindroidica* appellari possunt. Hoc casu subtangens T evadit infinita; adeoque zds^2 infinite parva, respectu $Tdzdy$. Deleta itaque zds^2, & reliquis æquationis terminis per T divisis, oritur æquatio $(ds^2+dz^2)ddy = dzdyddz$; unde $ddy : dy = dzddz : (ds^2+dz^2)$; & multiplicando per $2, 2ddy : dy = 2dzddz : (ds^2+dz^2)$, sumtis-

sumtisque integralibus per Logarithmos $lndy^2 = l(ds^2 + dz^2)$, factoque transitu ad numeros, $ndy^2 = ds^2 + dz^2$. Quoniam in hoc casu z datur per x & constantes, ponatur $dz = pdx$, intelligendo per p quantitatem utcunque datam in x & constantibus, & pro ds^2 scribatur ejus valor $dx^2 + dy^2$, & mutatur æquatio inventa in hanc: $ndy^2 = dx^2 + dy^2 + ppdx^2$ vel $(n-1)dy^2 = (1+pp)dx^2$, extractaque radice quadrata $dy\sqrt{(n-1)} = dx\sqrt{(pp+1)}$. Jam manifestum est, membrum hujus æquationis posterius $dx\sqrt{(pp+1)}$ designare elementum arcus curvæ, cujus coordinatæ sunt x & $\int pdx$, seu z; id est curvæ generatricis Cylindroidis. Si itaque arcus ille dicatur A, erit $dy\sqrt{(n-1)} = dx\sqrt{(pp+1)} = dA$, sumtisque integralibus $y\sqrt{(n-1)} = A$; id est ordinata curvæ projectionis est ad arcum curvæ generatricis Cylindroidis ut 1 ad $\sqrt{(n-1)}$, seu in ratione constante; quod aliunde non difficulter colligitur, & bonitatem Solutionis præcedentis confirmat.

SCHOLIUM III.

Potest perveniri modo elegantiori ad æquationem nostram supra inventam $\frac{dzddz}{ds^2+dz^2} = \frac{\theta ddx - Tddy}{\theta dx - Tdy}$, sine operosa supputatione anguli inclinationis HbG quem nimirum facit planum tangens superficiem curvam bIG cum plano bBI. Hunc in finem adhibita imaginatione, consulendæ sunt ambæ Figuræ 1&2, ubi subjectum planum in quo est curva projectionis LBC vocabo *horizontale*; planum vero stringens curvam quæsitam in elemento bc, nempe bIB, plus ultra continuatum nominabo *verticale*; planum denique transiens per tria puncta proxima cbl, hoc est, planum trianguli $c\beta b$, dicam, ut prius, *Planum osculans*. Nunc quia planum osculans debet esse perpendiculare ad planum tangens superficiem curvam, & quia $c\beta$ est perpendicularis ad utriusque plani communem sectionem $b\beta$, erit lineola $c\beta$ perpendicularis ad ipsum planum tangens superficiem. Quod si itaque $c\beta$ continuetur deorsum versus, donec occurrat

TAB. LXXIX. N°. CLXVI. *Fig.* 1, & 2.

TAB. LXXIX. N°. CLXVI. *Fig.* 4.

plano horizontali in puncto P, a quo si ad extremitates subtangentium G & M, ducantur rectæ PG & PM, habentur duo triangula P*c*G & P*c*M, rectangula in puncto sublimi *c*; est enim planum M*c*G tangens superficiem, ad quod normalis est *c*P; adeoque ang. P*c*G = recto = ang. P*c*M. Hinc $PG^2 - cG^2 = Pc^2 = PM^2 - cM^2$. Est vero $cG^2 = CG^2 + cC^2$ & $cM^2 = CM^2 + cC^2$, quibus valoribus substitutis & deleto communi Cc^2, erit $PG^2 - CG^2 = PM^2 - CM^2$. Ductis nunc PR parallela ipsi MC, seu perpendiculari ad GC productam [angulus quippe GCM est rectus], & PS parallela ipsi GC, seu perpendiculari ad MC productam; est utique $PG^2 - CG^2 = PC^2 + 2CG \times CR$, & $PM^2 - CM^2 = PC^2 + 2CM \times CS$, unde $CG \times CR = CM \times CS$, & CS: CR = CG: CM, hoc est, latera parallelogrammi rectanguli RS sunt ipsis subtangentibus reciproce proportionalia. Ex quo fluit quod tangens anguli RCP $\left[\frac{RP}{RC} = \frac{CS}{CR}\right] = \frac{CG}{CM} = \frac{T.}{\theta}$.

Porro intelligatur in *Fig.* 2, in plano verticali latusculum *pc* continuari deorsum in planum horizontale cui occurrat in puncto V [*Fig.* 4]. Erit ductis *c*V & CV; 1°. *c*VP triangulum rectangulum in V & simile ipsi *cpβ*, quia utraque PV & *pβ* sunt horizontales in communi plano jacentes, adeoque parallelæ; est enim planum *c*VP nihil aliud quam continuatio plani *cpβ*. 2°. CV est continuatio elementi BC, seu tangens curvæ projectionis LBC. Ut itaque inveniatur angulus RCV, hoc est [in *Fig.* 1] angulus BCD, cujus tangens $= \frac{BD}{DC} = \frac{dx}{dy}$; sic procedo. Angulus CVP est rectus, quod probe imaginando facile patet, & cum *c*VP sit etiam rectus, erit, ob commune latus PV, tangens anguli V*c*P ad tangentem VCP ut VC ad V*c* = [ob triangulum rectangulum *c*CV simile triangulo rectangulo, *Fig.* 2, *bcc*] $ec : bc = dz : \sqrt{(ds^2 + dz^2)}$. Quia itaque

itaque tangens anguli V*c*P seu $pc\beta = \frac{p\beta}{pc}$ = [ut supra inventum] $-ddy\sqrt{(ds^2+dz^2)} : dx\,ddz$, habemus tangentem anguli $VCP = -ddy(ds^2+dz^2) : dz\,dx\,ddz$. Jam vero ex cognitis tangentibus duorum angulorum RCP & VCP invenitur, ope Theorematis mei in *Act. Lipſ.* 1722 * exhibiti, tangens anguli ex illis compoſiti RCV, ſeu ejus qui huic ad verticem eſt oppoſitus BCD; quique pro tangente habet $\frac{dx}{dy}$, nempe erit tangens anguli $RCV = \frac{T}{\theta} + \frac{-ddy(ds^2+dz^2)}{dz\,dx\,ddz} : \left(1 + \frac{Tddy.(ds^2+dz^2)}{\theta\,dz\,dx\,ddz}\right)$ ſeu $= \frac{Tdz\,dx\,ddz - \theta\,ddy.(ds^2+dz^2)}{\theta\,dz\,dx\,ddz + Tddy.(ds^2+dz^2)}$, adeoque $\frac{dx}{dy} = \frac{Tdz\,dx\,ddz - \theta\,ddy.(ds^2+dz^2)}{\theta\,dz\,dx\,ddz + Tddy(ds^2+dz^2)}$, quæ reducta dat $\frac{dz\,ddz}{ds^2+dz^2} = \frac{\theta\,dy + T\,dx}{-\theta dx + T dy} \times \frac{ddy}{dx}$, vel [ob $\frac{ddy}{dx} = -\frac{ddx}{dy}$] $= \frac{\theta\,ddx - Tddy}{\theta\,dx - T\,dy}$; ut per priorem modum.

COROLL. I.

In caſu Cylindroidum, ubi alterutra ſubtangentium, ex. gr. CM, exiſtit infinita, habebit CR ad RP rationem infinitam, hoc eſt, angulus RCP evaneſcit, unde tantum faciendum eſt $\frac{dx}{dy}$ = tangenti anguli $VCP = \frac{-ddy.(ds^2+dz^2)}{dz\,dx\,ddz}$; id quod ſtatim dat $\frac{dz\,ddz}{ds^2+dz^2} = \frac{-dy\,ddy}{dx^2}$, ſeu $= \frac{ddx}{dx}$. Quæ eſt eadem æquatio quæ habetur in ſuperiori Corollario, niſi quod hic ſit *x* quod ibi eſt *y*. Reliqua perficiuntur ut ibi.

COROLL. II.

In caſu Conoïdum, ubi C*c* eſt axi parallela, per quam & per ipſam axem tranſeunt plana *c*CG, plana autem baſi parallela formant in ſuperficie curva circulos; unde hic iterum ſubtangentes CM evadunt infinitæ. Quare etiam faciendum eſt

TAB. LXXIX. N°. CLXVI. *Fig.* 5. [vid. *Fig.* 5] $\frac{BD}{CD}$ = tangenti anguli VCP. Est vero hic [sumta $-dz$, quia, crescentibus x & y, ipsa z decrescere supponitur] $ec : bc [= -dz : \sqrt{(ds^2 + dz^2)}]$ = tangens anguli VcP: tangent. anguli VCP. Sed tangens anguli Vc P, seu $pc\beta$, $[= \frac{p\beta}{pc}] =$ [ut inferius docebitur] $\frac{(y\,ddx + 2dy\,dx) \times \sqrt{(ds^2 + dz^2)}}{-dy\,ddz}$. Hinc ergo tangens anguli VCP $= \frac{(y\,ddx + 2dy\,dx) \cdot (ds^2 + dz^2)}{dy\,dz\,ddz} = \frac{BD}{CD} = \frac{y\,dx}{dy}$; ex cujus reductione emergit $\frac{dz\,ddz}{ds^2 + dz^2} = \frac{y\,ddx + 2dy\,dx}{y\,dx}$. Integrando per logarithmos, indeque transeundo ad numeros, prodit $yy\,dx = b\sqrt{(ds^2 + dz^2)}$. Adeo ut hic pariter non opus sit operosa illa inventione anguli plani tangentis superficiem & plani verticalis.

Applicatio ejusdem methodi ad Superficies Conoidicas, seu tales, quæ conversione curvæ cujuscunque datæ circa axem positione datum generantur.

TAB. LXXIX. N°. CLXVI. *Fig.* 5. Sit vertex Conoidis, a; curva quæsita lbc. A vertice a, & singulis curvæ quæsitæ punctis l, b, c, &c. cadere intelligantur in subjectum planum ad axem Conoidis aA rectum, perpendiculares aA, lL, bB, cC &c. formantes (*Fig.* 5) projectionem verticis A, & projectionem curvæ quæsitæ LBC. Centro A, radio arbitrario AK = 1, describatur in dicto plano ad axem Conoidis aA recto circulus KEF, & ducantur rectæ ABE, ACF, projectæ LBC occurrentes in punctis infinite propinquis B, C, & peripheriæ KEF in E, F. Concipiatur planum IBb, cujus sectio communis cum plano BAK, quæ est recta IB, tangat projectam LBC in elemento BC; quare planum ipsum IBb curvam quæsitam lbc stringet in elemento bc. Concipiatur etiam planum bGI Conoidem tangens in b, & occurrens plano BAK in communi sectione GI, ac plano IBb in communi sectione bI, quæ quia utrumque planorum bGI & IBb curvam quæsitam stringit in elemento bc, erit productio

ductio ejusdem elementi bc, adeoque curvam in hoc elemento continget. Producatur AE donec sectioni IG occurrat in G, eritque angulus AGI rectus. A puncto G demittatur ad rectam BI normalis GH, quæ proinde perpendicularis erit ad planum IBb; a puncto H demittatur in rectam bI normalis Hb, & jungatur Gb; tandemque a puncto c demittatur in bB normalis ce. Quibus factis, dicatur arcus $KE = x$, $EF = dx$, $AB = y$. $DC = dy$, $BD = ydx$, $BC = \sqrt{(dy^2 + yydx^2)} = ds$, $Bb = z$, $be = -dz$, subtangens BG ex natura Conoidis data, $= T$.

Ob similitudinem Triangulorum CDB, BHG, erit CB $[ds]$: BD $[ydx] =$ BG $[T]$: GH, unde $GH = Tydx : ds$.

Ob similitudinem triangulorum CDB, IHG, erit CD $[dy]$: BD $[ydx] =$ GH $[\frac{Tydx}{ds}]$: HI, unde $HI = Tyydx^2 : dsdy$.

Ob similitudinem triangulorum bec, Hbl, erit bc $[\sqrt{(ds^2 + dz^2)}]$: $be[-dz] =$ HI $[\frac{Tyydx^2}{dsdy}]$: Hb; unde $Hb = -Tyydx^2dz : dsdy\sqrt{(ds^2 + dz^2)}$.

Jam quia GH normalis est ad planum IBb, & Hb normalis ad rectam bI, quæ est sectio communis planorum IBb & bGI, erit triangulum HbG in plano ad utrumque planorum IBb & bGI recto, adeoque ob angulum GHb rectum, bH: HG = radius: tang. anguli inclinationis HbG. Sumta itaque unitate pro radio, erit tangens anguli inclinationis HbG $= \frac{HG}{Hb} = \frac{Tydx : ds}{-Tyydx^2dz : dsdy\sqrt{(ds^2 + dz^2)}} = \frac{-dy\sqrt{(ds^2 + dz^2)}}{ydxdz}$.

Angulus alter, quem planum per tria curvæ quæsitæ lbc puncta infinite propinqua transiens facit cum plano IBb, ita investigatur. [Vid. *Fig.* 7 & 6, quæ concipienda est instar *Fig.* 2 portio infinite parva superficiei cylindroidicæ].

In projecta LBC, sint tria puncta L, B, C, quorum distantiæ LB, BC, sint æquales & infinite parvæ; sintque in curva quæsita lbc tria correspondentia puncta l, b, c, per quæ transeat dictum planum. Producantur LB ad $\mathfrak{C}$, & lb ad $\mathfrak{B}$, ut

TAB. LXXIX. N°. CLXVI. *Fig.* 6 & 7

ut fiant $B\mathfrak{C} = BC$, & $b\beta = bc = bp$. Factis reliquis ut in Figura, positisque $LB = BC = ds$ constantibus, erit $lg = bm = -dz$, & $me = fc = -ddz$.

Ob similitudinem triangulorum fmb, cpf, est $bf[\sqrt{(ds^2+dz^2)}] : fm[ds] = fc[-ddz] : cp$. Unde $cp = -dsddz : \sqrt{(ds^2+dz^2)}$.

Ut inveniatur $p\beta$, seu quæ ipsi æqualis esse censeri debet, $C\mathfrak{C}$, sit in *Fig.* 7. curva projecta LBC, centrum A, tangens ad C recta CP, & tangens ad B recta BO, in quas a centro A cadant perpendiculares AP & AO, & in OB productam normalis $C\mathfrak{C}$.

Ob similitudinem triangulorum BCD, BAO, est $CB[ds] : BD[ydx] = BA[y] : AO$; unde $AO = yydx : ds$, sumtisque differentiis, posita ds constante, dAO, seu $oP = (yyddx + 2ydxdy) : ds$.

Ob similitudinem eorundem triangulorum BCD, BAO, est $BC[ds] : CD[dy] = AB[y] : BO$; unde $BO = ydy : ds$.

Ob similitudinem triangulorum BoP, $BC\beta$, est Bo seu $\beta o\left[\frac{ydy}{ds}\right] : oP\left[\frac{yyddx+2ydxdy}{ds}\right] = BC[ds] : C\mathfrak{C}$. Est itaque $C\mathfrak{C} = p\beta = (ydsddx + 2dxdyds) : dy$.

Jam quia cp & $c\beta$ [*Fig.* 6] normales sunt ad bc, quæ est communis sectio plani IBb, seu CBb, & plani per tria puncta l, b, c, transeuntis, erit triangulum $cp\beta$ in plano ad utrumque istorum planorum recto, adeoque, ob angulum $cp\beta$ rectum, erit $cp : p\beta =$ radius: tang. anguli inclinationis $pc\beta$. Sumta itaque unitate pro radio, erit tangens anguli inclinationis $pc\beta = \frac{p\beta}{cp} = \frac{(ydsddx+2dxdyds) : dy}{-dsdaz\sqrt{(ds^2+dz^2)}} = (yddx+2dydx)\sqrt{(ds^2+dz^2)} : -dyddz$.

Quoniam itaque angulus $pc\beta$ + angulus HhG = angulo recto, erit productum tangentium = quadrato radii = 1; unde ducta tangente modo inventa anguli $pc\beta$, $(yddx + 2dydx)\sqrt{(ds^2 + dz^2)} : -dyddz$, in tangentem anguli HhG, quæ supra inventa erat $-dy\sqrt{(ds^2 + dz^2)} : ydxdz$; habetur æqua-

tio

tio $(yddx+2dydx).(ds^2+dz^2) : ydxdzddz = 1$, vel $\frac{yddx+2dydx}{ydx} = \frac{dzddz}{ds^2+dz^2}$, vel $\frac{yddx+2dydx}{yydx} = \frac{1}{2} \times \frac{2dzddz}{ds^2+dz^2}$. Sumtisque integralibus per Logarithmos, $lyydx = lb + l\sqrt{(ds^2+dz^2)}$; factoque ad numeros transitu, $yydx = b\sqrt{(ds^2+dz^2)}$; quæ æquatio exprimit naturam projectionis L B C.

Quia z per naturam Conoidis datur in y & constantibus, ponatur $dz = pdy$, intelligendo per p quamcunque functionem ipsius y. In æquatione inventa $yydx = b\sqrt{(ds^2+dz^2)}$, pro dz scribatur pdy, & pro ds^2 substituatur ejus valor dy^2+yydx^2, quo facto habebitur $dx = \frac{bdy}{y}\sqrt{\frac{1+pp}{yy-bb}}$; in qua æquatione, quia separatæ sunt indeterminatæ, construi potest curva projectionis L B C per quadraturas; quo peracto, si e singulis punctis L, B C, &c. erigantur normales, Ll, Bb, Cc, &c, superficiei Conoidicæ datæ occurrentes in punctis l, b, c, &c, signabitur in dicta superficie curva quæsita lbc. *Q. E. F.*

EXEMPLUM PRIMUM.

Si Conoides datum fuerit superficies plana, plano projectionis A B K parallela, erit z constans, adeoque $dz = pdy = 0$; consequenter $p = 0$, & æquatio generalis $dx = \frac{bdy}{y}\sqrt{\frac{1+pp}{yy-bb}}$ mutatur in hanc, $dx = \frac{bdy}{y\sqrt{(yy-bb)}}$, vel [multiplicando per b] $bdx = \frac{bbdy}{y\sqrt{(yy-bb)}}$. Membrum posterius $\frac{bbdy}{y\sqrt{(yy-bb)}}$ est elementum arcus circuli, cujus radius $= b$ & secans $= y$; qui arcus si dicatur A, erit [posito radio A K (*Fig.* 5.) qui arbitrarius & pro unitate sumtus est, $= b$] $x = A$. Quia igitur y semper est secans anguli x vel A, patet lineam quæsitam esse rectam, quæ circulum, cujus radius est b, tangit.

TAB. LXXIX. N°. CLXVI. *Fig.* 5.

EXEMPLUM II.

Sit Conoides datum Conus, cujus axis ſit ad radium baſeos ut n ad 1, eritque $z = ny$, $dz = pdy = ndy$, adeoque $p = n$, & æquatio ad projectam $dx = \frac{bdy\sqrt{(1+nn)}}{y\sqrt{(yy-bb)}}$, ſeu $\frac{bdx}{\sqrt{(1+nn)}} = \frac{bbdy}{y\sqrt{(yy-bb)}}$; ſumtiſque integralibus $\frac{bx}{\sqrt{(1+nn)}} = \int \frac{bbdy}{y\sqrt{(yy-bb)}}$ = arcui circuli, cujus radius b, & ſecans y. Qui ſi dicatur A, habetur $bx : \sqrt{(1+nn)} = A$, vel [poſito iterum AK = 1 = b] $x : \sqrt{(1+nn)} = A$. Hæc æquatio ita conſtrui poteſt.

TAB. LXXX. N°. CLXVI. *Fig.* 8.

Centro A [*Fig.* 8,] radio AL = b deſcribatur circulus LEF, quem tangat in L recta LD. E centro A educta utcunque ſecante AED, quæ circumferentiæ LEF occurrat in E, & tangenti LD in D, capiatur angulus LAF ad angulum LAE ut $\sqrt{(1+nn)}$ ad 1, & producatur AF quantum opus in B. Centro A, radio AD, deſcribatur arcus circuli DB rectæ AFB occurrens in B. His factis, erit punctum B ad projectam quæſitam LBC.

COROLLARIUM.

Si $\sqrt{(1+nn)}$ fuerit numerus rationalis, erit curva projectionis LBC algebraica. Id quod evenit, quoties ſumto pro r numero quocunque, integro vel fracto, fuerit $n = (1-rr) : \pm 2r$ vel $n = \pm 2r : (1-rr)$; quemadmodum patet, ponendo per methodum *Diophanteam* $\sqrt{(1+nn)} = r+n$, & $\sqrt{(1+nn)} = 1+rn$.

EXEMPLUM III.

Sit Conoides datum Sphæra, cujus radius = a, & centrum in A. Per naturam Sphæræ $z = \sqrt{(aa-yy)}$, adeoque $dz = -ydy : \sqrt{(aa-yy)}$ & $p = -y : \sqrt{(aa-yy)}$. Quo valore

lore in æquatione generali ſubſtituto, mutatur illa in hanc, $dx = abdy : y\sqrt{(yy - bb)}.\sqrt{(aa - yy)}$ *.

Ut membrum poſterius $abdy : y\sqrt{(yy - bb)}.\sqrt{(aa - yy)}$ ad formam ſimpliciorem reducatur, ponatur $y = ab : u$, adeoque $dy = -abdu : uu$, & invenietur, factis ſubſtitutionibus, $abdy : y\sqrt{(yy - bb)}\sqrt{(aa - yy)} = -udu : \sqrt{(aa - uu)}.\sqrt{(uu - bb)}$. Ponatur porro $uu = cv$, & $2udu = cdv$, quibus ſubſtitutis, habebitur $-udu : \sqrt{(aa - uu)}.\sqrt{(uu - bb)} = -\frac{1}{2}dv : \sqrt{(aa : c - v)}.\sqrt{(v - bb : c)} = -\frac{1}{2}dv : \sqrt{(-aabb : cc + (aa+bb)v : c - vv)}$. Ulterius ſit $-v + (aa+bb) : 2c = t$, & $-dv = dt$, ſubductoque calculo invenietur $-\frac{1}{2}dv : \sqrt{(-aabb : cc + (aa+bb)v : c - vv)} = \frac{1}{2}dt : \sqrt{((aa - bb)^2 : 4cc - tt)}$. Hinc, ex æquo, $dx = \frac{1}{2}dt : \sqrt{((aa - bb^2) : 4cc - tt)}$, & multiplicando utrumque membrum per $(aa - bb) : c$, $(aa - bb)\,dx : c = (aa - bb)\,dt : 2c\sqrt{((aa - bb)^2 : 4cc - tt)}$, ſumtiſque integralibus $(aa - bb)\,x : c = \int \left(\frac{aa - bb}{2c}\,dt : \sqrt{\left(\left(\frac{aa - bb}{2c}\right)^2 - tt\right)}\right)$ = arcui circuli, cujus radius $= (aa - bb) : 2c$ & ſinus rectus $= t$; qui arcus ſi dicatur A, habetur $(aa - bb)\,x : 2c = A$, vel [ponendo radium arbitrarium AK [1] = radio $(aa - bb) : 2c$] $2x = A$.

Z 2 Ad

* Ex ea æquatione immediate deduci poteſt [inſuper habito intricatiſſimo qui hic ſequitur calculo] curvam quæſitam breviſſimam in ſuperficie ſphærica eſſe circulum maximum. Quia enim membrum poſterius $abdy : y\sqrt{(yy - bb)}.\sqrt{(aa - yy)}$ eſt proportionale differentiali arcus circuli maximi, cujus ſinus eſt $n\sqrt{(aa - yy)} : y$ [ubi per n intelligo $ab : \sqrt{(aa - bb)}$], ſicuti experiri volenti patebit; ac quia ipſum $n\sqrt{(aa - yy)} : y$ proportionale eſt tangenti arcus meridiani inter punctum b & E [Vid. *Fig.* 5,] intercepti; curva breviſſima cbl in ſuperficie ſphærica debet eſſe ejus naturæ, ut ſinus arcus KE ſit ad tangentem arcus Eb in conſtanti ratione. Liquet autem ex Trigonometria ſphærica hoc competere cuilibet circulo maximo, qui in puncto K oblique ſecat circulum KE pro baſi ſumtum. Eſt enim ubique ut ſinus totus ad tangentem obliquitatis, ita ſinus arcus indeterminati KE ad tangentem arcus correſpondentis Eb. Ergo curva breviſſima in ſuperficie ſphærica eſt arcus circuli maximi. *Q. E. D.*

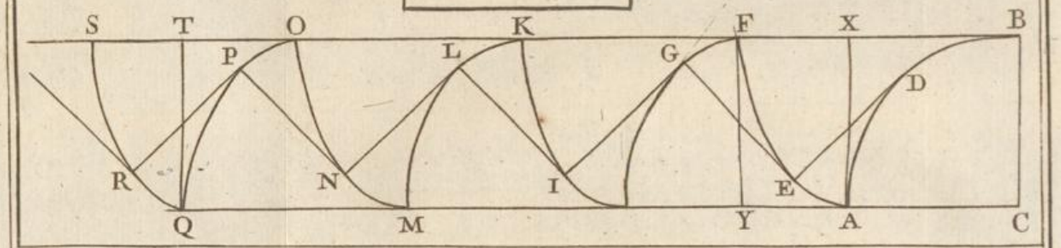
TAB. LXXX. N°. CLXVI. *Fig* 9.

Ad ductum hujus calculi curva projectionis quæsita hoc modo construeretur: Centro A, radio $AK = (aa - bb) : 2c$, descripto circulo KEF, eductaque utcunque recta AE, fiat arcus $KF = 2KE$, eritque FG a puncto F ad radium AK normaliter ducta $= t$. Hinc si in AE, producta si opus, capiatur $AB = y = $ [per constructionem] $ab : u = $ [constr.] $ab : \sqrt{cv} = $ [constr.] $ab : \sqrt{(\frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}bb - ct)}$, erit punctum B in curva projectionis quæsita. Sed cum curva hæc sit algebraïca, quemadmodum ex constructione patet, convenit æquationem algebraïcam inter coordinatas rectangulas AH, HB, investigare. Dicantur in hunc finem $AH = p$, $HB = q$. Ob angulum FAK bisectum per rectam ANE, est $FA + AG\,[(aa - bb) : 2c + \sqrt{((aa - bb)^2 : 4aa - tt)}] : FG\,[t] = AG\,[\sqrt{((aa - bb)^2 : 4cc - tt)}] : GN$; unde $GN = t\sqrt{((aa - bb)^2 : 4cc - tt)} : ((aa - bb) : 2c + \sqrt{((aa - bb)^2 : 4cc - tt))}$. Ob similitudinem triangulorum AGN, AHB, est $AG\,[\sqrt{((aa - bb)^2 : 4cc - tt)}] : GN\,[t\sqrt{((aa - bb)^2 : 4cc - tt)} : ((aa - bb) : 2c + \sqrt{((aa - bb)^2 : 4cc - tt))}] = AH\,[p] : HB\,[q]$; unde ductis in se mediis & extremis, ac dividendo utrumque productum per $\sqrt{((aa - bb)^2 : 4cc - tt)}$, habebitur $q = pt : ((aa - bb) : 2c + \sqrt{((aa - bb)^2 : 4cc - tt))}$; proinde $q\sqrt{((aa - bb)^2 : 4cc + tt)} = pt - aaq : 2c + bbq : 2c$. Si utrumque hujus æquationis membrum ad quadratum evehatur, invenietur, deletis quæ se destruunt, $ct = (aa - bb)pq : (pp + qq)$. Ob triangulum rectangulum AHB, erit $AB^2\,(yy = aabb : (\frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}bb - ct)] = AH^2\,[pp] + HB^2\,[qq]$, quod reducendo dat $ct = -\frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}bb - aabb : (pp + qq)$; unde habetur æquatio relationem coordinatarum p & q exprimens: $(aa - bb)pq : (pp + qq) = \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}bb - aabb : (pp + qq)$, seu $pp + qq = 2((aa - bb)pq + aabb) : (aa + bb)$; quæ æquatio pertinet ad Ellipsin DBE, cujus semiaxis major AD $= a$, minor AE $= b$, coordinatæ rectangulæ $AH = p$, $HB = q$, existente angulo DAH semirecto.

TAB. LXXX. N°. CLXVI. *Fig.* 10.

Demissa enim BC normali ad AD, dictisque $AC = x$, $BC = y$, erit $x + y = q\sqrt{2}$, & $x - y = p\sqrt{2}$, & exterminando q & p, ex æquatione

N.° CLXV.



N.° CLXVI.

Fig. 1.

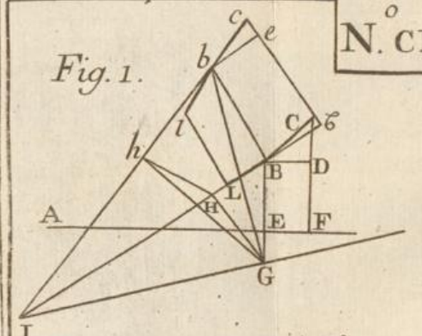


Fig. 2.

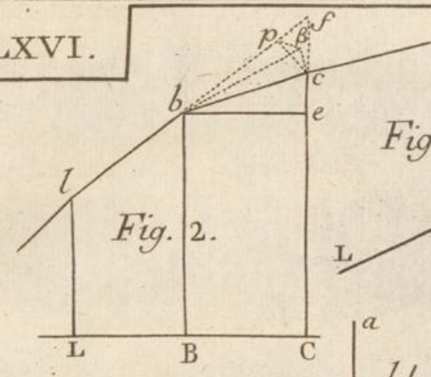


Fig. 3.

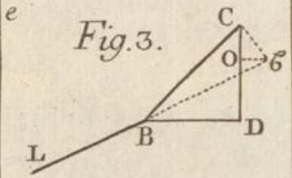


Fig. 4.

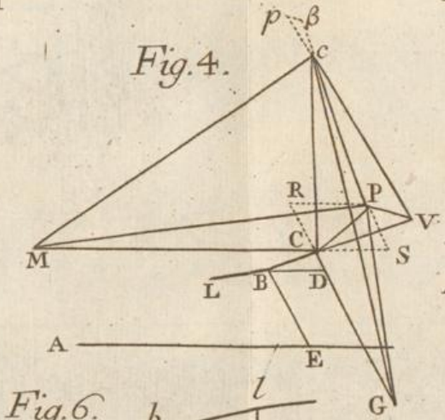


Fig. 5.

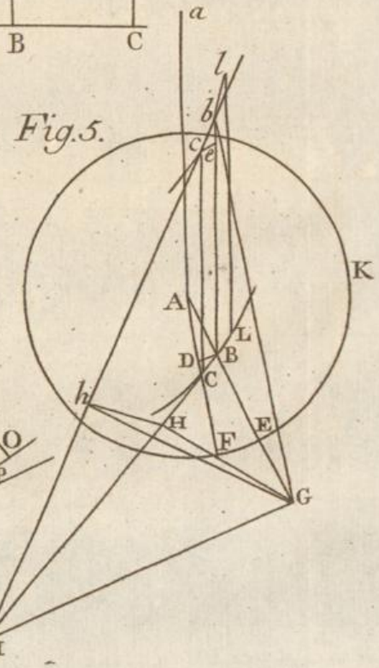


Fig. 6.

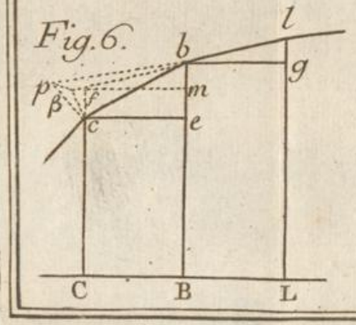
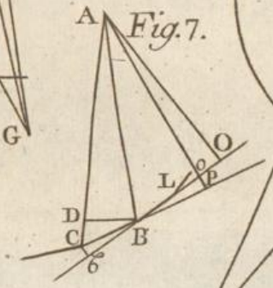


Fig. 7.



tione $pp+qq=2((aa-bb)pq+aabb):(aa+bb)$, habetur $aayy+bbxx=aabb$.

SCHOLIUM.

Æquatio generalis $dx=\frac{bdy}{y}\sqrt{\frac{1+pp}{yy-bb}}$ probe convenit cum Solutione Cel. *Jac.* BERNOULLI in *Act. Erud. Lipſ.* an. 1698, p. 227 publicata. Si enim in ejus formula $\int(atdx:xx\sqrt{(xx-aa)})$, pro x ſcribatur y, & pro a, b, erit illa $\int btdy:yy\sqrt{(yy-bb)}$, ubi pro t ſcribatur ejus valor $y\sqrt{(dy^2+dz^2)}:dy$, & pro dz, ut ſupra, pdy, habetur $\int\frac{bdy}{y}\sqrt{\frac{1+pp}{yy-bb}}$.

Sed hanc ſolutionem Vir laudatus alio ſine dubio fundamento deduxit. Si enim methodum habuiſſet ad omnis generis ſuperficies curvas ſeſe extendentem, utique generalem ſolutionem Problematis a Fratre provocatus dediſſet. Methodus ſequens ad Problema generaliter conceptum ægre extenditur, quamvis pro Conoidibus ſatis ſit expedita.

Sit Conoides datum ACEBDA, cujus axis AB rectus ſit ad baſin circularem ECD, ſitque linea quæſita KPIG. Superficies ACEA dividatur in ſectores infinitos, ducendo meridianos APN, AI*f*, AGF, &c. infinite propinquos, & a punctis P, I, G, &c. ubi hi meridiani ſecant curvam KPIG, ducantur tangentes PL, IL, GL, &c. occurrentes axi AB in punctis L, L, L, &c. infinite parum a ſe invicem diſtantibus; unde duo puncta quævis L, L, ubi duæ tangentes viciniſſimæ, v. g. GL & IL axi occurrunt, pro uno eodemque haberi poſſunt, & conſequenter figura LGIL pro triangulo haberi, quod ſimiliter de reliquis LIPL, &c. intelligendum eſt. TAB. LXXX. N°. CLXVI. *Fig.* 11. & 12.

Planum trianguli GLI concipiatur circa IL tanquam axem aliquantulum elevari, donec cum triangulo ſequente ILP conſtituat unum idemque planum GLP. Planum hoc GLP ſimiliter elevari intelligatur circa rectam PL ut axem, donec cum triangulo ſequente in eodem plano exiſtat, atque hoc

tamdiu continuetur, donec LGIPKL in planum ſit reducta [Vid *Fig.* 12]. His ita factis, manifeſtum eſt lineam KOPIG in planum reductam fore lineam rectam quippe in plano breviſſimam. Hinc per naturam lineæ rectæ angulus GLI æqualis eſt differentiæ angulorum LIK, LGK; angulus ILP = LPK — LIK, &c. id eſt, angulus quem tangentes proximæ, v. g. GL & IL comprehendunt in puncto axis L, ubi concurrere cenſendæ ſunt, æqualis eſt differentiæ anguli LGI vel LIP, quem tangens LG vel LI facit cum curva KPIG in G vel I.

Ex hoc fundamento natura curvæ KPIG ita inveſtigatur. Per punctum quodcunque in curva aſſumtum G, [*Fig.* 11] ducatur pars circuli paralleli Gg, meridianis AGF & AIf intercepta. A punctis G & g ducantur ad axem AB normales GH, gH, & a punctis F, f ad centrum baſeos B rectæ FB, fB. Dicatur radius baſeos BC = BF = 1, applicata GH = x, arcus circumferentiæ baſeos CF = z, cujus elementum $fF = dz$, arculus meridiani $Ig = ds$, & tangens GL vel IL = t.

Ob ſimilitudinem ſectorum BFf, HGg, eſt BF [1]: HG [x] = Ff [dz]: Gg. Ergo $Gg = xdz$. Hinc angulus GLI = Gg: GL = $xdz : t$.

Anguli LIG complementum ad ſemicirculum eſt angulus GIg, cujus tangens eſt ad radium ut Gg ad gI; quare poſito radio = BC = 1, erit tangens anguli GIg, ſeu quod idem eſt, ſigno tantum mutato, tangens anguli LGI = — Gg: $gI = -xdz : ds$. Ergo elementum anguli LGI = $-d(\frac{xdz}{ds}) : (1 + \frac{xxdz^2}{ds^2})$. Sed per fundamentum ſupra adſtructum, angulus GLI = elemento anguli LGI, ergo habetur æquatio $\frac{xdz}{t} = -d(\frac{xdz}{ds}) : (1 + \frac{xxdz^2}{ds^2})$ ſeu quia $x : t = dx : ds$, $\frac{dxdz}{ds} = -d(\frac{xdz}{ds}) : (1 + \frac{xxdz^2}{ds^2})$.

Pro integranda hac æquatione, ponatur $xdz : ds = v$, & facta

facta substitutione habebitur $vdx : x = -dv : (1+vv)$, seu $-dx : x = dv : (v+v^3) = (dv + 3vvdv) : (v+v^3) - 3vdv : (1+vv)$; sumtisque integralibus per Logarithmos $l(a:x) = l(v+v^3) - \frac{1}{2} l(1+vv) = lv - \frac{1}{2} l(1+vv)$, unde $a : x = v : \sqrt{(1+vv)}$, & $a : \sqrt{(xx-aa)} = v$ [substituto ejus valore] $xdz : ds$; tandemque $dz = ads : x\sqrt{(xx-aa)}$.

IDEM PROBLEMA.

Ducere lineam brevissimam in superficie curva quavis data.

Per methodum de maximis & minimis.

SOLUT. Concipiantur in plano horizontali AEC, ex singulis curvæ quæsitæ punctis a, b, c, demitti perpendiculares aA, bB, cC in puncta A, B, C. &c. quæ forment curvam projectionis, cujus duo elementa contigua quævis represententur per AB, BC. Per A & B ductæ sint AE, BD tanquam elementa abscissarum, & EB, DC prioribus perpendiculares tanquam elementa applicatarum curvæ projectionis. Porro punctum B in elemento EB prolongato fluere intelligatur in locum proximum ϐ, cui respondeat in superficie curva punctum β; secetur autem ipsa superficies per planum verticale transiens per rectam EBF, sectio illa formabit curvam, quæ, ob datam superficiem, & ipsa curva dabitur. Sit itaque subtangens puncto B vel E [quod perinde est quia BE est elementum infinite parvum, subtangens vero finita] respondens $= T$: Et dicantur $AE = f$, $BD = g$, $EB = m$, $DC = n$, elementum verticalis Bb, hoc est, $Bb - Aa = c$, elementum verticalis Cc, hoc est $Cc - Bb = e$; Erit elementum curvæ quæsitæ $ab = \sqrt{(ff+mm+cc)}$, & $bc = \sqrt{(gg+nn+ee)}$. Debet itaque $\sqrt{(ff+mm+cc)} + \sqrt{(gg+nn+ee)}$ esse minimum: quare differentiando [positis AE, & BD seu f & g constantibus] habetur $\frac{mdm+cdc}{\sqrt{(ff+mm+cc)}} + \frac{ndn+ede}{\sqrt{(gg+nn+ee)}} = 0$. Unde quia $m + n$, ut & $c + e$ sunt constantes, proinde $dn = -dm$ & $de =$

TAB. LXXX. N°. CLXVI. *Fig.* 13.

$-dc$, erit $\frac{m\,dm+c\,dc}{\sqrt{(ff+mm+cc)}} = \frac{n\,dm+e\,dc}{\sqrt{gg+nn+ee)}}$. Ut vero dm & dc eliminari possint, quærenda est eorum ratio, quod sic fit: Dicatur $Bb = z$, liquet esse $T : z = B\,\mathfrak{G}$ seu $dm : \mathfrak{G}\,\mathfrak{Z} - Bb$ seu dc; adeoque $dc = z\,dm : T$; quod substituendo in æquatione inventa, eamque per dm dividendo, & multiplicando per T, prodibit $\frac{m\,T+c\,z}{\sqrt{(ff+mm+cc)}} = \frac{n\,T+e\,z}{\sqrt{(gg+nn+ee)}}$, ubi nondum reperitur uniformis progressus ab elementis A E, & E B ad elementa B D, D C, quia utrique æquationis membro communia sunt T & z; quocirca eam dispono hunc in modum $T\times(\frac{n}{\sqrt{(gg+nn+ee)}} - \frac{m}{\sqrt{(ff+mm+cc)}}) = z\times(\frac{-e}{\sqrt{(gg+nn+ee)}} + \frac{c}{\sqrt{(ff+mm+cc)}})$. Hic in factoribus infinitesimalibus manifesta observatur uniformitas; uterque enim denotat differentiam fractionum uniformium ex similibus elementis compositarum scribendo itaque pro n, g, e, has, quas repræsentant, dy, dx, dz, habebimus $T\times d(\frac{dy}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}) = z\times -d(\frac{dz}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}})$, in qua æquatione nihil adhuc constans suponitur, ideoque liberum est aliquod elementum ad lubitum assumere tanquam invariabile. Assumamus ergo quod in Scripto *Klingenstierniano* assumsi constans $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, seu ds, ut æquatio exprimatur hoc modo $T\times d(\frac{dy}{\sqrt{(ds^2+dz^2)}}) = z\times -d(\frac{dz}{\sqrt{(ds^2+dz^2)}})$ quæ fractionibus actu differentiatis, in hanc abit $\frac{dz\,ddz}{ds^2+dz^2} = \frac{T\,ddy+z\,ddz}{T\,dy+z\,dz}$, æquivalentem ei quam dedi in Additionibus ad prædictum scriptum, ut calculare volenti patebit. Quod si vero pro constanti assumatur ipsum A B, seu elementum curvæ quæsitæ, hoc est, $\sqrt{(ds^2+dz^2)}$, æquatio emergit simplicissima, nempe hæc: $T\,ddy = -z\,ddz$. Sed quæ nihilominus ad differentias primas generaliter reduci nequit.

A N I-

N°. CLXVII.

ANIMADVERSIONES

in. Cl. Georgii CHEYNÆI

Fluxionum Methodum inverſam,

Editam *Londini* 1703.

Pag. 2. PRima [methodus regrediendi ad Fluentes, ubi Fluxiones vinculo adficiuntur] *coincidit cum ea qua* NEWTONUS *utitur.*

Hæc methodus etiam a nobis aliiſque frequenter in uſum vocatur, & cuivis in hiſce leviter verſato obvia eſt, neque adeo NEWTONO peculiaris cenſeri debet.

Ibid. *Sit, v. gr. Fluxio data* $dz^{\theta} \times \dot{z}(e+fz^{\eta})^{\lambda}$; *pone* $y = (e+fz^{\eta})^{\lambda}$ *&c.* Conferatur cum pag. 12.

Cum palam ſit Fluentem hujus Fluxionis $x^{m}\,dx \times (a+bx)^{n}$ ſemper terminis numero finitis exprimi poſſe, modo m ſit numero integro & poſitivo, vel nihilo æqualis; Auctoris exemplum facile ad noſtram formulam reducitur, ponendo $z^{\eta} = x$, habebitur enim $Dz^{\theta}\,dz \times (e+fz^{\eta})^{\lambda} = \frac{D}{\eta} x^{(\theta-\eta+1):\eta}\,dx \times (e+fx)^{\lambda}$; unde ſtatim patet Fluentem quæſitam fore terminabilem, ſi $(\theta-\eta+1):\eta$ vel, addita unitate, ſi $(\theta+1):\eta$ eſt numero integro & affirmativo æqualis. Alio modo quæſita Fluens fiet terminabilis, ſi quantitas ſub vinculo dividatur per z^{η}, & multiplicetur iterum quæ extra vinculum per $z^{\eta\lambda}$; ſic enim erit $Dz^{\theta}\,dz \times (e+fz^{\eta})^{\lambda} = Dz^{\theta+\eta\lambda}\,dz \times (ez^{-\eta}+f)^{\lambda}$, quæ poſterior, tractata ut ante factum, ad noſtram formulam reducitur, ponendo nunc $z^{-\eta} = x$; nam ſic prodibit $Dz^{\theta+\eta\lambda}\,dz \times (ez^{-\eta}+f)^{\lambda} = -\frac{D}{\eta} x^{(-\theta-1-\lambda\eta-\eta):\eta}\,dx \times (ex+f)^{\lambda}$;

ergo iterum si $(\theta+1+\lambda\eta+\eta):-\eta$ vel, addita unitate, si $(\theta+1+\lambda\eta):-\eta$ est numero integro & positivo æqualis; erit Fluens quæsita terminabilis. Atque hæ duæ conditiones a nobis facile negotio erutæ, $(\theta+1):\eta$ & $(\theta+1+\lambda\eta):-\eta$, quibus Fluens quæsita terminis numero finitis exprimitur, si nimirum numeri illi, vel alteruter, sunt integri & affirmativi, sunt ipsissimæ illæ ab Auctore post longas ratiocinationes & operationes inventæ. Vid. pag. 12. Quod si vero neuter ex numeris istis sit numerus integer & affirmativus, tunc quantitas $(e+fx)^{\lambda}$ vel $(ex+f)^{\lambda}$ in Seriem solvenda est, & postea facile obtinebitur Fluens per Seriem infinitam.

Pag. 5. *Ad hoc exemplum procedendum in trinomialibus* . . . . . *Sit iterum Fluxio data* $dz^{\theta}z\times(e+fz^{\eta}+gz^{2\eta})^{\lambda}$; *ponatur* $y=(e+fz^{\eta}+gz^{2\eta})^{\lambda}$.

Fluxiones trinomiales facile reducuntur ad binomiales, ponendo primo $z^{\eta}=x$, id quod facit $Dz^{\theta}dz\times(e+fz^{\eta}+gz^{2\eta})^{\lambda}=\frac{D}{\eta}x^{(\theta+1-\eta):\eta}dx\times(e+fx+gxx)^{\lambda}$; deinde tollendo secundum terminum quantitatis sub vinculo, nempe ponendo $x=y-f:2g$; quo facto erit $\frac{D}{\eta}x^{(\theta+1-\eta):\eta}dx\times(e+fx+gxx)^{\lambda}=\frac{D}{\eta}(y-f:2g)^{(\theta+1-\eta):\eta}dy\times(-ff:4g+e+gyy)^{\lambda}$; nunc ergo si $(\theta+1):\eta$ est numerus integer & positivus, poterit Fluxio distribui in tot Fluxiones binomiales quot sunt unitates in $(\theta+1-\eta):\eta$; quod si vero numerus ille non sit integer vel non positivus, quantitates, quæ extra vinculum, & quæ intra illud, in Series conjiciendæ sunt, ex quibus duabus Seriebus inter se multiplicatis Fluentes terminorum elicitæ, dabunt Seriem novam pro Fluente quæsita.

Pag. 6. *Secunda methodus, quæ in hoc consistit, ut conjiciatur in Seriem pars Fluxionis datæ, inque eam ducatur pars vinculo exclusa; indeque... ad Fluentes fiat retrogressus* &c.

Hæc methodus etiam mihi dudum fuit familiaris, eamque olim com-

communicavi cum *Marchione* HOSPITALIO, in *Lectionibus* meis in usum ejus conscriptis super Calculo differentialium & integralium.*

Pag. 8. *Prodibit quotus, qui..... dabit Fluentem quæsitam, una cum abrumpendi conditionibus.*

Has abrumpendi conditiones in hac terribili Serie non video; quæcunque Series abrumpitur, oportet ut, termino aliquo in ea existente nullo, sequentes omnes pariter in nihilum recidant; hoc autem idem in hac Serie accidere nullum apparet indicium.

Pag. 10. *Potuisse* [in æquatione assumpta cum coefficientibus indeterminatis, cujus Fluxio cum proposita Fluxione comparatur] *exponentes terminorum extra vinculum assumi diversos ab hic assumptis, modo semper exponens primi termini non fuisset assumptus minor quam* $\theta - \eta + 1$.

Fallitur hic Cl. Auctor: potest enim exponens primi termini quantumvis minor assumi, quam $\theta - \eta + 1$, modo interim exponens vinculi debite augeatur; id quod Auctor non animadvertisse videtur. Ita si, ex. gr. pro exponente primi termini assumatur $\theta - 2\eta + 1$, & pro exponente vinculi $\lambda + 2$, resultabunt utique [contra quod Auctor putat] termini cum primo termino Fluxionis datæ comparandi. Ut rei veritas pateat; esto ergo assumta æquatio hæc, $Adz^{\theta - 2\eta + 1} + Bdz^{\theta - 3\eta + 1} + Cdz^{\theta - 4\eta + 1}$ &c. $\times (e + fz^{\eta})^{\lambda + 2} =$ Fluenti quæsitæ. Hujus assumtæ æquationis capiatur Fluxio, & ita postea exprimatur, ut exponens vinculi sit λ, quod fit multiplicando Fluxionem ipsius $Adz^{\theta - 2\eta + 1} + Bdz^{\theta - 3\eta + 1} + Cdz^{\theta - 4\eta + 1}$ &c. per quadratum ipsius $e + fz^{\eta}$, id est per $ffz^{2\eta} + 2efz^{\eta} + ee$, ipsum vero $Adz^{\theta - 2\eta + 1} + Bdz^{\theta - 3\eta + 1}$ + &c. per $fz^{\eta} + e$; Erit Fluxione æquata cum Fluxione data, eaque reducta

$$\left.\begin{matrix}(\theta - 2\eta + 1) \times Adff \\ (\lambda + 2) \times \eta \times Adff\end{matrix}\right\} z^{\theta} \left\{\begin{matrix}+(\theta - 3\eta + 1) \times Bdff \\ +(\theta - 2\eta + 1) \times 2Adef \\ +(\lambda + 2) \times \eta \times Bdff \\ +(\lambda + 2) \times \eta \times Adef\end{matrix}\right\} z^{\theta - \eta} \left\{\begin{matrix}+(\theta - 4\eta + 1) \times Cdff \\ +(\theta - 3\eta + 1) \times 2Bdef \\ +(\theta - 2\eta + 1) \times Adee \\ +(\lambda + 2) \times \eta \times Cdff \\ +(\lambda + 2) \times \eta \times Bdef\end{matrix}\right\} z^{\theta - 2\eta}, \text{ \&c.}$$

* N°. CXLIX Lect. XLIX. pag. 526. *Tom. III.*

$= dz^{\theta}$; comparatis terminis homologis erit $A = 1 : (\theta + \lambda\eta + 1)ff$, $B = (2\theta + \lambda\eta - 2\eta + 2) \times Ae : (-\theta - \lambda\eta + \eta - 1)f$, $C =$ &c.

Pag. 14. *Te minime latet* $\phi(x+1) = \frac{\dot{x}}{x+1}$. *Est enim* $l(x+1) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 +$ &c. *adeoque* $\phi l(x+1) = \dot{x} - x\dot{x} + x^2\dot{x}$ &c. $= \dot{x} \times (1 + x - x^2 -$ &c.$) = \dot{x} \times \frac{1}{x+1} = \frac{\dot{x}}{x+1}$.

Hoc non opus habet tanta demonstratione per Series, immediate enim fluit ex natura Logarithmicæ, ut ego jam olim ostendi. Vid. *Act. Erud.* 1697, pag. 127 in fine *.

Pag. 15. *Sit Fluxio universalis data* $rx^m l^n x \dot{x}$

Hujus Fluxionis Fluentem, jam ante plures annos per varias methodos inveni, quas tum temporis cum Ampl. LEIBNITIO, aliisque, communicavi. Cæterum pleraque quæ in hac pagina & sequentibus habentur de exponentialibus, videntur ex meis promanasse quæ in *Act. Lipsi.* 1697, m. Martii de hac materia publicavi †. Exempla enim mea fere omnia hic ab Auctore nostro repetuntur, ut & ipsa hæc Series $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} =$ &c. pro quadratura particularis alicujus spatii curvæ hujus $x^x = y$.

Pag. 25 & 26. *Si pars transcendentalis Fluxionis datæ fractio fuerit, v. g.* $\frac{p\,z}{q\,z}$ [*ubi* p *&* q *significant quantitates ex* z *& cognitis quomodocunque, & sine vinculis aut radicalitatibus, compositas;*] *in qua Fluxio indeterminatæ* z *in omnes terminos numeratoris ducitur; res semper ad Logarithmos & exponentiales redit: semper enim est* $F : \frac{p\,\dot{z}}{q\,z} = \frac{p\,z}{q\,z} lz = lz^{\frac{pz}{qz}}$.

Perfunctorie hæc nimis tractantur; debuisset Cl. Auctor ostendere, quomodo fractiones rationales Fluxionum ad Logarithmos & exponentiales reducuntur; neque sufficit dicere, quod

* N°. XXXVI. pag. 181, 182. *Tom. I.* † N°. XXXVI. pag 179. *Tom. I.*

quod F: $\frac{\dot{p}z}{qz} = \frac{pz}{qz}\,lz$; si enim per p & q utrobique easdem quantitates intelligat, assertum non est verum: Si vero p & q in Fluente aliæ sint intelligendæ quam p & q in Fluxione, dicendum ergo fuisset, quomodo illæ ex hisce datis inveniantur: deinde falsum quoque est quod hujusmodi Fluxiones semper ad Logarithmos & exponentiales reducantur; interdum enim ad arcus Circuli redeunt, qui utique ad Logarithmos [reales] reduci non possunt, quinimo interdum habent Fluentes finitas determinabiles absolute. Sed hanc materiam Ampl. LEIBNITIUS & ego jam occupavimus, & methodos nostras dedimus in *Actis Lipsi.* 1702, m. Maii, & 1703, m. Januar.*

Pag. 34. *Ut vero eorum usum in exponentialibus secundi gradus..... ostendam, sit æquatio* $a^y = x^{x^x}$.

De hisce ego primus egi, quantum scio, in citat. Act. 1697, mens. Mart. †

Pag. ead. *Erit* $y\,la = x^x\,lx$. *Item* $l(x^x lx) = l(y\,la)$. *Sed* $l(x^x lx) = x\,lx + l\,lx$. *Item* $l(y\,la) = ly + l:la$. *Quare* $ly = \frac{x\,lx + l:la}{l:la} - l\,lx$.

Errat hic Cl. Auctor; nam cum sit $x\,lx + l:lx = ly + l:la$, erit utique $ly = x\,lx + l:lx - l:la$, vel, si mavis, $ly = x\,lx + l:\frac{lx}{la}$; non vero $ly = \frac{x\,lx + l:lx}{l:la}$. Omnia igitur quæ sequuntur, ad hoc Problema $a^y = x^{x^x}$ pertinentia, sunt etiam erronea, adeoque corrigi debent.

Pag. 37. *Verba ipsius* NEWTONI *ut pote commodissima ex loco citato prius huc transferam.*

Quod revera verba NEWTONI transtulerit tantum, ipsas vero operationes non inspexerit attente, ex eo patet, quod errores, sive typographicos, sive calculi, apud WALLISIUM com-

* N°. LXX. pag. 393. *Tom. I.* † N°. XXXVI. pag. 179. *Tom. I.*

commiſſos ipſe nunc repetierit, neque eos correxerit, quos ſic corriges: pag. 40, l. 9; pag. 41, l. 5; & pag. 42, l. 1; pro az^{λ} ſcrib. az^{ν}. pag. 42, l. 6; pro $+zr$ ſcrib. $-zr$, & pro $\frac{3zzr}{8d}$ ſcrib. $\frac{3zzr}{4d}$.

Pag. 46. *Altera* NEWTONI *Methodus..... coincidit cum ea publicata a Cl.* LEIBNITIO, Actis Lipſiæ, Aprilis 1693, *hoc eſt, ad minimum* 17 *annis poſtquam erat a* NEWTONO *reperta.*

Non qui primus reperit, ſed qui primus publicavit, laudem a publico primus meretur: interim quaſi vero & ipſe Cl. LEIBNITIUS non diu antea repertam habere potuiſſet hanc Methodum, antequam eam publicaſſet. Nulla eſt igitur conſequentia: *Methodus hæc* 17 *annis reperta eſt a* NEWTONO, *antequam a* LEIBNITIO *publicata; Ergo* NEWTONUS *prior eſt inventor* LEIBNITIO. Quid ſi enim LEIBNITIUS eam inveniſſet 18 annis priuſquam publicaſſet? eſſet utique primus Inventor & primus Publicator.

Pag. 50. *Methodus a Cl. Viro* Joh. BERNOULLIO Actis Lipſiæ 1694 * *prodita, qua Fluxionis datæ Fluens per Seriem infinitam, generalem quidem, terminis tamen plerumque maxime implicitis, obtinetur.*

Non video terminos per methodum meam multo magis implicitos obtineri quam per alias Methodos ab Auctore recenſitas, quarum tamen nulla tam generalis eſt quam mea; imo in nonnullis caſibus ſimpliciores reddit terminos. Sed quæcunque ſit methodi meæ implicatio, miror quod Auctor noſter non eadem uſus ſit facilitate in excuſanda hac implicatione meæ Methodi per ipſius univerſalitatem, qua uſus eſt circa aliquam Methodum ſui popularis Cl. CRAIGII, quam, cum plerumque in *calculi molem immanem* deducat, laudat tamen, quod *laborem penſet methodi ipſius univerſalitas*; licet in univerſalitate meæ multum cedat. Vid. pag. 123. Sic quod in me extraneo

* N°. XXI. pag. 125. *Tom. I.*

neo diſplicet & extenuatur, idem illud in conterraneo placet & extollitur.

Ibid. *Seriem ipſam generalem ſic inveſtigabis; ſit* ż y *expreſſio generalis pro Fluxionibus primis quibuſcunque &c.*

Alias præterea habeo vias ad illam inveſtigandam, quæ etiam valent pro Fluxionibus ſuperioribus: de his, ante 9 & 10 annos, communicavi cum Ampl. LEIBNITIO.

Pag. 52. *Fietque* $y = \frac{ax}{r} + \frac{axx}{rr} + \frac{ax^3}{r^3} + \frac{ax^4}{r^4}$ &c.

Hæc Series eodem modo expreſſa habetur in *Actis Lipſ.* 1694, pag. 438. Sed vitiata eſt per typothetam, corrigi itaque debet, ut eam jam correxi in *Actis* anni ſequentis pag. 96 in *Erratis*; nempe ſic $y = \frac{ax}{r} + \frac{axx}{2rr} + \frac{ax^3}{3r^3} + \frac{ax^4}{4x^4}$ &c. Auctor itaque repetendo eundem errorem, oſtendit ſe exemplum ex *Actis* nude exſcripſiſſe, neque calculum ipſum perfeciſſe.

Pag. ead. *Sit jam* ż y v *expreſſio generalis pro tranſcendentibus vel exponentialibus primi gradus (ubi* y *eſt quantitas algebraïca ex indeterminatis & conſtantibus quomodocunque compoſita,* v *vero quantitas geometrice irrationalis quæcunque).*

Non opus eſt pro hoc caſu novum inire calculum ad novam Seriem fabricandam, jam enim continetur in mea quam dedi pro $\int y\,dz$. Nam adeo generalis eſt, ut per y non tantum quantitas algebraïca ex indeterminatis & conſtantibus quomodocunque compoſita, ſed etiam talis intelligi poſſit, quæ partim ex conſtantibus & indeterminatis algebraïcis, partim ex geometrice irrationalibus utcunque ſit compoſita. Sic itaque pro applicatione univerſalis expreſſionis $y\,dz$ ad hunc caſum $\int yv\,dz$; aliud nihil faciendum eſt, quam ut in mea Serie univerſali $\int y\,dz = zy - \frac{z^2\,dy}{1.2.dz} + \frac{z^3\,ddy}{1.2.3.dz^2} - \frac{z^4\,d^3y}{1.2.3.4.dz^3}$ + &c. loco y, dy, d^2y, d^3y, &c. ponantur eorum valores, qui hic ſunt yv, $v\,dy + y\,dv$, $v\,ddy + 2\,dy\,dv + y\,ddv$, $v\,d^3y + 3\,dv\,ddy + 3\,ddv\,dy + y\,d^3v$, &c. ex quorum ſubſtitutione provenit ſtatim Series quam Auctor habet; & hoc per ſe adeo manifeſtum eſt, ut

mirer

mirer eum, præter omnem neceſſitatem, voluiſſe aliunde quærere quod ante oculos erat jam pene factum.

Pag. 56. *Iiſdem methodis quantitatem quamcunque ad poteſtatem indeterminatam elevabis.*

Ego aliam methodum magis naturalem habeo ad poteſtatem indeterminatam elevandi quantitatem quamcunque & hæc methodus non eget neque Logarithmis neque infiniteſimalibus; ſed illam per Algebram ordinariam ex natura numerorum figuratorum erui, & jam ante 12 annos communicavi cum *Marchione* HOSPITALIO *, antequam adhuc ſcirem tale quid a NEWTONO aliove præſtitum eſſe.

P. 59. *Omnia hæc hactenus tradita ſunt, niſi paucula exempla Methodorum* Newtonianarum..... *Omnia in hiſce, vel per hanc* [*aut non abſimiles methodos*] *ab aliis* [*intra hoſce, viginti quatuor annos proxime elapſos*] *edita, eſſe ſolum eorundem ab Ipſo diu antea cum amicis vel publico communicatorum repetitiones, aut non difficilia Corollaria.*

Hæc in laudem Ampliſſimi NEWTONI, Magiſtri & popularis ſui, merito dixit; modo id non ſit in extenuationem aliorum & Exterorum imprimis: vereor ne plus NEWTONO tribuat, quam ipſe ſibi arrogaturus ſit NEWTONUS. Alias miſeri nos omnes ſumus, quibus nihil nec inventi, nec poſthac inveniendi, reliquit; aut qui quicquid fecimus, aliud nihil fecimus, quam nectere repetitiones quaſdam, aut ad ſummum non difficilia Corollaria quædam eorum quæ diu antea NEWTONUS cum amicis ſuis communicaverat. Certe ſi vel maxime hoc feciſſemus, an ideo minus quam NEWTONUS horum inventorum Auctores dicendi eſſemus; quippe qui cum non fuerimus ex numero illorum amicorum, quibuſcum communicavit; nec ipſe niſi ante paucos annos ſua reperta publicaverit; neceſſe habuimus illa noſtro marte & noſtra induſtria eruere; adeo ut hac in parte nihil NEWTONO debeamus: quamvis ceterum de publico eum præclare meritum lubentes confiteamur.

Pag. 63.

† N°. CXLIX, Lect. XLVIII, pag. 522, *Tom. III.*

Pag. 63. *Ille enim* [CRAIGIUS] *primus omnium (quod sciam) publico harum* [Transcendentium quadraturarum] *exempla impertivit, in* Phil. Transf. Dec. 1697.

Harum Exemplum etiam ego, eodem anno 1697, eodemque mense Decembri in *Ephemeridibus Gallicis* †, & ex illis postea excerptum in *Actis Lipsiens.* 1698, pag. 54 l. 4, publico impertivi, postquam, diu ante, hujusmodi curvæ transcendentales a me aliisque fuissent consideratæ: adeo ut Cl. CRAIGIUS non primus omnium earum exempla publicaverit.

Pag. 65. *Fluentes... a Fluxionibus per sectiones præcedentes datæ, interdum determinata quantitate a vera deficiunt, interdum eandem determinata quantitate excedunt.... Rem ipsam sic explorabis; pone ipsam Fluentem per methodos supra traditas repertam* $=0$, *& habebis signum; iterumque pone indeterminatam quantitatem qua Fluens illa exprimitur* $=0$, *& obtinebis ipsam quantitatem demendam vel addendam Fluenti repertæ, prout signum innuerit.*

Omnino superfluum est ponere Fluentem $=0$, neque signum ullo modo ab ista positione dependet: quid si enim ex ea ambo signa prodeant, utrum tunc eligendum erit? Sumamus Exemplum ipsum tertium Auctoris, ubi $-\frac{30abx^{3:2}+75bc}{28aa} \times (c-ax^{3:2})^{2:5} = A$ [prout nimirum ab Auctore scribitur; sed male; invenio enim $\frac{-30abx^{2:3}-75bc}{28aa}(c-ax^{2:3})^{2:5} = A$.] Posito itaque $A=0$, verum quidem est, quod tunc diviso per $(c-ax^{3:2})^{2:5}$ proveniat $x = +(75c:30a)^{2:3}$; sed etiam non minori jure dividi potest per $(-30abx^{3:2}+75bc):28aa$ & tunc provenit $x = +(c:a)^{2:3}$; nam per substitutionem hujus valoris, æque ac illius, degenerat A in nihilum. Quod si nunc hæc duo signa diversa essent, ut revera sunt, si ponatur vera æquatio $\frac{-30abx^{2:3}-75bc}{28aa}(c-ax^{2:3})^{2:5} = A = 0$;

* N°. XL, pag. 209, *Tom. I.*

nam uno modo obtinebitur $x = -(75c : 30a)^{3:2}$, & altero $x = +(c:a)^{3:2}$. Utrum ergo nunc signum +, an — eligetur? Unde patet criterium Auctoris, ad explorandum quid addendum demendumve sit areæ, ut vera obtineatur, nihil omnino valere, utpote sæpissime sibi ipsi non constans; quod magis ex ipsa conclusione Auctoris patescit, quando colligit, *Quare vera quadratura, erit* $A = \frac{-30abx^{3:2}+75bc}{28aa}(c-ax^{3:2})^{2:5} + \frac{75bc^{7:5}}{28aa}$; posito enim $x = 0$ [in quo casu area evanescere deberet,] provenit tamen $A = +\frac{75bc^{7:5}}{28aa} + \frac{75bc^{7:5}}{28aa}$, quod est manifeste absurdum. Verus autem modus explorandi quid Fluenti inventæ addendum demendumve sit, ad habendam veram aream, in hoc consistit, ut *ponatur indeterminata quantitas qua Fluens illa exprimitur* $= 0$, *& quæ inde provenit quantitas adjiciatur sub signo contrario ad Fluentem repertam.* Secundum hanc Regulam, tertium exemplum Auctoris ita est corrigendum: $\frac{-30abx^{2:3}-75bc}{28aa} \times (c-ax^{2:3})^{2:5} = A$; pone indeterminatam $x = 0$, fietque $A = -\frac{75bc^{7:5}}{28aa}$, quod dat quantitatem sub signo [contrario] + addendam Fluenti antea repertæ. Quare vera quadratura erit $A = \frac{-30abx^{2:3}-75bc}{28aa} \times (c-ax^{2:3})^{2:5} + \frac{75bc^{7:5}}{28aa}$. Eodem modo vera quadratura exempli secundi, a variis erroribus Auctoris repurgata, hæc est: $A = (\frac{3x^2}{10a^2e^2} + \frac{9ccx}{35a^2e^4} + \frac{27c^4}{140d^2e^6}) \times (e^2x-c^3)^{4:3} - \frac{27c^8}{140d^2e^6}$.

Pag. 67, 68. *Sit Fluxio infinitesimalis* $z^r \dot{z} \times (e + fz^{\pm\eta} + gz^{\pm 2\eta} + hz^{\pm 3\eta}$ &c. $)^m$ .... *Si jam velis ut indices terminorum*

norum extra vinculum in Fluente augendo procedant, existentibus terminorum sub vinculo in Fluxione data indicibus affirmativis, capiendus in æquatione assumenda primi termini extra vinculum Index $r+1$, *secundi* $r+1+\eta$, *&c. Sin existentibus &c.*

Hæc restrictio plane est superflua; potest enim in quocunque casu capi in æquatione assumenda primi termini extra vinculum index $r+1+$ vel $-$ aliquo multiplo ipsius η, qui sit etiam multiplus maximi indicis, sive affirmativi, sive negativi, indeterminatæ sub vinculo in Fluxione data; modo interim index ipsius vinculi debite augeatur vel minuatur. Sic in exemplo Cl. Auctoris pro Fluxione Trinomiali $Dz^r dz \times (e+fz^\eta + gz^{2\eta})^m$, possum pro indice primi termini extra vinculum in æquatione assumenda ponere verb. gr. $r-4\eta+1$, & ita æquatio assumenda erit $Az^{r-4\eta+1}+Bz^{r-5\eta+1}+Cz^{r-6\eta+1}$, &c. $\times (e+fz^\eta+gz^{2\eta})^{m+2}$: ita pariter in altero exemplo Auctoris $Dz^r dz \times (e+fz^{-\eta}+gz^{-2\eta})^m$; æquatio assumenda poterit v. g. esse hæc, $Az^{r+4\eta+1} + Bz^{r+5\eta+1} + Cz^{r+6\eta+1}$, &c. $\times (e+fz^{-\eta}+gz^{-2\eta})^{m+2}$. Confer. cum iis quæ supra ad pag. 10, annotavi. †

Pag. 71. *Si neutra dedisset, concludendum fuisset Fluxionem datam finitæ Fluentis non fuisse capacem.*

Magna quidem confidentia hic, ut etiam alibi, asseritur, hanc Methodum semper exhibere Fluentes finitas, si Fluxiones earum sint capaces, sed ejus demonstrationem nusquam adhuc vidi. Auctor videtur ita velle ratiocinari; *Quæcunque Fluxio per hanc Methodum non obtinet Fluentem terminis numero finitis expressam, illa Fluxio talem Fluentem habere plane non potest.* Sed negatur hoc, usquedum ostensum fuerit hanc Methodum ad omnes Fluentes finitas possibiles sese extendere. Contrarium potius in exemplo potest ostendi. Sit enim Fluxio duplex binomialis $(8x^4 - a^4)\,dx \times (a^2+x^2)^{1:2}$, cujus neutrum membrum neutram

† Supra, pag. 131.

tram habet conditionem, ut sit $(\theta+1):\eta$, vel $(\theta+\eta\lambda+1):-\eta$ numerus integer & affirmativus, adeoque secundum Auctorem non haberet Fluentem finitam; interim tamen habet, ut aliunde scimus. Si vero quod extra vinculum est sub vinculum involveretur, & deinde Canoni generali infinitinomiali §. III applicaretur; immanis adeo calculi moles requireretur, ut nesciam an Auctor per eum mihi facile daturus sit Fluentem quæsitam, quam ego tamen per aliam viam commodissime & sine magno labore dabo: vel etiamsi quod extra vinculum est non involvatur sub illud, sed statim ad Canonem generalem applicetur; dubito tamen an Series alicubi abrumpatur, ita ut omnes sequentes termini evanescant: nam contingere quidem potest ut aliquis terminus evadat nullus, sed sequentes nihilo secius aliquid efficiunt; unde Fluens non dabitur sub terminis numero finitis. Sit v. g. Fluxio $dx(aa+4xx)(aa+xx)^{1:2}$, cujus Fluentem finitam esse certo scio; est enim $(aax+x^3)\times(aa+xx)^{1:2}$; sed si ad Canonem generalem applicetur, evanescet quidem secundus terminus, verum tertius & quartus, quos tentavi, & haud dubie sequentes, aliquid efficiunt; adeo ut nullæ hic habeantur conditiones abrumpendi: nisi aliquis velit dicere, ideo quoniam secundus terminus evanescat, in primo termino subsistendum esse, & omnes sequentes negligendos; quemadmodum revera primus terminus ex Canone generali repertus $(aa+xx)^{3:2}x$ jam ipsam dat Fluentem $(aax+x^3)\times(aa+xx)^{1:2}$ aliunde mihi repertam. Sed si hoc nescirem, quis mihi diceret, aut unde possem cognoscere, omnes terminos post secundum in infinitum sumtos se mutuo destruere, id est, summam affirmativorum æqualem esse summæ negativorum. Quid etiam dicemus de $xdx(aa+xx)^{1:2}$, cujus Fluens, ut facile patet, est $\frac{1}{3}(aa+xx)^{3:2}$; interim si applicetur ad Canonem generalem, quod duobus modis fieri potest, exprimendo Fluxionem datam, vel sic $xdx.1.(aa+x^2)^{1:2}$, vel sic $dx.$

$(o+$-

$(o+1x^1).(aa+ox+x^2)^{1:2}$; priori modo invenitur $\int(xdx.(aa+xx)^{1:2}) = (aa+xx)^{3:2} \times (\frac{1}{2}\cdot\frac{xx}{aa} - \frac{5}{2.4}\cdot\frac{x^4}{a^4} + \frac{5.7}{2.4.6.}\cdot\frac{x^6}{a^6} - \frac{5.7.9}{2.4.6.8.}\cdot\frac{x^8}{a^8}$, &c.), & posteriori modo = iterum $(aa+xx)^{3:2} \times (\frac{1}{2}\cdot\frac{xx}{aa} - \frac{5}{2.4}\cdot\frac{x^4}{a^4}$ + &c.); ubi Fluens non tantum non exprimitur terminis numero finitis; sed etiam hoc inconveniens sequitur, quod cujuscunque magnitudinis sit x, tamen hæc Series $\frac{1}{2}\cdot\frac{xx}{aa} - \frac{5}{2.4}\cdot\frac{x^4}{a^4} + \frac{5.7}{2.4.6}\cdot\frac{x^6}{a^6} - \frac{5.7.9}{2.4.6.8}\cdot\frac{x^8}{a^8}$ + &c. semper sit $= \frac{1}{2}$, id est, indeterminatum sit = determinato; quod quomodo cum sana ratione conciliari possit, videat Auctor. Eadem difficultas obvenit circa $xdx(aa+xx)^{-1:2}$, cujus Fluentem scimus esse $(aa+xx)^{1:2}$ seu $\sqrt{(aa+xx)}$; interim per Canonem generalem sequeretur illam esse $= (aa+xx)^{1:2} \times (\frac{1}{2}\cdot\frac{xx}{aa} - \frac{3}{2.4}\cdot\frac{x^4}{a^4} + \frac{3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^6}{a^6} - \frac{3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{x^8}{a^8}$ + &c.) id est, iterum determinatum æquale indeterminato. Si denique Fluxiones supra allatæ ita efferantur, ut indices indeterminatarum evadant negativæ, aliæ novæ difficultates oboriuntur; Fluxio v.g. jam supra considerata $dx(aa+4xx)\times(aa+xx)^{1:2}$, si mutetur in hanc formam $x^3dx(aax^{-2}+4)\times(aax^{-2}+1)^{1:2}$; ejusdem utique valoris cum priore, & si applicetur ad Canonem generalem, habebitur pro Fluente $x^4+oaaxx+a^4:o$ &c. ubi tertius terminus est magnitudinis infinitæ, cum tamen ipsa tota Fluens finita tantum sit: contra si ultimum exemplum $xdx\times(aa+xx)^{-1:2}$ transformemus in hanc formam $dx.1.(aax^{-2}+1)^{-1:2}$ habebimus ex Canone generali, pro tota Serie, primum tantum terminum x, reliquis singulis in nihilum abeuntibus; unde Fluens foret tantum $= x$, cum tamen sit $= \sqrt{(aa+xx)}$. Alias difficultates, quas movere possem, silentio prætereo; inte-

rim exemplum ipsum, quod Auctor pag. 70 & 71 proponit, non rite procedit: dicit enim quod $\int (dx.x^{-5:2}(3a - bxx).(a+bxx+cx^3)^{-1:2})$ Canoni generali applicata det $-2\sqrt{(a-bxx+cx^3)}:x^3$; ego vero aliam Fluentem inveni: certe, quam Auctor tradit, vera Fluens esse non potest: nam si ejus sumatur Fluxio per methodum directam, provenit $\frac{3cx^3 - 4bxx + 6a}{x^4\sqrt{(a-bxx+cx^3)}}\,dx$, quæ utique discrepat a proposita $\frac{3a - bxx}{xx\sqrt{(ax-bx^3+cx^4)}}\,dx$; contra intentum Auctoris.

Pag. 73. *Ubi observandum quod, si* r *vel* $\frac{1}{2m-2}$ *fuerit æqualis numero integro & affirmativo. . . . . Series . . . dabit longitudinem* [Parabolæ cujus æquatio $y = x^m$] *terminis numero finitis exprimendam.*

Hoc & plura alia circa Parabolas jam observavi & publicavi in *Act. Lipsi.* 1698, pag. 463 & seqq. * ubi ostendi omnem Parabolam absolute esse rectificabilem, aut per se, aut conjunctam cum alia; per se, si exponens Parabolæ sit $= (1+2p):2p$ [ubi per p intelligo numerum integrum quemvis, scilicet positivum]; cum alia vero, generaliter in omni casu.

Pag. 81. Cas. VI. *Sit ratio Radii ad Circumferentiam ab ea descriptam* $\frac{a}{b}$; *Eritque* $\frac{b}{a} \times x\,y\,\dot{y} = \dot{C}$ [C solidum est, genitum rotatione plani curvilinei, cujus abscissa x, ordinata y] *Ubi Rotationis Axis est summitatis axis Curvæ tangens, & planum abscissæ adjacet.*

Præcipitanter hic agit Auctor, non enim $\frac{b}{a}\,x\,y\,d\,y$, sed $\frac{b}{a}\,xydx = dC$; neque hoc tanquam vitium typographicum excusari potest: nam exemplum pag. seq. pro Casu sexto inserviens hunc errorem supponit, quando habetur $dC = \frac{mb}{a}\,x^{2m}\,dx$, & $C =$

* N°. L. pag. 250. *Tom. I.*

$C = \frac{mb}{a} \times \frac{x^{2m+1}}{2m+1}$; id quod ita corrigi debet; $dC = \frac{b}{a} x^{m+1} dx$ & $C = \frac{b}{a} \times \frac{x^{m+2}}{m+2}$.

Pag. 103. *Sit denique* $S = \frac{2b}{3a} x^{3:2} \times (\frac{1}{4} x^{-1} + 1)^{3:2}$, *sitque axis rotationis abscissa; erit per Cas. I. Probl. III.* $\dot{S} = \frac{b}{a} x^{1:2} \dot{x} \sqrt{(\frac{1}{4} x^{-1} + 1)} = \frac{b}{a} y \sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)} = \frac{b}{a} y \dot{L}$; *factaque divisione per* $\dot{L} = \dot{x} \sqrt{(\frac{1}{4} x^{-1} + 1)}$ [*data enim* $\dot{S}$, *datur* $\dot{L}$, *est quippe* $\dot{L} = \frac{a\dot{S}}{by}$] *habebitur* $y = x^{1:2}$.

Purus paralogismus! miror Cl. Auctorem tam facile deceptum, dum supponit quod est in quæstione, quando dicit, factaque divisione per $dL = dx \sqrt{(\frac{1}{4} x^{-1} + 1)}$; unde enim scit quod $dL = dx \sqrt{(\frac{1}{4} x^{-1} + 1)}$? Huc nihil confert quod per parenthesin addit [*data enim* dS, *datur* dL, *est quippe* dL = adS : by], nam falsum est quod data dS detur dL, nisi simul & ipsa y detur; in nostro vero casu non datur y, sed quæritur. Sane hic casus non tam facile solvitur ut Auctor putat; si enim rite ad æquationem reducatur; habebitur $dx \sqrt{(x - y + \frac{1}{4})} = dy \sqrt{y}$, ubi indeterminatæ implicantur; adeoque a se invicem separandæ sunt, antequam solutionem aggredi liceat: est autem separationis negotium unum ex maxime arduis & indaginis abstrusissimæ: patet itaque Auctorem non arte, sed casu, in veram incidisse Solutionem; quia haud dubie curvam ipsam quærendam $y = x^{1:2}$ sibi prius proposuit, & ex ea per methodum directam quæsivit dS, unde facile pervenit ad ipsum S; ad hoc deinde tanquam datum accommodavit suum quæsitum, quod ex ipsa sua formatione jam prægnitum habebat; adeo ut mirum non sit per paralogismum ad veritatem perveniisse. Sed ut paralogismus magis pateat, sumamus aliud simile exemplum, & in-

interim idem ratiocinium Auctoris sequamur: sit igitur $S = \int \frac{3b}{2a} x^2 \, dx \sqrt{(\frac{4}{5} x^{-1} + 1)}$; sitque axis rotationis abscissa; erit per Casum I, Probl. III, $dS = \frac{3b}{2a} xx \, dx \sqrt{(\frac{4}{5} x^{-1} + 1)} = \frac{b}{a} y \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{b}{a} y \, dL$; factaque divisione per $dL = dx \sqrt{(\frac{4}{5} x^{-1} + 1)}$ [data enim dS, datur dL; est quippe $dL = a\,dS : b\,y$] habebitur $y = \frac{3}{2} x^2$. Esset ergo, secundum ratiocinium Auctoris, curva quæsita $y = \frac{3}{2} x^2$; interim tamen veram curvam quæsitam esse $y = x^{3:2}$, cuilibet periculum facienti patebit.

Pag. 111. *Data, exempli gratia, Chorda unius Arcus, quæratur Chorda alterius Arcus, qui sit ad priorem ut* 1 *ad* η.

Hoc jam præstiti in *Act. Lipsi.* 1701, pag. 170 & seqq. * per duas Series universales, concinniores quam quæ hic ab Auctore exhibetur, & ni fallor jam olim ab ipso NEWTONO exhibita fuit; & quidem illas meas Series inveni citra ullum Calculum infinitesimalem, ex ipsis scilicet visceribus & intima natura arcuum & angulorum.

Pag. 113. Prob. X. *Ex data Serie infinita quantitatibus algebraïcis exprimenda, valorem ipsius finitum* [*si modo talem habuerit*] *invenire.*

Omnia hæc Serierum exempla hic tradita, videntur ab Auctore præformata ex valoribus finitis assumtis; adeoque minime mirum est, si per reversionem iidem valores ex Seriebus eruuntur. Alias Methodi valde insufficientes sunt, innumeras enim Series facile proponam, quarum valores [licet finitos] per eas Methodos non determinabuntur: male igitur pro generalibus venditantur.

Pag. 121. *Curvam invenire, cujus in rectam extensione Curva data, alias finitis terminis non quadrabilis, quadrabitur.*

Hæc methodus, præterquam quod plerumque immanem requirat calculi molem, etiam in casibus facillimis, ut jam adversus

* N°. LXIX. pag. 386 seq. *Tom. I.* Videatur etiam Nus. LXXXIX. pag. 511. *Tom. I.* nec non Numerus CXXVII. pag. 526. *Tom. II.*

versus Cl. CRAIGIUM animadverti in *Actis Lipsi.* 1695, pag. 64 *, hoc etiam defectu laborat, quod non sit generalis, ut Auctor noster putat. Exempla vero duo quæ affert $y = \sqrt{(xx+aa)}$, & $y = \sqrt{(x^m+a^n)}$, per methodum nostram in loco citato insinuatam, & in constructione curvæ paracentricæ feliciter adhibitam, ut videre est in *Actis Lipsi.* 1694, pag. 396 & 397 †, sine ullo negotio solvuntur. Rem in posteriori exemplo, quod prius continet, ostendisse sufficiet. $ydx = dx\sqrt{(x^m+a^n)}$; quadratum ejus $x^m\,dx^2 + a^n\,dx^2$ dividatur in duo quadrata, quorum latera habeant Fluentes geometrice rationales; puta in $x^m\,dx^2$ & $a^n\,dx^2$, quorum latera sunt $x^{m:2}\,dx$ & $a^{n:2}\,dx$, eorumque Fluentes $\frac{2}{m+2}\,x^{(m+2):2}$, & $a^{n:2}x$, divisa utraque per $a^{n:2}$, habebuntur $2\,x^{(m+2):2} : (m+2)\,a^{n:2}$, & x, pro coordinatis curvæ quæsitæ, quæ multiplicata per $a^{n:2}$, producit aream propositam $\int dx\sqrt{(x^m+a^n)}$; quæ curva eadem est cum ea quam Auctor per longum calculum invenit. Quod autem hæc methodus qua Auctor, post acutissimum CRAIGIUM, utitur, non sit universalis, patet ex iis quæ insinuavi in *Actis Lipsi.* 1695, pag. 63 & 376 §; præterea hoc incommodi habet, quod plerumque Linea per eam quæranda non sola sit cujus extensione area data quadratur, sed recta quædam ipsi fere semper addenda vel demenda est. Sic pro quadratura Circuli, vel potius semisegmenti circularis $\int dy\sqrt{(2ay - yy)}$, invenit quidem Cl. CRAIGIUS arcum itidem circularem; non autem purum, sed cum recta quadam permixtum: verum per meam methodum, curva quadratrix semper pura & sola obtinetur. Sit, v. g. idem semisegmentum circulare $\int dy\sqrt{(2ay - yy)}$ quadrandum per extensionem solam solius alicujus curvæ algebraicæ: Pro hac fiat curva, cujus coordinatæ sint $(2a^3 - 3ayy + y^3) : 3aa$

* N°. XXIII. pag. 136. *Tom. I.*
† N°. XIX. pag. 121. *Tom. I.*
§ Nis. XXIII & XXVI. pag. 137 & 144, *Tom. I.*

& $(2ay - yy) \sqrt{(2ay - yy)} : 3aa$; dico longitudinem hujus curvæ, ductam in radium, fore æqualem semisegmento circulari $\int dy \sqrt{(2ay - yy)}$. Notandum etiam me infinitis aliis modis idem posse præstare; habemus ergo infinitas veras Circuli quadraturas transcendentes, adeoque errat Cl. CRAIGIUS, quando illam uno tantum modo possibilem dicit in suo Tractatu *De figurarum curvilinearum quadraturis* pag. 51. Eodem modo pro quadratura Hyperbolæ $\int dx \sqrt{(x^2 + aa)}$, præter Parabolam ejus quadratricem jam ab HEURAETIO detectam, invenio innumeras alias, inter quas hæc est, cujus coordinatæ sunt $(3aax - x^3) : 3aa$ & $(3aa - xx) \sqrt{(3aa - xx)} : 3aa$, quæ extensa in rectam & multiplicata per a facit spatium = areæ datæ hyperbolicæ $\int dx \sqrt{(xx + aa)}$ †. Cæterum debuisset Cl. CHEYNÆUS hac occasione ostendere methodum transformandi datam curvam algebraïcam in aliam, vel alias algebraïcas diversæ naturæ, sed ejusdem longitudinis; quod Problema, perutile sane, generalissime solvi, aliisque adhuc solvendum proposui in *Diario Gallico*, 1702, mens. Februar. §

† Videatur de hoc argumento Nus. CXXXII, pag. 582, *Tom. II.*

§ N°. LXXII, pag 406. Vid N°. LXXIV, pag. 408, & LXXVII. . . LXXXIII, pag. 437. . . 452. *Tom. I.*

N°. CLXVIII.

OBSERVATIONES

In Clar. MOIVRÆI *Animadversiones in D.* CHEYNÆI *Tractatum de Fluxionum Methodo inversa,*

Editas *Londini* 1704.

In Præfationem.

Pag. 1. SI *intento quasi digito errores commonstrarem simul & emendarem.*

Non tamen omnes commonstravit.

Pag. 4.

Pag. 4. *Nec in his quadrandis ad* Logarithmos, *vel ad* Logarithmorum Logarithmos, &c. *vel ad Serierum numerum infinitum... confugiendum esse ostendi.*

Imo commode & eleganter ad Logarithmos confugitur, nec tam bene ad Series.

Pag. 5. *Sed hoc idem Theorema* [*Joh.* BERNOULLI pro Fluxionis alicujus datæ Fluente invenienda] *latius producere conatus, id quidem infinities implicatius, ne minimum vero universalius, reddidit.*

Verissime hoc mecum observavit Cl. MOIVRÆUS; idque jam objeci Cl. CHEYNÆO *, sed nihil respondit.

Pag. 10. *Aut erronea, aut nullius momenti asserere non dubito.*

Quæ de Centro Oscillationis habet CHEYNÆUS, ostendunt eum esse parum in concretis versatum, nam pleraque sunt falsa.

In Animadversiones.

Pag. 2. *Hanc inde conclusionem statim deducit, nempe Logarithmi Fluxionem, Fluxioni numeri per ipsum numerum divisæ æquari.*

Hæc conclusio est ipsa mea Regula, quam Cl. CHEYNÆUS ipsissimis fere verbis exscripsit ex *Act. Lipsi.* 1697, pag. 129, † *Differentiale Logarithmi*, &c. quamque non recte infringere conatur Cel. MOIVRÆUS.

Pag. 3. *Nam pag.* 1. *dicit Fluentem ipsius* $x^m dx$ *esse* $x^{m+1}:(m+1) \pm a^{m+1}$, &c.

Hoc intelligendum est de Fluente in abstracto considerata, eam scil. data qualibet quantitate determinata augeri vel minui posse, prout postea in certa applicatione res exigit.

Pag. ead. *Hoc supposito, dico* $x^{m+1}lx:(m+1) - x^{m+1}:(m+1)^2$ *non esse ipsius* $x^m dxlx$ *Fluentem absolutam, nam quamvis* $dx:x$ *sit Fluxio Logarithmi ipsius* x, *quando* x *est supra unitatem; tamen* $-dx:x$ *erit Fluxio Logarithmi ejusdem* x, *quando* x *est infra unitatem.*

* N°. præced. pag. 134. & 135. † N°. XXXVI, pag. 183. *Tom.* I.

Imo ego dico esse Fluentem absolutam in abstracto sumtam, sed augendam vel minuendam debite, si ad aream exprimendam applicetur, & semper $dx:x$ sumi potest pro Fluxione Logarithmi ipsius x, non obstante quod x possit esse infra unitatem: in calculo enim perficiendo non respicitur utrum x majus minusve sit unitate, quemadmodum etiam in Analysi ordinaria omnes quantitates signis affirmativis afficiuntur in abstracto, sed Problematis conditio postea hæc omnia limitat.

Pag. 4. *Area erit* $x^{m+1} lx : (m+1) - x^{m+1} : (m+1)^2$, *dum* x *est infra unitatem; quam primum autem* x *fit* $= 1$, *erit Area* $1 : (m+1)^2$, *non vero* $- 1 : (m+1)^2$, *ut sequitur ex ipsius calculo: quando autem* x *evadit major unitate, erit Area* $x^{m+1} lx : (m+1) - x^{m+1} : (m+1)^2 + 2 : (m+1)^2$.

Hæc non procedunt: si enim x est infra unitatem, patet lx fore concipiendum ut negativum, adeoque tunc MOIVRÆI expressionem non differre ab ea CHEYNÆI, nisi quod hujus negativa sit, illius affirmativa: sed hoc ideo fit, quia quandiu x est infra unitatem, applicata $x^m lx$ est negativa; quæ per consequens Aream negativam faciat, respectu ejus quæ oritur per applicatas affirmativas, existente scil. x supra unitatem.

Quæ sequuntur sunt mera logomachia: CHEYNÆUS enim Aream sumit, quæ oritur ex differentia affirmativæ & negativæ, & MOIVRÆUS earundem summam.

Pag. 5. *Igitur* $dq = \frac{1}{2} x\,dx$, *& proinde* $q = \frac{1}{4} xx$.

Hic Cl. MOIVRÆUS approbat, quod modo ante in CHEYNÆO improbabat; scil. quod pro Fluente absoluta ipsius dq ponat $\frac{1}{2} xx$, cum possit esse $\frac{1}{2} xx \pm aa$. Sed hæc sunt vitilitigia.

Pag. ead. *Ergo Fluens ipsius* $x v\,dx$ *est* $\frac{1}{2} xxv - \frac{1}{4} xx$ [posito scil. $dv = dx : x$]

Atqui eadem Fluens, per Theorema meum universale a CHEYNÆO pag. 50 citatum, invenitur $\frac{1}{2} xxv - \frac{1}{2} xx + \left(\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \&c.\right) xx$. Oportet igi-

tur

tur ut hæc Series $\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \frac{1}{4.5.6}$ &c. fit $= \frac{1}{4}$: quod satis elegans est. Sic tamen potest inveniri a priori.

Subtr. $\left\{\begin{array}{l} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \text{&c.} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \text{&c.} \end{array}\right.$

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \text{&c.} = 1$$

Subtr. $\frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \text{&c.} = \frac{1}{2}$

$$\frac{2}{1.2.3} + \frac{2}{2.3.4} + \frac{2}{3.4.5} + \frac{2}{4.5.6} + \frac{2}{5.6.7} + \text{&c} = \frac{1}{2}$$

Ergo $\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{5.6.7} + \text{&c.} = \frac{1}{4}$ *Q. E. I.*

Haud absimili modo invenitur $\frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \frac{1}{3.4.5.6}$ &c. $= \frac{1}{18}$, & ita porro.

Pag. 7. Ex figura quis concluderet MOIVRÆUM supponere applicatam $x^m v$ fieri infinitam, quando $x = o$. Sed hoc non verum est, nisi quando $m = o$, quo casu curva in ipsam Logarithmicam degenerat, & quando m minor est nihilo. Alias enim, quamdiu m est aliquid, curva habet eam figuram quæ exhibetur *Fig.* 1. aut 2, & quidem *Fig.* 1, si $m > 1$, & *Fig.* 2, si $m =$ vel < 1. TAB. LXXX. N°. CLXVIII.

Pag. 8. *Sed cum Area NBC incipiat a puncto N, quantitas* $x^{m+1} v : (m+1) - x^{m+1} : (m+1)^2$, *nihil esse debet, cum* x *est* $= 1$, &c.

Sed cur Area non æque ab A, quam ab N incipere potest; siquidem ut modo ostendi, curva habet hanc figuram. Itaque quantitas $x^{m+1} v : (m+1) - x^{m+1} : (m+1)^2$ nihil esse debet, cum x est $= o$. Sed posita $x = o$, tota quantitas supra dicta evanescit, seu fit $o - o$. Sciendum enim quantitatem $x^{m+1} v : (m+1)$ evadere o, non obstante quod v fiat

$= -\infty$, quod sic probo. Est $x^{m+1} v = x^{m+1} lx$, adeoque $x^{m+1} v = lx^{x^{m+1}} = [$existente $x = 0] \; l0^{0^{m+1}} = l0^0 = l1 = 0$, si scil. $m+1 =$ numero positivo; alias, si $m+1 =$ numero negativo, erit $l0^{0^{m+1}} = l0^{\infty} = l0 = -\infty$, vel si

TAB. LXXX. N°. CLXVIII. $m+1 = 0$, erit $l0^{0^{m+1}} = l0^{0^0} = l0^1 = l0 = -\infty$. Notandum porro, si $m =$ numero negativo curvam habere figuram similem ei, quæ exhibetur *Fig.* 3.

Pag. ead. *Si jam velis ut Areæ ab asymptoto incipiant*, *Area* AbcR *est* $x^{m+1} : (m+1)^2 + x^{m+1} v : (m+1)$.

Hic iterum supponit AR esse semper asymptoton curvæ CN*c*, contra ea quæ modo observavi: & si AR est asymptotos, & quidem existente $m =$ vel < -1, falsum tunc est aream A*bc*R esse $x^{m+1} : (m+1)^2 + x^{m+1} v : (m+1)$, posito enim $x = 0$, evaderet Area infinita: quod est absurdum.

Pag. 10. *At Regula hæc*, &c. [Pone Fluentem.... repertam $= 0$, & habebis signum. Iterumque pone indeterminatam quantitatem qua Fluens illa exprimitur $= 0$, &c. obtinebis ipsam quantitatem demendam vel addendam Fluenti repertæ, prout signum innuerit] *locum hic habere non potest.*

Sed Cl. MOIVRÆUS non animadvertit Regulam illam esse paralogisticam. *

Pag. ead. *Scribendo enim* 0 *pro* x *in terminis* $x^{m+1} v : (m+1) - x^{m+1} : (m+1)^2$, *Fluens tota destruetur.*

Sed si $m < 0$, Fluens non destrueretur, sed potius infinita evaderet.

Pag. 11. *Probabitur.... quod Fluentes ceteræ per alternantes defectus & excessus in infinitum sunt corrigendæ.*

Quid si autem isti excessus & defectus omnes se mutuo destruant, erit utique Fluens inventa vera Area quæsita; quod autem se mutuo destruant patet ex eo quod, posito $x = 0$, Fluens

* Vid. N°. præced. pag. 137. animadversio in pag. 65.

Fig. 8.

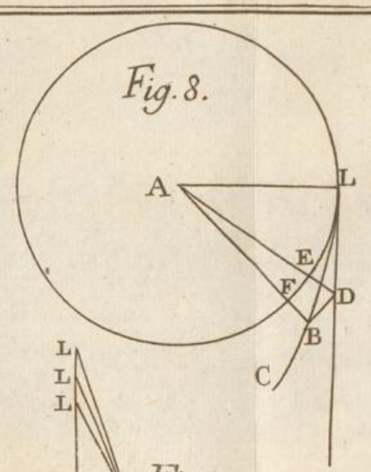


Fig. 9.

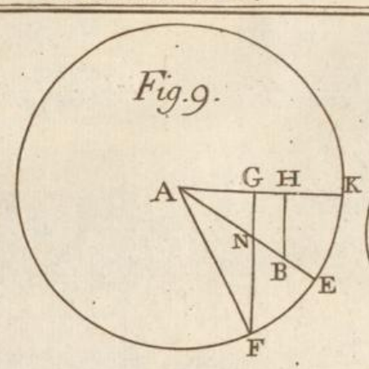


Fig. 10.

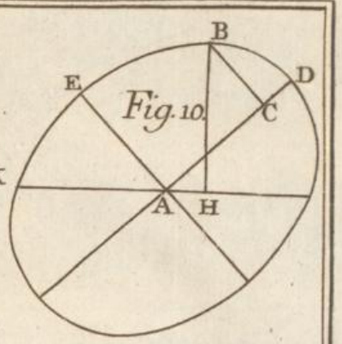


Fig. 11.

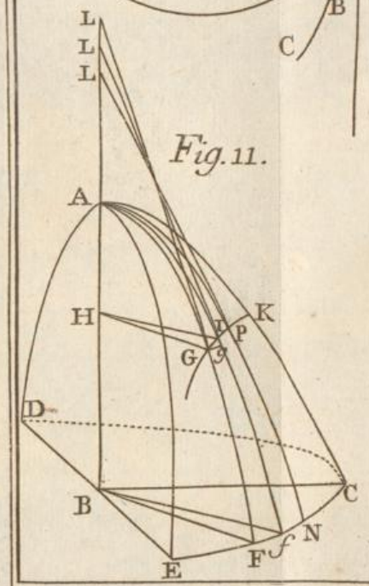


Fig. 12.

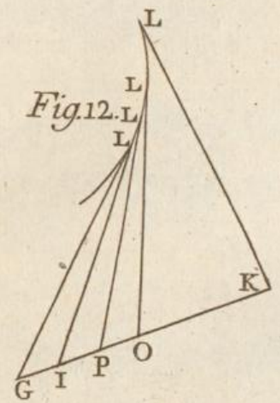
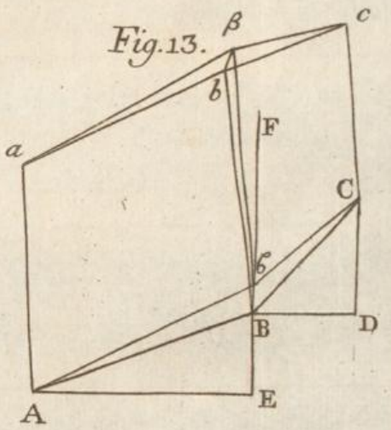


Fig. 13.



N.° CLXVI.

N.° CLXVIII.

Fig. 1.

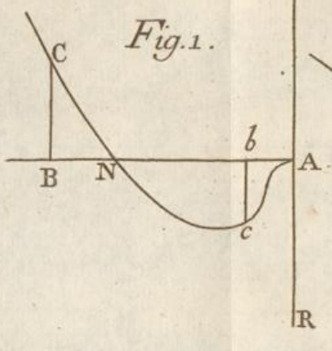


Fig. 2.

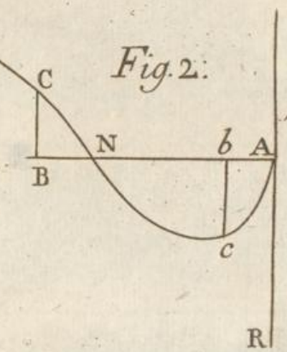
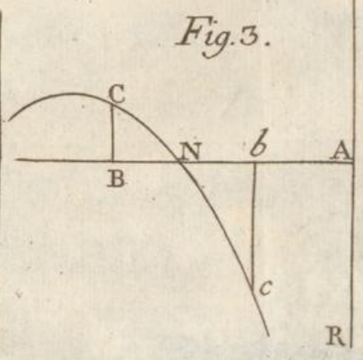


Fig. 3.



Fluens inventa etiam evaneſcat: ergo hic fruſtra caſtigatur CHEYNÆUS.

Pag. 11. & 12. *Fluens hujus quantitatis* $x^x dx \ldots$ *ſi ſit* $x = 1 + z \ldots$ *erit* $z + \frac{1}{2}zz + \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{8}z^4 + \frac{1}{15}z^4 + \frac{1}{72}z^6$ &c.

Nulla hujus Seriei uniformitas conſpicitur: Neque hinc elicitur illa Series particularis elegantiſſima, pro caſu $x = 1$, quam dedi in *Actis* 1697, pag. 131. †

Pag. 13. *Ubi quantitas* x^x *conſideranda venit, Logarithmos vocat* [CHEYNÆUS] *in auxilium: ubi* x^{x^x} *Logarithmos Logarithmorum, &c. Nos vero ad hæc omnia nihil adhibemus præter numeros vulgares.*

Etiam Series ex Logarithmis conflata poteſt mutari in aliam ex vulgaribus numeris conſtantem, ſi pro Logarithmis ſubſtituatur valor eorum per Seriem infinitam expreſſus.

Pag. 17. *Fluentem quantitatis* $(dy : a) \times \int ((2ady - ydy)^{\frac{1}{2}} : (2ay - yy))$ *quærere ſimulat, non quærit; jam novit formam futuram eſſe* $byv^2 + cv^2 + (dyv + eav)\sqrt{(2ay + yy)} + fy^3 + qay^2 + hay$, *ſed quo pacto hoc ſibi innotuit minime explicat.*

Haud dubie ex inductione.

Pag. 69. Theorematis mei, quo Fluens *ydz* per Seriem univerſaliſſimam exhibetur, inveſtigationem, quam dare voluit CHEYNÆUS, ſcitiſſime explodit Cel. MOIVRÆUS.

Pag. 71. *Fluens ipſius* $dz : (1 + z)$ *erit* [ponendo $y = 1 + z$] $\frac{z}{y} + \frac{z^2}{2y^2} + \frac{z^3}{3y^3} + \frac{z^4}{4y^4}$ &c. *Quæ Series Logarithmum ipſius* $1 + z$ *exhibet, & hoc vulgari Logarithmorum Serie multo commodius,* &c.

Hoc bene obſervatur, quod & ego obſervavi, cum primus hanc Seriem invenirem.

Pag. 72. *Hic iterum (uti ſolet) fruſtra ſedulus eſt, nec exiſtimavit Cl.* BERNOULLII *Seriem ſatis generalem eſſe.*

Hanc

† N°. XXXVI. pag. 185. *Tom. I.*

Hanc fruſtraneam ſedulitatem etiam ego exprobravi Cl. CHEYNÆO in Animadverſionibus meis †; ſed nihil reſpondit.

Pag. 81. *Suppoſui* $az + bz^2 + cz^3 + \&c = gy + hy^2 + iy^3 + \&c$; *& valorem ipſius* z *in Serie infinita exhibui, quæ tota ex poteſtatibus ipſius* y, *una cum datis, componitur.*

Valorem z facillime determinare licet, ut oſtendi in litteris ad Cl. HERMANNUM. Sed ſi alterutra, vel utraque Series incipiat a quantitate pura, non video quomodo tunc vel MOIVRÆUS vel CHEYNÆUS valorem z mihi determinare facile queat.

Pag. ead. *In mirabili iſto Theoremate* NEWTONI, ... *quod continet Theoriam integram Sectionum angularium.*

Talia Theoremata etiam ego in *Actis Lipſ.* 1701. pag. 170 *, publicavi.

Pag. ead. *duo a nobis inventa Theoremata.... unum pro extrahenda radice æquationis infinitæ.... alterum pro infinitinomio ad poteſtatem.... indeterminatam elevando,*

Facile hæc duo Theoremata etiam a me ſunt inventa, ut oſtendi in litteris ad D. HERMANNUM.

Pag. 86. *Eo quod* $(a+x)^n = y$, *ſtatim concludit Logarithmum unius Logarithmo alterius æqualem eſſe; quod verum non eſt, niſi utrumque ex eadem Logarithmorum ſcala depromſerit.*

Levis objectio: utrumque enim ex eadem Logarithmorum ſcala depromtum eſſe, per ſe ſupponitur.

Pag. 88. *Cum quantitas* $x + a$ *ad poteſtatem cujus index* n *elevanda ſit, quidni ſumenda fuerit* x^n *pro termino primo Seriei, eodem jure ac* a^n.

Ideo x^n non debet ſumi, quoniam A [primus terminus] ponitur quantitas conſtans, & x^n eſt indeterminata; & proin hæc pro illa ſumi non poteſt, ſed recte ſumitur a^n.

Pag. 89.

† Supra pag. 134. & 135.

* N°. LXIX pag. 386. ſeq. *Tom. I.* Vid. etiam Nus. LXXXIX. pag. 511. *Tom. I.* & Nus. CXXVII, pag. 526. *Tom. II.*

Pag. 89 & 90. *Ubi ex hac æquatione* $a^2 ddx + x dy^2 = 0$ *radicem* x *invenire ſatagit, ... aſſumit æquationem* $x = by + cy^3 + dy^5 +$ &c, ... *& ponit* $b = 1$, ... *Sed .... cur non liceat ponere* $b = 2$, *vel* 3, *vel* &c.

Licet utique, etiamſi diverſæ Series exſurgant. Ratio eſt, quoniam hæc æquatio Fluxiones ſecundas involvens admittit diverſas æquationes involventes Fluxiones primas, ſcil. $aaddx + xdy^2 = 0$, multipl. per dx, erit $aa\,dx\,ddx + xdxdy^2 = 0$; ſumtis Fluentibus erit $\frac{1}{2} aadx^2 + \frac{1}{2} xxdy^2 = \pm\frac{1}{2} bb\,dy^2$, ideoque $dy = adx : \sqrt{(\pm bb - xx)}$.

Pag. 93. *Problematis* [de binomio ad poteſtatem indeterminatam elevando] *libet.... inveſtigationem adducere.... quam quatuor abhinc annis inveni.*

Aliam ego inveni, duodecim abhinc annis, longe naturaliorem; utpote quæ a Fluxionalibus non petitur; quamque *Marchioni* HOSPITALIO impertivi in *Lectionibus* meis in ipſius uſum conſcriptis. *

Pag. 97. *In Problemate pro Serie infinita ad poteſtatem quamcunque elevanda, poſtulat ut detur Seriei quadratum, cubus, biquadratum*, &c.... *Nonne vero hoc eſt manifeſta petitio principii?*

Minime gentium; niſi omnis perfecta inductio ſit nominanda petitio principii.

Pag. 102. *Theoremata quædam pro comparatione curvarum, quæ* Phil. Tranſ. N°. 278, *exhibui.... exiſtimavi.... huc* referenda.

Omnia hæc Theoremata jam ante multos annos mihi erant cognita, uti patet ex *Lectionibus* meis cum HOSPITALIO communicatis †; & quidem omnia ſimul demonſtrari poſſunt per ea quæ publicavi de integratione fractionum rationalium in *Actis*, 1703, pag. 26 ſeq. §. Nam omnes iſtæ quantitates binomiales ſub vinculo comprehenſæ, de quibus MOIVRÆUS agit, [ſunt eæ $\sqrt{(dx \pm xx)}$ & $\sqrt{(rr \pm xx)}$,] poſſunt facillime mutari in quantitates rationales, adeoque ſemper dependent earum integralia [niſi ſint finita] a quadratura vel Circuli, vel Hyperbolæ, aut realis, aut imaginariæ.

* N°. CXLIX, Lect. XLVIII, pag. 522, *Tom. III.* † Ibid.
§ N°. LXX, pag. 393, *Tom. I.*

Pag. 111. *Si* m *exponatur per alium quemvis terminum diversum ab iis quos supra memoravimus* [ii sunt qui continentur in his Seriebus $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$ &c. $-3, -4, -5, -6, -7$, &c. $-2, -1, 0, 1, 2, 3$, &c.] *curva cujus ordinata* $x^m \sqrt{(dx+xx)}$ *aut* $x^m \sqrt{(dx-xx)}$, *non quadratur exacte, nec illa ab Hyperbola, aut hæc a Circulo pendet.*

Hoc Corollarium non est satis verum: exponatur enim, v. g. *m* per $-\frac{7}{2}$, qui casus in præcedentes limitationes non cadit; dependebit tamen quadratura curvæ $x^{-7:2} \sqrt{(Dx \pm xx)}$ a quadratura Hyperbolæ: id quod patet, si ponatur $x = 1:y$; tunc enim $x^{-7:2} dx \sqrt{(Dx \pm xx)}$ mutatur in hanc expressionem $-dy \sqrt{(Dyy+y)}$, quæ utique dependet a quadratura Hyperbolæ. Idem valet, si *m* exponatur per quemcunque terminum hujus Seriei $-\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, -\frac{7}{2}, -\frac{9}{2}$ &c. Semper enim dependent a quadratura Hyperbolæ, sive sit +, sive −.

Pag. 117. *Si* m *ponatur æqualis termino cuivis, qui non in limitationes præcedentes cadat* [eæ erant $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}$ &c, $-1, -2, -3, -4$, &c. $0, 1, 2, 3, 4$, &c.] *curva cujus ordinata* $x^m : \sqrt{(dx-xx)}$ *aut* $x^m : \sqrt{(dx+xx)}$ *neque quadratur exacte, nec illa a Circulo, aut hæc ab Hyperbola pendet.*

Hoc iterum falsum est. Nam si *m* ponatur æqualis termino cuivis hujus Seriei $-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, -\frac{7}{2}$ &c, curva cujus ordinata $x^m : \sqrt{(dx \pm xx)}$ semper dependet a quadratura Hyperbolæ.

Pag. 120. *Si* m *exponatur per terminum quemvis diversum ab illis quos supra memoravimus* [nempe $1, 3, 5, 7$, &c. $-4, -6, -8, -10$, &c, $-2, 0, 2, 4, 6, 8$, &c.] *curva, cujus ordinata* $x^m \sqrt{(rr-xx)}$, *aut* $x^m \sqrt{(rr+xx)}$, *neque exacte quadratur, nec illa a Circulo, aut hæc ab Hyperbola pendet.*

Etiam hoc minus recte. Nam si *m* exponatur æqualis termino cuilibet hujus Seriei, $-1, -3, -5, -7$, &c.

cur-

curva, cujus ordinata $x^m \sqrt{(rr \pm xx)}$ ſemper dependet a quadratura Hyperbolæ.

Pag. 125. *Si* m *exponatur per terminum quemlibet a præcedentibus* [1, 3, 5, 7, &c. — 2, — 4, — 6, — 8, &c. 0, 2, 4, 6, 8, &c.], *diverſum, curva cujus ordinata* $x^m : \sqrt{(rr - xx)}$ *aut* $x^m : \sqrt{(rr + xx)}$ *neque quadratur exacte, nec illa a Circulo, aut hæc ab Hyperbola pendet.*

Item & hic, ſi *m* ſumatur æqualis termino cuivis hujus Seriei — 1, — 3, — 5, — 7, &c. curva, cujus ordinata $x^m : \sqrt{(rr \pm xx)}$ pendet a quadratura Hyperbolæ.

Pag. ead. *Sit* A *Area curvæ, cujus abſciſſa* x, *ordinatim applicata* $x^m : (d - x)$; *ſit* B *Area curvæ, cujus abſciſſa itidem* x, *ejuſque ordinatim applicatæ* $x^{m-n} : (d - x)$; *erit Area* $A = d^n B - x^m : m - dx^{m-1} : (m-1) - ddx^{m-2} : (m-2)$, *&c. Sit ordinatim applicata* $x^m : (d + x)$, *tunc Area erit* $A = x^m : m - dx^{m-1} : (m-1) + ddx^{m-2} : (m-2)$ &c. $\pm d^n B$.

Hæc Series multis laborat difficultatibus,

1°. *A*, vel ejus complementum jam eſt $= -x^m : m - dx^{m-1} : (m-1) - ddx^{m-2} : (m-2)$, &c. uti facile oſtenditur dividendo actualiter x^m per $d - x$, facto diviſionis initio a $-x$; ſummato enim quotiente, oritur hæc Series $-x^m : m - dx^{m-1} : (m-1)$ &c.; adeoque ſequeretur, vel $d^n B$ eſſe $= 0$, vel ſemper eſſe $= A -$ compl. A; quod utrumque eſt abſurdum.

2°. Si *m* eſt numerus integer & affirmativus, terminus tandem occurret $d^m x^{m-m} : (m - m) = d^m x^0 : 0 = d^m : 0 =$ infinito, ideoque Series nihil pro Area determinabit.

3°. Eſto $n = 0$, quo caſu erit $d^n B = B = A$; adeoque foret $A = A - x^m : m - dx^{m-1} : (m-1)$ &c. quod eſt abſurdum.

4°. Ex eo quod $d \triangleright x$, facile demonstrari potest terminum infinitesimum $d^{\infty} x^{m-\infty} : (m - \infty)$ fore semper magnitudinis infinitæ; adeoque Seriem in omni casu esse divergentem, & proin ad determinandam Aream inutilem.

Eædem hæ difficultates [quarta tantum restricta ubi $d \triangleright x$] contra alteram Seriem pro Area curvæ, cujus applicata $x^m : (d+x)$ moveri possunt. Ut igitur alias demus Series his difficultatibus non obnoxias, dividatur actu x^m per $d-x$, incipiendo a d, & quotiens summetur; prodibit $A = x^{m+1} : (m+1)\,d + x^{m+2} : (m+2)\,dd + x^{m+3} : (m+3)\,d^3$, &c. & pro altera dividatur actu x^m per $d+x$ [si nempe $d \triangleright x$], incipiendo a d; & erit, quotiente summato, $A = x^{m+1} : (m+1)\,d - x^{m+2}(m+2)dd + x^{m+3} : (m+3)\,d^3$ &c. si vero $d \triangleleft x$, incipienda est divisio ab x; tunc enim, quotiente summato, erit $A = x^m : m\ dx^{m-1} : (m-1) + ddx^{m-2} : (m-2)$ &c.

Pag. 126. *Si* m *exponatur per terminum quemlibet sequentis Seriei* 0, 1, 2, 3, 4, &c. *quadratura curvæ, cujus ordinatim applicata* $x^m : (d-x)$ *aut* $x^m : (d+x)$ *pendet a quadratura Hyperbolæ.*

Imo, non tantum per terminum quemlibet hujus Seriei 0, 1, 2, 3, 4, &c. sed etiam per quemlibet hujus $-1, -2, -3, -4$, &c. potest m exponi, & semper tamen pendebit quadratura curvæ cujus applicata $x^m : (d \pm x)$, a quadratura Hyperbolæ. Qua methodo reducendi quadraturas usus sit Cl. MOIVRÆUS nescio; interim hoc utique non debebat prætervidere; uti nec hoc, quod si m exponatur per quemlibet terminum duplicis hujus Seriei $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{5}{2}, \pm\frac{7}{2}$ &c, curva cujus applicata $x^m : (d-x)$ dependebit a quadratura Hyperbolæ, altera vero, cujus applicata $x^m : (d+x)$ pendebit a quadratura Circuli. Porro nec hoc prætervidere debuisset, quod

quod sumto m æquali cuilibet termino hujus Seriei duplicis $\pm\frac{1}{4}, \pm\frac{3}{4}, +\frac{5}{4}, \pm\frac{7}{4}$ &c. quadratura curvæ, cujus applicata $x^m:(d-x)$, dependebit a quadratura Circuli & Hyperbolæ simul; reliqui casus omnes ad quadraturam Circuli vel Hyperbolæ; interdum reales, interdum imaginarios; interdum etiam ad quadraturas, partim Circuli, partim Hyperbolæ reducuntur. Qua de re consulantur quæ in *Actis Lipsi.* 1703, pag. 26, publicavi †, præsertim Corollarium & Compendia, quæ huic rei maximam lucem fœnerantur. Sic si m exponatur per quemcunque terminum hujus duplicis Seriei, $\pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{4}{3}, \pm\frac{5}{3}, \pm\frac{7}{3}, \pm\frac{8}{3}$ &c. Dico quod tunc quadratura curvæ, cujus ordinatim applicata $x^m:(D\pm x)$ dependebit a quadratura partim Hyperbolæ, partim Circuli: Quod sic paucis ostendo. Ponatur $x=y^3$, erit $x^m\,dx:(D\pm x)=3y^{3m+2}\,dy:(D\pm y^3)$; Existente igitur m æquali alicui termino in hac Serie $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}$, &c. patet $3m+2$ fore terminum aliquem in hac Serie 3, 4, 6, &c. Diviso igitur actu, quantum fieri potest, $y^{3m+2}dy$ per $D\pm y^3$, secundum regulam, quam in citato loco præscripsi; ex quotiente, utpote rationali & integro, sumetur integrale; residua vero fractio habebit necessario, vel hanc formam... $dy:(D\pm y^3)$, vel hanc.... $ydy:(D\pm y^3)$. Ostendendum igitur restat, quomodo horum integralia, vel Fluentes, dependeant a quadratura, partim Hyperbolæ, partim Circuli. Esto $D=n^3$, & invenietur per regulam meam $1:(n^3\pm y^3)=(+\frac{2}{3n}\mp\frac{1}{3nn}y):(nn\mp ny+yy)\pm\frac{1}{3nn}:(\pm n+y)$, & $y:(n^3\pm y^3)=(\pm\frac{1}{3}+\frac{1}{3n}y):(nn\mp ny+yy)-\frac{1}{3n}:(\pm n+y)$. Fluentes autem ipsorum $\pm\frac{dy}{3nn}:(\pm n+y)$ & $\frac{dy}{3n}:(\pm n+y)$ exprimunt Aream hyperbolicam. Pro determinandis reliquorum duorum Fluentibus, pona-

† N°. LXX. pag. 309 & 400. Videatur etiam Nus. CXIV, pag. 402. & seq. *Tom. II.* necnon Nus. CLVIII. supra, pag. 52.

ponatur $y = z \pm \frac{1}{2} n$, erit $(+\frac{2}{3n} \mp \frac{1}{3nn} y)\, dy : (nn \mp ny + yy) = (+\frac{1}{2n} \mp \frac{1}{3nn} z)\, dz : (+\frac{3}{4} nn + zz)$, & $(\pm\frac{1}{3} + \frac{1}{3n} y)\, dy : (nn \mp ny + yy) = (\pm\frac{1}{2} + \frac{1}{3n} z)\, dz : (\frac{3}{4} nn + zz)$; in quibus iterum Fluentes ipsorum $\pm \frac{1}{3nn} z dz : (\frac{3}{4} nn + zz)$ & $\frac{1}{3n} z dz : (\frac{3}{4} nn + zz)$ dependent a quadratura Hyperbolæ; reliquorum autem $+\frac{1}{2n} dz : (\frac{3}{4} nn + zz)$ & $\pm\frac{1}{2} dz : (\frac{3}{4} nn + zz)$ Fluentes pendent a quadratura Circuli, ut MOIVRÆUS ipse declarat pag. 128.

Ponatur nunc $x = y^{-3}$ & erit $x^m dx : (D \pm x) = -3y^{-3m-1} dy : (Dy^3 \pm 1)$. Existente igitur m aliquo termino in hac Serie $-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}$ &c. manifestum est $-3m-1$ fore terminum aliquem in ista Serie 0, 1, 3, 4, &c. adeoque reliqua peraguntur ut prius: Unde tandem constat quod asseruimus; nempe si m exponatur æqualis termino cuicunque hujus duplicis Seriei $\pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{4}{3}, \pm\frac{5}{3}, \pm\frac{7}{3}$ &c. fore Aream curvæ, cujus applicata $x^m : (D \pm x)$ quadrabilem per quadraturam partim Hyperbolæ, partim Circuli. Resolvimus enim Aream illam in Circularem unam & Hyperbolicas duas.

Denique, si m exponatur per quemvis terminum hujus Seriei duplicis, $\pm\frac{1}{6}, \pm\frac{5}{6}, \pm\frac{7}{6}, \pm\frac{11}{6}, \pm\frac{13}{6}$ &c. Area curvæ, cujus applicata $x^m : (D - x)$ est pariter quadrabilis per quadraturam partim Circuli, partim Hyperbolæ. Nam sit $x = y^6$, erit $x^m dx : (D - x) = 6y^{6m+5} dy : (D - y^6)$. Deinde sit $x = z^{-6}$, erit $x^m dx : (D - x) = -6z^{-6m-1} dz : (Dz^6 - 1)$. Jam manifestum est quod, per substitutionem termini alicujus affirmativi illius Seriei $\pm\frac{1}{6}, \pm\frac{5}{6}, \pm\frac{7}{6}$ &c, loco m, habeatur $6m+5$ æquale termino alicui in hac Serie 6, 10, 12, 16, 18, &c,; & per substitutionem termini alicujus negativi, fiat $-6m-1 =$ termino alicui Seriei 0, 4, 6, 10, 12, &c.

Divisq

Diviſo igitur, ſecundum tenorem Regulæ meæ, quantum fieri poteſt, y^{6m+5} per $D-y^6$, vel $z^{-6m-1}\,dz$ per Dz^6-1, & quotientis, utpote rationalis & integri, ſumta Fluente vel integrali, reſidua fractio habebit neceſſario, vel formam... $dy:(D-y^6)$, vel hanc.... $y^4\,dy:(D-y^6)$ & pro altera expreſſione, vel hanc.... $dz:(Dz^6-1)$, vel hanc.... $z^4dz:(Dz^6-1)$. Eſt autem [poſito $D=n^6$] .... $dy:(n^6-y^6)=$....$dy:(n^3+y^3)$ +.... $dy:(n^3-y^3)$; horum autem Fluentes, vel integralia dependent [ut per modo ſupra dicta clarum eſt] a quadratura, partim Circuli, partim Hyperbolæ; a qua & reliquarum partium [quoniam eodem modo diſpeſci poſſunt] Fluentes dependent. Ergo &c.

Pag. ead. *Etenim ductis.* &c.

Demonſtratio hæc MOIVRÆI huc redit. Quoniam $x^o\,dx:(D\pm x)$ eſt integrabile per quadraturam Hyperbolæ, ergo etiam per Hyperbolæ quadraturam integrabile eſt $x^m\,dx:(D\pm x)$. Quis autem hanc conſequentiam admitteret; ſi rei veritatem aliunde non noſſet. ?

Pag. 127. *Sit* A *Area curvæ cujus abſciſſa* x, *ordinatim applicata* $x^m:(rr+xx)$. *Sit* B *Area curvæ, cujus abſciſſa itidem* x, *ordinatim applicata* $x^{m-2n}:(rr+xx)$; *erit Area* $A=x^{m-1}:(m-1)-rr\,x^{m-3}:(m-3)+r^4x^{m-5}:(m-5)$ &c.... $\mp r^{2n}B$.

Series hæc ſimilibus premitur difficultatibus, quas ſupra ad Seriem pag. 125, animadvertimus. Miror hic MOIVRÆUM nihil dicere de $x^m:(rr-xx)$.

Pag. 128. *Si* m *exponatur per terminum quemlibet ſequentis Seriei*, 0, 2, 4, 6, 8, &c. *quadratura curvæ, cujus ordinatim applicata* $x^m:(rr+xx)$, *pendet a rectificatione circularis arcus.*

Imo etiam, ſi *m* exponatur per quemlibet terminum ejus Seriei, — 2, — 4, — 6, — 8, &c.

Pag.

Pag. ead. *Etenim ſi centro* c, &c.

Demonſtratio ſimilis eſt ſuperiori ad pag. 126. Cæterum, ſi m exponatur per quemvis terminum duplicis hujus Seriei, $\pm 0, \pm 2, \pm 4, \pm 6$, &c. Area curvæ, cujus ordinatim applicata $x^m : (rr - xx)$ quadrabitur per quadraturam Hyperbolæ. Et ſi m exponatur per quemcunque terminum duplicis hujus Seriei $\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{5}{2}, \pm \frac{7}{2}$, &c. vel per quemcunque duplicis hujus $\pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{4}{3}, \pm \frac{5}{3}$ &c, quadratura curvæ, cujus applicata $x^m : (rr - xx)$, dependebit a quadratura partim Circuli, partim Hyperbolæ. Sed oportet talia MOIVRÆO ſuam non ſuggeſſiſſe methodum; alioquin non præteriiſſet.

N°. CLXIX.

EXTRAIT D'UNE LETTRE

à l'Auteur du Commentaire ſur l'Analyſe des infiniment petits de M. le *Marquis* DE L'HOPITAL.

Imprimé à *Paris*, en 1721.

. . . . . .

J'ai reçu, Monſieur, votre *Commentaire ſur l'Analyſe*, & votre *Diſcours ſur le Mouvement* : Je vous en rends mille graces. . . . . En liſant le Diſcours ſur le Mouvement, j'ai bien remarqué qu'il eſt écrit avec beaucoup d'élegance & de force; mais je n'y ai point trouvé de nouvelles inventions, comme je croiois qu'on avoit exigé de ceux qui voudroient prétendre à remporter quelque prix. Vos penſées, tant ſur le Corps, que ſur le Mouvement, ne ſont pas de nouvelle datte; elles ſont la plûpart priſes des opinions de DESCARTES, qui fait, comme vous, conſiſter l'eſſence des Corps dans la ſeule étendue, & celle du Mouvement dans l'application ſucceſſive de leurs ſurfaces aux ſurfaces des corps contigus. Vous avez auſſi preſque les mêmes

mes sentiments que Mr. DESCARTES, sur la quantité & sur la communication du mouvement. Il est vrai que vous paraphrasez très bien cet Auteur, & que vous mettez son système dans un beau jour; quoique vous le refutiez aussi sur quelques points, comme, par exemple, sur les causes occasionelles. Cependant les Anglois ne vous passeront pas tout ce que vous dites sur l'essence du Corps & du Mouvement. Pour ce qui est de la quantité prétendue permanente du mouvement & de sa communication, que DESCARTES en déduit; les règles qu'il donne sont entierement fausses: on en peut démontrer géometriquement la fausseté.

Je ne suis pas assez présomptueux, pour croire que j'aurois pû écrire une aussi belle piéce que la votre; car je n'ai pas le don de l'éloquence: mais je souhaiterois, qu'on proposât une autre fois quelque question déterminée, prise de la Physique, résoluble par la Géometrie, où il ne faille que de l'adresse à méditer & à inventer; peut être aurois-je le bonheur d'y réussir autant qu'un autre.

L'état de ma santé ne me permet pas de lire avec beaucoup d'attachement votre Commentaire sur *l'Analyse des infiniment petits*. J'ay pourtant parcourru, avant que de le donner au Relieur, la Dédicace, la Préface & les deux Discours préliminaires. Le second de ces Discours éclaircit fort bien le calcul des puissances; tout y va bien, à quelques fautes près, soit de calcul, soit d'impression. Il y a aussi de belles remarques sur les infiniments petits dans le premier Discours: Mais il semble qu'en voulant éclaircir la nature de ces infiniments petits avec trop de soin, vous la rendez moins intelligible à ceux, qui ne sont pas accoutumés à de longues explications; sur tout, si ces explications elles mêmes leur paroissent plus obscures que la matiere à expliquer. En effet, c'est quelque chose de choquant que de dire [p. 5.] *Qu'un Solide, un Parallelépipede, par exemple, peut être divisé & subdivisé dans la hauteur, tellement, qu'on viendra enfin à une surface, dont la hauteur sera infiniment petite.* Car par la division des corps, quelqu'infinie qu'elle soit, on ne

parviendra jamais à des ſurfaces. Les parties d'un corps, quoique infiniment petites, ſont toujours corps ; celles d'une ſurface, ſont toujours ſurfaces ; & les parties d'une ligne ſont toujours lignes : n'étant pas poſſible qu'un genre de quantité puiſſe être changé par la diviſion en un autre genre de quantité. Vous auriez donc mieux fait, à mon avis, de garder le mot de tranches, & de dire *qu'on viendra enfin à une tranche, dont la hauteur ſera infiniment petite, &c.* Vos autres façons de parler, *les ſurfaces ſont, par rapport au Parallelépipede, des infiniments petits, &c. le Parallelogramme infiniment petit, par rapport au Parallelépipede, &c.* me paroiſſent très dures pour une oreille géometrique, & peu capables de former un commençant à avoir des idées nettes, ſur le ſujet qu'on veut traiter : elles jettent plûtôt dans l'erreur, & dans le préjugé, où on eſt avant que d'être Géometre ; comme ſi le corps étoit compoſé de ſurfaces, la ſurface compoſée de lignes, & la ligne compoſée de points ; préjugé fort difficile à détruire dans les jeunes gens, & qui les empêche de comprendre les démonſtrations ſur les figures géometriques. Car qu'eſt-ce qui les trouble d'avantage, que quand ils ne ſavent pas diſtinguer, par exemple, la ſurface, d'avec les lignes qui la terminent ? Il ne faudroit donc pas ſe ſervir de ces façons de parler, qui nourriſſent les préjugés, au lieu de les détruire.

Pag. 7. Pour démontrer que la circonference d'un Polygone infinilateral, inſcrit dans le Cercle, eſt égale a la circonference du Cercle ; vous dites, que chaque côté du Polygone, étant la corde d'un arc de Cercle, la difference, qu'il y a entre un arc & ſa corde, diminue toûjours, à proportion que cette corde devient plus petite ; ce qui eſt très-vrai, comme auſſi ce qui ſuit : *Qu'on pourra donc multiplier tellement les cotés d'un Polygone inſcrit ou circonſcrit, qu'il ſera enfin permis de compter pour rien la difference d'un de ſes cotés avec l'arc qui lui répond.* Tout cela eſt vrai ; mais la conſéquence, que vous en tirez n'eſt pas légitime, ſavoir que la circonference du Poligone devient égale à celle du Cercle. Car il ne ſuffit pas de faire voir, que la

diffe-

difference qu'il y a entre un arc de Cercle & sa corde diminue à l'infini, pour en conclure que les deux circonferences deviennent égales; autrement, vous pourriez conclure avec le même droit, que la base AB d'un triangle rectangle ABC est égale à l'hypothenuse AC; de ce qu'étant divisées l'une & l'autre par des parallèles *nm*, *nm*, *nm*, &c. je vous fais voir, que plus est grand le nombre des parties, & plus petite sera la difference entre une des parties *mm* & une des parties *nn*; *on pourra donc multiplier tellement les parties de la base & de l'hypothenuse, qu'il sera enfin permis de compter pour rien la difference d'une des parties* mm *avec une des parties* nn, mais celui, qui en voudroit inferer de-là, que l'hypothenuse AC deviendra égale à la base AB, se tromperoit entiérement. Vous voyez, Monsieur, qu'il faut encore autre chose, pour prouver que la circonference du Polygone infinilateral devient égale à celle du Cercle: c'est qu'il faut faire voir, que non seulement la difference entre l'arc & la corde s'évanouit; car cela arrive aussi entre *mm* & *nn*; mais que de plus la raison, qu'il y a entre l'arc & la corde, devient infiniment peu differente de la raison d'égalité; ce qui n'arrive pas à la raison entre *mm* & *nn*, qui demeure constamment la même, en quelque grand nombre de parties, que soient divisées les lignes AB & AC. TAB. LXXXI. N°. CLXIX.

Pag. 8. Vous dites *que l'angle est sans aucune épaisseur à sa naissance.* Je n'ai jamais ouï parler de l'épaisseur de l'angle; je ne sais non plus ce que c'est qu'un *Angle naissant.* Les cotés d'un angle peuvent être naissants, lorsqu'ils deviennent finis, d'infiniment petits qu'ils étoient; mais l'angle lui-même demeure toujours d'une même grandeur. Vous ne concevez, dites vous, point de lignes sans largeur; mais moi, au contraire, je ne conçois point de lignes avec largeur; car, je vous prie, dites-moi, qu'est-ce que c'est qu'une ligne avec largeur? C'est une chimère; c'est une contradiction; c'est comme si vous disiez *c'est une ligne qui est surface*, ou, *c'est une surface qui est corps.* Je comprends bien, que vous voulez insinuer, qu'il n'y a point de ligne géométrique, qui soit sans largeur; mais la possibili-

té, ou l'impoſſibilité de l'exiſtence ne doit pas règler nos idées. Je dois concevoir les choſes ſelon leur définition: or on définit la ligne, que c'eſt une grandeur, qui a une ſeule dimenſion. Je ne me mets pas en peine, ſi une telle grandeur peut exiſter, ou non; ni ſi je la puis imaginer, ou non. Imaginer & concevoir ſont choſes differentes; on doit concevoir une choſe, ſelon ce qu'elle eſt; mais l'imagination ſe la repreſente, ſelon qu'elle frappe les ſens; comme vous ſavez mieux que moi, vous, qui avez fait une ſi excellente Logique.

P. 11. au commencement, & dans la ſuite, vous parlez, Monſieur, *de multiplier AB par BC*, c'eſt-à-dire, un rectangle par une ligne; & vous dites, *qu'on aura le rectangle BD.* Pardon, Monſieur, c'eſt là encore une façon de parler contre l'uſage des Géométres; car vous ſavez que chez eux *multiplier un rectangle par une ligne, c'eſt faire un parallelépipede*, & non pas un autre rectangle. Il ne vous eſt pas inconnu, que dans l'Algébre on augmente les dimenſions par la multiplication, & on les diminue par la diviſion; tellement que le produit eſt la ſomme des dimenſions des deux multiplicateurs, & le quotient la difference des dimenſions du dividende & du diviſeur. Il eſt vrai, que vous vous expliquez, ſur ce que vous entendiez par *multiplier le rectangle AB par la ligne BC*, en diſant, que c'eſt *placer ſucceſſivement AB ſur la ligne BC, autant de fois, que la baſe ſe trouve dans cette ligne*: cela va bien; cependant les commençants & les foibles eſprits, qui ont appris à avoir des idées de ces multiplications & diviſions des dimenſions, ſelon la maniere ordinaire, pourroient ici ſe confondre, au lieu de s'éclaircir ſur les infiniment petits de tous les genres. Vous auriez peut-être mieux fait de vous exprimer ainſi: *Si on multiplie AB, par le nombre de fois que ſa baſe* Bm *ſe trouve dans la ligne BC, on aura le rectangle BDE*m: en parlant ainſi, vous ne vous ſeriez pas écarté de la maniere ordinaire de parler des Algébriſtes.

Vers la fin de la même page, vous concluez, ſans aucune reſtriction, que *ſi la hauteur E du rectangle AB étoit infinie, quoique*

que la Baſe B m fut infiniment petite, ce Rectangle ne laiſſeroit pas d'être une quantité finie. Pour moi je crois, qu'a parler généralement, cela ne peut pas être ſoutenu; à moins qu'on ne ſuppoſe que la raiſon entre la hauteur E & la ligne BC eſt comparable à la raiſon entre la même ligne BC & la baſe B*m*. Car d'ailleurs, la premiere raiſon pourroit être infiniment, ou plus grande, ou plus petite, que la ſeconde raiſon. Ce que j'ay remarqué ſur la page 11, touchant votre maniere de multiplier, ſe doit auſſi entendre ſur ce que vous dites, page 13, des diviſions; ainſi je n'approuve pas cette façon de parler, *le rectangle BD diviſé par le rectangle AB donne pour quotient la ligne BC*; car la diviſion d'un rectangle par un autre rectangle donne pour quotient, non pas une ligne, mais un nombre. *L'infiniment petit*, dites vous au même endroit, *du premier genre AB, diviſé par l'infiniment petit du même genre* Bm, *donne pour quotient E un infiniment petit du ſecond.* Point du tout. Si les deux infiniment petits du premier genre ſont de grandeur homogéne, comme ligne & ligne, ou ſurface & ſurface, &c. que l'on peut exprimer par dx & dy; alors la diviſion de l'une par l'autre [$\frac{dx}{dy}$ ou $\frac{dy}{dx}$] donne un nombre fini, bien loin de donner un infiniment petit du ſecond genre. Si l'un des infiniment petits du premier genre marque une ſurface [$z\,dx$], & l'autre une ligne dy; alors la diviſion de celui-là par celui-ci [$\frac{z\,dx}{dy}$] donnera une ligne finie, & point-du-tout un infiniment petit du ſecond genre: ainſi des autres. Je ne ſaurois ſouffrir ce que vous ajoutez (pardonnez moi ma franchiſe) *que E*, qui eſt une ligne, *eſt infiniment petit en comparaiſon de AB*, qui eſt un rectangle. Dites moi, de grace, qui eſt celui de tous les Géometres, qui ait jamais comparé enſemble une ligne & un rectangle, qui ſont des grandeurs hétérogénes? J'aimerois autant une comparaiſon entre le ſon & la couleur, ou entre un tems & un poids. Que diriez vous, Monſieur, ſi quelqu'un vous diſoit, que la longueur d'une aune eſt infiniment petite en

en comparaiſon de la longueur d'un ſiécle ? En vérité, votre comparaiſon ne va guères mieux.

Vous continuez, dans la même page, vos locutions impropres, en prenant la baſe du Parallelépipede pour ſon infiniment petit, comme ſi un Rectangle, qui eſt une ſurface, pouvoit être l'élément d'un Parallelépipede, qui eſt un ſolide. Ce que vous dites, Monſieur, après cela ſur les multiplications & diviſions des infiniment petits de differens genres, n'eſt pas bien conforme aux idées que j'en ai; par exemple, à la page 14, vous voulez, que *ſi on diviſoit un infiniment petit du premier genre par un infiniment petit du troiſiéme, on auroit pour quotient un infiniment petit du ſecond, multiplié par un infiniment petit du premier.* Mais quant à moi, je prétens qu'une telle diviſion produiroit pour quotient une quantité infiniment-infinie, c'eſt-à-dire, infinie du ſecond genre; tant s'en faut que le quotient puiſſe être, comme vous dites, un infiniment petit du ſecond genre multiplié par un infiniment petit du premier. Voici ma preuve, ſans tant de façon de Rectangles & de Parallelépipedes. Soit a une ligne finie, adx un infiniment petit du premier genre, $dddy$ un infiniment petit du troiſiéme genre, il faut prouver que $\frac{adx}{dddy}$ eſt un infiniment grand du ſecond genre. Pour cette fin, ſoit $\frac{adx}{dddy}$ nommé z; donc $adx = zdddy$; donc $dx : dddy = z : a$. Or dx eſt infini-infiniment plus grand que $dddy$; donc auſſi z, qui eſt le quotient de la diviſion, ſera infini-infiniment plus grand que a, qui eſt une ligne finie; & partant z ſera un infiniment grand du ſecond genre. Ce qu'il falloit démontrer. C'eſt de cette maniere aiſée, qu'on peut déterminer toutes vos multiplications & diviſions de differens genres d'infiniment petits; enſorte, que je ne conçois pas pourquoi vous marchez par tant de détours, pour mener votre Lecteur à l'intelligence des differentielles, qui n'eſt pas à beaucoup près ſi difficile, que vous voulez faire accroire.

P. 15. au commencement de la page, vous faites derechef une comparaiſon entre des grandeurs hétérogènes, en diſant que *les lignes qui ferment un Triangle infiniment petit, ſont des grandeurs infiniment petites, en comparaiſon de la ſurface de ce Triangle.* Par ces paroles vous entendez ſans doute quelque choſe de different de ce que les termes ſignifient ordinairement; car vous remarqués fort bien vous même, à la page ſuivante, que *toute comparaiſon doit rouler ſur des choſes de même genre.* J'avoue donc que je ne comprens pas le véritable ſens que vous donnez à la ſuſdite comparaiſon, entre les lignes & la ſurface de votre Triangle. Comment voulez-vous donc qu'un Ecolier le comprenne? Outre cela l'aire d'un Triangle peut être infiniment petite, ſans qu'il ſoit beſoin pour cela que tous ſes trois côtés ſoient auſſi infiniment petits; car concevez par exemple un Triangle Iſoſcele, dont l'angle du ſommet ſoit infiniment aigu; vous voyez que l'aire en ſera infiniment petite, quand même les deux jambes ſont d'une grandeur finie.

P. 22. *ligne derniere*, il y a faute de calcul; car à la place de $+dx^2$ il faut écrire $-dx^2$. Cette faute, quoique legère, influe pourtant ſur ce qu'il y a à la page ſuivante, où vous dites, *donc* $dx^2 = dy^2$; *&* $dx = dy$; puiſqu'il faudroit conclure $-dx^2 = dy^2$, donc $dx\sqrt{-1} = dy$; c'eſt-à-dire une grandeur réelle égale à une imaginaire; ce qui jetteroit encore dans de plus grandes erreurs & contradictions, que celles que vous marqués. Cette même faute de calcul fait qu'il eſt faux ce que vous dites peu après; que dans les cas où dx ſeroit $= dy$, alors $adx - 2xdx$ ſeroit très parfaitement $= 2ydy$. Il faudroit dire, que dans les cas, où $-dx^2$ ſeroit $= dy^2$, alors $adx - 2xdx$ ſeroit très parfaitement $= 2ydy$: mais puiſqu'il eſt impoſſible, que $-dx^2$ ſoit $= dy^2$, il faut conclure que ces cas ne peuvent pas arriver, où $adx - 2xdx$ ſeroit très parfaitement $= 2ydy$; à ſavoir dans le ſens que vous le prenez. Ce que vous dites, dans le paragraphe ſuivant, participe encor de la même faute.

Voila, Monſieur, mes remarques, que je vous ai bien voulu

lu communiquer, puiſque vous avez témoigné envie de les voir. J'eſpére que vous les prendrés en bonne part; d'autant plus que vous pouvez être aſſuré, que je ſouhaitterois de tout mon cœur, que vous m'euſſiez fait voir votre Commentaire en manuſcript, avant que de le faire imprimer, comme vous me l'aviez propoſé il y a quelques années: peut-être que mes Remarques ne vous auroient pas été inutiles. Je croi que mes avis vous feront aſſez connoitre, que vous auriez dû changer pluſieurs de vos manieres de commenter, & leur donner un autre tour; de peur que les ignorants, ou ceux qui haïſſent les nouveaux Calculs, ne prennent vos explications dans un mauvais ſens, & ne cherchent par là occaſion de décrier *l'Analyſe des infiniments petits*; ce qui ſeroit bien éloigné du but, que vous vous êtes propoſé, en faiſant ce Commentaire.

Quant au reſte, Monſieur, vous me faites bien de l'honneur dans votre derniere lettre de reconnoitre & d'avouer, que cette *Analyſe*, que vous avez commentée, eſt moins l'ouvrage de Mr. le *Marquis* de l'HOPITAL, que le mien. Je veux bien croire, que vous parlés de la ſorte, non point par complaiſance, mais parce que vous en êtes entiérement convaincu, par des preuves inconteſtables, qui ſont publiques. Vous en aurez un bon nombre dans les *Actes de Leipſic*, ſur tout dans ceux de l'Année paſſée, au mois de *Juin* ou dans celui de *May* [car je ne m'en ſouviens pas bien], où il y a une piéce d'un nommé Mr. BOURCARD *, dans laquelle on cite pluſieurs Lettres autentiques, qui ne laiſſent aucunement douter de la vérité du compliment que vous me faites dans votre Lettre, &c.

* N°. CXX, pag. 483, *Tom.* II.

REMAR-

N°. CLXX.

REMARQUES

Sur le Livre intitulé

Analyse des infinimens petits, comprenant le Calcul integral, dans toute son étendue, &c.

Par Mr. STONE, de la Societé Royale de *Londres*.

Imprimé à Paris *en* 1735.

Sur le Discours Préliminaire.

Pag. 4. MR. LEIBNITZ *promettoit volontiers des Ouvrages... C'est dommage qu'il n'ait eu le tems d'en exécuter peut-être aucun, hors sa* Théodicée, &c.

N'a-t-il donc rien donné que sa *Théodicée*? Toutes les piéces qu'on a de lui, quoique détachées, ne composeroient-elles pas un gros volume, si on les ramassoit? Son *Codex Diplomaticus* est bien un gros Livre, si Mr. STONE en demande.

Ibid. *On peut douter si celui dont il s'agit ici* [l'Ouvrage que *Mr.* LEIBNITZ méditoit sur la Science de l'infini,] *étoit mûr pour le tems auquel il le promettoit.*

Mais certes il n'est pas mûr pour Mr. STONE, qui ne donne, à ce qu'il paroit, que des choses triviales.

Ibid. *Le Calcul différentiel etoit facile à éclaircir, ou même assez éclairci dès ce tems-là.*

Qui est-ce donc qui l'a éclairci, avant que je l'aye expliqué à Mr. De l'HOSPITAL? Où est-ce qu'on trouvoit ce calcul? Le Calcul exponentiel donné par moi, qui est-ce qui en avoit écrit quelque chose? En trouvoit-on quelque chose chez FERMAT, qu'on appelle ici *premier calculateur des infiniment petits.*

Pag. 5. *Mrs.* BERNOULLI *avoient suffisamment remanié cette partie.* Comme si quelqu'autre avant nous avoit déja manié cette partie.

Ibid. *Le Calcul intégral.... étoit comme la partie propre de Mr.* NEWTON *& de cette Nation célèbre* &c.

Mr. NEWTON avoit-il alors rien donné sur le Calcul intégral ? Quel mépris pour les non-Anglois ! Nous les avons trouvé ces methodes, sans aucun secours des Anglois.

Ibid. *Ce n'est pas qu'il n'eut transpiré quelque lueur de ce Calcul reciproque des Fluxions. Mrs.* LEIBNITZ, BERNOULLI, DE l'HOPITAL *pouvoient bien, sans le secours d'aucun autre, en avoir fait les premieres opérations, & pour le moins la règle inverse du retour d'une différentielle à son intégrale.*

Le grand NEWTON, ce profond Géométre, ne nous avoit rien communiqué, dans ce tems-là, de ce qu'il peut avoir gardé *in petto*; au-moins je ne lui suis redevable de rien.

Pag. 6. *Le Calcul intégral ne va pas sans le secours des Séries.... il faut developer* [les Problémes] *en Séries infinies.*

Il y a bien des occasions, où les Séries sont inutiles, & où le Probléme se resout mieux sans elles, que par elles.

Pag. 11. *Il est peu d'esprits novices qui sans calcul puissent franchir.... la 47e. Proposition du 1er. Livre* [d'EUCLIDE].

Y-a-t-il rien de si facile que d'entendre cette Proposition ? Je ne vois pas ce que le Calcul peut contribuer pour l'entendre.

Pag. 15.... CHEYNE,.... TSCHIRNAUS ne devroient pas être comptés parmi ceux qui ont sécondé les antécesseurs dans les calculs, eux qui ont commis d'horribles paralogismes en fait de calculs.

Pag. 21. *A la 250me. page* [du Livre des Principes de Mr. NEWTON] *on trouve le fameux Lemme... qui contient le principe immediat du calcul.... des Fluxions.*

Ce fameux Lemme justifieroit pourtant la prétension de Mr. LEIBNITZ; c'est ce qui a fait que l'on a retranché ce Lemme, ou plûtôt ce Scholie, de la troisieme Edition, comme faisant trop d'honneur à de Mr. LEIBNITZ.

Ibid. DESCARTES *est admirable..... pour l'avoir inventé* [le Calcul algébrique].

Mais

Mais les Anglois l'accuſent de l'avoir pris de HARIOTTE.

Pag. 22 à la fin. NEWTON *étoit ſur le point de ſe voir enlever toute la gloire* [de l'invention du Calcul infiniteſimal] *par Mr.* LEIBNITZ.

Mais Mr. LEIBNITZ avoit inventé par lui-même le Calcul différentiel, ſelon le propre aveu de Mr. NEWTON, qu'il fait dans ſon Scholie. N'étoit-il donc pas juſte que Mr. LEIBNITZ ſe ſoit attribué la gloire de ſon invention.

Pag. 30. *Le Calcul n'eſt qu'une petite partie de la Géométrie.*

Renverſons la Théſe, en diſant que la Géométrie n'eſt qu'une petite partie du Calcul; puiſque le faiſeur de la Préface dit lui-même que les Anciens ont trouvé tous leurs Théorêmes par le Calcul.

Pag. 38. *La méthode .... de former des Corps ..... n'a été développée qu'à demi par le Calcul intégral.*

Ce n'eſt pas la faute du Calcul intégral, mais celle de Mr. STONE, & des autres Héros, que l'on éléve dans cette Préface, qui n'ont pas bien ſû manier le calcul.

Pag. 45. *Le Cylindre, la Sphére & le Cone, ſuivant* ARCHIMEDE, *ſont dans le rapport des nombres* 3, 2, 1.

Cela n'eſt pas; car ils ſont comme 9, 6, 4; c'eſt-à-dire, en raiſon continue de 3 à 2.

Pag. 68. *La forme des Polygones inſcripts & circonſcrits de* Gregoire *de* St. VINCENT; *cette forme d'échelons, qui ne paroit rien, a été déciſive pour la naiſſance des nouveaux Calculs, le différentiel & l'intégral &c.*

Peut-être, tout cela ſeroit-il à naître encor, ſi la méthode en étoit reſtée aux Polygones parallèles d'ARCHIMEDE. Quelle haute idée des échellons du P. GREGOIRE! Dans le tems que nous approfondiſſions les nouveaux Calculs différentiel & intégral, je ne ſavois pas encor qu'il y eut jamais eu un P. *Gregoire* de St. VINCENT, bien loin d'avoir vû ſes échellons. L'Ecrivain de la Préface ſe trompe bien s'il croit que tout le fondement de nos nouveaux calculs conſiſte uniquement dans la conſidération de ces échellons.

Pag. 80. Mr. HUGUENS.... *inférieur en ce point à* DESCARTES.

On a de bonnes raiſons pour l'eſtimer, en ce point, beaucoup ſupérieur à DESCARTES.

Pag. 82. *La circonférence eſt égale à la tangente de la Spirale.*

Ce n'eſt pas à la tangente, mais à la ſoûtangente de la Spirale que la circonférence eſt égale.

Pag. 83. *Pourquoi ne penſerions-nous pas en effet que la Quadrature du Cercle fut une choſe poſſible à trouver?*

Je répondrois, parce qu'on en peut démontrer l'impoſſibilité.

Pag. 85. DE LA FAILLE... *a fait voir que le centre de gravité d'un arc, ou ſegment circulaire étant donné, le cercle ſeroit quarré. C'eſt... une des belles découvertes particuliéres des derniers ſiécles.*

Il falloit ajouter que ce ſeroit une découverte fort mince dans le préſent ſiécle.

Ibid. *Cette poſſibilité* (de la quadrature du Cercle) *eſt démonſtrative, & l'impoſſibilité ſimplement préſumée.*

C'eſt tout le contraire.

Sur l'Analyſe des infiniment petits, comprenant le Calcul intégral.

Pag. 1. *On ne peut trouver les Intégrales exprimées par des fractions, ou par des quantités ſourdes; qu'en faiſant diſparoitre, dans les unes leur dénominateur complexe, dans les autres leur ſigne radical; ce qui ſe fait par le moyen d'une Série infinie.*

Notre Géométre ne paroit pas être fort habile dans le Calcul integral; puis qu'il ne ſait pas la pratique d'intégrer grand nombre de quantites différentielles, exprimées par des fractions, ou par des quantités ſourdes, ſans recourir à des Séries infinies. Ainſi, par exemple, $xdx : (aa+xx)^n$, ou $xdx\sqrt[n]{(aa+xx)}$ ſont intégrables ſans Séries, & une infinité d'autres. Pourquoi donc veut-il

veut-il qu'on faſſe auparavant diſparoitre dans les unes leur dénominateur complexe, dans les autres leur ſigne radical ?

Pag. 2. Problême 1. *Transformer* b : (a+x), *où* a *&* b *ſont des quantités connues, &* x *inconnue, en une Série infinie &c.*

On a mauvaiſe grace de nommer *a* & *b* connues, & *x* inconnue, au lieu de les nommer ici déterminées & indéterminées.

Ibid. *Juſqu'à-ce que le quotient ait* 4, 5, *ou* 6 *termes. Alors vous en pourrez preſque toûjours trouver autant qu'il vous plaira, en conſidérant la ſuite progreſſive de ce quotient &c.*

Au contraire, cela eſt le plus ſouvent impraticable. On n'a qu'à prendre pour exemple celui qu'on donne pag. 4, vers la fin, $(2x^{1:2} - x^{3:2}) : (1 + x^{1:2} - 3x)$, dont la Série ſe trouve $2x^{1:2} - 2x + 7x^{3:2} - 13xx + 34x^{5:2}$ &c. On a ici cinq termes, mais comment peut-on voir la ſuite progreſſive, ſans continuer l'opération de la Diviſion ?

Pag. 7. *Quelques exemples donneront l'uſage de ce merveilleux Théorême* [pour l'élevation d'un binome à une puiſſance quelconque].

Nous avons trouvé ce merveilleux Théorême, auſſi-bien que Mr. NEWTON, d'une maniere plus ſimple que la ſienne. Feu Mr. PASCAL a été le premier qui l'a inventée.

P. 8. & 9. *Exemples* 2. 3. 4. &c.

Tous ces exemples ne contiennent rien de clair, puiſqu'on ne ſauroit continuer les Séries, ſans continuer actuellement l'opération de l'extraction des Racines ; ce qui eſt pénible.

Pag. 9. *Mr. de* MOIVRE *nous a donné dans les* Tranſactions Philoſophiques *le Théorême ſuivant, ſoit pour élever une Série infinie à la puiſſance donnée* m, *ſoit pour en extraire la racine.*

Comment Mr. STONE daigne-t-il citer une Etranger ? Mais il auroit mieux fait de montrer la premiere ſource de l'invention de ce beau Théorême, plûtôt que de reléguer ſon Lecteur à la démonſtration de Mr. de MOIVRE, contenue dans les *Tranſactions*. J'en ai trouvé une méthode fort facile, que j'ai communiquée à Mr. HERMAN, il y a bien 40 ans,

ſans avoir jamais vu ce que Mr. de MOIVRE en a publié dans les *Tranſactions*.

Pag. 18. *L'Intégrale de* dx *eſt* x; *celle de* dx + dy *eſt* x + y: *l'intégrale de* xdy + ydx *eſt* xy; &c.

Les Intégrales ici marquées ne ſont pas exprimées dans toute leur étendue; il faut les augmenter ou diminuer d'une conſtante c; en diſant que l'intégrale de dx eſt $x \pm c$; celle de $dx + dy$ eſt $x + y \pm c$: l'Intégrale de $xdy + ydx$ eſt $xy \pm c$ &c. comme Mr. STONE le dit lui-même dans le *Scholie* p. 19.

Ibid. *D'où il eſt évident que la méthode inverſe des Fluxions, ou la méthode des intégrations, revient à celle de trouver la ſomme d'une Série.*

Il n'eſt pas néceſſaire, en pluſieurs occaſions, de recourir aux Séries; ſavoir toutes les fois que l'on peut trouver l'intégrale en termes finis, ſoit algébriques, ſoit exponentiels. La méthode d'intégrer conſiſte dans un algorithme, contenant des règles certaines pour parvenir à l'intégrale d'une différentielle donnée, ſi la choſe eſt faiſable. Il eſt comme de la méthode de trouver les racines d'une équation algébrique. On pourroit ſans doute auſſi trouver les racines par des Séries; mais ce ſeroit une grande folie, ſi quelqu'un vouloit ſe ſervir des Séries pour les racines, lorſqu'on ſeroit en état de les exprimer en termes finis. En un mot les Séries ne doivent être employées que dans la derniére néceſſité, lorſque les Règles ne ſont pas applicables.

Pag. 19. *Or* p *eſt une quantité donnée quelconque, qui peut répréſenter &c.*

Il falloit dire que p eſt une quantité conſtante, qui, dans les exemples n'eſt pas toûjours donnée, mais ſouvent il faut de l'adreſſe pour la trouver.

Ibid. *Dans les Intégrales nous nous ſervons des Séries infinies, lorſque nous ne pouvons pas les trouver exactement.*

C'eſt ce que j'ai dit; pourquoi donc recourir toûjours aux Séries, avant que de ſavoir ſi les intégrales ne peuvent pas être exprimées en termes finis?

Ibid.

Ibid. *Quand les expressions différentielles ne sont point mêlées de quantités constantes*, &c.

Ajoutez, & que les coëfficiens sont toujours égaux.

Pag. 20. *Par exemple* 2 x d y &c.

Il veut écrire, je crois, $2xdx$, car $2xdy$ étant une différentielle incomplette, n'est pas intégrable; c'est sans-doute une faute d'impression.

Pag. 21 in fine & 22 in initio. *Enfin l'intégrale de* $\frac{1}{x}$ dx $=$ $1x^{-1}dx$, *sera* $\frac{1}{0}x^0 = \frac{1}{0} = \infty$.

Ainsi, selon Mr. STONE, $\int \frac{1}{x} dx$ seroit égal à une quantité véritablement infinie, au lieu qu'elle est égale au Logarithme de x. Ne fait-il donc pas que cette infinité apparente marque seulement que l'intégrale n'est pas algébrique.

Pag. 30. *Je vais... ajouter un mot sur l'excellente méthode de feu Mr.* COTES &c.

Nôtre compilateur n'a garde de dire, que j'ai publié dans les *Actes* de *Leipsic* le plus essentiel de cette excellente méthode, trois ans avant que le Livre de Mr. COTES fut rendu public; & cela sur le defi que Mr. TAYLOR m'adressa: Voiez N°. CXIV, pag. 402, *Tom.* II.

Pag. 66. *Quarrer l'espace cycloidal.* &c.

Quel abus des Séries! On trouve bien l'aire sans elles, & même très-simplement sans calcul.

Pag. 68. *Par une autre proprieté de la courbe* [cissoïdale]

Mr. STONE ne donne, par cette maniere, que l'espace total asymtotique de la Cissoïde; mais nullement de chaque partie APM. Voici comment je le trouve généralement. Soit C le centre du cercle, soit aussi tiré le rayon CN & la corde AN; & je nomme le rayon $CA = r$, & partant le diamétre $AB = 2r$: L'équation de la Cissoïde sera donc $2ryy - xyy = x^3$; par conséquent $y = \sqrt{x^3} : \sqrt{(2r - x)} = xx : \sqrt{(2rx - xx)}$, & l'élément de l'espace cherché PMm, ou $ydx = xxdx : \sqrt{(2rx - xx)}$. Pour intégrer cela par la quadrature du cercle, je dispose cette quan-

TAB. LXXXI. N°. CLXX. *Fig.* 1.

quantité ; en y ajoutant & retranchant, pour la rendre dépendante du cercle par parties, où il y en aura une d'abſolument intégrable. Voici le calcul. $\frac{xx\,dx}{\sqrt{(2rx-xx)}} = \frac{(-2rx+xx)\,dx}{\sqrt{(2rx-xx)}} + \frac{2rx\,dx}{\sqrt{(2rx-xx)}} = -dx\sqrt{(2rx-xx)} + \frac{2rx\,dx}{\sqrt{(2rx-xx)}} = -dx\sqrt{(2rx-xx)} - \frac{(2rr-2rx)dx}{\sqrt{(2rx-xx)}} + \frac{2rr\,dx}{\sqrt{2rx-xx)}}$. Or il eſt viſible que le premier terme $-dx\sqrt{(2rx-xx)}$ eſt la différentielle du ſegment ANP, le ſecond terme eſt la differentielle de $\sqrt{(2rx-xx)}$, ou de PN, multiplié, par $2r$, & le troiſiéme terme eſt la différentielle de l'arc AN multiplié par $2r$. Ainſi j'aurai l'aire APM ou $\int y\,dx$, ou $\int(xx\,dx : \sqrt{(2rx-xx)})$ = ANP − PN × $2r$ + l'arc AN × $2r$. Mais PN × $2r$ fait quatre fois le triangle rectiligne ANC, & l'arc AN × $2r$ fait quatre fois le ſecteur circulaire ANC; retranchez donc celui-là de celui-ci, il vous reſtera quatre fois le ſegment ANA Donc APM, ou $\int y\,dx$ = 4 ſegm. ANA — demi-ſegm. ANP. Or le demi-ſegment ANP eſt égal au petit ſegment ANA + le triangle rectiligne ANP. Donc enfin l'aire ciſſoïdale APM eſt égale à 4 ſegm. ANA — 1 ſegm. ANA — triang. rectil. ANP, c'eſt-à-dire = 3 ſegm. ANA — triang. rectil. ANP. Ce qu'il falloit trouver.

Coroll. 1. Prenant x, ou AP = $2r$, ou AB; le triangle rectiligne ANP s'évanouit; parce que ſa hauteur PN eſt nulle au point B; & le ſegment ANA dégénére en demi-cercle ANBA. Donc l'aire totale de l'eſpace ciſſoïdal eſt triple du demi-cercle générateur ANBA: cas unique, qui ſe trouve dans notre Auteur.

Coroll. 2. Si le point P eſt fort près de A, l'arc AN ſera comme une Parabole naiſſante, & partant le triangle rectiligne ANP ſera juſtement triple du petit ſegment ANA, parce que celui-là fait la moitié du rectangle circonſcrit, & celui-ci en fait la ſixiéme, par la nature de la Parabole. Ainſi donc l'aire naiſſante APM ſera = 0, c'eſt-à-dire, infiniment plus petite que le triangle infiniment petit APN, ou que le ſegment

ment infiniment petit ANA. D'où il ſuit que la Courbe AM coincide au commencement avec la droite AB, c'eſt-à-dire, qu'elles ſe touchent au point A; tout comme l'équation de la courbe l'indique. Car il s'enſuit, qu'au commencement on a $2ryy = x^3$, & partant $2r : x = xx : yy$. Donc $2r$ ſurpaſſant infiniment x, auſſi xx ſurpaſſera infiniment yy. Donc AB touche la courbe au point A.

Pag. 70. Exemple XX. *Quarrer un eſpace quelconque ACMP de la Quadratrice &c.*

Il y a diverſes fauſſetés dans cette ſolution, car à la page 71, il n'eſt pas vrai que le ſinus em ſoit $= 1 + x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$, &c. Ce qui eſt évident, puiſque ſi x, ou AP, ou Cm, eſt $= 0$, ſon ſinus em ſera auſſi $= 0$. Or dans ce cas la Série deviendroit $= 1$; comment donc peut-elle être $= 0$? Il faut donc ſavoir que $em = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$ &c. Le Calcul bâti ſur cette fauſſe poſition ſera donc auſſi faux. Mais dans l'Analogie qu'il fait peu après, il redreſſe, ſans le ſavoir, ſon erreur, par une fauſſe opération; ainſi par une double erreur, il tombe par hazard ſur la véritable valeur de $y\,dx$. Avec tout cela il ne donne pas la quadrature par une expreſſion finie, comme nous en pouvons donner une, quoique les Logarithmes y entrent.

Pag. 79. *Trouver la longueur de la Spirale reciproque.*

Ni Mr. COTES, ni Mr. STONE n'ont point ſongé à cette courbe & à ſes proprietés avant moi †.

Pag. 103. *Ainſi* $\frac{p}{r} x\,dx\sqrt{(ax - xx)}$ *ſera l'élement du ſolide formé par ce mouvement* [de la Ciſſoïde autour de ſa baſe] *qui eſt égal à l'élement du premier ſolide qu'il faloit cuber ou meſurer. Donc le ſolide ciſſoidal infini, formé ſuivant la révolution qui vient d'être dite, eſt égal au dernier ſolide formé par la révolution du demi-cercle générateur, autour d'une ligne droite parallèle à ſon aſymtote, paſſant par le point* A.

† Voiés N°. XC, pag. 552. ſeqq. *Tom. I.*

Il eſt très-vrai que ces deux ſolides totaux ſont égaux, mais il eſt ridicule de ne pas conclure généralement, que le ſolide ciſſoïdal, formé par la révolution d'une portion quelconque APM autour de l'aſymtote, eſt toûjours égal à l'autre ſolide formé par la révolution du ſegment circulaire APN autour d'une droite paſſant par A, & parallèle à l'aſymtote BH. La raiſon en eſt manifeſte, de ce que, par la nature de la Ciſſoïde, on a toujours $BP \times PM = AP \times PN$.

Pag. 106. $\frac{p}{12ar} \times (4yy+aa)^{3:2} =$ *à l'Intégrale de l'élement de la ſuperficie du Conoide parabolique.*

Mais en faiſant PM, ou $y = o$, auquel cas la ſuperficie du Conoide devient nulle, l'expreſſion trouvée ſe change en $\frac{p}{12ar} \times (aa)^{3:2}$, ou en $\frac{p}{12r}\, aa$; ainſi la veritable intégrale ſera $\frac{p}{12ar}(4yy+aa)^{3:2} - \frac{p}{12r}\, aa$.

Pag. 107. *Donnera...* $\frac{padv}{rbb} \sqrt{(b^4+ccyy)}$, *quand AC ſurpaſſe BC; mais quand AC eſt moindre que BC, elle eſt* $\frac{pady}{rbb} \sqrt{(b^4-ccyy)}$.

C'eſt-à-dire, que dans un Sphéroïde applati, ſa ſurface dépend de la quadrature de l'Hyperbole; mais pour le Sphéroïde allongé, ſa ſurface dépend de la quadrature du Cercle. Qu'eſt-il donc beſoin de tant conſulter les Tables de Mr. COTES?

Pag. 118. *Quand la Courbe* [la Ciſſoïde] *fait ſa révolution autour de la Baſe AB, Mr.* COTES *dans ſa* Harmonia Menſurarum, *donne la quantité de la ſuperficie formée. Mais l'opération eſt longue & difficile, les différentielles ne pouvant ſe rapporter directement à aucune de ſes Tables.*

Ainſi Mr. STONE avouë ſincèrement, qu'il eſt difficile de trouver la quantité de la ſuperficie en queſtion, puiſque la choſe ne peut ſe rapporter directement aux Tables de COTES.

Voici

TAB. LXXXI. N°. CLXX. *Fig.* 1.

Voici ce que je trouve par ma méthode d'intégrer. Soit dans la Fig. AMI la Ciſſoïde, le diamétre du Cercle générateur, ou la baſe AB $=a$, une abſciſſe AP $=x$, l'appliquée PM $=y$, l'arc de la Ciſſoïde $=s$; la raiſon du raion à la circonférence, comme r eſt à p. Ainſi l'aire de la ſuperficie que décrit l'arc AM, par ſa révolution autour de AP, ſera $=\frac{p}{r}\int y\,ds$; il s'agit donc de trouver $\int y\,ds$, ou l'intégrale de $y\,ds$, par une expreſſion qui ne contienne que a & x & leurs fonctions. Or je trouve, par ma dite méthode, que $\int y\,ds = \frac{(2aa-ax)\sqrt{(4ax-3xx)}}{2a-2x} - \int \frac{2aa\,dx}{\sqrt{(4ax-3xx)}}$. Mais il eſt clair que $\int \frac{2aa\,dx}{\sqrt{(4ax-3xx)}}$ eſt égal à un ſecteur circulaire, que l'on conſtruit facilement; & le prémier terme eſt une quantité purement algébrique.

Pag. 122. Exemple 6. *Le centre de gravité eſt dans le rayon* AD, *qui coupe l'arc* BE.

Ajoutez, en parties égales.

Pag. 127. r *étant le demi-paramétre.*

Il faut que r ſoit le paramétre entier, pour que $\frac{1}{2}pxdx$ ſoit la différentielle des poids, & que $\frac{1}{2}pxxdx$ ſoit celle des efforts.

Pag. 129. Exemple 13. *D'où il ſuit que* $3a+8b : 4a+12b = a : \frac{3aa+8ab}{4a+12b}$.

Il faut renverſer les deux premiers termes, en faiſant $4a+12b : 3a+8b = a : \frac{3aa+8ab}{4a+12b}$.

Ibid. *Exemple* 14.

Beaucoup de confuſion régne dans cette ſolution; il ſeroit bien facile de la redreſſer; mais il ne vaut pas la peine de perdre le tems, en faiſant le calcul de ces choſes ſi triviales.

Ibid. *Exemple* 15. *Alors quand PC devient* x, *la différentielle des poids ſera* $\frac{pyydx}{2r}$.

Que veut dire, alors quand PC devient x? La différen-

tielle des poids ne sera-t-elle pas également $\frac{ppydx}{2r}$, sans que PC devienne x.

Pag. 131. Définition. *Le Centre de* percussion *ou d'*oscillation *d'une figure &c.*

La Definition que donne Mr. STONE du *Centre de percussion*, donne une fausse idée de ce centre ; car d'abord il suppose, sans le démontrer, que le Centre de percussion & celui d'oscillation sont un même point ; c'est en quoi il suit l'exemple de son Compatriote Mr. WALLIS, qui ne pouvant trouver la méthode de déterminer le Centre d'oscillation, & voyant cependant que la règle de Mr. HUGUENS donnoit, en certains cas, le Centre d'oscillation, au même point que lui WALLIS avoit assigné au Centre de percussion ; il conclut d'abord, que ces deux Centres étoient un même point ; & prétendit avoir été le premier Inventeur [par conséquent avant Mr. HUGUENS] de la Théorie du Centre d'oscillation. Mais pour faire voir qu'il n'y a aucune connexion nécessaire, ni essentielle, entre ces deux Centres ; il n'y a qu'à considérer ces deux choses : 1°. La nature du Centre d'oscillation dépend entiérement de la nature & de l'action de la pesanteur ; au lieu que dans la Théorie du Centre de percussion, la pesanteur n'entre aucunement en considération, mais seulement la matiére & la viteſſe, quoique uniforme, de ses parties : de-là il arrive, qu'un Pendule composé de plusieurs corps de différentes densités, agité dans l'air, a son Centre d'oscillation différent de celui qu'il auroit, s'il étoit agité dans une liqueur, par exemple dans l'eau. Mais le Centre de percussion sera le même dans l'air & dans l'eau. 2°. Au contraire, si les corps se meuvent dans un même milieu, le Centre d'oscillation est quelque chose d'absolu & indépendant de toute rélation ; au lieu que le Centre de percussion varie selon la diversité de situation du corps choqué, ensorte qu'il y a une mutuelle dépendance entre les corps choquans & choqués.

P. 136.

Pag. 132.133.134.135. Contenant les six premiers Exemples.

Ces six prémiers Exemples donnent bien la bonne solution, parce qu'ils sont justement dans le cas où la fausse méthode de Mr. STONE, ou plutot de WALLIS, s'accorde, par accident, avec la vraye méthode; ce qui arrive toutes les fois que 1°. la figure qui choque est plane, 2°. qu'elle se meut autour d'un axe situé dans son plan, & 3°. qu'outre cela, la ligne frappante est aussi dans ce même plan. J'apelle *ligne frappante*, la ligne droite, passant par le centre du mouvement, laquelle étant parvenue au point choqué, toute la figure s'arrête subitement sur le point choqué. Ainsi si une seule de ces trois conditions manque, la prétendue méthode s'en va en fumée, & ne donne que de fausses solutions.

Pag. 136. 137. 138. Contenant les six derniers Exemples.

Ces six autres exemples sont résolus faussement en plusieurs maniéres. Car 1°. on ne fait point d'attention à la ligne frappante. 2°. On prend tacitement, pag. 137, l. 5, & suiv. le côté du Cylindre pour la ligne frappante; auquel cas le Centre de percussion ne seroit plus le même que le Centre d'oscillation, car celui-ci est toûjours dans l'axe du Cylindre. 3°. Quand même on prendroit l'axe du Cylindre, & des autres figures qu'on considére, pour la ligne frappante, le prétendu Centre de percussion ne coincideroit pas avec le Centre d'oscillation; vû que Mr. HUGUENS trouve le Centre d'oscillation dans toutes ces figures solides, choisies par Mr. STONE pour exemples, plus éloigné du point de suspension, que ne le donne Mr. STONE. Cela vient de ce que Mr. STONE supose faussement, que toutes les particules d'une tranche différentielle de la figure solide, ont une même viteſſe; ce qui est absolument faux: vû qu'il est visible, que les points plus éloignés du centre d'une tranche, sont aussi plus éloignés du point de suspension, que les points plus proches du centre; par conséquent que ces points-là auront aussi plus de viteſſe.

Comment peut-il donc considérer chaque tranche circulaire, comme ayant une viteſſe égale dans toute ſon étendue?

Nôtre Auteur auroit mieux fait de ſupprimer entiérement ſa Section 7e. dont la matiére paroit être hors de ſa ſphére.

Pag. 139. Probléme 1er. *L'intégrale de chaque membre ſera* $x = y$. *D'où il ſuit que la ligne cherchée eſt l'hypothénuſe d'un triangle rectangle, en regardant comme ſon axe la ligne coupant en deux cet angle droit.*

1°. Non ſeulement $x = y$, mais auſſi $x \pm a = y$, ſatisfait au Probléme. 2°. Je n'entends pas ce galimatias qu'on ajoûte, *en regardant comme ſon axe la ligne coupant en deux cet angle droit.* Eſt-ce que par ſon axe on veut entendre la ligne où ſont priſes les abſciſſes x? Si cela eſt, cet axe ſera la baſe du triangle rectangle, & par conſéquent ne coupera pas en deux l'angle droit. 3°. La ligne cherchée eſt à la vérité l'hypothénuſe d'un triangle rectangle iſoſcéle, mais non pas d'un triangle rectangle quelconque, comme Mr. STONE s'explique.

Ibid. Probléme 2e. $adx = 2ydy$, *& trouvant l'intégrale de chaque membre, on aura* $ax = yy$, *ainſi la courbe ſera la Parabole d'*APOLLONIUS.

Cela eſt vrai; mais il falloit intégrer plus généralement, en mettant $ax \pm ab = yy$; quoique cela donne encore la Parabole, il y a des cas, où ajoutant ou retranchant une quantité conſtante aux intégrales, cela change tout-à-fait la nature de la courbe. Comme, par exemple, $aaxdx = bbydy$; en intégrant à la maniére de Mr. STONE, on trouveroit $aaxx = bbyy$ c'eſt-à-dire, $ax = by$; ce qui donneroit une ligne droite pour la ligne cherchée; mais on ſe tromperoit, ſi on vouloit conclure qu'il n'y auroit point d'autre ligne qui ſatisfit à l'équation différentielle $aaxdx = bbydy$; puiſque la courbe, qui auroit pour équation $aaxx \pm abcc = bbyy$, & qui ſeroit une Hyperbole, ſatisferoit auſſi à la queſtion.

Pag. 240. Probléme 3e..... $2ax - xx = yy$.

Au lieu de $2ax - xx = yy$, on devroit écrire, par la raiſon ſuſdite, $2ax - xx = yy \pm ab$.

Ibid.

Ibid. Probléme 4e. *Ainſi* $dx = \frac{ady}{y}$, &c.

A quoi bon tout ce diſcours? Ne pouvoit-on pas dire tout-court, que la courbe cherchée eſt la Logarithmique ordinaire, dont les x, ou les abſciſſes, ſont priſes ſur l'aſymtote, & les y, ou les ordonnées, ſont les perpendiculaires ſur l'aſymtote.

P. 142. Scholie 2e. *Les nombres* $z - 1$ *&* $z + 1$ *ſeront égaux* &c.

Quelle obſcurité dans ce Scholie! Les nombres $z - 1$ & $z + 1$ ne différent-ils pas de deux unités, comment donc peuvent-ils être égaux?

Ibid. Probléme 6e. *Si un corps deſcend librement du point A, par le ſeul effet de la peſanteur, le long de deux plans inclinés AB, AC, aux points B & C; on demande la proportion des tems qu'il faut pour décrire ces eſpaces?* TAB. LXXXI. N°. CLXX. *Fig.* 2.

Tout le diſcours que fait Mr. STONE pour réſoudre ce chétif Probléme, eſt un tiſſu continu de Paralogiſmes, qui montrent évidemment qu'il n'a pas une idée nette de la Méchanique, Dynamique, Balliſtique, & de ce qui en dépend. Voyons quelques traits de ſes raiſonnemens contradictoires. Il ſupoſe deux plans AB & AC donnés de poſition; il prend AD & AE [en les nommant a & b] pour invariables; cependant il regarde DB & EC [qu'il nomme x & z] comme variables. N'eſt-ce pas une manifeſte contradiction? puiſque ſi AB & AC ſont données de poſition, & AD & AE de grandeur, ſans-doute DB & EC ſeront auſſi données de grandeurs. Il dit que $xdx : \sqrt{(aa+xx)} = Bb$, & $zdz : \sqrt{(bb+zz)} = Cc$; ce qui eſt très-abſurde: car le premier $xdx : \sqrt{(aa+xx)}$ marque la différentielle de la ſécante de l'angle BAD, prenant AD pour le rayon; & l'autre $zdz : \sqrt{(bb+zz)}$ n'eſt autre choſe que la différentielle de la ſécante de l'angle CAE, prenant AE pour le rayon.

A la fin de la page 142, & au commencement de la p. 143, il dit, *les viteſſes décrivant les petites parties* Bb, Cc, *étant regardées comme égales, qui ſont proportionnelles aux* $\sqrt{AD}$ [$\sqrt{a}$] &

& a √AE [√b]. Quelle étrange façon de parler ! Les viteſſes décrivant &c. Ce ſont les mobiles qui décrivent avec les viteſſes ; les viteſſes ne décrivent pas ; & ces viteſſes, comment peuvent-elles être égales, puiſqu'elles ſont proportionnelles aux √AD & √AE, qui ſont inégales. Tout ce qui ſuit dans ce diſcours eſt un jargon inintelligible : Les Tables de Mr. COTES y entrent ſans néceſſité. Les Règles de GALILE'E montrent immédiatement que le tems par AB eſt au tems par AC, comme la racine quarrée de la troiſiéme proportionelle de AE à AC. A quoi ſert-il donc, le long & pénible raiſonnement de notre Auteur ?

Pag. 143. Probléme 7e. *Trouver la nature de la courbe BC, telle qu'un corps tombant.... parcourra en deſcendant en tems égaux des eſpaces égaux.*

Au lieu de dire des eſpaces égaux, il veut dire ſans-doute des hauteurs verticales égales : car les eſpaces à parcourir ſont les arcs de la courbe : or ces arcs parcourus en tems égaux, ne peuvent pas être égaux eux-mêmes, à cauſe de l'accélération ; étant viſible que plus le mobile eſt deſcendu, plus il aura de viteſſe, & parcourra par conſéquent un plus grand arc dans un tems donné. Ce Probléme au-reſte fut propoſé par Mr. LEIBNITZ ſous le nom de la Courbe Iſochrone, & il fut réſolu par pluſieurs perſonnes, il y a bien 50 ans. Si Mr. STONE a voulu montrer ſon habileté, il devoit donner la ſolution du Probléme de l'Iſochrone paracentrique, que j'ai réſolu & publié l'an 1694. *

P. 145. Probléme 8e. *Trouver la Loi de réfraction, en admettant ce principe que la nature ſuit dans ſes opérations les voies les plus ſimples & les plus courtes.*

Ce Probléme apartient purement & ſimplement au Calcul Différentiel ; auſſi ſe trouve-t-il dans l'*Analyſe des infiniment petits*, qu'on attribue à Mr. de l'HOPITAL, où il ne s'agit que du Calcul Différentiel : Que fait-il donc ici, où on prétend traiter du Calcul Intégral ? Mais au-reſte, ſuivant le Principe qu'on adopte ici, il faudroit que le rayon de lumiére allât

* N°. XIX, pag. 119. *Tom. I.*

lât plus vite dans les milieux moins denſes : cependant on montre, par des vrais principes phyſiques, que c'eſt tout le contraire, & ſelon Mr. NEWTON même.

Pag. 146. Probléme 9e. *Trouver l'angle &c.*

Ce Probléme auſſi, [à-peine digne d'être propoſé aux commençants] qu'a-t-il à faire dans un traité du Calcul Intégral ?

Ibid. Probléme 10e. *Si un fluide* &c.

Ce Probléme, quoique un peu plus difficile, n'apartient pas non plus au Calcul Intégral.

Pag. 147, vers la fin. *Donc* $xx + \frac{bb}{aa}x = bb$. *Ainſi* $x = \frac{b}{a}\sqrt{(bb+xx)} - \frac{bb}{2a}$.

Que veut dire cela, que dans la valeur de x on faſſe entrer ſon quarré xx ? On devroit écrire $x = \frac{b}{2a}\sqrt{(bb+4aa)} - \frac{bb}{2a}$.

Pag. 148. *Coupés BC* [b] *en G*, &c.

Il veut dire qu'on doit couper BC en deux parties égales. Pourquoi parler ſi inexactement ?

Ibid. ſur la fin. *Par conſéquent* $dx = \frac{2\sqrt{a}.\,Nn}{2b}$. *Maintenant quand l'intégrale de* dx, *ſavoir* x, &c.

Tout ce qui ſuit, juſques-à la fin de la ſolution, eſt tout-à-fait ſuperflu. Car après avoir trouvé $dx = 2\sqrt{a}.Nn : 2b$, ne pouvoit-il pas conclure d'abord, donc $x = 2\sqrt{a}.$ HNB : $2b$ $= 2\sqrt{a}.$ HNB : 2HB $=$ ASB : $2\sqrt{}$AB $=$ quantité conſtante. Donc &c.

Pag. 149. Probléme 12e. *La ligne Loxodromique & la différence de Latitude de deux endroits étant données, trouver la différence de Longitude.*

On propoſe ce Probléme en général pour deux endroits quelconques : cependant la ſolution qu'on donne ne ſert que pour un cas particulier. Car on ſupoſe qu'un des deux endroits eſt dans l'équateur. Ainſi la ſolution ne ſatisfait point, lorſque les deux lieux donnés ſont hors de l'équateur.

Pag. 150. *Il viendra* $dx = \frac{madr}{zz} = \frac{madr}{aa - rr}$; *& prenant les integrales, on aura* $BA[x] = m \times (\frac{r}{a} + \frac{r^3}{3a^3} + \frac{r^5}{5a^5} + \frac{r^7}{7a^7} + \&c.)$ *= à la différence des Longitudes des lieux A & C.*

Qu'eſt-il beſoin de recourir à des Séries infinies, lorſqu'on peut donner l'intégrale par une expreſſion finie, claire, & élégante, que l'on peut conſtruire facilement par les Logarithmes, ou moyennant la Logarithmique. Voici comment. $\frac{madr}{aa - rr} = \frac{\frac{1}{2}mdr}{a+r} + \frac{\frac{1}{2}mdr}{a-r}$. Donc $\int \frac{madr}{aa-rr} = \int \frac{\frac{1}{2}mdr}{a+r} + \int \frac{\frac{1}{2}mdr}{a-r}$. Or $\int \frac{\frac{1}{2}mdr}{a+r} = \frac{1}{2} ml(a+r)$, & $\int \frac{\frac{1}{2}mdr}{a-r} = -\frac{1}{2} ml(a-r)$: par conſéquent $\int \frac{madr}{aa-rr} = \frac{1}{2} ml \frac{a+r}{a-r}$, ſuivant le calcul exponentiel. Nous n'avons donc que faire, ni de Séries, ni de la méthode de Mr. COTES. Voici maintenant ma ſolution générale, pour deux lieux donnés quelconques, que j'ai écrite, il y a plus de 30 ans, derriere mes Tables des Sinus & des Logarithmes, en ces termes latins. *Eſto radius ſphæræ* = a, *ſinus totus* = c = 10000000 ; *differentia Longitudinum duorum locorum, ſecundum æquatorem ſumta* = b, *tangens ſemi-diſtantiæ loci unius a polo proximo* = m, *tangens ſemi-diſtantiæ alterius loci ab eodem polo* = n, *& tangens inclinationis rhumbi ad quemlibet meridianum* = p : *ſubtangens Logarithmicæ ad Tabulas uſitatas Logarithmorum accommodatæ, ut calculus docet,* = 4342945. *Dico fore* $p = \frac{4342945bc}{(lm - ln)a}$.

Pag. 151. Corollaire. *D'où on tire PB* (a) : Cc = cd (dy) : *Cc* (du) *Donc &c.*

Quel plaiſant calcul fait-on ici ; pour trouver une choſe qui ſaute aux yeux, ſans calcul. On compare dans cette prétendue analogie PB, qui eſt une ligne finie, à C*c*, qui eſt infiniment petite, & on fait cette raiſon égale à la raiſon de *cd* à C*c*, qui eſt une raiſon finie. Comment dont peut elle

être

être égale à la premiere raiſon, qui eſt infinie ? Ne pouvoit-on pas dire tout-court : Puiſque cd eſt à Cc en raiſon conſtante donnée, donc auſſi l'intégrale de cd, c'eſt-à-dire AD, différence de Latitude, eſt à l'intégrale de Cc, qui eſt AC, longueur de la Loxodromique, comme cd eſt à cC, ou comme le rayon eſt à la ſécante de la ligne Loxodromique ?

Ibid. Probléme 13, à la fin du ſecond paragraphe, $AF[a] : Ff[\frac{adz}{y}] = AQ[\frac{ab}{z} - a] : Qs = \frac{abdz}{zy} - adz$; *de la même maniere* $Pn = \frac{abdz}{zy} + adz$.

Il faloit dire, en vertu de cette analogie, que $Qs = \frac{abdz}{zy} - \frac{adz}{y}$, & que $Pn = \frac{abdz}{zy} + \frac{adz}{y}$.

Pag. 152. lign. 6. $(\frac{by}{z} + y) \times (\frac{by}{z} + y)$.

Au lieu de cela il faut écrire $(\frac{by}{z} + y) \times (\frac{abdz}{zy} + \frac{adz}{y})$.

Ibid. lign. 7 & 8, *& l'élement de ces deux différentielles ſera* $= \frac{p}{r} \times (\frac{2aabbdz}{zz} + \frac{2}{3}aadz) =$ *à la différence de la ſomme des deux ſolides produits par les eſpaces* cQGB, BGPC.

Il n'eſt pas vrai que l'élement de ces differentielles ſoit $= \frac{p}{r} \times (\frac{2aabbdz}{zz} + \frac{2}{3}aadz)$; car il eſt $= \frac{p}{r} \times (\frac{2aab^3dz}{z^3} + \frac{2aabdz}{z})$; mais on veut dire que la différence de ces deux differentielles eſt $= \frac{p}{r} \times (\frac{2aabbdz}{zz} + \frac{2}{3}aadz)$.

Ibid. lign. 11. *eſt la differentielle de la* $\frac{1}{2}$ *de la ſomme, dont l'intégrale ſera* &c.

Je ne vois pas pourquoi Mr. STONE veut ſeulement la moitié de l'intégrale, pour avoir le ſolide ; il me ſemble qu'il faut l'intégrale entiere $\frac{p}{r} \times (\frac{2aabb}{z} - \frac{2}{3}aaz)$; ou plutôt [car il

n'obſerve pas les ſignes] $\frac{p}{r} \times (- \frac{2aabb}{z} + \frac{2}{3} azz)$: Par cette raiſon, il faudroit changer les nombres dans tout le reſte qui ſuit, & écrire finalement $\frac{p}{r} \times \frac{-2aabbx - \frac{2}{3}a^3x + \frac{2}{3}aaxx}{a - x}$. Pour ce qui eſt des ſignes ; il faut peut-être les laiſſer, comme ils ſont dans le Livre, mais c'eſt de plus haut qu'il faut commencer à examiner le calcul.

Pag. 153. 154. Juſqu'à la fin.

On ne ſauroit prendre la peine d'examiner tout ce long raiſonnement, après que nous en avons aſſez pris pour examiner tout ce qui précéde : quoiqu'il en ſoit, on feroit le calcul beaucoup plus aiſément, en ſuivant nôtre route.

Pag. 155. Probléme 14. *Trouver la nature d'une courbe AMC, telle que ſi on conçoit une vaſe formé par ſa révolution.... rempli d'eau, qu'on ſuppoſera couler par un petit trou rond, percé dans le fond..... la ſurface de l'eau deſcende par des eſpaces égaux en tems égaux ; ſuppoſant que la viteſſe de l'eau qui ſort par le trou, ſoit comme la racine quarrée de la hauteur de l'eau au deſſus du trou.*

Ce Probléme eſt purement algébrique, ne demandant ni à différentier, ni à integrer ; car pour que la ſurface deſcende par des eſpaces égaux en temps égaux, il faut que ſa viteſſe ſoit uniforme. Or la ſurface de l'eau eſt à la ſurface du trou, reciproquement comme la viteſſe par le trou eſt à la viteſſe de la deſcente de la ſurface, c'eſt-à-dire $yy : b = \sqrt{ax} : \frac{b\sqrt{ax}}{yy}$. Ainſi $b\sqrt{ax} : yy$ ſera la viteſſe de la ſurface ; laquelle devra être uniforme, & partant conſtante : faiſant donc $b\sqrt{ax} : yy = c$, cela nous donnera $abbx = ccy^4$, ou $abbx : cc = y^4$; qui eſt pour la Parabole quarrée-quarrée.

Mais la ſuppoſition que l'on fait, ſavoir que la viteſſe de l'eau par le trou ſoit comme la racine quarrée de la hauteur de l'eau au deſſus du trou, eſt fauſſe ; n'ayant lieu que quand le trou ſeroit infiniment petit : ce qu'on ne peut pas ſuppoſer ici : autrement la ſurface de l'eau ne deſcendroit ſenſiblement qu'en

qu'en un tems infini. La véritable ſolution de ce Probléme, & de tous les autres ſur le mouvement des eaux, n'a encore été publiée par perſonne, ni même par Mr. NEWTON; & tout ce que l'on en a ſont de purs paralogiſmes: Nous en donnerons avec le tems la véritable Théorie. *

Pag. 155. Probléme 15. *Si AC eſt une ligne horizontale, ſur le point C de laquelle eſt elevé un Parallelépipede CD, dont une des ſurfaces ſoit perpendiculaire à la ligne AC: il s'agit de trouver l'angle CAB ſur le point A, duquel angle ſuppoſant poſée l'extrémité A d'un long ſolide AB; de maniere qu'avec ſon autre extremité B, il vienne preſſer le Parallelèpipede CD, ce ſolide comprimera perpendiculairement CD avec plus de force au point A, qu'en tout autre point.* TAB. LXXXI. N°. CLXX. *Fig.* 3.

Si l'énoncé de ce Probléme, qui appartient ſeulement au Calcul direct Différentiel eſt obſcur, la Solution ne l'eſt pas moins. Si je le conjecture bien, je crois qu'on demande la poſition du corps peſant AB, entre la verticale CD & l'horizontale CA, qui ſoit telle que la verticale CD ſouffre le plus de force, pour être preſſée en arriére dans la direction horizontale.

SOLUTION.

Soit le poids du corps, ramaſſé au centre de gravité F, nommé p; AF, b; AB, a; BC, x. Ce poids p agiſſant ſuivant la direction verticale FE, il faut décompoſer la force en FI & IE. Celle de FI eſt ſoutenuë par l'obſtacle mis en A, & l'autre ſuivant IE fait effort pour tourner le levier AB autour de A, mais elle eſt empêchée par l'oppoſition du plan CD. Ainſi cet effort appliqué en F eſt $= \frac{EI}{EF}p = \frac{AC}{AB}p = \frac{p\sqrt{(aa-xx)}}{a}$. Et le moment de cet effort en F $= p.\,AF.\,\sqrt{(aa-xx)} : a = pb\sqrt{(aa-xx)} : a$. Faiſant maintenant AB : AF $= \frac{pb\sqrt{(aa-xx)}}{a} : \frac{pbb\sqrt{(aa-xx)}}{aa}$ = à la force avec laquelle le plan CD eſt pouſſé ſuivant HB: il

* Voïés N°. CLXXXVI.

il faut la decompoſer en HG & GB: celle-ci pouſſe CD de haut en bas, mais l'autre ſuivant HG, ſera perpendiculaire à CD, & ſera $= pbbx\sqrt{(aa-xx)} : a^3$; c'eſt donc de celle-ci, ou ſimplement de $x\sqrt{(aa-xx)}$, qu'il faut faire le *maximum*, & non pas de $xx\sqrt{(aa-xx)}$; comme le pretend Mr. STONE. Si on fait le calcul, on trouvera que $x = a\sqrt{\frac{1}{2}}$, & partant que l'angle CAB ſera demi-droit, ou de 45°.

Pag. 156. Probléme 16. *Trouver &c.* [la courbe de la plus vite deſcente].

Notre Auteur ne dit pas que je ſuis le premier qui ait réſolu & propoſé ce Probléme, & moins encore dit-il que la Solution qu'il a donnée eſt priſe de mon Frere. Pour cacher ſon plagiat, il croit être à couvert & deguiſer la méthode de mon Frére, en employant d'autres lettres, & en ſe ſervant d'autres façons d'exprimer la choſe; comme, par exemple, lorſqu'il dit (pag. 157, vers la fin) *la difference de la courbe eſt toûjours comme* $dx : y^{\frac{1}{2}}$, *c'eſt-à-dire en raiſon directe de la difference de l'abſciſſe AH* [x], *& en raiſon reciproque & ſouſdoublée de l'ordonnée HE* [y]. Au lieu que mon Frére avoit dit ſimplement, que la nature de la courbe conſiſte en ce que $dx : \sqrt{y}.\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ doit être conſtant, ou $= 1 : \sqrt{a}$.

Pag. 157. *On trouvera, que la courbe qui a cette proprieté* [de la plus vite deſcente] *eſt la Cycloïde, paſſant &c.*

Il ne ſuffit point de dire, *On trouvera*; il faloit faire voir en effet comme on le trouvera, & cela par une analyſe, & non pas *a poſteriori* par une demonſtration; parce que cela ſuppoſe qu'on ſait deja que c'eſt une Cycloïde. Il ne ſuffit pas non plus de dire que la Cycloïde paſſe par les deux points; il faloit de plus montrer par l'analyſe, que le point ſuperieur eſt néceſſairement au commencement de la Cycloïde renverſée.

Ibid. vers la fin, *On ſuppoſe* [les points] *A & B, poſés de façon, que ACD ſoit une demi-Cycloïde.*

Cette ſupoſition eſt puerile, en ce qu'elle reſtreint la Propoſition generale à un cas particulier; comme ſi le point inférieur donné B devoit néceſſairement être au ſommet de la Cycloïde

de renverſée: au lieu qu'il peut être dans un endroit quelconque de la Cycloïde, tantôt au delà du ſommet, tantôt en deça, ſelon que le hazard l'a placé.

Pag. 158. $PQ[\sqrt{(ay-yy)}] : BP[\sqrt{(aa-yy)}] = CL[dx]$, $CE = \frac{dx\sqrt{(aa-yy)}}{\sqrt{(ay-yy)}} = \frac{dx.\sqrt{a}.\sqrt{(a-y)}}{\sqrt{y}.\sqrt{(a-y)}} = \frac{dx.\sqrt{a}}{\sqrt{y}}$, *laquelle expreſſion eſt comme* $\frac{dx}{y^{1:2}}$; $\sqrt{a}$ *étant donnée. Donc la Cycloïde &c.*

Quel honteux paralogiſme, pour un Géometre tel que le nôtre! Car il eſt faux que $\frac{dx\sqrt{(aa-yy)}}{\sqrt{(ay-yy)}}$ ſoit $= \frac{dx\sqrt{a}.\sqrt{(a-y)}}{\sqrt{y}.\sqrt{(a-y)}}$ Nous autres Géometres du commun, aurions fait $\frac{dx\sqrt{(aa-yy)}}{\sqrt{(ay-yy)}} = \frac{dx\sqrt{(a+y)}.\sqrt{(a-y)}}{\sqrt{y}.\sqrt{(a-y)}} = \frac{dx\sqrt{(a+y)}}{\sqrt{y}} = \frac{dx\sqrt{(a+y)}}{y^{1:2}}$. Cependant il ſemble que Mr. STONE trouve, nonobſtant ſon paralogiſme, ce qu'il veut trouver, ſavoir $\frac{dx}{y^{1:2}}$ proportionel à la differentielle de la courbe: mais loin de-là, ce n'eſt que par accident qu'il le trouve, par une autre faute qu'il commet, & qui redreſſe la premiere. C'eſt qu'il fait $BP = \sqrt{(aa-yy)}$, au-lieu de faire $BP = \sqrt{(aa-ay)}$, étant moyenne proportionelle entre $KB[a]$ & $BA[a-y]$. Ainſi pour corriger la double erreur de Mr. STONE; il n'y-a qu'à écrire $\sqrt{(aa-ay)}$, en place de $\sqrt{(aa-yy)}$, qui ſe trouve deux fois dans la même ligne de la page 158.

Pag. 158. Probléme 17. *Trouver la nature &c.* [du Solide de moindre reſiſtance].

Il examine ici le Solide rond de la moindre reſiſtance. Mais, à la premiere inſpection, je vois que tout ce qu'il y a de bon eſt qu'il a emprunté de moi la méthode. On le voit en confrontant ſa Figure 81 avec la Figure apartenant à la piéce que j'ai publiée dans les *Actes de Leipſik*, 1699 * au mois de *Novembre*, ou j'ai expoſé la méthode & le fondement ſervant à réſoudre le Pro-

* N°. LIV. pag. 307, & N°. LVI. pag. 315, *Tom. I.*

Probléme en queſtion. Et pour ce qui eſt du calcul même, que Mr. STONE employe; il paroit entiérement copié de celui de feu Mr. *le Marquis de* L'HOSPITAL. Pour en être convaincu; il n'y-a qu'a lire la piéce de Mr. de L'HOSPITAL, qu'il donna dans la même année au mois d'*Août*. †

Pag. 161. Probléme 18. *Trouver l'angle ABC, que forme le plan d'une aile de moulin à vent*, &c.

Ce Probléme eſt un de ceux qui ne dépendent nullement du Calcul Intégral. Mr. STONE ne cite que Mr. MARIOTTE, qui l'a mal reſolû, & Mr. PARENT, dont, à ce qu'il dit, il n'a point vû la Solution. Mais ne pouvoit-il pas auſſi citer Monſieur HUGUENS qui l'a très bien réſolu. De plus, ne pouvoit-il pas citer ma *Manœuvre des Vaiſſeaux* *. Car pag. 51, je donne une règle, pour déterminer l'angle que doit faire le gouvernail avec la quille, pour que le Vaiſſeau tourne le plus promptement qu'il eſt poſſible, qui eſt le même que celui que doit former l'aile du moulin à vent avec l'axe, pour faire tourner le moulin avec le plus de force qu'il ſoit poſſible.

† N° LV. pag. 311, *Tom. I.*
* N°. XCI. pag. 40, 41, *Tom. II.*

OPTICA

N°. CLXXI.

OPTICA.

****

I.

PROBLEMA OPTICUM.

Datis tribus objectis AB, CD, EF, inæqualium longitudinum, in eadem recta RS sitis, datisque intervallis BC, DE a se invicem sejunctis; invenire locum oculi O, ex quo tria ista objecta videat ejusdem magnitudinis apparentis.

SOLUTIO.

Ex puncto O intelligatur demissa perpendicularis OR, & dicantur $AB=a$, $CD=b$, $EF=c$: Item intervallum BC, quo distat objectum primum a secundo $=m$, & intervallum BE, quo distat objectum primum a tertio $=n$. Sintque $OA=x$, $OB=y$, $OC=z$. Quia tres anguli AOB, COD, EOF debent esse æquales; erunt areæ triangulorum, ut $AO\times BO$, $CO\times DO$, $EO\times FO$. Sunt quoque, ob communem verticem O, ut bases AB, CD, EF. Attendamus primo ad duo priora triangula AOB, COD, ubi habebimus $AB\,[a]$: $CD\,[b]=AO\times BO\,[xy]$: $CO\times DO=\frac{bxy}{a}=z\times OD$; quare $OD=bxy:az$. Porro quia, addito communi angulo BOC, habetur $AOC=BOD$, erit etiam $AC\,[a+m]$: $BD\,[b+m]=AO\times CO\,[xz]$: $BO\times DO=\frac{b+m}{a+m}xz$; cum itaque BO sit $=y$, erit etiam $OD=(b+m)\,xz$: $(a+$

TAB. LXXXI. N°. CLXXI *Fig.* 1.

$(a+m)y$; adeoque $(b+m)xz : (a+m)y = bxy : az$; unde elicitur z, vel $OC = y\sqrt{((ab+bm) : (ab+am))}$. Et valore hoc ſubſtituto in $bxy : az = OD$, erit $OD = x\sqrt{((bb+bm) : (aa+am))}$.

Simili modo inveniuntur OE & OF, ſcribendo tantum c pro b, & n pro m; prodibitque $OE = y\sqrt{((ac+cn) : (ac+an)}$ & $OF = x\sqrt{((cc+cn) : (aa+an)}$.

Ut nunc habeantur duæ æquationes inter x & y, ad eorum valores determinandos; obſervo, quod $AR = (BO^2 - AO^2 - BA^2) : 2BA = (yy - xx - aa) : 2a$; adeoque $BR = (yy - xx - aa) : 2a + a = (yy - xx + aa) : 2a$. Sed & idem $BR = (CO^2 - BO^2 - CB^2) : 2CB = (byy - ayy) : (2ab + 2am) - \frac{1}{2}m$; unde emergit hæc prima æquatio $(yy - xx + aa) : 2a = (byy - ayy) : (2ab + 2am) - \frac{1}{2}m$.

Pari ratione $BR = (EO^2 - BO^2 - EB^2) : 2EB = (cyy - ayy) : (2ac + 2an) - \frac{1}{2}n$; unde hæc altera æquatio $(yy - xx + aa) : 2a = (cyy - ayy) : (2ac + 2an) - \frac{1}{2}n$. Æquatio prior dat $yy = (xx - aa - am) \times (b+m) : (a+m)$. Poſterior vero dat $yy = (xx - aa - an) \times (c+n) : (a+n)$. Hinc igitur $(xx - aa - am) \times (b+m) : (a+m) = (xx - aa - an) \times (c+n) : (a+n)$. Brevitatis gratia ponatur $a+m = d$, $b+m = e$, $a+n = f$, $c+n = g$; Erit $(xx - ad)e : d = (xx - af)g : f$, hoc eſt $(exx - ade) : d = (gxx - afg) : f$; multiplicando per crucem $efxx - adef = dgxx - adfg$; ex cujus reductione invenitur $xx = (adfg - adef) : (dg - ef)$; hocque ſubſtituendo in alterutro valore ipſius yy [eſt enim perinde] provenit $yy = (aefg - adeg) : (dg - ef)$. Ergo tandem $x = \sqrt{((adfg - adef) : (dg - ef))}$, & $y = \sqrt{((aefg - adeg) : (dg - ef))}$. *Q. E. I.*

Coroll. I.

Hinc etiam reliquæ CO, DO, EO, FO determinantur. Eſt enim (ut ſupra inventum) $OC = y\sqrt{((ab+bm) : (ab+am)} = y\sqrt{(bd : ae)} = \sqrt{((bdfg - bddg) : (dg - ef))}$; $OD = x\sqrt{}$

$x\sqrt{((bb+bm):(aa+am))} = x\sqrt{(be:ad)} = \sqrt{((befg-beef):(dg-ef))}$; OE $= y\sqrt{((ac+cn):(ac+an))} = y\sqrt{(cf:ag)} = \sqrt{((ceff-cdef):(dg-ef))}$; OF $= x\sqrt{((cc+cn):(aa+an))} = x\sqrt{(cg:af)} = \sqrt{((cdgg-cdeg):(dg-ef))}$.

COROLL. II.

Sub hac generali Solutione continentur ſinguli caſus particulares. Ex. gr. ſi duo ex objectis, vel omnia tria eſſent contigua; nihil aliud agendum eſſet, quam ſupponere tantum BC ſeu $m = 0$, & BE, ſeu $n = CD = b$. Atqui ita foret $d = a$, $e = b$, $f = a+b$, $g = c+b$. Quibus igitur ſubſtitutis, in generalibus linearum valoribus, prodiret x ſeu OA $= \sqrt{((adfg-adef):(dg-ef))} = a\sqrt{((ac+bc):(ac-bb))}$; y, ſeu BO, ſeu [quia cum ea in hoc caſu congruit] CO $= \sqrt{((aefg-adeg):(dg-ef))} = b\sqrt{((ac+ab):(ac-bb))}$; DC, ſeu [quæ hic eadem eſt] EO $= \sqrt{((ceff-cdef):(dg-ef))} = b\sqrt{((ac+bc):(ac-bb))}$; FO $= \sqrt{((cdgg-cdeg):(dg-ef))} = c\sqrt{((ac+ab):(ac-bb))}$. Quæ omnia rite conſentiunt cum Solutione hujus caſus, per methodum particularem inventa.

****

II.

PROBLEMA DIOPTRICUM GENERALE,

Quod comprehendit omnia Huygeniana *circa lentes.*

Data lente ABCD, cujus axis EBDF, & puncto radiante M; invenire ejus focum, ſeu punctum G, in quo radii MH incidentes, poſt duplicem refractionem in H & I perpeſſam, concurrunt. TAB. LXXXI. Nº. LXXI. *Fig.* 2.

SOLUTIO.

TAB. LXXXI. N°. CLXXI. *Fig.* 2.

Esto sinus anguli incidentiæ ex aëre in vitrum ad sinum anguli refractionis, ut m ad n; F centrum superficiei superioris ABC; E centrum superficiei inferioris ADC. Pro concesso assumatur angulos infinite parvos, seu valde acutos, esse ut eorum sinus.

Vocetur angulus incidentiæ MHO $= m$, & angulus refractionis primæ FHI $= n$; angulus radiationis HMB $= a$; distantia puncti radiantis M a lente, hoc est, MB $= d$. Erit, producta IH donec axi occurrat in N, ang. N $= a - m + n$, ang. F $= m - a$. Dicatur porro ang. E $= b$, erit ang. EIN $=$ E $-$ N $= b - a + m - n$. Est vero EIN : LIG $= n : m$; hinc LIG $= (mb - ma + mm - mn) : n$; ang. G $=$ LIG $-$ E $= (mb - nb - ma + mm - mn) : n$. Sit radius superficiei inferioris ADC, hoc est ED $= p$; radius superioris, hoc est FB $= q$; erit HF : HM seu BM $= a : m - a$, hoc est, $q : d = a : m - a$; unde $da = mq - aq$, ideoque $a = mq : (d + q)$. Præterea, quia crassities lentis BD, multoque magis HI, infinities minor supponitur amplitudine arcus ID, qui & ipse infinities minor habetur distantia finita ME, punctum I censeri potest in H, adeoque EIM tanquam triangulum; hinc ergo $b : a =$ MI, vel MH, vel MB : EI $= d : p$; hinc $b = ad : p =$ [substituto valore ipsius a] $mqd : (pd + pq)$. Surrogatis itaque valoribus ipsarum a & b in valore anguli G, qui inventus est $= (mb - nb - ma + mm - mn) : n$, obtinebitur G $= (mmqd - mnqd + mmpd - mnpd - mnpq) : (npd + npq)$. Tandem G : E $=$ EI : GI $=$ ED : GD, hoc est $\frac{mmqd - mnqd + mmpd - mnpd - mnpq}{npd + npq} : \frac{mqd}{pd + pq} = p : GD$. Reperitur itaque

$$GD = \frac{npqd}{mqd - nqd + mpd - npd - npq}.$$

ORDRE

****

III.

ORDRE DU CALCUL

Pour la détermination des Iris ou Arc-en-Ciels de toutes les Classes.

SOit AMRTV le grand cercle d'une boule de matiere transparente, représentant un de ces globules aqueux, qui rempliſſent l'air, dans le tems qu'on y voit un Iris. BA, BM, B*m* ſont des rayons ſolaires, conſiderés comme venant d'une diſtance infinie, par conſéquent comme paralleles; dont celui BA, qui prolongé paſſe par le centre B, ſera nommé *l'axe des rayons*. Les autres BM, B*m*, prolongés en S, *s*, ſont les rayons incidents obliquement, qui à l'entrée dans la boule ſe rompant vers les perpendiculaires CM, C*m*, donnent les rayons rompus MR, *mr*, lesquels ſont réflechis, autant de fois que l'on voudra, ſavoir MR en RT, RT en TV &c. Et *mr* en *rt*, *rt* en *tu* &c. pendant qu'une partie de chacun de ces rayons ſort de la boule à la rencontre du point de réflexion. TAB. LXXXI. N°. CLXXI. *Fig.* 3.

Il faut remarquer, que pour qu'un Iris d'une certaine claſſe s'engendre, il y a un certain point M ſur lequel le rayon BM tombant, & tous les autres infiniment proches B*m* entrant enſuite dans la boule, dont, après autant de réflexions qu'il en faut pour l'Iris de cette claſſe, ils ſortent parallelement VP, *vp*, comme ils y étoient entrés parallelement BM, B*m*. Tous les autres rayons ſolaires qui tombent ſur des point différents de M, *m*, en deça ou en delà, ſortiront après le même nombre de reflexions non parallelement, & ſe diſperſeront. Ce qui fait que l'œil placé dans la direction VP, *vp*, on verra ſur V*v* l'image du Soleil ſous une certaine couleur convenable à la nature de la réfraction du rayon BM en MR, & de B*m* en *mr*. C'eſt en quoi conſiſte l'apparition d'un Arc-en-ciel; ſuppoſé

que l'œil en ſoit aſſés ſenſiblement frappé ; quoique, en vérité, les yeux des hommes ne ſoient pas aſſés ébranlables, pour s'appercevoir des Iris, qui ſont au de-là de la ſeconde Claſſe : peut-être que les Aigles, les Linx, ont les yeux plus vifs, plus perçants pour les voir. Quoiqu'il en ſoit, voici la méthode générale pour déterminer le point M, pour telle ſorte d'Iris que l'on voudra ; ce point trouvé, il eſt aiſé de déterminer la demi-largeur de l'Iris, c'eſt-à-dire, l'angle que fait PV prolongé avec l'axe AC, ou le rayon BM, prolongés.

D'abord, il eſt clair que toutes les cordes MR, RT, TV &c. ſont égales entr'elles ; comme le ſont auſſi les cordes mr, rt, tu, &c. à cauſe de l'égalité des angles d'incidence & de réflexion. Soit CA le ſinus total $= 1$, CE perpendiculaire ſur MS, prolongement de BM, ou le ſinus de l'arc $AM = x$, l'arc $MmR = RrT = TvV = A$, l'arc $mRr = rt = tTv = B$; le nombre de réflexions en R, T, &c. ou le nombre quantiéme de l'Iris qu'on veut déterminer $= N$: on aura l'arc total $MRTV = (1+N) \times A$, & l'arc total $mrtu = (1+N) \times B$. Donc la différence de ces arcs totaux, c'eſt-à-dire, $Mm + Vv = (1+N) \times A - (1+N) \times B = (1+N) \times (A - B) = (1+N) \times (Mm - Rr)$. Or, parce que les rayons RM, rm [s'ils rebrouſſoient] ſortiroient parallelement en MB, mB, comme leurs égaux TV, tv doivent ſortir parallelement en VP, vp ; il faut que la figure $MmRr$ ſoit parfaitement égale & ſemblable en tout à la figure $VvTt$; donc $Mm = Vv$, & $Rr = Tt$. Ainſi nous aurons $2Mm = Mm + Vv = (1+N) \times (Mm - Rr) = (1+N) \times Mm - (1+N) \times Rr$; ce qui nous donne $Mm \times (N-1) = (1+N) \times Rr$, & partant $N+1 : N-1 = Mm : Rr =$ [par la nature du cercle] MF : Fr ou FR ; donc *componendo* $2N : N+1 = MR : MF$; donc $MF = \frac{N+1}{2N} MR$; cela veut dire, que le point cherché M doit être là, où MF, partie du rayon rompu compriſe entre le point de réfraction M & la cauſtique, ſoit $= \frac{N+1}{2N} MR$. Or dans l'*Analyſe des inſin. petits* pag. 122, on

a

a generalement $MF = \frac{bbmy}{bmy - amy - aan}$ = [si y, ou le rayon incident eſt infini, comme ici] $\frac{bbm}{bm - an}$. Et a eſt ici [en nommant $CE = x$] $ME = \sqrt{(1 - xx)}$, b ou $MG = \sqrt{(1 - \frac{nn}{mm} xx)}$, $MR = 2MG = 2\sqrt{(1 - \frac{nn}{mm} xx)}$; d'où on aura cette équation $\frac{N+1}{2N} MR$ ou $\frac{N+1}{N}\sqrt{(1 - \frac{nn}{mm} xx)} = \frac{bbm}{bm - an}$ ou $\frac{m(1 - \frac{nn}{mm} xx)}{m\sqrt{(1 - \frac{nn}{mm} xx)} - n\sqrt{(1 - xx)}}$. La diviſion par $\sqrt{(1 - \frac{nn}{mm} xx)}$ donnera $\frac{N+1}{N} = \frac{m\sqrt{(1 - \frac{nn}{mm} xx)}}{m\sqrt{(1 - \frac{nn}{mm} xx)} - n\sqrt{(1 - xx)}}$

$= \frac{m\sqrt{(1 - \frac{nn}{mm} xx)} - n\sqrt{(1 - xx)}}{m\sqrt{(1 - \frac{nn}{mm} xx)} - n\sqrt{(1 - xx)}} + \frac{n\sqrt{(1 - xx)}}{m\sqrt{(1 - \frac{nn}{mm} xx)} - n\sqrt{(1 - xx)}}$

$= 1 + \frac{n\sqrt{(1 - xx)}}{m\sqrt{(1 - \frac{nn}{mm} xx)} - n\sqrt{(1 - xx)}}$; Donc $\frac{1}{N} = \frac{n\sqrt{(1 - xx)}}{m\sqrt{(1 - \frac{nn}{mm} xx)} - n\sqrt{(1 - xx)}}$; multiplié en croix, il vient

$m\sqrt{(1 - \frac{nn}{mm} xx)} - n\sqrt{(1 - xx)} = Nn\sqrt{(1 - xx)}$; ou

$m\sqrt{(1 - \frac{nn}{mm} xx)} = (Nn + n)\sqrt{(1 - xx)}$; ou en quarrant les deux membres, $mm - nnxx = (Nn + n)^2 - N^2 n^2 xx - 2Nn^2 xx - nnxx$. Par la réduction, on obtiendra $xx = \frac{(Nn + n)^2 - mm}{NNnn + 2Nnn}$ & partant $x = \frac{\sqrt{((Nn+n)^2 - mm)}}{n\sqrt{(NN + 2N)}}$. *C.Q.F.T.*

COROLLAIRE I.

Pour le Principal Iris, où N, le nombre de réflexions, eſt $= 1$, x devient $= \frac{\sqrt{(4mm - mm)}}{n\sqrt{3}}$

COROL-

COROLLAIRE II.

Pour le ſecond Iris, où N, le nombre de réflexions, eſt $= 2$, il vient $x = \frac{\sqrt{(9nn - mm)}}{n\sqrt{8}}$.

COROLLAIRE III.

Pour le troiſiéme Iris, où $N = 3$, on a $x = \frac{\sqrt{(16m - mm)}}{n\sqrt{15}}$. Et ainſi des autres à l'infini.

COROLLAIRE IV.

Pour l'infinitiéme Iris, où $N = \infty$, x ſera $= 1$; c'eſt-à-dire, le rayon incident BM doit friſer la boule, & ſera le plus éloigné de l'axe BAC qu'il eſt poſſible.

COROLLAIRE V.

Si la réfraction eſt ſuppoſée bien grande; il pourroit arriver que quelques-uns des premiers Iris devinſſent imaginaires; par conſéquent inviſibles: par exemple, ſi $m : n = 5 : 2$, on auroit pour le premier Iris, où $N = 1$, $x = \frac{\sqrt{(16 - 25)}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{-9}}{2\sqrt{3}}$, imaginaire. Mais le ſecond Iris, où $N = 2$, donneroit $x = \frac{\sqrt{(36 - 25)}}{2\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{8}}$, poſſible.

Pour la détermination des demi-largeurs des Iris de toutes les Claſſes.

Le rayon dernier ſortant VP, qui entre dans l'œil, doit être continué en arriére VQ, juſqu'à-ce qu'il rencontre le rayon incident BM prolongé, ces deux rayons feront un angle,

gle, dont la mesure donne la demi-largeur de l'Iris. Pour trouver cet angle, on observera ce qui suit : CE, ou x, est le sinus de l'arc AM, en prenant CA pour le sinus total, & il est en même tems le sinus de l'angle d'incidence : or x étant trouvé, on trouvera par les Tables l'arc AM qui sera la mesure de l'angle d'incidence ; on aura donc aussi $\frac{n}{m}x$, ou CG, sinus de l'angle de réfraction ; cet angle sera donc aussi connu par les Tables. La différence de ces deux angles d'incidence & de réfraction, qui est l'angle RMS, soit nommée D. On aura de même, en prolongeant TV en π, $PV\pi = D =$ RMS.

De plus, je nomme R l'angle de réfraction CMG ou CRG. Il est visible, que chacun des Angles MRT, RTV, &c. $= 2R$. Que l'on prolonge le rayon incident BMS à l'indéfini, lequel rencontre le rayon réflechi prolongé après la premiere réflexion au point α, celui prolongé d'après la seconde réflexion, au point ϵ, celui prolongé d'après la troisiéme réflexion au point γ, &c. Enfin le dernier rayon sortant VP, continué en arriére rencontre le rayon incident au point nommé ω. Qu'on nomme enfin l'angle droit P. On conçoit qu'en chaque point de rencontre il y a deux angles, l'un intérieur qui regarde le Soleil, & l'autre extérieur qui est son angle de suite. Le premier intérieur $\alpha =$ MRT $-$ RMS $= 2R - D$; le premier extérieur $\alpha = 2P - 2R + D$: Le second intérieur $\beta = 2R - (2P - 2R + D) = 4R - 2P - D$; le second extérieur $\beta = 2P - (4R - 2P - D) = 4P - 4R + D$. Le troisiéme intérieur $\gamma = 2R - (4P - 4R + D) = 6R - 4P - D$; le troisiéme extérieur $\gamma = 2P - (6R - 4P - D) = 6P - 6R + D$ &c. Maintenant, si chacun des intérieurs est diminué encore d'un D, on aura la demi-largeur du premier Iris $= 2R - 2D$; celle du second Iris $= 4R - 2P - 2D$; celle du troisiéme $= 6R - 4P - 2D$; En general, celle de la N^a Classe ; c'est-à-dire, la demi-largeur de l'Iris, qui se forme après N réflexions entre deux réfractions, sera $= 2N \times R - 2(N - 1) \times P - 2D$.

Quelques exemples ſerviront d'éclairciſſement. Suppoſons la loi de réfraction $\frac{m}{n} = \frac{4}{3}$, qui eſt celle qui ſe fait en entrant de l'air dans l'eau. Pour le premier ou principal Iris, où $x = \frac{\sqrt{(4mm - mm)}}{n\sqrt{3}}$, on aura $x = \sqrt{\frac{20}{27}} =$ [en prenant pour le ſinus total 10000] $\frac{\sqrt{2000000000}}{\sqrt{27}} = \sqrt{74074074\frac{2}{27}} = 8607$ à fort peu près. En conſultant les Tables des ſinus, on trouvera que ce ſinus 8607 répond à l'arc AM de 59°. 24′ = à l'angle d'incidence. Faites donc 4 : 3 = 8607 : 6455 = au ſinus de l'angle de réfraction, qui répondra dans les Tables à 40°. 12′ $\frac{1}{2}$ = à l'angle de réfraction = R: la différence de l'angle d'incidence & de celui de réfraction ſera donc 19°. 11′ $\frac{1}{2}$ = D. Ainſi on aura $2R - 2D = 42°.2'$ = à la demi-largeur de l'Iris principal; conformément aux obſervations.

On fera, *mutatis mutandis*, une ſemblable opération pour le ſecond Iris. On trouvera $x = 9501\frac{1}{2}$, qui donne l'arc AM de 71°. 50′ = à l'angle d'incidence: faiſant 4 : 3 = 9501 $\frac{1}{2}$: 7126 = au ſinus de l'angle de réfraction, qui répond à l'arc de 45°. 27′ = à l'angle de réfraction = R : la différence des angles d'incidence & de réfraction = 26°. 23′ = D: on aura donc $4R - 2P - 2D = -(54°.34')$ = à la demi-largeur de l'Iris Secondaire.

Le ſigne négatif — marque que le concours des lignes prolongéees PV & BMS ſe fait entre le Soleil & la boule, & non pas derriere la boule, comme la Figure le repréſente.

SCHOLIE.

Sans ſe donner tant de peine, & ſans paſſer graduellement par toutes les claſſes inférieures des Iris, pour parvenir à la connoiſſance de la demi-largeur ω de l'Iris de la claſſe N conſidérée généralement; on y peut arriver immédiatement par la propriété du Polygone, qui eſt que la ſomme de tous ſes angles eſt égale à deux fois autant d'angles droits qu'il a de cotés ou

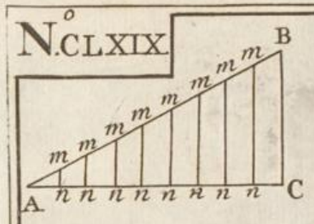
d'angles

TAB. LXXXI. N°. CLXXI. *Fig.* 4.

d'angles moins quatre. Ainſi dans nôtre cas, il y a une eſpèce de Polygone, comme dans cette Figure $D\omega D\,2R\,2R\,D$, qui a toujours trois angles ſaillants ω, D & D, & autant d'angles rentrants $2R$, qu'il y a d'unités dans le nombre N; enſorte qu'il y a en tout $N+3$ angles, & autant de cotés; où il faut noter, que l'angle ω eſt celui que l'on cherche, chacun des deux angles D eſt la différence de l'angle d'incidence & de celui de réfraction; chacun des angles marqués $2R$ eſt le double de l'angle de réfraction R; tous les cotés $D\,2R$, $2R\,2R$, $2R2R$ &c. ſont égaux, repréſentés dans la précédente Figure, par les cordes égales MR, RT, TV, &c. Quant au reſte, il eſt à obſerver que chacun des angles rentrants $2R$, entant qu'ils concourent à former les angles du Polygone, qui doivent regarder l'intérieur de la Figure, a pour meſure, non pas $2R$, mais le complément à 4 droits; ainſi chaque $2R$ doit être eſtimé par $4P-2R$: Donc la ſomme de tous les angles du Polygone ſera $=\omega+2D+N\times(4P-2R)$. Or, par la propriété générale des Polygones, cette ſomme doit être $=2(N+3)\times P-4P$, c'eſt-à-dire $=2(N+1)P$; ce qui nous fournit cette équation $2(N+1)P=\omega+2D+N\times(4P-2R)$, ou $2N\times P+2P=\omega+2D+4N\times P-2N\times R$. D'où on tire $\omega=2N\times R-2(N-1)P-2D$; ce qui eſt conforme à ce que nous venons de trouver par une beaucoup plus longue déduction.



N.° CLXIX.



N.° CLXX.

Fig. 2.

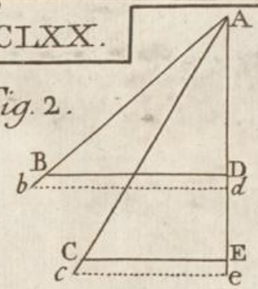


Fig. 1.

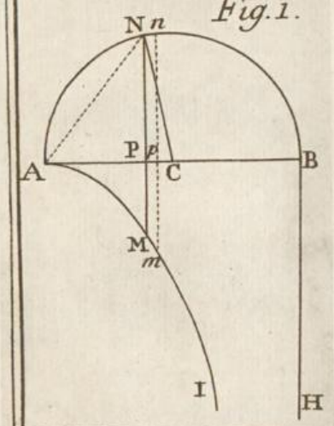
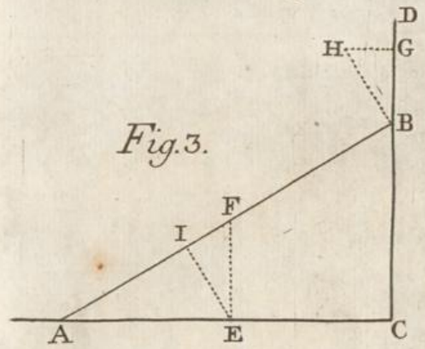


Fig. 3.



N.° CLXXI.

Fig. 2.

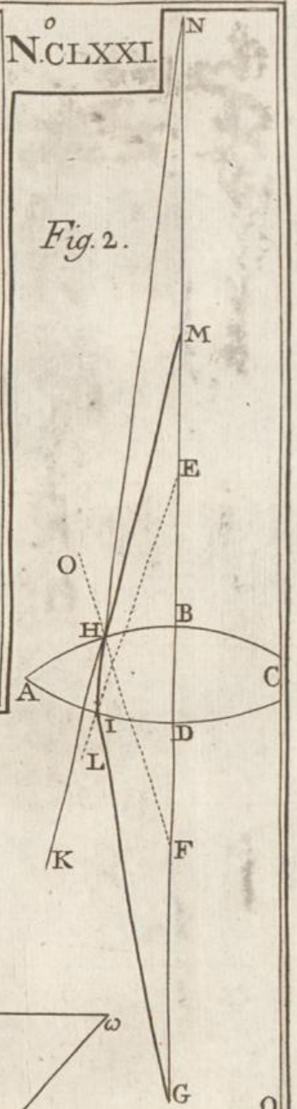


Fig. 3.

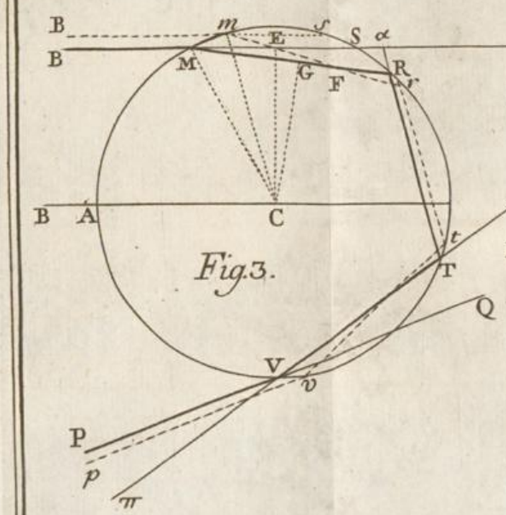


Fig. 4.

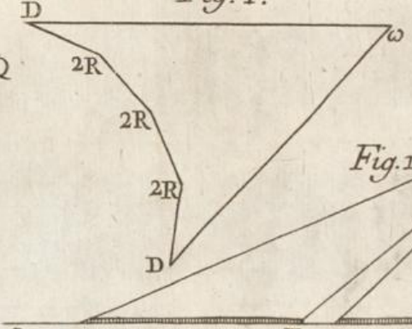


Fig. 1.

MECHANICA.

****

N°. CLXXII.

LE CABESTAN

Délivré des inconvéniens ordinaires, par rapport à ſon uſage ſur Mer.

DISCOURS

Compoſé à l'occaſion de la Queſtion propoſée par Meſſieurs de l'Académie Roiale des Sciences de Paris,

Pour l'Année 1739.

LE CABESTAN

Délivré des inconvéniens ordinaires, par rapport à ſon uſage ſur Mer.

I.



DE toutes les Sciences, celles qui apportent le plus d'utilité au public, ce ſont ſans contredit les Mathematiques & en particulier la Méchanique. L'Hiſtoire ancienne nous apprend combien ARCHIMEDE [pour n'alléguer que ce ſeul exemple] a produit & exécuté de prodigieux effets, par le moyen des machines, duës à ſon génie & à ſes profondes connoiſſances de la Méchanique; quoiqu'on en raconte auſſi pluſieurs faits fabuleux, forgés par des gens qui n'entendoient pas les principes de cette Science; mais par cela même ces faits inventés ſont faciles à diſtinguer des véritables.

II.

L'Illuſtre *Académie Royale des Sciences* de *France*, toujours attentive à favoriſer le progrés des Sciences, a propoſé, pour le prix de l'année 1739, un ſujet qui regarde la Navigation & le Commerce, conformément à l'intention du généreux Fondateur. Le ſujet en queſtion conſiſte dans la demande, *De donner la meilleure conſtruction du* Cabeſtan, *ou telle autre Machine équivalente.*

III.

Il n'eſt pas néceſſaire de donner une ample deſcription du Cabeſtan; étant une machine fort connuë, qui ſert en toutes ſortes d'occaſions ſur Terre & ſur Mer. Cependant le mot de Cabeſtan eſt employé particuliérement dans la Marine: Il ſignifie une machine aſſés ſimple, que VITRUVE appelloit *Ergata*. On ſait, que c'eſt un cylindre, ou un arbre en forme de rouleau vertical, ou érigé à plomb; en quoi il différe d'une autre machine ſemblable nommée *Vireveau* chés les Mariniers, & *Sucula* chés VITRUVE; c'eſt auſſi un cylindre, ou rouleau, mais poſé horizontalement. On place le Vireveau ſur le Tillac des Vaiſſeaux Marchands, où il fait le même effet que le Cabeſtan ſur les Vaiſſeaux de guerre. Dans les grands Vaiſſeaux, on a plus d'une ſorte de Cabeſtan, le grand & le petit. Le grand Cabeſtan, planté ſur le premier pont, & élevé juſqu'à 4 ou 5 pieds de hauteur au deſſus du ſecond, eſt nommé double, à cauſe qu'il ſert à deux étages. Le petit Cabeſtan, ou le Cabeſtan ſimple, eſt poſé ſur le ſecond pont. Leur uſage, & celui du Vireveau, conſiſte à lever les ancres, à tirer, à trainer, ou à élever des fardeaux. Je ne parlerai dans la ſuite que du *Cabeſtan* pris en général, qui fait le ſujet de la queſtion; quoiqu'il ſoit aiſé d'appliquer mes raiſonnemens auſſi au Vireveau, par rapport aux inconvéniens auxquels je tâcherai de rémédier, entant qu'ils ſont communs à ces deux ſortes de machines.

IV.

IV.

Quand on veut se servir du Cabestan, pour lever, par exemple, l'ancre; cela se fait lorsque le cordage, ou le cable, attaché par un bout à l'ancre & arrêté par l'autre bout en quelque endroit du cylindre, s'entortille sur lui en faisant tourner ou virer le Cabestan, par le moyen de deux ou plusieurs léviers, ou barres, que l'on a fait passer par des ouvertures qui percent diamétralement l'arbre du Cabestan. Si la résistance est bien grande, on y applique quelques fois Six léviers, savoir quatre par le haut & deux par le bas.

V.

Avant que de commencer à faire tourner le Cabestan, on tortille dabord le cable un tour ou deux sur l'arbre, afin que le cable ne puisse pas glisser, quand on le retient un peu ferme par son extrémité. C'est le frottement qui l'empêche de glisser lorsque l'ancre, ou un autre fardeau à élever, commence à résister; & plus la résistance est grande, plus aussi le frottement du cable, s'il glissoit, deviendroit grand.

VI.

Si dans cet état le Cabestan tourne en rond, par la force des Hommes qui conduisent les leviers; il est visible, que le cable s'entortillant successivement sur le cylindre, & se raccourcissant ainsi, il doit attirer ou élever ce qui lui est attaché & qui résiste, supposé que la résistance puisse être vaincue; ou bien il faut que le Vaisseau s'approche de l'obstacle où le cable est attaché, en cas que cet obstacle soit immobile.

VII.

C'est ainsi que l'ancre, quand elle est encore bien éloignée du Vaisseau, attire d'abord le Vaisseau, par le raccourcissement

du cable ; juſqu'à ce qu'il réponde preſque à plomb ſur l'ancre : ce n'eſt qu'alors, que la verge de l'ancre ſe redreſſe, ou s'érige en ſituation verticale, & qu'avec elle celui des bras de la croiſée, qui étoit enfoncé en terre, s'en débaraſſe, & tournant la pointe de ſa patte vers en haut, toute l'ancre ſe trouve dans un état convenable, pour être tirée hors du fond de la mer ; n'y ayant plus d'autre réſiſtance à vaincre que celle de ſa peſanteur dans l'eau.

VIII.

On voit bien, que quand le cable eſt fort long, par exemple, de 100 braſſes ou de 600 pieds, il eſt impoſſible de le faire rouler ſur le Cabeſtan, tout d'une ſuite & ſans interruption, par les Conducteurs des leviers ; parce que tous les tours, qui peuvent être contenus ſur l'arbre, s'ils étoient étendus en long, il s'en faudroit beaucoup que leur longueur priſe enſemble n'égalât celle du cable entier. Ainſi quand le cable, par les tours réïterés, eſt parvenu au bout du Cabeſtan ; les Hommes appliqués aux leviers doivent s'arrêter ; il faut relever le cable, & faire pluſieurs autres petites manœuvres, avant que de pouvoit faire une ſeconde opération ; laquelle finie, il en faut revenir à une troiſiéme, après les mêmes manœuvres, enſuite à une quatriéme, cinquiéme &c. juſques à ce qu'on ait achevé d'attirer toute la longueur du cable, ou une telle grande partie, que l'on voudra. Or toutes ces pauſes, ces intervalles d'inaction des leviers, ces interruptions, cauſent une perte conſidérable du tems, qu'on pourroit employer utilement, & qui eſt quelquefois néceſſaire pour éviter un danger.

IX.

C'eſt ce qui a occaſionné la Propoſition où on demande *la meilleure conſtruction du* Cabeſtan, *ou telle autre Machine équivalente.* Pour avoir devant les yeux tous les inconvéniens auxquels

auxquels eſt ſujet le Cabeſtan ordinaire, & auxquels on doit trouver des remedes, il eſt bon de raporter ici les propres termes de la Propoſition. „L'Académie, dit-on, ayant eu avis „ par des Perſonnes habiles & expérimentées dans la Navigation, que dans les fréquentes manœuvres, où l'on ſe ſert du „ Cabeſtan, le cordage attaché au poids qu'on veut lever ou „ trainer, ſe dévide ſur l'eſſieu de cette machine, de maniere „ qu'à chaque tour ce cordage deſcend de toute ſa groſſeur, & „ qu'il arrive qu'après pluſieurs tours, il parvient au bout du „ Cabeſtan, & qu'il faut le rehauſſer [ou choquer], pour évi„ ter qu'il ne s'embarraſſe; que par là on ne ſauroit ſe ſervir „ du Cabeſtan, qu'on ne ſoit obligé de choquer pluſieurs fois, „ & qu'à chaque fois qu'on choque il faut arrêter le mouvement „ de la machine, prendre des boſſes [ou treſſes &c.] ſur le „ cordage, dévirer le Cabeſtan, pour mollir [ou lâcher] la „ partie du cordage qui eſt ſur l'eſſieu, relever le cordage, le „ roidir de nouveau, & enfin ôter les boſſes, pour remettre le „ Cabeſtan en état; que cette opération ſouvent repétée em„ porte beaucoup de tems, & dans pluſieurs rencontres un tems „ précieux, & qu'elle fait toûjours perdre une partie de l'effort „ déja fait: Conſiderant d'ailleurs la liaiſon de la manœuvre du „ Cabeſtan avec celle des ancres, qu'on ne jette ou qu'on ne „ lève que par ſon moyen, l'Académie a réſolu &c.

X.

Ainſi les inconvénients conſiſtent dans les articles ſuivans; 1°. le cordage ou le cable ſe devidant ſur l'eſſieu, ou l'arbre de cette machine, & parvenant, après pluſieurs tours, au bout du Cabeſtan, il doit être *rehauſſé* ou *choqué*, pour éviter qu'il ne s'embarraſſe. 2°. Il faut *choquer* pluſieurs fois, ſelon que le demande la longueur du cable. 3°. A chaque fois qu'on *choque*, il faut arrêter le mouvement de la machine. 4°. Il faut prendre des *boſſes* ou *treſſes*, ſur le cordage. 5°. Il faut dévirer le Cabeſtan, pour *mollir* ou *lâcher* la partie du cordage qui eſt ſur

l'arbre. 6°. Il faut *relever* le cordage. 7°. Le *roidir* de nouveau. 8°. Il faut enfin *ôter* les *boſſes*, pour remettre le Cabeſtan en état : enſorte qu'il y a en tout huit operations ; chacune deſquelles ne demandant qu'une minute de tems, il y auroit plus d'un demi-quart d'heure de perdu, pour toutes les huit opérations enſemble : or il faut repéter ces huit opérations chaque fois que les Conducteurs des leviers ſont obligés de diſcontinuer leur travail.

X I.

Le plus grand inconvénient, qui réſulte de ces inconvénients particuliers pris enſemble, c'eſt la perte du tems, & en certaines rencontres la perte d'un tems précieux, que cauſent toutes ces opérations ſouvent réïtérées ; outre qu'elles font perdre une partie de l'effort déja fait.

X I I.

Je remarque d'abord, que du premier des inconvénients mentionnés dépendent tous les autres, enſorte que ſi on trouvoit quelque remède, ou quelque moyen pour empêcher que le cable ne parvienne jamais au bout du Cabeſtan, on voit bien qu'on éviteroit en même tems tout le reſte des inconvéniens ; puiſqu'on ſeroit en état de faire tourner le Cabeſtan ſans diſcontinuer, quelque long que fut le cable.

X I I I.

Mais le moyen de prévenir la deſcente du cable ne paroit-il pas impoſſible ? D'autant plus qu'à chaque tour qu'il fait ſur l'arbre, il eſt obligé de deſcendre de toute ſa groſſeur en forme d'hélice autour du cylindre ; ſi bien que plus le cable a de groſſeur, plus vite il deſcendra juſqu'au bout du Cabeſtan ; & par conſéquent il faut plus ſouvent interrompre le virement du Cabeſtan, pour faire les opérations fâcheuſes qui emportent du tems ; ce qu'on voudroit éviter.

XIV.

XIV.

Suppoſons, par exemple, que par chaque dix pieds de la longueur du Vaiſſeau, on donne deux pouces & demi d'épaiſſeur au grand Cabeſtan par le haut, ſuivant la pratique ordinaire; enſorte que pour un Vaiſſeau long de 140 pieds, il faudroit que le diamétre de la tête du Cabeſtan, où le cable ſe doit rouler, fût à peu près de 3 pieds & la circonférence de $9\frac{1}{2}$ pieds. Donc à chaque tour il ſe dévide ſur ſon arbre une longueur de $9\frac{1}{2}$ pieds du cable. Or le Maître-cable des grands Vaiſſeaux a en longueur juſqu'à 120 braſſes, ou 720 pieds, ainſi diviſant 720 par $9\frac{1}{2}$, on trouve à fort peu près 76, c'eſt-à-dire, que ſi on vouloit devider ſans interruption toute la longueur de 720 pieds, il faudroit, que la partie cylindrique du Cabeſtan, ſur laquelle ſe dévide le cable, fût ſuffiſamment longue ou haute pour y admettre 76 tours. Par conſéquent cette hauteur devroit être pour le moins égale à l'épaiſſeur du cable priſe 76 fois. Mais un cable, médiocrement gros, peut avoir ſon épaiſſeur ou diamétre de 6 pouces, ou d'un demi pied. Ainſi prennant le demi pied 76 fois, on auroit 38 pieds pour la hauteur de la partie cylindrique du Cabeſtan autour de laquelle s'applique le cable. Si le diamétre du cable étoit de 10 pouces, cette hauteur ſe trouveroit devoir être de plus de 63 pieds; hauteur énorme & partant impoſſible à mettre en pratique.

XV.

Mais comme on ne donne ordinairement à la hauteur de la tête du grand Cabeſtan que $5\frac{1}{2}$ pieds; on trouveroit, en diviſant 38 par $5\frac{1}{2}$, environ 7, qui marqueroient le nombre de fois qu'il faudroit arrêter la machine, pour répéter à chaque fois toutes les opérations mentionnées dans le Programme. Or puiſque [art. 10] ces opérations conſument un demi quart d'heure & plus, en répétant cette perte 7 fois, on voit, qu'il y auroit bien une heure de tems employé, ſeulement aux in-

termiſſions du mouvement de la machine ; & cela pour un cable de 6 pouces de diamétre. En faiſant le même calcul pour un cable, dont l'épaiſſeur ou le diamétre eſt de 10 pouces, le reſultat montrera, que le Cabeſtan eſt obligé de demeurer dans l'inaction, près d'une heure & demie en tout.

XVI.

Il eſt aiſé de concevoir, que les durées totales de l'inaction augmentent en raiſon des diamétres croiſſants des cables, ſuppoſée leur longueur toujours la même. Et réciproquement, plus les diamétres des cables ſont petits, moins auſſi ſeront grandes les pertes du tems conſumé pendant l'inaction totale de la machine. En effet, il eſt évident, ſans que je le diſe, que ſi le cable étoit aſſés menu, pour que toute la longueur de 720 pieds pût être dévidée ſur la hauteur de $5\frac{1}{2}$ pieds de la tête du Cabeſtan, c'eſt-à-dire, que ſi le cable n'étoit quaſi que comme une ficelle de petite épaiſſeur, le mouvement du Cabeſtan pourroit être continué ſans intermiſſion, depuis le commencement du cable juſqu'à ſon bout par ou il eſt amarré à l'ancre, ou à quelque fardeau qu'on veut tirer ; parce que la hauteur de la tête du Cabeſtan ſeroit aſſés grande pour y dévider tant de tours du cable, qui étant étendus en long égaleroient toute ſa longueur.

XVII.

Mais ce ſeroit une fiction faite en l'air, de ſuppoſer des cordes ſi déliées ; puiſqu'il n'eſt pas dans nôtre pouvoir de procurer aux cables telles forces qu'on voudra, pour réſiſter à la rupture, à moins qu'on ne les faſſe d'une juſte groſſeur, que l'expérience ſeule a enſeignée, ſelon les différents uſages qui demandent plus ou moins de force de ténacité dans les cables. Je m'imagine que le moins gros de ceux que l'on employe pour le Cabeſtan, peut avoir deux ou trois pouces de diamétre : encore ceux-là ne ſeroient-ils que pour tirer des fardeaux d'une médio-

médiocre réſiſtance, où la rupture d'un tel cable n'eſt pas à craindre. Cependant un cable de 3 pouces d'épaiſſeur, ſuppoſant toujours ſa longueur de 720 pieds, exigeroit déja, ſuivant les art. 15 & 16 une bonne demi-heure, que dureroient les interruptions priſes enſemble, pour faire les opérations, à chaque fois que le Cabeſtan eſt dans l'inaction.

XVIII.

Par toutes ces conſidérations, je me ſuis mis à méditer, s'il n'y auroit pas quelque moyen de remédier aux inconvéniens marqués dans la Propoſition, en faiſant enſorte que les Hommes, qui conduiſent les leviers, n'ayent jamais beſoin de s'arrêter, juſqu'à ce que le cable ſoit entiérement attiré & ramené dans le Vaiſſeau, quelque long qu'il ſoit. C'eſt une entrepriſe, qui paroit d'abord impoſſible; j'ai néanmoins imaginé quelques expédients, qui ſeront ſûrement praticables, pourvû qu'on ne néglige rien dans l'exécution. Je n'expoſerai ici que celui de ces expédiens qui eſt le plus ſimple, & par conſéquent le plus facile à mettre en pratique; d'autant plus, que je me ſervirai du Cabeſtan fait à l'ordinaire, ſans y rien changer; ſinon qu'on y doit faire une petite préparation utile à mon deſſein, & que hors du Cabeſtan, à une diſtance convenable, on doit placer une piéce, ou une machine, que je nommerai le *Preſſoir*, qui tiendra ferme à une poutre, à une parois, ou à quelque autre partie ſolide & inébranlable du Vaiſſeau. Voici en quoi conſiſte cette invention.

XIX.

Deſcription de la maniere d'accommoder le Cabeſtan à pouvoir être tourné continuellement & ſans relache, juſqu'à l'entiére attraction du cable.

Comme les frottemens dans les machines ſont ce qu'il y a de plus nuiſible à l'uſage qu'on en veut faire, puiſque ſouvent

la plus grande partie de la force eſt conſumée à ſurmonter les frottements; on a cherché les moyens de les éviter, ou au moins de les diminuer, autant que la nature de la machine le permettoit. Ici je ferai le contraire; je tâcherai, pour obtenir mon deſſein de trouver un frottement, qui ſoit inſurmontable par la réſiſtance du fardeau que le cable doit tirer, trainer, ou élever. C'eſt ainſi qu'on tire un profit de ce qui eſt d'ailleurs un grand inconvénient: c'eſt convertir le mal en bien, le poiſon en remede.

X X.

Une corde étant vers ſon milieu roulée autour d'un cylindre, & tirée par deux puiſſances égales appliquées à ſes extrémités; ces puiſſances reſteront ſans doute en équilibre, n'y ayant aucune raiſon pourquoi l'une prévaudra plûtôt que l'autre. Mais l'expérience montre, que ſi l'une de ces deux puiſſances reçoit une petite augmentation, elle ne fera pas d'abord venir l'autre à elle, parce que cela ne ſe peut faire, ſans mouvoir la corde ſur le cylindre & vaincre ainſi le frottement: il faut donc, que cette augmentation de puiſſance ſoit aſſés grande pour ſurmonter le frottement. Or le frottement lui même prend des accroiſſements, à meſure que la corde fait plus de tours ſur le cylindre. C'eſt de-là que nous voyons la raiſon, pourquoi peu d'hommes ſuffiſent pour tenir le bout du cable qui ſe dévide de deſſus le Cabeſtan, pendant qu'une grande partie du cable, qui tire le fardeau de grande réſiſtance vient s'y entortiller.

X X I.

On ſait que, tout le reſte demeurant le même, la réſiſtance du frottement d'une corde roulée autour d'un cylindre, eſt proportionelle au nombre des tours: ainſi trois tours cauſeront un frottement dont la réſiſtance ſera triple de celle cauſée par le frottement d'un ſeul tour. Ceci doit être auſſi entendu des par-

parties d'un tour entier; en ſorte que ſi la corde embraſſe ſeulement, par exemple, la moitié, ou le tiers, ou le quart de la circonférence du cylindre; la réſiſtance, qu'oppoſe le frottement à la force qui tire la corde d'un côté plus que de l'autre, ſera auſſi la moitié, ou le tiers, ou le quart de la réſiſtance, qui réſulte du frottement que produiroit un tour entier de la corde ſur le cylindre.

XXII.

En donnant d'abord à la corde un tour, ou plus d'un tour, ou même ſeulement plus de la moitié d'un tour; on conçoit bien que les trois parties de la corde, ſavoir celle qui eſt pliée ſur le cylindre, & les deux autres qui ſont hors du cylindre & étendues en lignes droites, ces trois parties, dis-je, ne peuvent plus ſe trouver ſur un même plan; Car l'épaiſſeur de la corde fait que ſa partie pliée ſur le cylindre doit ſe détourner du plan perpendiculaire à l'axe, dès que cette partie devient plus grande que la demi-circonférence du cylindre; étant viſible, qu'en ce cas, les deux autres parties hors du cylindre, étendues en lignes droites, ſe rencontreront & ſe croiſeront; ce qui ne ſauroit ſe faire, ſans que ces deux portions de la corde ſortent du plan ſur lequel elles étoient, en s'écartant l'une de l'autre de toute l'épaiſſeur de la corde [voyés *Fig.* 1]. A plus forte raiſon la corde pliée ſur le cylindre doit s'écarter d'avantage du plan perpendiculaire à l'axe, quand on la roule pluſieurs fois autour du cylindre. C'eſt là préciſément en quoi conſiſte l'inconvénient, qui fait deſcendre le cable juſqu'au bout du Cabeſtan, & qui entraine après cela tant d'autres incommodités, cauſées par les différentes opérations, qui remettent le Cabeſtan dans l'inaction, autant de fois qu'on les repéte. TAB. LXXXII.

XXIII.

Mais ſi la corde n'embraſſe que la moitié de la circonférence du cylindre, ou une moindre partie que la moitié [voyés *Fig.* 2

& 3], il eſt clair que, dans ces deux cas, les deux portions de la corde ne ſe croiſeront jamais, quelques longues qu'elles ſoient. Ainſi rien n'empêche que la corde ne puiſſe demeurer conſtamment dans le plan du cercle horizontal, dont elle embraſſe un arc, égal ou plus petit que la demi-circonférence; pendant que le cylindre, tournant ſur ſon axe vertical, feroit avancer la partie poſtérieure de la corde, pour ſuppléer ſucceſſivement à la partie pliée ſur l'arc, à meſure qu'elle le quitteroit par devant, ou s'en détacheroit pour s'étendre en ligne droite avec la partie antérieure. De cette maniere, on conçoit aiſément que le cylindre peut tourner continûment, ou ſans interruption, & faire paſſer toute la corde d'une extrémité à l'autre par deſſus l'arc qu'elle embraſſe.

XXIV.

Il s'agit donc de trouver quelque moyen, qui faſſe enſorte, que quand le cercle tourne ſur ſon centre, il entraine avec lui la corde; afin que toujours une nouvelle portion de la tangente ſoit obligée de ſe plier & de s'appliquer ſur un arc égal, & cela nonobſtant la grande réſiſtance d'un fardeau, qui ſeroit attaché à l'extrémité poſtérieure de la corde, quand même cette réſiſtance ſeroit égale à celle d'un poids à lever de 1000, ou de 2000 livres, ou plus grand. Or c'eſt là la grande difficulté, de rendre la preſſion de la corde, pliée ſur l'arc qu'elle embraſſe, aſſés forte, pour que la circonférence du cercle ne puiſſe couler ou gliſſer de deſſous la corde, & laiſſer ainſi le fardeau en arriére, ſans l'avancer la moindre choſe.

XXV.

Vouloir ici imaginer quelque ciment, colle, ou glu, dont on enduiroit toute la corde, afin que chacune de ſes parties, pliée ſucceſſivement ſur l'arc qui lui répond, lui adhère par ſa ténacité, ſi fermement qu'elle ne puiſſe quitter dans ſes points ceux de l'arc qu'elle touche, pendant le tems que chaque point de

de la corde eſt à parcourir l'arc de la courbure; vouloir, dis-je, imaginer un tel moyen, ce ſeroit trop donner dans le chimérique: on en voit bien la raiſon; ainſi je n'y fais point de réflexion. Mais j'ai d'abord penſé, que l'on réuſſiroit peut-être mieux pour la pratique, en faiſant faire une roue aſſés épaiſſe, mobile autour de ſon centre: on feroit, ſur l'épaiſſeur de la circonférence de cette roue, une entaille tout autour, en forme de canelure ou de ſillon, aſſés large & profonde pour y recevoir ou contenir la corde, juſqu'à environ la moitié de ſa groſſeur, ou un peu plus. On garniroit toute la cavité de ce ſillon de pointes de fer, bien courtes, mais très fortes, toutes perpendiculaires à la circonférence; enſuite on feroit embraſſer à la corde un arc, non plus grand que la demi-circonférence de ce ſillon hériſſé de pointes; on tiendroit le bout antérieur un peu ferme, quand on commenceroit à tourner la roue.

XXVI.

Il eſt aiſé de concevoir, que dès que la corde attachée à quelque corps qu'on veut attirer, ſe bande par l'oppoſition de la réſiſtance, ſa partie courbée, & appliquée ſur l'arc circulaire du ſillon, commence à preſſer cet arc; & la preſſion ſera d'autant plus grande, que le corps à mouvoir fait plus de réſiſtance, ou que la corde eſt plus fortement tendue. De-là il arrive, que les pointes de fer du ſillon, ſur leſquelles eſt preſſée la partie pliée de la corde, s'enfoncent dans les petits interſtices de la corde; ce qui fait que, pendant la circulation du ſillon, chaque pointe enfoncée aide à tranſporter la corde de la partie poſtérieure vers l'antérieure; & comme par le mouvement circulaire de la roue, il y aura toujours de nouvelles pointes, qui ſe préſentent ſucceſſivement à s'inſinuer dans la corde qui va être preſſée ſur le ſillon, pendant que du côté antérieur tout autant de pointes ſe dégageant permettent à la corde de reprendre ſa ſituation rectiligne, que la force d'un homme, qui la recueilleroit en tirant, affecteroit de lui donner; il eſt clair, que de cette maniere, la rotation de la roue autour de ſon axe immo-

bile, pourroit être perpétuée ſans aucune interruption, & attirer cependant un corps attaché à l'extrémité d'une corde, qui auroit telle longueur que l'on voudroit.

XXVII.

J'ai dit que la preſſion de la corde pliée ſur un arc donné augmente avec l'augmentation de la réſiſtance. Il faut ſavoir, que cette augmentation ſe fait de part & d'autre en même proportion. Car c'eſt une vérité déja démontrée par pluſieurs Perſonnes, que la réſiſtance R eſt à la preſſion P comme le rayon de la roue r eſt à la longeur a de l'arc que la corde embraſſe, c'eſt-à-dire, que $P = \frac{aR}{r}$. D'où l'on voit, que la preſſion deviendra plus grande que la réſiſtance, pourvû qu'on prenne un arc plus long que ſon rayon: ainſi un quart de la circonférence que la corde embraſſeroit, ſeroit plus que ſuffiſant, pour faire que la force de la preſſion ſurmontât celle de la réſiſtance. Je fais cette remarque, ſeulement pour faire ſentir qu'on pourroit fortifier l'engrainement des pointes de fer dans les interſtices des fibres de la corde, juſqu'à tel dégré, que la réſiſtance ne ſeroit peut-être pas capable de rompre les ténacités jointes enſemble de toutes les fibres embrochées par les pointes.

XXVIII.

C'eſt ſur une pareille idée, que feu M. HUGUENS, dans la conſtruction de la premiére Horloge à Pendule de ſon invention, employa une telle roulette en forme de poulie, dont la cavité d'alentour étoit garnie de pointes, deſtinée à porter la corde chargée par un bout d'un poids de 6 livres; lequel poids, ayant un effort continuel pour deſcendre, ne deſcend pas en faiſant gliſſer ou couler précipitamment la corde par deſſus la roulette, comme il le feroit ſans les pointes qui s'engrainent dans la corde; ſi bien que le poids, & avec lui la

la corde, ne descend qu'en faisant tourner la roulette, qui ménant avec elle la grande roue dentée sur un axe commun, communique le mouvement à tout le rouage de l'Horloge, jusqu'au balancier réglé par les oscillations du Pendule; ce qui rend la descente du poids fort lente, les pointes enfoncées dans la corde empêchant le poids de se précipiter. Voyés son *Horologium oscillatorium* premiere édit. p. 4. Fig. 1. où la roulette garnie de pointes, est représentée en profil, & marquée par les lettres D D.

XXIX.

On a depuis abandonné cette maniere de former la roulette avec des pointes, & on y a substitué une autre piéce circulaire, qui fait un effêt équivalent: c'est une platine composée de deux plaques rondes, jointes ensemble centralement, & qui laissent autour de la circonférence un interstice entr'elles, pour recevoir la corde selon son épaisseur. Cet interstice va en se retréciſſant vers le centre, afin que quand la corde y est une fois admise dedans, elle soit serrée & pincée d'avantage par les flancs des deux plaques, lorsque le poids tire la corde. On voit bien, que plus le poids est pesant, & mieux la corde s'engagera dans l'interstice, & en sera comprimée; ce qui sert à empêcher qu'elle ne glisse par dessus la demi-circonférence supérieure. Mais pour mieux empêcher le glissement, les Ouvriers ont soin de rendre raboteux les deux flancs de la fente ou de l'interstice, par des incisions faites en sautoir, qui élévent de petites éminences tournées obliquement & à contresens de la tension de la corde; a peu près, comme on rend raboteuses les surfaces des limes. Il n'est pas difficile de comprendre la raison, pourquoi on a préferé cette façon de roulette à celle de M. HUGUENS: C'a été, sans doute, pour mieux ménager la corde, laquelle, suivant la structure de la roulette à la HUGUENS, ne peut que souffrir beaucoup à chaque fois qu'on remonte l'Horloge: car il est clair, que c'est alors que la corde reçoit brusquement quantité de piquures de

la part des pointes qui s'y enfoncent, & que bruſquement auſſi les pointes s'en retirent; par où il arrive néceſſairement, que pluſieurs des fibres de la corde ſe déchirent, ne pouvant pas ſe prêter ſubitement à ces actions violentes des pointes. Ainſi la corde s'uſera bien vite; au lieu qu'elle doit ſe conſerver beaucoup plus longtems, la roulette qui porte la corde étant fabriquée à la maniere d'aujourdhui.

XXX.

Cependant je me ſuis d'abord imaginé, que de l'idée de Mr. HUGUENS on pourroit tirer plus d'utilité pour nôtre ſujet en queſtion: Voici comment. Autour du cylindre, ou de l'arbre du Cabeſtan, vertical comme il eſt, on entaillera une cavité, un ſillon, dont le plan ſoit parfaitement horizontal; par conſéquent perpendiculaire à l'axe du cylindre: la profondeur & la largeur du ſillon répondront à la groſſeur du cable, dont on veut ſe ſervir; c'eſt pourquoi ſi on veut en différentes occaſions ſe ſervir de cables de différente groſſeur, on pourra faire différens ſillons tous parallèles les uns aux autres, pour en choiſir celui qui convient au cable dont on veut faire uſage. On revêtira la ſurface de chacune de ſes cavités d'une lame épaiſſe de fer, courbée en telle façon, qu'elle s'ajuſte exactement à la figure concave du ſillon, & qu'elle ſoit garnie de pointes, un peu longues & ſerrées les unes auprès des autres; enſorte que le ſillon en paroiſſe hériſſé en toute ſa circonférence.

XXXI.

Le Cabeſtan étant préparé ainſi, on conçoit que ſi on applique ſur le ſillon une partie du cable priſe vers le bout antérieur, laquelle embraſſe un arc moindre que la demi-circonférence, ou tout au plus égal à la demi-circonférence; on conçoit, dis-je, que dès qu'on fait tourner le Cabeſtan, moyennant les leviers, pendant que quelques hommes tiennent un peu

peu ferme le bout antérieur ; le cable amarré au fardeau ne ſera pas plûtôt bandé par ſa réſiſtance, que la preſſion fera entrer les pointes dans la partie du cable pliée ſur cet arc, leſquelles par conſéquent entrainent le cable & font ſuivre le fardeau : ce mouvement pourra durer ſans diſcontinuer, juſqu'à ce que le fardeau ſoit entiérement attiré ; pourvû que, pendant cette manœuvre, les hommes, qui doivent recevoir le cable à meſure qu'il ſe remet en ligne droite après avoir paſſé par les pointes, ayent ſoin de lui aider à s'en dégager, en le tirant un peu ; quoique le changement de direction des pointes, cauſé par le tournoyement du Cabeſtan, faſſe que les pointes ſe retirent d'elles-mêmes, ſi elles ne ſont pas trop longues, comme on le voit dans les cordes des Horloges décrites par Mr. HUGUENS, où elles s'engrainent & déſengrainent d'elles mêmes, à chaque fois qu'elles font le demi-tour ſupérieur de leur roulette.

XXXII.

Cette maniére de ſe ſervir du Cabeſtan ſeroit exemte de tous les inconvéniens expoſés dans le Programme ; ſi elle n'étoit pas accompagnée d'un autre inconvénient, dont on ne fait pas mention. C'eſt qu'il ſeroit à craindre que la ſtructure du cable ne ſe corrompit trop vite, en paſſant ſi ſouvent, & avec tant de force, par les pointes ; à peu près comme il arrive au lin qu'on fait paſſer par le Seran, dont l'uſage eſt de diviſer les fibres du lin en pluſieurs filamens ſubtils. Je crois cependant que, vû la différence de l'action du ſillon hériſſé de pointes, qui ne feroient qu'entrainer le cable, & celle des pointes d'un Seran, qui doit fendre par force les fibres, le cable ne laiſſeroit pas de durer & de faire d'aſſés longs ſervices, pourvû que les ficelles, dont il eſt cablé, fuſſent bien tortillées. Outre qu'une longue durée du cable n'eſt pas ce qui devroit le plus être tiré en conſidération ; ſi d'ailleurs il faiſoit l'office ſouhaitté d'éviter les inconvénients marqués, ſur-tout pour les Vaiſſeaux qui appartiennent à un grand Prince, ou à un riche & puiſſant

puiſſant Etat, où on ne regarde pas de ſi près à l'épargne des agrais.

XXXIII.

Quoiqu'il en ſoit, ſi on ne juge pas cette maniere aſſés commode pour être miſe en pratique, à cauſe de la facilité avec laquelle le cable ſe rongeroit & ſeroit mis hors d'uſage; je veux qu'on omette les pointes, & qu'au lieu d'elles on rende la lame de fer, qui recouvre le ſillon, fort raboteuſe en forme de lime, comme je l'ai inſinué ci-deſſus (§. 29.). Il eſt bien évident, que ſi l'âpreté ſeule que rencontre le cable plié & appliqué ſur un arc du ſillon, étoit ſuffiſante pour entrainer le cable chargé d'un fardeau, on auroit l'effet qu'on deſireroit, & le cable ſeroit beaucoup moins ſujet à s'uſer que par la maniere précédente du ſillon garni de pointes. Il faut donc examiner ſi de ce côté là on peut eſpérer un bon ſuccès. On ſait que deux ſurfaces raboteuſes de deux corps, étant appliquées & preſſées l'une ſur l'autre, il faut une certaine force, dans la direction de la ſurface commune où les corps ſe touchent, pour faire mouvoir l'un, qui ſeroit mobile, ſur l'autre, qui ſeroit ſuppoſé immobile: c'eſt le frottement qui cauſe cette difficulté, en réſiſtant au mouvement. On ſait de plus, par les raiſonnemens & les expériences de M. AMONTONS, que la force, requiſe pour ſurmonter le frottement, eſt proportionnelle à la preſſion avec laquelle le corps mobile eſt preſſé contre l'immobile: enſorte, qu'en augmentant aſſés la preſſion, on pourra augmenter le frottement, à tel dégré qu'on voudra; ſuppoſé que tout le reſte demeure le même.

XXXIV.

Or pour appliquer cette Théorie à nôtre ſujet; voyons juſqu'où ira la preſſion que ſouffrira le cable, lorſqu'il embraſſe le plus grand arc du ſillon qu'il peut embraſſer, pour que tout le cable demeure toujours dans un même plan; c'eſt-à-dire, lorſqu'il embraſſe la demi-circonférence du ſillon. Nous avons vû

(§. 27.)

(§. 27.) que la preſſion étant nommée P, la réſiſtance du fardeau à tirer R, la longueur de l'arc du ſillon embraſſé par le cable a, le rayon de la circonférence r; on aura $P = \frac{aR}{r}$. Suppoſé donc que a ſignifie la demi-circonférence, qui eſt au rayon r, ſelon la proportion d'ARCHIMEDE, comme 22 à 7, il en viendra $P = \frac{22}{7} R$: ce qui fait voir que la preſſion de la portion du cable courbée ſur la moitié du ſillon, ſeroit $3\frac{1}{7}$ fois plus grande que la réſiſtance du fardeau qui bande le cable. Donnons, par exemple, à cette réſiſtance une force équivalente à un poids de 2100 livres, comme ſi c'étoit une ancre à tirer du fond de la mer, peſant vingt-un quintaux, ou plus, parce qu'elle perd dans l'eau une partie de ſa peſanteur; nous aurons $\frac{22}{7} R = \frac{22.2100}{7}$ liv. $= 6600$ livres. Ainſi la preſſion du cable, exercée ſur la demi-circonférence, ſeroit équivalente à un poids de 66 quintaux. Cela veut dire, que ſi la portion du cable, qui embraſſe la demi-circonférence, venoit à être étendue en ligne droite horizontale ſur un ſillon pareillement horizontal, & que ce morceau du cable fût chargé d'un poids de 66 quintaux, il en réſulteroit un frottement, pour ſurmonter lequel, il faudroit préciſément la même force, qu'il faudroit à l'ancre, pour reſiſter & pour n'être pas entrainée par le mouvement circulaire du Cabeſtan.

XXXV.

Ce calcul ſuppoſe, que la preſſion du cable ſur le ſillon eſt uniforme dans toute la longueur de l'arc embraſſé par le cable; cependant il eſt clair, qu'elle eſt plus grande du côté du fardeau; qu'elle va enſuite en diminuant juſques à la fin de la courbure, où le cable commence à quitter le ſillon pour reprendre la direction rectiligne; c'eſt là où ſont les Hommes, qui tiennent en tirant le garant, ou le bout du cable qui ſe dévide de deſſus le Cabeſtan. Or ces Hommes n'employent pour tirer qu'une force fort médiocre, par exemple, une force de 300 livres.

vres. Ainſi en appliquant nôtre règle $P = \frac{2}{7}R$, où R ſignifie préſentement la tenſion du cable, ou la force de 300 livres ; on trouvera $\frac{22}{7}R = \frac{22.300}{7} = 943$ livres, pour la plus petite preſſion, ſi elle étoit uniforme par toute la longueur de l'arc embraſſé par le cable ; prenons donc la moyenne arithmétique entre la plus grande preſſion 6600℔ & la plus petite 943℔, nous aurons 3771℔, ou à peu près 38 quintaux. C'eſt le poids eſtimé raiſonnablement, dont on doit ſuppoſer chargée la portion du cable qui embraſſe la demi-circonférence du ſillon, comme étendue en ligne droite horizontale, & couchée ſur un pareil ſillon horizontal, pour que cette charge produiſe à peu près la même force de frottement, que produiroit la preſſion cauſée par la réſiſtance du fardeau ſur le demi-circuit du ſillon.

XXXVI.

C'eſt pourquoi, il eſt à ſavoir, ſi la charge, ou la preſſion de 38 quintaux ſeroit ſuffiſante, pour faire enſorte qu'une force de 21 quintaux de réſiſtance du fardeau, moins celle de 3 quintaux, qu'employent les Hommes qui tiennent en tirant le garant en ſens contraire ; c'eſt-à-dire, qu'une force de 18 quintaux ne puiſſe pas ſurmonter la force du frottement ; car ſi elle la ſurmontoit, on auroit beau virer le Cabeſtan, ſon ſillon ne feroit que couler ſous le cable & laiſſeroit le fardeau en arrière ſans l'entrainer. On penſera, ſans doute, qu'on peut augmenter la *ſcabroſité* du ſillon ou le rendre plus raboteux ; puiſque le ſuccès dépend entièrement de cette circonſtance ; juſqu'à ce qu'il le ſoit aſſés pour rendre le frottement inſurmontable par la réſiſtance du fardeau. Mais ne retomberions-nous pas dans cet autre inconvénient, que nous voudrions éviter auſſi ; qui eſt que par une trop grande âpreté du ſillon, il ſeroit à craindre, que le cable ne fut pas de longue durée ; parce qu'il ſeroit rongé trop vite en paſſant ſouvent ſur un ſillon ſi rude, comme nous l'avons remarqué par rapport au ſillon garni de pointes.

XXXVII.

XXXVII.

Pour prévenir donc la promte corruption du cable, je vois bien qu'il eſt abſolument néceſſaire de ne pas rendre le ſillon trop mordant, en le rendant extrêmement raboteux & très rude: mais d'un autre côté, je vois auſſi que, s'il n'eſt que médiocrement rude, il pourra arriver que la ſimple preſſion $\frac{aR}{r}$, qui réſulte par la ſeule courbure du cable, ne ſoit pas aſſez forte pour cauſer ſur le ſillon un frottement, ou plûtôt une diſpoſition au frottement, inſurmontable par la réſiſtance du fardeau; car autrement le Cabeſtan mis en mouvement feroit gliſſer le ſillon ſous le cable, ſans l'entrainer, ſans avancer le fardeau.

XXXVIII.

Le remède à cela ſeroit, ſans doute, de faire enſorte que, quelque douce que ſoit l'âpreté du ſillon, il fut pourtant rendu diſpoſé à un frottement aſſés conſidérable, pour n'être pas ſurmonté par la réſiſtance du fardeau. On obtiendra ce remède en augmentant ſuffiſamment la preſſion $\frac{aR}{r}$ [produite naturellement par la courbure du cable] d'une autre preſſion extérieurement appliquée par quelque artifice. Car M. AMONTONS ayant démontré que la force du frottement eſt proportionnelle à la grandeur de la preſſion; il eſt inconteſtable que la moindre *ſcabroſité* des ſurfaces de deux corps qui ſe touchent, eſt capable de produire une diſpoſition au frottement, qui réſiſtera à une très grande force; pourvû que la preſſion de l'un des corps contre l'autre ſoit auſſi grande qu'il le faut. Mais le moyen d'inventer & d'exécuter une nouvelle preſſion paroit difficile, pour ne pas dire impoſſible; d'autant plus qu'il faudra employer hors du cable quelque corps, quelque machine, qui preſſe fortement l'arc extérieur du cable courbé. Cette machine doit demeurer toujours immobile au même endroit,

par rapport au Vaiſſeau, pendant que le Cabeſtan tourne : ainſi, ſi le cable doit être entrainé, à méſure que le ſillon circule, il eſt viſible que la machine elle même demeurant immobile, cauſera un grand frottement contre le cable ; mais un frottement en ſens çontraire à celui que l'on veut procurer ſur le ſillon dans la concavité du cable. La force de ce frottement extérieur contraire, provenant de la machine, détruiroit donc une partie de l'effet que devroit produire l'effort augmenté du frottement intérieur du ſillon : On perdroit d'un côté, ce qu'on auroit gagné de l'autre.

XXXIX.

Le ſeul moyen, qui reſte, d'éviter cette incommodité, ſera d'inventer quelque artifice, avec lequel on conſtruira cette machine, que je nommerai *Preſſoir*, qui ne fera que preſſer le cable par dehors, avec tant d'effort que l'on voudra, ſans aucun frottement ſenſible, pendant que le cable coule ſous le Preſſoir, avec le ſillon qui circule. Et c'eſt ce que je me flatte d'avoir trouvé ; il ne tient qu'à le mettre en exécution : étant fort ſimple, il plaira par ſa ſimplicité. Voici en quoi il conſiſte.

XL.

TAB. LXXXII. Soit [*Fig. IV.* *] ABC l'arc extérieur du cable plié, & couché juſqu'à la moitié de ſon épaiſſeur dans le creux du ſillon. On fera faire trois ou pluſieurs roulettes bien ſolides, dont les eſſieux D, E, F ſoient ſur un arc DEF concentrique à l'arc ABC, & enchaſſés dans leurs chappes DG, EH, FI, qui tiennent ferme & fixe à une piece de fer LM ſolidement fabriquée

* La planche qui porte les Figures IV & V, doit être conſiderée comme ſur un plan horizontal, parce que le cercle ABCKYZ repréſente la ſection horizontale & perpendiculaire à l'arbre du Cabeſtan vertical. On a donné à cette ſection une épaiſſeur, pour y repréſenter le ſillon, qui doit admettre dans ſon creux la moitié de la groſſeur du cable.

quée en arc pareillement concentrique avec ABC. On aura la machine appellée le *Preſſoir*, qui venant à être preſſée, avec un effort, autour de l'arc LM, vers le centre, enſorte que l'arc extérieur du cable ABC reçoive cette preſſion, qui ſera communiquée & tranſmiſe juſques ſur le ſillon; il eſt évident, que quand le cable ſe meut avec le ſillon, qui tourne de A en B, de B en C, il fera tourner auſſi les roulettes autour de leurs eſſieux, en ſens contraire, ſuivant l'ordre des nombres 1, 2, 3, 4. De cette maniere, les roulettes preſſeront le cable ſans aucun frottement; nonobſtant que le corps du Preſſoir demeure toujours au même endroit, & que le cable preſſé aille ſon chemin, ſuivant l'ordre des lettres A, B, C, entrainé, comme il eſt, par le mouvement circulaire du Cabeſtan, que je ſuppoſe ſe faire en ce même ſens de A en B, de B en C, &c. Ainſi, voilà augmentée la preſſion du cable ſur le ſillon, autant qu'il ſuffira, pour rendre le frottement de l'un contre l'autre inſurmontable par la réſiſtance du fardeau, quelque grande que ſoit celle-ci. Car puiſque les accroiſſemens du frottement ſont proportionés à ceux des forces avec leſquelles les corps s'entrefrottans ſont preſſés l'un ſur l'autre; on conçoit aiſément que le frottement, que nous ſouhaittons avoir, peut-être augmenté à l'infini; ſuppoſé que la matiere, ſur laquelle s'applique la preſſion, ſoit aſſés ſolide pour n'être pas ſujette à la rupture.

XLI.

Mais voyons de quelle maniére on peut obtenir & effectuer une telle preſſion appliquée par déhors ſur la piece LM, que j'appelle le *joug* du preſſoir. Je m'imagine, que le plus commode ſeroit d'employer pour cela des vis, un cric, ou une autre machine de cette nature, qui moyennant une force motrice médiocre, qui la fait agir, peut produire une preſſion énorme. Prenons, par exemple, que ce ſoit un cric, fait à l'ordinaire, NP (*Fig. V.*), dont la baſe VP de l'étui;

qui renferme la tige dentée, ſoit appuyée & attachée fortement à une poutre, à une parois, ou à une autre partie ſolide & inébranlable du Vaiſſeau. La tête de la tige T ſoit étendue en arc *lm*, dont la cavité puiſſe être appliquée ſur la convexité du joug LM, lorſqu'on fait ſortir la tige en tournant la manivelle X, juſqu'à ce que *lm* vienne ſe joindre ſur LM. Il vaudra peut-être mieux, que d'abord tout le preſſoir tienne ferme à la tête de la tige, en faiſant ſouder l'arc *lm* ſur le joug LM, de ſorte que la tige du cric & le joug ne ſoit que d'une ſeule piece; à laquelle ſi on pratique enſuite les roulettes de la maniére ſuſdite, on aura toute la machine prête à ſervir dans le béſoin.

XLII.

Car ſuppoſé, que le cric ſoit bien appuyé & affermi à ſon lieu fixe & ſolide, où il pourra demeurer pour toûjours; quand on veut le mettre en uſage, il n'y a qu'à faire ſortir la tige de ſon étui, moyennant la manivelle, juſqu'à ce que les roulettes viennent à toucher la convexité du cable plié ſur le ſillon. Enſuite on continuera de tourner la manivelle avec force, plus ou moins, juſqu'à ce qu'il en reſulte une preſſion ſuffiſante ſur le cable, & de celui-ci ſur le ſillon raboteux, qui produiſe entr'eux une diſpoſition à un frottement ſi grand, qu'il devienne invincible par la réſiſtance du fardeau. Le preſſoir parvenu à ce dégré de preſſion, on arrêtera la manivelle en la liant ſur l'étui, pour l'empêcher de rebrouſſer, & les Hommes deſtinés à conduire les leviers, commenceront à faire virer le Cabeſtan. Que ſi on s'aperçoit que le cable ne ſe tient pas comme collé ſur le ſillon, depuis A juſqu'en C, pendant que le Cabeſtan tourne en ce ſens; mais qu'il reſte en arriére, ou qu'il ne ſuit pas le mouvement du Cabeſtan avec la même viteſſe; ce ſera une marque que la preſſion n'eſt pas encore aſſés forte, ou qu'elle s'eſt relâchée de ſon intenſité: c'eſt à quoi on remédiera ſur le champ, en avançant un peu la manivelle; car il ne faudra que très peu pour ſerrer beaucoup d'avantage le cable, entre

les

les roulettes & le sillon. Et de ce serrement augmenté dépend l'augmentation néceſſaire de la preſſion, pour procurer au cable la diſpoſition requiſe au frottement, afin de le rendre inſurmontable par l'éffort oppoſé du fardeau. C'eſt dans cette conſidération, que je l'appelle *diſpoſition au frottement*, plûtôt que *frottement* lui même; puiſqu'en effet le frottement ne doit pas ſe faire actuellement: ſans cela, on n'obtiendroit pas le but que nous ſouhaittons; le fardeau reſteroit en arriére, & le Cabeſtan tourneroit en gliſſant ſous le cable ſans l'attirer.

XLIII.

Suivant cette Théorie l'arc ABC, que l'on veut que le cable embraſſe, pourroit être, à ce qu'il ſemble, une auſſi petite portion que l'on voudra, de toute la circonférence du ſillon; en rendant par récompenſe la preſſion extérieure d'autant plus grande que l'arc ABC eſt pris plus petit. Mais dans la pratique, on rencontre ordinairement des circonſtances, qui exigent des limites à ce que la théorie paroit permettre généralement & dans toute ſon étendue. Ainſi, ici, on pourroit prendre l'arc ABC ſi petit, qu'on ſeroit neceſſité d'employer une preſſion ſi violente, ſi énorme, qu'on ne trouveroit nulle matiere, ni pour le Cabeſtan, ni pour le Preſſoir, ni pour le cric aſſés ferme, ou aſſés ſolide, pour ſoutenir cette grande preſſion, ſans ſe rompre ou ſans ſe deranger. C'eſt donc l'expérience, qui doit aprendre les juſtes bornes. Ce ſont les habiles Ouvriers, qui mettront en exécution ce que l'expérience leur aura enſeigné de plus convenable. Je me contente d'en avoir donné l'idée générale.

XLIV.

Avant que de finir ce petit Diſcours, il eſt bon de répondre à une difficulté qu'on pourroit faire; mais qui n'eſt qu'apparente. C'eſt qu'on penſera peut-être, que cette nouvelle

preſſion

preſſion extérieure provenant de la force du cric, que l'on ajoute à celle qui ſe fait naturellement par le cable, quand il eſt plié ſur l'arc du ſillon, augmentera de beaucoup la peine & le travail de ceux qui conduiſent les leviers. Mais ſi on fait attention au point où ces preſſions tendent, on verra que la difficulté ceſſera dans le moment. Car il eſt viſible, que l'une & l'autre de ces preſſions donnent dans tous les points de l'arc ABC du ſillon, perpendiculairement à la circonférence; & partant, que par toute l'étendue de l'arc ABC elles ſont dirigées vers le centre du mouvement circulaire: elles ne reſiſteront donc en rien à l'action des leviers, ſi ce n'eſt en-tant, que le pivot d'en bas & la cheville d'en haut du Cabeſtan en ſouffrent quelque frottement de plus contre la circonférence des trous dans leſquels ils tournent: mais il en influe ſi peu contre la force avec laquelle on conduit les leviers, qu'il ne mérite point de conſidération; ſur-tout ſi les leviers ont une juſte longueur, & que la cheville, auſſi bien que le pivot & la crapaudine ſoient de fer ou de cuivre bien poli & huilé: outre qu'on a aujourd'hui différens moyens, comme on ſait, de diminuer ces petits frottemens. En tout cas, un ou deux Hommes de plus, qu'on appliquera aux leviers, ſeront plus que ſuffiſants pour reparer la perte de force, s'il y en avoit.

XLV.

Une autre difficulté plus eſſentielle, ſeroit la crainte qu'on pourroit avoir, que toute la grande preſſion du cric, venant d'un ſeul côté, & réunie toute entiére ſur le pivot & la cheville, ces deux parties ne fuſſent jamais aſſés ſolides, pour pouvoir ſoutenir un effort ſi énorme, ſans être expoſées au danger de rompre. Cependant je crois qu'on trouvera le moyen de leur procurer toute la ſolidité requiſe. Quoiqu'il en ſoit, on pourra prévenir ce danger, en faiſant faire un autre Preſſoir, muni de ſon cric, ſemblable en tout au premier, & en appliquant ce ſecond Preſſoir ſur les bords du ſillon KYZ, vis à vis &

à

à l'oppoſite du premier Preſſoir ; enſorte que ces deux Preſſoirs antagoniſtes s'oppoſent mutuellement à leurs efforts, pendant que le premier ne laiſſe pas de preſſer le cable de toute ſa force ; il eſt évident que le pivot & la cheville n'en ſouffriront aucune atteinte, & n'auront par conſéquent beſoin d'autre ſolidité, que de celle qui eſt requiſe pour l'uſage ordinaire du Cabeſtan.

XLVI.

Enfin, ce que j'ai dit ſur le frottement du pivot & de la cheville du Cabeſtan, doit être auſſi entendu de celui que ſouffrent les eſſieux, ou goujons des roulettes D, E, F ; puiſqu'il eſt clair, que ces eſſieux ſont preſſés vers le joug LM par l'action du cric, avec autant de force qu'elle preſſe le cable vers le centre du ſillon, la preſſion & la contrepreſſion étant toujours égales, comme le ſont l'action & la réaction, ſuivant le principe général de la méchanique. Il en eſt de même des eſſieux des roulettes du Preſſoir antagoniſte, ſi on trouve à propos d'y en mettre un. C'eſt pour cela, que je n'en dis plus rien, non plus que de cette partie de la force qui eſt employée à plier à tout moment le cable, à meſure qu'il s'en préſente une nouvelle portion prête à ſubir le Preſſoir ; la partie de force employée à cela eſt ſans doute employée en pure perte, par rapport au fardeau à tirer. Or c'eſt un mal général & néceſſaire, auquel eſt ſujet l'uſage du Cabeſtan fait à l'ordinaire, auſſi bien que le nôtre. Ce n'eſt pas à ce mal qu'on demande du remède : il faudroit trouver l'art de faire des cables parfaitement flexibles ; mais on ne trouvera jamais cet art.

F I N.

N°. CLXXIII.

SOLUTIO
PROBLEMATIS CATENARII GENERALITER CONCEPTI,

Per Methodum HERMANNI † *ab errore repurgatam.*

PROBLEMA PRÆLIMINARE LEMMATICUM.

TAB. LXXXIII. N°. CLXXIII. *Fig.* 1.

Tres potentiæ in A, C, H *ſuſtinent punctum* B *in æquilibrio, agentes ſecundum directiones* BA, BC, BH *poſitione datas: datur potentia in* H; *quæruntur potentiæ in* A & C, *& earum differentia; ſeu, quod tantundem eſt, quæruntur tenſiones filorum, earumque differentiæ?*

SOLUTIO.

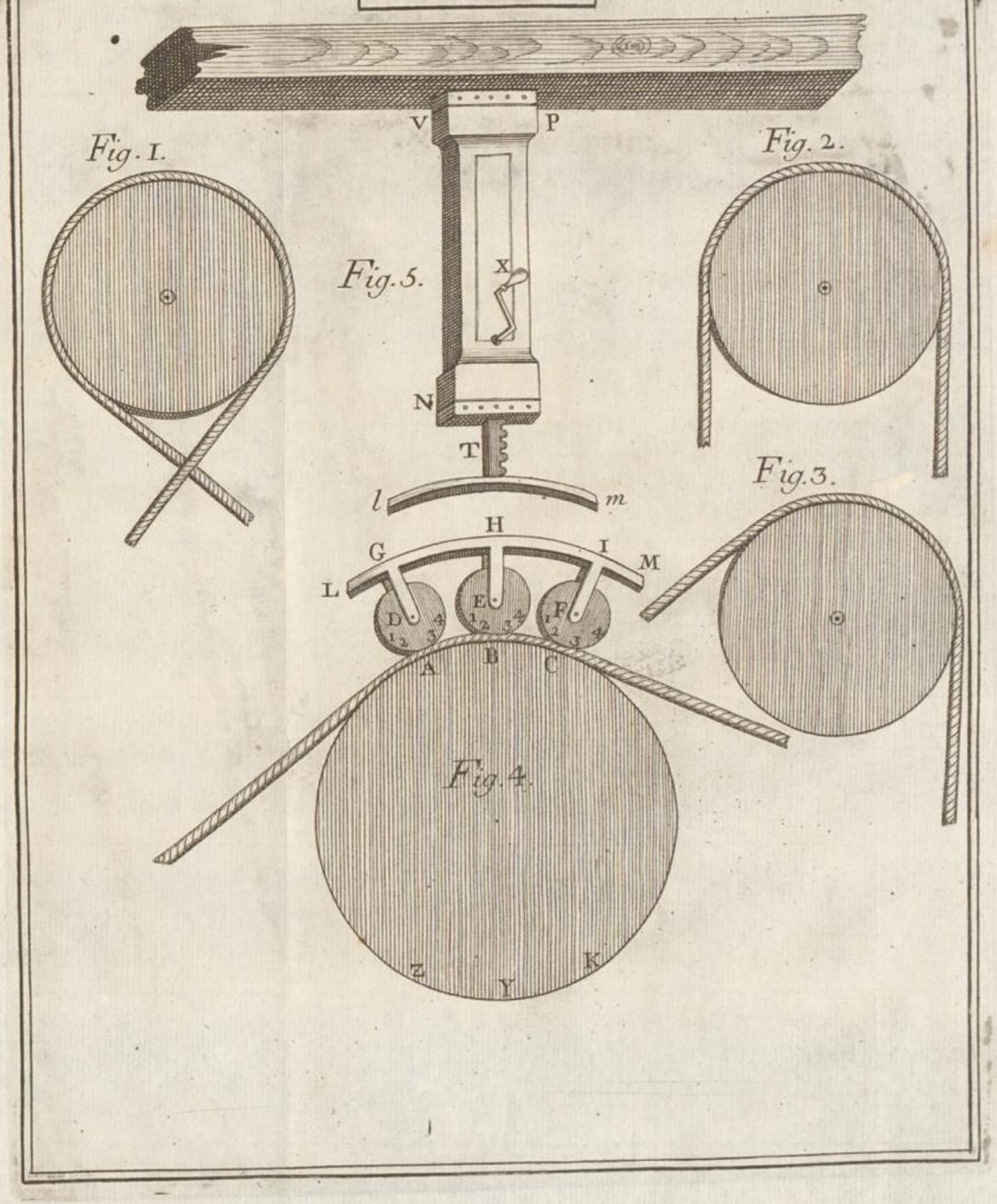
Producantur CB & HB, & aſſumtis BA & BD æqualibus, agantur AG & DF perpendiculares in HG, ut & AE perpendicularis in DF. Sit potentia in H $= f$, tenſio fili BC $= t$, tenſio fili BA $= T$. Ex Mechanicis patet $f : t =$ ſinus anguli ABD [qui ſit $= c$]: $\frac{AG}{AB}$. Hinc $t = \frac{f.AG}{c.AB}$. Item $f : T = c : \frac{DF}{AB}$, unde $T = \frac{f.DF}{c.AB}$; adeoque $T - t = \frac{f.(DF - AG)}{c.AB} = \frac{f.DE}{c.AB}$. *Q. E. I.*

COROLLARIUM.

Si angulus ABD infinite parvus, ita ut arcus AD, centro B deſcriptus, pro recta perpendiculari ad BA & BD haberi poſ-

† *Phoronomia*, Lib. I. Cap. III. & *Append.* §. V.

N.° CLXXII.



possit; erit [ob BD: BF = AD: DE] $DE = \frac{BF \times AD}{BD}$, quo substituto in $\frac{f.DE}{c.AB}$, provenit $T - t$ [$= \frac{f.DE}{c.AB}$] $= \frac{f.BF.AD}{c.AB.BD}$ — [ob $c = \frac{AD}{BD}$] $\frac{f.BF}{AB}$.

Applicatio hujus ad figuram Catenariæ.

Quod hic est BF, vel BG, ibi est N*m*, vel *dx*; AB est MN, vel *ds*; DF vel AG est M*m*, vel *dv*; *f* est *g ds*, *T* repræsentat tensionem Catenæ in M, *t* tensionem in N; adeoque $T - t$ hoc est $dt = \frac{g\,ds.\,dx}{ds} = g\,dx$; & quia T [$\frac{f.DF}{c.AB}$] jam est $\frac{g\,ds.\,dv}{c.\,ds} = \frac{g\,dv}{c}$, oportet ut $\int g\,dx$, seu T, vel t, sit $= \frac{g\,dv}{c}$, unde $\frac{g\,dv}{\int g\,dx} = c =$ [per naturam anguli contactus ut in Prop. seqq. ostendetur] $\frac{-d((a+x).\frac{dv}{ds})}{(a+x).\frac{dx}{ds}}$; multiplicando per *dx*, & dividendo per *dv*, erit $\frac{g\,dx}{\int g\,dx} = \frac{-d((a+x).\frac{dv}{ds})}{(a+x).\frac{dv}{ds}}$.

TAB. LXXXIII. N°. CLXXIII. *Fig.* 2.

Hic jam utrobique habetur differentiale divisum per suum integrale; adeoque ambo integrantur per Logarithmos, indeque transitur ad numeros; & ita habebo [assumto *aab* ad homogeneitatem observandam] $\int g\,dx = \frac{aab}{(a+x).\frac{dv}{ds}}$. Quæ prorsus est eadem æquatio ad quam diversissima via in Solutione Problematis sequentis perveni. Quare reliqua perficiuntur ut ibi. *Q. E. F.*

PROBLEMA.

Sit jam Catena MND *uniformiter crassa, & gravis versus centrum* C, *in ratione data quacunque distantiarum.*

SOLUTIO.

TAB. LXXXIII. N°. CLXXII. *Fig.* 2.

In ductas tangentes duas infinite propinquas ME, Ne, agantur ex C duæ normales CE, Ce. Et vocentur CD $= a$, PM $= x$, N$m = dx$, M$m = dv$, P$p = dz$, MN $= ds$, gravitas variabilis data lege $= g$. Primo patet angulum FMe esse mensuram amplitudinis arculi elementaris MN, seu quantitatem anguli contactus in M. Jam, ob triangula similia MNm, CMe, erit $ds : dv = a + x : \frac{(a+x).dv}{ds} =$ CE, & $ds : dx = a + x : \frac{(a+x).dx}{ds} =$ ME. Differentietur CE, non quidem actu, sed præponendo tantum litteram characteristicam d, ut tanto commodius pateat, quomodo instituenda sit integratio ut succedat, quem in finem scribo $Fe = -d((a+x).\frac{dv}{ds})$; præmitto autem signum —, quia CM & CE alterne crescunt vel decrescunt. Sic ergo angulus FMe seu $\frac{Fe}{MF} = \frac{-d((a+x).\frac{dv}{ds})}{(a+x).\frac{dx}{ds}} = c$. Sed ex * Theoremate nuper demonst-

TAB. LXXXIII. N°. CLXXIII. *Fig.* 3.

* Theorema ad cujus demonstrationem hic provocatur ita demonstratur: Curva MND concipiatur ut polygonum infinitilaterum, cujus tria latuscula sint MN, NO, OR, quorum puncta N, O trahantur viribus g, γ ad punctum datum C vergentibus; prolongentur lineæ directionum CN, CO ad G, H; & duo latuscula ON, RO ad S, T; vocentur anguli externi MNS, NOT, qui nihil aliud sunt quam anguli contactus, vel eorum sinus, a, α; sitque sinus anguli MNG $= b$, sinus anguli ROH $= \mathfrak{G}$; tensio fili NO $= t$. Erit, ex Staticis, $a : b = g : t$ & $\alpha : \mathfrak{G} = \gamma : t$, adeoque $\frac{bg}{a} = t = \frac{\mathfrak{G}\gamma}{\alpha}$; unde $\frac{a}{bg} = \frac{\alpha}{\mathfrak{G}\gamma}$. Dicantur porro sinus angulorum GNO $= e$, & HON $= \varepsilon$. Habetur, ex Trigonometricis, $e : \varepsilon =$ CO : CN, proinde $e \times$ CN $= \varepsilon$

monſtrato, oportet $\frac{gds \times (a+x) \times \frac{dv^2}{ds^2}}{c}$ facere quantitatem conſtantem; quæ homogeneitatis conſervandæ gratia dicatur $= aab$. Et ita, multiplicando per c vel ejus valorem, habetur $gds \times (a+x) \times \frac{dv^2}{ds^2} = + aab \times \frac{-d\left((a+x) \times \frac{dv}{ds}\right)}{(a+x) \times \frac{dx}{ds}}$. Nunc ſtatim video, ſi denominator membri poſterioris mutatur in aliquam potentiam quantitatis poſt litteram d poſitæ in numeratore, fore tunc fractionem integrabilem, quod alias non ita facile patuiſſet. Hoc fine ſeparo $\frac{dx}{ds}$ per multiplicationem & divido per $(a+x) \times \frac{dv^2}{ds^2}$. Quo facto, habebo $gdx = aab \times \frac{-d\left((a+x) \times \frac{dv}{ds}\right)}{(a+x)^2 \times \frac{dv^2}{ds^2}}$, quod eſt manifeſte integrabile; integretur ergo, & prodibit $\int gdx = aab \times \frac{1}{(a+x) \cdot \frac{dv}{ds}}$, ſeu reducendo

$= \varepsilon \times CO$; ex quo fluit $\frac{a}{e\,b\,g \times CN} = \frac{\alpha}{\varepsilon\,\mathfrak{G}\,\gamma \times CO}$. Quoniam itaque eſt uniformis relatio inter angulos & lineas ad punctum O pertinentes, quæ eſt inter eas ad punctum N pertinentes; oportet ut $\frac{a}{e\,b\,g \times CN}$ vel $\frac{\alpha}{\varepsilon\,\mathfrak{G}\,\gamma \times CO}$ ſit quantitas conſtans per totam curvam. Hinc, cum in ſolutione Problematis ſit a vel $\alpha = c$, e vel $\varepsilon = \frac{dv}{ds}$, g vero, vel $\gamma = g\,ds$; & præterea ob angulos MNS vel NOT infinite parvos, cenſeatur ſinus anguli MNG = ſinui ang. ONG, vel ſinus ROH = ſinui NOH, hoc eſt, $b = e$, vel $\mathfrak{G} = \varepsilon$; erit utique [invertendo terminos fractionis, & ſcribendo $a+x$ pro CN vel CO] $\frac{\frac{dv^2}{ds} \times g\,ds \times (a+x)}{c} =$ conſtanti. Q. E. D.

$(a+x).dv.\int g\,dx = aabds$. Porro quia g datur per x, dabitur quoque [saltem per quadraturas] $\int g\,dx$; vocetur itaque $\int g\,dx = X$; unde $(a+x)\times X\times dv = aabds$, & $(a+x)^2 \times X^2 \times dv^2 = a^4bb\times ds^2 = a^4bb\times(dx^2+dv^2)$; separatisque dv & dx, prodibit $\frac{aabdx}{\sqrt{((a+x)^2\times X^2 - a^4bb)}} = dv = \frac{a+x}{a}\,dz$, quare $dz = \frac{a^3\,b\,dx}{(a+x)\sqrt{((a+x)^2\times X^2 - a^4bb)}}$. Q. E. I.

Corollarium I.

Quod si g sit inverse ut aliqua potentia distantiarum; hoc, est, si $g = \frac{ac^n}{(a+x)^n}$; adeoque $\int g\,dx$ seu $X = \frac{ac^n}{(1-n)}(a+x)^{1-n}$; abibit formula generalis in hanc,

$dz = \frac{(1-n)\,aabdx}{(a+x)\sqrt{(c^{2n}.(a+x)^{4-2n} - (1-n)^2\,aabb)}}$, quæ diversa est ab ea quæ invenitur per Methodum *Hermannianam*.

Corollarium II.

Existente vero $x = 0$, prodit $\int g\,dx$ sive $X = \frac{ac^n}{1-n}\,a^{1-n}$; proinde verus & correctus valor ipsius X, erit $\frac{ac^n}{1-n}\times((a+x)^{1-n} - a^{1-n})$. Quare habebitur correcta formula pro casu præcedente hæc,

$$dz = \frac{aabdx}{(a+x)\sqrt{((a+x)^2\times\frac{c^{2n}}{(1-n)^2}\times((a+x)^{1-n}-a^{1-n})^2 - aabb)}}$$

$$= \frac{aabdx}{(a+x)\sqrt{(\frac{c^{2n}}{(1-n)^2}\times((a+x)^{2-n} - a^{1-n}(a+x))^2 - aabb)}}$$

Quia

Quia autem in casu quo a, vel distantia centri est infinita, videtur aliquid absurdi provenire, utpote $dz = \frac{b\,dx}{\sqrt{-bb}}$, quod est imaginarium; res ita est tractanda.

Conjiciatur $(a+x)^{2-n}$ in seriem, & habebitur $(a+x)^{2-n} = a^{2-n} + \frac{2-n}{1} a^{1-n}x + \&c$, a qua subtrahatur $a^{1-n}(a+x)$, seu $a^{2-n} + a^{1-n}x$; remanebit $(1-n)\,a^{1-n}x$; nam reliqui termini in casu $a = \infty$ omnes evanescunt: adeoque jam erit $dz = \frac{b\,dx}{\sqrt{(c^{2n}\,a^{1-2n}xx - bb)}}$; ubi porro si arbitraria c sumatur æqualis a, fiet $dz = \frac{b\,dx}{\sqrt{(xx-bb)}}$, quæ est æquatio pro Catenaria vulgari: plane ut fieri debet.

COROLLARIUM III.

Manente distantia centri finita, si $n = 0$, hoc est si gravitas g sit uniformis; qui casus est *Hermannianus* *, erit $dz = \frac{aab\,dx}{(a+x)\sqrt{((ax+xx)^2 - aabb)}}$; cujus integratio generaliter non dependet [quantum hactenus notum est] ab arcu circulari; proinde curva non erit algebraïca, multo minus Hyperbola, ut perperam invenit HERMANNUS. Hinc si $a = \infty$, erit $dz = \frac{b\,dx}{\sqrt{(xx-bb)}}$; iterum pro Catenaria vulgari; ut par est.

COROLLARIUM IV.

Si manente iterum distantia centri finita, sit $n = 1$; hoc est si gravitas g sit inverse ut distantia; oritur $dz = \frac{aab\,dx}{(a+x)\sqrt{(\frac{0\,0\,cc}{0\,0} - aabb)}}$; quod nihil indicat: cui incommodo ut occurratur, animadvertendum est, id ex eo venire,

* *Phoronomia*, pag. 46, & 382.

venire, quod in hoc casu $\int g\,dx$ algebraïce non possit integrari, qui casus per consequens excipi debet a generali expressione $\int g\,dx = X = \frac{ac^n}{(1-n)}\,(a+x)^{1-n} - a^{1-n}$). Sed integratio instituenda est per Logarithmos; nempe $g\,dx$ fit $\frac{ac\,dx}{a+x}$, proinde $\int g\,dx = ac\,l(a+x)$, vel correcte $\int g\,dx$, seu X, $= ac\,l(a+x) - ac\,la = ac\,l\left(\frac{a+x}{a}\right)$. Quo substituto in formula universali, emergit $dz = \frac{a^3 b\,dx}{(a+x)\sqrt{\left((a+x)^2 \times \left(ac\,l\frac{a+x}{a}\right)^2 - a^4 bb\right)}}$.

Corollarium V.

Sit jam $n = 2$; id est, sit gravitas reciproce in duplicata ratione distantiarum, quæ est vulgaris hypothesis; mutabitur formula pro potentiis *Coroll.* 2 exhibita, in hanc $dz = \frac{aab\,dx}{(a+x)\sqrt{\left(\frac{c^4 xx}{aa} - aabb\right)}} = \frac{a^3 b\,dx}{(a+x)\sqrt{(c^4 xx - a^4 bb)}} =$ [assumta $cc = ab$] $\frac{aa\,dx}{(a+x)\sqrt{(xx-aa)}} =$ [faciendo $x = t - a$] $\frac{aa\,dt}{t\sqrt{(tt-2at)}}$; id quod est integrabile: quod ita perficio. Diviso utroque termino per tt, habeo $\frac{aa\,dt}{t\sqrt{(tt-2at)}} = \frac{aa\,dt : tt}{\sqrt{(1 - 2a:t)}}$. Jam quia numerator est differentiale quantitatis signo radicali inclusæ, patet posse integrari. Ejus namque integrale est $= a\sqrt{\left(1 - \frac{2a}{t}\right)} = \frac{a\sqrt{(t-2a)}}{\sqrt{t}} = \frac{a\sqrt{(x-a)}}{\sqrt{(x+a)}}$. Unde liquet curvam DNM non habere suum verticem in D, sed supra illud in L, ita ut CL sit dupla ipsius CD. Liquet etiam curvam habere asymtoton: existente enim x infinita, erit z vel $\frac{a\sqrt{(x-a)}}{\sqrt{(x+a)}} = \frac{a\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = a$; adeo ut sumto arcu DP = CD, producta rec-

recta CP occurrat curvæ non nisi in distantia infinita: proinde ejus est asymtotos.

SCHOLIUM.

Si nulla attentione facta ad correctionem valoris ipsius X in *Coroll.* 2 adhibitam, formulæ expressionem reddere velimus generalissimam; oportet $\int g\,dx$, seu X, augere vel minuere data quavis $\frac{a^n c^n e}{1-n}$; faciendo $X = \frac{a^n c^n}{1-n}((a+x)^{1-n}+e)$; quo observato prodibit

$$dz = \frac{a^3 b\,dx}{(a+x)\sqrt{((a+x)^2 \times \frac{a^n c^{2n}}{(1-n)^2} \times ((a+x)^{1-n}+e)^2 - a^4 b\,b)}}$$

$$= \frac{aab\,dx}{(a+x)\sqrt{(\frac{c^{2n}}{(1-n)^2} \times (a+x)^{2-n} + (a+x)e)^2 - aabb)}}.$$

Hinc in casu Corollarii tertii, ubi $n = 0$, erit $dz = \frac{aab\,dx}{(a+x)\sqrt{(((a+x)^2 + ea + ex)^2 - aabb)}}$, quæ jam comprehendit Hyperbolam æquilateram HERMANNI; assumta nimirum $e = 0$. Fit enim hoc modo $dz = \frac{aabdx}{(a+x)\sqrt{((a+x)^4 - aabb)}}$; quam æquationem Hyperbolæ convenire demonstrare possumus. Sed hæc est unica curva algebraïca, inter infinitas alias non algebraïcas, quæ Problemati *Hermanniano* satisfaciunt.

Si assumitur $e = -a$, oritur $dz = \frac{aab\,dx}{(a+x)\sqrt{((ax+xx)^2 - aabb)}}$; ut supra *Coroll.* 3; ubi Catenariam vulgarem contineri diximus, existente nimirum a infinito.

N°. CLXXIV.

SOLUTIO PROBLEMATIS

Curvaturæ laminæ elasticæ a pondere appenso curvatæ.

TAB. LXXXIV. N°. CLXXIV.

SUpponitur *primo* Lamina sine pondere; 2°. æqualiter crassa, vel potius consideratur ut linea recta in statu naturali; 3°. in singulis suis punctis æqualiter fortis. 4°. Extensiones quotumcunque extendentium esse in ratione virium extendentium, quæ est Hypothesis *Leibnitiana*. His præsuppositis, sit AB lamina elastica horizontaliter in plano AD infixa, & in suo statu naturali; AC eadem incurvata a pondere appenso P. In quocunque curvæ puncto R ducatur tangens RT, & intelligatur curva divisa in particulas infinite parvas & æquales Aa, Rr. Quoniam nunc pondus P diversimode vim suam exerit in singulis curvæ punctis; nimirum in remotioribus majorem, in propioribus minorem, & quidem in ratione distantiarum; fit ut rs perpendicularis in tangentem RT, quæ denotat extensionem qua particula R removetur per vim ponderis P a statu naturali RS, sit ad ab extensionem qua particula Aa removetur a statu naturali Ab, ut vis in R ad vim in A. Est autem vis in R ad vim in A, ut distantia CL ad distantiam CG; ideoque $CL : CG = rs : ab =$ [quia Rr & Aa ponuntur æquales] $rs : Rr + aA : ab =$ [RX, rX, & AF, aF, sunt lineæ evolventes curvæ ex cujus evolutione generatur curva CRA; proinde ob similitudinem triangulorum rRS, RXr & aAb, AFa] $rR : RX + FA : Aa = FA : RX$. Ergo $CL : CG = FA : RX$; & proinde $CL \times RX = CG \times FA =$ quantitati constanti aa. Sit igitur $CL = x$, $LR = y$; erit,

erit, ut in Calculo integrali inventum est *, $RX = \frac{(dx^2+dy^2)\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{-dx\,ddy}$; ergo $\frac{x(dx^2+dy^2)\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{-dx\,ddy} = aa$, multiplicetur utrumque per $-dx^2\,ddy$, & dividatur per $(dx^2+dy^2)\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, habebitur $x\,dx = \frac{-aadx^2\,ddy}{(dx^2+dy^2)\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$; eorum ergo integralia [quorum posterius invenitur per Regulas in Calculo integralium exhibitas, ponendo $dy = \frac{dx^2}{dm}$, provenit enim quantitas cujus integrale statim patet] $\frac{1}{2}xx = \frac{-aady}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$; eorumque quadrata $\frac{1}{4}x^4 = \frac{a^4\,dy^2}{dx^2+dy^2}$, vel $x^4\,dx^2 + x^4\,dy^2 = 4a^4dy^2$, & reducta æquatione, ita ut indeterminatæ sint separatæ, proveniet $\frac{axxdx}{\sqrt{(4a^4-x^4)}} = ady$. Constructio itaque curvæ habetur, mediante quadratura spatii, cujus natura exprimitur per hanc æquationem $4a^4zz - x^4zz = aax^4$. Et sic curva quæsita est ex ordine primo mechanicarum.

* N°. CXLIX, Lect. XVI, pag. 437, *Tom. III.*

N°. CLXXV.

DE LEGE VIRIUM

Qua fit ut mobile ad centrum descendat temporibus quæ sint ut potestates datæ distantiarum, a quibus descensum inchoat.

PROBLEMA I.

INvenire legem Virium, quibus mobile in singulis locis alicujus rectæ positione datæ urgeri oportet, ut ad punctum datum in recta ipsa data perveniat temporibus rationem habentibus ut datæ potesta-

tes distantiarum a puncto dato; inchoans motum a quiete, in qualibet distantia a puncto.

Vel, quod eodem redit,

Invenire qua lege virium mobile ad Centrum virium datum attrahi debeat, ut ad illud, ex quacunque distantia motum inchoans, descendat temporibus ordinatim datis, secundum applicatas alicujus ex genere Parabolarum vel Hyperbolarum ad asymtoton.

SOLUTIO.

TAB. LXXXIII. N°. CLXXV. *Fig.* 1 & 2

Esto C centrum virium; recta AC secundum quam mobile ad C trahitur. Curva CTP determinet tempora ordinatim data, ita nempe ut applicata AP designet tempus descensus per AC, motu inchoato a quiete in A; & quælibet alia applicata BT exprimat tempus per BC, motu pariter a quiete nascente in B. Quæritur curva CVR, cujus applicatæ AR, BV explicent vires quibus mobile in singulis locis A, B, urgendum est.

Sumantur in AC duæ portiones quæcunque AC, αC; quæ separatim positæ [*Fig.* 2.] intelligantur divisæ in particulas infinite parvas totis proportionales, quarum homologæ duæ sint ex. gr. Bb & $\beta\gamma$, hoc est ut Bb: $\beta\gamma$ = AC. αC = BC: βC. Sint vero curvæ velocitatum ALM, $\alpha\lambda\mu$, quarum nempe applicatæ BL, $\beta\lambda$ exprimant velocitates acquisitas in B & β, post descensus per AB & $\alpha\beta$. Quod si itaque faciamus tempuscula per particulas homologas Bb & $\beta\gamma$ ubique proportionalia temporibus per totas AC & αC, hoc est [in *Fig.* 1.] ipsis applicatis AP, $\alpha\pi$; habebimus AP : $\alpha\pi = \frac{Bb}{BL} : \frac{\beta\gamma}{\beta\lambda}$ = [ob Bb: $\beta\gamma$ = AC: αC] $\frac{AC}{BL} : \frac{\alpha C}{\beta\lambda}$; unde BL : $\beta\lambda = \frac{AC}{AP} : \frac{\alpha C}{\alpha\pi}$. Similiter habetur bl: $\gamma\lambda = \frac{AC}{AP} : \frac{\alpha C}{\alpha\pi}$; adeoque bl: $\gamma\lambda$ = BL: $\beta\lambda$; &, sumendo differentias, erit dBL: $d\beta\lambda$ = BL: $\beta\lambda$, hoc est

est incrementa velocitatum per particulas homologas Bb & $\beta\beta$ sunt ut ipsæ velocitates; unde etiam $BL \times d'BL : \beta\Lambda \times d\beta\Lambda = BL^2 : \beta\Lambda^2$; est autem [*Fig.* 1.] $BV \times dBT \left[BV \times \frac{Bb}{BL}\right] : \beta u \times d\beta\theta \left[\beta u \times \frac{\beta\zeta}{\beta\Lambda}\right] = dBL : d\beta\Lambda = BL : \beta\Lambda$; ideoque $BV : \beta u = \frac{BL^2}{Bb} : \frac{\beta\Lambda^2}{\beta\zeta} = \frac{BL^2}{AC} : \frac{\beta\Lambda^2}{\alpha C} =$ [ob $BL : \beta\Lambda = \frac{AC}{AP} : \frac{\alpha C}{\alpha\pi}$] $\frac{AC}{AP^2} : \frac{\alpha C}{\alpha\pi^2}$. Sed sumtis CB & $C\beta$ æqualibus ipsis CA & $C\alpha$, degenerabunt BV & βu in AR & $\alpha\varrho$; erit itaque etiam $AR : \alpha\varrho = \frac{AC}{AP^2} \cdot \frac{\alpha C}{\alpha\pi^2}$; unde si curva data CTP talis sit, ut abscissis quatuor quibuslibet existentibus proportionalibus [$AC : \alpha C = BC : \beta C$]; etiam $\frac{AC}{AP^2}$ & $\frac{\alpha C}{\alpha\pi^2}$ sint proportionales ipsis $\frac{BC}{BT^2}$ & $\frac{\beta C}{\beta\theta^2}$; hoc est, ut $\frac{AC}{AP^2} : \frac{\alpha C}{\alpha\pi^2} = \frac{BC}{BT^2} : \frac{\beta C}{\beta\theta^2}$; adeoque [ob $AC : \alpha C = BC : \beta C$] ut sit $AP : \alpha\pi = BT : \beta\theta$; hæc autem affectio cum competat omni generi Parabolarum & Hyperbolarum ad asymtoton; manifestum est legem virium centripetarum hanc esse ut AR sit ubique proportionalis ipsi $\frac{AC}{AP^2}$; adeoque & ipsam curvam AVR esse ex Parabolarum vel Hyperbolarum genere.

THEOREMA.

Si distantia indeterminata mobilis descendentis ex quiete sumta vocetur x; *tempusque per eam se habeat ut* x^n; *erit vis centripeta ipsi* x *respondens ut* $\frac{x}{x^{2n}}$, *seu ut* x^{1-2n}.

Hoc patet ex analysi præcedente: & vicissim synthetice res facillime demonstrari potest.

PROBLEMA II.

TAB. LXXXIII. N°. CLXXV. *Fig.* 3.

Invenire curvam AB, *ita ut mobile descendens per quemvis ejus arcum* BA *vi gravitatis suæ, incipiens a quiete, impendat tempus quod sit proportionale datæ cuivis potestati altitudinis correspondentis* AC.

SOLUTIO.

Ex præcedentibus facile habetur. Sit enim $AC = x$, $BC = y$, $AB = s$; exponens potestatis $= n$, vis gravitatis a; erit ergo vis descendendi quæ exercetur secundum tangentem in quolibet puncto $B = \frac{adx}{ds}$. Quæratur igitur curva AB, cujus portio quælibet AB sit proportionalis alicui potestati abscissæ AC, & ita quidem ut $\frac{adx}{ds}$ sit proportionalis ipsi $\frac{AB}{x^{2n}}$: curva enim AB erit, per præcedentem, ea quæ quæritur. Sit itaque AB seu $s = x^m$; adeoque $ds = mx^{m-1}\,dx$, & $\frac{adx}{ds} = \frac{a}{mx^{m-1}} = \frac{bAB}{x^{2n}} = \frac{bx^m}{x^{2n}}$; unde $ax^{2n} = bmx^{2m-1}$. Ut igitur x utrobique parem habeat dimensionis numerum, oportet ut $2n = 2m - 1$; ex quo sequitur m fore $= n + \frac{1}{2}$: invento itaque exponente m potestatis m abscissæ AC, cui proportionalis esse debet arcus AB, quærenda nunc porro est relatio coordinatarum AC & CB per viam communem. Quia nempe $s = x^{n+\frac{1}{2}}$, erit $ds = (n+\frac{1}{2})\,x^{n-\frac{1}{2}}\,dx$, & $ds^2\,[dx^2 + dy^2] = (n+\frac{1}{2})^2 \times x^{2n-1}\,dx^2$, adeoque $dy^2 = (n+\frac{1}{2})^2\,x^{2n-1}\,dx^2 - dx^2$, & $dy = dx\sqrt{((n+\frac{1}{2})^2\,x^{2n-1} - 1)}$; vel ad supplenda homogenea $(n+\frac{1}{2})\,c^{n-\frac{1}{2}}\,dy = dx\sqrt{((n+\frac{1}{2})^2\,x^{2n-1} - (n+\frac{1}{2})^2\,c^{2n-1})}$, hoc est $c^{n-\frac{1}{2}}\,dy = dx\sqrt{(x^{2n-1} - c^{2n-1})}$. *Q. E. I.*

COROL-

COROLLARIUM I.

Si $n = 0$, qui casus est tautochronæ *Hugenianæ*, provenit $dy = dx\sqrt{(\frac{c-x}{x})}$; æquatio ad Cycloidem.

COROLLARIUM II.

Si $n = 1$, habetur $dy = dx\sqrt{(\frac{x-c}{c})}$; quod cum integrari possit; est enim $y = \frac{2}{3} \times (x-c)\sqrt{\frac{x-c}{c}}$, seu $\frac{2}{3\sqrt{c}}(x-c)^{\frac{3}{2}}$; patet curvam quæsitam esse algebraïcam, & quidem Parabolam cubicalem secundam; cujus vertex V distat supra initium abcissarum A quantitate $AV = c$; parameter vero $= \frac{2}{3}c$, seu $\frac{2}{3}AV$: vel vicissim, si parameter ponatur $= p$, erit $AV = \frac{3}{2}p$. Elegans hujus curvæ proprietas; & mirabilis consensus cum Isochronismo *Leibnitiano*, qui eidem curvæ sed contrario situ competit. Notandum tamen descensum per partem VA, utpote qua deficit curva, physice esse impossibilem; quoniam portio curvæ ab V ad A tendens minor esse deberet ipsa recta VA. Quod idem accidit omnibus curvis, quarum initium V supra A cadit, quotiescunque nempe $n > \frac{1}{2}$.

TAB. LXXXIII. N°. CLXXV. *Fig.* 4.

COROLLARIUM III.

Si $n = \frac{1}{2}$; curva AB abit in lineam rectam; quod aliunde ex Demonstratis *Galilæanis* diu notum est.

SOLUTIO ALTERA CLARIOR.

Sit tempus per arcum BA, ex quietis puncto B, ut s^p adeoque s^p ut x^n; unde vis secundum tangentem $[\frac{adx}{ds}]$ erit, per præc. ut s^{1-2p}. Ex priori comparatione habetur $s = x^{n:p}$ &

TAB. LXXXIII. N°. CLXXV. *Fig.* 3.

& $ds = \frac{n}{p} x^{(n-p):p} dx$: ex altera vero $s = (\frac{adx}{ds})^{1:(1-2p)}$ = [ſubſtituto valore ipſius ds] $b x^{(p-n):(p-2pp)}$. Ergo, ut dimenſiones ipſius x identificentur, erit $\frac{n}{p} = \frac{p-n}{p-2pp}$; ex quo fluit $p = \frac{2n}{2n+1}$. Jam per viam ordinariam quæratur curva, ita ut $x^n = s^{2n:(2n+1)}$ &c.

N°. CLXXVI.

DE CURVA QUAM DESCRIBIT CORPUS INCLUSUM IN TUBO CIRCULANTE.

LEMMA

Inſerviens Solutioni Problematis ſequentis.

TAB. LXXXIV. N°. CLXXVI. *Fig.* 1.

SI ex puncto quodam C ducantur tres rectæ CA, CB, CD, reſecantes ex recta PD partes AB, BD, infinite parvas & inter ſe æquales: Erit, ducta CP perpendiculari ad PD, differentia angulorum ACB & BCD, hoc eſt, ACB—BCD $= \frac{2ps\,ds^2}{(pp+ss)^2}$; nominando ſcilicet conſtantem CP = p, & variabilem PA = s.

Hujus veritas facile demonſtratur: differentietur enim angulus ACB; aſſumta nempe ds pro conſtante: quo facto prodibit prædicta formula.

PROBLEMA.

Determinare curvam, quam deſcribit Corpus incluſum in Tubo, qui in plano horizontali uniformiter movetur, circa aliquem axem in ipſo

N.° CLXXIII

Fig. 1.

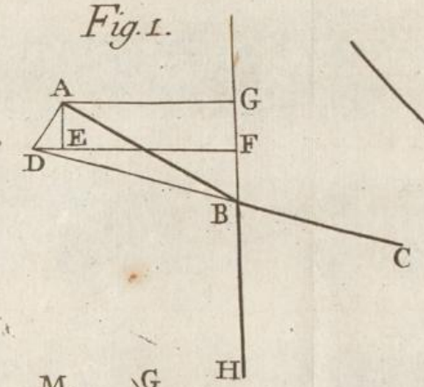
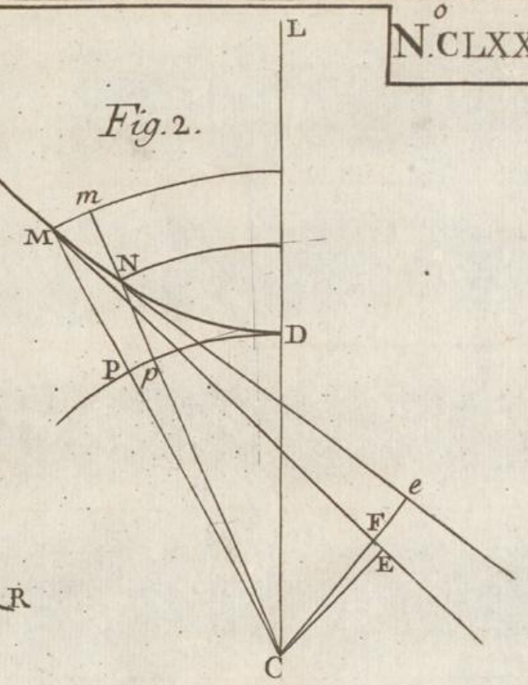


Fig. 2.



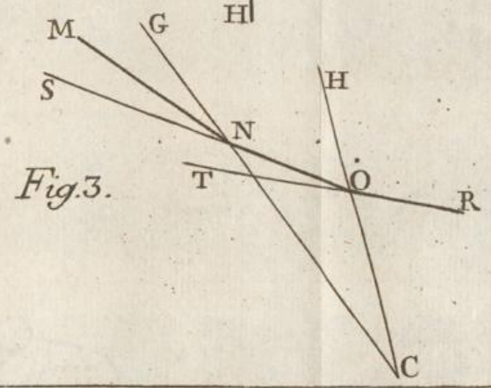


Fig. 3.

N.° CLXXV.

Fig. 1.

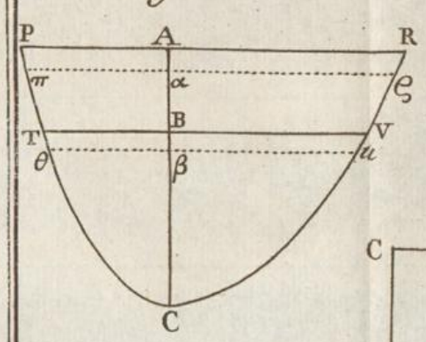
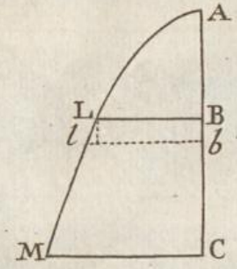


Fig. 2.



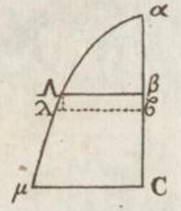


Fig. 3.

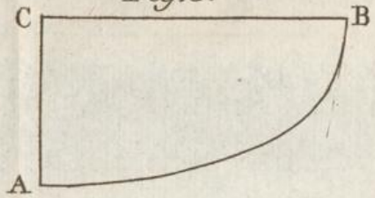
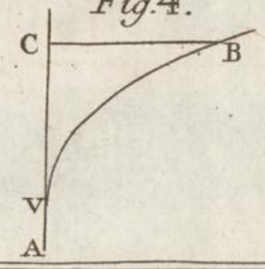


Fig. 4.



ipso tubo sumtum. Supponitur Corpus in Tubo circulante moveri posse liberrime, & sine ulla frictione.

SOLUTIO.

Sit curva ABE, quam corpus, instar puncti considerandum, describit durante circulatione tubi CA circa axem fixum C. Sintque variabiles tubi positiones CA, CB, CE, quarum longitudines dicantur $= x$, facientes angulos infinite parvos æquales ACB, BCE, qui per consequens exprimant tempuscula æqualia, quibus tubi positio CA pervenit in positionem CB, & hæc in tertiam CE. Fiantque porro, ex centro C & radiis CA, CB, arculi AG, BH, qui more solito concipiantur ut rectæ perpendiculares ad CB, CE; erunt BG vel EH $= dx$; dicantur autem AG vel BH $= dy$, & AB vel BE $= ds$. TAB. LXXXIV. N°. CLXXVI. *Fig.* 2.

His præmissis, nunc ita procedo. Postquam corpus percurrit lineolam AB, tempusculo designato per angulum ACB, pergeret moveri, si liberum esset, in eadem directione, & tempusculo æquali percurreret aliam particulam BD æqualem præcedenti AB. Sed, quia tubus simul cum corpore movetur, occupaturus eodem tempusculo situm CE, qui cum CB facit angulum BCE æqualem angulo ACB; ideoque corpus, quod alioquin esset in D, reperietur in E, in æquali distantia a centro C; quoniam scilicet tubus vim habet propellendi corpus in directione DE normali ad CD, quæ CD facere censetur cum CE, angulum DCE infinities minorem angulo BCE, licet hic ipse sit infinite parvus.

Ductis igitur duabus tangentibus proximis BP, ER, demissisque in illas ex centro C normalibus CP, CR; habebitur, vi Lemmatis, differentia angulorum ACB & BCD; quando nempe in formula $\frac{2p\,s\,ds^2}{(pp+ss)^2}$, substituitur $\frac{x\,dy}{ds}$ pro p, & $\frac{x\,dx}{ds}$ pro s; prodibit enim BCA — BCD $= \frac{2\,dy\,dx}{x\,x}$.

Jam vero concipiendo DF parallelam ipsi CP vel CR,

evidens est fore $\frac{DF}{ds}$ seu $\frac{DF}{BD} = \frac{RQ}{QB} = \frac{d(xdy:ds)}{xdx:ds}$; unde $DF = \frac{ds^2 d(xdy:ds)}{xdx}$.

Item, propter triangula similia hDB, FDE, erit $dx:ds = DF:DE$; proinde $DE = \frac{ds^3 d(xdy:ds)}{xdx^2}$, & $\frac{DE}{CE} = \frac{ds^3 d(xdy:ds)}{xxdx^2}$ = mensuræ anguli DCE. Est autem DCE differentia inter angulos BCE & BCD, seu inter ACB & BCD, quæ, per Lemma nostrum, $= \frac{2dydx}{xx}$. Hinc lucramur hanc æquationem $\frac{ds^3 d(xdy:ds)}{xxdx^2} = \frac{2dydx}{xx}$, seu $ds^3 d(xdy:ds) = 2dydx^3$.

Præterea, ex conditione Problematis, cum sint anguli ACB, BCE, &c. omnes inter se æquales; erunt descripto circulo KO, centro C & radio arbitrario $CM = a$, omnes arculi MN, NO, &c. æquales, utpote mensuræ illorum angulorum: Dicatur ergo unusquisque arculus $= dz$, unde $a:x = dz:dy$; adeoque $dy = \frac{xdz}{a}$, quo valore substituto in æquatione $ds^3 d(xdy:ds) = 2dydx^3$, emergit hæc altera $ds^3 d(xxdz:ds) = 2xdx^3 dz$, vel, deleto utrobique dz constanti, hæc $ds^3 d(xx:ds) = 2xdx^3$; quæ differentiando actualiter $xx:ds$, & tum dividendo per x, hanc præbet æquationem $2dxds^2 - xdsdds = 2dx^3$. Porro pro ds^2 & pro $dsdds$ substituantur eorum valores $dx^2 + dy^2 = dx^2 + \frac{xxdz^2}{aa}$ & $dxddx + \frac{xdxdz^2}{aa}$; quo facto, resultabit $2dx^3 + \frac{2xxdxdz^2}{aa} - xdxddx - \frac{xxdxdz^2}{aa} = 2dx^3$; quæ reducta, dat hanc simplicem æquationem, & quidem integrabilem, $xdxdz^2 = aaddxddx$. Integretur ergo, observando debitam rectificationem, & habebitur $xxdz^2 - bbdz^2 = aadx^2$.

Notetur intelligi per b corporis distantiam initialem, seu minimam a centro C; ubi scilicet corpus incipit moveri in directione perpendiculari ad tubum; ita ut initiale incrementum

dx

dx hujus distantiæ, pro nihilo sit censendum, respectu subsequentium dx. Ob hanc rationem, rectificationis gratia, scribendum fuit $xxdz^2 - bbdz^2 = aadx^2$, eum in finem ut utrumque æquationis membrum simul evadat $= 0$, ab initio, nempe, ubi $x = b$, & $dx = 0$.

Cæterum æquatio inventa $xxdz^2 - bbdz^2 = aadx^2$ nobis dat $dz = \frac{adx}{\sqrt{(xx - bb)}}$, seu $z = \int \frac{adx}{\sqrt{(xx - bb)}} = a \times \log. (x + \sqrt{(xx - bb)})$, & ita habebimus z datum per logarithmum functionis in x expressæ. Quod si vero lubeat habere valorem ipsius x datum per functionem aliquam ipsius z; ponamus c esse talem numerum ut sit $lc = 1$; erit per naturam logarithmorum $c^{z:a} = x + \sqrt{(xx - bb)}$, vel $c^{z:a} - x = \sqrt{(xx - bb)}$; unde elicietur $x = \frac{1}{2}c^{z:a} + \frac{1}{2}bbc^{-z:a} = [\text{assumpta } b \text{ pro unitate}] \frac{1}{2}(c^{z:a} + c^{-z:a})$.

CONSTRUCTIO CURVÆ.

TAB. LXXXIV. N°. CLXXVI. *Fig.* 3.

Ponamus CKT esse positionem initialem tubi circulantis circa centrum C, & ex puncto K, corpus incipere motum suum in curva KBE; quæ est determinanda.

Quod ut commodissime fiat, describatur, centro C & radio CK, circulus KMN; transeatque per K Logarithmica Spiralis semi-rectangula hg KGH. Capiantur ab utraque parte rectæ CK duo arcus æquales KM, Km, & per puncta M, m, ductæ ex centro C rectæ CM, Cm secent Spiralem in punctis G, g. Producatur CG ad L ita ut GL sit $=$ Cg: Denique bisariam secetur CL in B: Dico fore B in curva desiderata KBE. *Q. E. F.*

DEMONSTRATIO.

Evidens est $\frac{z}{a}$ denotare mensuram anguli TCB, quem

quælibet positio tubi CB facit cum positione ejusdem initiali CT: cum vero angulus TCB idem sit cum angulo KCM, erit radius *a* longitudinis arbitrariæ: sumatur ergo ille $= b = 1$; ipseque arcus KM $= z$; quo facto, exprimetur CB, vel $x = \frac{1}{2} c^z + \frac{1}{2} c^{-z} = \frac{1}{2} (c^z + c^{-z})$. Est autem ex natura Spiralis Logarithmicæ semirectangulæ $CG = c^z$, & $Cg = c^{-z}$; adeoque $CG + Cg$, id est, $CL = c^z + c^{-z}$, hujusque dimidium, id est, $CB = \frac{1}{2} (c^z + c^{-z})$. *Q. E. D.*

COROLLARIUM I.

Quod si arcus uterque KM, Km decrescendo ultra punctum K loca sua inter se permutent, ita ut M perveniat in m, & m in M; patet utique punctum β analogum ipsi B, & hoc ipsum B, æqualiter distare a centro C, & sub æqualibus angulis $KC\beta$, KCB. Unde sequitur ramos ambos curvæ $K\beta$, KB sibi invicem similes esse & æquales.

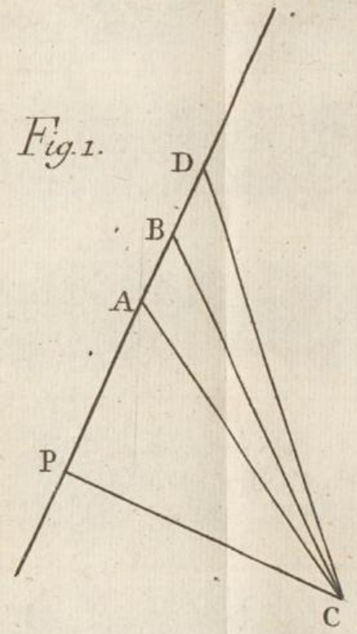
COROLLARIUM II.

Distantia CK initialis a centro C est omnium distantiarum CB vel $C\beta$, minima; proinde tota curva $\varepsilon\beta KBE$ cadit extra circumferentiam MBm, quam tangit in solo puncto K. Res est clara, quia nempe tres rectæ Cg, CK, CB sunt continue geometrice proportionales, per naturam Logarithmicæ Spiralis; & media proportionalis semper minor est semisumma extremarum: Ergo &c.

PRO-

N.o CLXXVI.

Fig. 1.



N.o CLXXIV.

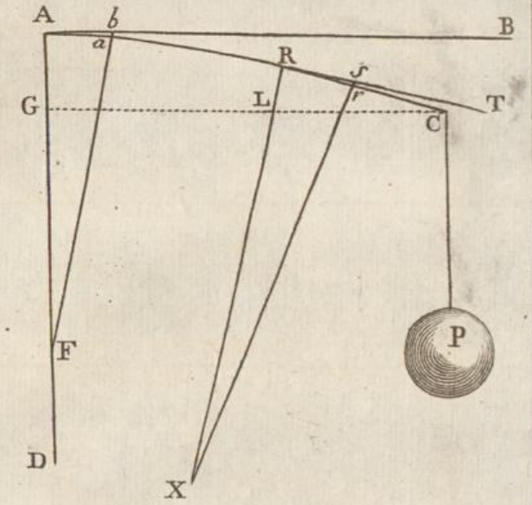


Fig. 2.

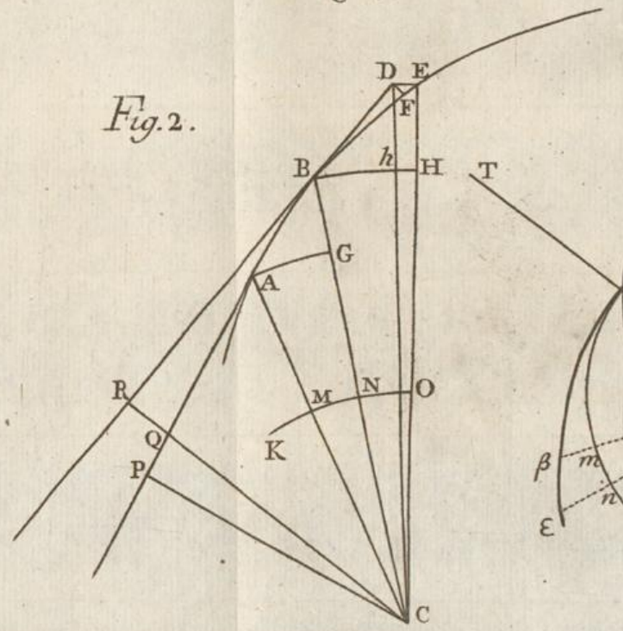
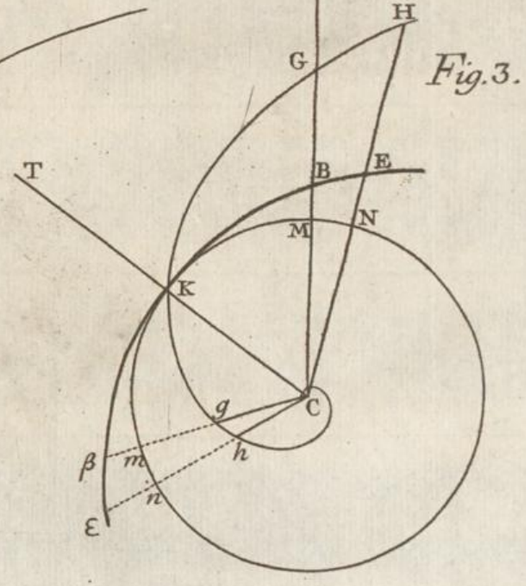


Fig. 3.



N°. CLXXVII.

PROPOSITIONES VARIÆ MECHANICO-DYNAMICÆ.

I.

SIT corpus quodcunque, vel planum tantum materiale ABCD, in quod agat potentia P, trahendo vel pellendo in directione PR, ex. gr. ope fili, quod in R alligatum esset, & potentia quædam in P applicata ageret in planum AC, secundum fili directionem: dico eodem modo, eademque vi attractum iri AC, si, soluto nodo alligationis R, alligetur filum in quovis alio puncto S vel T; dummodo sumatur illud punctum in eodem filo PR, sive prolongato, sive decurtato. TAB. LXXXV. *Fig.* 1.

Res est per se clara, & instar Axiomatis habenda; quia longitudines directionum virium, seu potentiarum, nihil mutant in effectu.

II.

De compositione & resolutione virium.

Duæ vires, vel potentiæ, in commune punctum P agentes; quarum directiones & intensitates designentur per rectas PA & PB, dicuntur *componi*, si, iis remotis, substituitur vis tertia C, quæ sola eodem nisu vel conatu agit in P, secundum directionem PC, quo antea egerant simul duæ A & B. Atque vicissim, potentia C, expressa per rectam PC, *resolvi* vel *componi* dicitur in duas PA & PB, quæ, remota priori, eun- TAB. LXXXV. *Fig.* 2.

dem niſum exerunt in punctum P, in directione PC, quam fecerat ſola potentia PC.

III.

TAB. LXXXV. *Fig.* 3. Sint jam tres potentiæ A, B, & D, repræſentatæ per rectas PA, PB, PD, agentes in punctum P mobile in omnes plagas, quod in æquilibrio ſervetur a tribus iſtis potentiis ſimul agentibus; liquet, ex præcedenti Definitione, unamquamque ex iſtis tribus potentiis æqualem eſſe & directe oppoſitam ei, quæ ex reliquis duabus componitur. Finge enim duas quaſcunque, ex. gr. PA & PB removeri, earumque loco ſubſtitui æquipollentem PC, quæ utique ſola reſiſtet potentiæ tertiæ PD, & ambæ punctum P in æquilibrio retinere pergent; adeoque in directum erunt poſitæ, & altera alteri æqualis erit.

IV.

TAB. LXXXV. *Fig.* 4. Duo demonſtranda jam ſunt, 1°. Potentiam PC, compoſitam, in ſenſu prædicto, ex potentiis PA & PB, eum habere ſitum, ut PA ſit ad PB ſicuti ſinus anguli BPC ad ſinum anguli APC; ſeu ut ſinus anguli BPD ad ſinum anguli APD. 2°. Completo parallelogrammo, cujus latera ſint PA, PB, fore ejus parallelogrammi diagonalem ipſiſſimam PC; quæ & ſitum & quantitatem potentiæ compoſitæ deſignabit.

Demonſtrationem utriuſque ex natura & proprietate vectis deduco, hunc in modum. Directiones potentiarum PA, PB, & PD, vel PC, quæ utique in communi plano jacebunt, facient ut hoc ipſum planum maneat immotum, etiamſi ſollicitatum in tres diverſas plagas a P verſus D, a P verſus A, & a P verſus B. Ductis duabus perpendicularibus CE, CF in latera PA, PB, ſi opus, prolongata; ſolvatur nodus P, & transferatur potentia A ad punctum E, potentia B ad punctum F, & potentia D ad punctum C, ſervatis nimirum priſtinis ſuis directionibus. Liquet, ex §. 1, planum etiamnum in æquilibrio manſurum; atque ſic conſiderari poteſt ECF tanquam

quam vectis inflexus, ubi potentia D, ad C applicanda, vicem subit hypomochlii sustinentis duas reliquas potentias applicatas perpendiculariter ad extremitates brachiorum E & F. Adeoque, ex natura vectis in æquilibrio existentis, erit potentia A ad potentiam B, hoc est, potentia E ad potentiam F, ut longitudo brachii CF ad longitudinem brachii CE. Est vero [sumta PC pro radio, seu sinu toto] sinus anguli CPF ad sinum anguli CPE, ut CF ad CE, seu [ob similitudinem triangulorum CBF, CAE] ut CB ad CA, hoc est ut PA ad PB. Unde sequitur directionem potentiæ compositæ ita secare angulum quem faciunt directiones componentium, ut potentiæ componentes sint in ratione sinuum angulorum partialium alternatim sumtorum; atque adeo directionem potentiæ compositæ coincidere cum diagonali parallelogrammi, cujus latera proportionalia sunt potentiis componentibus. Hæc prima pars est asserti, de situ directionis potentiæ compositæ.

Altera pars demonstranda restat; nimirum si latera parallelogrammi designent potentias ipsas componentes, fore ut ejusdem diagonalis longitudo designet quoque potentiæ compositæ quantitatem, seu intensitatem. Sint igitur tres potentiæ A, B, D, punctum P sollicitantes, illudque in æquilibrio servantes; sintque ipsæ expressæ per longitudines rectarum PA, PB, PD. Quemadmodum itaque potentia PD, in directionem oppositam PC versa, dicitur composita ex potentiis PA & PB, ita eodem sensu, qualibet alia PA prolongata in PG æqualem & oppositam, hæc ipsa PG exprimet potentiam compositam ex potentiis PB & PD. Quare hic etiam, erit potentia PB ad potentiam PD, ut sinus anguli DPG ad sinum BPG; hoc est, ut sinus anguli CPA ad sinum anguli CAP, seu ut CA, vel PB, ad PC; unde longitudo PB ad longitudinem PC, ut potentia PB ad potentiam PD. Ergo etiam PC exprimet potentiam PD, cui æqualis & opposita est illa quæ ex PA & PB componitur. *Q. E. D.*

TAB. LXXXV. *Fig.* 5.

V.

V.

SCHOLIUM.

Peccant, qui confundunt compoſitionem virium cum compoſitione motuum. Vis enim, vel potentia, utpote conſiſtens in ſolo niſu, vel conatu, ad motum generandum, nullam ſane velocitatem actualem [ne minimam quidem] producit, ſi corpus in quod agit eſt immobile. Ubi perfectum eſt æquilibrium, ibi nullus adeſt motus. Quî ergo conſiderari poſſit motus, in æquilibrii natura explicanda, non video. ARCHIMEDES, aliique ex Veteribus, ad vectis indolem recurrerunt, ut phænomena gravitationum ſe mutuo in æquilibrio vel quiete retinentium demonſtrarent. Nos, eorum exemplum ſecuti, idem fecimus, dum potentiarum compoſitionem ad vectis leges, utpote a longo adeo tempore demonſtratas atque receptas, reduximus; rejecto nempe explicandi modo recentiorum Geometrarum, ut CARTESII, STEVINI, NEWTONI, VARIGNONII, HERMANNI, aliorumque, qui velocitatem, ſaltem initialem, in auxilium vocarunt, ad principii elegantiſſimi veritatem ſtabiliendam; ubi tamen nulla prorſus adeſt velocitas, nequidem infinite parva. Quæritur enim, cur tres potentiæ A, B, D, commune punctum D ſollicitantes, ea qua dictum eſt conditione, perfectum inter ſe ſervent æquilibrium? Quomodo igitur introduci poſſit ulla velocitas, ubi perfecta adeſt quies, non video.

VI.

De viribus motricibus ad vectem applicatis.

TAB. LXXXV. *Fig.* 6. Sit rigida recta, tanquam vectis conſiderata, mobilis circa punctum fixum C; vehatque ſecum, dum rotatur circa C, corpus aliquod datum *B* in loco dato rectæ rigidæ AC, quod ſit gravitatis expers. Ad punctum A quodvis in vecte, applicet

cetur vis motrix $= m$, agens in vectem secundum directionem normalem DA. Quæritur vis acceleratrix, quam a vi motrice m acquiret corpus B in arculo B*b*?

SOLUTIO.

Dicatur CA $= p$, & CB $= q$. Jam si corpus B esset in ipso loco A, ubi vis motrix applicatur, hoc est, si $q = p$, foret, per vulgarem Legem Dynamicam, vis acceleratrix absoluta $= \frac{m}{B}$, qua cum describeret rotando arculum A*a*. Sed si distantia CB a centro rotationis C major minorve est quam distantia CA; oportet sumere, ex natura vectis, momentum, quod habebit vis motrix m in loco vectis B, & quod erit $\frac{pm}{q}$; faciendo scilicet $q : p = m : \frac{pm}{q}$; atque sic $\frac{pm}{q}$ erit vis motrix, qua corpus B immediate urgeri intelligitur; quare dividendo per massam B, habebitur $\frac{pm}{qB}$ = vi acceleratrici absolutæ corporis B, qua describit arculum B*b*.

COROLLARIUM.

Dividendo porro inventam vim acceleratricem absolutam $\frac{pm}{qB}$ per distantiam CB, seu per q, habebitur vis acceleratrix angularis $= \frac{pm}{qqB}$, qua nimirum angulus BC*b* crescendo ampliatur. Mutatis distantia CB & massa B, ita ut illa jam sit $= r$, hæc vero $= E$; erit utique vis acceleratrix angularis $= \frac{pm}{rrE}$. Quod si ergo hæ duæ vires acceleratrices angulares debeant esse æquales, oportet ut sit $\frac{pm}{qqB} = \frac{pm}{rrE}$, adeoque $qqB = rrE$; hoc est, massæ B & E debent esse reciproce proportionales quadratis distantiarum a centro rotationis.

Dico itaque eandem vim motricem requiri in puncto A applicandam, ad id ut angulus ACa eadem acquirat incrementa, quocunque in loco locetur corpus B; modo ejus massa sit reciproce proportionalis quadrato distantiæ suæ a centro circulationis C.

VII.

TAB. LXXXV. *Fig.* 7.

Sit nunc vectis CA mobilis circa centrum C, & oneratus pluribus corporibus B, E, F &c. quamcunque rationem inter se habentibus, & in quibuscunque distantiis CB, CE, CF &c. positis. Vis motrix autem m applicata in A, secundum directionem DA, sit ea, ut in dato tempusculo vectem AC promoveat ex situ AC in situm aC, hoc est, ut angulus ACa sit vis acceleratrix angularis. Dico, si sublatis corporibus B, E, F &c. alia totidem substituantur in puncto A locanda, & quidem $\frac{CB^2}{AC^2} \times B$ pro B, $\frac{CE^2}{AC^2} \times E$ pro E, $\frac{CF^2}{AC^2} \times F$ pro F, &c. Dico, inquam, eandem vim motricem m imprimere toti massæ collectæ $\frac{CB^2 \times B + CE^2 \times E + CF^2 \times F, \&c.}{AC^2}$ similem vim acceleratricem angularem ACa; ita ut, eodem dato tempusculo, vectis ex situ AC veniat in situm aC.

Veritas hujus patet ex præcedenti; cum enim eadem vis requiratur in A, ad pellendum corpus B per Bb, quæ requiritur ad pellendum corpus $\frac{CB^2 \times B}{AC^2}$, in A locatum, per Aa, in eodem tempusculo; vocetur illa vis α: & vis alia in A requiritur eadem, ad pellendum corpus E per Ee, quæ requiritur ad pellendum $\frac{CE^2 \times E}{AC^2}$, in A locatum, per Aa; vocetur illa vis ζ: itemque etiam alia vis in A requiritur eadem, ad propellendum corpus F per Ff, qua opus est ad propellendum corpus $\frac{CF^2 \times F}{AC^2}$, in A locatum, per Aa, quæ vis dicatur γ; omnes itaque vires $\alpha + \zeta + \gamma$ vocari possunt m. Ergo &c.

Idem

VIII.

Idem quoque valet de vecte plurium brachiorum, quorum unumquodque ſuum peculiare corpus, ſine gravitate conſideratum, in extremitate alligatum habeat. Ut ſi circa punctum C moveatur vectis CA, in communi plano cum brachiis CB, CE, CF &c. onuſtis corporibus *B*, *E*, *F*, &c. ac angulos invariabiles ACB, ACE, ACF &c. facientibus, adeo ut cum CA transfertur in C*a*, veniant quoque brachia CB in C*b*, CE in C*e*, CF in C*f*, &c. ſub angulis BC*b*, EC*e*, FC*f*, &c. ſingulis æqualibus angulo AC*a*. Conſtat utique, ex natura vectis, vim motricem *m*, in A applicatam, haud aliter agere in corpora *B*, *E*, *F*, &c. quam ſi illa eſſent omnia alligata in ipſa recta AC in diſtantiis reſpective æqualibus ipſis CB, CE, CF. Ac proinde nunc etiam vis motrix *m* toti Syſtemati corporum eandem vim acceleratricem angularem circa centrum C imprimit, quam imprimeret unico corpori in A locando, quod eſſet æquale $\frac{CB^2 \times B + CE^2 \times E + CF^2 \times F, \&c.}{AC^2}$. Etenim in corporibus *B*, *E*, *F*, &c. gravitatis expertibus, nulla alia vis reſiſtens concipitur, quam quæ ab eorum inertia oritur. Hæc autem ſemper agit in oppoſita tendentia ad motum, hoc eſt, corpora *B*, *E*, *F*, &c. reſiſtunt per inertiam ſuam in directionibus *b*B, *e*E, *f*F, &c. normalibus ad CB, CE, CF; eodem prorſus modo ac ſi ſingula corpora exiſterent in ipſo vecte AC ad æquales a puncto fixo C diſtantias CB, CE, CF. TAB. LXXXV. *Fig.* 8.

IX.

Hinc nova deducitur Theoria pro determinatione Centri oſcillationis, quæ elegans eſt, & maxime genuina. Finge in plano verticali lateraliter oſcillanti circa punctum ſuſpenſionis C [ad hunc namque modum oſcillandi omnium figurarum corporearum oſcillationes reduci poſſunt;] finge, inquam, plura corpuſcula gravia *B*, *E*, *F* &c. invariabilem inter ſe ſitum habentia TAB. LXXXV. *Fig.* 9.

tia, in hoc plano ſimul oſculari circa punctum C. Quæritur longitudo Penduli ſimplicis, quod ſit iſochronum oſcillationibus Syſtematis corpuſculorum B, E, F &c?

Per centrum gravitatis A totius Syſtematis ducatur & producatur recta CA, atque etiam agantur rectæ AB, AE, AF, &c. quæ conſiderentur tanquam totidem brachia vectis principalis CA, ita ut ſi tantillum dimoveatur ex ſitu verticali ad intervallum AD, ille mox poſtea ſibi relictus a pondere Syſtematis incipiat oſcillari.

Dicatur gravitas naturalis g, qua animantur corpora B, E, F, &c. adeo ut eorum pondera ſint gB, gE, gF, &c. totiuſque Syſtematis pondus $= g(B+E+F$ &c.$) =$ [nominando M totam maſſam corporum] gM. Separemus jam, in cogitatione noſtra, gravitationes a corporibus, ita ut nihil in ipſis remaneat, præter propriam ſingulorum inertiam, & loco ablatarum virium gravitantium collecta concipiatur in centro gravitatis vis motrix immaterialis æquivalens gM: conſtat utique, ex natura Centri gravitatis, Syſtema corporum non gravium B, E, F, &c. eodem modo ad deſcenſum animari a vi motrice collecta gM, quo modo junctim deſcendunt propriis ſuis ponderibus gB, gE, gF, &c. Tollamus nunc quoque corpora ipſa, & ſubſtituamus pro B corpus aliud in A locandum, quod ſit $= \frac{AB^2 \times B}{CA^2}$; aliudque pro E, quod ſit $= \frac{AE^2 \times E}{CA^2}$, ut & aliud pro F, quod pariter ſit $= \frac{AF^2 \times F}{CA^2}$ &c. Ergo per §. preced. hæc nova corpora collecta in puncto A, in unam coeunt maſſam $= \frac{AB^2 \times B + AE^2 \times E + AF^2 \times F \&c.}{CA^2}$, quæ igitur eandem acquirit vim acceleratricem angularem circa punctum C, quam habet ipſum Syſtema corporum ſeparatorum.

Iſta autem vis acceleratrix reperitur dividendo vim motricem gM ſeu $g(B+E+F$, &c.$)$, per maſſam concentratam [quam imme-

immediate sollicitat] $\frac{AE^2 \times B + AE^2 \times E + AF^2 \times F \&c.}{CA^2}$. Quo facto habebitur vis acceleratrix $= \frac{g(B+E+F\&c.) \times CA^2}{AB^2 \times B + AE^2 \times E + AF^2 \times F\&c.}$. En itaque Systema oscillans corporum separatorum $B+E+F$&c. reductum ad Pendulum simplex isochronum longitudinis CA, sed quod animatur vi acceleratrice $= \frac{g(B+E+F\&c.) \times CA^2}{AB^2 \times B + AE^2 \times E + AF^2 \times F\&c.}$. Dudum vero constat [quod & ego demonstravi in *Actis Lipsi.* 1713, p. 79*] duo Pendula simplicia a diversis viribus acceleratricibus agitata fore isochrona, quando eorum longitudines ipsis his viribus quibus animantur sunt proportionales. Instituendo proin hanc analogiam; Ut se habet inventa vis acceleratrix $\frac{g(B+E+F\&c.) \times CA^2}{AB^2 \times B + AE^2 \times E + AF^2 \times F\&c.}$ ad vim acceleratricem naturalem g; hoc est, ut $(B+E+F\&c.) \times CA^2$ ad $AB^2 \times B + AE^2 \times E + AF^2 \times F$ &c. ita erit CA ad quartam $\frac{AB^2 \times B + AE^2 \times E + AF^2 \times F\&c.}{(B+E+F\&c.) \times CA}$, cui si æqualis sumatur CO, prodibit hæc ipsa CO æqualis longitudini Penduli simplicis naturalis, & isochroni Pendulo composito Systematis oscillantis $B+E+F+$&c. Id quod omnino conforme est Regulæ *Hugenianæ*, quamvis elicitæ ex principio indirecto, fundato in æqualitate descensus & ascensus communis centri gravitatis, quod redit ad suppositionem Conservationis virium vivarum; Conferantur quæ dedi in *Actis Lipsi.* 1714 †, ad uberiorem hujus Regulæ confirmationem, ex fonte maxime genuino atque directo petita; quamquam per methodum ab hac quam hic aperui longe diversam; haud ingratum fore ratus, si eadem veritas sub multiplici habitu exposita sibi semper tam pulchre constare comperiretur.

* N°. XC. pag. 518, *Tom. I.* † N°. XCVI, pag. 168, *Tom. II.*

X.

De communicatione motus per Vectem.

Sint in plano horizontali duo corpora A & B perfecte elastica, quorum A moveatur velocitate a, atque directe impingat in corpus B quiescens. Notum est, per regulas communicationis motus, quas demonstratas dedi in *Dissertatione mea* Gallice edita pag. 27, & seqq. *, fore post conflictum velocitatem corporis $A = \frac{aA - aB}{A+B}$, velocitatem vero corporis $B = \frac{2aA}{A+B}$. Quare in casu, ubi corpora A & B sunt æqualia, quiescet A post ictum, ejusque velocitatem integram a accipiet corpus B. Quod si itaque hoc alligatum esset in una extremitate alicujus vectis, vel virgæ rigidæ, mobilis circa alteram extremitatem tanquam circa centrum fixum; manifestum sane est corpus B, acquisita sua velocitate a, circulaturum circa idem illud centrum fixum. At vero generatio motus in corpore B ab impulsu orta haud aliter peragitur, quam fit per applicationem alicujus vis motricis in corpus movendum agentis. Statim enim ac corpus A attingit corpus B, fit promta compressio elaterii interpositi inter utrumque corpus A & B; hoc dum ita peragitur, nisus elaterii, in utramque plagam restitutionem affectantis, concitat promtissime in motum corpus B quod quiescebat, & redigit ad quietem corpus A quod movebatur. Hujusmodi vis, quæ oritur ex mutua actione corporum in se invicem, est ex earum numero, quas vocare soleo *Vires immateriales* †; quia quasi extra materiam existentes concipiendæ sunt, dum non magis pertinent ad corpora moventia, quam ad movenda. Etsi vero collisio corporum in uno veluti momento absolvatur; clarum tamen est, atque res per se loquitur, actionem illam non esse instantaneam, sed habere suum initium, medium, & finem; tanta tamen rapiditate sibi succedentes gradus, ut sensibus percipi non possint.

XI.

* N°. CXXXV. pag. 28, & seq. *Tom. III.*
† Vide infra Numerum CLXXIX.

XI.

His probe intellectis, haud ægre patebit, quomodo effici possit, ut corpus aliquod in motu constitutum, omnem suam vim vivam transferat in aliud corpus majus seu minus, ita ut, priori illo ad quietem redacto, hoc alterum, quod antea quieverat, nunc solum receperit vim omnem quam prius illud habebat. Sit vectis rigidus CG mobilis circa punctum fixum C; in extremitate, vel in quolibet alio loco; sit alligatum corpus elasticum *G*, in quod impingat aliud corpus elasticum *F* ipsi *G* æquale, velocitate & in directione FG perpendiculari ad lineam vectis CG. Post percussionem amittet corpus *F* suam velocitatem, cui æqualem GR acquiret corpus percussum *G*, cum qua acquisita velocitate pergeret circulari circa centrum C. Fingamus jam ante allapsum corporis *F* ad *G*, hoc ipsum *G* subito tolli, atque pro eo aliud *H* substitui in alio vectis loco, ubi CH^2 sit ad CG^2, ut corpus *G* ad corpus *H*; unde $H = \frac{CG^2 \times G}{CH^2}$, vel $CH^2 \times H = CG^2 \times G$. Patet ergo ex §. 6, corpus impingens in punctum G, eundem omnino effectum facere pro acceleratione angulari vectis CG, sive adsit corpus *G* sine *H*, sive adsit corpus *H* sine *G*; adeoque in utrovis casu velocitas FG in corpore *F* post ictum destruetur; consequenter quicquid erat virium vivarum in corpore *F*, id nunc reperietur, vel in solo corpore *G*, vel in solo corpore *H*. TAB. LXXXV. *Fig.* 10.

COROLLARIUM.

Eodem modo fieri potest, ut corpus impellens *F* quamtumvis magnum, omnem suam vim consumat in movendo alio corpore quantumvis parvo *P*. Prolongetur namque vectis CG ad P, ita ut CP^2 sit ad CG^2, ut corpus *F* ad corpus *P*, ponendum in ipso puncto P. Liquet corpus *F*, cum impegerit in punctum G, & quod pergeret velocitate GR, vel FG, si corpus *P* non adesset; mox omnem motum, adeoque omnem vim TAB. LXXXV. *Fig.* 11.

suam

ſuam amiſſurum, quam recipiet corpus *P* in puncto P poſitum; acquiretque hoc velocitatem abſolutam P*p*, ita ut velocitas angularis P C*p* prorſus eadem ſit cum GCR quam habuiſſet corpus *F*, ſi cum vecte CG moveri perrexiſſet, ſine annexo corpore *P*.

XII.

SCHOLIUM.

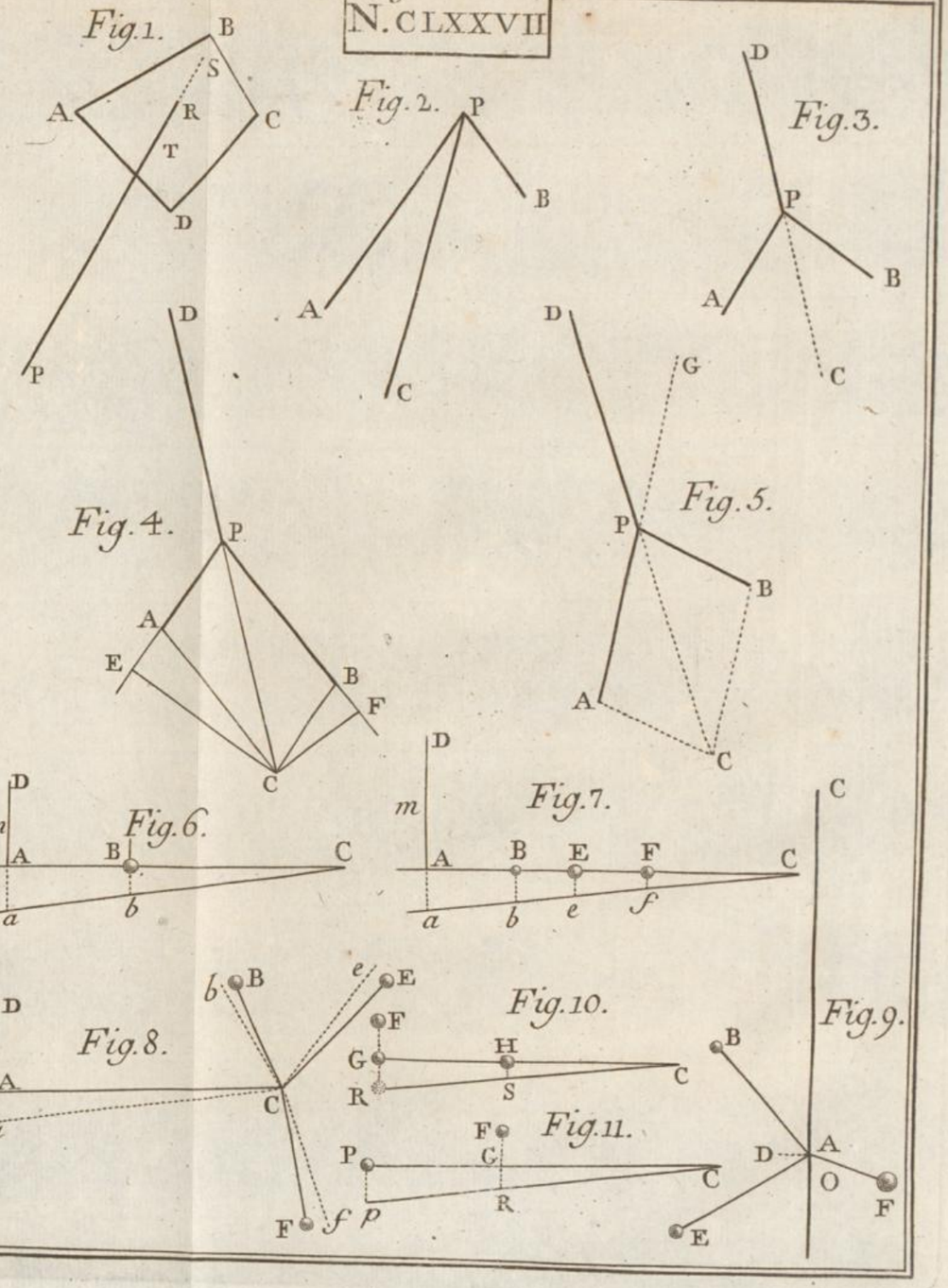
Ex his confirmatur vera æſtimatio virium Vivarum, in eo ſita, quod illæ Vires, ſeu facultates agendi, ſint in ratione compoſita ex ſimplici maſſarum & duplicata velocitatum. Cum enim Vis viva quæ erat in corpore *F*, poſt impulſum in vectem jam tota translata reſideat in corpore *H*; procul dubio, altera alteri æqualis eſt. Atqui corpus *F* eſt ad corpus *H*, ut quadratum CH ad quadratum CG, hoc eſt, ut quadratum celeritatis HS ad quadratum celeritatis GR; ob æqualitatem celeritatum angularium HCS & GCR. Similiter in *Fig.* 11; probatur ex eo, quod vires vivæ corporis *F* & corporis *P* ſunt æquales, utpote altera alterius effectus plenus & adæquatus; fore maſſam corporis *F* ad maſſam corporis *P*, reciproce ut quadratum velocitatis P*p* ad quadratum velocitatis GR. Unde generaliter fluit, corporum Vires vivas, ſeu facultates agendi, habere rationem compoſitam ex ſimplici maſſarum & quadrata velocitatum.

TAB. LXXXV. *Fig.* 10. & 11.

XIII.

Si noſter hic demonſtrandi modus jam tum cognitus fuiſſet, cum vivide ageretur lis inter LEIBNITIUM & PAPINUM de vera æſtimatione Virium vivarum, atque PAPINUS uſque adeo ad incitas redactus fuiſſet, ut concederet LEIBNITIO corpus *A*, cum duobus gradibus velocitatis, idem efficere poſſe, quod quadruplo majus corpus *B*, cum uno gradu velocitatis; modo poſſibile eſſet ita dirigere motum corporis *A*, ut

N.° CLXXVII


Fig. 1.
B
S
A
R
C
T
D
P
Fig. 2.
P
B
A
C
Fig. 3.
D
P
A
B
C
D
Fig. 4.
P
A
E
B
F
C
D
Fig. 5.
P
G
B
A
C
m
Fig. 6.
D
A
B
C
a
b
m
Fig. 7.
D
A
B
E
F
C
a
b
e
f
b
B
e
E
D
Fig. 8.
A
C
a
F
f
F
Fig. 10.
G
H
C
R
S
P
F
Fig. 11.
G
C
R
p
E
B
Fig. 9.
D
A
O
F

ut post conflictum quiesceret, & omnem suam vim transfunderet in *B*; quod autem cum in praxi effici non possit [sicuti opinabatur PAPINUS] quia duorum corporum perfecte elasticorum, sed inæqualium, illud quod alterum quiescens directe pellit, semper vel retro pellitur, si minus est; vel pergit moveri imminuta velocitate, si majus est. Subterfugium PAPINI omnino erat ridiculum, quasi veritas aliqua in abstrato sumta dependeret a possibilitate, vel impossibilitate physica. Quicquid sit, noster, inquam, demonstrandi modus, quo actu fieri potest, ut corpus aliquod vim suam totam transferat in aliud corpus majus vel minus, ita ut nihil in priori remaneat, omnino idoneus fuisset ad convincendum PAPINUM de vera Virium vivarum æstimatione.

XIV.

De Centro spontaneo rotationis.

Concipe corpus aliquod, quantivis voluminis, vel etiam Systema plurium corporum, inter se invariabiles distantias servantium, a vi quadam externa impelli; ita quidem ut commune Centrum gravitatis maneat in eodem semper plano horizontali, aut in alio quocunque plano, si corpora essent gravitatis expertia. Duo sunt casus considerandi: aut enim tendentia, vel directio vis impellentis transit per Centrum gravitatis, [si nimirum Systema grave esset]; aut non transit. Si transit, facile percipis totum Systema ita obsecuturum vi pellenti, vel trahenti, ut singula ejus puncta incipiant pergantque moveri motu parallelo directioni potentiæ motricis. Ratio hujus est evidens ex eo, quia illi potentiæ nulla alia resistentia opponitur, quam quæ oriunda est ex inertia, proportionali utique quantitati materiæ singularum Systematis partium: haud secus ac ipsa foret natura gravitatis, quæ hic abesse supponitur; hoc solo discrimine, quod directiones partium gravium alicujus Systematis parallelæ sint, quomodocunque moveantur; heic vero, ubi

nulla ponitur gravitas, unaquæque ex partibus Systematis, diversam habens directionem motus, exercet suam resistentiam inertiæ secundum eandem suam peculiarem directionem; id quod fit, si directio potentiæ motricis non transit per punctum ubi alias esset Centrum gravitatis.

XV.

Istum casum alterum, qui altioris est indaginis, resolvendum aggredior; retento nomine *Centri gravitatis*; etsi Systema corporum a gravitate liberum esse supponitur. Hunc ad finem, concipe planum horizontale transiens per Centrum gravitatis totius Systematis: in hoc plano sit linea directionis, secundum quam potentia motrix agat ad movendum Systema corporum; atque ad istam lineam directionis ex Centro gravitatis ductam & utrimque productam intellige perpendicularem. Finge nunc porro ex singulis corpusculis minimis totius Systematis ductas esse rectas verticales ad planum horizontale, ut singula quæque corpuscula transferantur in ipsa puncta in quibus illæ verticales plano insistunt. Perspicis, haud dubie, planum istud tali projectione oneratum corpusculis particularibus, eodem prorsus modo agitatum iri a vi motrice, ac fit ipsum totum Systema in statu suo naturali: ita enim simili projectione uti solemus in investigatione Centri oscillationis; sed quæ projectio fingenda est fieri in plano verticali, transeunte per Centrum gravitatis & per punctum suspensionis.

XVI.

TAB. LXXXVI. *Fig.* 12.

Sit igitur planum horizontale projectionis AHOI, in quo firmiter hæreant, vel resideant, Systematis corpuscula projecta *K*, *L*, *M*, *N*, &c. commune Centrum gravitatis in C habentia, per quod transeat recta ABO perpendicularis ad directionem vis motricis DA, pellentis totum Systema a D versus A, una cum ipso plano, quod mobile suppono. In directione DA sumа-

ſumatur punctum A pro puncto applicationis potentiæ motricis [nam per §. 1, in quolibet puncto directionis ſumi poteſt]; eo ipſo itaque conſiderari etiam poteſt hoc punctum A tanquam hypomochlium, ſeu fulcrum, reſpectu reliquarum potentiarum in vectem ACO agentium, ſicuti docent principia vulgaris Mechanicæ. Illæ reliquæ potentiæ ſunt, quæ oriuntur a reſiſtentiis inertiæ corpuſculorum *K*, *L*, *M*, *N*, &c. a potentia DA movendorum, circa punctum aliquod immobile B in vecte AO, quod id ipſum eſt quod determinari debet.

XVII.

Tale autem punctum immobile B alicubi in vecte AO exiſtere debere, ex eo manifeſtum eſt, quod vis motrix in A extra Centrum gravitatis C perpendiculariter ad vectem applicatur; quo utique fit ut Syſtema corporum non poſſit moveri motu parallelo: ad hoc enim requireretur, ut vis motrix in ipſo centro gravitatis C applicaretur. Incipiet itaque moveri motu rotationis: ergo dabitur in vecte AO punctum aliquod B, quod erit Centrum rotationis initialis, adeoque ab initio immotum, dum reliqua omnia totius Syſtematis puncta in motum cientur. Hæc ita fiunt ab initio gyrationis, quod notanter dico; poſtea enim, cum in motum ſenſibilem Syſtema erumpit, ipſum quoque hoc Centrum abripitur, propter naſcentem vim centrifugam corporum *K*, *L*, *M*, *N*, &c. quemadmodum fieri cernimus in projectilibus, quæ provolitant gyrando, impetu concepto a vi quadam impreſſa in puncto diverſo a centro gravitatis.

XVIII.

Hoc cum ita ſe habeat, Theoria noſtra valebit iis præſertim in occaſionibus, ubi agitur de motibus non in longum excurrentibus; ut in tremulationibus, item in vibrationibus, vel oſcillationibus minimis. In his ergo & ſimilibus, opus eſt, ante omnia, ut probe determinetur Centrum rotationis ſponta-

neum B; voco *ſpontaneum*, quia a natura ſponte quaſi eligitur, pro diverſitate circumſtantiarum; ita ut non ſit in poteſtate noſtra illud ponere pro lubitu. Datur tamen criterium, unde cognoſcere poſſumus, qua conditione gaudere debeat punctum B, ad id ut unicum maneat ſtabile, dum reliqua omnia puncta plani horizontalis de loco ſuo dimoventur. Hoc vero criterium in eo conſiſtit, quod debeat eſſe æquilibrium inter preſſiones, quas punctum B patitur ab utroque latere, reſpectu vectis AO; hoc eſt, quod quantum hoc punctum urgetur in directione perpendiculari ad AO verſus unam plagam, tantundem ſimul retro urgeatur verſus plagam oppoſitam; ſcilicet utrumque per vires ex inertia corporum reſultantes.

XIX.

Ponamus nunc potentiam motricem DA promovere punctum A in *a*, circa Centrum rotationis B, quo ipſo fiet ut corpuſcula *M*, *L*, *K*, *N*, &c. promoveantur ad *m*, *l*, *k*, *n*, in directionibus perpendicularibus ad BM, BL, BK, BN; ita ut velocitates eorum initiales, deſignatæ per lineolas M*m*, L*l*, K*k*, N*n*, &c. futuræ ſint proportionales radiis BM, BL, BK, BN. Sunt autem reſiſtentiæ ab inertia oriundæ, conjunctim ut maſſæ & velocitates initiales, hoc eſt, ut BM×*M*, BL×*L*, BK×*K*, BN×*N*; adeoque, exempli gratia, corpus *M* renititur rotationi, vi ſuæ inertiæ expreſſa per BM×*M*, idque in directione MH normali ad BM. Ex hac reſiſtentia reſultat aliqua vis impreſſionis [quæ vocetur *P*], qua centrum B urgetur normaliter ad AB, & quidem hic in eandem plagam qua tendit vis motrix DA. Ut autem determinetur quantitas hujus preſſionis, demitto in directionem inertiæ MH perpendicularem AH, atque ſumto A pro fulcro in vecte inflexo HAB, cujus unum brachium eſt AH, alterum AB; erit momentum vis inertiæ BM×*M* in H applicatæ = AH×BM×*M*; cui æquale eſſe debet momentum preſſionis P applicatæ

in

in B. Ergo $P = \frac{AH \times BM \times M}{AB}$. Sunt vero [ducta MF perpendicularis ad BA,] duo triangula AHE, FBM, inter se similia, adeoque AH: AE = BF: BM, unde AH × BM = AE × BF, erit igitur $P = \frac{AE \times BF \times M}{AB} =$ [ob AE = AB − EB] $\frac{AB \times BF \times M - EB \times BF \times M}{AB} = BF \times M - \frac{EB \times BF \times M}{AB}$ $= BF \times M - \frac{BM^2 \times M}{AB}$. Simili modo idem de singulis reliquis pressionibus demonstratur; quare summa omnium pressionum in punctum B exercitarum [quarum quædam affirmativæ, quædam negativæ sunt, ut se mutuo in æquilibrio teneant] erit censenda = o; hoc est, $\int P = \int BF \times M - \int \frac{BM^2 \times M}{AB} = o$, [NB, intelligo per præfixum $\int$ summam collectam ex hujusmodi functionibus singulorum corporum *M*, *L*, *K*, *N*, &c.].

XX.

Notum est ex natura Centri gravitatis, nominando *S* summam omnium corporum totius systematis, fore $\int BF \times M = BC \times S$; adeoque etiam $BC \times S - \int \frac{BM \times M}{AB} = o$; unde sequitur $BC \times S = \int \frac{BM^2 \times M}{AB}$; proinde $AB = \frac{\int (BM^2 \times M)}{BC \times S}$. Hinc videmus centrum spontaneum rotationis B eo in loco fore, ubi Systema *M*, *L*, *K*, *N*, &c. tanquam Pendulum grave consideratum, atque suspensum ex puncto B, habeat centrum oscillationis in A; hoc est, cui isochronum sit Pendulum simplex longitudinis BA. Aut quia, demonstrante jam HUGENIO, Pendula composita eam habent proprietatem, ut punctum suspensionis & Centrum oscillationis possint converti, poterit Systema *M*, *L*, *K*, *N*, &c. sumi pro Pendulo composito oscillationis circa punctum suspensionis A; habebitque Centrum oscillatio-

cillationis in B; quod itaque erit ipſiſſimum quod quærimus Centrum ſpontaneum rotationis. *Q. E. I.*

XXI.

Ejuſdem puncti determinatio ex alio principio.

Fingamus primo in vecte per centrum gravitatis C tranſeunte, ſumi punctum B ad lubitum pro fulcro fixo, ex quo procedant brachia ad corpora Syſtematis alliganda BM, BL, BK, BN, &c. Ponamus dein corpora Syſtematis *M*, *L*, *K*, *N* &c. omnino tolli, eorumque loco totidem alia ſubſtitui in unam maſſam colligenda, atque directe opponenda vi motrici DA, quæ maſſa a vi motrice eadem velocitate angulari moveatur circa fulcrum B, qua ante ſubſtitutionem Syſtema ipſum *M*, *L*, *K*, *N*, &c. circa B moveretur. Ex §. 8 patet maſſam illam in A ſubſtituendam, in qua ſola vis motrix DA eandem excitat vim acceleratricem angularem, quam excitaret in Syſtemate corporum; patet, inquam, maſſam ſubſtituendam debere eſſe æqualem huic $\frac{BM^2 \times M + BL^2 \times L + BK^2 \times K + BN^2 \times N + \&c.}{AB^2}$.

XXII.

Jam vero, ſi locus fulcri B non ex noſtro arbitrio ponitur, ſed ſi rei naturæ relinquitur cura eligendi fulcrum, circa quod potentia motrix queat circumvolvere Syſtema, omni qua poteſt fieri facilitate; hoc ſane tunc fieri manifeſtum eſt, cum Centrum circulationis vel rotationis ad eum ſe componit locum B, ex quo oritur maſſa ſubſtituenda, quæ omnium poſſibilium ſit minima; utpote quæ potentiæ motrici opponit obſtaculum facillime ſuperandum. Ecce quem facio calculum: Sit data $AC = a$, quæſita $CB = x$, $CM = m$, $CL = l$, $CK = k$, $CN = n$. His poſitis, maſſa ſubſtituenda $\frac{BM^2 \times M + BL^2 \times L + BK^2 \times K + BN^2 \times N + \&c.}{AB^2}$ erit, per proprietatem Centri

tri gravitatis $= \frac{BC^2 \times S + CM^2 \times M + CL^2 \times L + CK^2 \times K + CN^2 \times N + \&c.}{AB^2}$ $= \frac{xxS + mmM + llL + kkK + nnN + \&c.}{(a+x)^2}$; quæ, ut sit minima, oportet eam differentiare, & æquare zero; quo facto, prodibit $2xSdx(a+x)^2 - (xxS + mmM + llL + kkK + nnN + \&c.).(a+x)2dx = 0$, seu $xS(a+x) = xxS + mmM + llL + kkK + nnN + \&c.$ &, facta reductione, $axS = mmM + llL + kkK + nnN + \&c.$); unde $x = \frac{mmM + llL + kkK + nnN + \&c.}{aS}$; & $a + x$, seu $AB = a + \frac{mmM + llL + kkK + mN + \&c.}{aS}$; id quod rursus indicat punctum B esse Centrum oscillationis Systematis M, L, K, N, &c. circa punctum A oscillantis.

XXIII.

SCHOLIUM.

En ergo insigne exemplum Naturæ operantis per modum simpliciſſimum; ut quasi ex instinctu sapientiæ agere videatur. Quem quidem modum, licet indirectum, a Filio quoque meo *Daniele* observatum fuisse intellexi, postquam dudum hæc scripseram. Interim quamvis causæ finales ex physicis proscribantur vulgo, mirari tamen satis non possumus, quod Naturæ effectus, ex legibus pure mechanicis explicati, conspirent semper cum generaliſſimo Canone metaphysico, qui nobis dictat, *Naturam nihil facere frustra; semper agere per viam breviſſimam; nihil de vi sua prodigere præter neceſſitatem ad producendum aliquem effectum; quæ poſſunt fieri per pauca nunquam a Natura fieri per plura*, &c. Quis autem ausit eo dementiæ procedere ut cogitet, nedum dicat, omnia quæ ita fiunt secundum leges Mechanico-Dynamicas, etsi videantur promanare ex prudentiæ consilio, non tamen nisi fortuito casui mirabilem istum concentum esse attribuendum? Dicamus potius Ens perfectiſſimum tanta perfectione, tanta arte

te & induſtria condidiſſe hoc Univerſum; ut undique elucerent in phænomenis veſtigia Omnipotentiæ conjunctæ cum Sapientia perfectiſſima. In quibuſdam nexus neceſſitatem non percipimus, ob imbecillitatem noſtram; in quibuſdam aliis rationem aliquam ejus reddere poſſumus. Sic, in caſu noſtro hucuſque pertractato, pronum eſt conjicere, ſi Centrum rotationis B in alio loco ſumeretur & figeretur, quam qui locus ſponte a natura ſe prodit, id futurum eſſe, ut vis aliqua ex effectu inertiæ corporum reſultans, ab uno latere vectis fortior quam ab altero, ſuſtineri debeat a puncto rotationis B, a cujus exceſſu, qui influit quoque in punctum A, fit ut corpus ſubſtituendum in hoc puncto majus eſſe debeat; eum in finem ut reſiſtat vi motrici BA, non tantum æquipollenter inertiæ Syſtematis, ſed etiam ei vi quæ punctum B plus premit ab una parte quam ab altera. Hoc autem, cum non ſit metuendum a Centro ſpontaneo; certe nulla alia reſiſtentia in A opponitur vi motrici DA, quam quæ originem habet a ſola inertia corporum *M*, *L*, *K*, *N*, &c.

Hoc præterea notare debemus, hujuſmodi Principium metaphyſicum caute tractandum eſſe in rebus mere phyſicis vel mechanicis; atque tunc tantum adhibendum, confirmationis gratia, quando jam conſtat de rei veritate ex cauſis mere dynamicis; uti in hoc noſtro Exemplo vidimus. Quod ſi enim duæ pluresve eſſent prærogativæ, quæ æquali jure admitti poſſent, ſed diverſos darent effectus; quamnam ergo ex illis diceremus eligi a Natura, ita ut præſtantiſſimum eligeret? Certe tale quid contingit in materia præſenti: nam quamvis verum ſit rotationem circa Centrum oſcillationis fore celerrimam; ſed ſi nobis perſuaderemus Centrum ſpontaneum rotationis fore in eo puncto, circa quod Syſtema corporum eadem vi rotatum faciat ut Centrum commune gravitatis [quod utique in recta linea movebitur] moveatur celerrime; inveniretur, facto computo, Centrum ſpontaneum fore in loco diverſo a Centro oſcillationis. Confugiendum igitur erit ad ſolutionem noſtram directam, ex Principio pure dynamico deductam, per quam ſtabilietur hypotheſis prior.

XXIV.

XXIV.

Agendum nunc esset de iis casibus, ubi plures potentiæ motrices, in diversis locis applicatæ, Systema ad rotandum incitarent; conabor vero hoc paucis absolvere. Directiones potentiarum illarum sunt, vel parallelæ, vel non parallelæ. Si prius, habebunt omnes communem perpendicularem ductam ex Centro gravitatis C Systematis pro vecte sumendam, adeoque considerando omnia puncta A tanquam totidem puncta, gravitantia perpendiculariter ad vectem in ratione potentiarum motricium quas repræsentant, ac tum in Centro gravitatis horum punctorum gravitantium omnes potentias in unam colligendo, clare intelligimus, ex natura Centri gravitatis Centrum spontaneum rotationis B in eodem fore loco, eodemque ritu rotatum iri totum Systema, sicuti fieret, si potentiæ dispersim agerent. Quod si directiones potentiarum non sunt parallelæ; possunt, per vulgarem Regulam compositionis virium, omnes in unam transformari, tum potentiam, tum directionem; ad quam dein ducta perpendiculari ex Centro gravitatis C totius Systematis, habebimus Casum simplicem, dilucide satis explicatum.

XXV.

De motu corporum irregularium, ex percussione, vel collisione aliorum producto.

Auctores, qui de communicatione motus tractant, haud aliter considerant corpora quam si essent sphærica, vel ita saltem posita, ut directio impulsionis transeat per Centra gravitatis corporum impellentis & impulsi; quo quidem casu, evidens est corpora, post impulsum, motum iri sine rotatione. De hac enim, si quæ accidit rotatio, ne cogitarunt quidem; unice solliciti de velocitate determinanda, secundum rectas lineas parallelas inter se, quas supponunt describi a singulis punctis corporis impulsi,

pulsi. Lubet vero Exemplum proponere, quo patefiet, qua lege debeat moveri corpus ab alterius incursu, tendente, non per Centrum gravitatis, sed in directione quæ Centrum illud ab alterutro latere relinquit. Esto corpus percutiendum figuræ cujuscunque FDGE, aliudque HLD, quod moveatur in directione RD, occurrens quiescenti FDGE in puncto contactus D, ubi utriusque corporis superficies habent communem tangentem MN, quam trajiciat recta perpendicularis TDE. Liquet ergo in collisione oriri, per compressionem corporum, potentiam motricem immaterialem, quæ ab una parte propellit corpus FDGE in directione DE, repellit vero alterum HLD in directione DT.

TAB. LXXXVI. *Fig.* 13.

XXVI.

Ponamus ambo corpora esse elastica, atque per Centrum gravitatis C ducta sit BCA perpendicularis ad DE. Ex Theoria in præcedentibus exposita sequitur, potentiam motricem in D excitatam, considerari posse tanquam applicatam in puncto A; hoc itaque sumto pro puncto suspensionis, ex quo nimirum figura FDGE instar Penduli suspensa intelligitur, cujus Centrum oscillationis sit in B, quod utique datum erit, ob datam figuram, & datum punctum suspensionis A. Dico itaque hoc punctum B fore Centrum spontaneum rotationis initialis, circa quod corpus percussum primo momento gyrari incipiet: Id quod primum est. Secundo, si corpus impellens DHL eo momento, quo incurrit in FDGE, ita situm est ut recta DT normalis ad tangentem transeat per Centrum gravitatis corporis DHL; hoc sane, post peractam impulsionem, retinebit parallelismum in motu suo, id est, plane non rotabitur: sin vero DT non transit per Centrum gravitatis, subibit corpus DHL etiam rotationem, cujus Centrum spontaneum simili modo determinatur, ut factum est in priori.

XXVII.

Ut nunc determinemus velocitates corporum post collisionem ortas; tres distinguendi sunt casus. 1°. Aut transit recta TDE per ambo Centra gravitatis corporum. 2°. Aut transit tantum per alterutrum, ex. gr. per Centrum gravitatis corporis HLD, relinquens extra se Centrum gravitatis C corporis FDGE. 3°. Aut transit per neutrum. Quod ad primum attinet casum, nulla adest difficultas; utpote qui casus est vulgaris, dudum resolutus; etenim ambo corpora movebuntur, post ictum, motu parallelo in partibus sine rotatione, & ita quidem ut si massa corporis HLD perpendiculariter impingentis in directione TD dicatur $= A$, ejusque velocitas ante ictum $= a$, & massa corporis FDGE $= B$, ejusque velocitas ante ictum [si quam habet in eadem directione DE præcedens] $= b$, minor quam a; futura sit post ictum velocitas corporis $A = \frac{aA - aB + 2bB}{A + B}$; in eandem partem, si hæc quantitas est affirmativa; sed in contrariam, si negativa: & velocitas corporis B post ictum $= \frac{2aA - bA + bB}{A+B}$; id quod docent vulgares Regulæ de communicatione motus traditæ pro corporibus elasticis. Vide *Dissertationem meam* hac de re Gallice editam p. 26. * Si corpus B ante ictum quiescit, [ut hic, brevitatis gratia, supponimus] erit, ut patet, velocitas post ictum, corporis $A = \frac{aA - aB}{A+B}$, & illa corporis $B = \frac{2aA}{A+B}$. Quod si corpus A, vel HLD, oblique feriat corpus B, secundum directionem RD, decomponendus est hic motus, more solito, in collaterales RT & TD, illum parallelum tangenti MN, hunc eidem perpendicularem: atque tum, si velocitas perpendicularis TD vocetur a, prodibunt eædem formulæ pro velocitatibus post ictum orituris; ubi nihil aliud præterea agendum, quam ut cum illa velocitate post ictum, pro corpore A obli-

* N°. CXXXV, pag. 28. & seqq. *Tom. III.*

que feriente, rursus componatur velocitas parallela, quam habebat ante ictum.

XXVIII.

Videamus autem porro, quid sit faciendum pro duobus reliquis casibus, hactenus a nemine consideratis; ubi nimirum recta TDE, perpendicularis ad communem tangentem MDN, non transit, per Centra gravitatis utriusque corporis, aut saltem si per alterutrum non transit. Interim, ut brevitati consulamus, lubet supponere corpus percutiendum FDGE, cujus massam vocavimus *B*, quiescere ante ictum, ejusque Centrum gravitatis C esse extra rectam DE, in qua directione percutitur, non attendendo ad directionem, in qua movetur corpus *A*, seu HLD, ante ictum; sive id fiat oblique per RD, sive normaliter per TD; neque etiam attendendo an transeat, an non transeat recta TD per Centrum gravitatis corporis HLD. Quare ante omnia determinari debet locus Centri rotationis B, circa quod nempe corpus percussum FDGE rotari incipit; quod utique secundum Theoriam nostram, erit in recta AC perpendiculari ad lineam directionis motus initialis DAE: nam quia vis motrix, a compressione orta inter utrumque corpus, agit in percussum secundum rectam DA normalem ad CA; potest considerari illa vis, veluti applicata ad extremitatem A vectis ACB. Proinde per §. 20, punctum rotationis B, erit in Centro oscillationis corporis FDGE suspensi ex puncto dato A: hinc ergo dabitur longitudo AB, quæ vocetur *L*.

XXIX.

Velocitatem initialem puncti A, in directione AE, venabimur sequenti modo. Fingamus corpus percutiendum FDGE divisum in infinita corpuscula minima, quale unum est *m*; ad quæ singula, ex puncto rotationis B, ductæ intelligantur rectæ *Bm*, omnino ut fecimus in §. 16, pro Systemate ex pluribus

corpuſculis conflato. Hæ rectæ erunt inſtar totidem brachiorum vectis principalis AB, quorum unumquodque ſecum vehit ſuum ſibi alligatum corpuſculum m. Quare ſi ſublato toto corpore FDGE, ei ſubſtituamus in puncto A collocandum corpus aliud, quod ſit æquale ſummæ omnium $B m^2 \times m$, diviſæ per AB^2 [id quod in hunc modum $\int \frac{B m^2 \times m}{AB^2}$ exprimi poteſt]; erit per §. 8, hoc corpus $\int \frac{B m^2 \times m}{AB^2}$ collective ſumtum, atque in puncto A locandum, æquipollens figuræ corporeæ FDGE; hoc eſt, acquiret illud a potentia motrice eandem velocitatem, quam ab initio acquireret punctum A, in ipſa figura circa B rotanda. Quod ſi directio RD corporis incurrentis HLD talis ſit, ut per decompoſitionem in collaterales DT & RT, illa DT tranſeat per Centrum gravitatis ipſius corporis; nulla fiet in illo rotatio; nulla proin facienda ſubſtitutio, ſed corpus ipſum impingens jam faciet, cum priori illo ſubſtituto $\int \frac{B m^2 \times m}{AB^2}$, neceſſariam compreſſionem, ut inde reſultet vis motrix, quæ ei dabit velocitatem eandem, quam ab illa vi acquireret ab initio rotationis punctum A figuræ percuſſæ FDGE. Sin vero directio TD non tranſeat per Centrum gravitatis corporis impingentis HLD; tunc utique pro hoc etiam facienda eſt ſubſtitutio alius corporis, ſimili modo quo facta eſt pro corpore impulſo; atque ita res redacta erit ad caſum ordinarium duorum corporum ſe mutuo centraliter impellentium.

XXX.

Ex hoc vero quod puncta A & B eam inter ſe habent relationem, ut, uno exiſtente puncto ſuſpenſionis, alterum ſit Centrum oſcillationis in corpore FDGE, mutari poteſt formula $\int \frac{B m^2 \times m}{AB^2}$, quæ ex infinitis terminis componitur, in aliam

ſimplicem, uno tantum termino conſtantem; nempe ſic. Sumto B pro puncto ſuſpenſionis, erit, ut jam dictum eſt, punctum A Centrum oſcillationis; ergo ex demonſtratis $BA = \int \frac{Bm^2 \times m}{BC \times B}$ [nominando ſcilicet *B* maſſam corporis FDGE]; ac proinde $\int (Bm^2 \times m) = BA \times BC \times B$. Dividendo utrumque per AB^2, habebitur $\int \frac{Bm^2 \times m}{AB^2} = \frac{BC \times B}{BA}$. Hinc ſi fiat BA ad BC, ita corpus *B* ad quartum; erit hoc corpus quartum, id ipſum quod quæritur ſubſtituendum pro corpore FDGE, quod nimirum, a corpore percutiente centraliter percuſſum in directione DAE, omnino eandem velocitatem acquiret, qua cum corpus FDGE ad rotandum circa B incitaretur.

XXXI.

Idem quoque obſervari debet, ſi pro corpore incurrente HLD, quod ſupra vocavimus *A*, ſubſtituere velimus aliud ſimplex, quod priori ſubſtituto incurrens eidem eandem iterum velocitatem imprimet: concipiendo enim in figura corporis HLD litteras α, β, γ analogas litteris A, B, C, id eſt, idem cum hiſce ſignificantes; facile intelligimus corpus ſubſtituendum pro corpore *A*, vel HLD, fore $= \frac{\beta\gamma \times A}{\beta\alpha}$. Dico itaque ſi hoc corpus elaſticum $\frac{\beta\gamma \times A}{\beta\alpha}$, velocitate & directione RD, impingat in alterum illud pariter elaſticum & quieſcens $\frac{BC \times B}{BA}$, habeatque utrumque figuram globi, eam inde præciſe velocitatem impreſſum iri quieſcenti, quam acquireret corpus FDGE in puncto A, ad rotandum circa punctum B. Vocetur illa velocitas $= V$, eritque puncti A velocitas angularis $= \frac{V}{AB} =$ velocitati angulari Centri gravitatis C: unde ſequitur velocitatem abſolutam hujus centri fore $= \frac{CB \times V}{AB}$. Eſt enim velocitas abſoluta puncti

A

A ad absolutam velocitatem Centri gravitatis C, ut AB ad CB.

XXXII.

Finge jam, in ipso percussionis momento punctum B reddi immobile, infixo axiculo, ita tamen, ut tota figura FDGE liberrime circulari possit circa punctum illud B; utique facile percipies id futurum esse, ut, peracta percussione, postquam corpora impellens & impulsum jam iterum a se invicem sunt separata, quod brevissimo fit tempusculo, Centrum gravitatis C, sua semel acquisita velocitate $\frac{CB \times V}{AB}$, continuo circulari pergat circa B, simul cum singulis reliquis punctis corporis impulsi; quorum unumquodque eam habebit velocitatem absolutam, quæ proportionalis est distantiæ ab axiculo in B infixo. Quid autem fiet, si remoto nunc axiculo, figura circulans FDGE in libertatem restituitur? Hoc sane futurum prævideo, ut more projectilium [a quorum gravitate abstrahitur] Centrum gravitatis C protinus incipiat moveri secundum directionem rectilineam, in qua tunc reperitur, & quidem celeritate uniformi, sicuti jam dudum demonstratum est; atque ita, perseverante rotatione, singula reliqua puncta describent curvas cycloïdales, inter quas illa, quæ ab ipso puncto B describitur, est Cycloïs ordinaria *Hugeniana*, habens pro tangente initiali ipsam BA; cæteræ vero omnes sunt Cycloïdes, vel contractæ, vel protractæ, prout a puncto C vel plus vel minus distant quam punctum B. Sed nolo nimius esse in his, quæ quilibet sua attentione assequi potest.

Hoc interim notatu dignum est, duplicem jam considerandum esse motum angularem uniformem in uno eodemque corpore FDGE; unum nempe circa Centrum gravitatis C, dum hoc Centrum movetur motu æquabili in recta ipsi DE parallela; alterum vero circa Centrum rotationis B, quod pariter motu æquabili fertur super Cycloïde ordinaria, cujus maxima altitu-

do

do = 2BC, vel quæ Cycloïs describitur a circulo, cujus radius = BC, dum hic circulus rotatur super recta BP etiam parallela ipsi DE.

Possibilitas & veritas duorum horum motuum angularium atque uniformium, in eodem corpore simul existentium, [quorum alter alteri æqualis est] patebit attente consideranti proprietatem Cycloïdis ordinariæ.

XXXIV.

Ex data velocitate motus progressivi Centri gravitatis C in recta ipsi DE parallela, atque ex data velocitate motus angularis circa C, determinari potest locus puncti B; atque ex his locus puncti A, ubi vis motrix applicanda est, ut tales duo motus [datam proportionem inter se observantes] in corpore FDGE generari possint. Contemplatio ista fortassis usum suum habere potest in Physica cœlesti. Vulgaris opinio est, nullum esse nexum, nullam dependentiam necessariam inter motum diurnum & motum annuum Planetarum: motus isti, ad sensum quidem uniformes vel æquabiles, tamen in unoquoque Planeta apparent tales vel tales esse ex fortuito naturæ eventu: nam etiamsi, quod spectat ad motus annuos circa Solem, hanc observent legem necessariam, ut eorum tempora periodica sint in sesquiplicata ratione distantiarum; nulla tamen hactenus ratio ex naturæ legibus allegari potuit, cur hic vel ille Planeta revolutiones suas diurnas peragat tali potius tempore, quam alio; cur ex. gr. Terra, quæ anni spatio orbitam suam absolvit, opus habet 24 horis pro una gyratione circum-centrali: Jupiter vero, qui quinquies circiter longius abest a Sole, & cujus massa plusquam millies superat Terram, atque 12 propemodum annorum tempore semel circuitum facit circa Solem, non omnino tamen decem horas impendat in unam revolutionem circa suum centrum.

XXXV.

XXXV.

Non putem hujus rei aptiorem cauſam aſſignari poſſe, quam dicendo, in ſingulis Planetis, utriuſque hujus motus relationem ad ſe invicem originem habere a primitiva applicatione potentiæ motricis; a qua quippe ſola uterque motus produci potuit. Finge enim Planetam FDGE, quamcunque habeat figuram, ab initio exiſtentiæ ſuæ accepiſſe impulſum in directione DE. Quod ſi hæc directio forte tranſiiſſet per Centrum gravitatis C; facile percipis, ex iſto impulſu nullum alium motum ſubſecuturum, quam progreſſivum ſecundum eandem directionem, ſine omni rotatione: adeoque talis Planeta, ſi quis eſſet, careret motu diurno. Sed ſi primordialis directio DE per Centrum gravitatis C non tranſiiſſet; intelligis utique ex ante dictis, præter motum progreſſivum, alterum inſuper circulantem circa C æque ac circa aliud quoddam B produci debuiſſe.

XXXVI.

Verum, & hoc præterea facile perſpicimus, motum hunc rotationis vel tardiorem eſſe, vel celeriorem, prout recta DE vel propius, vel remotius a centro C diſtiterit. Ut igitur detegamus, in quolibet Planeta, cauſam ſui motus diurni, hujuſque celeritatis; id certe aliunde peti non poteſt, quam ex ipſis phænomenis. Hunc in finem, per Centrum gravitatis C ductam fingamus rectam BCA normalem ad DAE; in hac BA indagandum eſt punctum B, quod ſit Centrum initiale rotationis; ex quo cognito, cognoſcetur punctum A, ubi potentia motrix applicanda fuerit. Ex conſideratione Cycloïdis vulgaris *Hugenianæ*, quam punctum B deſcribere debet, haud difficulter vidi, inſtituendam eſſe hanc analogiam: *Ut ſe habet circuli peripheria* p *ad radium* r, *ita longitudo* L *viæ, quam Planeta percurrit in ſua orbita circa Solem, durante una revolutione circa ſuum Centrum gravitatis C, ſe habebit ad quartam CB.* Erit itaque $CB = \frac{rL}{p}$.

Reliqua nunc sponte fluunt: nempe ex dato jam puncto suspensionis B & Centro gravitatis C, invenietur Centrum oscillationis A Planetæ FDGE ex puncto B suspensi; atque id ipsum punctum A erit quod quæritur [per §. 28]; ubi scilicet potentia motrix applicata dedit Planetæ ambos motus, annuum & diurnum, ea lege se habentes, quam docet experientia. Qua quidem ratione explicare voluimus, quo pacto possibile sit, ut in quolibet Planeta uterque motus ex uno eodemque principio originem suam traxerit; ac proinde non sit fortuito casui adscribendum [ut hactenus creditum est], quod isti duo motus hanc & non aliam inter se servent proportionem, respectu temporum periodicorum.

XXXVII.

Ut usus nostræ Regulæ clarius pateat, sumamus pro exemplo duplicem motum Terræ, annuum & diurnum; ex quorum comparatione inveniendus sit locus A, ubi vis motrix primitive applicata, potuerit producere ambos hos motus in Globo terrestri. Supponamus autem Terram perfecte sphæricam, atque ex materia homogenea conflatam; quo fiet ut ejus Centrum gravitatis C sit in ipso centro Globi. Dicatur $\frac{p}{r}$ ratio peripheriæ circuli ad radium, ipsa vero semidiameter Terræ dicatur $= R$. Erit, ex Astronomorum sententia, semidiameter orbitæ Terræ circa Solem $= 22000\,R$ [Supponimus enim orbitas planetarias esse circulares, vel parum a circulis discrepantes] adeoque circumferentia orbitæ Terræ $= \frac{22000\,p\,R}{r}$. Est vero tempus revolutionis annuæ ad tempus revolutionis diurnæ [hoc est, neglecta fractione, 365 ad 1] ut circumferentia orbitæ annuæ $\frac{22000pR}{r}$ ad L, seu ad longitudinem viæ unâ revolutione diurna emensæ; erit ergo $L = \frac{22000pR}{365r} = \frac{4400pR}{73r}$, ac proinde, per Regulam nostram, $\frac{rL}{p}$, seu $CB = \frac{4400\,R}{73}$.

Su-

Sumendo nunc, vi Regulæ *Hugenianæ* [vid. *Horol. oscill.* fol. 142.] duas quintas tertiæ proportionalis ad CB & radium R, habebitur $CA = \frac{2 \times 73\,R}{5 \times 4400} = \frac{73\,R}{11000} = \frac{1}{150} R$, quam proxime.

Dico itaque si Globus aliquis [Terram repræsentans] confectus ex materia homogenea, quiescens primo, postea in motum agitetur a quacunque vi motrice applicata perpendiculariter ad distantiam a Centro quæ sit sesquicentesima pars radii; dico, inquam, hunc Globum duos inde motus acquisiturum, unum progressivum, alterum circulantem, qui accurate satis respondebunt motui annuo & diurno Telluris.

COROLLARIUM.

Videmus hinc, punctum B, quod supra §. 18 nominavimus Centrum spontaneum rotationis tam procul a Terra existere, ut CB, seu ejus distantia a centro, sit $= \frac{4400\,R}{73} =$ circiter 60 diametris Terræ; atque adeo pertingat usque ad regionem Lunæ. Quod an sit inter raro contingentia numerandum; an vero ex necessitate aliqua physica, effectui Lunæ attribuenda, consequatur; de eo dispiciant Physici. Fortassis reperient aliquam rationem a motu & distantia Lunæ repetendam, cur motus annuus & diurnus Terræ eam inter se habeant relationem quam habent; ita ut aliam habere non possint.

XXXVIII.

SCHOLIUM.

Simili calculo supputantur distantiæ illæ CB & CA pro reliquis Planetis, quorum constat ratio inter tempora unius revolutionis circa Solem & unius revolutionis circa axem. Sic inveni pro Marte, cujus semidiameter M ad semidiametrum Terræ R statuitur ab hodiernis Astronomis ut 3 ad 5, ita ut M sit

$= \frac{3}{5} R$; inveni, inquam, pro Planeta Martis $CB = \frac{41930 M}{501}$, ſeu $84M$ quam proxime, & $CA = \frac{1}{418} M$ quam proxime.

Jupiter, qui omnium maximus eſt Planeta, habet ſemidiametrum N decuplo majorem ſemidiametro Terræ R, hoc eſt, $N = 10R$; pro hoc autem invenitur, Regulæ meæ ductu, $CB = \frac{2288N}{2103} = \frac{11}{10} N$ quam proxime, & per Theorema *Hugenianum*, $CA = \frac{2 \times 2103 N}{5 \times 2288} = \frac{2103 N}{5720} = \frac{7N}{19}$ quam proxime. Mirum hic eſt Centrum ſpontaneum rotationis primitivæ tam parum abeſſe a centro ipſo Globi Jovialis, ut ejus diſtantia ſuperet ſemidiametrum Jovis vix decima ſui parte, vel una tantum ſemidiametro Terræ; cum in minoribus Planetis, Terra nempe & Marte, diſtantia illa in priore quinquies duodenis, in altera ſepties duodenis vicibus ſuam reſpective ſemidiametrum omnino excedat.

Quod attinet ad Saturnum & Mercurium; hac de re pro illis nihil aſſerere poſſumus, quoniam eorum revolutiones circa axes ſuos hactenus ſunt ignotæ: neque etiam quicquam decernere volumus de Venere, ob incertam ejus atque dubiam revolutionis diurnæ durationem; dum aliqui illam ſtatuunt 23 horarum, alii vero, ut BIANCHINUS, totidem dierum.

Cæterum ſilentio non prætereundum eſt, Planetas fuiſſe hic conſideratos ut nudos, atque liberos a circumfuſis atmoſphæris; cum autem probabiliter ſinguli Planetæ, ſaltem primarii, ut Terra, ſuas habeant atmoſphæras, quæ, ſimul cum Planetis quos ambiunt, circumrotantur, atque ita cum illis conſtituant ſinguli unam continuam maſſam; non videtur dubitari poſſe, quin aliter ſe habeant loca punctorum B & A, quam a nobis determinata ſunt: an autem ab acceſſione atmoſphæræ magna & ſenſibilis oritura eſſet differentia, merito dubitamus, ob raritatem materiæ atmoſphærarum, uſque adeo rareſcentis aſcendendo a ſuperficie Planetarum per regiones altiſſimas, ut omnis

nis ejus quantitas collectim sumta tantum non pro nihilo reputari possit, respectu habito ad molem ingentem materiæ densissimæ, ex qua constant Planetæ: id quod facile per calculum demonstrari posset, sed brevitati studendum est. In eadem sententia fuisse NEWTONUM patet ex ejus *Principiis Phil. Natural. p.* 470. Edit. secundæ; ubi hæc habet verba: *Globus aëris nostri digitum unum latus, ea cum raritate quam haberet in altitudine semidiametri unius Terrestris, impleret omnes Planetarum regiones, ad usque sphæram Saturni & longe ultra.*

XXXIX.

Ad clariorem intelligentiam eorum quæ sequuntur, præmittendum est hoc

LEMMA.

Data, in oscillationibus minimis, relatione inter vires acceleratrices & excursiones a puncto quietis; invenire longitudinem Penduli simplicis isochroni oscillationibus illis.

SOLUTIO.

Esto semi-Cycloïs ABD inversa, cujus vertex D; evoluta AFE est etiam semi-Cycloïs ipsi DBA æqualis. Notum est ultimum radium evolutionis DE esse pariter æqualem semi-Cycloïdi ABD, & esse longitudinem Penduli simplicis, cujus semi-oscillatio minima est isochrona descensui corporis gravis per semi-Cycloïdem, vel per arcum BCD, incipiendo descendere a quocunque puncto B. Notum est denique, vim acceleratricem tangentialem corporis descendentis, in quolibet puncto B, esse ad vim acceleratricem naturalem, in puncto A, secundum tangentem verticalem, ut se habet longitudo arcus BD ad longitudinem semi-Cycloïdis ABD, seu rectæ ED. Esto jam alicubi corpus quoddam C, ab aliqua causa constitutum

TAB. LXXXVI. *Fig.* 14.

tum in motu oscillatorio, ita ut, pro quavis assumta excursione t a puncto quietis, data sit ejus competens vis acceleratrix γ, proportionalis utique excursioni t; lubeatque jam invenire longitudinem Penduli simplicis, corporis C oscillationibus isochroni. Ad hoc obtinendum, fingamus excursionem t esse portiunculam DC infimam Cycloïdis quærendæ, ita ut vertex D sit in puncto quietis, a quo fiunt excursiones. Erit igitur, per prædictam proprietatem Cycloïdis, ut vis acceleratrix γ in loco C, ad vim acceleratricem naturalem g in initio Cycloïdis A, ita longitudo excursionis t, seu DC, ad ABD, quæ erit longitudo quæsita Penduli simplicis isochroni $ED = \frac{gt}{\gamma}$.

XL.

De corporum aquæ insidentium oscillationibus, & de invenienda longitudine Penduli simplicis oscillationibus illis isochroni.

De corporibus humido insidentibus jam aliquid scripsit ARCHIMEDES, quod extat inter ejus Opuscula; ubi id tantum egit, ut definiret situm, quem quædam solida, præsertim Conoidea Parabolica, in aqua stagnante acquirere debent, ut in quiete permaneant; ad eundemque redeant, si ex isto situ nonnihil fuerint deturbata. Hujus rei natura nititur duobus Principiis, quorum unum est, quod Centrum gravitatis solidi insidentis sit in eadem recta verticali cum Centro gravitatis voluminis aquei, cujus spatium occupat solidum insidens. Hujus Principii veritas haud longe est petenda, & fere per se patet. Alterum vero Principium, quod demonstrari potest, in hoc consistit, ut intervallum duorum planorum horizontalium, per duo illa Centra gravitatis transeuntium, sit vel minimum, vel maximum; nempe minimum, si Centrum gravitatis solidi fuerit altius Centro gravitatis voluminis aquei, uti si solidum est ex materia homogenea; maximum vero intervallum erit, si gra-

Centrum gravitatis ſolidi fuerit profundius quam Centrum gravitatis voluminis aquei, id quod contingere poteſt, in caſibus ubi materia ſolidi eſt heterogenea, ſeu non uniformiter denſa.

XLI.

Concipiamus igitur, in aqua ſtagnante, corpus aliquod ſolidum CAEB ſpecifice levius quam aqua; quod ſuo pondere demerſum hæreat, uſque ad ſuperficiem primo horizontalem AB: ſit vero G, Centrum gravitatis totius corporis CAEB; quod, ut rem generaliſſime pertractemus, ſupponimus quomodocunque heterogeneum. Intelligatur jam planum aliquod verticale tranſiens per Centrum gravitatis G; cujus plani ſectio in ſuperficie corporis formet curvam CAEB. Clarum eſt, ex Staticis, rectam verticalem EGI, ductam per Centrum gravitatis G corporis ſolidi, tranſituram quoque eſſe per punctum O, quod foret Centrum gravitatis voluminis aquei, cujus ſpatium occupatur a parte corporis immerſa AEB. Vis enim aquæ corpus ſurſum pellere nitens, concentrata in O, debet eſſe æqualis, & directe oppoſita vi ponderis in G collectæ, & corpus deorſum urgenti; alioquin corpus in æquilibrio ſubſiſtere non poſſet. TAB. LXXXVI. *Fig.* 15.

XLII.

PROBLEMA I.

Moveatur corpus pauliſper circa punctum G, ita ut recta GOI ex ſitu verticali G*i* inclinetur, faciatque cum ea angulum acutiſſimum IG*i*; quo fiet ut etiam planum ſectionis aquæ AIB, quod erat horizontale, jam faciat cum nova ſectione *a*I*b* angulum acutiſſimum, & quidem æqualem angulo IG*i*. Corpus vero nunc ſibi relictum remeabit ad ſitum quietis & ultra, [præſertim ſi G fuerit infra O;] atque motu reciproco formabit oſcillationes. Quæritur longitudo Penduli ſimplicis, quod faciat cum illis oſcillationes contemporaneas?

SOLU-

SOLUTIO.

Hoc Problema excogitatum primo, atque solutum ab ingeniosissimo nostro EULERO [cujus autem analysin ipsam hactenus nondum vidi] ex meis principiis solvitur sequentem in modum. Ante omnia observo, corpus CAEB, inter oscillandum, semper occupare volumen aqueum æquale dato; ut nimirum eadem semper servetur ratio inter volumen partis immersæ & volumen corporis totius; quod sane ex æquilibrii natura manifestum est.

Hinc sequitur, volumen aqueum ungulæ A I *a*, inter plana A I & *a* I contentæ, esse æquale alteri volumini B I *b*, quod ex aqua emersit.

Quod si jam *o*, in recta verticali G *i*, fuerit Centrum gravitatis voluminis aquei, existente scilicet corpore in statu quietis, seu æquilibrii; erit ducta G I perpendiculari ad A B, sumtaque G O = G *o*, erit, inquam, punctum O Centrum gravitatis voluminis aquei *a* E *b*; ipsaque O *o*, ob parvitatem anguli O G *o*, haberi potest pro horizontali linea, quæ producta, transibit per *ω* Centrum gravitatis voluminis aquei *a* E *b*, quod occupat corpus in situ inclinato. A determinatione hujus puncti *ω* dependet Problematis solutio.

In hunc finem, posito angulo acutissimo A I *a*, vel B I *b*, vel *o* G O = *n*; erit O *o* = *n* × G *o*. Concipiatur totum volumen aqueum a corpore occupatum [quod dicatur *V*] divisum in strata verticalia parallela plano A E B vel *a* E *b*; quo ipso, utraque ungula resolvetur in stratula triangularia acutissima, habentia singula suos angulos acutos æquales ipsi A I *a*, vel B I *b*. Quare, si in unoquoque stratulorum, latus illud quod ipsi A I est parallelum dicatur *y*; ut &, ab altera parte, in unoquoque stratulorum latus illud quod ipsi I B est parallelum, vocetur *z*; ipsa vero crassities communis stratulorum nominetur *dx*; erunt utique singula stratula ipsi A I *a* parallela = $\frac{1}{2} nyydx$, & pariter ab altera parte singula ipsi B I *b* parallela = $\frac{1}{2} nzzdx$; unde contentum ungulæ inter plana A I & *a* I = $\frac{1}{2} nsyydx$, & contentum alterius ungulæ inter B I & *b* I = $\frac{1}{2} nszzdx$.

Porro,

Porro, nominando g vim gravitatis naturalis, qua corpora animantur; atque V volumen AEB vel aEb, quod corpus occupat in aqua; erit utique pondus ejus aquæ, quæ hoc volumen repleret, $= gV =$ [per Legem Hydroſtaticam] ponderi ipſius corporis aquæ inſidentis; tanta enim vi gV ab aqua ambiente ſurſum urgetur corpus, quanta ipſum ſuo pondere nititur deorſum; quæ cauſa eſt, ut, cum duo Centra gravitatis o voluminis aquei & G totius corporis reſpondent ſibi mutuo in eadem recta verticali Go, ſervetur æquilibrium. Videndum itaque eſt, quid fiat, ſi recta conjungens centra ex ſitu verticali Go paululum inflectatur in ſitum obliquum GO. Hic quidem ſtatim obvium fit, punctum O, etſi ſit centrum voluminis AEB, non tamen eſſe Centrum voluminis nunc occupati aEb; utpote cujus Centrum erit alicubi in ω, prolongando ſcilicet lineolam oO, ut modo ſupra jam innui. Eſt vero pondus ungulæ aqueæ AI$a = \frac{1}{2} gn\int yy\,dx$, & pondus ungulæ BI$b$ [ſi nempe aqua eſſet plena] $= \frac{1}{2} gn\int zz\,dx$.

Intelligatur nunc ſuper GI [quæ tranſit per Centrum gravitatis O voluminis uniformiter denſi AEB] erectum eſſe planum perpendiculare plano ſectionis AEB, vel aEb; erit, ex principio Statico, O$\omega \times gV$ [quatenus volumen AEB venit in ſitum aEb] = momento ponderis voluminis aquei, reſpectu plani ſuper EI erecti. Hoc autem momentum eſt æquale ſummæ momentorum partium, hoc eſt, momento voluminis totius AEB, plus momento ungulæ AIa, minus momento ungulæ BIb. Quia vero volumen aqueum AEB habet ſuum Centrum gravitatis O in ipſo plano ſuper GI perpendiculari; erit ejus momentum = o, atque alterum momentum ipſius BIb, utpote priori AIa oppoſitum, adeoque hujus reſpectu negativum, fiet affirmativum, ob negationem negativi.

Ungulæ momentum habetur, ſumendo aggregatum momentorum, quod fit ex momentis ſingulorum ſtratorum triangularium, quorum unumquodque momentum ſtrati in ungula AIa eſt $= \frac{2}{3}$ AI $\times \frac{1}{2} gn$ AI$^2\,dx = \frac{1}{3} gn$ AI$^3\,dx = \frac{1}{3} gny^3\,dx$; ac pariter unumquodque momentum ſtrati in altera ungula BI$b = \frac{1}{3} gnz^3\,dx$. Hinc igitur O$\omega \times gV = \frac{1}{3} gn\int y^3\,dx + \frac{1}{3} gn\int z^3\,dx = \frac{1}{3} gn\int (y^3 + z^3)\,dx$,

adeoque $O\omega = \frac{n\int(y^3+z^3)\,dx}{3V}$; & $Oo + O\omega$, seu $o\omega = n.Go + \frac{n\int(y^3+z^3)\,dx}{3V}$.

Inventa hoc modo distantia $o\omega$; ducatur porro verticalis ωR, occurrens in R horizontali GR ductæ ex puncto G, quod considerari potest instar puncti suspensionis Penduli inversi, circa quod tota figura solida CAEB suas oscillationes facit: ita ut $o\omega$ designet excursionem Centri gravitatis ω voluminis aquei a corpore occupati, interea dum Oo est excursus, ipsius puncti O, quatenus in corpore oscillante eundem semper locum occupat, atque ad punctum stabile o hinc inde reciprocando tendit. Patet enim motum puncti G, si quem haberet sursum vel deorsum versus, debere esse infinities minorem, quam est motus oscillatorius Centri gravitatis o in directione horizontali Oo; qui motus jam ipse tardissimus est, utpote qui supponitur facere oscillationes minimas tempore finito. Quod cum ita sit, habebimus vectem rectangularem oGR, super hypomochlio G, ad cujus brachii horizontalis GR extremitatem R, applicari intelligitur tota vis voluminis aquei gV sursum tendens in directione verticali $R\omega$.

Instituendo itaque, ex natura vectis, hanc analogiam: Ut se habet longitudo brachii Go, ad longitudinem brachii GR, seu $o\omega$, seu $n.Go + \frac{n\int(y^3+z^3)\,dx}{3V}$, ita erit vis ponderis gV punctum R sursum urgentis ad $gnV + \frac{gn\int(y^3+z^3)\,dx}{3Go}$, sive ad $\frac{gnV}{Go} \times (Go + \frac{\int(y^3+z^3)\,dx}{3V})$; id quod erit vis motrix [quæ pro vi ponderis gV substituenda est] applicanda in o horizontaliter ad restituendum corpus insidens oblique ad situm æquilibrii verticalem.

Restat ut investigetur, ex ista vi motrice, vis acceleratrix; quod peragitur, si concipiatur corpus CAEB resolutum in particulas minimas p, quarum singularum densitas propria dicatur δ, ita ut δp significet quantitatem materiæ singulis particulis com-

competentem [hoc ita facio quia ſupponitur corpus inſidens eſſe heterogeneum, ſeu non uniformiter denſum]; ſit vero denſitas aquæ, utpote uniformiter denſæ = 1. Dicatur porro r diſtantia particulæ cujuſlibet ab axe per punctum G tranſeunte, circa quem corpus inſtar Penduli inverſi oſcillatur. Hinc ſi, loco totius corporis, intelligamus in puncto o concentratam eſſe quantitatem materiæ, quæ ſit $= \frac{\int r r \partial p}{Go^2}$, concludimus ex §. 8 hanc maſſam concentratam a vi motrice eodem modo oſcillaturam, ac facit corpus ipſum CAEB. Quare ſi dividatur vis illa motrix quæ eſt $\frac{gnV}{Go} \times \left(Go + \frac{\int (y^3 + z^3)\, dx}{3V} \right)$ per quantitatem materiæ $\frac{\int r r \partial p}{Go^2}$; prodibit vis acceleratrix horizontalis $= \frac{gnV \times Go}{\int r r \partial p} \times \left(Go + \frac{\int (y^3 + z^3)\, dx}{3V} \right)$. Cognita jam vi acceleratrice horizontali, & data longitudine excurſionis Oo, quæ eſt $= na$ ſeu $n.Go$, facile invenimus, ex natura Cycloïdis, longitudinem Penduli ſimplicis iſochroni cum corpore in aqua lateraliter oſcillante; faciendo ſcilicet tantum hanc analogiam [per *Lemma* ad §. 39]: Ut ſe habet vis acceleratrix $\frac{gnV \times Go}{\int r r \partial p} \times \left(Go + \frac{\int (y^3 + z^3)\, dx}{3V} \right)$ ad vim acceleratricem naturalem g, ita longitudo excurſionis $n.Go$ ad quartam, quæ erit $\frac{3 \int r r \partial p}{3V.Go + \int (y^3 + z^3)\, dx}$ = longitudini Penduli ſimplicis iſochroni.

XLIII.

ALITER.

Ex puncto O, in quo maſſa materiæ $\frac{\int r r \partial p}{Go^2}$ concentrata ponitur, erigatur verticalis OS, atque ſecundum hanc directionem vis motrix ſurſum trahens eam maſſam habetur, faciendo, ex natura vectis, ut Oo ad ωo, ita vis voluminis aquei collecta

in ω, hoc est, gV, ad $\frac{gV.\omega o}{Oo} =$ [substituendo pro Oo & ωo eorum valores] $gV + \frac{g\int(y^3+z^3)\,dx}{3Go}$. Et sic res reducta est ad considerationem Penduli simplicis inversi, cujus longitudo est Go, vel GO, punctum suspensionis G, corpus in o vel O sursum gravitans $= \frac{\int rr\delta p}{Go^2}$, gravitatio ipsa, seu vis motrix, sursum tendens $= gV + \frac{g\int(y^3+z^3)\,dx}{3Go}$. Quare, dividendo hanc vim motricem per massam corporis $\frac{\int rr\delta p}{Go^2}$; prodibit vis acceleratrix, qua hoc corpus animatur, $= \frac{gV\times Go^2 + \frac{g}{3}Go.\int(y^3+z^3)dx}{\int rr\delta p}$.

Jam vero, per Propositionem supra citatam §. 9, quam demonstravi in *Actis Lipsi.* 1713, p. 79, * duo nimirum Pendula simplicia a diversis viribus acceleratricibus agitata esse isochrona, si habuerint longitudines suis viribus acceleratricibus quibus animantur proportionales. Proinde dicendo, ut se habet corporis nostri $\frac{\int rr\delta p}{Go^2}$ vis acceleratrix $\frac{gV\times Go^2 + \frac{1}{3}g\times Go\times\int(y^3+z^3)\,dx}{\int rr\delta p}$ ad vim acceleratricem naturalem g, ita longitudo Go ad $\frac{3\int rr\delta p}{3V\times Go + \int(y^3+z^3)\,dx}$, quæ erit longitudo quæsita Penduli simplicis isochroni; prorsus ut ante.

COROLLARIUM.

Si corporis $CAEB$ Centrum gravitatis G est altius quam Centrum gravitatis o voluminis aquei; id quod necessario fieret, si corpus esset homogeneum; evadit Go negativa: quo casu gravitatio, seu vis motrix corpus sursum urgens, exprimenda est per $gV - \frac{g\int(y^3+z^3)\,dx}{3Go}$; atque ita accidere potest ut valor ejus fiat omnino negativus, quando scilicet $\frac{\int(y^3+z^3)\,dx}{3Go}$ supe-

* N°. XC, pag. 518, *Tom. I.*

ſuperat ipſum V; quod ubi contingit, viſibile utique eſt corpus, tantillum inclinatum ex ſtatu æquilibrii, non poſſe reſtitui, ſed prorſus præceps ſubverſum iri.

XLIV.

SCHOLIUM.

Gravitatio, ſeu vis motrix qua corpus inter oſcillandum ſurſum urgetur, eſt forſan illa ipſa, quæ ab EULERO noſtro, in litteris ſuis die 30 Julij, 1738, ad me datis, vocatur *vis firmitatis reſiſtens inclinationi corporis*: revera enim formula mea $gV+\frac{g\int(y^3+z^3)\,dx}{3Go}$, vel, quæ eodem recidit, $\frac{gV}{Go}\times(Go+\frac{\int(y^3+z^3)\,dx}{3V})$ nihil differt ab *Euleriana*, $M(GO+\frac{\int(y^3+z^3)\,dx}{3V})$; ubi M idem denotat quod apud me gV; nempe pondus Corporis oſcillantis, vel, quod perinde eſt, voluminis aquei a corpore occupati; niſi quod diſcrimen aliquod utrobique obſervetur, dum apud me hoc pondus gV vel M diviſum conſpicitur per Go vel GO, apud EULERUM vero non item; quod forſan per inadvertentiam ſubſcribere omiſit: in qua conjectura eo magis confirmor, quia alias vis firmitatis compararetur cum pondere multiplicato per lineam, quæ ſunt res inter ſe incomparabiles: talis autem incongruentia non reperitur in mea expreſſione, in qua quippe linea $Go+\frac{\int(y^3+z^3)\,dx}{3V}$, diviſa per lineam Go, dat numerum, quiſquis ille ſit; qui indicat, quoties ſumendum ſit pondus gV, vel M, ut fiat æquale vi firmitatis, vel, ut ego voco, vi motrici ex oſcillatione oriundæ & ſurſum tendenti. Atque ita vis cum pondere comparatur, homogeneum cum homogeneo; quæ utique non ſunt aſyſtata.

XLV.

PROBLEMA II.

Corpore dato oscillante verticaliter in aqua, hoc est, sursum deorsum alternatim ascendente & descendente per excursiones minimas; invenire ejusdem oscillationum legem; seu determinare longitudinem Penduli simplicis isochroni.

Cum primum mihi proponeretur Problema præcedens, de corporibus in fluido lateraliter vel horizontaliter oscillantibus, protinus incidi in hoc alterum Problema de eorundem oscillationibus verticalibus determinandis; quod etsi sit solutu multo facilius priori, non tamen minus curiosum & utile deprehendi. Solutionem meam communicavi cum Exc. EULERO; qui deinde & suam perscripsit cum mea apprime conspirantem. Ecce nunc viam solvendi quam inieram.

SOLUTIO.

Monendum est in antecessum, hic non venire in considerationem, utrum corpus aquæ insidens, sit ex materia per totum homogenea, an heterogenea; modo totius gravitas specifica habeat rationem datam ad gravitatem specificam aquæ. Sit igitur in vase, si vis, cylindrico ABCD [neque enim figura vasis aliquid ad rem facit] sufficiens quantitas aquæ, in qua suspensum hæreat in æquilibrio corpus GHLM; sitque tunc aquæ superficies EF in altitudine BE vel CF. Quo posito, duo sunt casus expendendi; vel enim vas satis est angustum, ut superficies EF comparari possit cum area sectionis HM quam corpus format in superficie EF; vel vas tantæ est amplitudinis, ut superficies EF infinities quasi superet aream HM. Prior casus solutus dabit, per Corollarium, solutionem posterioris.

TAB. LXXXVI. *Fig.* 16.

Sit igitur area sectionis $HM = a$, area vasis amplitudinis $EF = b$, massa corporis $= M$, vis gravitatis, qua corpora naturaliter ad accelerationem animantur, $= g$; adeoque corporis pondus,

pondus, seu vis motrix qua ad descensum sollicitatur, $= gM$. Hæc vis, existente corpore in æquilibrio, destruitur a vi contraria & æquali, quam aqua exercet sursum in corporis partem demersam; hæcque vis aquæ, per Principium Hydrostaticum, æqualis est ponderi aquæ, quæ in volumine a corpore occupato contineri potest. Dicatur hoc volumen $= V$.

Concipe jam corpus GL ex situ æquilibrii elevari verticaliter ad parvam altitudinem expressam per $EN = x$; quo ipso descendet superficies EF per altitudinem EP, quæ erit $= \frac{ax}{b-a}$; oportet enim ut $EN \times HM$ sit $= EP \times (EF - HM)$. Hinc $NP = \frac{ax}{b-a} + x = x\left(\frac{b}{b-a}\right)$; quod multiplicatum per HM, seu a, dabit $HM \times NP = ax \times \left(\frac{b}{b-a}\right) =$ decremento voluminis aquei. Perspicuum autem est, ex Hydrostaticis, quod quanta pars voluminis in aqua occupati per ascensum corporis amittitur, tanta vicissim pars destructæ vis motricis in corpore recuperetur.

Faciendo itaque, ut se habet volumen V ad decrementum voluminis $ax \times \left(\frac{b}{b-a}\right)$, ita vis motrix totalis gM ad quartum $\frac{gMax}{V} \times \left(\frac{b}{b-a}\right)$, quod erit $=$ vi motrici, quæ divisa per massam corporis M, dat vim acceleratricem $= \frac{gax}{V} \times \left(\frac{b}{b-a}\right)$, proportionalem ipsi x, seu distantiæ a situ æquilibrii: unde statim patet oscillationes esse tautochronas. Sed ut determinetur longitudo Penduli simplicis isochroni; instituenda est hæc altera analogia [per *Lemma* ad §. 39] : Ut vis acceleratrix inventa $\frac{gax}{V} \times \left(\frac{b}{b-a}\right)$ ad vim acceleratricem naturalem g; ita x, seu distantia a situ æquilibrii, ad quæsitam longitudinem Penduli simplicis isochroni; quæ proin longitudo erit $= \frac{(b-a)V}{ab}$ $= \frac{V}{a} - \frac{V}{b}$.

Co-

COROLLARIUM.

Hinc sponte fluit casus alter, ubi nimirum vas est amplissimum; quo casu $\frac{V}{b}$ evanescet juxta $\frac{V}{a}$; unde longitudo Penduli fiet $= \frac{V}{a}$; ex quo hæc elegans elicitur constructio. Super basi a, seu HM, erigatur solidum cylindricum, seu prismaticum æquale volumini aqueo HLM; eritque altitudo illius solidi cylindrici æqualis longitudini Penduli simplicis isochroni.

XLVI.

SCHOLIUM.

Potest hæc proprietas habere aliquam utilitatem in Nauticis. Ut si Navis quædam onusta in Portu ad anchoram alligata hæreat, eaque incipiat a maris crispatione acquirere [ut fieri solet] exiguum motum subsultantem sursum deorsum; Observator quispiam stans in littore, atque ad manus habens Pendulum, quod nunc elongando, nunc abbreviando, ita moderetur, donec fiat isochronum; habebit Penduli sui longitudinem; quam si multiplicaverit per aream sectionis Navis, seu supremæ superficiei voluminis aquei, quam ipsa Navis occupat in aqua, resultabit productum, ex. gr., in pedibus cubicis expressum; atque sic cognito pondere unius pedis cubici aquæ, innotescet pondus totius voluminis aquæ quam Navis in mari occupat, hoc est, pondus ipsius Navis, una cum omnibus oneribus contentis. Detracto igitur pondere Navis vacuæ omniumque utensilium [quod semel exploraſſe suffecerit,] monstrabit residuum quanti ponderis sint merces contentæ, & quæcunque insunt onera accessoria simul sumta.

XLVII.

De Oscillationibus Corporum titubantium super superficie aliqua immobili.

Alia datur species oscillationum tautochronarum minimarum, quas

quas obſervamus in corporibus convexis gravibus, atque incumbentibus alicui ſuperficiei immobili quam tangunt in unico puncto. Intelligimus namque iſtius modi corpus fore in æquilibrio poſitum, quamdiu ejus Centrum gravitatis eſt in recta verticali, quæ tranſit per punctum contactus: ſtatim vero ac tantillum dimovetur ex hoc ſitu, quem pono corpus ſponte acquiſiviſſe ab actione ſuæ gravitatis, perſpicuum eſt, ad eundem ſitum poſt titubationes multas ultro citroque faciendas, more oſcillationum, eſſe rediturum, inibique iterum in æquilibrio manſurum. Jam igitur determinanda eſt longitudo Penduli ſimplicis titubationibus illis, ſive oſcillationibus, iſochroni.

XLVIII.

PROBLEMA III.

Eſto corpus grave, cujus ſectio verticalis, tranſiens per Centrum gravitatis G, ſit curva qualiſcunque LMAN: incumbatque corpus plano horizontali PH in puncto A, ita ut AG ſit verticalis, ſeu ad angulos rectos cum horizontali PH; quo fiet, ut corpus maneat in æquilibrio. Quod ſi nunc tantillum rotetur corpus, per arculum minimum A*b*, cadente puncto *b* in B, in quo jam tanget planum horizontale PH; evidens eſt corpus in hoc ſtatu ſubſiſtere non poſſe, ſed alterutrum fieri, ut, vel porro præceps rotando labatur verſus H, vel remeet ad priſtinum ſitum, & ultra nonnihil verſus P, unde eundo & redeundo ſæpius oſcillationes faciet; qui noſter eſt caſus, quem determinare debemus. Prius fieret, hoc eſt, præcipitaretur corpus, ſi centrum C circuli oſculantis curvam MAN in puncto A, eſſet infra centrum gravitatis G; poſterius vero fiet ſi C eſt ſupra G, prouti hic ſupponimus. TAB. LXXXVI. *Fig.* 17.

XLIX.

Finge jam corpus rotari per arculum minimum A*b*, & cadere punctum *b* in B; quo motu exiguo puncta C & G deſcri-

bent duas lineolas horizontales CE & GF: quarum illa CE æqualis erit ipsi Ab vel AB; hæc vero GF, quamvis revera sit arculus nascens alicujus Cycloïdis protensæ, in qua punctum G est infimum, & F supra G ascendit, sed infinities minus quam est longitudo GF, ita ut GF pro recta horizontali sumi possit, quæ erit ad CE vel AB, ut se habet AG ad AC; id quod patet ex natura generationis Cycloïdalium. Quare ducta recta AE transibit per punctum F, facietque angulum CAE æqualem angulo contactus bAB; considerando nempe circulum osculatorem, ut Polygonum infinitorum laterum. Porro puncta F & B conjungantur per rectam FB, quæ ad curvedinem nascentem GF erit normalis in F; atque ex F demittatur FD parallela verticali AC. Dicantur autem $AG = a$, $AC = b$, AB vel $CE = x$; proinde GF vel $AD = \frac{ax}{b}$, $BD = x - \frac{ax}{b} = (\frac{b-a}{b})\,x$.

L.

Sit item vis acceleratrix naturalis $= g$, massa totius corporis $= M$, adeoque pondus seu vis motrix absoluta $= gM$; quæ collecta in Centro gravitatis translato in F, nisum exerit ad redescendendum per curvedinem FG, qui nisus consistit in vi motrice oriunda ex vi absoluta gM, & quæ invenitur per decompositionem, faciendo, Ut se habet FB ad DB, ita erit gM ad $\frac{gM \times DB}{FB} =$ [quia FB æqualis censeri potest ipsi FD, vel AG, ob differentiam inassignabilem] $\frac{gM \times DB}{AG} = gM \times (\frac{b-a}{ba})\,x$ = vi motrici qua corpus urgetur ad descendendum per arculum FG.

LI.

Quærenda est insuper vis acceleratrix, ex principio nostro expli-

explicato in §§. 8 & 9. Resolvendo scilicet [sicuti jam aliquoties in hoc scripto fecimus] corpus LMAN in particulas minimas p, easque multiplicando per rr, quadrata suarum respective distantiarum ab axe rotationis perpendiculari ad sectionis planum LMAN, qui axis successive transit in singula puncta lineolæ infinite parvæ AB, quorum quodlibet inservit pro fulcro immobili, circa quod per momentum corpus aliquantillum gyratur; ita ut axis tanquam in situ invariabili considerari possit. Aggregatum igitur istorum productorum divisum per quadratum distantiæ Centri gravitatis F vel G, hoc est, $\frac{\int rrp}{aa}$ dabit corpus in Centro gravitatis concentrandum, & pro corpore dato LMAN substituendum, ad quod vis motrix $gM \times (\frac{b-a}{ba})\ x$ applicata eandem accelerationem pareret, quam producit in corpore dato. Atque ita dividendo vim motricem per massam corporis substituendi, habebimus vim acceleratricem $= gM \times (\frac{b-a}{ba})x : \frac{\int rrp}{aa} = gM \times (\frac{ba-aa}{b\int rrp})\ x$. Faciendo itaque, per *Lemma* ad §. 39, hanc analogiam, Ut se habet inventa vis acceleratrix $gM \times (\frac{ba-aa}{b\int rrp})\ x$ ad vim acceleratricem naturalem g; ita longitudo excursionis GF, seu $\frac{ax}{b}$, ad longitudinem quæsitam Penduli simplicis isochroni, quæ ergo reperietur $= \frac{\int rrp}{M \times (b-a)}$.

COROLLARIUM.

Si $b = a$, foret longitudo Penduli isochroni infinita, adeoque corpus ex puncto contactus A in punctum contactus B rotando inflexum, indigeret tempore infinito ad redeundum in pristinum situm; hoc est, plane non moveretur sponte. Quod vel ex eo quoque prævideri poterat, quia, centro circuli osculatoris C coalescente cum Centro gravitatis G, non potest corpus

regredi, neque etiam præceps prolabi: ergo manebit immotum, ſicuti ſequitur ex eo quod jam ſupra §. 48 innuimus.

LII.

EXEMPLUM I.

Eſto corpus propoſitum ſegmentum Sphæræ, cujus radius ſit ipſum b, ſpectetque ejus vertex deorſum in quo tangat planum ſuper quo titubare debet; habeatque ſegmentum pro altitudine, quamcunque y. Invenio [ſalvo errore calculi] longitudinem Penduli ſimplicis iſochroni oſcillationibus hujus ſegmenti, hoc eſt, $\frac{\int rrp}{M \times (b-a)} = \frac{40bby - 6y^3}{60bb - 60by + 15yy}$. Si ſegmentum ſphæricum abit in Sphæram totam, ſeu ſi $y = 2b$; erit Penduli longitudo $= \frac{32b^3}{0bb} = \infty$, adeoque infinita, ut fieri par eſt: Sphæra enim tota in omni ſitu quieſcere debet. Pendulum quippe longitudinis infinitæ, requirit tempus infinitum ad unicam oſcillationem faciendam, hoc eſt, omnino quieſcit. Si vero ſegmentum ſit hæmiſphærium, ſeu ſi $y = b$; prodibit longitudo Penduli $= \frac{34b}{15} = 2\frac{4}{15}b$; quod per experientiam verificari poterit.

LIII.

EXEMPLUM II.

Pro altero exemplo proponatur Conoïdes parabolicum, per revolutionem Parabolæ ordinariæ generatum, cujus parameter ſit $= 2b$, altitudo a vertice inverſo, ſeu puncto infimo $= y$. Calculus monſtrabit quod $\frac{\int rrp}{M \times (b-a)} = \frac{4by + 3yy}{6b - 4y}$ = longitudini Penduli iſochroni. Si $6b = 4y$; ſeu $y = \frac{3}{2}b$, quo caſu Centrum gravitatis Conoïdis coincidit cum centro circuli oſculatoris; erit longitudo Penduli infinita; adeoque hic pariter Conoïdes nonnihil inclinatum manebit in quiete; per conſequens non

non oscillabitur. Quod quidem in genere ita fiet, quotiescunque fit $b = a$: tunc enim semper est $\frac{\int rrp}{M.(b-a)} =$ infinito. Quod si, in hoc exemplo, esset $y = b$, seu æqualis semi-parametro, haberetur longitudo Penduli isochroni $= \frac{7}{2}b = 3\frac{1}{2}b$.

LIV.

SCHOLIUM.

Problema generalius propositum solvi potest, supponendo nempe superficiem PH, cui incumbit corpus LMAN, non esse planam, sed quamcunque aliam datam, concavam instar patellæ, super qua immobili oscillationes corporis titubantis determinandæ sint per longitudinem Penduli simplicis isochroni.

In hoc casu, ante omnia notandum, lineolam CE non esse æqualem ipsi AB; sed eam haberi, si prolongetur in mente verticalis AC ad punctum O, ita ut AO sit radius osculi sectionis superficiei PH in puncto contactus A: tunc enim ducta BO, abscindet ex horizontali CE veram longitudinem CE. Quare si dicatur $AO = c$, quæ data est, ob datam curvedinem lineæ PAH in puncto A; erit, retentis reliquis denominationibus, $AO : AB = CO : CE$, hoc est $c : x = c - b : \frac{c-b}{c}x =$ CE. Faciendo porro $AC : CE = AG : GF$, seu $b : \frac{c-b}{c}x = a : \frac{ac-ab}{bc}x = GF = AD$. Hinc $BD = x - \frac{ac-ab}{bc}x = \frac{bc-ac+ab}{bc}x$.

Operando nunc in reliquis, ut factum est in §§. 50 & 51; invenietur longitudo Penduli simplicis isochroni $= \frac{(c-b)\int rrp}{M \times (bc-ac+ab)}$.

LV.

Hæc formula generalis complectitur utique præcedentem specialem;

cialem : nam ſi ſuperficies concava habet radium oſculatoris in A infinitum, eadem eſt ac ſi in A eſſet plana : verum in hoc caſu, ubi b evaneſcit juxta c, formula noſtra generalis mutatur in hanc $\frac{frrp}{M\times(b-a)}$, quæ prorſus eſt eadem, quam invenimus pro plano horizontali PH.

Denique examinandum, an & qua conditione ſuperficies PAH poſſit eſſe convexa, ut ſuper ea oſcillari queat corpus LMAN. In hunc finem, ponendum tantum eſt c negativum; habebitque expreſſio generalis hanc formam $\frac{(-c-b)frrp}{M\times(-bc+ac+ab)}$, vel, mutatis ſignis in utroque termino, hanc $\frac{(c+b)frrp}{M\times(bc-ac-ab)}$; unde patet, modo $bc-ac$ ſit majus quam ab, ſeu c majus quam $\frac{ab}{b-a}$, corpus poſſe oſcillari. Secus vero, ſi c minus fuerit quam $\frac{ab}{b-a}$, ultro ſequitur corpus inclinatum non poſſe oſcillando ad priſtinum ſitum redire; ſed protinus præcipitatum iri : quod quidem ſemper ita eveniet, quotieſcunquè valor formulæ in uno, vel altero, ſive convexitatis, ſive concavitatis, evadit negativus.

LVI.

De Pendulo luxato, & de ejus reductione ad Pendulum ſimplex iſochronum.

TAB. LXXXVI. *Fig.* 18.

Huc pertinent *Pendula*, quæ vocari poſſunt *luxata*. En eorum naturam : Finge Syſtema corporum, vel quamcunque figuram corpoream RSLT, quæ habeat ex Centro gravitatis C prodeuntem rectam CRB rigidam, ſeu inflexilem, ita ut eundem ſemper ſitum ſervet cum partibus figuræ RSLT, dum oſcillatur. Ad extremitatem B concipe alligatum filum, flexile, ſeu inflexile, nil refert; modo, ſi ſit inflexile, habeat in B articulationem, cujus ope

ope inflecti possit in angulum OBC, instar baculi circa medium luxati in duas partes. Altera extremitate ex puncto fixo O suspensa, concitari intellige corpus RSLT in motum oscillatorium minimum: habebis, quod voco, *Pendulum luxatum.* Quæritur longitudo Penduli simplicis, quod sit cum luxato isochronum?

PRÆPARATIO.

Sit OV recta verticalis ducta per punctum suspensionis O, atque jam oscillando perveniisse ponatur Pendulum luxatum in situm OBRSLT; ubi statim video, ob impetum corporis id fieri, ut situs partis BC cadat extra situm partis OB. Concipiatur ergo pars rigida CB, producta donec secet verticalem OV in puncto A; quod erit punctum suspensionis, circa quod Pendulum instar ordinarii oscillatur, quamvis agitatum a vi motrice nondum cognita, & quæ est quærenda, ut Pendulum nostrum, ex A suspensum, comparari possit cum longitudine Penduli simplicis isochroni. In hunc finem considerentur sequentia.

1°. Pondus totius massæ ita agit, ac si in Centro gravitatis C esset concentratum; adeoque si massa corporis RSLT dicatur $= M$, & gravitas seu vis acceleratrix naturalis $= g$; erit vis motrix immaterialis in C applicanda $= gM$.

2°. Vis ista gM [ducta verticali CH, & prolongata BC ad D] impenditur tota in tensionem rectæ rigidæ BC, non obstante quod ejus directio verticalis CH differat a directione CD: nam, ob angulum HCD acutissimum, vis tensionis censetur æqualis vi motrici gM.

3°. Ab altera parte filum OB, ob angulum ABO pariter acutissimum, eadem vi resistit qua tenditur; unde punctum luxationis B, trahitur & retrahitur viribus æqualibus.

4°. Ex directionibus propriis virium in C & B, quarum illa est secundum verticalem CH, hæc vero secundum BO deduci debent per decompositionem vires normales ad BC in C & B. Ductis itaque horizontalibus DV, CE, BF, & AN normali

adi

ad OB; erit vis motrix normalis in $C = \frac{DH}{DC} \times g\,M =$ $\frac{CE}{CA} \times g\,M = \frac{BF}{AB} \times g\,M$; altera vero normalis in $B = \frac{AN}{AB} \times g\,M$; adeoque vis normalis in C ad vim normalem in B, ut $\frac{BF}{AB} \times g\,M$ ad $\frac{AN}{AB} \times g\,M$, ut BF ad AN, ut OB ad OA.

5°. Habemus hoc modo vectem BC, cujus duæ extremitates C & B urgentur normaliter; ſed contrario ſenſu, hoc eſt, ob angulum acutiſſimum CAE, tanquam horizontaliter in directione CE & in directione FB; illa ad verticalem, hæc a verticali OV tendendo.

6°. Hæ duæ vires normales, quarum una reſpectu alterius eſt negativa, habebunt commune centrum æquilibrii in D infra C; quod ita debet eſſe comparatum, ut ſit vis normalis in C ad vim normalem in B, ut BD ad CD. Ex tribus igitur præmiſſis, invenitur quartum, faciendo nempe per diviſionem rationum, ut ſe habet vis normalis in C minus vi normali in B, ad hanc vim normalem in B, ita BD — CD, ſeu BC, ad CD. Adeoque etiam [n. 4.] OB — OA: OA = BC: CD. Verum, ob angulos O & ABO acutiſſimos, cenſetur OB — OA = AB, & ſic habebitur AB: OA = BC: CD; unde $CD = \frac{OA \times BC}{AB}$.

7°. Quod ſi jam removeantur vires normales, quæ ſunt in C & B, illæque ambæ applicentur ſub ſuis directionibus ad centrum æquilibrii D; ita ut inde reſultet unica vis motrix $= \frac{BF}{AB} \times g\,M - \frac{AN}{AB} \times g\,M =$ (angulo FAB — ang. ABN) $\times g\,M$ = angulo FOB $\times g\,M$. Hæc certe vis motrix normaliter applicata in D, atque tendens ad verticalem OV, eodem modo urgebit corpus RSLT, ac facerent duæ illæ vires ſeorſim applicatæ in C & B.

8°. Habemus ergo caſum in ſuperioribus explicatum [§. 18] de natura Centri rotationis; ubi nimirum demonſtravi, ſi corpus

pus aliquod, vel ſyſtema corporum firmiter inter ſe cohærentium, urgeatur a vi quadam motrice, cujus directio non tranſeat per Centrum gravitatis corporis vel ſyſtematis corporum, id futurum eſſe, ut rotari incipiat circa punctum quodpiam, quod manebit immobile, quodque ideo vocavi *Centrum rotationis ſpontaneum.* Hujus naturam talem eſſe oſtendi [§. 16, & ſeqq.], ut ſumto puncto applicationis vis motricis normalis ad rectam per Centrum gravitatis tranſeuntem pro puncto ſuſpenſionis, Centrum illud ſpontaneum fiat ſimul Centrum oſcillationis corporis vel ſyſtematis corporum; per conſequens vice verſa, ut notum eſt, ſi Centrum ſpontaneum pro puncto ſuſpenſionis ſumatur, ut punctum applicationis vis motricis normalis evadat ſimul Centrum oſcillationis.

9°. Hinc concludimus, punctum A, quod modo ſupra [ante n. 1] vidimus debere conſiderari in Pendulo luxato tanquam punctum ſuſpenſionis Penduli ordinarii circa A oſcillantis, ſimul fore Centrum ſpontaneum, quatenus corpus RSLT urgetur a vi motrice normaliter in D applicata. Duplex iſta conſideratio manu ducet ad æquationem quæſitam, ut ſequitur.

SOLUTIO.

His ita præparatis, dicantur $OB = a$, $BC = b$, $AB = x$, adeoque $OA = a - x$; vis acceleratrix naturalis, qua ſcilicet corpora gravia naturaliter accelerantur, $= g$; maſſa corporis $RSLT = M$; ejuſque pondus, ſeu vis motrix in directione verticali $= gM$.

Hinc [n. 6] $CD = \frac{OA \times BC}{AB} = \frac{(a-x).b}{x} = \frac{ab}{x} - b$, cui addendo AC, ſeu $b + x$, habetur tota $DA = \frac{ab}{x} + x$. Jam vero, ex natura Centri ſpontanei rotationis A, & ex demonſtratis *Hugenianis*, erit eadem $DA = b + x + \frac{\int ttp}{(b+x)M}$;

adeoque $\frac{ab}{x} + x = b + x + \frac{\int ttp}{(b+x)M}$, proinde $\frac{ab}{x} - b = \frac{\int ttp}{(b+x)M}$.

Ut nunc commodius exprimatur $\int ttp$, per quod intelligitur aggregatum omnium productorum, quæ fiunt multiplicando ſingulas particulas minimas p corporis M per quadrata tt diſtantiarum ſuarum a recta per Centrum gravitatis C tranſeunte & parallela axi rotationis; notandum eſt, ſi corpus RSLT ſuſpenderetur ex puncto B, tanquam fixo ſuppoſito, fore ejus Centrum oſcillationis G datum, & ita quidem ut $BC \times CG \times M = \int ttp$, quæ eſt generalis proprietas Pendulorum ordinariorum jam ab HUGENIO demonſtrata.

Dicatur itaque $CG = c$, eritque $\int ttp = bcM$, quo ſubſtituto in æquatione modo ante inventa $\frac{ab}{x} - b = \frac{\int ttb}{(b+x)M}$, prodibit $\frac{ab}{x} - b = \frac{bcM}{(b+x)M}$, quæ reducta dat $xx = (a - b - c)x + ab$, unde $x = -\frac{1}{2}(a - b - c) \pm \frac{1}{2}\sqrt{((a - b - c)^2 + 4ab)}$.

Supereſt ut determinemus longitudinem Penduli ſimplicis luxato iſochroni; id quod peragitur in modum ſequentem. Conſiderare ſtatim jam licet ABC ut vectem rigidum, cujus hypomochlium fixum eſt in A, quique urgetur duabus viribus motricibus abductis, una in C verticaliter deorſum tendente, altera in B contrario niſu tendente verticaliter ſurſum; illa prior in C eſt ipſa vis ponderis $= gM$, hæc altera vero in $B = \frac{a-x}{a} gM$ [per n. 4]; ſunt enim vires verticales ipſis normalibus proportionales.

Subſtituatur nunc, loco vis motricis quæ eſt in B, alia in punctum C; quæ, ex natura vectis, idem cum illa habeat momentum; faciendo nempe ut ſe habet AC ad AB, ſeu ut $b + x$ ad x, ita $\frac{a-x}{a} gM$ ad $\frac{ax - xx}{ab + ax} gM$; erit hæc vis ſubſtituenda in C pro illa in B; atque ita habebitur in C unica vis motrix

trix $= gM - (\frac{ax - xx}{ab + ax})\, gM = \frac{ab + xx}{ab + ax}\, gM$; auferendo ſcilicet ſubſtituendam $\frac{ax - xx}{ab + ax}$ a priori gM, utpote ei contrariam.

Quod ſi nunc hanc vim motricem $\frac{ab + xx}{ab + ax}\, gM$ dividamus per maſſam in C concentrandum, ſicuti docuimus in nova noſtra Theoria de Centro oſcillationis in Pendulis ordinariis (§. 9) expoſita, obtinebimus $\frac{ab + xx}{ab + ax}\, gM : \frac{(b+x)^2 M + bcM}{(b+x)^2}$, ſeu $\frac{(b+x) \times (ab + xx)\, g}{a(b+x)^2 + abc} =$ vi acceleratrici maſſæ in C concentratæ.

Tandem, ex notiſſimo illo Theoremate, a nobis quoque dudum * demonſtrato, quod nempe longitudines Pendulorum ſimplicium iſochronorum ſint proportionales viribus acceleratricibus quibus animantur: dicendum eſt, Ut ſe habet inventa vis acceleratrix $\frac{(b+x) \times (ab + xx)\, g}{a(b+x)^2 + abc}$ ad vim acceleratricem naturalem g, hoc eſt. ut $(b+x) \times (ab + xx)$ ad $a(b+x)^2 + abc$, ita longitudo AC, ſeu $b+x$, ad quartam $\frac{a(b+x)^2 + abc}{ab + xx}$, quæ erit longitudo quæſita Penduli ſimplicis iſochroni Pendulo luxato.

In hac expreſſione, ſubſtituendus jam eſſet valor ipſius x ſupra inventus; ſed operatio nimis longa foret: quare per compendium procedamus. Vidimus, ab initio Solutionis, DA duplici modo expreſſam, ſcilicet $DA = \frac{ab}{x} + x = \frac{ab + xx}{x}$, & paulo poſt $DA = b + x + \frac{fttb}{(b+x)M} = [\text{ob } fttb = bcM]$ $b + x + \frac{bc}{b+x} = \frac{(b+x)^2 + bc}{b+x}$; ac proinde $\frac{ab + xx}{x}$ $= \frac{(b+x)^2 + bc}{b+x}$; unde ſequitur fore $(b+x)^2 + bc : ab + xx$

* N°. XC. pag. 518. *Tom. I.*

$= b+x : x$; adeoque si in longitudine nostra $\frac{a(b+x)^2+abc}{ab+xx}$, tam in numeratore quam denominatore, pro $(b+x)^2+bc$ & $ab+xx$ scribantur eorum proportionales $b+x$ & x; prodibit fractio æquivalens $\frac{ab+ax}{x} =$ longitudini quæsitæ.

Nunc demum pro x substituatur valor inventus $\frac{1}{2}(a-b-c) \pm \frac{1}{2}\sqrt{((a-b-c)^2+4ab)}$, & resultabit $\frac{ab+ax}{x}$ seu $a+\frac{ab}{x} = a+\frac{2ab}{a-b-c+\sqrt{((a-b-c)^2+4ab)}} = a+\frac{2ab(a-b-c\mp\sqrt{((a-b-c)^2+4ab)})}{-4ab} = a-\frac{1}{2}(a-b-c \mp \sqrt{((a-b-c)^2+4ab)}) = \frac{1}{2}(a+b+c) \pm \frac{1}{2}\sqrt{((a-b-c)^2+4ab)} =$ longitudini Penduli simplicis isochroni Pendulo luxato *Q. E. I.*

NOTA. Ut paulo simplicius exprimatur hæc longitudo; scribi potest una littera e pro $b+c$, nempe pro data BG; & erit longitudo quæsita $= \frac{1}{2}(a+e) \pm \frac{1}{2}\sqrt{((a-e)^2+4ab)}$.

COROLLARIUM I.

Si $a = 0$; fit longitudo quæsita $= \frac{1}{2}(b+c) \pm \frac{1}{2}(b+c) = b+c$, vel $= 0$. Prior $b+c$ manifeste satisfacit; hoc enim in casu, puncto B abeunte in punctum suspensionis, Pendulum luxatum mutatur in Pendulum ordinarium compositum, cui utique respondet Pendulum simplex isochronum habens, per hypothesin, longitudinem $= b+c = e$. Alter vero valor $= 0$, hic est inutilis.

COROLLARIUM II.

Si $a = b+c$; erit longitudo Penduli simplicis luxato isochroni $= a \pm \sqrt{ab}$.

COROL-

COROLLARIUM III.

Si $b = 0$, quo casu $c = \infty$; erit longitudo quæsita $\frac{1}{2}(a+c) \pm \frac{1}{2}(a-c) = a$, vel $= c$; ubi prior a sola satisfacit; quod per se clarum est: in hoc quippe casu punctum luxationis B, existens in ipso Centro gravitatis C, facit ut, inter oscillandum, quælibet recta conjungens in corpore duo puncta moveatur motu sibi semper parallelo; & proinde tantundem est, ac si tota corporis massa esset in Centro gravitatis concentrata; ita ut Pendulum non differat a Pendulo simplici, cujus longitudo $= a$. Interim alter valor $c = \infty$, tanquam huc non quadrans, rejici debet.

LVII.

SCHOLIUM.

Concipiamus jam partem OB supra punctum luxationis B esse etiam rigidam; eamque oneratam novo pondere datæ figuræ, cujus Centrum gravitatis sit in puncto aliquo dato P in ipsa recta OB assumto. Methodus nostra determinandi longitudinem Penduli simplicis isochroni, etiam ad hunc casum porrigitur. Nam, pro corpore in P collocato, cujus massa dicatur $= m$, substitui potest aliud collocandum & concentrandum in puncto B (per §. 9); vocetur autem massa illius corporis substituenda in $B = \mu$, vis itaque motrix, quæ erat in P, $= gm$, nunc erit in P supponenda $= \frac{OP}{OB} \times gm$. Hoc modo fit, ut recta OB eadem vi ad motum angularem incitetur, sive massa m in P locanda agitetur per vim motricem gm, sive in B locetur massa μ, & urgeatur per vim motricem $\frac{OP}{OB} \times gm$. Habemus igitur vectem BC, oneratum duobus ponderibus in C & in B, quorum corpora, vel massæ corporum, sunt M & μ, quæ ut unum systema considerari debent; vis motrix in C

$= gM$, altera in $B = \frac{OP}{OB} \times gm - gM$, sive $gM - \frac{OP}{OB} \times gm$, prout una vel altera prævalet. Atque ita res reducta erit ad casum præcedentem: Sufficit vestigia monstrasse, iis quibus animus est plenariam tentare solutionem.

Possemus si res tanti esset, extendere hoc negotium ad Pendula, in quibus duo, imo plura adessent puncta luxationum; sed talia relinquimus calculatoribus, qui otio abundant.

LVIII.

De Pendulis sympathicis.

Hoc nomine voco bina Pendula a communi quodam corpore gravi agitata, ita ut unum sine altero moveri non possit. Ad clariorem rei intelligentiam, concipe corpus grave, vel systema corporum quotcunque, per cujus Centrum gravitatis C trajectus sit paxillus tenuissimus in situ horizontali ACB, cujus duo brachia sint datæ longitudinis, nempe $AC = a$, & $BC = b$; unde totius paxilli longitudo $= a + b = c$. Ad extremitates A & B annexa sint duo fila flexilia, aut etiam rigida, sed tunc habentia in A & B luxationes, ita ut cum recta AB horizontali in angulos possint inflecti, prout res postulabit.

TAB. LXXXVI. *Fig.* 19.

Sint fila verticaliter erecta $AD = m$, $BE = n$; atque suspensa ex punctis fixis D & E, ita ut corpus grave vel Systema corporum sustentetur a duabus potentiis quas opponunt fila AD & BE. Finge jam paxillum AB, ex situ quietis dimoveri paululum in plano DABE, & acquirat situm proximum *ab*; haud ægre percipis, mox inde oriri motum oscillatorium in eodem plano DABE, rectamque *ab* tam parum super AB elevari, ut censeri possit in eadem semper horizontali ultro citroque instar serræ reciprocari.

Ex quo motu parallelo singulorum corporis punctorum oppido patet, oscillationes eodem modo fieri, sive diffusum sit corporum systema, sive concentratum supponatur in suo Centro gravitatis C.

Quare

Quare si massa, vel quantitas materiæ collectæ in C, dicatur $= M$, vis acceleratrix naturalis $= g$; erit pondus, vel vis motrix absoluta $= gM$. Hinc, ex natura vectis, vis motrix quam sustinet filum $AD = \frac{BC}{AB} \times gM = \frac{b}{c} \times gM$, & ea quam sustinet filum $BE = \frac{AC}{AB} \times gM = \frac{a}{c} \times gM$. Sit nunc excursio Aa vel $Bb = x$, erit, ob angulos ADa, BEb acutissimos, vis motrix, qua retrahitur punctum a versus suum situm æquilibrii in $A = \frac{BC}{AB} \times gM \times \frac{Aa}{aD} = \frac{b}{c} \times gM \times \frac{x}{m}$; pariterque vis motrix qua retrahitur punctum b versus suum situm æquilibrii in $B = \frac{a}{c} \times gM \times \frac{x}{n}$. Quia autem duæ istæ vires retrahentes conspirant ad restituendum paxillum cum pondere in situm æquilibrii, quod est in C; habebimus totalem vim motricem secundum horizontem agentem $= \frac{gM}{c} \times x \times (\frac{b}{m} + \frac{a}{n})$, quæ divisa per quantitatem materiæ movendæ, hoc est, per massam M, dat vim acceleratricem $= \frac{gx}{c} \times (\frac{b}{m} + \frac{a}{n})$

Instituendo igitur, per nostram Regulam in superioribus ostensam, hanc analogiam: Ut se habet vis acceleratrix inventa $\frac{gx}{c} \times (\frac{b}{m} + \frac{a}{n})$ ad vim acceleratricem naturalem g, ita longitudo excursionis Aa vel Bb, vel x, ad quartam $\frac{c}{\frac{b}{m} + \frac{a}{n}}$, hoc est ad $\frac{mnc}{ma + nb}$; erit hæc æqualis longitudini Penduli simplicis Pendulo nostro sympathico isochroni. *Q. E. I.*

Corollarium I.

Si filorum longitudines AD & BE sunt æquales, id est, si $m = n$ fiet $\frac{mnc}{ma + nb} = \frac{mc}{a + b} = m$; ut quidem fieri prævideri pote-

poterat: ambæ enim partes Penduli ſympathici nil aliud ſunt quam Pendulum ſimplex, ſibi ipſi utique iſochronum.

COROLLARIUM II.

Exiſtente longitudine fili BE valde magna, reſpectu alterius AD; ita ut cenſeri poſſit $n = \infty =$ infinita; fiet $\frac{mnc}{ma+nb} = \frac{mc}{b} = \frac{ma+mb}{b} = \frac{ma}{b}+m$. Quod ſi præterea $a = b$, hoc eſt, ſi Centrum gravitatis C fuerit in medio intervalli filorum; erit longitudo Penduli ſimplicis iſochroni $= 2m$, ſeu dupla longitudinis fili AD.

COROLLARIUM III.

Cæterum generaliter verum eſt longitudinem Penduli ſimplicis iſochroni, ſemper conſiſtere mediam inter longitudines fili longioris BE & brevioris AD; ſeu, quod eodem recidit, fore ſemper $m \rhd \frac{mnc}{ma+nb} \rhd n$; cujus demonſtrationem, ob facilitatem non addo. Hinc patet ratio denominationis *Penduli ſympathici*: cum enim Pendulum longitudinis minoris AD, ſi independenter a majori oſcillari deberet, majorem haberet ad oſcillandum vim acceleratricem, & viciſſim minorem, ſi alterum per ſe ſolum oſcillaret; qua de cauſa, quaſi ipſa natura hoc obſervare videtur, ut ad oſcillationes mutuo conſenſu ſimultaneas faciendas, Pendulum brevius AD aliquid de vi ſua acceleratrice amittat, alterum longius BE acquirat; quo, veluti ex compacto, ſimul eant redeantque ſine impedimento.

LIX.

NOTA. Quod ſupra in Scholio ad §. 57, monuimus, ad hoc quoque genus Pendulorum ſympathicorum feliciter accommodari poteſt; etiamſi alias res videatur difficultatis plena.

Poſito

Posito namque fila AD, BE, quæ sustinent paxillum AB cum pondere in C, esse rigida, propterea que, ut inflecti possint circa A & B, gaudere ibi articulationibus, seu punctis luxationum: hactenus est casus quem modo solitum dedimus. Sed si jam porro velimus insidere filis rigidis pondera data, quorum Centra gravitatis sint in locis datis *p*, *q*; hic casus, etsi plusculum difficultatis in se contineri videtur, reduci tamen potest ad Pendula sympathica pura, sine ponderibus *p* & *q* considerata.

Nam si, ut fecimus in §. 37, tollamus corpora *p* & *q*, eorumque loco substituamus duo alia, in punctis A & B locanda & concentranda, secundum legem in §. 9 expositam, habeantque debitam suam vim motricem; ut nimirum fila eadem vi incitentur ad motum angularem circa centra D & E, qua incitarentur, si corpora in *p* & *q* manerent.

Quo facto, habebimus paxillum AB oneratum Systemate trium corporum in A, B, & C, una cum ipsorum viribus motricibus datis, in quarum communi Centro gravitatis tria ista corpora collecta dabunt casum simplicem binorum Pendulorum sympathicorum; atque sic quæsito erit satisfactum. *Q. E. F.*

N°. CLXXVIII.

DE PENDULIS MULTIFILIBUS.

PROBLEMA.

TAB. LXXXVII. N°. CLXXVIII. *Fig.* 1.

Dato Pendulo NLK *circa punctum* N *oscillante, quod compositum sit duobus filis* NL, LK, *cum appensis duobus ponderibus* L, K, *quæ eodem tempore ad situm verticalem* NGM *perveniant, describendo arcus* LG, KM, *quorum ille, nempe* LG, *erit utique circularis, hic vero* KM *induet curvaturam quam exigit motus: Quæritur Lex oscillationis, suppositis filorum* NL, LK *longitudinibus æqualibus?*

ANALYSIS.

I.

Sit corpus $L = a$, ejus pondus [ſupponendo vim gravitatis $= g$] $= ga$; corpus $K = b$, ejus pondus $= gb$; vis tenſionis fili $LK = T$; ductiſque ad axem verticalem NM perpendicularibus LH, KI, ſit $GH = y$, $MI = q$; arcus $GL = r$, $Ll = dr$, $MK = s$, $Kk = ds$, $HL = e$, $IK = ne$; ſupponendo ſcilicet HL ad IK ut 1 ad n; quæ ratio utique conſtans erit, ſi oſcillationes ſint minimæ: ſed primo rem conſiderabimus generaliter. Porro ſit $NL = LK = c$, & prolongando KL donec ſecet verticalem NM in F, ductiſque in kl elementis normalibus Lp, Ko, ſit $lp = dx = ko$. Dicatur velocitas in $L = v$, & velocitas in $K = u$.

II.

Faciendum nunc eſt $dr : dy = ga : \frac{gady}{dr}$; quæ erit æqualis vi ponderis L ſecundum lL. Eſt $dr : dx = T : \frac{Tdx}{dr}$ æquale vi oppoſitæ a fili LK tenſione oriundæ, adeoque $\frac{gady - Tdx}{dr}$ æqualis vi motrici corporis L ſecundum lL; unde dividendo per maſſam a, habetur vis acceleratrix $= \frac{gady - Tdx}{adr}$. Hinc ergo, ex Principio Dynamico, $\frac{gady - Tdx}{a} = vdv$; integrando, prodit $gy - \frac{1}{a}\int Tdx = \frac{1}{2}vv$. Simili modo invenitur $gq + \frac{1}{b}\int Tdx = \frac{1}{2}uu$. Verum, ob iſochrona elementa lL, kK; erit $vv : uu = dr^2 : ds^2$; adeoque $dr^2 : ds^2 = gy - \frac{1}{a}\int Tdx : gq + \frac{1}{b}\int Tdx$; ex quo reperietur $T = \frac{gab}{dx} \times d\left(\frac{yds^2 - qdr^2}{adr^2 + bds^2}\right)$.

III.

N.° CLXXVII.

Fig. 12.

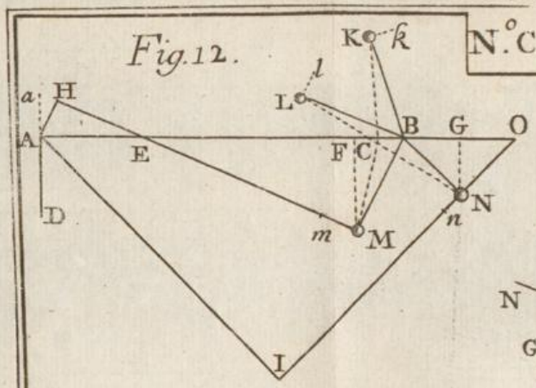


Fig. 13.

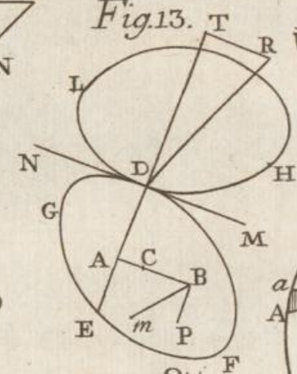


Fig. 14.

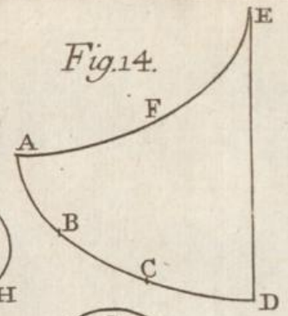


Fig. 15.

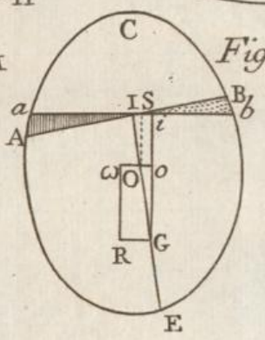


Fig. 16.

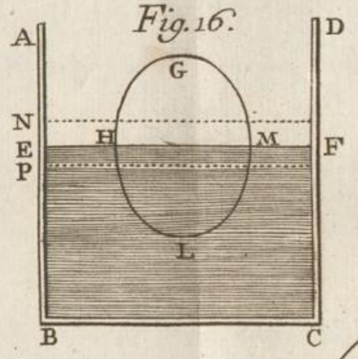


Fig. 17.

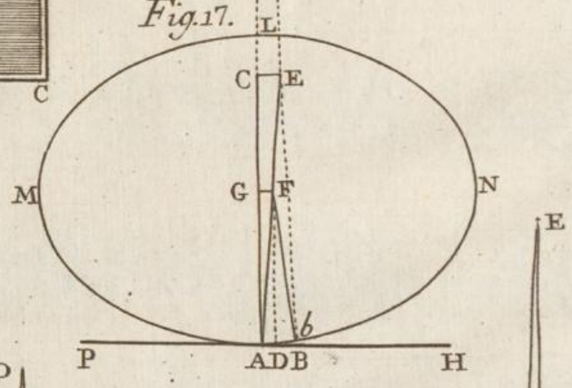
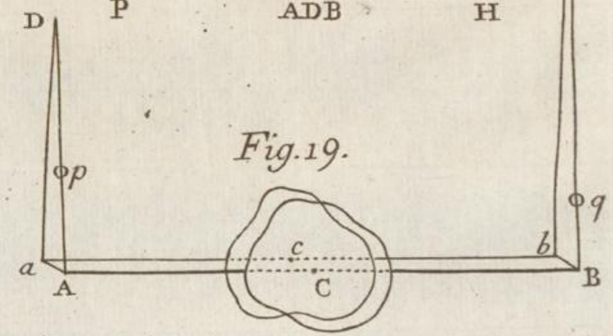


Fig. 18.



Fig. 19.



III.

Hoc ita ſe habet, quando ambæ curvæ ſunt datæ, quibus corpora L, K, durante motu inhærere coguntur: ſed ſi altera curva, ut MK*k*, eſt libere deſcribenda a pondere K, utpote quod ab una parte ſollicitatur ad deſcenſum a tenſione T in directione obliqua KL, ab altera vero parte a vi ponderis in directione verticali; quærendum eſt quanta vi hinc inde urgeatur in directione normali ad *k*K. Hoc fine, faciendum eſt K*k*: K*o* [$= ds : \sqrt{(ds^2 - dx^2)}$] $= T : \frac{T\sqrt{(ds^2 - dx^2)}}{ds}$ = vi normali ad partem concavam curvæ, & porro K*k*: K*f* [$= ds : \sqrt{(ds^2 - dq^2)}$] $= gb : \frac{gb\sqrt{(ds^2 - dq^2)}}{ds}$ = vi normali ad partem convexam curvæ. Hæ autem duæ vires directe oppoſitæ debent ſibi mutuo eſſe æquales; quia curva MK*k* libere deſcribitur; erit itaque $\frac{T\sqrt{(ds^2 - dx^2)}}{ds} = \frac{gb\sqrt{(ds^2 - dq^2)}}{ds}$; unde denuo $T = gb\sqrt{\frac{ds^2 - dq^2}{ds^2 - dx^2}}$. Æquando ambos valores ipſius T, prodit nova æquatio $ad\left(\frac{yds^2 - qdr^2}{adr^2 + bds^2}\right) = dx\sqrt{\frac{ds^2 - dq^2}{ds^2 - dx^2}}$, vel $\frac{ayds^2 - aqdr^2}{adr^2 + bds^2} = \int dx\sqrt{\frac{ds^2 - dq^2}{ds^2 - dx^2}}$.

IV.

Hæc æquatio determinat naturam curvæ MK*k*, ejuſque relationem ad circulum GL*l*. Quod ſi jam invenire lubeat Legem oſcillationum minimarum Penduli flexilis NLK, ſupponendo ſcilicet arcus GL, MK infinite parvos, ſeu, ſi mavis, quam minimos; notare convenit, in hoc caſu confundi GL cum HL, MK cum IK, NL cum NH, FL cum FH, &c. hoc eſt, unam pro altera ſumi poſſe. Ex hac conſideratione, erit HG ſeu $y = \frac{HL^2}{2NL} = \frac{ee}{2c}$; item MI, ſeu q = NM — NI = NL + LK — NI = NL + LK — NH — LR

$= [$ob $NL - NH = GH = \frac{HL^2}{2NL}$ & $LK - LR = \frac{RK^2}{2LK}] \frac{ee}{2c} + \frac{(n-1)^2 . ee}{2c} = \frac{(nn-2n+2)ee}{2c}$. Porro, ob isochronos arcus GL, MK, erit dr ad ds, seu Ll ad Kk, ut GL ad MK, hoc est, ut HL ad IK seu ut 1 ad n: quare $ds = ndr$: ponendo itaque $nndr^2$ pro ds^2, prodibit $\frac{aydr^2 - aqdr^2}{adr^2 + bds^2} = \frac{nnay - aq}{a + nnb}$; ubi si pro y & q substituantur valores modo inventi, habebitur idem $\frac{aydr^2 - aqdr^2}{adr^2 + bds^2} = \frac{(n-1).aee}{c.(a+nnb)}$. Et sic æquatio in fine articuli præcedentis mutatur in hanc $\frac{(n-1).aee}{c.(a+nnb)} = \int dx \sqrt{(\frac{ds^2 - dq^2}{ds^2 - dx^2})} =$ [quia dq^2 & dx^2 evanescunt juxta ds^2] $\int dx$.

V.

Restat igitur ut quæratur valor ipsius dx, seu pl, seu ok; quod sic fit. $KL : LF = KR : LH = n - 1 : 1$; unde $LF = \frac{1}{n-1} KL = \frac{c}{n-1}$. Et, quia triangulum LFN in N & L est acutissimum, censetur $LF + FN = NL = LK = c$; proinde $FN = c - \frac{c}{n-1} = \frac{(n-2).c}{n-1}$. Sed LF ad FN, hoc est $\frac{c}{n-1}$ ad $\frac{(n-2).c}{n-1}$, seu 1 ad $n-2$, ut sinus anguli FNL seu $\frac{HL}{NL}$ seu $\frac{e}{c}$, ad sinum anguli FLN, qui per consequens est $= \frac{(n-2).e}{c}$: angulus vero FLN = ang. pLl, quia uterque est complementum anguli NLp; adeoque etiam $\frac{(n-2).e}{c}$ = sinui anguli $pLl = \frac{pl}{Ll} = \frac{dx}{dr} = \frac{dx}{de}$; est enim [ob arcum GL minimum] $dr = de$; propterea $\frac{(n-2).e\,de}{c} = dx$;

&c.

& integrando $\frac{(n-2).ee}{2c} = \int dx =$ [per præced.] $\frac{(n-1).aee}{c.(a+nb)}$. Reductione peracta, emergit hæc æquatio $nnb = 2nb + a$, unde $n = 1 \pm \sqrt{(\frac{a+b}{b})}$.

COROLLARIUM.

Si pondera a & b sint æqualia; erit $n = 1 \pm \sqrt{2}$. Ubi notandum radicem affirmativam $1 + \sqrt{2}$ esse sumendam, cum pondera ad eandem partem verticalis NM constituuntur; sed negativam affirmative sumtam $-1 + \sqrt{2}$, cum pondera constituuntur ad partes diversas ipsius NM.

VI.

Supereſt ut determinetur longitudo Penduli simplicis, quod Pendulo flexili NLK sit isochronum. Pro hoc opus est, ut sumatur valor vis acceleratricis corporis L artic. 1°. inventæ $= \frac{g\,a\,dy - T\,dx}{a\,dr}$, ubi [art. 4.] $y = \frac{ee}{2c}$, proinde $dy = \frac{e\,de}{c}$; $T = gb$ [art. 3 & 4], $dr = de$ [art. 5], $dx = \frac{(n-2).ede}{c}$ [ibid.], quæ si substituantur, reperietur vis acceleratrix ponderis $L = \frac{g^2(a - nb + 2b)}{ac}$; eaque si dividatur per e, seu per longitudinem viæ describendæ GL, vel HL; habetur intensitas vis acceleratricis $= \frac{g(a - nb + 2b)}{ac}$. Sit nunc D, longitudo quæsita Penduli simplicis agitandi per naturalem vim gravitatis g, & semi-oscillationes per arcus minimos z peragentis; erit, ut constat, ejus vis acceleratrix $= \frac{gz}{D}$; cujus intensitas [dividendo per z] habetur $= \frac{g}{D}$. Oportet itaque has duas intensitates esse æquales, ut obtineatur mutuus isochronismus,

unde $\frac{a-nb+2b}{ac} = \frac{1}{D}$; adeoque $D = \frac{ac}{a-nb+2b}$; & in casu ponderum a & b æqualium, erit $D = \frac{c}{3-n}$; vel substituendo pro n ejus valorem inventum $1+\sqrt{2}$ pro ponderibus ad easdem verticalis partes constitutis, provenit $D = \frac{c}{2-\sqrt{2}}$; sed existentibus ad partes oppositas pro n scribendo $1-\sqrt{2}$ dabitur $D = \frac{c}{2+\sqrt{2}}$. *Quæ omnia erant invenienda.*

Idea solutionis pro Pendulis trifilibus, quadrifilibus, seu quibuscunque multifilibus.

I.

Vocentur nunc pondera incipiendo a supremo, A, B, C, D, &c. sitque arcus GL, vel recta HL, quæ ei æqualis censetur $= e$, reliquæ ordine sequuntur ne, me, pe, &c.; adeo ut illi arcus, vel rectæ ad verticalem perpendiculares, procedant ut numeri, n, m, p, quorum valores sunt quærendi.

II.

Erit, ut supra invenimus §. 4, prima $HG = \frac{ee}{2c}$, secunda $IM = \frac{(1+(n-1)^2)ee}{2c}$, ita quoque tertia $= \frac{(1+(n-1)^2+(m-n)^2)ee}{2c}$, quarta $= \frac{(1+(n-1)^2+(m-n)^2+(p-m)^2)ee}{2c}$, & ita consequenter; altitudines scilicet punctorum L, K, &c. supra puncta infima G, M, &c.

III.

III.

Arcus curvarum GL, MK, &c. etsi revera non sint circulares, excepto primo, quando tamen sunt minimi, habentur pro circularibus, qui nempe curvas in punctis infimis osculantur. Horum circulorum osculantium inveniantur radii, quia iis in hoc scrutinio opus est; quod sic fit. Radius primi arcus GL, quod per se patet, $= c$; radius secundi $MK = \frac{IK^2}{2IM} =$ (vid. §. 2 hujus) $\frac{nnc}{(1+(n-1)^2)}$; radius tertii $= \frac{mmc}{(1+(n-1)^2+(m-n)^2)}$; radius quarti $= \frac{ppc}{(1+(n-1)^2+(m-n)^2+(p-m)^2)}$; radius quinti $=$ &c.

IV.

Ex his determinantur valores elementorum dx, quæ spectant ad duos quoslibet arcus immediate se mutuo excipientes; nempe sicuti lp, aut [quod idem est, ducta $l\pi$ ad LK normali] $L\pi$ vel $ok = \frac{(n-2).ede}{c}$ [vid. supra §. 5], quod exprimit dx, pertinens ad arcum primum GL & secundum MK; ita quoque inveniuntur valores elementorum dx, pro arcuum paribus sequentibus; nempe pro secundo & tertio, pro tertio & quarto &c. adhibendo successive modum quem adhibui in prædicto §. 5. Fingamus itaque [ne opus habeamus figuram per plures arcus continuare] ipsum arcum GL & arcum MK repræsentare arcum secundum & tertium: Erit $HL = ne$, & $IK = me$; radiusque circuli osculatoris in $G = NL =$ [per præced.] $\frac{nnc}{1+(n-1)^2}$. Faciendo nunc [ut supra §. 5] KL : LF = KR : LH, quod nunc est $= m-n : n$, unde $LF = \frac{n}{m-n}KL = \frac{nc}{m-n}$, adeoque NF, seu NL — LF $= \frac{nnc}{1+(n-1)^2}$

$-\frac{nc}{m-n}$. Porro quia LF ad FN, ut ſinus anguli FNL ad ſinum anguli FLN $= pLl = L\lambda\pi$; prodibit ſinus anguli $L\lambda\pi$, hoc eſt $\frac{L\pi}{Ll}$, ſeu $\frac{dx}{nle} = \frac{FN}{LF} \times$ ſin. FNL $= \left(\frac{nnc}{1+(n-1)^2} - \frac{nc}{m-n} \times\right) \frac{(1+(n-1)^2)e}{nc} : \frac{nc}{m-n} = \frac{(m-n)e}{c} - \frac{(1+(n-1)^2)e}{nc}$ quare $dx = \frac{(mn-nn)ede}{c} - \frac{(1+(n-1)^2)ede}{c} = \frac{(mn-2nn+2n-2)ede}{c}$, pro arcu ſecundo & tertio. Simili modo inveniemus procedendo $dx \frac{(pm-2mn+2mn-2m+2n-2)ede}{c}$, pro arcu tertio & quarto. Atque ita deinceps.

V.

Jam vero quadrata velocitatum in punctis L, K, &c. eodem momento naſcentium ſe habent [ſicuti invenitur ex Conſervatione virium vivarum æque ac, ſed difficilius, ex Principiis Staticis] ex. gr. ſi tria ſunt fila, totidemque pondera A, B, C, quadratum velocitatis ponderis $A = \frac{(Ay+Bq+Ct)}{A+Bnn+Cmm}$, quadratum velocitatis ponderis $B = \frac{(Ay+Bq+Ct)nn}{A+Bnn+Cmm}$, quadratum velocitatis ponderis $C = \frac{(Ay+Bq+Ct)mm}{A+Bnn+Cmm}$, &c. nominando ſcilicet HG, IM, &c. y, q, t &c.; adeoque erunt vires acceleratrices ponderis $A = \frac{g.d(Ay+Bq+Ct)}{(A+Bnn+Cmm)de}$, ponderis $B = \frac{g.nd(Ay+Bq+Ct)}{(A+Bnn+Cmm)de}$, ponderis $C = \frac{g.md(Ay+Bq+Ct)}{(A+Bnn+Cmm)de}$; ac proin intenſitas [quæ invenitur dividendo ſingulas vires acceleratrices per longitudinem ſuæ viæ deſcribendæ, videlicet per e, ne, me] prodit pro unaquaque $= \frac{g.d(Ay+Bq+Ct)}{(A+Bnn+Cmm)ede}$, adeoque eadem in ſingulis.

VI.

VI.

Hactenus tensiones filorum non sunt consideratæ; ideoque videndum nunc erit, quomodo vires acceleratrices, indeque earum intensitas eliciatur ex tensionibus, quæ cum vi gravitatis motum ponderum temperant. Intensitas hoc modo elicita, & comparata cum eadem articulo præcedente inventa, dabit numerorum n & m rationem quæsitam ad unitatem; id autem hoc pacto peragitur. Animadverto primo, ob ponderum motum lentissimum, eorum vires centrifugas nihil conferre ad augendas vires tensionum in filis. Secundo, ob filorum NL, LK, &c. infinite parum a rectitudine situs deflectentium, unumquodque ex filis eam pati tensionem, quæ æquipollet vi absolutæ ponderum omnium quæ sustinet: ita ergo tensio primi $NL = A+B+C$, tensio secundi $LK = B+C$, tensio tertii $= C$; atque sic in aliis Pendulis multifilibus.

VII.

Ob fili primi NL situm perfecte perpendicularem ad arcum GL, tensio hujus fili, nec contribuit, nec officit vi motrici ponderis primi A in directione tangentis in L. Sed vis motrix hujus ponderis habetur, si a vi tangentiali ab ipsa ejus gravitate oriunda, subducatur vis tangentialis a tensione fili secundi LK derivata: vis illa prior a gravitate oriunda est, ex natura Cycloïdis quam arcus GL osculatur, $= \frac{gA}{c}$; vis altera ex tensione fili LK secundum tangentem derivata $= \frac{L\pi}{Ll} \times (B+C) =$ [art. 4 hujus] $\frac{(n-2)\cdot ge}{c} \times (B+C)$; ergo vis motrix ponderis, vel potius massæ A, in directione tangentis $= \frac{ge}{c} \times A - \frac{(n-2)\cdot ge}{c} \times (B+C)$; dividendo igitur per massam A, provenit vis acceleratrix, iterumque per e, oritur ejus intensi-

tas $= \frac{g}{c} - \frac{(n-2)g}{c} \times \left(\frac{B+C}{A}\right)$; quæ itaque = intenſitati §. 5 hujus inventæ, $\frac{g.d(Ay+Bq+Ct)}{(A+Bnn+Cmm)ede}$ = [ſcribendo pro y, q, t, eorum valores art. 2°. hujus inventos] $\frac{g.(A+(nn-2n+2)B+(2nn-2n+2+mm-2nm)C)}{c(A+Bnn+Cmm)}$.

VIII.

Porro habetur vis motrix ponderis ſecundi B in directione tangentis in K, ſi ad vim tangentialem ab ejus gravitate derivatam addatur vis tangentialis a tenſione fili ſecundi LK derivata, & ab aggregato auferatur vis tangentialis a tenſione fili tertii oriunda. Verum vis illa prima a pondere B in directione tangentis invenitur, ex natura Cycloïdis quam arcus MK oſculatur, radii oſculatoris in §. 3 hujus, $= \frac{e(1+(n-1)^2)gB}{nc}$; vis altera tangentialis a tenſione fili ſecundi derivata in arcu ſecundo [ope dx in §. 4 hujus] $= \frac{e(n-2)\times(gB+gC)}{nc}$; vis tertia tangentialis a tenſione fili tertii oriunda [ope ejuſdem dx] $= \frac{e(mm-2m+2n-2)gC}{nc}$: aggregatum duarum priorum mulctatum poſteriori, dabit vim motricem corporis ſecundi $B = \frac{ge((n-1)B+(2n-m-1)C)}{c}$; quod ſi ergo dividatur per maſſam B, & per longitudinem arcus MK $= ne$; prodibit intenſitas vis acceleratricis corporis $B = \frac{g((n-1)B+(2n-m-1)C)}{ncB}$, quæ itaque eidem §. 5 hujus æquatur.

IX.

Denique vis motrix corporis tertii C, in directione tangentis arcus tertii obtinetur, ſi ad vim tangentialem ab ejus gravitate derivatam addatur vis tangentialis a tenſione fili tertii oriunda.

Eſt

Est autem vis illa prior tangentialis a gravitate dependens $= \frac{e(1+(n-1)^2+(m-n)^2)gC}{mc}$ [vid. §. 3 hujus]. Et vis altera tangentialis a tensione fili tertii proveniens $= \frac{e(mm-2m+2n-2)gC}{mc}$. Summa harum duarum virium, dat vim motricem corporis tertii $c = \frac{ge(m-n)C}{c}$. Hoc ergo, divisum per massam corporis C, & per longitudinem arcus $= me$, dat intensitatem vis acceleratricis corporis $C = \frac{g(m-n)}{mc}$. Quæ per consequens etiam æqualis erit intensitati inventæ §. 5 hujus.

X.

Comparando itaque duas quascunque ex tribus hisce intensitatibus, quæ æquales, tam inter se, quam illi art. 5°, esse debent, cum ipsa illa articuli 6; habebuntur duæ æquationes, quarum ope littera m exterminari potest; & resultabit æquatio solam incognitam n continens: quæ hæc est, salvo errore calculi: $nAAC-(2nn-6n+4)ABC+(n-2)ABB-(2nn-5n+2)ACC = (n^3-4nn+4n)(B^3+2BBC+BCC)$. Hujus autem radice n inventa, erit $m = \frac{nA}{(n-2)\times(B+C)}$.

XI.

Notandum posse omnino negligi considerationem intensitatis, prout ea art. 5° fuit eruta, ex principio Conservationis virium vivarum. Siquidem intensitas ex tensione filorum tribus modis expressa art. 7, 8, & 9, ex duplici comparatione primæ cum secunda, & primæ cum tertia, vel secundæ cum tertia, subministrat duas æquationes pro duabus incognitis n & m; ex quibus, per exterminationem ipsius m, resultabit tertia alteram tantum incognitam n continens; quæ si rite tractetur, dabit nobis eandem æquationem quam §. præced. invenimus.

XII.

Si tria pondera A, B, C ſunt æqualia, mutatur æquatio generalis in hanc ſpecialem, pro Pendulo trifili ponderum æqualium, $4n^3 - 12nn + 3n + 8 = 0$; eritque tunc $m = \frac{n}{2n-4}$.

XIII.

Si vero pondus C ſit $= 0$; incidemus in æquationem Penduli bifilis; quam jam invenimus in ſuperiori §. 5, quod bonitatem methodi indicat.

XIV.

Si $A = 0$, habebitur Pendulum bifile, ſed ubi filum ſuperius eſt duplum inferioris; & in hoc caſu erit $n = 2$; quod quidem per ſe clarum eſt, ſine calculo; ſed $m = \frac{2A}{0 \times (B+C)} = 0$; hoc eſt, linea IK, etſi infinite parva, tamen infinities major eſſe debet quam HL; vel etiam poteſt n eſſe $= 0$, & tunc etiam erit $m = 0$; adeoque quieſcet Pendulum.

XV.

Si tandem $B = 0$, erit iterum Pendulum bifile, ſed cujus filum inferius eſt duplum ſuperioris; quo caſu, erit $n = \frac{5}{4} + \frac{A}{4C} \pm \sqrt{(\frac{9}{16} + \frac{5A}{8C} + \frac{AA}{16CC})}$; & $m =$ &c.

XVI.

Penduli ſimplicis cum trifili iſochroni longitudo, invenitur generaliter $= \frac{mc}{m-n}$; cognitis ergo n & m, cognoſcitur quoque longitudo quæſita.

Typus

Typus alterius Solutionis PROBLEMATIS *de multifilibus Pendulis.*

TAB. LXXXVII N°. CLXXVIII *Fig.* 2.

Sit Pendulum quotcunque ponderum ex. gr. trium A, B, C, ſuſpenſum ex puncto D, cujus ſitus quietis ſit recta verticalis DE, ſitus quæſitus ab initio oſcillationis ABCD. Ductis horizontalibus AE, BF, CG; ſint $AE = x$, $BF = y$, $CG = 1$: ſintque longitudines filorum $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$. Demiſſis perpendicularibus BH, CI; erunt $AH = x - y$, $BI = y - 1$.

I.

Ex natura oſcillationum minimarum patet, Pendulo multifili eundem ſitum ABCD conciliari, ſive producatur ab oſcillationibus lateralibus, ſive a gyrationibus conicis circa axem verticalem DE. Etenim, pro priori effectu requiritur, ut vires acceleratrices ponderum A, B, C, quibus ad E, F, G tendunt, ſint ſemper diſtantiis AE, BF, CG proportionales, ad id ut fiat acceſſus ſimultaneus ad axem DE; pro altero effectu pariter oportet ut vires centrifugæ, quibus pondera A, B, C, retrahuntur ab axe DE, ad id præciſe ut ſitum gyrationis conſervent, ſint quoque proportionales iiſdem diſtantiis AE, BF, CG. Quare ſitus Penduli ABCD, qui inſervit oſcillationibus ſimultaneis, inſerviet etiam gyrationibus ſimultaneis. Lubet itaque huic poſteriori ideæ tanquam faciliori inhærere, quæ nos ducet ad breviorem & clariorem ſolvendi modum.

II.

Tenſio fili AB ſola reſiſtit vi ponderis A in directione verticali, & ejuſdem vi centrifugæ in directione horizontali, quæ vires ſe habent ut BH ad HA, ſeu [quia BH in longitudine quam minimum differt a BA] ut BA ad HA. Faciendo itaque $a : x - y = A : \frac{x-y}{a} \times A$; erit $\frac{x-y}{a} \times A$ æqualis vi

centrifugæ ponderis *A*. Cum autem vires centrifugæ, in gyrationibus ſimultaneis, ſint in ratione compoſita radiorum & maſſarum; faciendum eſt $xA : yB = \frac{x-y}{a} \times A : \frac{x-y}{a} \times \frac{y}{x} B$; erit hæc, ſeu $\frac{xy-yy}{ax} B$ æqualis vi centrifugæ ponderis *B* ab ipſius gyratione oriundæ. Ob eandem rationem, habetur $xA : 1C = \frac{x-y}{a} \times A : \frac{x-y}{ax} \times C =$ vi centrifugæ ponderis *C* a gyratione provenienti.

III.

Nunc vero, a reactione tenſionis fili BA, eædem vires laterales, quæ agunt in A ſurſum trahendo, agunt quoque in B retrahendo deorſum. Ponderi itaque *B*, addenda eſt vis ponderis *A* in directione BH verticali, ejuſque vi centrifugæ propriæ, addenda quoque vis centrifuga corporis *A*, ut habeatur vis totalis, qua corpus B trahitur in directione verticali, $= B + A$, & altera totalis centrifuga in directione horizontali $= \frac{xy-yy}{ax} \times B + \frac{x-y}{a} \times A$. His autem reſiſtit tenſio fili BC, quæ, decompoſita in vim verticalem, & vim horizontalem, dat hanc analogiam: CI, vel CB, vel *b*: IB, vel FB — FI, vel FB — GC, vel $y - 1 = B + A : \frac{xy-yy}{ax} \times B + \frac{x-y}{a} \times A$. Hinc emergit prima æquatio $(byy + axy - bxy - ax) B = (bxx - axy - bxy + ax) A$.

IV.

Simili modo invenitur corporis *C* vis verticalis totalis $= C + B + A$; atque vis horizontalis æqualis tribus viribus propriis horizontalibus centrifugis corporum *C*, *B*, *A*; hoc eſt, $= \frac{x-y}{ax} \times C + \frac{xy-yy}{ax} \times B + \frac{x-y}{a} \times A$; & quia iſtis viri-

viribus reſiſtit tenſio fili AC, erit hic etiam faciendum : DG, ſeu DC, ſeu c : GC, ſeu $1 = C + B + A : \frac{x-y}{ax} \times C + \frac{xy-yy}{ax} \times B + \frac{x-y}{a} \times A$. Unde reſultat ſecunda æquatio, $(cx - cy - ax)C + (cxy - cyy - ax)B = (cxy - cxx + ax)A$.

V.

Ex comparatione harum duarum æquationum, dabuntur valores ipſarum x & y, & ita inventum erit quod quæritur. Ergo &c. Ad hoc autem nihil reſtat aliud quam calculus.

VI.

Ex his jam perſpicitur uniformitas methodi, pro quocunque numero filorum & ponderum. Etenim quærendæ ſunt tantum, per §. 2, ſingulorum ponderum vires propriæ centrifugæ; deinde, pro quolibet pondere, ejus vis propria centrifuga, addenda eſt ſummæ omnium corporum inferiorum virium centrifugarum, & ita habebitur vis totalis, qua pondus illud retrahitur ab axe DE in directione horizontali. Vis autem totalis, qua idem pondus verticaliter deorſum trahitur, eſt æqualis ſummæ omnium ponderum inferiorum, uſque ad pondus propoſitum inclusive ſumtorum. Quo facto, inſtituatur hæc analogia : Ut ſumma omnium illorum ponderum inferiorum, ad ſummam earundem virium centrifugarum, ita fili proxime ſuperioris longitudo, ad differentiam diſtantiæ ponderis ab axe, & diſtantiæ ponderis proxime ſuperioris; unde reſultat æquatio. Atque ita tot habebuntur æquationes, quot erunt litteræ incognitæ, una nimirum pauciores quam ſunt pondera vel fila; ex quarum æquationum comparatione determinantur incognitæ.

VII.

In ſolutione Problematis, pro numero majori ponderum & filo-

filorum, continetur etiam solutio pro numero minori. Sic si ex. gr. ex Pendulo trifili velimus facere bifile, ponendum tantum est in duabus æquationibus $B = 0$, & $b = 0$; quod primam æquationem mutat in hanc $y = 1$, & alteram in hanc $(cx - cy - ax)C = (cxy - cxx + ax)A$; quæ, si porro pro y scribatur 1, dat $(cx - c - ax)C = (cx - cxx + ax)A$; atque, in casu ubi $c = a$, prodit $-cC = (2x - xx)A$, id quod dat $x = 1 \pm \sqrt{(\frac{A+C}{A})}$, ut invenimus priori modo.

VIII.

Pendulum simplex, quod gyrando, vel oscillando, sit isochronum Pendulo multifili gyranti, vel oscillanti, invenitur facillime; prolongando tantum filum infimum AB, donec occurrat axi in L: dico enim AL, seu $\frac{ax}{x-y}$, fore longitudinem Penduli simplicis isochroni Pendulo ACBA. Res est manifesta; nam filum AB, eodem modo tenditur a solo pondere A, ac filum prolongatum AL ab eodem tenderetur: ergo utrobique idem motus in pondere A generabitur, hoc est, ambo Pendula, & simplex LA, & compositum multifile DCBA, sunt isochrona.

IX.

Ex hac nostra Theoria, jam non est difficile invenire æquationem pro natura curvæ Catenæ oscillantis, vel gyrantis; idque sive uniformiter, sive non uniformiter Catena sit gravis. Concipiatur enim ABCD tanquam polygonum infinitorum laterum, & sumatur, a puncto infimo in axe E, pars quælibet finita EF pro abscissa $= z$, ipsique respondens applicata FB $= y$; considero jam FG tanquam elementum abscissæ $= dz$, adeoque IB $= -dy$, & elementum curvæ BC $= dt$; dicendo nempe arcum curvæ AB $= t$. Scribo autem $-dy$, quia crescen-

centibus abſciſſis decreſcunt applicatæ. Sit porro ponduſculum elementi catenæ BC in puncto B collectum $= p\,dt$, ubi per p intelligo functionem datam arcus AB. Conſtat vero ex §. 2, vim propriam centrifugam cujuſque ponderis B eſſe $= \frac{AH}{AB} \times \frac{FB}{AE} \times B =$ [ob AH : AE = AB : AL] $\frac{AB}{AB} \times \frac{FB}{AL} \times B = \frac{FB}{AL} \times B =$ [dicendo longitudinem Penduli ſimplicis LA = L] $\frac{y}{L} \times p\,dt$. Quare ſumma omnium virium centrifugarum ab A uſque ad B, hoc eſt, $\int \frac{y\,p\,dt}{L}$, ſe habet ad ſummam omnium ponderum, hoc eſt ad $\int p\,dt$, ut IB ad BC, ſeu ut $-dy$ ad dt: unde emergit hæc æquatio $\frac{dt}{L} \int y\,p\,dt = -dy \int p\,dt$; vel etiam, quia, ob infinite parvas applicatas, non differunt longitudine arcus curvæ t ab abſciſſis z, & dt a dz, æquatio ita ſcribi poteſt [ſervando p ſicuti pro functione arcus t, ita pariter pro functione abſciſſæ z] $\frac{dz}{L} \int y\,p\,dz = -dy \int p\,dz$.

COROLLARIUM.

Si Catena ſit uniformiter gravis, id eſt, ſi $p = 1$, habebitur pro natura curvæ quæſitæ, hæc æquatio $dz \int y\,dz = -Lz\,dy$. Ex qua ſi quocunque modo conſtrui poſſit curva, dabit ea curvedinem Catenæ uniformiter gravis, in quolibet ſitu proximo axi, & oſcillantis vel gyrantis in tempore ſimultaneo cum Pendulo ſimplici, cujus longitudo $L =$ tangenti vel ſubtangenti curvæ in puncto infimo Catenæ.

Solutio brevior, & ſimplicior, ex natura oſcillationum petita.

I.

Tenſio fili AB = ponderi A; fili BC = $A + B$, fili CD = $A + B + C$; & ſic porro, ſi plura eſſent fila & pondera.

II.

Retentis iisdem denominationibus, ut supra; Tensio fili AB, qua retrahitur pondus A versus B, est ad vim motricem, quæ urgetur horizontaliter versus E, ut AB ad AH: adeoque ea vis motrix $= \frac{x-y}{a} \times A$.

III.

Tensio fili BC, est ad vim qua pondus B versus F urgetur, ut BC ad BI: ergo ea vis erit $= \frac{y-1}{b} \times (A+B)$. Sed ea non est ipsa vis motrix ponderis B versus F; quia enim tensio fili præcedentis BA tantundem deorsum oblique trahit pondus B, quantum sursum trahit pondus A; hæc ita decomposita facit etiam secundum horizontalem $\frac{x-y}{a} \times A$, quæ priori $\frac{y-1}{b} \times (A+B)$ est contraria; adeoque ipsa vis motrix ponderis B, erit $= \frac{y-1}{b} \times (A+B) - \frac{x-y}{a} \times A$, qua nimirum B versus F urgetur.

IV.

Idem etiam de singulis superioribus ponderibus intelligendum, si plura essent. Quare vis motrix ponderis C versus G, erit $= \frac{1}{c} \times (A+B+C) - \frac{y-1}{b} \times (A+B)$.

V.

Vires istæ motrices divisæ per sua respective pondera, quæ movenda habeat, dabunt eorum vires acceleratrices; nempe vis acceleratrix ponderis $A = \frac{x-y}{a} \times \frac{A}{A}$ seu $\frac{x-y}{a}$; ponderis B $= \frac{y-1}{b} \times (\frac{A+B}{B}) - \frac{x-y}{a} \times \frac{A}{B}$; ponderis $C = \frac{1}{c} \times (\frac{A+B+C}{C}) - \frac{y-1}{b} \times (\frac{A+B}{C})$: & sic porro.

VI.

VI.

Verum, ob ponderum isochronismum, debent hæ vires acceleratrices, poni proportionales distantiis, vel spatiis percurrendis AE, BF, CG, &c. hoc est, debent earum intensitates esse æquales. Quamobrem, divisæ per distantias suas, erunt omnes inter se æquales, nempe $\frac{x-y}{ax} = \frac{y-1}{by} \times \left(\frac{A+B}{B}\right) - \frac{x-y}{ay} \times \frac{A}{B} = \frac{1}{c \times 1} \times \left(\frac{A+B+C}{C}\right) - \frac{y-1}{b \times 1} \times \left(\frac{A+B}{C}\right)$; & ita porro. Unde patet tot haberi æquationes, quot sunt litteræ incognitæ. *Q. E. I.*

COROLLARIUM I.

Hac methodo, quæ omnium est naturalissima, pari facilitate determinatur curvatura Catenæ oscillantis, qua id peregimus per præcedentem methodum. Cum enim tensio cujuslibet elementi Catenæ sit $= \int p\,dt$, quæ dat vim trahendi B ad $F = -\frac{dy}{dt} \int p\,dt$, hujusque differentiale $d\left(-\frac{dy}{dt} \int p\,dt\right) =$ vi motrici; quam dividendo per elementum ponderis $p\,dt$, habetur vis acceleratrix; iterumque per distantiam y, habetur intensitas $\frac{d\left(-\frac{dy}{dt} \int p\,dt\right)}{y p\,dt} =$ constanti $\frac{1}{L}$; adeoque $d\left(-\frac{dy}{dt} \int p\,dt\right) = \frac{y p\,dt}{L}$; atque integrando $-dy \int p\,dt = \frac{dt}{L} \times \int y p\,dt$, ut prius.

COROLLARIUM II.

Si tria sint pondera æqualia, ut & fila æqualia. Invenietur hæc æquatio $4x^3 - 12xx - 15x + 2 = 0$: cujus radix dat EA, eaque inventa habetur FB. Vel etiam reducetur quæstio ad hanc æquationem $4y^3 - 12yy + 3y + 8 = 0$; cujus radix dat FB, & ex hac fluit EA.

N°. CLXXIX.

PROBLEMA

STATICO-DYNAMICUM.

TAB. LXXXVII N°. CLXXIX. *Fig.* 1.

DAtum esto Triangulum rectangulum ACB, ex materia non gravi confectum, cujus tribus lateribus accumbant totidem corpora L, M, N, etiam non gravia; ita tamen ut latera, tam Trianguli, quam corporum, in quibus se contingunt, sint lævigatissima & perfecte polita; eum nempe in finem, ut sine ulla frictione, aliave resistentia, super se invicem moveri, vel fluere possint, corpus M super AC, corpus L super AB, & corpus N super CB. Accedat nunc corpori M vis aliqua motrix data, secundum directionem *p*M normalem ad hypothenusam AC, quo fiet, ut Triangulum ACB incipiat retropelli continuo in alium situm *acb*; consequenter tria corpora M, L, N, loca quoque sua mutent. Hisce ita positis: Quæritur primo directio motus, tam Trianguli, quam singulorum corporum: Deinde Lex accelerationis singulorum? Ubi quidem ponitur rem ea ratione peragi, ut Triangulum & corpora aliter moveri non possint, quam motu in unoquoque sibi semper parallelo.

SOLUTIO.

Dicatur massa Trianguli ABC $= T$, corporis M $= M$, corporis L $= L$, & corporis N $= N$. Concipiatur jam imprimi corpori M, incumbenti hypothenusæ AC, vis aliquam datam motricem expressam per M*t*, sumendam in prolongata *p*M normali ad AC. Dicatur hæc vis motrix $= m$. Item Trianguli altitudo AB $= a$, basis CB $= b$, hypothenusa AC $= \sqrt{(aa+bb)} = c$. Triangulum ABC hoc modo pressum

a corpore M, animato jam vi motrice *m*, sese subducens, paulo post veniat in situm proximum *abc*; ita ut latera lateribus, singula singulis, maneant, per hypothesin, parallela. Primo manifestum est, punctum M mansurum fluendo in M*t* prolongata rectæ *p*M; sicuti etiam ductis ML, MN, normalibus ad AB, CB, corpora L & N repellentur in directionibus prolongatis ML*l*, MN*n*, a quibus non deviabunt. Jam vero vis motrix *m* absoluta decomponi potest in collaterales, secundum directiones M*r* & M*s*, latera scilicet rectanguli M*rts*: unde nascitur vis in directione M*r* $= \frac{am}{c}$, & altera in directione M*s* $= \frac{bm}{c}$; id quod patet ex similitudine triangulorum M*tr*, M*ts*, & ACB. Vis illa prior, secundum directionem M*r*, agit simul in Triangulum & corpus adjacens L, eique non obstat corpus N; sed altera vis, secundum directionem M*s*, agit etiam simul in Triangulum & corpus adjacens N, ita ut pariter non obstet corpus L. Vis ista motrix *m*, quæ in solo corpore M existit, & illæ duæ $\frac{am}{c}$, $\frac{bm}{c}$, in quas resolvitur *m*, diminuuntur utique, agendo in Triangulum & hoc mediante, in corpora L & N. Ut igitur inveniatur, quantum per actionem vis primitivæ *m* remaneat in corpore M ad progrediendum in sua directione M*t*; quantum item virium acquirat tam Triangulum in utraque sua directione collaterali, quam corpus L in directione ML, & corpus N in directione MN; annotandum est, quod Lemmatis loco ponitur, in omni actione duorum corporum se mutuo prementium, oriri quandam vim intermediam, quam voco *immaterialem*, quæ æqualiter agit prorsum & retrorsum; in quo consistit Canon ille, *Quod actio & reactio sunt æquales.* Voco autem *vim* illam *immaterialem*; quia est quasi extra utrumque corpus, atque ad unum non magis pertinet quam ad alterum.

Ordo genuinus nunc postulat, ut, ante omnia, inquiratur in vim istam immaterialem, quæ intercedit inter corpus M, in quo est principium motus, & Triangulum, quod immediate excipit

illius actionem, eamque communicat cum corporibus L & N; unde postea determinabuntur vires motrices in Triangulo corporibusque genitæ, ipsæque proin directiones virium acceleratricium, quibus proportionales sunt velocitates actuales. Sit igitur $x =$ vi immateriali inter corpus M & Triangulum, quæ directe agit & reagit instar elateris in directione Mt & Mp. His ita positis; remanebit in corpore M vis motrix $= m - x$, in directione pM; Triangulum vero recipit eandem illam vim motricem x in directione Mt; quæ decomposita in collaterales secundum ML & MN, dat eam, secundum directionem ML, $= \frac{ax}{c}$, & alteram, secundum directionem MN, $= \frac{bx}{c}$. Dividendo autem has vires motrices per suas respective massas movendas, habebimus singulorum corporum vires acceleratrices, nimirum $\frac{m-x}{M} =$ vi acceleratrici corporis M, in directione pM. Quia vero vis collateralis $\frac{ax}{c}$ in directione ML movere debet simul Triangulum & corpus L, sicuti etiam altera collateralis $\frac{bx}{c}$ movenda habet simul Triangulum & corpus N; erit vis acceleratrix in directione $ML = \frac{ax}{c(T+L)}$, & altera acceleratrix in directione $MN = \frac{bx}{c(T+N)}$. Habebit igitur Triangulum duas vires acceleratrices, in diversis directionibus ML & MN; quæ ut referantur ad communem directionem Mt corporis M; faciendum est, ut se habet AC ad AB, seu ut c ad a, ita $\frac{ax}{c(T+L)}$ ad quartam $\frac{aax}{cc(T+L)}$; item, ut se habet AC ad CB, seu c ad b, ita $\frac{bx}{c(T+N)}$ ad quartam $\frac{bbx}{cc(T+N)}$. Significabunt hæ duæ simul sumptæ $\frac{aax}{cc(T+L)} + \frac{bbx}{cc(T+N)}$ vim acceleratricem communem expressam per Mq, quæ simul denotat

notat vim acceleratricem $\frac{m-x}{M}$ corporis M, in eadem directione: nam corpus M inter movendum, semper adjacere supponitur hypothenusæ Trianguli: unde hæc habetur æquatio $\frac{m-x}{M} = \frac{aax}{cc(T+L)} + \frac{bbx}{cc(T+N)}$; adeoque $x = \frac{m}{\frac{aaM}{cc(T+L)} + \frac{bbM}{cc(T+N)} + 1}$. Ut autem habeatur actualis directio, & quantitas vis acceleratricis ipsius Trianguli; oportet tantum construere novum rectangulum, sumendo super ML partem $= \frac{ax}{c(T+L)}$, & super MN aliam partem $= \frac{bx}{c(T+N)}$; quæ erunt latera rectanguli, cujus diagonalis, ex M ducta in angulum oppositum, designabit veram directionem, & vim acceleratricem ipsius Trianguli. Hæc autem diagonalis est utique $= \frac{x}{c}\sqrt{\left(\frac{aa}{(T+L)^2} + \frac{bb}{(T+N)^2}\right)}$; in quibus omnibus, si pro x substituatur ejus valor inventus $\frac{m}{\frac{aaM}{cc(T+L)} + \frac{bbM}{cc(T+N)} + 1}$ data erunt singula quæsita.

Exemplum I.

Sint corpora L & N æqualia, erit $x = \frac{m}{\frac{(aa+bb)M}{cc(T+L)} + 1} = \frac{m}{\frac{M}{T+L} + 1} = m \times \frac{T+L}{M+T+L}$. Hinc *primo* vis acceleratrix corporis M, in sua permanente directione M*t*, seu $\frac{m-x}{M} = \frac{m}{M+T+L}$. 2°. Vis acceleratrix corporis L, in sua directione invariabili L*l*, seu $\frac{ax}{c(T+L)} = \frac{am}{cM+cT+cL}$. 3°. Vis acceleratrix corporis N [quod æquale ponitur ipsi L] in sua constante directione N*n*, seu $\frac{bx}{c(T+N)} = \frac{bm}{cM+cT+cL}$.

4°.

4°. Vis acceleratrix ipsius Trianguli, in directione ML, est eadem quæ corporis L, nempe $\frac{am}{cM+cT+cL}$; ejusdemque Trianguli vis acceleratrix, in directione MN, est eadem quæ corporis N, nempe $\frac{bm}{cM+cT+cL}$; unde Trianguli vis acceleratrix actualis, in directione vera diagonalis dicti rectanguli $= \frac{m}{M+T+L}$.

Exemplum II.

Quod si jam ambo corpora L & N sint infinite parva, hoc est æqualia o, liquet, eum casum esse quo corpus directe, seu perpendiculariter, premit alterum omni vi motrici destitutum; cum quo per consequens vim suam motricem partitur, ita ut utrumque accelerari debeat æqualiter, & in eadem directione, habeatque jam tota massa in unum coalescens eandem vim motricem, quam ante pressionem habuerat solum corpus M: atque hoc est, quod docet, in hoc casu, Regula nostra generalis.

Fit enim $x = \frac{mT}{M+T}$; item $\frac{m-x}{M} = \frac{m}{M+T}$; ut & Trianguli vis acceleratrix actualis in directione diagonalis, quæ jam est ipsa M*t* in prolongata *p*M $= \frac{m}{M+T}$.

Exemplum III.

In casu, quo ponitur $L = o$ & simul $N =$ infinito; idem est, ac si trianguli basis CB moveri vel fluere debeat super plano immobili. Tunc erit $x = \frac{m}{\frac{aaM}{ccT}+1} = \frac{mccT}{aaM+ccT}$; hic enim, ob $N = \infty$, evanescit $\frac{bbM}{cc(T+N)}$; atque, ob eandem rationem, vera directio & vis acceleratrix Trianguli, parallela basi CB, erit $= \frac{ax}{cT} = \frac{mac}{aaM+ccT}$: corporis vero M vis acceleratrix

leratrix in directione Mt, quæ est $\frac{m - x}{M}$, jam fit $= \frac{aax}{ccT}$ $= \frac{maa}{aaM + ccT}$; unde & ipsæ velocitates actuales, in suis propriis directionibus, Trianguli & corporis prementis M, erunt ut $\frac{mac}{aaM + ccT}$ ad $\frac{maa}{aaM + ccT}$; hoc est ut c ad a, seu ut AC ad AB.

COROLLARIUM.

Hic casus complectitur etiam Solutionem Problematis olim *Petropoli* ad me missi; cujus tum dedi Solutionem aliunde petitam, quam videre est in *Comment. Petropol.* Tom. V *. Propositio huc redibat. Dato Triangulo rectangulo ABC materiali, in plano verticali, cujus basis BC horizontalis liberrime fluere possit super alio plano horizontali immobili: incumbat vero hypothenusæ AC corpus aliquod grave M, quod vi ponderis sui descensum moliatur in directione verticali: unde id eveniet, ut Triangulum ab ista pressione retropellatur in directione horizontali CB; interea dum corpus M, quod pariter liberrime fluere posse ponitur super AC, descendet continuo a puncto M versus C, adhærens nempe indesinenter hypothenusæ AC: Quærebatur itaque, quam habeant rationem celeritates Trianguli retrocedentis, atque corporis M oblique descendentis, quamque hoc habiturum sit directionem actualem, utpote compositam ex directione secundum hypothenusam, & simul ex ea secundum Mt priori normalem. Hoc Problema ex præsenti nostro principio facillime solvitur. Decomponatur enim vis gravitatis ponderis M, cujus directio est verticalis, in duas collaterales, unam parallelam hypothenusæ, alteram eidem normalem. Illa, durante actione, non mutatur; hæc vero agit in Triangulum, sicuti supponitur in præcedentis Problematis solutione; unde habebitur celeritas Trianguli super plano horizontali; ut & celeritas corporis M, sed tantum in directione Mt normali ad hypothenusam, cum qua componi debet

* N°. CXLVII. pag. 365, *Tom. III.* Confer. Numerum sequentem.

bet illa, quæ generatur ex cognita vi motrice in directione parallela hypothenusæ: compositione motus rite peracta, dabitur directio & celeritas actualis corporis M.

SCHOLIUM I.

Si Corpus M motu actuali moveatur in directione p M, data velocitate v, impingatque in Triangulum T, quod percussum simul pellat corpora L & N: erunt, posito corpora non esse elastica, velocitates acquisitæ in eadem ratione, quam hic determinavimus pro simplici pressione. Effectus enim percussionis fit pariter per pressionem, sed promptissimam & quasi momentaneam. Erit igitur m, seu vis motrix, consideranda tanquam velocitas v multiplicata per massam M; ut sit ante conflictum quantitas motus $= Mv =$ vi motrici. Posito itaque hic etiam $x =$ vi illi immateriali, quæ in conflictu generabitur; invenietur eodem ratiocinio, quo supra factum $x = \frac{m}{\frac{aaM}{cc(T+L)} + \frac{bbM}{cc(T+N)} + 1}$ hoc est $= \frac{Mv}{\frac{aaM}{cc(T+L)} + \frac{bbM}{cc(T+N)} + 1}$; qui valor substituatur in $v - \frac{x}{M}$, ut habeatur velocitas actualis corporis M, post conflictum, in sua propria directione Mt. Idemque substitutus in $\frac{ax}{c(T+L)}$ & in $\frac{bx}{c(T+N)}$, dabit velocitates actuales corporum L & N, in directionibus suis propriis Ll & Nn: ipsius vero Trianguli T directio, & velocitas actualis, erit quæ ex illis duabus componitur $= \frac{x}{c}\sqrt{(\frac{aa}{(T+L)^2} + \frac{bb}{(T+N)^2})}$. Hac occasione, ostendendum est quam facile inveniatur Regula generalis pro communicatione motus duorum corporum, datis velocitatibus sibi mutuo directe occurrentium. Sit enim corpus A, ejusque velocitas a, directe insequens corpus B, cujus velocitas minor b versus eandem plagam; erit corporis A quantitas motus, seu vis

vis motrix $= Aa$, corporis B vis motrix Bb. Ponatur jam vis immaterialis per conflictum genita $= x$; manebit ergo in corpore A, vis motrix $= Aa - x$, & in corpore B producetur vis motrix $= Bb + x$, quæ, diviſæ per maſſas A & B, dabunt utriuſque velocitates poſt ictum $a - \frac{x}{A}$ & $b + \frac{x}{B}$; quæ, ſi corpora non ſunt elaſtica, debent eſſe æquales, adeoque $a - \frac{x}{A} = b + \frac{x}{B}$. Unde prodibit $x = \frac{a-b}{A+B}$; quo ſubſtituto in alterutro habebitur $\frac{Aa+Bb}{A+B}$, pro velocitate communi, quam ambo corpora habebunt poſt ictum. Amittit adeoque corpus velocius A aliquem gradum ſuæ velocitatis, qui erit $a - \frac{Aa+Bb}{A+B} = \frac{(a-b)B}{A+B}$, & corpus tardius B acquiret novum velocitatis gradum, qui utique erit $\frac{Aa+Bb}{A+B} - b = \frac{(a-b)A}{A+B}$. Quod ſi jam corpora fuerint elaſtica; deſiderenturque eorum velocitates poſt conflictum; conceptu ſane haud difficile eſt, duplicandos eſſe effectus oriundos a compreſſione elaterii, hoc eſt, a vi illa immateriali x, quæ in utramque partem æqualiter ſe exerit; ita ut quantum velocitatis deſtruitur in velociori, & quantum velocitatis additur in tardiori per compreſſionem, tantundem quoque de novo fiat in utroque corpore per reſtitutionem elaterii. Erit proinde jactura velocitatis in corpore velociori $A = \frac{(a-b)2B}{A+B}$, & augmentum velocitatis in tardiori $B = \frac{(a-b)2A}{A+B}$; unde, poſt colliſionem peractam, habebit corpus A velocitatem $= a - \frac{(a-b)2B}{A+B} = \frac{Aa - Ba + 2Bb}{A+B}$, & corporis B velocitas erit $= b + \frac{(a-b)2A}{A+B} = \frac{Bb - Ab + 2Aa}{A+B}$.

Notandum, ſi moveatur ante conflictum corpus B in plagam contrariam, idem eſt ac ſi dicatur eſſe b negativum; mutanda

per consequens sunt signa terminorum, in quibus reperitur b. Atque sic prodibit, post ictum in corporibus non elasticis, communis velocitas $= \frac{Aa - Bb}{A+B}$. Sed in elasticis, velocitas corporis $A = \frac{Aa - Ba - 2Bb}{A+B}$, & corporis B velocitas $= \frac{-Bb + Ab + 2Aa}{A+B}$. Quæ omnia pulchre conspirant cum Regulis motuum dudum exhibitis, tum a nobis, tum ab aliis, sed per diversas omnino vias erutis.

SCHOLIUM II.

Ad nostram hanc Theoriam quoque spectat Theorema NEWTONI, propositum in *Princ. Mathematicis Philos. Natur.* Vid. Coroll. IV. Legis III. Libro primo præmissum, quod ita sonat: *Commune gravitatis Centrum corporum duorum vel plurium, ab actionibus corporum inter se, non mutat statum suum vel motus vel quietis; & propterea corporum omnium in se mutuo agentium* [*exclusis actionibus & impedimentis externis*] *commune Centrum gravitatis, vel quiescit, vel movetur uniformiter in directum.*

Etsi hoc Theorema, elegantissimum quidem, in generali sensu sit propositum; demonstratio tamen NEWTONI minime est generalis. Lector quippe attentus examinaturus longam ratiocinationis *Newtonianæ* deductionem, percipiet, sine magna difficultate, supponi in illa demonstratione, concursum fieri non nisi duorum corporum una vice, mox alia vice duorum aliorum, vel unius eorum, cum tertio; percipiet, inquam, nullo in loco, per totum sermonem, in considerationem trahi casum, quo tria plurave corpora, eodem momento simul, in diversis directionibus in se invicem impingunt; cujus casus neglectio relinquit sane demonstrationem NEWTONI longe imperfectissimam; quæ vix particulam præstat ejus quod promittitur in Propositione generali. Qui defectus ut suppleatur, alia via ineunda est, quam quæ a NEWTONO est tentata. Hanc in rem, nostra idea de viribus immaterialibus inter corpora sibi invicem collidentia concipiendis commodissime adhibetur. Postquam enim ostendimus

illas

illas vires nihil aliud esse, quam pressiones, seu vires motrices subitaneas, effectus suos in momento absolventes; res utique referri poterit ad ordinariæ Dynamices principia; ubi duntaxat debito modo applicanda est Propositio illa generalis, cum a nobis, tum ab aliis, dudum demonstrata, quæ hæc est:

Si dati corporis ABC centrum gravitatis O, sollicitetur a pluribus potentiis, seu viribus motricibus, quarum directiones & quantitates, designentur per rectas datas OD, OE, OF, OG &c. sitque punctum P centrum commune gravitatis punctorum D, E, F, G, instar ponderum æqualium consideratorum; Dico rectam OP fore directionem, secundum quam movebitur centrum gravitatis O corporis ABC, & quidem motu sibi semper parallelo, sive accedendo versus P, sive ab eodem recedendo, prout vires motrices sunt vel trahentes vel pellentes. TAB. LXXXVII. N°. CLXXIX. Fig. 2.

Nunc quidem non est ex instituto nostro, generalem facere applicationem hujus Propositionis, ad demonstrandum Theorema *Newtonianum*, in omni extensione sumtum; sufficit indicasse rei fundamentum, ut alii, quibus vacat & volupe est, laboris & calculi molestiam subeant.

N°. CLXXX.

CONTINUATIO TRACTATIONIS

De descensu corporis gravis, super hypothenusa Trianguli rectanguli mobilis super plano horizontali immobili.

Videatur Numerus CXLVII, pag. 365 & seq. *Tom. III.*

SEnsus hujus Problematis, cujus Solutio a me petebatur, in hoc consistebat, quod ita sonat: „ Sit ACK triangulum ma- „ teriale, rectangulum in K, quod super plano horizontali DH, „ sine omni frictione, moveri possit. Sit etiam corpus grave *m*, „ quod super hypothenusa AC positum sua gravitate descendat, „ pariter sine frictione; quo fiet ut, descendente corpore *m*, TAB. LXXXVII. N°. CLXXX.

„ Triangulum jugiter ab eo preſſum retrocedere cogatur. Quæ-
„ ritur tum corporis, tum Trianguli velocitas; tum etiam via
„ AP, quam corpus ex motu compoſito deſcribit, atque utriuſ-
„ que Lex accelerationis?

Solutio, quam ſtatim exhibueram in *Comment. Petrop.* Tom. V. pag. 11 & ſeq. anno ſcilicet 1730, placuit Eruditis, deditque quibuſdam, ut audio, occaſionem ſolvendi Problema in majori extenſione. Solutiones autem eorum, quæ nuſquam adhuc extant, quantum ſcio, nondum vidi. Aſſumſeram in ſolutione mea hypothenuſam AC eſſe lineam rectam; deinde velocitatem initialem utriuſque, tam corporis, quam Trianguli, eſſe nullam; hoc eſt, utrumque incipere motum ſuum a quiete; contentus equidem tractaſſe Problema ſub ea, qua proponebatur, conditione, neque tum cogitans de conditionum amplificatione. Nunc ſupperadduntur duæ conditiones, quæ Problema reddunt generalius: prima hæc eſt, ut pro recta hypothenuſa AC ſubſtituatur linea curva qualiſcunque data: conditio altera, ut corpus m habeat velocitatem initialem datam, quando incipit deſcendere. Id quod facit duo nova Problemata; quibus ut ſatisfacerem, non operoſum mihi fuit obſervare Formulas meas, pro determinatione virium acceleratricium corporis & Trianguli, accommodari poſſe ad præſens negotium. Ibi enim demonſtratum dedi, quod vis acceleratrix corporis m, in directione hypothenuſæ, ſit $= \frac{gacM}{ccM - bbm}$, & vis acceleratrix Trianguli, in directione horizontali, ſit $= \frac{gabm}{ccM - bbm}$, ubi ſupponitur $g =$ vi acceleratrici naturali corporum gravium, item a, b, & $c =$ tribus lateribus Trianguli, nimirum altitudini, baſi, & hypothenuſæ, tandemque $M =$ aggregato maſſarum Trianguli & corporis m.

Cum autem, ob rectitudinem hypothenuſæ, conſtans maneat ejus inclinatio ad horizontem, ubicunque in illa reperiatur corpus m; patet hujus corporis vim acceleratricem, in directione hypothenuſæ, fore uniformem, per totum decurſum ſuper hypothenuſa.

Aliter

Aliter se res habet, si hypothenusa non est linea recta, sed curva: tunc enim inclinatio ejus ad horizontem est variabilis. Unde variabilis etiam erit vis acceleratrix, in decursu corporis m per hypothenusam curvilinealeam; ut & altera vis acceleratrix ipsius Trianguli in directione horizontali; utpote quæ etiam variabilis fiet. Hoc non obstante, inservire possunt nostræ Formulæ ad determinandas istas vires, pro quolibet descensu super hypothenusa curvilinea. Analysis nostra infinitesimalis huic negotio succurrit. Ecce quomodo.

Ponamus Triangulum rectangulum AKC, mobile super plano horizontali DH, habere pro hypothenusa lineam curvam quamcunque datam AEC, super qua descendens corpus grave m pervenerit jam ad E, percursurum porro particulam Ee, quæ tanquam elementum curvæ pro recta censetur. Ductis igitur applicatis EN, en, ad axem AK, huicque parallela EF; sit AN $= x$, NE $= y$, Nn vel EF $= dx$, eF $= dy$, Ee $= dr$; habebimus Triangulum rectangulum EFe, cujus hypothenusa est lineola recta Ee, quam dum percurrit corpus grave m, considerari poterit [durante hoc tempusculo, quod vocetur dt] Triangulum EFe, tanquam repræsentans partem figuræ triangularis rectilineæ AKC, mobilis super plano immobili horizontali DH. Hinc, si in Formulis, pro casu vulgari in *Commentariis Petropolit.* soluto, substituantur pro a, b, c, earum repræsentantes dx, dy, dr, prodibunt $\frac{gMdxdr}{Mdr^2 - mdy^2}$ & $\frac{gmdxdy}{Mdr^2 - mdy^2}$; quæ, durante tempusculo dt, exprimunt vires acceleratrices; prior nempe corporis m descendendi per lineolam Ee, & altera systematis M, retrocedendi in directione horizontali DH.

Determinatis ita viribus acceleratricibus, reliqua omnia inde dependent. Dicatur enim, brevitatis gratia, vis acceleratrix inventa $\frac{gMdxdr}{Mdr^2 - mdy^2} = A$, & altera $\frac{gmdxdy}{Mdr^2 - mdy^2} = B$; item velocitas, qua corpus m percurrit Ee vel $dr = u$; & velocitas, quam tum habebit Triangulum in directione horizontali $= v$, tempusculum quo incrementa velocitatum du & dv generan-

nerantur $= dt$; unde ex Principiis Dynamicis fluunt sequentia. 1°. $Adt = du$, & $Bdt = dv$; adeoque $A : B = du : dv$; unde $dv = \frac{Bdu}{A}$; 2°. Ob $dt = \frac{dr}{u}$, erit $\frac{Adr}{u} = du$, seu $Adr = udu$; id quod dat $u = \sqrt{\int 2Adr}$, & differentiando, $du = \frac{Adr}{\sqrt{\int 2Adr}}$. 3°. Substituto hoc valore habebimus $\frac{Bdu}{A}$, seu $dv = \frac{Bdr}{\sqrt{\int 2Adr}}$, ipsamque proin $v = \int \frac{Bdr}{\sqrt{\int 2Adr}}$.

Ordo nunc postulat, ut determinemus viam ipsam, quam corpus m motu complicato sequitur inter descendendum; hoc est lineam veram ABP quam actualiter describit. Hunc in finem, resolvenda est velocitas per Ee, in velocitatem verticalem per EF, & horizontalem per Fe; faciendo itaque, ut se habet Ee ad EF, seu ut dr ad dx, ita u seu $\sqrt{\int 2Adr}$ ad quartam $\frac{dx\sqrt{\int 2Adr}}{dr}$ = velocitati per EF; sic pariter ut dr ad dy, ita $\sqrt{\int 2Adr}$ ad $\frac{dy\sqrt{\int 2Adr}}{dr}$ = velocitati in directione horizontali; quæ velocitas est relativa ad mobilitatem Trianguli mixtilinei AKC. Ut vero habeatur velocitas realis, seu absoluta, qua scilicet corpus m, respectu plani horizontalis immobilis, progreditur a plaga H ad plagam D, auferenda erit v, seu velocitas Trianguli, quæ est $\int \frac{Bdr}{\sqrt{\int 2Adr}}$, retrocedens in plagam contrariam a D versus H, una cum ipso corpore m; quo facto, habebimus corporis m velocitatem absolutam, in directione horizontali $HD = \frac{dy\sqrt{\int 2Adr}}{dr} - \int \frac{Bdr}{\sqrt{\int 2Adr}}$.

His præmissis, natura lineæ quæsitæ ABP determinatur hunc in modum. Concipiamus Triangulum mobile AKC, in suo situ initiali, aliudque simile Triangulum, sed immobile, accumbens & congruens cum priori AKC existente in situ initiali; in hoc Triangulo immobili fingamus descriptam esse lineam ABP, cujus naturam quærimus. Sint in ea applicatæ proximæ BN, vel $bn = z$, differentialis $bh = dz$: eritque proin dx ad dz, ut velocitas per dx ad veloci-

locitatem per dz; hoc est, ut $\frac{dx\sqrt{\int 2Adr}}{dr}$ ad $\frac{dy\sqrt{\int 2Adr}}{dr} - \int \frac{Bdr}{\sqrt{\int 2Adr}}$; unde emergit æquatio $dz\sqrt{\int 2A\,dr} = dy\sqrt{\int 2A\,dr} - dr\int \frac{Bdr}{\sqrt{\int 2Adr}}$; exprimens naturam lineæ ABP, quam corpus m actualiter describit in plano verticali immobili, quod super DH erectum concipitur, & congruens cum plano mobili AKC in situ initiali. Divisa æquatione per $\sqrt{\int 2Adr}$, prodit valor ipsius $dz = dy - \frac{dr}{\sqrt{\int 2Adr}} \times \int \frac{Bdr}{\sqrt{\int 2Adr}}$ generalissime pro qualibet linea AEC, sive recta sit, sive curva.

COROLLARIUM I.

Si fuerint A & B quantitates constantes, incidimus in casum Trianguli rectilinei AKC, resoluti in *Commentariis* citatis. Revera hoc docebit æquatio inventa, quæ nunc hanc faciem induit $dz = dy - \frac{B}{A} \times \frac{dr}{\sqrt{\int 2dr}} \times \int \frac{dr}{\sqrt{\int 2dr}}$ vel [simplici integratione denominatoris $\sqrt{\int 2dr}$ adhibita] hanc $dz = dy - \frac{B}{A} \times \frac{dr}{\sqrt{2r}} \times \int \frac{dr}{\sqrt{2r}}$; cui æquivalet ista $dz = dy - \frac{B}{A} \times dr$. Quæ porro integrata simpliciter, dat, in terminis finitis, hanc æquationem $z = y - \frac{Br}{A}$, quæ evidenter monstrat lineam ABP esse rectam. Ut autem pateat eandem esse cum illa quam dedimus in *Comment. Coroll.* 11 *; ponamus puncta E, B, N, perveniisse ad loca infima C, P, K; & ita erit $z = PK$; $y = CK$, seu b; $r = AC$, seu c, & cum præterea per *Coroll.* 1, sit $B : A = bm : cM$; erit $PK = CK - \frac{bm \times AC}{cM}$; adeoque $CK - PK$, seu CP, $= \frac{bm \times AC}{cM} =$ [ob $AC = c$] $\frac{bm}{M} =$ [ob $CK = b$] $\frac{m}{M} \times CK$; quod prorsus conspirat cum *Coroll.* 2 loci citati.

* Pag. 370, *Tom. III.*

COROLLARIUM II.

Posito eodem casu Trianguli rectilinei AKC; ut inveniatur æquatio inter coordinatas AN & NB, hoc est, inter x & z, exprimens naturam lineæ ABP, quam corpus m realiter describit; id tantum agendum est, ut in æquatione modo ante inventa $dz = dy - \frac{B}{A} \times \frac{dr}{\sqrt{2r}} \times \int \frac{dr}{\sqrt{2r}}$, substituantur valores quantitatum dy, dr, r, & $\frac{B}{A}$; nempe $\frac{b\,dx}{a}$ pro dy, $\frac{cx}{a}$ pro r, $\frac{c\,dx}{a}$ pro dr, & $\frac{b\,m}{c\,M}$ pro $\frac{B}{A}$: quo facto, & reductione peracta, prodibit $a\,dz = b\,dx - \frac{b\,m}{M} \times \frac{dx}{\sqrt{2x}} \times \int \frac{dx}{\sqrt{2x}}$, ubi per simplicem integrationem quantitatis $\frac{dx}{\sqrt{2x}} \times \int \frac{dx}{\sqrt{2x}}$, mutaretur æquatio in hanc $a\,dz = b\,dx - \frac{b\,m\,dx}{M}$: rursusque simpliciter integrando, haberetur $az = bx - \frac{b\,m\,x}{M}$; seu $z = \frac{b\,x}{a} - \frac{b\,m\,x}{a\,M}$; quæ æquatio, respectu habito ad valorem litterarum, est eadem cum inventa $z = y - \frac{B\,r}{A}$, per quam denotari vidimus lineam ABP esse rectam.

COROLLARIUM III.

Quod si vero, in æquatione $a\,dz = b\,dx - \frac{b\,m}{M} \times \frac{dx}{\sqrt{2x}} \int \frac{dx}{\sqrt{2x}}$, integretur $\frac{dx}{\sqrt{2x}}$ in tota sua latitudine, ita ut fiat $\int \frac{dx}{\sqrt{2x}} = \sqrt{2x} - \sqrt{2q}$; auferendo scilicet a simplici integrali $\sqrt{2x}$ adhuc arbitrarium aliquod constans $\sqrt{2q}$; emerget inde $a\,dz = b\,dx - \frac{b\,m}{M} \times \frac{dx}{\sqrt{2x}} \times (\sqrt{2x} - \sqrt{2q})$; seu $a\,dz = b\,dx - \frac{b\,m\,dx}{M} \times \frac{b\,m\,dx\sqrt{2q}}{M\sqrt{2x}}$; quod simpliciter integratum, dat hanc æquationem alge-

N.° CLXXVIII.

Fig. 1.

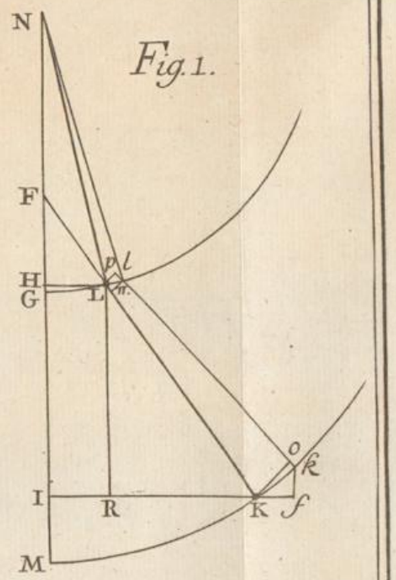
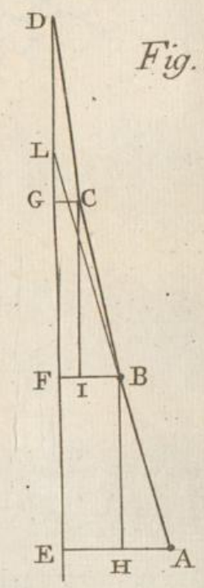
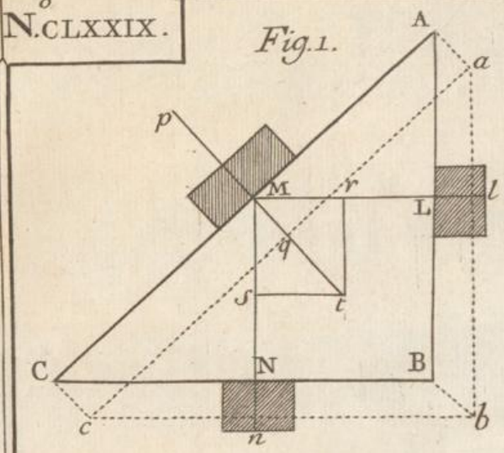


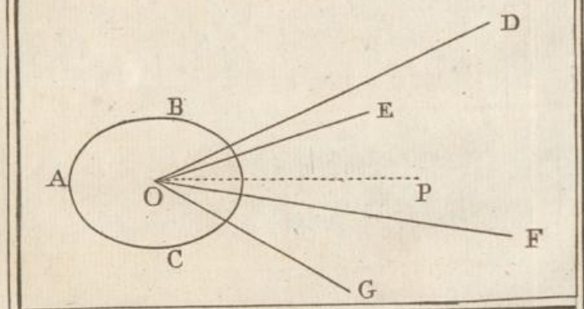
Fig. 2.



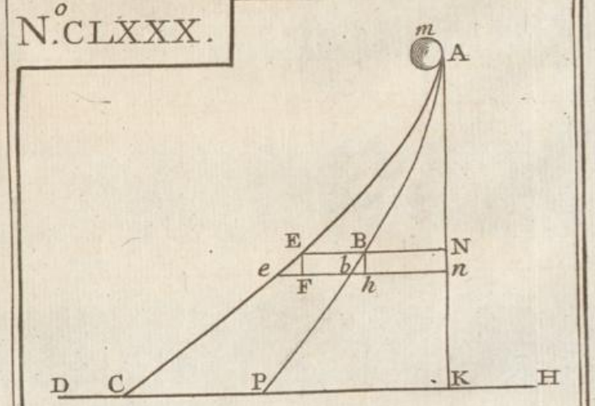
N.° CLXXIX.

Fig. 1.





N.° CLXXX.



algebraicam $az = bx - \frac{bmx}{M} + \frac{2bm\sqrt{qx}}{M}$; quæ liberata ab asymmetria, & posito T pro massa Trianguli quæ est $M - m$, dat $aaM^2zz - 2abMTxz + bbT^2xx = 4bbmmqx$; seu $(aMz - bTx)^2 = 4bbmmqx$.

Observabunt Analystæ, si calculum inire voluerint, hanc æquationem esse ad Parabolam; quæ autem degenerat in lineam rectam, in casu quo assumta $q = 0$.

Ponamus igitur velocitatem initialem corporis m non esse nullam, sed eam esse, quam acquireret in directione hypothenusæ, in casu simplici a me olim soluto, postquam super ea percurrisset partem respondentem altitudini verticali $= q$; quam velocitatem nominemus $= v$: Dico, si hac velocitate initiali v, corpus m incipiat moveri super hypothenusa Trianguli rectilinei; eo momento, quo ipsum Triangulum est adhuc in quiete: dico, inquam, fore ut corpus m, suo motu vero continuo, sequatur prædictam Parabolam.

N°. CLXXXI.

PROBLEMA NEWTONIANUM

Generaliter conceptum & solutum.

Vide Princip. Phil. Nat. *Lib.* 2. *Prop.* 10. p. 252. Edit. 3.

aut

Numerum LXXXVII. pag. 481. *Tom. I.*

TEndat *vis gravitatis data quacunque lege variabilis, ad punctum datum quodcunque; sitque resistentia qualiscunque. Requiritur tum Medii densitas in locis singulis* [*si nimirum resistentia ex densitate, & velocitate, quocunque modo detur*], *quæ faciat ut corpus in data quavis linea curva moveatur; tum corporis velocitas, & Medii resistentia ipsa in locis singulis.*

Confer *Acta Lipsi.* 1713. pag. 121. & seq. aut Numerum XC, pag. 542 & seq. *Tom. I.*

Typus Solutionis Analyticæ.

TAB. LXXXVIII. & N°. CLXXXI. *Fig.* 1.

Sit distantia $= x =$ XC, Cc $= ds$, bc $= dy$, Cb $= dx$; velocitas in C $= v$, vis centralis $= fx$: Erit vis tangentialis $= \frac{fdx}{ds}$; vis normalis $= \frac{fdy}{ds}$. Sit item resistentia $= R$; densitas $= D$; radius evolutæ $= r =$ CO; angulus contactus $= c = \frac{Cc}{CO} = \frac{ds}{r}$. Erit vis centrifuga $=$ vi normali, hoc est, $\frac{vv}{r} = \frac{fdy}{ds}$; unde $vv = \frac{frdy}{ds} = \frac{fdy}{c}$. Ergo jam inventa est velocitas, ex data vi centrali & natura curvæ.

Porro ex natura accelerationis patet, fore [sumtis signis superioribus pro ascensu, & inferioribus pro descensu] $fdx \pm Rds = -vdv = -\frac{1}{2}d(\frac{fdy}{c})$. Unde invenitur $R = \frac{fdx + \frac{1}{2}d(\frac{fdy}{c})}{\mp ds}$. Adeoque etiam resistentia habetur ex data vi & natura curvæ, & quidem independenter a lege densitatis. Newtonus autem, non putans hoc fieri posse, determinandam suscepit primo densitatem, atque ex ea & ex velocitate postea quæsivit resistentiam: quæ via, cum sit inversa & parum naturalis, illum præcipitem dedit in calculum longe operosissimum & abstrusum; etiamsi casus quem proponit sit particulariissimus.

Ipsa vero densitas D nunc nullo labore obtinetur. Ponatur enim $R = v^n D$, hoc est, resistentia proportionalis non tantum quadrato velocitatis [ut supponit Newtonus] sed cuicunque dignitati velocitatis multiplicatæ per densitatem. Erit utique $D = \frac{R}{v^n} = \frac{fdx + \frac{1}{2}d(\frac{fdy}{c})}{\mp ds(\frac{fdy}{c})^{\frac{1}{2}n}} = \frac{c^{\frac{1}{2}n}fdx}{\mp ds(fdy)^{\frac{1}{2}n}} + \frac{\frac{1}{2-n}d((\frac{fdy}{c})^{\frac{2-n}{2}})}{ds}$.

Hinc etiam tempus t facillime deducitur: nam $dt = \frac{ds}{v} = \frac{ds\sqrt{c}}{\sqrt{fdy}}$; adeoque $t = \int \frac{ds\sqrt{c}}{\sqrt{fdy}}$.

Esto

Esto exemplum NEWTONI [v. p. 254, aut pag. 485 *Tom. I.*] ubi curva PFQ est semicirculus; vis tendens perpendiculariter ad horizontem uniformis, adeoque invariabilis; $\frac{dx}{ds} = \frac{AC}{AQ}$; $\frac{dy}{ds} = \frac{HC}{AQ}$; $c = \frac{ds}{r} = \frac{HI}{AQ}$. Unde $v = \sqrt{\frac{f\,dy}{c}}$ $= \sqrt{\frac{f dy \times AQ}{HI}} = \sqrt{f \times HC}$. Hoc est, ob datam f, erit velocitas v ut $\sqrt{CH}$; sicuti habet NEWTONUS, p. 256. l. 4. * TAB. LXXXVIII. N°. CLXXXI. *Fig.* 2.

Porro $R = \frac{f dx + \frac{1}{2} d(\frac{f dy}{c})}{\mp ds} = \frac{f \times MI + \frac{1}{2} d(f \times HC)}{\mp HI} = \frac{f.(MI + \frac{1}{2} MI)}{\mp HI}$ $=$ [sumtis proportionalibus in terminis finitis] $\frac{f \times (AC + \frac{1}{2} AC)}{\mp AQ}$ $= \frac{3f \times AC}{\mp 2AQ}$. Adeoque $R : f = 3AC : \mp 2AQ$, ut NEWTONUS ibidem [sed in prima Editione errabat †, nec animadvertit errorem, nisi me monente]. Ideoque tantum descensus est possibilis physice.

Densitas ita habetur $D = \frac{R}{vv} = \frac{3f.AC : \mp 2AQ}{CH}$, adeoque, ob datas f & AQ, erit D ut $\frac{AC}{CH}$; sicuti NEWTONUS invenit, p. 255, l. ult., & p. 256, l. 14, sed via inversa quæsivit primo, quod nostra naturali via ultimo datur sponte.

Poterat etiam tempus determinari, quia nempe $dt = \frac{ds}{v}$ $= \frac{HI}{\sqrt{CH}}$. Hinc $t = \int \frac{HI}{\sqrt{CH}} = \int \frac{ds}{\sqrt{x}} = \int \frac{a\,dx}{\sqrt{(aax - x^3)}}$. cujus quantitatis integratio pendet a rectificatione curvæ Lemniscatæ, ut olim docui in constructione Isochronæ Paracentricæ §. Atque ex formula $t = \int \frac{ds}{\sqrt{x}}$ patet tempus per arcum FH esse æquale tempori semi-oscillationis Penduli suspensi ex

* pag. 488. Col. 2. lin. 1. & 2. *Tom. I.*
† *Tom. I.* pag. 487. Col. 1. lin. 6, 5, 4 à fine.
‡ Ibid. Col 1 & 2.
§ N°. XIX. pag. 120. *Tom. I.*

centro A, & describentis arcum HF; concipiendo figuram inversam, sive semi-peripheriam PFQ descriptam infra diametrum PQ.

Sit nunc curva proposita Spiralis Logarithmica, inque ejus umbilico sit centrum virium, quod unicum est exemplum a NEWTONO prolatum curvarum, in quibus centrum virium in distantia est finita. Hoc autem Exemplum per methodum nostram est facillimum. Quia enim radius evolutæ Spiralis est PO, [Vid. Fig. NEWT. pag. 275, vel 276] erit angulus contactus, seu $c = \frac{ds}{PO} = \frac{dy}{x}$. Hinc formula nostra generalis . . . $R = \frac{fdx + \frac{1}{2}d\left(\frac{fdy}{c}\right)}{\mp ds}$ mutatur in hanc, $R = \frac{fdx + \frac{1}{2}d(fx)}{\mp ds} = \frac{\frac{3}{2}fdx + \frac{1}{2}xdf}{\mp ds}$ comprehendentem omnia quæ NEWTONUS octo paginis operose pertractat *. Ponatur primo $f = x^m$; sitque ratio constans ds ad dx, ut 1 ad q; habebitur $R = \frac{\frac{3}{2}fdx + \frac{1}{2}xdf}{\mp ds} = \frac{(3+m).qx^m}{\mp 2}$. Hinc resistentia est proportionalis vi centrali. Velocitas $v\left[\frac{fdy}{c}\right] = \sqrt{fx} = \sqrt{x^{m+1}}$. Ponatur porro D, seu $\frac{R}{v^n}$, seu $\frac{(3+m).qx^{\frac{(2m-mn-n):2}{\mp 2}}}{\mp 2} = \frac{1}{x} = x^{-1}$; faciendum erit $\frac{2m-mn-n}{2} = -1$, unde $n = \frac{2m+2}{m+1} = 2$. Ergo manente $f = x^m$, & $D = \frac{1}{x}$, supponendo cum NEWTONO resistentiam esse in duplicata ratione velocitatum, & simplici densitatum, corpus semper gyrari potest in Spirali Logarithmica; quæ est Propositio NEWTONI, sed in omni amplitudine sumta, quam ipse nimis restrinxit præter necessitatem. Vid. *Act. Lipsi.* 1713, pag. 125 †. Co-

TAB. LXXXVIII. N°. CLXXXI. *Fig.* 3.

* *Tom. I.* pag. 495, & seq. † N°. XC. pag. 548, *Tom. I.*

COROLLARIUM I.

Quia vis centrifuga $\frac{vv}{r} = \frac{f dy}{ds}$; erit $f dy = \frac{vv ds}{r} =$ [in hoc casu] $\frac{vv dy}{x}$; adeoque $f = \frac{vv}{x}$. Hoc est velocitas in loco quovis descensus [si m est affirmativum, vel etiam negativum, sed < 3] aut ascensus [si m est negativum & simul > 3] ea semper est, qua cum corpus, in medio non resistente, eadem vi centripeta gyrari potest in circulo ad eandem a centro distantiam. Vide *Coroll.* 1. NEWT. pag. 277 †. Confer *Act. Lipsi.* 1713, pag. 126 *.

COROLLARIUM II.

Quia D, in suppositione NEWTONI, fit $= \frac{(3+m).q}{\mp 2x} = \frac{(3+m).qds}{\mp 2xds} = \frac{(3+m).dx}{\mp 2xds} = \frac{(3+m) \times OS}{\mp 2SP \times OP}$; manifestum est, ob datum $\frac{3+m}{\mp 2}$, densitatem esse ut $\frac{OS}{SP \times OP}$; ceu habet NEWTONUS ibid. Coroll. 2 †. Conf. *Act. Lipsi.* loco cit.

COROLLARIUM III.

$R : f = \frac{(3+m).qx^m}{\mp 2} : x^m = \frac{(3+m).q}{\mp 2} : 1 = \frac{(3+m).qds}{\mp 2} : ds = \frac{(3+m)dx}{\mp 2} : ds = \frac{(3+m)}{\mp 2} OS : OP$. Et in casu particulari NEWTONI, ubi $m = -2$; erit $R : f = +\frac{1}{2} OS : OP$; ut quidem habet NEWTONUS ibid. Coroll. 3 †. Sed non animadvertit descensum tantum esse possibilem. Confer *Act. Lipsi.* loco cit.

COROL-

† *Tom. I.* pag. 497. * N°. XC. pag. 549, *Tom. I.*

COROLLARIUM IV.

Fiat resistentia $= \frac{3+m}{+\frac{1}{2}} f$; fiet $OS = OP$; & Spiralis conveniet cum linea recta PS: velocitas vero cum semper sit in Spirali $= \sqrt{x^{m+1}} = x^{(m+1):2}$; erit etiam in hac linea recta velocitas ut $x^{(m+1):2}$. Adeoque, in casu NEWTONI, ubi $m = -2$, Velocitas illa ut $\frac{1}{\sqrt{x}}$. Vide Coroll. 4 NEWT. pag. 277 †.

COROLLARIUM V.

Cum in velocitatis expressione $v = x^{(m+1):2}$ non ingrediatur littera q, quæ speciem Spiralis distinguit; evidens est, in singulis Spiralibus Logarithmicis cujuscunque speciei, esse velocitates æquales in distantiis æqualibus. Quod itaque independenter a Corollario præcedente demonstravimus, secus ac fecit NEWTONUS: Vide ejus Coroll. 5, p. 277 & 278.* Patet etiam per se, tempora per singulas Spirales esse ad se invicem, ut longitudines Spiralium. Vid. *Act. Lipsi.* ejusdem an. p. 127 **.

Reliqua NEWTONI Corollaria pari modo per nostra examinari possunt.

COROLLARIUM VI.

Si $m = -1$, erit velocitas $v = \sqrt{x^0} =$ constanti, adeoque uniformis; & tempora per quosvis arcus erunt ipsorum arcuum longitudinibus proportionales. Vid. *Act. Lipsi.* 1713, p. 126 **.

Propositio NEWTONI XVI, p. 280 ‡ discrepat nunc ab ea quam in prima editione habuerat, edoctus eam falsam esse, sicuti

† *Tom. I*, pag. 497. * *Tom. I.* pag. 498. ** N°. XC. pag. 550, *Tom. I.*
‡ *Tom. I*, pag. 500.

ſicuti monſtravi in *Act. Lipſ.* 1713, pag. 125, Conſect. 3 † in hac vero, quam in editionibus poſterioribus ſubſtituit, fruſtra vult vim centripetam debere eſſe *reciproce* ut dignitatem quamlibet diſtantiæ; cum generalius dicere potuiſſet, *ſive reciproce, ſive directe.* Nam monſtravimus hic, ſi denſitas ſit diſtantiis reciproce proportionalis, poſſe ſemper eſſe $f = x^m$, ubi m denotat exponentem quemcunque, ſive affirmativum, ſive negativum.

Problema IV NEWTONI, *p.* 281, ubi proponitur invenienda & vis centripeta & medii reſiſtentia, qua corpus in data Spirali, data velocitatis lege, revolvi poteſt: cujus Solutionem ipſam non exhibet, ſed modum tantum indicat, quo eo perveniri poſſe putat; ad cujus veſtigia ſi Solutionem tentare vellemus, multum temporis & ſudoris impendendum eſſet. Noſtra vero methodo rem ludendo peragemus. Nam v ſeu $\sqrt{\frac{f\,dy}{c}}$ cum ſit æquale $\sqrt{fx}$, erit $\frac{vv}{x} = f$: ergo jam determinavimus vim centripetam. Nunc valor ipſius f, ut & valor ipſius df, qui eſt $= \frac{2v\,x\,dv - vv\,dx}{xx}$ ſubſtituatur in $R = \frac{\frac{3}{2}fdx + \frac{1}{2}x\,df}{\mp ds}$ $= \frac{3fxxdx + x^3\,df}{\mp 2xxds} = \frac{d(fx^3)}{\mp 2xxds}$; prodibit $R = \frac{vvdx + v\,x\,dv}{\mp x\,ds}$ $= [\text{ quia } dx = q\,ds\,] \frac{q\,vv}{\mp x} + \frac{v\,dv}{\mp ds}$. Data igitur, per hypotheſin, v in x, datur f & R. Quorſum igitur tot intricatiſſimæ ambages?

Problema V NEWTONI, ubi ex data lege vis centripetæ, invenienda eſt medii denſitas ad deſcribendam datam Spiralem. NEWTONUS prolixitate non neceſſaria, confugit ad inquiſitionem retardationis velocitatis. Nos ita facile rem abſolvimus. Quia $vv = fx$, vel $v = \sqrt{fx}$, habetur velocitas ex data vi centripeta.

† N°. XC, pag. 548, 549, *Tom. I.*

Et quia NEWTONUS ſupponit $vvD = R$, quam invenimus $= \frac{d(fx^3)}{\mp 2xxds}$; erit utique $D = \frac{R}{vv} = \frac{d(fx^3)}{\mp 2fx^3ds} =$ [differentiando actu & ſubſtituendo qds pro dx] $\mp \frac{3q}{2x} \mp \frac{df}{2fds}$.

SCHOLIUM.

Videmus hæc duo Problemata nihil fere laboris requirere, ſi rite tractentur; ſed NEWTONUS præpoſtera methodo uſus, neſcio quid magni laboris metuens, vadum non tentavit.

N°. CLXXXII.

PROBLEMA BALLISTICUM.

I.

TAB. LXXXVIII. N°. CLXXXII. Fig. 1.

Data velocitate initiali, expreſſa per AC, *alicujus mobilis gravis, quod ex* A *verticaliter in altum exploditur, in medio uniformiter denſo; Quæritur altitudo* AK *ad quam aſcendit; item tempus quod tam in aſcenſum quam in deſcenſum impendit.*

SOLUTIO.

II.

Sit CGM Parabola, ſeu ſcala velocitatum; cujus nempe applicatæ CA, GI, gi &c. deſignent velocitates mobilis gravis in punctis A, I, i &c. ſi aſcenderet in vacuo, ſeu in medio non reſiſtente. Sit etiam curva CEF [quam Logarithmicam eſſe ex *Diſſertatione mea de Motu* † patet] ſcala velocitatum ejuſdem mobilis, ſi expers gravitatis cum velocitate initiali AC

† N°. CXXXV. Cap. XIII. pag. 74, & 75, *Tom. III.*

AC verticaliter aſcenderet; adeo ut applicatæ EN, en, FB, &c. exprimant velocitates reſiduas in punctis N, n, B, &c. Sit tandem curva CHK, ſcala velocitatum mobilis gravitate prædiți, in medio uniformiter denſo verticaliter aſcendentis, cum velocitate initiali AC: ita ut applicatæ CA, HL, hl, &c. deſignent velocitates reſiduas in punctis A, L, l &c.

III.

Per duo quævis puncta proxima R, S, ducantur axi AB parallelæ, ſecantes curvas prædictas in punctis H, G, E, & h, g, e, ex quibus deductæ intelligantur applicatæ HL, GI, EN, & hl, gi, en, quarum priores ſecent Se in punctis P, Q, T.

Dicantur nunc $AC = n$, $AM = a$, FB = unitati = 1, $AB = b$, ſubtangens Logarithmicæ CEF $= c$, velocitas $HL = GI = EN = v$; ſubtangens Logarithmicæ, quæ reſpondet Logarithmis in Tabulis vulgaribus *Vlacquianis* proſtantibus $= q = 4342945$. Erit, ſumendo Logarithmos ex iſtis Tabulis, $q : c = lv : \frac{clv}{q} = BN$, & $q : c = ln : \frac{cln}{q} = BA$. Eſt vero EN, ſeu $v : c = ET\,[dv]$: Te ſeu Nn $[\frac{cdv}{v}]$, adeoque $\frac{Nn}{EN} = \frac{cdv}{vv}$ = tempuſculo per Nn; integrando $\frac{c}{1} - \frac{c}{v} = t\,BN$ [intelligo per $t\,BN$ tempus per BN] & $\frac{c}{1} - \frac{c}{n} = t\,BA$; hinc $\frac{c}{v} - \frac{c}{n} = t\,AN$. Porro vocetur *R* reſiſtentia medii, quando mobile gravitatis expers eſt in N; & *G* vis gravitatis ejuſdem mobilis gravitate prædiți, cum aſcendit in vacuo: erit $\frac{R.cdv}{vv} = dv$ [quia nempe decrementa vel incrementa velocitatum, ſunt reſiſtentiis vel viribus motricibus in tempuſcula ductis proportionalia]; adeoque $R = \frac{vv}{c}$.

IV.

Nunc $AC^2 : IG^2 [= nn : vv] = AM [a] : MI [\frac{avv}{nn}]$. Ergo $Ii = Qg = \frac{2avdv}{nn}$, & $\frac{Ii}{GI} = \frac{2adv}{nn} = t\,Ii$; integrando $\frac{2av}{nn} = t\,IM$, unde $\frac{2a}{n} = t\,AM$. Jam quia $\frac{G.2adv}{nn} = dv$; habetur $G = \frac{nn}{2a}$. Ut nunc pro ascensu determinetur $t\,AK$, indeque ipsa curva CHK; notetur, summam virium $G+R$ retardare mobile ascendens; voceturque $KL = z$, & Ll vel $Ph = dz$. Erit $\frac{dz}{v} = t\,Ll$, & $\frac{(G+R).dz}{v} = dv$; adeoque $\frac{vdv}{dz} = G+R = \frac{nn}{2a} + \frac{vv}{c}$. Hinc $dz = \frac{2acvdv}{nnc+2avv}$, quæ exprimit naturam curvæ CHK, ope Logarithmorum construendæ. Verum $t\,Ll [\frac{dz}{v}] = \frac{2acdv}{nnc+2avv}$, & $t\,LK = \int \frac{2acdv}{nnc+2avv}$, cujus integratio dependet a rectificatione arcus circularis, qui habet radium $= n\sqrt{\frac{c}{2a}}$, & tangentem $= v$, ut notum est. Sumta itaque HL, vel v, æquali ipsi CA, vel n; prodibit tempus per totam AK. Ut autem hoc tempus comparari queat cum tempore per AM ascensus in vacuo $= \frac{2a}{n}$, sequentia sunt observanda.

V.

Concipio medium uniformiter densum, tanquam ex corpusculis æqualibus & elasticis, per spatium æqualibus interstitiolis a se invicem disseminatis constans; cujus naturæ aërem esse valde est probabile. Ostendi autem in *Dissertatione mea de Legibus communicationis motus*, Cap. XII, §. 13 †, corpus conoidicum ADB [vid. Fig. ibid.] quod in tali medio secundum directionem axis

† pag. 72, *Tom. III.*

axis ID [vertice D antrorsum verso] velocitate n moveri incipit in linea horizontali, vel in quacunque recta, si sit gravitatis expers, percurrisse spatium $= Cxxln : 17371780 \int \frac{x\,dx^3}{ds^2}$ [ponendo post integrationem $x = IA$], quando eo usque pervenit, ut velocitas residua sit ad velocitatem initialem, ut 1 ad n. Intelligo autem per C, longitudinem cylindri recti aërei eandem cum Conoïde basin, eandemque quantitatem materiæ, seu [si ponderosa esse supponatur] idem pondus habentis; per ln intelligo Logarithmum ipsius n ex Tabulis usitatis desumtum; item per ds, intelligo elementum curvæ, ex cujus revolutione generatur. Si Conoïdes ADB sit hæmisphærium, cujus radius $= v$, erit [in casu quo x evadit $= r$] $\int \frac{xdx^3}{ds^2} = \frac{1}{4} rr$, adeoque $Cxxln : 17371780 \int \frac{x\,dx^3}{ds^2} = Crrln : 17371780 \times \frac{1}{4} rr = \frac{Cln}{4342945}$.

VI.

Posito nunc hemisphærium esse ex ferro, & hoc esse 7000es. gravius vel densius aëre; erit C, seu longitudo cylindri aërei æque gravis & ejusdem basis cum hemisphærio $= \frac{2}{3} r \times 7000 = 4667r$. Ut autem habeatur C pro tota Sphæra, intelligatur alterum hemisphærium posterius, quod ab aëre allabente intactum manet, incorporari [ut ita dicam] in anteriori; ita ut hoc evadat duplo densius: patet hoc hemisphærium, duplo densius quam ferrum, percurrere, eodem tempore, eandem viam quam integer globus ferreus; ergo prædictus numerus sumendus tantum est duplus, vel pro radio r simpliciter scribenda est diameter globi, quæ vocetur D, atque ita erit $C = 4667\,D$. Hinc $\frac{Cln}{4342945} = \frac{4667\,D \times ln}{4342945}$.

Sit ex. gr. $n = 2$, hoc est, si scire velimus, quousque globus ferreus in linea horizontali moveri debeat, ut ab aëris resistentia amittat dimidium suæ velocitatis initialis, in quo casu

$ln = l2 = 0.\ 3010300$; facto calculo prodibit $\frac{4667D \times ln}{4342945} = 3235D$. In dissertatione mea inveni $3700D$ pro globo plumbeo.

VII.

Sed ut ad rem redeam; invenienda est ante omnia c, vel subtangens Logarithmicæ CEF; quod fit faciendo, ut ln ad AB [$Cxln : 17371780 \int \frac{x\,dx^3}{ds^2}$, quæ pro globo ferreo est $\frac{4667D\,ln}{4342945}$] ita subtangens Logarithmicæ Tabularum, seu 4342945, ad subtangentem quæsitam c, quæ per consequens $= 4667D$. Quia itaque per §. IV, $t\,LK = \int \frac{2ac\,dv}{nnc + 2avv}$; scribatur pro c ejus valor $4667D$, & habebitur $t\,LK = \int \frac{9334aD\,dv}{4667nnD + 2avv}$. Hoc ut construatur, sit descriptus quadrans circuli DXY, cujus radius $OD = n\sqrt{\frac{c}{2a}} = n\sqrt{\frac{4667D}{2a}}$; & in tangente DZ sumatur $DV = v$; erit, ducta OV, arcus $DX \times \frac{2a}{nn} = t\,LK$. Hinc si DV, vel v, fit æqualis velocitati initiali $AC = n$, dabit $DX \times \frac{2a}{nn} = t\,AK$. Est autem, per §. IV, tempus per AM in vacuo $= \frac{2a}{n}$. Adeoque $t\,AM : t\,AK = \frac{2a}{n} : DX \times \frac{2a}{nn} = n : DX = DV : DX =$ [quia $OD : DV = n\sqrt{\frac{c}{2a}} : n = \sqrt{c} : \sqrt{2a} = c : \sqrt{2ac}$, sumto radio $O\Delta = c$, & tangente $\Delta U = \sqrt{2ac}$] $= \Delta U : \Delta\xi$. Quod si vero comparare lubeat tempus per AK in medio resistente, ad tempus per datam altitudinem IM in vacuo, erit $t\,IM : t\,AK = \frac{2av}{nn} : DX \times \frac{2a}{nn} = v : DX = GI : DX$.

TAB. CLXXXVIII. N°. CLXXXII. *Fig.* 2.

VIII.

Notandum est, ex natura Parabolæ MGC [in *Fig.* 1], quadratum

dratum velocitatis GI in vacuo, semper esse proportionale altitudini IM, ad quam ascendere potest; adeoque $\frac{vv}{IM} = \frac{nn}{AM} = \frac{nn}{a}$ = constanti; quæ dicatur = e. Quare jam erit, pro medio resistente, tLK seu $\int \frac{9334\,aD\,dv}{4667\,mD + 2avv} = \int \frac{9334\,D\,dv}{4667\,eD + 2vv}$. Hinc [*Fig.* 2] quadrantis DXY radius OD, seu $n\sqrt{\frac{4667\,D}{2a}} = \sqrt{\frac{4667\,eD}{2}}$ = $\sqrt{2334\,eD}$ = constanti. Sit igitur velocitas initialis, hoc est, AC [*Fig.* 1] vel DV [*Fig.* 2] in medio resistente infinite magna, quo ipso arcus DX abit in quadrantem DXY, quia secans OXV evadit parallela tangenti DV; unde tIM : tAK = IG : DXY, hoc est, ut finitum IG ad finitum DXY: est enim quadrans DXY finitus, ob radium OD finitum, ut pote = $\sqrt{2334\,eD}$. TAB. LXXXVIII. N°. CLXXXII. *Fig.* 1. & 2.

Hinc patet veritas Paradoxi; globum scilicet in aëre uniformiter resistente sursum explosum, quamvis infinita velocitate, impendere tantum tempus finitum per totam altitudinem, ad quam ascendere potest.

COROLLARIUM I.

Per §. III, tAB = $\frac{c}{1} - \frac{c}{n}$ in medio resistente, sed sine gravitate; & per §. IV, tAM = $\frac{2a}{n}$ in vacuo, sed cum gravitate. Ergo tAB : tAM = $\frac{c}{1} - \frac{c}{n} : \frac{2a}{n} = nc - c : 2a =$ [in casu globi ferrei] $(n-1) \times 4667\,D : 2a =$ [in casu quo præterea $n = 2$] $4667\,D : 2a$.

Hinc si diameter globi sit 3 poll. seu $\frac{1}{4}$ ped., & sit a, seu altitudo AM, ad quam hic globus in vacuo ascendere posset = 1000 ped.; erit tAB : tAM :: $\frac{4667}{4} : 2000 = 4667 : 8000$. Supponendo igitur, ut HUGENIUS determinavit, grave in vacuo descendere $15\frac{1}{12}$ ped. mensuræ Parisinæ in uno minuto secundo, requirentur [ad ascendendum ad altitudinem 1000 ped. Paris.]

$8\frac{1}{6}$ ſecunda quam proxime: Faciendo itaque $8000 : 4667 = 8\frac{1}{6} : 4\frac{3}{4}$, paulo plus; prodibunt paulo plus quam $4\frac{3}{4}$ minuta ſecunda, quibus mobile gravitatis expers, aut globus 3 poll. Pariſ. in horizonte motus indiget, donec a reſiſtentia aëris amiſerit dimidium velocitatis initialis, qua cum aſcendere poſſet in vacuo, ad altitudinem mille pedum.

COROLLARIUM II.

Supra §. IV inventum eſt Ll, vel $dz = \frac{2acv\,dv}{nnc + 2avv} =$ [ſubſtitutis pro nn, vv & $2v\,dv$, earum proportionalibus AM, IM, & Ii; & vocando $IM = y$, $Ii = dy$] $\frac{c\,dy}{c + 2y}$; cujus integrale [ſumtis Logarithmis ex Tabulis] $= \frac{\frac{1}{2}cl(c+2y) - \frac{1}{2}clc}{4342945}$ $= KL$. Hinc tota $AK = \frac{\frac{1}{2}cl(c+2a) - \frac{1}{2}clc}{4342945} = \frac{cl(c+2a) - clc}{8685890}$ $=$ [in præſenti caſu] $\frac{4667Dl(4667D + 2000) - 4667Dl(4667D)}{8685890}$ $=$ [ſuppoſito $D = \frac{1}{4}$ ped.] $\frac{1166\frac{3}{4}l3166\frac{3}{4} - 1166\frac{3}{4}l1166\frac{3}{4}}{8685890}$ $= \frac{1166\frac{3}{4} \times 3.5006138 - 1166\frac{3}{4} \times 3.0669778}{8685890} =$ $\frac{1166\frac{3}{4} \times 433636}{868589} = \frac{4667 \times 108409}{868589} = \frac{505944803}{868589} = 582\frac{3}{6}$ ped. Pariſ. quam proxime.

Atque ita patet globum noſtrum ferreum, non multo plus quam ad dimidiam altitudinem in aëre aſcendere, ad quam totam aſcenderet in vacuo.

IX.

Pergimus nunc ad determinandum deſcenſum ex altitudine KA, quem mobile grave finito aſcenſu inchoare debet. Sit curva $KV\gamma$ ſcala velocitatum, cujus ſcilicet applicatæ ζv, βV, $A\gamma$

$A\gamma$ denotent velocitates acquisitas mobilis gravis descendendo in punctis $\mathfrak{C}$, β, A. Per simile ratiocinium; quo usus sum in §. IV, conficitur, differentiam virium $G - R$ accelerare mobile cadens. Vocetur nunc $K\beta = z$, & $\mathfrak{C}\beta$ vel $v\alpha = dz$; erit [reliquis manentibus] $G - R = \frac{nn}{2a} - \frac{vv}{c} = \frac{vdv}{dz}$; unde $dz = \frac{2acvdv}{nnc - 2avv} = \frac{acdv}{n\sqrt{c} - v\sqrt{2a}} - \frac{acdv}{n\sqrt{c} + v\sqrt{2a}}$ = [substituendo pro nn, vv, $2vdv$, earum proportionales AM, IM, Ii] $\frac{cdy}{c - 2y}$; cujus integrale [sumendo Logarithmos ex tabulis] $= \frac{\frac{1}{2}clc - \frac{1}{2}cl(c - 2y)}{4342945} = \frac{clc - cl(c - 2y)}{8685890} = K\beta$. Hinc elegantia fluunt Corollaria.

COROLLARIUM I.

Existente $MI = MA$, hoc est, si $y = a$, habetur $K\beta = \frac{clc - cl(c - 2a)}{8685890}$, ad id ut velocitas acquisita recidendo, fiat æqualis velocitati initiali. In nostro exemplo, ubi $c = 1166\frac{3}{4}$ ped. erit $\frac{clc - cl(c - 2a)}{8685890} = \frac{1166\frac{3}{4}\,l\,1166\frac{3}{4} - 1166\frac{3}{4}\,l - 833\frac{1}{4}}{8685890} =$ impossibili, quia Logarithmus quantitatis affirmativæ ad Logarithmum quantitatis negativæ transgredi non potest, quin transeat per $l0$ qui est $= -$ infinito; atque adeo quin ultra infinitum [sit venia dicto] globus descendat. Unde colligitur, globum nostrum nunquam recuperare posse, recidendo, velocitatem suam initialem, etiamsi in infinitum descenderet.

COROLLARIUM II.

Sit autem $2y = c$; prodit $\frac{clc - clo}{8685890} =$ infinito $= K\beta$. Unde si $y = \frac{1}{2}c$, hoc est, in nostro casu, si y vel $MI = 4667 \times \frac{1}{2}D = \frac{4667}{8}$ ped. $= 583\frac{3}{8}$ ped. aut circiter $= KA$ [quæ in Co-

roll. 2, §. VII, inventa est $= 582\frac{5}{8}$ ped.] habebit globus maximam suam possibilem velocitatem, ad quam autem nunquam pertingit, sed data quavis quantitate propius accedit. Hinc sumta $MI = 583\frac{5}{8}$ ped. erit ducta GR parallela ipsi MA, asymtotos scalæ velocitatum KV γ.

COROLLARIUM III.

Sed ut inveniatur ipsa velocitas maxima *ad quam non*, fiat $MA : MI = AC^2 : IG^2$; hoc est, $1000 : 583\frac{5}{8} = nn : \frac{4667}{8000}nn = 160000 : 93340$, quorum radices sunt quam proxime ut 40 ad $30\frac{1}{2}$. Dico itaque velocitatem initialem, esse ad velocitatem *ad quam non*, valde prope ut 40 ad $30\frac{1}{2}$, seu ut 80 ad 61.

X.

Quod attinet ad tempus descensus, illud ita determinatur. Per §. VIII, $\beta\mathfrak{C}$, seu $dz = \frac{2acvdv}{nnc - 2avv}$, proinde $\frac{dz}{v}$ seu $t\mathfrak{C}\beta = \frac{2acdv}{nnc - 2avv} = \frac{\frac{a}{n}\sqrt{c}\times dv}{n\sqrt{c} + v\sqrt{2a}} + \frac{\frac{a}{n}\sqrt{c}\times dv}{n\sqrt{c} - v\sqrt{2a}} = \frac{\frac{a}{n}\sqrt{2ac}\times dv}{n\sqrt{2ac} + 2av} + \frac{\frac{a}{n}\sqrt{2ac}\times dv}{n\sqrt{2ac} - 2av} = \frac{\frac{1}{2n}\sqrt{2ac}\times 2adv}{n\sqrt{2ac} + 2av} + \frac{\frac{1}{2n}\sqrt{2ac}\times 2adv}{n\sqrt{2ac} - 2av}$. Hinc integrando, adhibitis Logarithmis ex Tabulis, $tK\beta = \frac{\frac{1}{2n}\sqrt{2ac}\times l(n\sqrt{2ac} + 2av) - \frac{1}{2n}\sqrt{2ac}\times l(n\sqrt{2ac} - 2av)}{4342945} = \frac{\frac{\sqrt{2ac}}{2nn}\times l\frac{+2av + n\sqrt{2ac}}{-2av + n\sqrt{2ac}}}{4342945}$.

XI.

Ut autem inveniatur commode tempus descensus per totam KA, quærendus primo est valor ipsius v in puncto A, hoc est $A\gamma$.

Quod

Quod sic facio. Per *Coroll.* 2, §. VII, $AK = \frac{cl(c+2a) - clc}{8685890}$ & per §. VIII, $K\beta = \frac{clc - cl(c-2y)}{8685890}$, ut igitur $K\beta$ fiat æqualis ipsi KA, ponendum est $\frac{clc - cl(c-2y)}{8685890} = \frac{cl(c+2a) - clc}{8685890}$; unde $2lc = l(c-2y) + l(c+2a)$: reducendo Logarithmos ad numeros, habetur $cc = (c-2y) \times (c+2a) = cc + 2ac - 2cy - 4ay$. Hinc $y = \frac{ac}{c+2a} = MI$. Faciendo nunc $MA : MI = AC^2 : IG^2$, seu $a : \frac{ac}{c+2a} = nn : \frac{nnc}{c+2a} = IG^2 = vv$ in puncto $A = (A\gamma)^2$; erit $A\gamma = n\sqrt{\frac{c}{c+2a}}$. Quod si itaque hic valor substituatur pro v, in formula quæ in §. præced. exprimit $t K\beta$, prodibit $t KA = \ldots\ldots$

$$\frac{\sqrt{\frac{ac}{2nn}} \times \text{Log.} \frac{2an\sqrt{\frac{c}{c+2a}} + n\sqrt{2ac}}{-2an\sqrt{\frac{c}{c+2a}} + n\sqrt{2ac}}}{4342945} = \frac{\frac{1}{n}\sqrt{\frac{1}{2}ac} \times \text{Log.} \frac{\sqrt{\frac{4aac}{c+2a}} + \sqrt{2ac}}{-\sqrt{\frac{4aac}{c+2a}} + \sqrt{2ac}}}{4342945}$$

$$= \frac{\frac{1}{n}\sqrt{\frac{1}{2}ac} \times \text{Log.} \frac{\sqrt{2a} + \sqrt{(c+2a)}}{-\sqrt{2a} + \sqrt{(c+2a)}}}{4342945} \ldots\ldots$$

$$= \frac{\frac{1}{n}\sqrt{\frac{1}{2}ac} \times (l(\sqrt{2a} + \sqrt{(c+2a)}) - l(-\sqrt{2a} + \sqrt{(c+2a)})}{4342945}.$$

Hoc jam comparetur cum tempore per AM in vacuo, quod per §. IV est $= \frac{2a}{n}$, eritque $t AM : t KA = \frac{2a}{n} : \frac{\frac{1}{n}\sqrt{\frac{1}{2}ac} \times (l \&c.}{4342945}$ $= 8685890\sqrt{2a} : \sqrt{c} \times (l(\sqrt{2a} + \sqrt{(c+2a)}) - l(-\sqrt{2a} + \sqrt{(c+2a)})$. Applicetur hæc analogia ad propositum casum, ubi $a = 1000$ ped., & $c = 4667 D = \frac{4667}{4}$ ped. $= 1166\frac{3}{4}$ ped.; & habebitur $t AM : t KA = 8685890 \times \sqrt{2000} : \sqrt{1166}$

$\sqrt{1166\frac{3}{4}} \times (l(\sqrt{2000}+\sqrt{3166\frac{3}{4}}) - l(-\sqrt{2000}+\sqrt{3166\frac{3}{4}})) = 868589 \times \sqrt{800000} : \sqrt{4667} \times (l(\sqrt{2000}+\sqrt{3166\frac{3}{4}}) - l(-\sqrt{2000}+\sqrt{3166\frac{3}{4}})) = 776808096 : \sqrt{4667} \times (l101\frac{21}{70} - l11\frac{61}{70}) = 776808096 : 9311065 \times \sqrt{4667} = 776808096 : 636074871 = 258936032 : 212024957$.

XII.

Quia itaque, per *Coroll.* I §. VII, tAM, hoc est, tempus ascensus in vacuo ad 1000 ped. est quam proxime $8\frac{1}{2}$ secundorum; fiat ut 258936032 ad 212024957, ita $8\frac{1}{6}$ ad quartum, qui reperietur $= 6\frac{177920957}{258936032}$, hoc est, quam proxime $6\frac{17}{25}$ secund. pro tempore descensus per KA.

XIII.

Restat ut determinemus quoque in numeris, pro casu proposito, tempus ascensus in aëre per AK. Hunc in finem, quæratur, ex Tabulis tangentium, angulus $\triangle$OV [*Fig.* 2] faciendo ut O$\triangle$ ad $\triangle$U, seu per § VII, ut c ad $\sqrt{2ac}$, ita sinus totus ad tangentem anguli $\triangle$OU; adeoque, in nostro casu, ut $\frac{4667}{4}$ ad $\sqrt{2333500}$, seu ut 4667 ad 6110 ita 10000000 ad 13070495 tang. $\triangle$OU, qui per consequens erit 52 gr. 38 min. Supposita nunc ARCHIMEDIS ratione diametri ad peripheriam, ut 7 ad 22, unde radius ad quadrantem ut 7 ad 11: Fiat 7 ad 11 = 10000000 : 15714286 = numero partium quadrantis, quarum radius continet 10000000. Fiat porro, 90 : $52\frac{38}{60}$ = 15714286 : $9189947\frac{7}{17}$ = numero partium arcus 52 gr. 38 min. pro radio = 10000000. Nunc tandem fiat $\triangle$U. $\triangle\xi$ [= DV : DX] = 13070495 : $9189947\frac{7}{17}$ = tAM [$8\frac{1}{6}$ secund.] : tAK ascensus in aëre, quod tempus erit = $5\frac{3}{4}$ secund. quam proxime. Ergo ambo tempora ascensus & descensus in aëre simul sumta = $5\frac{3}{4} + 6\frac{17}{25} = 12\frac{83}{100}$ sec. Quia autem in vacuo tempus ascensus & descensus simul esset = $16\frac{1}{3}$ sec.

sec., patet resistentiam aëris facere ut recidat globus noster $3\frac{67}{100}$ sec. citius quam recideret, si aër nihil resisteret.

XIV.

Mutata jam *a* successive, sumendo eam modo majorem, modo minorem, poterit per eandem methodum, inveniri tempus in aëre resistente, tam pro ascensu quam pro descensu, pro unaquaque *a*, adeoque etiam tempus totius curvæ, quam mobile grave ascendendo & descendendo insumit. Quæ omnia si in Tabellam conjiciantur, poterit eam consulendo, ex observato tempore, quo globus explosus in Terram recidit, determinari non tantum quousque ascenderit, sed etiam quantum temporis pro ascensu, quantum item pro descensu insumserit: quod olim ab aliquo desiderabatur.

SCHOLIUM.

Hæc ita determinantur, intelligendo medium esse rarum & elasticum in quo globus movetur: quale medium aërem esse, & uniformiter se ita habere in omnes partes, supposuimus in præcedentibus. Quod si autem nunc supponere lubet, medium in quo movetur globus non esse elasticum, sed compositum esse ex particulis, quæ ad allapsum non resiliant; atque oporteat invenire, in hoc casu, omnia quæ pro priori sunt in præcedentibus inventa.

LEMMA I.

Si Corpus cylindricum vel prismaticum M *qualecunque moveatur, basi alterutra antrorsum versa, velocitate V; quod occurrat, in directione perpendiculari ad basin, particulis vel globulis quiescentibus* m, m, m, *quarum omnium simul sumtarum massa vocetur m. Quæritur velocitas, tam corporis cylindrici vel prismatici* M, *quam particularum* m, m, m, *post factum impulsum?* TAB. LXXXVIII. N°. CLXXXII. Fig. 3.

SOLUTIO.

Ex Regulis communicationis motus patet, velocitatem corporis M, & particularum, m, m, m, post impulsum esse $= \frac{MV}{M+m}$.

COROLLARIUM I.

Decrementum velocitatis corporis $M = V - \frac{MV}{M+m} = \frac{mV}{M+m}$.

COROLLARIUM II.

In casu quo m infinities minus quam M; erit decrementum velocitatis $= \frac{mV}{M}$.

LEMMA II.

TAB. LXXXVIII N°. CLXXXII *Fig.* 1.

Sit nunc fluidum vel medium non elasticum, compositum ex moleculis per totam longitudinem AB *æqualibus intervallulis disseminatis; in quo moveatur corpus cylindricum* M, *secundum directionem perpendicularem ad basin in* AB.

Sit C longitudo cylindri hujus fluidi, qui contineat quantitatem materiæ æqualem ipsi corpori cylindrico M, cujus longitudo sit L; adeo ut densitas fluidi sit ad densitatem corporis cylindrici M, ut L ad C. Unde si $C \times m$ exprimat cylindrum fluidi æquale corpori cylindrico M, atque si Nn sit intervallulum, quo strata particularum fluidi a se invicem distant, exprimet $Nn \times m$ massulam unius strati particularum, quibus corpus cylindricum M una vice occurrit. Quando itaque corpus cylindricum M [a cujus gravitate abstrahitur] pervenerit in N, ubi velocitas residua sit EN; erit decrementum velocitatis ET $= \frac{mV}{M} = \frac{Nn \times m \times V}{M} = \frac{Nn \times EN \times m}{M}$. Quia autem ET : Te

[Nn] = EN: ſubtangentem curvæ velocitatum CEF; habetur ſubtangens $= \frac{EN \times Nn}{E\Gamma} = \frac{EN \times Nn \times M}{Nn \times FN \times m} = \frac{M}{m}$. Hinc patet ſcalam, ſeu curvam velocitatum CEF, in hoc caſu, eſſe Logarithmicam, cujus ſubtangens $= \frac{M}{m} =$ [ob $C \times m = M$] $\frac{C \times m}{m} = C$.

LEMMA III.

Invenire rationem reſiſtentiæ plani in fluido moti, in directione perpendiculari ad planum, ad reſiſtentiam ſuperficiei alicujus conoïdicæ, ejuſdem cum plano amplitudinis, & in eodem fluido motæ, ſecundum directionem axis perpendicularis ad planum, & eadem velocitate.

Sit DO curva aliqua, ex cujus revolutione circa axem DP, generetur ſuperficies conoïdica, quam tangat in vertice D planum DF, in quod allabatur fluidum, ſecundum directionem ad planum perpendicularem, & parallelam axi DP. Vocetur *R* reſiſtentia abſoluta, quam planum a fluido allabente patitur. Sint duæ applicatæ proximæ OP, op, ſuper DP; & aliæ OF, of, ſuper DF; voceturque DF, vel PO $= x$, adeoque Ff, vel Oq $= dx$; & elementum curvæ Oo $= ds$. Erit vis reſiſtentiæ ſuper Ff $= R\,dx$. Eſt vero hæc vis [per decompoſitionem virium] ad vim qua filum fluidi OF agit normaliter ſuper Oo, ut Oo ad Oq, ſeu ut ds ad dx; adeoque vis qua premitur normaliter elementum Oo $= \frac{R\,dx^2}{ds}$. Reſolvatur hæc porro in duas laterales, quarum una perpendicularis ad axem, altera eidem parallela; fiatque iterum ut ds ad dx, ita $\frac{R\,dx^2}{ds}$ ad $\frac{R\,dx^3}{ds^2}$; erit hæc vis, qua urgetur elementum Oo, a filo allabente fO, ſecundum eandem directionem parallelam axi DP. Quia autem annulus a revolutione elementi Ff circa axem DP genitus, eſt ad zonulam eadem revolutione elementi Oo deſcriptam

TAB. LXXXVIII. N°. CLXXXII. *Fig.* 4.

criptam, ut xdx ad xds, & cum resistentia super annulum sit ad resistentiam super zonulam, ut resistentia super Ff ad resistentiam super Oo; faciendum est $Rdx : \frac{Rdx^3}{ds^2} = Rxdx . \frac{Rxdx^3}{ds^2}$; adeoque integrando $\frac{1}{2} Rxx : R\int \frac{xdx^3}{ds^2} = xx : 2\int \frac{xdx^3}{ds^2}$, dabit rationem resistentiæ super circulum cujus radius DF, ad resistentiam super superficiem conoïdicam, ab arcu DO revolvendo descriptam.

Corollarium I.

Si DO est circulus, cujus radius $= a$, Conoïde hoc casu existente Sphæra; erit sumta DP, vel $x = a$, $2\int \frac{xdx^3}{ds^2} = 2 \times \frac{\frac{1}{2} aax^2 - \frac{1}{4} x^4}{\frac{1}{2} aa} = xx - \frac{x^4}{2aa} = \frac{1}{2} aa$; adeoque, in hoc exemplo, resistentia in planum ad resistentiam in Sphæram, hoc est xx seu $aa : \frac{1}{2} aa = 2 : 1$; Unde patet veritas Propositionis 34, Lib. II, Newt. *Princip. Philos. Nat.* pag. 298, Edit. secundæ; quæ ita sonat. *Si globus & cylindrus æqualibus diametris descripti, in medio raro ex particulis æqualibus & ad æquales ab invicem distantias libere dispositis constante, secundum plagam axis cylindri, æquali cum velocitate moveantur, erit resistentia globi duplo minor quam resistentia cylindri.*

Corollarium II.

TAB. LXXXVIII. N°. CLXXXII. *Fig.* 1.

Hinc quoque evidens, curvam velocitatum CEF pro globo esse Logarithmicam, cujus subtangens erit dupla subtangentis Logarithmicæ, quæ inservit pro cylindro, adeoque illa $= 2C$, quia hæc $= C$, per *Lem. II.* Nam generalissime sumtis, tam velocitatibus, quam decrementis velocitatum æqualibus duorum corporum, in eodem vel diversis fluidis motorum, quibus resistitur in ratione f ad Φ, erit, vocando spatiola percursa dz & dy, dum æqualia patiuntur decrementa in velocitatibus v æquali-

æqualibus, $\frac{fdz}{v} = dv = \frac{\Phi dy}{v}$; adeoque $dz : dy = \Phi : f =$ [in hoc exemplo] $2 : 1$, unde $dz = 2dy$. Est vero $dv : dz$ [$2dy$] $= v :$ subtangentem [$\frac{2vdy}{dv}$] in una curva velocitatum, & $dv : dy = v :$ subtangentem [$\frac{vdy}{dv}$] in altera. Quare constat propositum.

LEMMA IV.

Ut nunc inveniatur longitudo viæ, quam Sphæra percurrere debet in medio non elastico, ita ut velocitas residua sit ad velocitatem initialem, ut 1 *ad* n; *Quæratur id primo generaliter pro quolibet corpore conoïdico?*

Illud sic peragitur: Quia resistentia in planum, est ad resistentiam in superficiem conoïdicam ejusdem cum plano amplitudinis, ut xx ad $2\int \frac{xdx^3}{ds^2}$; erit, per ea quæ in *Coroll.* præced. dicta sunt, $2\int \frac{xdx^3}{ds^2} : xx =$ subtangens curvæ velocitatum pro cylindro, quæ est C, per *Lemma* II, ad subtangentem curvæ velocitatum pro Conoïde, quæ adeo erit $= \frac{Cxx}{2\int \frac{xdx^3}{ds^2}}$. Fiat itaque ut subtangens Tabularum, quæ est 4342945, ad $\frac{Cxx}{2\int \frac{xdx^3}{ds^2}}$, ita ln, seu Logarithmus ipsius n ex Tabulis sumtus, ad quartum $\frac{Cxxln}{8685890\int \frac{xdx^3}{ds^2}}$ quod erit æquale spatio quæsito AB. Ex quo patet, hoc AB esse duplum ejus quod in *Dissertatione mea de Motu* inventum est, & supra in §. V adhibitum pro Conoïde in medio elastico progrediente; adeoque pro globo in medio non elastico erit jam $AB = \frac{2Cln}{4342945}$.

His ita præmissis, omnia quæ in sequentibus paragraphis determinata sunt pro medio elastico, mutatis mutandis, facile accommodantur ad medium non elasticum. Hunc in finem percurram omnes eodem, ut ibi sunt, ordine paragraphos.

(V I.)

Valor ipsius C manet hic pro globo ferreo, nempe $= 4667D$; sed $AB = \frac{2Cln}{4342945} = \frac{9334Dln}{4342945}$. Hinc longitudo viæ quam percurrere debet globus ferreus, ita ut dimidium velocitatis suæ initialis amittat, erit $= 6470D$: sed pro globo plumbeo invenietur $7400D$.

(V I I.)

Quia, per *Lemma* IV, AB in medio non elastico, inventa est dupla ipsius AB in medio elastico; liquet ex operatione in hoc paragrapho instituta, fore c, seu subtangentem curvæ CEF, etiam duplam subtangentis illius curvæ, in casu medii elastici, adeoque jam $c = 9334D$. Ergo in determinationibus reliquis, ubicunque reperitur c, scribendum est ejus duplum. Et sic habebitur $tLK = \int \frac{18668aDdv}{9334mD + 2avv}$. Ad hujus constructionem, sit descriptus quadrans circuli DXY, cujus radius $OD = n\sqrt{\frac{9334D}{2a}}$; & reliqua fiant ut in §. VII præscriptum; unde determinabitur tAK.

TAB. LXXXVII. N°. CLXXXII. *Fig.* 2.

(V I I I.)

Cum itaque $n : \sqrt{a} = GI : \sqrt{IM}$; erit OD, seu $n\sqrt{\frac{9334D}{2a}}$, $= GI\sqrt{\frac{9334D}{2IM}} = GI\sqrt{\frac{4667D}{1M}} =$ [sumta $IM = 15\frac{1}{12}$ ped. quam grave in vacuo cadens uno secundo emetitur, & substituto pro D ejus valore $= \frac{1}{4}$ ped.] $GI\sqrt{\frac{4667}{60\frac{1}{3}}} =$

GI√

$GI\sqrt{\frac{14001}{181}} = GI \times \frac{1592}{181}$. Fiat itaque ut radius ad quadrantem, hoc eſt, $7 : 11 = \frac{1592}{181} \times GI$ ſeu $OD : DXY$; habebitur $DXY = \frac{17512}{1267} \times GI = t\,AK$, in caſu quo n, ſeu velocitas exploſionis eſt infinita. Quia itaque $GI : DXY = t\,IM : t\,AK$, faciendum eſt $GI : \frac{17512}{1267} \times GI$ [$= 1267 : 17512$] $=$ 1 ſec. 13 $\frac{5}{6}$ ſec. Ergo in aëre non elaſtico, globus ferreus noſter, exploſus velocitate infinita, impenderet in totum aſcenſum 13 $\frac{5}{6}$ ſecunda. Sed in aëre elaſtico [ſimili operatione obſervata] inveniretur pro tempore totius aſcenſus tantum $9\frac{4}{5}$ ſecund.

COROLLARIUM I.

Quia, per *Lemma* IV, globus ſine gravitate duplum ſpatium percurrit, in medio non elaſtico, ejus quod percurrit in medio elaſtico, ad eandem jacturam velocitatis initialis faciendam; & cum globus noſter ferreus [per *Coroll.* 1. §. VIII ſuper.] indigeat $4\frac{5}{4}$ ſecund. ad id ut velocitas reſidua ſit redacta ad dimidium velocitatis initialis in aëre elaſtico; indigebit idem ille globus $9\frac{1}{2}$ ſecund. in aëre non elaſtico, ad amittendum dimidium velocitatis initialis.

COROLLARIUM II.

Ad inveniendam totam altitudinem AK, ad quam aſcendere poteſt globus noſter ferreus, in aëre non elaſtico; ſumamus ejus valorem, in hoc *Corollario* §. VIII datum $\frac{cl(c+2a)-clc}{8685890}$, qui, in hoc caſu quo $c = 9334\,D$, eſt $= \frac{9334Dl(9334D+2000)-9334Dl9334D}{8685890}$ $=$ [ſuppoſito $D = \frac{1}{4}$ ped.] $\frac{2333\frac{1}{2}\,l\,4333\frac{1}{2} - 2333\frac{1}{2}\,l\,2333\frac{1}{2}}{8685890}$ $= \frac{2333\frac{1}{2} \times 2688310}{8685890} = \frac{4667 \times 2688310}{17371780} = \frac{1254634277}{1737178} = 722\frac{3}{4}$ ped.

ped. Pariſ. quam proxime. Hinc apparet globum noſtrum $277\frac{3}{4}$ ped. infra totam altitudinem mille pedum aſcendere.

(IX.)

Pro determinando deſcenſu, habetur hic iterum $dz = \frac{2acvdv}{mnc - 2avv} = \frac{c\,dy}{c - 2y} = \frac{clc - cl(c-2y)}{8685890} = K\beta$. Sed recordandum pro c ſumendum eſſe duplum, nempe $= 9334\,D = 2333\frac{1}{2}$ ped. Pariſ.

COROLLARIUM I.

Exiſtente $MI = MA$, hoc eſt ſi $y = a$, habetur $K\beta = \frac{clc - cl(c-2a)}{8685890}$, ad id ut velocitas acquiſita recidendo, fiat æqualis velocitati initiali. In noſtro exemplo, ubi $c = 2333\frac{1}{2}$ ped. erit $\frac{clc - cl(c-2a)}{8685890} = \frac{2333\frac{1}{2}l2333\frac{1}{2} - 2333\frac{1}{2}l333\frac{1}{2}}{8685890} = 2270$ proxime. Ergo $K\beta$ ſumenda eſt $= 2270$ ped. Hoc eſt, ſi globus infra A ceciderit 2270 ped. $- 964\frac{1}{2}$ ped., vel $1305\frac{1}{2}$ ped., recuperaverit tunc ſuam velocitatem initialem.

COROLLARIUM II.

Pro maxima velocitate, quam nunquam decidendo attingit, ſed tamen data quavis propius accedit; ponendum eſt iterum $2y = c = 9334\,D = \frac{9334}{4}$ ped., adeoque $y = \frac{9334}{4}$ ped. $= 1166\frac{3}{4}$ ped. Hoc eſt, MI ſumenda eſt dupla in aëre non elaſtico, ejus quæ inventa eſt pro elaſtico.

COROLLARIUM III.

Ipſa velocitas maxima *ad quam non* habetur, faciendo $MA : MI = AC^2 : IG^2$, hoc eſt $1000 : 1166\frac{3}{4} = nn : \frac{4667}{4000}\,nn =$

40000 :

40000 : 46670, quorum radices ſunt quam proxime ut 200 ad 216, ſeu ut 25 ad 27. Dico itaque velocitatem initialem eſſe ad velocitatem *ad quam non*, valde prope ut 25 ad 27.

(X.)

Tempus deſcenſus ita determinatur: Supra in §. hujus numeri, inventum eſt $tK\beta = \frac{\sqrt{\frac{ac}{2nn}} \times \log. \frac{2av + n\sqrt{2ac}}{-2av + n\sqrt{2ac}}}{4342945}$. Quod & hic valet, conſiderando c ut duplum.

(XI.)

Tempus deſcenſus per totam KA habetur ex §. hujus numeri. $tAM : tKA = 8685890\sqrt{2a} : \sqrt{c} \times (l\sqrt{2a} + \sqrt{(c+2a)} - l(-\sqrt{2a} + \sqrt{(c+2a)})$. Applicetur hoc ad præſentem caſum, ubi $a = 1000$ ped. & $c = 2333\frac{1}{2}$ ped., & habebitur $tAM : tKA = 8685890 \times \sqrt{2000} : \sqrt{2333\frac{1}{2}} \times (l\sqrt{(2000 + \sqrt{4333\frac{1}{2}})} - l(-\sqrt{2000} + \sqrt{4333\frac{1}{2}})) = 8685890 \times \sqrt{4000000} : \sqrt{46670} \times (l\sqrt{(2000 + \sqrt{4333\frac{1}{2}})} - l(-\sqrt{2000} + 4333\frac{1}{2})) = 1737178000 : 216\frac{1}{30} \times (l110\frac{3}{5} - l21\frac{1}{10}) :: 1737178000 : 1554300856 = 217147250 : 194287607$.

(XII.)

Quia itaque tAM, hoc eſt tempus aſcenſus, in vacuo, ad 1000 ped. eſt $8\frac{1}{6}$ ſecund. proxime; Fiat, ut 217147250 ad 194287607, ita $8\frac{1}{6}$ ad quartum, qui reperietur $= 7\frac{66651374}{217147250}$, hoc eſt $7\frac{2}{7}$ proxime; adeoque globus noſter, in aëre non elaſtico, impendit in deſcenſum $7\frac{2}{7}$ ſecunda quam proxime.

(XIII.)

Determinandum nunc reſtat tempus aſcenſus, in aëre non

elaſtico. Per methodum in §. hujus numeri, faciendum eſt ut
TAB. LXXXVIII. N°. CLXXXII. *Fig.* 2. c ad $\sqrt{2ac}$, ita ſinus totus ad tangentem anguli ΔOU. Adeoque in hoc caſu ut $\frac{9334}{4}$ ad $\sqrt{4667000}$, ſeu ut 4667 ad 4321, ita 10000000 ad 9258624 = tang. ΔOU; qui angulus ergo erit 42 gr. 48 minuta. Fiat nunc ut radius ad quadrantem, ſeu ut 7 ad 11, ita 10000000 ad 15714286 = numero partium quadrantis, quarum radius continet 10000000. Fiat porro $90 : 42\frac{48}{60} = 15714286 : 7473016$ = numero partium arcus 42 gr. 48 minut. pro radio 10000000. Nunc tandem fiat $\Delta U : \Delta\xi$ [= DV : DX] = 9258624 : 7473016 = tAM ($8\frac{1}{6}$ ſec.) : tAK, tempus aſcenſus in aëre non elaſtico, quod tempus erit = $6\frac{5}{7}$ ſecund. quam proxime. Ergo ambo tempora aſcenſus & deſcenſus, in aëre non elaſtico, ſimul ſumta = $6\frac{5}{7} + 7\frac{2}{7} = 13\frac{7}{7}$ ſec. Unde patet, globum noſtrum, in aëre non elaſtico, morari circiter uno ſecundo diutius quam in aëre elaſtico.

N°. CLXXXIII.

DE

OSCILLATIONIBUS PENDULI

In medio quod reſiſtit in ratione ſimplici velocitatis.

PROBLEMA.

GRave a quocunque dato puncto in Cycloïde inverſa deſcendens, & reſiſtentiam patiens proportionalem ſimplici velocitati, quæritur quouſque ab altera parte in eadem Cycloïde aſcendere poſſit?

SOLUTIO.

TAB. LXXXIX. N°. CLXXXIII. Sit Cycloïs in rectam lineam AB extenſa, cujus punctum medium C, repræſentet punctum infimum Cycloïdis. Sit initium deſcen-

N.° CLXXXI.

Fig. 1.

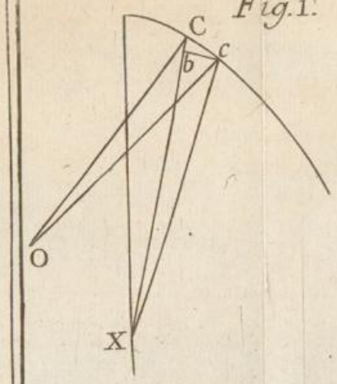


Fig. 2.

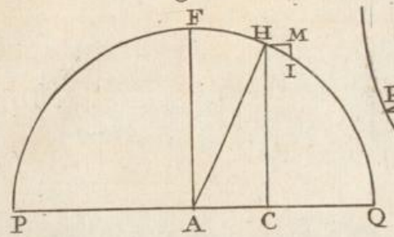
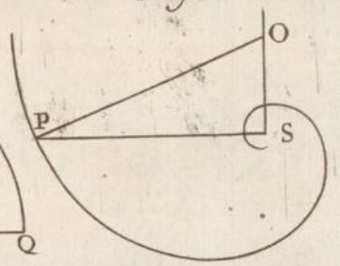


Fig. 3.



N.° CLXXXII.

Fig. 1.

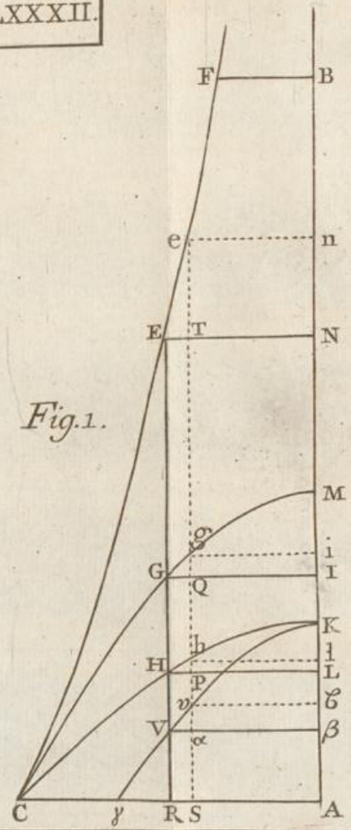


Fig. 2.

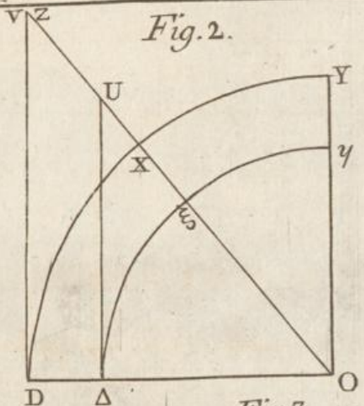


Fig. 3.

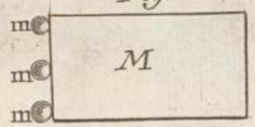
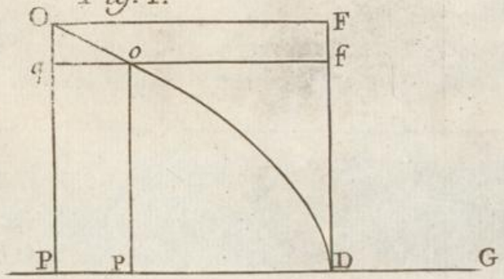


Fig. 4.



descensus in E, & finis ascensus in F: concipiatur curva EHDF, cujus applicatæ GH, CD &c. designent velocitates acquisitas, in punctis G, C, &c. Dicantur $CE = a$, $CF = c$; abscissa quælibet $CG = s$, $GH = v$; vis a gravitate oriunda, quæ proportionalis est distantiæ CG, etiam dicatur $= s$, resistentia $= gv$. Quibus positis, patet naturam curvæ hac æquatione $sds - gvds + vdv = o$ exprimi.

Ad separationem instituendam, ponatur $v = zs$, & $dv = zds + sdz$, & mutabitur æquatio in hanc $\frac{ds}{s} + \frac{zdz}{zz - gz + 1} = o$ aut integrando $ls + \int \frac{zdz}{zz - gz + 1} =$ const. Est vero $\frac{zdz}{zz - gz + 1} = \frac{(z - \frac{1}{2}g)dz}{zz - gz + 1} + \frac{\frac{1}{2}gdz}{zz - gz + 1}$; & $\int \frac{(z - \frac{1}{2}g)dz}{zz - gz + 1} = \frac{1}{2}l(zz - gz + 1)$: Restat igitur integranda $\frac{\frac{1}{2}gdz}{zz - gz + 1}$. Hunc in finem, ponatur $z = t + \frac{1}{2}g$, erit $\frac{\frac{1}{2}gdz}{zz - gz + 1} = \frac{\frac{1}{2}gdt}{tt + 1 - \frac{1}{4}gg} = \frac{2gdt}{4tt + 4 - gg} = \frac{\frac{2g}{4 - gg}dt}{1 + \frac{4}{4 - gg}tt}$. Descripto itaque arcu circuli, cujus radius $= 1$, & tangens $= \frac{2t}{\sqrt{(4 - gg)}}$, qui arcus dicatur A; erit $\frac{g}{\sqrt{(4 - gg)}} A = \int \frac{\frac{1}{2}gdz}{zz - gz + 1}$; cui addatur $\frac{1}{2}l(zz - gz + 1)$ = [substituto pro z ejus valore $\frac{v}{s}$) $\frac{1}{2}l(\frac{vv}{ss} - \frac{gv}{s} + 1) = \frac{1}{2}l(vv - gsv + ss) - ls$, cui porro addatur ls; habebitur $\frac{g}{\sqrt{(4 - gg)}} A + \frac{1}{2}l(vv - gsv + ss) =$ const. pro æquatione integrata propositæ $sds - gvds + vdv = o$. Quia autem tangens arcus $A = \frac{2t}{\sqrt{(4 - gg)}} = \frac{2z - g}{\sqrt{(4 - gg)}} = \frac{2v - gs}{s\sqrt{(4 - gg)}} = (\frac{2v}{s} - g) \times \frac{1}{\sqrt{(4 - gg)}}$, addo [pro rectificanda æquatione

integra-

integrata] $\frac{g}{\sqrt{(4-gg)}} B$; intelligo autem per B, arcum cujus tangens $= \frac{g}{\sqrt{(4-gg)}}$, & simul subtraho $l\alpha$: hoc nempe modo fiet, ut vera æquatio integrata sit $\frac{g}{\sqrt{(4-gg)}} \times (A+B) + \frac{1}{2} l(vv - gsv + ss) - l\alpha = 0$; quia in casu quo G cadit in E, id est quo $v = 0$, tota evanescit. Hinc quia in puncto C, ubi $s = 0$, tangens arcus A est infinita, erit arcus ipse $A =$ quadranti circuli; qui vocetur Q & habebitur $\frac{g}{\sqrt{(4-gg)}} \times (+Q+B) + lv - l\alpha = 0$; adeoque in puncto C, erit $lv = l\alpha - \frac{g}{\sqrt{(4-gg)}} \times (+Q+B)$. Simili modo invenitur, mutatis mutandis, pro ascensu, $lv = l\mathfrak{G} + \frac{g}{\sqrt{(4-gg)}} \times (+Q-B)$. Quoniam autem ultima velocitas descensus $=$ primæ velocitati ascensus, erit $l\alpha - \frac{g}{\sqrt{(4-gg)}} \times (+Q+B) = l\mathfrak{G} + \frac{g}{\sqrt{(4-gg)}} \times (+Q-B)$, & facta reductione $l\mathfrak{G} = l\alpha - \frac{g}{\sqrt{(4-gg)}} \times 2Q$, vel $= l\alpha - \frac{2g}{\sqrt{4-gg}} \times Q$; adeoque $l\alpha - l\mathfrak{G}$, seu $l\frac{\alpha}{\mathfrak{G}} = \frac{2gQ}{\sqrt{(4-gg)}}$.

COROLLARIUM I.

Velocitas in puncto infimo C $= \frac{\alpha}{n^{g(Q+B):\sqrt{(4-gg)}}}$; ponendo scilicet n, pro numero cui respondet unitas pro Logarithmo.

COROLLARIUM II.

Ex æquatione ipsa $sds - gvds + vdv = 0$, habetur supponendo $dv = 0$, velocitas maxima $= \frac{s}{g}$.

COROL-

COROLLARIUM III.

Hinc in æquatione generali inventa $\frac{g}{\sqrt{(4-gg)}} \times (A+B) + \frac{1}{2} l(vv - gsv + ss) - l\alpha = 0$; ponatur $\frac{s}{g}$ pro v, & mutabitur illa in hanc $\frac{g}{\sqrt{(4-gg)}} \times (A+B) + \frac{1}{2} l(\frac{ss}{gg} - ss + ss) - l\alpha = \frac{g}{\sqrt{(4-gg)}} \times (A+B) + l\frac{s}{g} - l\alpha = \frac{g}{\sqrt{(4-gg)}} \times (A+B) + ls - lg - l\alpha = 0$; unde $ls = lg\alpha - \frac{g}{\sqrt{(4-gg)}} \times (A+B)$ & $s = \frac{g\alpha}{n^{g(A+B):\sqrt{(4-gg)}}}$.

Quia vero, in casu maximæ velocitatis, arcus A pro tangente habet $(\frac{2}{g} - g) \times \frac{1}{\sqrt{(4-gg)}} = \frac{2-gg}{g\sqrt{(4-gg)}}$, vocetur hic arcus C, & prodibit s, seu CG, cui maxima velocitas GH respondet, $= \frac{g\alpha}{n^{g(C+B):\sqrt{(4-gg)}}}$. Ergo ipsa velocitas maxima GH, seu $\frac{s}{g} = \frac{\alpha}{n^{g(C+B):\sqrt{(4-gg)}}}$. Unde maxima velocitas GH, ad ultimam velocitatem $CD = \frac{\alpha}{n^{g(C+B):\sqrt{(4-gg)}}} : \frac{\alpha}{n^{g(Q+B):\sqrt{(4-gg)}}} = \frac{1}{n^{gC:\sqrt{(4-gg)}}} : \frac{1}{n^{gQ:\sqrt{(4-gg)}}} = 1 : \frac{1}{n^{g(Q-C):\sqrt{(4-gg)}}}$. Ex quo fluit, illas duas velocitates habere constantem rationem, ubicunque descensus initium sumat; quod quidem aliunde jam patet; scilicet ex similitudine omnium curvarum EHDF.

N°. CLXXXIV.

DE CORPORIS GRAVIS ASCENSU ET DESCENSU PER ARCUS ÆQUALES IN MEDIO RESISTENTE.

PROBLEMA.

TAB. LXXXIX. N°. CLXXXIV *Fig.* 1.

AD axem verticalem AO *construere curvam* AFL, *ejus naturæ, ut mobile sua gravitate descendens per arcum quemvis* AK *curvæ datæ* ABKR, *ad punctum imum* A *impetu concepto, ascendat per arcum* AL *æqualem semper arcui* AK; *idque in medio resistente secundum quadrata velocitatum.*

LEMMA.

Existente n = numero unitatis, seu $ln = 1$, erit $d(n^{fq:b}) = \frac{f}{b} n^{fq:b} dq$.

Patet ex calculo exponentialium.

SOLUTIO.

Fingamus mobile perveniſſe ad B delapſum ex K, & poſtea aſcendens ab A pervenire ad F, iturum ad L uſque; ita ut tam AK ſit æqualis AL, quam AB æqualis AF. Sit itaque $AK = AL = a$, $AO = b$, $AS = c$, invariabiles pro quolibet deſcenſu & aſcenſu, ſed variabiles pro mutatione initii & finis. Sit porro $AB = AF = s$, $BC = FG = ds$; $AM = x$, $MN = BP = dx$, $AD = z$, $DE = FH = dz$: velocitas in $B = v$, velocitas in $F = V$; vis gravitatis naturalis $= g$, vis reſiſtentiæ in $B = \frac{vv}{2e}$, vis reſiſtentiæ in $F = \frac{VV}{2e}$. Erit

æquatio

æquatio pro descensu $2gdx - \frac{vvds}{e} = -2vdv$, & pro ascensu $2gdz + \frac{VVds}{e} = -2VdV$; quæ ita disponantur $2vdv - \frac{vvds}{e} = -2gdx$, & $2VdV + \frac{VVds}{e} = -2gdz$. Ut autem harum duarum æquationum partes priores, litteras v & V quæ velocitates significant continentes, integrare possimus, easque adeo terminis finitis exprimere, multiplicemus priorem æquationem per $\frac{1}{n^{s:e}}$ & alteram per $n^{s:e}$; prodibunt hæ duæ integrabiles $\frac{2vdv - \frac{vvds}{e}}{n^{s:e}} = \frac{-2gdx}{n^{s:e}}$, & $2n^{s:e}VdV + \frac{1}{e}n^{s:e}VVds = -2gn^{s:e}dz$; sumtis enim integralibus, emergent $\frac{vv}{n^{s:e}} = -2g\int\frac{dx}{n^{s:e}}$ & $n^{s:e}VV = -2g\int n^{s:e}dz$; cujus veritas exploratur per Lemma præmissum. Sed ut vv & VV evanescant in punctis K & L, addendæ sunt ad valores inventos debitæ quantitates constantes, hunc in modum $\frac{vv}{n^{s:e}} = 2g\int\frac{db}{n^{a:e}} - 2g\int\frac{dx}{n^{s:e}}$, & $n^{s:e}VV = 2g\int n^{a:e}dc - 2g\int n^{s:e}dz$; ubi per $\int\frac{db}{n^{a:e}}$ & $\int n^{a:e}dc$, intelligo functiones constantes eodem modo compositas ex AK, AO, & ex AL, AS, ut sunt variabiles $\int\frac{dx}{n^{s:e}}$ & $\int n^{s:e}dz$ compositæ ex AB, AM & ex AF, AD. Quia vero in puncto infimo A est $s = 0$, ideoque $n^{s:e} = 1$; ipsæque functiones $\int\frac{dx}{n^{s:e}}$ & $\int n^{s:e}dz$ evanescunt; atque v evadit $= V$; erit $2g\int\frac{db}{n^{a:e}} = 2g\int n^{a:e}dc$. Hoc ve-

ro cum contingat pro quolibet puncto initiali K & finali L; licebit jam considerare a, b, & c tanquam variabiles; unde habebimus differentiando $\frac{db}{n^{a:e}} = n^{a:e}\, dc$; proinde $dc = \frac{db}{n^{2a:e}}$; seu $ldc = ldb - \frac{1}{e} \times 2a$. Reponantur nunc pro litteris a, b & c, pristinæ assumtæ s, x & z, habebimus $ldz = ldx - \frac{1}{e} \times 2s$; id quod naturam curvæ quæsitæ AFL determinat ex data curva AK. Ex his habetur constructio curvæ quæsitæ AFL: Quia enim $dc = \frac{db}{n^{2a:e}}$, hoc est, $dz = \frac{dx}{n^{2s:e}}$, erit $\sqrt{(FG^2 - FH^2)} = HG = dv = \sqrt{(ds^2 - dz^2)} = \sqrt{(ds^2 - \frac{dx^2}{n^{4s:e}})}$. Atqui, ob datam curvam ABKR, datur dx per ds: sit itaque $dx = S\,ds$; Unde $dz = \frac{S\,ds}{n^{2s:e}}$, & $dy = ds\sqrt{(1 - \frac{SS}{n^{4s:e}})}$, ipsæque adeo coordinatæ $AD = z = \int \frac{S\,ds}{n^{2s:e}}$ & $DF = y = \int ds\sqrt{(1 - \frac{SS}{n^{4s:e}})}$.

Sed facile construitur $n^{2s:e}$ ejusque quadratum $n^{4s:e}$, sumendo tantum in Logarithmica communi [cujus nempe subtangens = 1] applicatam, quæ distat a prima applicata, sive ab unitate, intervallo $= 2s:e$, erit enim illa $= n^{2s:e}$, & altera applicata quæ distat duplo intervallo $= 4s:e$, erit $n^{4s:e}$. Hinc formando super communi axe $\alpha\beta$, in quo abscissa $\alpha\gamma$ capiatur $= s$, duas curvas $\alpha\delta$ & $\alpha\varepsilon$, quarum unius $\alpha\delta$ applicata $\gamma\delta$ sit $= \int \frac{S\,ds}{n^{2s:e}}$, & alterius $\alpha\varepsilon$ applicata $\gamma\varepsilon$, sit $= \int ds\sqrt{(1 - \frac{SS}{n^{4s:e}})}$. Dico, $\gamma\delta$ & $\gamma\varepsilon$ dare coordinatas curvæ quæsitæ.

TAB. LXXXIX. N°. CLXXXIV. *Fig.* 2.

SCHO-

SCHOLIUM I.

In casibus particularibus constructio sæpe facilior redditur. Sic si Linea data ACK sit ipsa recta verticalis ANO; æquatio generalis supra inventa $ldz = ldx - \frac{2s}{e}$, abit in hanc $ldz = ldx - \frac{2x}{e}$, quæ differentiata, sumendo dz pro constante, dat $o = \frac{ddx}{dx} - \frac{2dx}{e}$; quo multiplicato per $\frac{dz}{dx}$, erit $\frac{dzddx}{dx^2} = \frac{2dz}{e}$ atque integrando $\frac{a}{e} - \frac{dz}{dx} = \frac{2z}{e}$; unde $adx - edz = 2zdx$; hoc est, $dx = \frac{edz}{a-2z} = \frac{\frac{1}{2}edz}{\frac{1}{2}a-z} = [\text{ponendo } \frac{1}{2}a - z = t] \frac{-\frac{1}{2}edt}{t}$, adeoque $x = -\frac{1}{2}alt$; ex quo patet x, seu arcum AF, esse proportionalem Logarithmo negativo abscissæ TD, faciendo $AT = \frac{1}{2}a$. Hæc autem proprietas convenit Tractoriæ *Hugenianæ*; quæ suam convexitatem habet versus superiora, estque recta transiens per T & applicatis parallela, Tractoriæ asymtotos. Nam $dt : dx = t : \frac{1}{2}e =$ tangenti constanti.

SCHOLIUM II.

Ope *Lemmatis* hisce præmissi, solvi potest Problema a Fratre meo propositum [vid. *Act. Lipsi.* 1697, p. 115*] sine assumtione novarum indeterminatarum. Separandæ nimirum proponantur indeterminatæ hujus æquationis $ady = ypdx + by^n q dx$ [ubi a & b quantitates datas & constantes, n potestatem quamvis literæ y, p & q quantitates utcunque datas per x denotant.] Transponatur terminus secundus, ut habeatur $ady - ypdx = by^n qdx$, vel [diviso per y^n] $ay^{-n}dy - y^{1-n}pdx = bqdx$; porro dividendo utrumque membrum per $c^{(1-n)\int pdx : a}$, s denotante numero unitatis, seu $lc = 1$; prodibit hæc altera

* Vide Solutionem Auctoris nostri, N°. XXXV, pag. 175, Tom. I.

æquatio $\frac{ay^{-n}dy - y^{1-n}pdx}{c^{(1-n)\int pdx : a}} = \frac{bqdx}{c^{(1-n)\int pdx : a}}$; ita enim membrum prius absolute integrari potest, & habebitur $\frac{ay^{1-n}}{(1-n)c^{(1-n)\int pdx : a}} = \int \frac{bqdx}{c^{(1-n)\int pdx : a}} = X$, seu alicui functioni datæ ipsius x. Erit proinde $y^{1-n} = \frac{1-n}{a} \times c^{(1-n)\int pdx : a} X$. *Q. E. F.*

N°. CLXXXV.

DU PENDULE COMPOSE'

Dans un milieu resistant.

CAlcul pour déterminer la viteſſe ou la réſiſtance d'un Pendule rectiligne, compoſé de deux globes A & B, qui ſe mouvroient dans un milieu qui réſiſteroit comme le quarré de la viteſſe.

SOLUTION.

On ſuppoſe que a & b ſoient les diſtances de A & B au point de ſuſpenſion ou d'appui, & x & s les abſciſſes & les arcs du cercle que décrit A. Soient nommées la gravité abſolue $= g$, la viteſſe de $A = v$; $c =$ au nombre dont le Logarithme eſt 1, c'eſt-à-dire, $lc = 1$; $\frac{1}{m}$ & $\frac{1}{n}$ ſoient les intenſités des réſiſtances des globes A, B.

Soit f la force immaterielle, miſe entre les deux verges qui enfilent les deux globes A & B, deſquels le premier A eſt conçu comme le plus proche du point d'appui, & B le plus éloigné; enſorte que le globe A, étant retardé par la verge du globe B, ſans lequel il deſcendroit plus vite, & le globe B, étant

étant acceleré par la preſſion du globe A, ſans lequel il deſcendroit moins vite; il ſe fait entre le globe A & la verge du globe B, une eſpece de compreſſion, comme s'il-y-avoit un reſſort entre deux; l'effort donc de ce reſſort à écarter les deux verges, doit être contrebalancé par les deux verges, qui tendent à ſe rapprocher juſqu'a l'entiere coincidence: c'eſt cet effort du reſſort que j'appelle la force immaterielle $= f$.

TYPE DU CALCUL.

La force acceleratrice du globe $A = \frac{gdx}{ds} - \frac{vv}{m} - \frac{f}{A}$

La force acceleratrice du globe $B = \frac{gdx}{ds} - \frac{bbvv}{naa} + \frac{af}{bB}$.

Or afin que les deux verges deſcendent ou circulent conjointément, il faut que ces deux forces acceleratrices ſoient comme les longueurs des verges, c'eſt-a-dire il faut que $\frac{gdx}{ds} - \frac{vv}{m} - \frac{f}{A} : \frac{gdx}{ds} - \frac{bbvv}{naa} + \frac{af}{bB} = a : b$. Par cette analogie, on trouve $f = \frac{gAB(bb-ab)dx}{(aaA+bbB)ds} + \frac{bABvv(mbb-nab)}{mna(aaA+bbB)}$.

Mais on ſait que la force acceleratrice, multipliée par l'élement de l'eſpace à parcourir ds, donne $v\,dv$; ainſi ſubſtituant cette valeur de f, dans l'équation $g\,dx - \frac{vvds}{m} - \frac{f\,ds}{A} = v\,dv$, on trouvera $g\,dx - \frac{vvds}{m} - \frac{gmnaB(bb-ab)dx - bBvv(mbb-nab)ds}{mna(aaA+bbB)} = v\,dv$; ce qui étant demelé & reduit en ordre, il viendra $\frac{(gaaA+gabB)\,dx}{aaA+bbB} = \frac{(na^3A+mb^3B)\,vvds}{mna(aaA+bbB)} + v\,dv$. Pour abreger; nommons $\frac{g(aaA+abB)}{aaA+bbB} = L$, & $\frac{na^3A+mb^3B}{mn(a^3A+abbB)} = R$, cela nous donnera cette equation $L\,dx = R\,vvds + v\,dv$. Pour l'integrer, on poſera $c^{2Rs} = z$: par conſequent $2Rs = lz$, & $R\,ds = \frac{dz}{2z}$, Donc $L\,dx = \frac{vv\,dz}{2z} + v\,dv$; multipliez

ſe

le second membre par zz, & le premier par son egal $2c^{2Rs}$, il viendra $2Lc^{2Rs}dx = vvdz + 2zvdv$; ainsi en l'integrant, on aura $2L\int c^{2Rs}dx = vvz = vvc^{2Rs}$; ce qui donne $vv = 2Lc^{-2Rs}\int c^{2Rs}dx$. Il n'y a donc qu'à remettre les valeurs de L & R; ce qui étant exécuté, on obtiendra finalement $vv = \frac{2g(aaA+abB)}{aaA+bbB}\, c^{-2(na^3A+mb^3B)s:mn(a^3A+abbB)} \times \int c^{2(na^3A+mb^3B)s:mn(a^3A+abbB)}\, dx$.

SCHOLIE I.

Il faut remarquer qu'un corps pesant, qui tombe dans un milieu résistant, le long d'une courbe qui touche une ligne horizontale dans son plus bas point, s'accelere depuis le commencement de sa chute jusqu'à un certain terme, avant que d'arriver au point le plus bas de sa descente; ce terme passé le corps grave commence à se retarder: il faut donc savoir que la valeur trouvée de vv, n'est que pour la vitesse du corps quand il a passé ce terme. Donc, pour avoir la valeur de vv, pour quand le corps n'est pas encor arrivé au terme de la plus grande vitesse, il faut dans l'opération du calcul mettre par tout $-vdv$ au lieu de vdv: ainsi la derniere équation à integrer sera celle ci $2Lc^{2Rs}dx = vvdz - 2zvdv$; mais pour la rendre intégrable, il faut diviser le second membre par zz, & le premier par son égal c^{4Rs}, & on aura $2Lc^{-2Rs}dx = \frac{vvdz-2zvdv}{zz}$; dont l'intégrale est $2L\int c^{-2Rs}dx = -\frac{vv}{z} = -vvc^{-2Rs}$; d'où on tire $vv = -2Lc^{2Rs} \times \int c^{-2Rs}dx$: en substituant comme auparavant les valeurs de L & R, on aura maintenant $vv = \frac{2g(aaA+abB)}{aaA+bbB} \times c^{2(na^3A+mb^3B)s:mn(a^3A+abbB)} \times \int c^{-2(na^3A-mb^3B)s:mn(a^3A+abbB)}\, dx$.

SCHO-

SCHOLIE II.

On remarquera encor, que par la gravité abſolue g on n'entend pas la gravité naturelle, comme elle anime les corps terreſtres dans le vuide, mais la gravité ſpécifique des corps diminuée de celle du milieu réſiſtant : car c'eſt cette gravité diminuée qui doit être cenſée animer les corps plongés dans un milieu peſant lui-même. Ainſi donc, dans cette ſolution, on ſuppoſe que les deux globes A, B ſont faits d'une même matiere, par exemple l'un & l'autre de fer, ou l'un & l'autre de plomb ; mais ſi l'un étoit de fer & l'autre de plomb, il y auroit à conſiderer deux differents g, que l'on déſigneroit par g & g', l'un pour le globe A & l'autre pour le globe B. Cette ſuppoſition rendroit le Probléme un peu plus difficile, & la formule plus longue.

SCHOLIE III.

Si on veut déterminer le Centre d'oſcillation de nôtre Pendule compoſé de deux globes A, B, oſcillant dans un milieu réſiſtant ; c'eſt-à-dire, ſi on veut trouver la longueur d'un Pendule ſimple, qui ſoit iſochrone avec le Pendule compoſé ; il y a deux cas à conſiderer : En ſuppoſant 1°. que le Pendule ſimple faſſe ſes oſcillations dans le vuide, ou dans un milieu ſans réſiſtance. 2°. Que le Pendule ſimple oſcille dans le même milieu réſiſtant, dans lequel oſcille le compoſé.

Le premier cas eſt fort facile, car il n'y a qu'à prendre la quatriéme proportionnelle de la force accelératrice du premier globe, laquelle force a été trouvée ci-deſſus $\frac{gdx}{ds} - \frac{vv}{m} - \frac{f}{A}$, de la force accelératrice naturelle ſur un arc ſemblable, qui eſt $\frac{Gdx}{ds}$, en nommant G la gravité naturelle abſoluë, & de la longueur du premier rayon a ; & ainſi on aura la longueur cher-

chée du Pendule simple $= \frac{Gadx : ds}{gdx : ds - vv : m - f : A}$, où on substituera les valeurs trouvées de f & de vv.

Quant au second cas, le Probléme est indéterminé : car la longueur cherchée du Pendule simple synchrone avec le composé, dépend de la quantité de matiere, de la grosseur de son globe, & partant aussi de l'intensité de la résistance. Pour plus de facilité du calcul, supposons que le troisiéme globe, que nous voulons employer pour le Pendule simple synchrone, soit de même matiere que les deux autres globes, & qu'il ait la même grosseur que le globe A; par conséquent aussi la même intensité de résistance $\frac{1}{m}$. Cela posé, nommons la longueur cherchée du Pendule simple $= y$. Sa viteſſe sera $= \frac{yu}{a}$, & sa résistance dans le même milieu $= \frac{yyuu}{aam}$; donc la force accélératrice $= \frac{gdx}{ds} - \frac{yyuu}{aam}$; ainsi, par la nature du synchronisme, on aura cette analogie $\frac{gdx}{ds} - \frac{vv}{m} - \frac{f}{A} : \frac{gdx}{ds} - \frac{yyuu}{aam} = a : y$; ce qui nous fournit cette équation quarrée $(\frac{gdx}{ds} - \frac{vv}{m} - \frac{f}{A})yy = \frac{gadx}{ds} - \frac{yyuu}{am}$; d'où l'on déduira la valeur cherchée de y, dans laquelle il faudra substituer les valeurs trouvées de f & de v, pour avoir le tout en termes connus.

N°. CLXXXVI.

JOHANNIS BERNOULLI HYDRAULICA

Nunc primum detecta ac demonstrata directe ex fundamentis pure mechanicis.

ANNO 1732.

N.° CLXXXVI.

IOHANNIS
BERNOULLI
HYDRAULICA

Nunc primum detecta ac demonstrata directe ex
fundamentis pure mechanicis.

ANNO 1732.

LEONHARDUS EULERUS

MATHEMATICUS ACUTISSIMUS

AD AUCTOREM.

JAM ante quidem, maximi feci Theoriam Tuam aquarum fluentium, propter veram & genuinam Methodum, quam Tu, Vir Excellentissime, *primus atque solus aperuisti ad hujus generis Problemata solide pertractanda. Nunc vero, perlecta altera Tuarum Meditationum parte, penitus obstupui fœcundissima principiorum Tuorum applicatione ad perplexissima Problemata resolvenda, quo utilissimo pariter ac profundissimo invento Nomen Tuum celeberrimum apud posteros perpetuo erit sacrum. Obscurissimam autem atque abstrusissimam quæstionem, de pressione quam latera vasorum ab aquis transfluentibus patiuntur, tam distincte & enucleate enodasti, ut nihil amplius in hanc tam difficili re supersit, quod desiderari queat. Ut enim nemo, præter Filium Tuum celeberrimum, hoc argumentum attigit, qui tamen tantum cum totus motus sese jam ad statum permanentem composuerit, pressionem via satis indirecta definivit; Ita Tu statim, methodo genuina patefacta, pressionem in omni aquæ statu accuratissime determinasti, de quo Te dignissimo invento Tibi,* Vir Excellentissime, *ex animo gratulor, & pro communicatione maximas gratias ago.*



DISSER-

DISSERTATIO HYDRAULICA

De Motu Aquarum per vasa aut per canales quamcunque figuram habentes fluentium.

***

neque adhuc ad leges regulasque mechanicas revocata habetur. Quicquid Autores ea de re scripserunt, vel sola nituntur experientia, vel rationibus incertis omnino, parumque soliditatis habentibus.

In Opere Hydrodynamico, quod non ita pridem in lucem edidit Filius meus †, felicioribus auspiciis aggressus est materiam istam, sed fundamento nixus indirecto, conservatione scilicet virium vivarum, licet verissimo atque a me demonstrato, nondum tamen ab omnibus Philosophis recepto. Primus ego hanc hypothesin exhibui in Dynamicis solidorum [postquam HUGENIUS simili principio pro centro oscillationis determinando usus est] ostendique eandem constanter ex illa hypothesi solutionem elici, quam dant ordinaria principia dynamica ab omnibus Geometris admissa *; quæ sane perpetua solutionum utraque via erutarum conformitas, vel sola sufficeret ad convincendam Adversariorum obstinationem. Directam methodum, qua a priori & per sola Dynamices principia, investigari possit natura motus aquarum ex vasis per foramina erumpentium, aut per canales non uniformis amplitudinis fluentium, hactenus dedit nemo.

Miratus unde tanta difficultas, ut in fluidis, non æque ac in solidis, succedat principiorum dynamicorum applicatio; tandem rem acrius animo volvens, detexi veram difficultatis originem; quam in eo consistere deprehendi, quod pars quædam virium prementium impensa in formandum *gurgitem*, [a me ita dictum ab aliis non animadversum] tanquam nullius momenti fuerit neglecta, & insuper habita, non aliam ob causam quam quia gurges conflatur ex quantitate fluidi perexigua, ac veluti infinite parva, qualis formatur quotiescunque fluidum transit ex loco ampliori in angustiorem, vel vice versa ex angustiori in ampliorem. In priori casu fit gurges ante transitum, in altero post transitum.

Demonstrabo autem ad formandum gurgitem, quantumvis parvam habeat moleculam, requiri tamen vim prementem non insen-

† *Danielis* BERNOULLI Hydrodynamica, sive de viribus & motibus fluidorum Commentarii. *Argentorati*, 1738.

* Vide Numeros CXXXV, CXXXVI, CXL.

inſenſibilem, nedum infinite parvam, ſed finitam ac determinatam, adeoque neutiquam contemnendam, ſed dignam omnino ut in computum veniat. Nam vis illa ad hunc effectum requiſita, quod mirum videri poteſt, plane non dependet ab extenſione gurgitis, qui major minorve concipi poteſt, modo concipiatur ut valde parvus; ſemper eandem ad ſui formationem abſumit partem virium prementium, manentibus cæteris circumſtantiis.

Quid ſit gurges, ac quomodo formetur, ex ipſa rei tractatione intelligetur; ſimulque patebit formationem gurgitis peragi ſine diſpendio ſenſibili virium vivarum, reſpectu quantitatis earum quæ eſt in totali maſſa aquea. Hinc eluceſſit ratio, cur tuto & ſine errore adhiberi poſſit Theoria virium vivarum in Hydraulicis; etiamſi ad gurgitem non attendant illi qui hac theoria utuntur; dummodo gurgitis exiſtentiam non ignorent, videantque illum nihil derogare virium vivarum conſervationi: ſecus enim contendere non poſſunt, ſe rei veritatem perfecte & ſcientifice conſecutos eſſe.

Diſquiſitionem hanc abſolvam duabus partibus: In prima conſiderabo phænomena aquarum fluentium, & effluentium per vaſa cylindrica aut priſmatica, ſive ſint ſimplicia, ſive ex pluribus compoſita, ut ſunt canales ex variis diverſæ amplitudinis tubis, ſeu ſiphonibus cylindricis coagmentatis. In altera parte, perſcrutabor omnia univerſaliſſime, cujuſcunque ſint figuræ, tam regularis quam irregularis, vaſa perforata, ipſiſque adaptati canales ac tubi.

Ad clariorem rerum intelligentiam, præmitto Definitiones atque Lemmata ſequentia, quorum veritas, cum ex Dynamicis, tum ex Hydroſtaticis eſt manifeſta.

I. Vis *acceleratrix* uniformis eſt, quæ dato corpori, dato tempore, datam velocitatem imprimit.

II. Vis *motrix* eſt, quæ quando agit in corpus quieſcens, illud in motum concitat, aut quæ corpus jam motum vel accelerare, vel retardare, vel ejus directionem mutare poteſt.

III. Vires motrices, ſunt in ratione compoſita, ex ratione maſſarum & virium acceleratricium. Sic ex. gr. ad movendam

maſſam duplam, cum vi acceleratrice tripla, aut, quod idem eſt, ad movendam maſſam triplam, cum vi acceleratrice dupla, requiritur vis motrix ſextupla.

IV. Vis motrix diviſa per maſſam, dat vim acceleratricem; per hanc vero diviſa, dat maſſam.

V. Gravitas abſoluta g, ſeu cauſa gravitatis, quæcunque illa ſit, eſt vis acceleratrix, quæ cum animat determinatam maſſam corporis m, producit in illa vim motricem $=gm$. Licebit autem in mente noſtra eam ſeparare a corpore, & ita conſiderare tanquam extrinſecus in corpus ageret: concipimus utique idem illud corpus, gravitatis expers, a vi motrice externa gm eadem lege acceleratum iri, qua acceleratur naturaliter. Illam autem vim gm, tanquam extra materiam exiſtentem, vocare lubet vim motricem *immaterialem*: unde ſi illa aliorſum tranſlata, agat in aliam maſſam M, accelerabitur hæc, vi acceleratrice $=gm:M$.

VI. Vis motrix immaterialis atque invariabilis, agens ſine impedimento in corpus, eodem modo illud accelerat, ſive adhuc quieſcat, ſive jam ſit in motu: cum enim vis illa ſemper comitetur corpus, nullum inter ſe habent motum relativum, adeoque vis motrix eodem modo agit in corpus motum, ac ſi utrumque omnino quieſceret. Hæc cauſa eſt, cur corpora gravia, inter cadendum, continuo & uniformiter accelerantur ſecundum tempora; ſuppoſito ſcilicet intenſitatem vis acceleratricis non mutari inter agendum, hoc eſt, neque augeri neque minui; ſicuti revera vis gravitatis, eandem continuo ſervat intenſitatem, in corpore gravi deſcendente, æque ac ab initio deſcenſus.

VII. *Intenſitas* vis motricis invariabilis, dicitur menſura, ſecundum quam in corpore movendo producitur major minorve vis acceleratrix: Sic gravitas, in corpore verticaliter cadente, majorem habet intenſitatem, quam ea in eodem corpore ſuper plano declivi delabente; in priori enim caſu, major producitur vis acceleratrix quam in altero; in utroque autem gravitas eſt invariabilis.

VIII. *Vis motrix variabilis* eſt, cujus intenſitas mutatur in agendo. Sic ex. gr. vis elaſtri tenſi, ab initio relaxationis majorem habet

habet intenſitatem, per conſequens, majorem imprimit corpori propellendo vim acceleratricem, quam in progreſſu relaxationis. De his hæ habentur Regulæ : Sit ſpatium a corpore percurſum $= x$; maſſa corporis propulſi $= m$; vis motrix in fine ſpatii percurſi $= p$; velocitas acquiſita $= v$; tempus per $x = t$; proinde $dt = \frac{dx}{v}$; erit $\frac{pdt}{m}$, ſeu $\frac{pdx}{mv} = dv$, ideoque $\int pdx = \frac{1}{2} mvv$, id quod notiſſimum eſt.

IX. Partes inferiores aquæ in vaſe aliquo contentæ, premuntur a ſuper incumbente maſſa aquea, ſecundum ſolam profunditatem, quamcunque vas habeat figuram ; hoc eſt, ſi maſſa aquea cogitatione dividatur in ſtrata horizontalia infinite parvæ craſſitiei, unumquodque ex illis ſtratis tantumdem premitur, ac ſi illi incumberet cylindrus aqueus ejuſdem altitudinis, quam eſt ea, quæ in vaſe reſpondet profunditati ipſius ſtrati.

X. Hinc recte colligitur : Si amplitudines ſtratorum, eandem craſſitiem infinite parvam habentium, ſint m, m', m'', m''', &c. eorumque adeo ponduſcula propria ſint etiam ut m, m', m'', m''', &c., ſeparari poterunt per mentis abſtractionem, a ſtratis ipſorum gravitationes ; ita ut eorum ſola ſuperſit materia ſine pondere : ſed ſi ablatarum gravitationum loco, totidem aliæ ſubſtituantur, quæ junctim premant ſupremam aquæ ſuperficiem, obſervando nimirum in ſingulis hanc analogiam, ut ſit amplitudo cujuſlibet ſtrati ad amplitudinem ſupremæ ſuperficiei, ita gravitatio propria ſtrati ad gravitationem ſubſtituendam : orietur inde in ſingulis ſtratis eadem preſſio, ac ſi manſiſſent in ſtatu ſuo naturali.

XI. Voco *Tranſlationem*, ſubſtitutionem illam mentalem. Ut me explicem, habeat ſtratum aliquod ex inferioribus amplitudinem $= m$, ejus gravitatio, vel ponduſculum proprium $= \pi$; amplitudo ſtrati ſupremi $= h$, erit *gravitatio tranſlata* ad ſuperficiem ſupremam $= \frac{h}{m} \pi$, quæ, cum reliquis omnibus ita *tranſlatis*, conſtituit totam vim motricem immaterialem, qua omnis aqua in vaſe deorſum urgetur, eodem modo ac fit naturaliter.

MONITUM.

Monere jam convenit in anteceſſum, me, per totam hanc tractationem de motu aquarum fluentium, abſtrahere a conſideratione impedimentorum peregrinorum & accidentalium, quæ alterare poſſunt motum per regulas determinatum. Talia impedimenta ſunt aquarum imperfecta fluiditas, item illarum adhæſio, atque frictio ad latera vaſorum, nimia tuborum gracilitas, foraminum ſeu luminum anguſtia, tenacitas particularum fluidarum, ob quam non facillime a ſe invicem ſecedunt, & quæ ſunt alia ejuſmodi, ad quæ non attendo.

Hoc quoque notari velim, non eſſe abſolutæ neceſſitatis, ut ſemper aquarum ſtrata in ſitu horizontali concipiantur: commodius illa finguntur, perpendicularia ad directionem motus aquæ. Sic ex. gr. cum aqua ex vaſe ampliori, transfluit in tubum anguſtiorem horizontalem, cujus orificii vel luminis area ſit in plano verticali, & ad latus tubi recto; aqua in tubo contenta rectiſſime dividi concipitur in ſtrata verticalia, & plano luminis parallela; eoque magis, quod ipſa natura hunc quaſi ſitum affectat: videmus enim columnam aqueam in tubo aliquo, duas lineas in diametro non multum excedente, habere ambas ſuas ſuperficies extremas diſpoſitas ad ſitum perpendicularem lateribus tubi, quamvis tubus ipſe ſit ad horizontem obliquus, vel omnino horizontalis. Linea conjungens centra gravitatis ſtratorum, ſive ſit recta ut in tubis rectilineis, ſive curva ut in tubis curvilineis, vocabitur *linea centrica*, vel ſimpliciter *centrica*: ſingula quippe ſtrata, quoad materiam in centris ſuis collecta, eum habere motum cenſentur quem ipſa habent ſtrata.

DISSER-

DISSERTATIONIS HYDRAULICÆ
PARS PRIMA,

Agens de motu aquarum per vasa & canales cylindricos, qui ex pluribus tubis cylindricis sibi invicem adataptis sunt conflati.

I.



Etur primo canalis, (Fig. 1) ABCFDE, compositus ex duobus tubis cylindricis, diversæ amplitudinis AGDE & GBCF, quorum ille fundum GD apertum habeat foramine GF, per quod communicet cum tubo angustiori BF. Sit vero totus canalis BE plenus liquore homogeneo, per se nullius gravitatis, sed urgeatur a parte orificii AE, data vi motrice $=p$, quæ, æqualiter premendo, expandatur per totam superficiem liquoris AE; quæritur lex accelerationis, qua liquor per canalem profluet? Suppono autem canalem semper manere plenum liquore, quod fit concipiendo suppeditari jugiter aliunde novam materiam liquoris, eadem quovis momento velocitate in tubum GE subingredientis, ad resarciendum id quod per alterum orificium GF egreditur in tubum GC, atque ex hoc ipso per lumen BC in auras dilabitur. TAB. LXXXIX. Nº. CLXXXVI *Fig.* 1.

II.

Ex Hydrostaticis assumpsi vim motricem p immaterialem; qua premitur superficies liquoris AE, propagari in instanti, ad superficiem GF liquoris in tubo BF contenti; idque sive stagnet liquor in toto canali, sive fluat; dummodo plenus maneat.

III.

Dum tranſit liquor ex uno tubo in alterum, mutabitur utique velocitas in ratione reciproca amplitudinum; at nulla mutatio eſt ſubitanea, ſed ſucceſſiva & gradualis, procedens per omnes poſſibiles gradus intermedios a minori ad majorem, vel a majori ad minorem.

IV.

Hinc quando fluit liquor motu parallelo, ita ut quolibet momento, eadem inſit velocitas ſingulis partibus liquoris, in directione ab AE verſus GD, antequam partes ipſi GF proximæ, perveniant ad orificium GF, oportet ut per diſtantiam ſaltem minimam HG, incipiant accelerari, & accelerando pergant, donec in ipſo ingreſſu GF, acquiſiverint velocitatem liquoris per tubum BF fluentis motu pariter parallelo, ſinguliſque partibus communi.

V.

Formatur itaque, pro latitudine indefinite parva HG, aliquis quaſi gurges IFGH, ex lato in anguſtum coarctandus, per quem liquor, continua acceleratione ſed tamen per gradus adaucta, perlabi debet, manente portiuncula quam minima liquoris (quæ replet ſpatiolum IFD) in quiete perpetua.

VI.

Sit curva IMF, terminans gurgitem, cujuſcunque naturæ, neque enim neceſſe eſt, eum ſupponere alicujus determinatæ figuræ; mox enim demonſtr abo, eandem ſemper requiri vim motricem, ad id unice deſtinatam ut liquor per gurgitem cogatur, qualemcunque habeat latitudinem HG, modo ſit infinite parva, & cujuſcunque ſit naturæ linea IMF, quæ connectit extremitates I & F.

VII.

VII.

Nemo putet vim illam motricem [quæ exiguam adeo, imo infinite parvam, portiunculam liquoris per gurgitem protrudit] debere & ipſam eſſe infinite parvam, adeoque contemni poſſe. Eſt enim omnino finitæ quantitatis illa vis motrix; ideo quia ſi quantitas materiæ movendæ eſt infinite parva, ex altera parte, vis acceleratrix debet eſſe infinite magna, ad id nimirum, ut tempuſculo infinite parvo, quo liquor percurrit ſpatiolum HG, generari tamen poſſit mutatio finita in velocitate, utpote ea quæ fuerat velocitas in H ad eam quæ jam eſt in G, ſe habet ut GF ad HI.

VIII.

Neglectio hujus vis motricis, tanquam nullius momenti, in cauſa fuit, cur nemo ad hunc uſque diem extiterit, qui ex principiis ſtaticis & pure mechanicis, dare potuerit leges liquorum per canales non uniformes fluentium; ſed quicunque ſuſceperunt illas exacte determinare recurrerunt, meo quidem exemplo, ad principium virium vivarum, de cujus applicatione ad hoc negotium aliaque in ſolidis æque ac in fluidis, forſan nunquam cogitaſſent, ſi me præeuntem non habuiſſent, quippe qui primus docui, hunc uſum derivare ex conſervatione virium vivarum. Sed ipſe ego non ſatis contentus indirecta hac methodo, utpote fundata in theoria illarum virium a multis nondum admiſſa, non deſtiti inquirere in methodum directam, quæ niteretur unice principiis dynamicis a nemine negatis; donec tandem, poſt meditationem longiuſculam, anno jam 1729 voti compos factus, vidi totius rei cardinem verſari in contemplatione gurgitis, antea a nemine animadverſi. Nunc itaque inventa mea, Amicis quibuſdam privatim explicata, etiam cum publico communicare conſultum duco. Hunc in finem, gurgitis generatione jam indicata, inceptum lubet, qua potero perſpicuitate, proſequi.

IX.

IX.

Concipiatur abſciſſa HL $= t$, applicata LM $= y$, atque prioris elementum Ll $= dt$, dicaturque tubi HE amplitudo AE ſeu HI $= h$, tubi GC amplitudo BC ſeu GF $= m$, liquoris in tubo GC velocitas $= v$, adeoque liquoris in tubo HE velocitas erit $\frac{m}{h} v$; ſunt enim velocitates amplitudinibus reciproce proportionales: ob eandem rationem, erit, in quolibet gurgitis loco, liquoris LM ml velocitas $= \frac{m}{y} v$, quod dicatur $= u$. Jam ergo ſit vis acceleratrix, qua animatur ſtratum liquoris Lm $= \gamma$; erit, ex natura accelerationis $\gamma dt = udu$, proinde $\gamma y dt = yudu$, hoc eſt, vis motrix qua urgetur ſtratum liquoris LM $ml = yudu$. Hæc vero vis motrix, per §II, generatur a vi motrice partiali in tubo HE exiſtente, & expanſa per totam amplitudinem AE; quæ ut innoteſcat, faciendum eſt ut LM ad HI, ſeu ut y ad h, ita $yudu$ ad $hudu$, erit $hudu$ [tranſlata nempe ipſius $yudu$] vis motrix particularis in tubo HE, quæ producere poteſt vim motricem $yudu$, in gurgitis ſtrato LM ml; & integrando per totum gurgitem habetur $\frac{1}{2} h \left(vv - \frac{mm}{hh} vv \right)$ ſeu $\frac{hh - mm}{2h} vv$, quæ deſignat vim motricem requiſitam in tubo HE, ad id unice, ut in gurgite fiat acceleratio neceſſaria ad mutandam velocitatem minorem in majorem, qua opus eſt, ut tranſeat liquor in tubum anguſtiorem GC.

COROLLARIUM I.

Hinc patet naturam curvæ IMF, ut & latitudinem gurgitis HG, non ingredi in vis motricis determinationem, ad generandum motum gurgitis. Datis enim amplitudinibus extremis HI & GF, ſeu h & m, & velocitate v, ſemper habetur vis motrix in tubo HE $= \frac{hh - mm}{2h} vv$, pro motu in gurgite generando.

COROL-

COROLLARIUM II.

Quod si, continuante fluxu liquoris, ejus velocitas v in tubo BF maneat semper constans, manifestum est, etiam alteram velocitatem in tubo HE manere constantem; adeoque vim motricem, vel pressionem p, nihil amplius conferre ad motum in utroque tubo accelerandum: unde liquet totam illam vim p unice adhiberi ad formandum gurgitem, eumque in statu suo conservandum; erit propterea $p = \frac{hh - mm}{2h} vv$.

COROLLARIUM III.

Fingamus tubum HE, vel GE, esse verticaliter erectum instar vasis cylindrici, & communicare cum tubo horizontali GC, atque vim p esse ipsum pondus columnæ liquoris contenti GE; ita ut [posito g designare vim naturalem acceleratricem gravium, atque HA vel GA $= a$] habeatur $p = gah$ = ponderi liquoris in GE contenti; unde $gha = \frac{hh - mm}{2h} vv$. Sed ut v determinetur per altitudinem verticalem z, per quam grave aliquod libere delapsum acquirat velocitatem v; faciendum est $gdz = vdv$, proinde $gz = \frac{1}{2}vv$; substituendo igitur gz pro $\frac{1}{2}vv$; habebimus $gha = \frac{hh - mm}{h} \times gz$; unde emergit $z = \frac{hh}{hh - mm} a$, id quod dat hoc Theorema hydraulicum.

X.

THEOREMA.

Sit, (*Fig.* 2) *vas cylindricum AGFE verticaliter erectum, instructumque ad fundum tubo cylindrico horizontali FB utrinque aperto: Sit item, tam vas quam tubus, aqua jugiter plenus, ut nimirum tantum aquæ, eadem velocitate quam habet aqua in vase,* TAB. LXXXIX. N°. CLXXXVI. *Fig.* 2.

continuo ſuppeditetur per AE, quantum effluit per lumen BC. Dico velocitatem aquæ effluentis [ſi illa naſcatur ex quiete] convergere citiſſime, ad eam quæ acquiritur a gravi libere cadente per altitudinem $= \frac{hh}{hh-mm}a$.

Cujus veritas patet ex *Coroll.* 3 præced.

COROLLARIUM I.

Unde ſi lumen BC ſit valde parvum, reſpectu amplitudinis vaſis AE, adeo ut m negligi poſſit reſpectu h, prodibit $z = a$; hoc eſt, velocitas aquæ effluentis ex tubo, erit æqualis ei quam grave libere delapſum ex altitudine EF acquirit: Quod eſt Theorema notiſſimum; ſed ex principiis dynamicis nondum hucuſque demonſtratum; præſertim ſi adfuerit tubus BF adaptatus: cum antea creditum fuerit Theorema valere tantum pro parvo foramine ad F ſuppoſito.

COROLLARIUM II.

Quo majus eſt lumen BC, reſpectu amplitudinis vaſis AE, eo major fit velocitas maxima aquæ effluentis; aucto enim m, augetur valor fractionis $\frac{hh}{hh-mm}$, donec evadente $m = h$, velocitas maxima ſit infinita; quod verum eſſe vel hinc quoque patet, quia tunc & vas & tubus ſunt ejuſdem amplitudinis, formantque unum continuum tubum reflexum; adeoque vis ponderis aquæ, in parte AF ſemper plena, continuo accelerat totam maſſam aqueam, ut tandem ejus velocitas, tempore infinito generata, fiat & ipſa infinita. Nam dicendo longitudinem tubi $FC = b$, maſſa omnis aquæ in tubo reflexo AGC, erit $= ha + hb$; eaque non aliter accelerabitur, quam corpus aliquod ſolidum, quod animaretur vi acceleratrice $= \frac{ghb}{ha+hb} = \frac{ga}{a+b}$: tale utique corpus, cadendo per tempus infinitum, acquireret velocitatem infinitam.

Co-

COROLLARIUM III.

Si vero m majus esset quam h, id est, si tubus horizontalis amplior esset quam vas verticale; velocitas maxima nunquam & nequidem tempore infinito daretur: foret enim $\frac{hh}{hh-mm}$ negativum; indicio quod, durante fluxu in æternum, acceleratio aquæ effluentis incrementum capere non desinet. Hoc enim in casu, fiet in tubo gurges inversus, respiciens orificium B C, qui, ut ex sequentibus patebit, eam habet naturam, ut vim motricem adjuvet potius quam diminuat, dum sese quasi subducit pressioni a tergo venienti, quo aqua in vase liberius descendere queat.

SCHOLIUM.

Hucusque consideravimus vas & tubum aqua constanter plenum, atque effluentem aquam in maxima sua velocitate, adeoque æquabili seu uniformi; quo fit, ut nulla amplius requiratur vis motrix ad aquam accelerandam, neque per vas, neque per tubum; sed vis motrix p tota usurpetur ad coërcendum gurgitem, qui formatur ante ingressum ex spatio ampliori in angustius. Nunc contemplabimur velocitatem fluxus aquæ tanquam crescentem, atque initium suum a quiete sumentem; ita ut ad accelerationem procurandam, tam in vase quam in tubo, sua pariter peculiaris pars vis motricis p requiratur. Examinabimus primo casum, quo vas cum tubo constanter plenum supponitur.

XI.

Sit x longitudo spatii quam aqua ex quiete in tubo percurrit, erit $\frac{m}{h}x$ longitudo quam eodem tempore percurrit in vase. Sic pariter, existente velocitate in tubo $= v$, erit quoque velocitas in vase $= \frac{m}{h}v$; unde vis acceleratrix in tubo $= \frac{v\,dv}{dx}$,

eaque multiplicata per maſſam aquæ mb, dabit vim motricem $= \frac{mbvdv}{dx}$, quæ (per §. 2) translata in vas, dabit æquipollentem $\frac{hbvdv}{dx}$, a qua nimirum illa in tubo $\frac{mbvdv}{dx}$ produci poteſt. Ita quoque vis acceleratrix in vaſe $= \frac{mm}{hh} vdv : \frac{m}{h} dx = \frac{mvdv}{hdx}$, quæ ducta in maſſam ha, dat vim motricem $= \frac{mavdv}{dx}$ ad aquam in vaſe propellendam, atque ſic ſumma trium iſtarum virium motricium per gurgitem, per tubum, & per vas, debet æquare vim motricem totalem p: unde hæc nobis reſultat æquatio $\frac{hh-mm}{2h} vv + \frac{hbvdv}{dx} + \frac{mavdv}{dx} = p$. Eſto igitur, ut ante, p ipſum pondus columnæ aqueæ $= gha$, & fiat, ut in *Coroll.* 3, §. IX, $gz = \frac{1}{2} vv$, quibus ſubſtitutis, prodibit hæc æquatio $\frac{hh-mm}{h} z + \frac{hbdz}{dx} + \frac{madz}{dx} = ha$; ſeu $(hh - mm) zdx + (hhb + hma) dz = hhadx$, unde $dx = \frac{hhb + hma}{hha - hhz + mmz} dz$, quæ debite tractata & integrata per logarithmos, dabit $x = (\frac{hhb + hma}{hh - mm}) \times l (\frac{hha}{hha - hhz + mmz})$; unde progrediendo ad numeros [aſſumendo $1 = lf$] $z = (\frac{hha}{hh - mm}) \times (1 - 1 : f^{(hh - mm)x : (hhb + hma)})$.

Quod ſi aqua in vaſe [quod, brevitatis gratia, ſine tubo annexo tantum habeat foramen amplitudinis m] animetur gravitate g' diverſa a gravitate naturali g, invenietur $z = \frac{g' hha}{g(hh - mm)} \times (1 - 1 : f^{(hh - mm)x : (hhb + hma)})$.

COROLLARIUM.

Si $x = \infty$; id quod dat caſum maximæ velocitatis, ad quam fluxus con-

convergit, erit $1 : f^{(hh-mm)x:(hhh+hma)} = o$, adeoque $z = \frac{hha}{hh-mm}$ pro gravitate naturali g, quod omnino conforme est *Coroll.* 3, art. IX; atque si præterea m est infinite parvum respectu ipsius h, provenit $z = a$, prorsus ut habetur in *Coroll.* 1, §. X, quæ methodum egregie confirmant.

XII.

Expendamus nunc casum, ubi vas AF [Fig. 2] aqua non manet plenum, sed pro mensura aquæ effluentis paulatim exinanitur, ejusque superficies AE continuo descendit.

Finge aquam in tubo horizontali percurrisse longitudinem x, proinde ex eo effluxisse [suppono enim vas & tubum ab initio plenum esse] quantitatem aquæ $= mx$, hoc est = cylindro aqueo, cujus basis est m & longitudo x. Quod si igitur in EF, sumatur pars $EI = \frac{m}{h}x$, perspicuum est, horizontalem HI, esse locum superficiei supremæ, ad quam aqua descendit in vase, postquam aquæ pars mx effluxit per tubum. Restabit ergo in vase columna aquea $GI = ha - mx$, cujus pondus $g(ha - mx)$ jam est id ipsum quod vocavimus p. Sic itaque vis acceleratrix aquæ restantis in vase [quæ in §. XI generaliter inventa est $= \frac{mvdv}{hadx}$] si ducatur in massam aqueam, quæ nunc est $ha - mx$, habebimus vim motricem $= \frac{mvdv}{hdx}(ha - mx)$, quæ competit aquæ per vas detrudendæ; unde jam colligendo tres vires per gurgitem, per tubum, & per vas, aggregatumque æquando ipsi p, hoc est, ipsi $g(ha - mx)$ lucrabimur hanc æquationem $\frac{hh-mm}{2h}vv + \frac{hbvdv}{dx} + \frac{mvdv}{hdx}(ha - mx) = g(ha - mx)$; ubi substituendo gdz pro vdv, & gz pro $\frac{1}{2}vv$, ut fecimus in *Coroll.* 3, §. IX, mutabitur nostra æquatio in hanc aliam $\frac{hh-mm}{h}z + \frac{hbdz}{dx} + \frac{mdz}{hdx}(ha - mx) = ha - mx$; & multiplicando per hdx in hanc, $(hh - mm)zdx + hhbdz + mdz(ha - mx) = (hha - hmx)dx$.

dx. Quæ vera est æquatio, ex qua si eruatur valor ipsius z, habebitur altitudo, per quam grave libere delapsum acquiret velocitatem quæsitam, nempe æqualem illi quam habebit aqua in tubo, postquam quantitas mx ex eo effluxit.

Potest autem æquatio inventa, in qua indeterminatæ permixtæ reperiuntur, per regulas nostras, ope Lemmatis mox sequentis integrari; atque ita innotescet valor ipsius z in terminis finitis. Interim hoc loco ei negotio diutius non est immorandum: sufficit mihi Problema reduxisse ad æquationem differentialem, utendo principiis pure mechanicis, quod an a quoquam alio ante me præstitum fuerit, haud recordor me unquam vidisse. Sciendum vero ipsissimam hanc æquationem inveniri per methodum virium vivarum; ita ut, & hoc nomine, usus illarum atque bonitas sese commendet contra Adversarios.

COROLLARIUM I.

Ut determinetur maxima velocitas liquoris effluentis, tum & ea in vase descendentis, ponendum est tantum $dz = 0$: quo facto, æquatio nostra suppeditabit $(hh - mm)z = hha - hmx$, proinde $z = \frac{hha - hmx}{hh - mm}$, quod cum adhuc ipsum x incognitum in se contineat, nihil quidem determinat, nisi valor ipsius z simul etiam ex æquatione generali eruatur.

COROLLARIUM II.

Si m sit valde parvum respectu ipsius h; æquatio generalis hanc induit formam $zdx + bdz = adx$; unde $dx = \frac{bdz}{a-z}$: quod dat $z = a - a : f^{x:b}$. Ergo ut in hoc casu z sit *maximum*, oportet x esse infinitum, & tunc fiet $z = a$; quod quidem ex ipso $dx = \frac{bdz}{a-z}$, seu ex $dx(a-z) = bdz$ statim colligi potest; faciendo enim propter maximum z ipsum $dz = 0$, erit etiam $a - z = 0$, ac proinde $z = a$. Unde iterum

rum liquet, in vaſe ampliſſimo, aquam per anguſtiſſimum tubum effluentem ſtatim acquirere velocitatem maximam, ac poſtea ſemper æquabilem, atque æqualem ei quam grave libere cadens ex altitudine vaſis acquireret, ut ſupra in *Coroll.* 1, §. X, invenimus; hoc quippe in caſu, vas conſiderari poteſt tanquam ſemper plenum, quia, ob vaſis infinitam quaſi amplitudinem, reſpectu habito ad tubi anguſtiam, requireretur utique tempus etiam quaſi infinitum, antequam in illo deſcendat aqua ſenſibiliter.

XIII.

Ecce nunc alium caſum: Sit tubus [qui ab initio ante fluxum uſque ad C aqua plenus ponitur,] indefinite continuatus, ita ſcilicet, ut deſcendente aqua in vaſe, nihil extra tubum effluere poſſit, ſed ſemper quicquid liquoris ex vaſe deſcendit in tubum, id una cum eo quod jam ineſſe ſupponitur, junctim propulſum intra tubum fluere cogatur. Quæritur lex accelerationis & velocitas ipſa, pro quolibet ſpatio intra tubi cavitatem percurſo? Vis acceleratrix in tubo hic etiam, ut in §. XI oſtenſum eſt, erit $= vdv : dx$; ſed maſſa aquæ propellendæ nunc eſt $= mb + mx$, per quam vis acceleratrix $vdv : dx$ multiplicata, dat vim motricem in tubo $(mbvdv + mxvdv) : dx$, quæ tranſlata ad amplitudinem vaſis, dat vim motricem æquipollentem in vaſe $= (hbvdv + hxvdv) : dx$. Atque ſic, conjunctis tribus viribus motricibus per gurgitem, per tubum & per vas; iiſque æquatis vi motrici totali p, prodibit, pro vaſe ſemper pleno ab affluente nova aqua, hæc æquatio $\frac{hh - mm}{2h} vv + \frac{hbvdv + hxvdv}{dx} + \frac{mavdv}{dx} = p = ghb$ [conf. §. XI]: ſed pro vaſe nihil novi liquoris accipiente, hæc altera $\frac{hh - mm}{2h} vv + \frac{hbvdv + hxvdv}{dx} + \frac{mvdv}{hdx}(ha - mx) = p = g(ha - mx)$, [conf. §. XII]: ſubſtituto gz pro $\frac{1}{2}vv$, æquatio prior dat hanc $(hh - mm)zdx + (hhb + hma + hhx)dz = hhadx$; poſterior vero hanc

$(hh$

$(hh - mm)zdx + (hhb + hma + hhx - mmx)dz = (hha - hmx)dx$. Utraque autem æquatio integrari potest per Lemma supra promissum, quod nunc demonstro.

XIV.

LEMMA.

Sit æquatio integranda, [& quidem sine necessitate separandi indeterminatas] $\alpha z dx + (\zeta + \gamma x)dz = (\varepsilon + \theta x)dx$; scribo y pro $\zeta + \gamma x$, unde $dx = dy : \gamma$, & æquatio mutatur in hanc $\frac{\alpha}{\gamma} z dy + y dz = (\varepsilon + \theta x)dx$; qua multiplicata per $y^{\alpha:\gamma - 1}$ habebitur $\frac{\alpha}{\gamma} z y^{\alpha:\gamma - 1} dy + y^{\alpha:\gamma} dz = (\varepsilon + \theta x)dx \times y^{\alpha:\gamma - 1} = (\varepsilon + \theta x) \times \frac{1}{\gamma} (\zeta + \gamma x)^{\alpha:\gamma - 1} \gamma dx$. Integrando prodibit $y^{\alpha:\gamma} z = \int ((\varepsilon + \theta x) \times \frac{1}{\gamma} (\zeta + \gamma x)^{\alpha:\gamma - 1} \gamma dx) = \frac{1}{\alpha} (\zeta + \gamma x)^{\alpha:\gamma} \times (\varepsilon + \theta x) - \int (\frac{\theta}{\gamma\alpha} (\zeta + \gamma x)^{\alpha:\gamma} \gamma dx) = \frac{1}{\alpha} (\zeta + \gamma x)^{\alpha:\gamma} \times (\varepsilon + \theta x) - \frac{\theta}{\alpha\alpha + \gamma\alpha} (\zeta + \gamma x)^{\alpha:\gamma + 1} - \frac{\varepsilon}{\alpha} \zeta^{\alpha:\gamma} + \frac{\theta}{\alpha\alpha + \gamma\alpha} \zeta^{\alpha:\gamma + 1}$. Notetur hic duos postremos terminos datos adjectos esse, more solito, ad rectificandam æquationem; ut nimirum evanescente x, etiam evanescat z. Dividatur nunc æquatio per $y^{\alpha:\gamma}$, hoc est $(\zeta + \gamma x)^{\alpha:\gamma}$, & emerget valor verus ipsius z, nempe $z = \frac{1}{\alpha} (\varepsilon + \theta x) - \frac{\theta}{\alpha\alpha + \gamma\alpha} (\zeta + \gamma x) + (\frac{\theta}{\alpha\alpha + \gamma\alpha} \zeta^{\alpha:\gamma + 1} - \frac{\varepsilon}{\alpha} \zeta^{\alpha:\gamma}) \times (\zeta + \gamma x)^{-\alpha:\gamma}$.

XV.

Ut igitur hujus applicatio fiat ad priorem æquationem $(hh - mm)zdx + (hhb + hma + hhx)dz = hhadx$, erit hic $\alpha = \frac{}{hh}$

$hh - mm$, $\mathfrak{G} = hhb + hma$, $\gamma = hh$, $\varepsilon = hha$ & $\theta = 0$, quibus surrogatis obtinebitur $z = \frac{hha}{hh-mm} - \frac{hha}{hh-mm}(hhb + hma)^{(hh-mm):hh} \times (hhb + hma + hhx)^{(-hh+mm):hh}$, vel quod idem est $z = \frac{hha}{hh-mm} \times (1 - (\frac{hh+ma}{hh+ma+hx})^{(hh-mm):hh})$. Sin vero ad posteriorem, ubi $\alpha = hh - mm$, $\mathfrak{G} = hhb + hma$, $\gamma = hh - mm$, $\varepsilon = hha$, $\theta = -hm$, resultat $z = \frac{hha - hmx}{hh-mm} + \frac{hm}{2(hh-mm)^2} \times (hhb + hma + hhx - mmx) + (\frac{-hm}{2(hh-mm)^2} \times (hhb + hma)^2 - \frac{hha}{hh-mm}(hhb + hma)) \times (hhb + hma + hhx - mmx)^{-1}$, quibus in ordinem digestis, rite procedendo, emerget tandem $z = (\frac{hhax - \frac{1}{2}hmxx}{hhb + hma + hhx - mmx})$.

COROLLARIUM I.

Si m respectu h est valde parvum, habebitur pro vase semper pleno $z = \frac{ax}{b+x}$; pariter pro altero casu prodit $z = \frac{ax}{b+x}$ quod quidem omnino ita evenire debet; quia enim, ob m infinite parvum, aqua tempore infinito opus habet ad effluendum, antequam suprema ejus superficies in vase ampliſſimo sensibiliter descendat; patet utique perinde esse ac si semper plenum maneret vas, ac proinde hi duo casus in eundem prorsus recidunt.

COROLLARIUM II.

Si $b = 0$, hoc est, si in tubo horizontali indefinite longo FB, ab initio fluxus nihil aquæ continetur; erit pro casu vasis semper pleni $z = \frac{hha}{hh-mm} \times (1 - (\frac{ma}{ma+hx})^{(hh-mm):hh})$; sed pro altero casu nihil novi liquoris accipientis, erit $z = hhax$

$\frac{hhax - \frac{1}{2}hmxx}{hma + hhx - mmx}$. In hoc postremo casu hoc quoque notari dignum est, quod eo momento, quo superficies liquoris ad fundum usque vasis descenderit, id quod fit sumendo $x = \frac{h}{m}a$; futurum sit $z = \frac{1}{2}a$, hoc est, velocitas aquæ in tubo, post totalem vasis depletionem, erit ea quam grave acquireret cadendo ex dimidia vasis altitudine.

XVI.

De Canali trium pluriumve Tuborum.

TAB. LXXXIX. N°. CLXXXVI. *Fig.* 3.

Sit nunc (Fig. 3) canalis AL, constans tribus tubis AD, GC, BL, ac totus aqua plenus: Sitque vis motrix p, quæ expansa uniformiter per superficiem AE, eandem premat vel urgeat. Quæritur acceleratio & velocitas actualis, qua cum aqua ex tubo BL erumpit?

Ante omnia hic notandum, duos fieri gurgites brevissimos; unum in transitu per GF, alterum in transitu per BK, qui singuli suam propriam requirunt vim motricem, transferendam ad amplitudinem AE, quibus dein addendæ sunt vires motrices columnarum aquearum in singulis tubis contentarum, post translationem earum virium ad amplitudinem AE: quo facto, summa omnium earum virium translatarum æquanda est vi motrici totali p, unde resultabit æquatio quæsita.

XVII.

Sint igitur longitudines tuborum $AG = a$, $GB = b$, $BM = c$; eorumque amplitudines $AE = h$, $GF = m$, $BK = n$. Dicatur hic etiam velocitas in tubo ultimo $BL = v$, velocitas in tubo secundo $GC = u = \frac{n}{m}v$. Erit itaque, per ratiocinium §. IX adhibitum, vis motrix in superficie AE, requisita

pro

pro formando gurgite per GF $= \frac{hh - mm}{2h} uu =$ [substituendo valorem ipsius uu qui est $\frac{nn}{mm} vv$] $\frac{hhnn - mmnn}{2hmm} vv$; item vis motrix in tubo GC requisita pro gurgite per BK $= \frac{mm - nn}{2m} vv$, hæc vero translata ad amplitudinem AE, faciendo ut m ad h, ita $\frac{mm - nn}{2m} vv$ ad $\frac{hmm - hnn}{2mm} vv$, dat vim motricem in tubo primo AD, ad gurgitem producendum per BK, adeoque ambæ vires simul sumptæ $\frac{hhmn - mmnn}{2hmm} vv$ $+ \frac{hmm - hnn}{2mnn} vv$, hoc est $\frac{hhmm - mmnn}{2hmm} vv$, seu $\frac{hh - nn}{2h} vv = p$. Atque ita determinata est velocitas fluxus per tres tubos, postquam illa ad æquabilitatem pervenit.

COROLLARIUM.

Hinc patet aquam per tres tubos eodem modo moveri, ac si, secundo remoto, tertius immediate primo esset adaptatus; posito scilicet, fluxum ad summam & æquabilem velocitatem pervenisse: imo porro nunc liquet, quotquot supponantur tubi, vires motrices per gurgites singulos translatas ad tubum primum, & junctim sumptas, æquivalere vi motrici unicæ in tubo primo adhibendæ ad gurgitem unicum, qui fieret, adaptando immediate tubum ultimum ad tubum primum; adeoque eandem, in utroque casu, sequi æquabilem velocitatem, ad quam convergit fluxus, sive transeat aqua per totum canalem ex omnibus tubis compositum, sive tantum omissis intermediis per primum & ultimum sibi invicem immediate connexos. Omnia igitur, quæ supra de æquabili velocitate per duos tubos demonstravimus, applicanda sunt ad canalem ex quot libuerit tubis constantem.

XVIII.

Considerandæ nunc venit acceleratio per canalem multorum

tuborum, quando nimirum fluxus aquæ incipit a quiete; primo tamen tubo semper pleno existente, per affluxum novæ aquæ descendenti eadem velocitate succedentis. Hanc in rem, nihil aliud faciendum, quam ut vis motrix pro massa aquea protrudenda per singulos tubos sumpta, transferatur ad amplitudinem tubi primi; aggregatum harum virium motricium translatarum, si addatur ad vim motricem per gurgites, hoc est, per illum unicum qui fieret si ultimus tubus immediate primo adaptetur; habebitur vis omnium, quæ æqualis est facienda ipsi *p*.

XIX.

Ut hanc regulam applicemus ad canalem trium tuborum, quorum longitudines sint *a*, *b*, *c*; amplitudines *h*, *m*, *n*: sitque *x* longitudo spatii quam aqua in tubo ultimo, seu tertio, ex quiete incipiens percurrit, & *v* velocitas acquisita in hoc tubo. Erit, ad imitationem operationis §. XI, $\frac{n}{m}x$ longitudo quam aqua eodem tempore percurrit in tubo secundo, & $\frac{n}{m}v$ ejus velocitas acquisita. Item $\frac{n}{b}x$ longitudo percursa in tubo primo, & $\frac{n}{b}v$ velocitas acquisita. Hinc vis acceleratrix in tubo tertio $= \frac{v\,dv}{dx}$, eaque multiplicata per massam aqueam in hoc tubo *nc*, dabit vim motricem $= \frac{ncv\,dv}{dx}$, quæ translata in tubum primum, dabit æquipollentem $= \frac{hcv\,dv}{dx}$. Sic quoque vis acceleratrix in tubo secundo $= \frac{nn}{mm}v\,dv : \frac{n}{m}dx$ $= \frac{nv\,dv}{m\,dx}$, quæ ducta in massam aquæ *mb* tubi secundi, dat vim motricem $\frac{nbv\,dv}{dx}$, quæ translata in tubum primum, gignit $\frac{bnbv\,dv}{m\,dx}$. Sic tandem etiam vis acceleratrix in tubo primo $=$ $\frac{nn}{bb}v\,dv$:

$\frac{nn}{hh} vdv : \frac{n}{h} dx = \frac{nvdv}{hdx}$, ducta in massam tubi primi ha, dat vim motricem aquæ in tubo primo $= \frac{navdv}{dx}$, quæ cum jam sit in tubo primo, ulterius non est transferenda; tres illæ vires sunt igitur $\frac{hcvdv}{dx}$, $\frac{hnbvdv}{mdx}$, $\frac{navdv}{dx}$, quarum summa addita ad vim per gurgites, habebitur $\frac{hh - nn}{2h} vv + (hc + \frac{hnb}{m} + na) \frac{vdv}{dx} =$ vi totali p.

XX.

Sint nunc quatuor tubi, quorum longitudines a, b, c, & amplitudines h, m, n, q, sitque x longitudo in ultimo tubo percursa, v velocitas acquisita in ultimo tubo. Ad observandam uniformitatem, & legem progressionis ab uno tubo ad alterum, incipiam a primo, in quo, vis acceleratrix $= \frac{qq}{hh} vdv : \frac{q}{h} dx$, est enim velocitas $= \frac{q}{h} v$, & elementum velocitatis $= \frac{q}{h} dv$; ut & elementum spatii percurrendi $= \frac{q}{h} dx$; habetur itaque ex lege accelerationis, vis acceleratrix $= \frac{qq}{hh} vdv : \frac{q}{h} dx = \frac{qvdv}{hdx}$ eamque multiplicando per massam aquæ movendæ, hæc oritur vis motrix $hqavdv : hdx$, quæ quia jam est in primo tubo, non indiget ulteriori translatione; sed in tubo secundo, vis acceleratrix $= \frac{qq}{mm} vdv : \frac{q}{m} dx = \frac{qvdv}{mdx}$, ducta in massam aqueam mb, dat vim motricem in tubo secundo $mqbvdv : mdx$, quæ translata in tubum primum, dat æquipollentem $= hqbvdv : mdx$; eodem modo vis motrix translata ex tubo tertio in primum, erit $hqcvdv : ndx$, & vis motrix translata ex quarto in primum $= hqevdv : qdx$. Omnes ergo simul sumptæ $= \frac{hqavdv}{hdx} + \frac{hqbvdv}{mdx} + \frac{hqcvdv}{ndx} + \frac{hqevdv}{qdx} =$

$= (\frac{a}{b} + \frac{b}{m} + \frac{c}{n} + \frac{e}{q}) \times \frac{bqvdv}{dx}$. Ergo generaliter pro quocunque tuborum numero, quorum longitudines sint a, b, c, . . . π, & amplitudines b, m, n, . . . ω, erit summa omnium virium motricium in tubum primum translatarum $= (\frac{a}{b} + \frac{b}{m} + \frac{c}{n} + \frac{e}{q} \ldots + \frac{\pi}{\omega}) \times \frac{b\omega vdv}{dx}$; cui si addatur vis motrix $\frac{bb - \omega\omega}{2b} vv$, pro gurgitibus universis, emerget vis motrix totalis ponenda æqualis ipsi p; unde resultat hæc æquatio $\frac{bb - \omega\omega}{2b} vv + (\frac{a}{b} + \frac{b}{m} + \frac{c}{n} \ldots . + \frac{\pi}{\omega}) \times \frac{b\omega vdv}{dx} = p$; vel scribendo gz pro $\frac{1}{2} vv$, hæc altera $\frac{bb - \omega\omega}{b} z + (\frac{a}{b} + \frac{b}{m} + \frac{c}{n} \ldots + \frac{\pi}{\omega}) \times \frac{b\omega dz}{dx} = \frac{1}{g} p$, vel $(bb - \omega\omega) zdx + (\frac{a}{b} + \frac{b}{m} + \frac{c}{n} \ldots + \frac{\pi}{\omega}) bb\omega dz = \frac{b}{g} pdx$.

COROLLARIUM I.

Si longitudines a & π tuborum primi & ultimi, nec non ongitudines intermediorum manent invariabiles, primi nempe per continuum affluxum & ultimi per effluxum, erit series $\frac{a}{b} + \frac{b}{m} + \frac{c}{n} \ldots + \frac{\pi}{\omega}$ constans, quæ vocetur M, & $p = gha$; unde hæc æquatio prodit $\frac{bb - \omega\omega}{b} z + \frac{Mb\omega dz}{dx} = ha$, vel $(bb - \omega\omega) zdx + Mbb\omega dz = bbadx$; cujus x construitur per logarithmos in z datos, ipsum vero z, per numerales datos in x.

COROLLARIUM II.

Quod si vero, nulla affluente aqua nova, depleatur primus tubus, effluente nimirum per ultimum datæ longitudinis; sicuti fieret

fieret, si primus tubus instar vasis verticaliter erecti, contineret liquorem proprio suo pondere pressum, dum per canalem horizontalem quem reliqui constituunt expelleretur: erit, si x vocetur spatium per ultimum tubum ex quiete percursum, altitudo liquoris restantis in vase cylindrico $= a - \frac{\omega x}{b}$, adeoque a serie $\frac{a}{b} + \frac{b}{m} + \frac{c}{n} \ldots + \frac{\pi}{\omega}$, auferendum jam est $\frac{\omega x}{bb}$ & pro $\frac{1}{g} p$ scribi debet $ha - \omega x$; id quod dat hanc æquationem $(hh - \omega\omega) z dx + Mhh\omega dz - \omega\omega x dz = (hha - h\omega x) dx$; quæ, per *Lemma* §. XIV, potest integrari.

COROLLARIUM III.

Porro si tubus ultimus sit indefinite prolongatus, ita ut aquæ superficie suprema descendente in vase, aqua ex tubo ultimo non quidem effluat, sed in eo continuo magis magisque protrudatur; scribendum est in serie, non tantum $a - \frac{\omega x}{b}$ pro a; sed etiam $\pi + x$ pro π, & ita, pro hoc casu, acquiremus hanc alteram æquationem $(hh - \omega\omega) z dx + Mhh\omega dz - \omega\omega x dz + hhx dz = (hha - h\omega x) dx$. Quæ per idem *Lemma* integrabilis est.

COROLLARIUM IV.

Si computando vas ipsum pro primo tubo, habeatur $\frac{a}{b} = \frac{b}{m} = \frac{c}{n} \ldots = \frac{\pi}{\omega}$, hoc est, si longitudines tuborum, quorum numerus sit N, ubique sint proportionales suis respective amplitudinibus; generalis nostra æquatio mutatur in hanc $(hh - \omega\omega) z dx + Nha\omega dz = \frac{1}{g} hp dx$.

COROL-

COROLLARIUM V.

Si vero, excepto vase vel tubo primo, habeatur $\frac{b}{m} = \frac{c}{n} \ldots = \frac{\pi}{\omega}$, sitque numerus reliquorum tuborum $= N$, erit utique $(bb - \omega\omega)\, z\,dx + ha\omega\,dz + \frac{Nbb\omega\,dz}{m} = \frac{1}{g}hp\,dx$.

COROLLARIUM VI.

Esto nunc numerus tuborum infinitus, sed unusquisque eorum, excepto primo, longitudinis infinite parvæ, ita ut omnes simul sumpti repræsentent canalem conoidicum truncatum, cujus amplitudo antica $= m$, & postica $= \omega$, qualis est (Figura 4) RSTV, qui si concipiatur sectus duobus planis proximis sr, tv, ipsis SR, TV, parallelis, erit $srvt$ unus ex istis tubulis, habens pro longitudine rv elementum longitudinis RV totius canalis, & pro amplitudine planum sr. Unde ut habeatur summa seriei $\frac{b}{m} + \frac{c}{n} \ldots + \frac{\pi}{\omega}$, integrari debet $\frac{vr}{sr}$, quod in pluribus exemplis fieri potest algebraice, ex. gr. si ST sit linea recta, hoc est, si SRVT sit conus decurtatus ordinarius: Item si ST sit arcus Hyperbolæ cujusvis generis ad asymptotum RV.

TAB. LXXXIX. N°. CLXXXVI. *Fig.* 4.

XXI.

Illustremus rem ipsam in priori exemplo. Sit nempe SRVT conus decurtatus, cujus amplitudo antica $SR = m$, postica $TV = \omega$; proinde earum semidiametri ut $\sqrt{m}$ & $\sqrt{\omega}$: Porro dicatur ejus abscissa $Vv = t$; ejus elementum $vr = dt$; semidiameter amplitudinis $tv = y$; totaque tubi longitudo $RV = L$, invenietur $y = (t\sqrt{m} - t\sqrt{\omega} + L\sqrt{\omega}) : L$; ipsa vero amplitudo sr, quæ est ut yy, $= (t\sqrt{m} - t\sqrt{\omega} + L\sqrt{\omega})^2 : L^2$;

quare

quare $\frac{vr}{sr} = \frac{L^2\,dt}{(t\sqrt{m} - t\sqrt{\omega} + L\sqrt{\omega})^2}$; cujus integrale debito modo rectificatum $= \frac{Lt}{t\sqrt{m\omega} - t\omega + L\omega}$, adeoque per totum canalem RSTV, sumendo nempe Vv, seu $t = VR = L$, haberur integrale quæsitum $= \frac{L}{\sqrt{m\omega}} = \frac{b}{m} + \frac{c}{n} \ldots + \frac{\pi}{\omega}$. Atque sic æquatio nostra generalis §. XX, $(hh - \omega\omega)z\,dx + (\frac{a}{b} + \frac{b}{m} + \frac{c}{n} \ldots + \frac{\pi}{\omega})\,hh\omega\,dz = \frac{h}{g}p\,dx$, dabit, pro canali seu tubo conico, cujus longitudo L, & duæ amplitudines extremæ sunt m & ω, existente vasis altitudine a & amplitudine b, hanc æquat. $(hh - \omega\omega)z\,dx + ha\omega\,dz + \frac{hhL\omega dz}{\sqrt{m\omega}} = \frac{1}{g}hp\,dx$.

XXII.

Pro casu *Coroll.* 1, §. XX, erit quoque $(hh - \omega\omega)z\,dx + Mhh\omega\,dz = hha\,dx$, ubi $M = \frac{a}{b} + \frac{L}{\sqrt{m\omega}}$. Pro casu *Coroll.* 2, §. ejusdem, erit sumpto pro M eodem, $(hh - \omega\omega)z\,dx + Mhh\omega\,dz - \omega\omega x\,dz = (hha - h\omega x)\,dx$. Pro casu *Coroll.* 3, intelligendum est tubum conicum, in extremitate sibi adjunctum habere tubum cylindricum indeterminatæ longitudinis, & quidem amplitudinis ω, ita ut in eo aqua propulsa semper contineatur, atque percurrat ab initio motus spatium x; erit tunc $(hh - \omega\omega)z\,dx + Mhh\omega\,dz - \omega\omega x\,dz + hhx\,dz = (hha - h\omega x)\,dx$.

XXIII.

SCHOLIUM GENERALE.

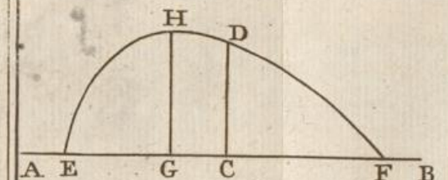
Possent ex his derivari plura alia Corollaria, utilia non minus quam curiosa & elegantia. Nam quæ ad hanc spectant materiam, omne suum fundamentum habent in jam traditis & explicatis; licet id non indicaverim expressis verbis: ex. gr. sup-

posuimus quidem aquam, aliumve liquorem, in primo duntaxat tubo tanquam in vase gravitare, indeque urgeri per canalem situm horizontalem habentem, per quem dum movetur aqua, destituitur quasi sua propria gravitate. Interim si in ipso canali, seu in tubis qui illum componunt, retineat quoque gravitatem suam, sive totalem, sive saltem partem, sicuti accideret si tubi non essent horizontales, sed vel verticales, vel diversimode inclinati ad horizontem; id nullam prorsus habet difficultatem: potest enim aquæ propria gravitas ex quolibet tubo per §. II, transferri in vas vel in tubum primum, adeo ut aqua in reliquis tubis considerari possit tanquam destituta gravitate; sed translatæ gravitationes, una cum pondere aquæ in vase vel tubo primo junctim sumptæ, spectari queant pro eo quod vocavimus p, seu vim motricem fundamentalem, a qua fluxus totius massæ aqueæ generatur. Ut scilicet si canalis EGBL (*Fig.* 5) constaret tribus tubis diversæ amplitudinis AD, GC, BL, quorum primus AD haberet amplitudinem AE vel GD, alter GC amplitudinem GF vel BK, tertius BL amplitudinem BK vel ML: primus vero esset verticalis, secundus faceret cum horizonte angulum GBH, tertius angulum BMO: Sint amplitudines $AE = h$, $GF = m$, $BK = n$; vis gravitatis seu acceleratrix naturalis $= g$, & vis motrix in tubo AD aqua pleno $= gh \times AG$. Item $GB : GH = g : \frac{g \times GH}{GB}$ = vi acceleratrici liquoris in tubo GC. Item $BM : BO = g : \frac{g \times BO}{BM}$ = vi acceleratrici aquæ in tubo BL. Hinc $\frac{g \times GH}{GB} \times m \times GB$, seu $gm \times GH$ dabit vim motricem aquæ tubi secundi, similiter $gn \times BO$ dat vim motricem aquæ in tubo tertio. Sed transferendæ jam sunt vires motrices ex tubis obliquis GC & BL in verticalem, faciendo $m : h = gm \times GH : gh \times GH$, & $n : h = gn \times BO : gh \times BO$. Hunc itaque in modum, considerari potest aqua universa in tubis tanquam carens gravitate, sed ejus loco pressa prima columna AD vi motrice expansa uniformiter

TAB. LXXXIX. N°. CLXXXVI. *Fig.* 5.

per

N.° CLXXXIII



N.° CLXXXIV

Fig. 2.

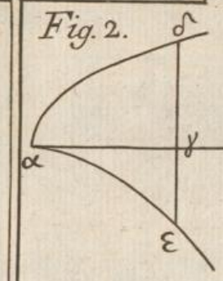
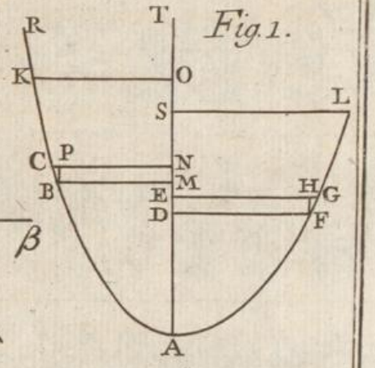


Fig. 1.



N.° CLXXXVI

Fig. 1.

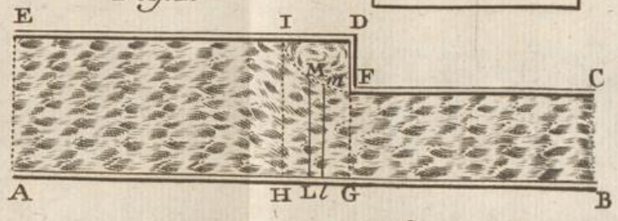


Fig. 2.

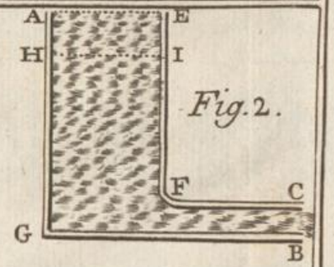


Fig. 3.

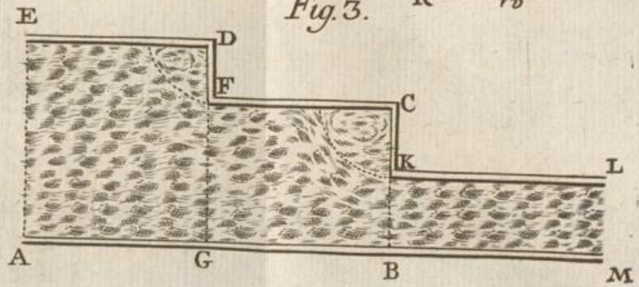


Fig. 4.

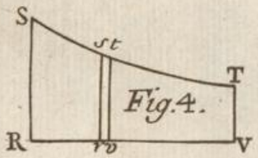
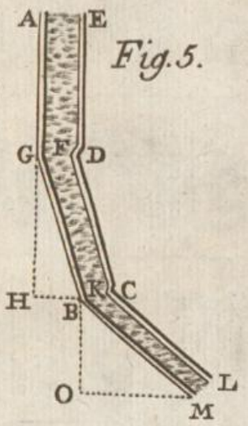


Fig. 5.



per ſuperficiem AE, quæ vis eſſet $= gh(AG+GH+BO)$ $=$[ob $AG+GH+BO =$ toti altitudini verticali canalis, quæ ſit A] $gh \times A = p$. Atque ita reduximus hunc caſum alioſque ſimiles ad Methodum noſtram generalem.

Nota; ſi unus pluresve ex tubis oblique ſurſum dirigatur; erit, pro eo aut pro iis, vis motrix translata in tubum primum negativa, eritque ſumenda pro A exceſſus quo affirmativarum ſumma ſuperat ſummam negativarum, aut viciſſim. Uno verbo, A erit exceſſus vel defectus quo ſuperficies aquæ in primo tubo altior eſt humiliorve ſupra horizontalem, quam eſt ſuperficies aquæ in tubo ultimo. Hoc inſervit determinationi legis ſecundum quam liquores oſcillantur in tubis recurvis qualibuſcunque. Huc etiam refer Problema ſequens a Filio mihi propoſitum, ante ſex ſeptemve annos, ſed paulo generalius conceptum.

XXIV.

PROBLEMA HYDRAULICUM.

ABCD eſt vas aqua plenum uſque ad EF; GI eſt tubus cylindricus, cujus pars KI aqua pariter plena eſt: Obducto pollice ſuper orificium GO, tubus immergitur aquæ in vaſe contentæ, ſed ita tantum, ut pars tubi MI, major quam KI, intra aquam externam penetret uſque ad MN: Remoto nunc pollice, aſcendet [*ob prævalentem preſſionem aquæ externæ*] *ſuperficies KL, atque ab impetu concepto, pertinget ſupra ſuperficiem EF uſque ad PQ. Quæritur altitudo MP vel NQ, quouſque nempe aqua in tubo aſcendere valet?* TAB. XC. Fig. 6.

SOLUTIO.

Dicatur pars tubi immerſa $HM = a$, pars ejus HK primitus aqua plena $= b$ minor quam a, amplitudo vaſis $EF = h$, amplitudo tubi GO, vel $HI = m$. Jam vero aqua tubum circumdans, & deorſum nitens ſuo pondere, per orificium apertum HI ingredi & aſcendere conatur, propellendo partem aquæ HL ſuperincumbentem. Actionem iſtam, atque effectum hoc

modo concipio. Sit ad orificium HI adaptatus alius tubus deorsim spectans, amplitudinis vasis EF = h, & altitudinis HM = a. Sit hic tubus plenus aqua, sed tali aqua, quæ levitaret, hoc est, quæ sursum niteretur, & quidem tanta vi præcise quanta deorsum gravitat aqua [cujus loco illa in tubo per mentis fictionem substituitur] in vase altitudinis MH: proinde erit vis motrix aquæ in hoc fictitio tubo sursum tendentis = $ghdz$ & sic, hujus respectu, erit vis motrix in tubo HO aquæ HL negativa = gmb, quæ translata in tubum fictitium dat ghb, quæ utpote contraria ipsi gha, ab hac subducenda est, & relinquet $gha - ghb$, seu $gh(a - b)$ pro vi motrice quam vocavimus p; cui igitur æquandæ sunt vires motrices, quæ a fluxu generantur per gurgitem formandum ad ingressum HI, per tubum HO fluendo, & per tubum fictitium ascendendo. Hinc, si x vocetur spatium ab aqua intra tubum HO percursum, incipiendo a KL, adeoque spatium quod superficies aquæ in tubo fictitio percurrit ascendendo = $\frac{m}{h}x$; ad imitationem ratiocinii §. XIII, habebimus vim acceleratricem in tubo HO = $\frac{vdv}{dx}$, quæ, multiplicata per massam aquæ sursum pellendæ $mb + mx$, dat vim motricem in hoc tubo = $(mb + mx)\frac{vdv}{dx}$, transferendam in tubum fictitium, ut inde habeamus vim motricem æquipollentem = $(hb + hx)\frac{vdv}{dx}$. Et cum præterea in tubo fictitio [in quo aqua ascendit velocitate $\frac{m}{h}v$ per spatium $\frac{m}{h}x$] vis motrix propria, non amplius transferenda, sit = $(ha - mx)\frac{mvdv}{hdx}$, quibus ergo binis viribus, addita porro ea quæ ad formandum gurgitem requiritur, obtinebimus vim motricem totalem $\frac{hh - mm}{2h}vv + (hb + hx)\frac{vdv}{dx} + (ha - mx)\frac{mvdv}{hdx}$. Verum quia hic p est = $gh(a - \frac{m}{h}x - b - x)$ seu $g(ha - hb - mx - hx)$, resultabit

reſultabit æquatio pro determinanda velocitate v, nempe hæc $\frac{hh-mm}{2h} vv + (hb+hx+ma-\frac{mm}{h}x)\frac{vdv}{dx} = g(ha-hb-mx-hx)$; qua reducta, ſcriptoque gz pro $\frac{1}{2}vv$, fiet $(hh-mm)zdx+(hhb+hhx+hma-mmx)dz=(hha-hhb-hmx-hhx)dx$, quæ per *Lemma* §. XIV eſt integrabilis. Si vas AC, vel tubus fictitius, eſt amplitudinis per quam magnæ, [qui Problematis tacitus eſt ſenſus] emergit æquatio multo ſimplicior [neglectis nempe terminis in quibus m reperitur, cæteriſque per hh diviſis] ſcilicet hæc $zdx+(b+x)dz=(a-b)dx-xdx$; quæ integrata dat $(b+x)z=(a-b)x-\frac{1}{2}xx$, unde ſi $z=0$, hoc eſt, ſi ſuperficies KL ceſſat aſcendere, id quod fit, quando ad maximam, quouſque aſcendere poteſt, altitudinem PQ pervenit; oportet ut tunc etiam $(a-b)x-\frac{1}{2}xx$ ſit $=0$, quocirca $a-b=\frac{1}{2}x$, ſeu $x=2a-2b$; ergo KP $=2$KM.

XXV.

Idem Problema ſolvi poteſt facilius, ſi conſideretur tanquam caſus §. XIII. Concipiendo ſcilicet in *Fig.* 2 vas AF aqua plenum ab initio fluxus habere altitudinem $=a=$ MH in *Fig.* 6, & tubum FC, qui in *Fig.* 2 eſt horizontalis, jam eſſe verticaliter erectum, atque indefinite continuatum, in quo pars infima longitudinis $b=$ HK, in *Fig.* 6, ſit ab initio aqua plena. Jam ergo, ſi a prævalente preſſione columnæ aqueæ in vaſe, aqua in tubo ſupra b aſcendit per ſpatium $=x$, & proin in vaſe deſcendit per ſpatium $\frac{m}{h}x$, habebimus vim motricem in vaſe oriundam a pondere ſuperſtitis aquæ $=g(ha-mx)$, ac vim motricem in tubo verticali, priori oppoſitam, a pondere totius aquæ in tubo exiſtentis venientem $=g(mb+mx)$, quæ translata in vas dat $g(hb+hx)$, a priori $g(ha-mx)$ ſubtrahendum, & ita relinquetur $p=g(ha-hb-hx-mx)$, cui æquari debet ſumma trium virium motricium a motu generandarum per gurgitem, per tubum & per vas, ut inveni-

TAB. LXXXIX. N°. CLXXXVI *Fig.* 2.

TAB. XC. *Fig.* 6.

mus §. XIII; quo facto, hæc ſuppeditatur æquatio $\frac{hh-mm}{2h} vv + \frac{(hbvdv + hxvdv)}{dx} + \frac{mvdv}{hdx}(ha-mx) = p = g(ha-hb-hx-mx)$; quæ, conjunctis conjungendis, hanc habebit formam $\frac{hh-mm}{2h} vv + (hb+hx+ma-\frac{mmx}{h})\frac{vdv}{dx}, = g(ha-hb-hx-mx)$, prorſus eandem quam modo ſupra invenimus.

XXVI.

Ex Theoria noſtra hucuſque expoſita, reddi poteſt ratio phyſica [quam nec NEWTONUS, nec quiſquam alius recte dedit, ex principiis nempe pure dynamicis] cur ſcilicet corpus cylindricum ſolidum, quod uniformiter movetur, baſi ſua antrorſum verſa, in fluido continuo infinito ejuſdem cum corpore denſitatis, offendat reſiſtentiam æqualem ponderi corporis cylindrici; poſito nimirum, velocitatem corporis eſſe æqualem illi quam grave, libere cadendo, ex altitudine æquali lateri cylindri poſſet acquirere. Ex pluribus, quæ mihi ſunt, demonſtrationibus, hanc dare lubet Theoriæ noſtræ Hydraulicæ in hoc ſcripto ſtabilitæ innixam.

TAB. XC. *Fig.* 7. Sit (Fig. 7) cylindrus RMNS, qui moveatur ſecundum directionem lateris MN, in fluido ſtagnante, æque denſo, continuo & infinito. Dicatur velocitas cylindri $= v$, latus MN $= a$, baſis ſeu amplitudo NS $= h$. Fingamus loco cylindri ſolidi eſſe tubum MS eadem materia fluida plenum, & per hunc tubum quieſcentem [ubi præter figuram nihil aliud conſidero] fluere, continua & æquabili velocitate v, integrum cylindrum fluidum, ita ut tubus ſemper plenus maneat, & quantum per NS effluit, tantundem per MR eadem promptitudine reſarciatur per novum affluxum; attendenti fit ſtatim manifeſtum, cylindrum hunc fluidum, in effluxu per NS, eandem prorſus offendere vim reſiſtentem, ab allapſu ad fluidum ſtagnans externum & motui oppoſitum, quam offenderet ipſe cylindrus ſolidus; quia cylindrus fluidus, dum movetur per tubum, haberi poteſt

poteſt pro ſolido, cæteræque omnes circumſtantiæ ſunt pares. Videndum ergo eſt ſolum modo, quanta ſit reſiſtentia quam patitur fluidum egrediens in ipſo egreſſus momento. Verum evidens eſt, hanc reſiſtentiam oriri a gurgite TNSV, qui formatur pone orificium tubi NS; cujus gurgitis figura hæc eſſe debet, ut, in diſtantia quantumvis parva, habeat aſymptoton FG perpendicularem ad directionem axis tubi; propterea quoniam, ob decreſcentem promptiſſime & omnino evaneſcentem motum fluidi egreſſi, amplitudines gurgitis viciſſim accreſcere, ac breviſſimo tempore veluti in infinitum dilatari debent: ſuppono enim fluidum ex tubo egrediens non eſſe permiſcibile cum altero extra ſtagnante. Hinc per ea quæ §. IX demonſtrata ſunt, & quia ultima velocitas in gurgite eſt $= v$; erit vis per gurgitem $= \frac{1}{2} hvv$: adeoque, ob conſtantem velocitatem in tubo, erit per *Coroll.* 2 §. IX, $\frac{1}{2} hvv = p = ghz$, hoc eſt $\frac{1}{2} vv = gz$; hinc ſcribendo gz pro $\frac{1}{2} vv$, erit $z = a$. Oporret ergo velocitatem requiſitam fluidi in tubo, ad id ut fiat reſiſtentia æqualis ponderi cylindrici, eam eſſe debere, quam acquireret grave libere cadens ex altitudine $= a$. *Q. E. D.*

COROLLARIUM.

Ex demonſtrata hac fundamentali proprietate [antea nondum ſatis accurate ſtabilita] ſequuntur ultro omnia, quæ de reſiſtentiis fluidorum continuorum & non elaſticorum vulgo traduntur: Scilicet reſiſtentiæ, in hujuſmodi fluidis, perpendiculariter in plana oppoſita corporum exercitæ, ſunt in ratione compoſita ex duplicata velocitatis relativæ & ſimplici denſitatis fluidi. Ex hoc denique reliqua deducuntur.

XXVII.

De preſſione fluidi in fundum vaſis cylindrici (ſine annexo tubo) per foramen effluentis.

Eſto [Fig. 8] vas cylindricum AF fluido conſtanter plenum, cujus amplitudo $AE = h$, longitudo AG vel $EF = a$, amplitudo TAB. XC. *Fig.* 8.

plitudo foraminis GB $= m$. Habeat fluidum in egreſſu, poſtquam aliquandiu jam effluxit, velocitatem $= v$, ideoque in ipſo vaſe velocitatem $= \frac{m}{b} v$. Sit GL longitudo cylindri cujus baſis m, qui cylindrus deſignet quantitatem fluidi jam egreſſi $= x$. Sit nunc porro velocitas poſt futura $= u$, & longitudo prædicti cylindri fluidi ulterius egreſſuri $= y$; adeoque longitudo totalis tam egreſſi quam egreſſuri $= x + y$. Concipiamus autem fluidum carere omni gravitate, ac proin nullam aliam habere vim premendi fundum, quam eam quæ a motu pendet: Hæc vis offendit reſiſtentiam æqualem ab oppoſitione fundi, ob æqualitatem inter actionem & reactionem. Reſiſtentia vero invenitur, ſi more ſolito quæratur vis retardatrix, quæ velocitatem columnæ fluidi imminuit, illaque multiplicata per maſſam columnæ, id eſt, per ha, dabit reſiſtentiam vel preſſionem in fundum. Rem ita perago: Æquatio §. XI expoſita $\frac{bb - mm}{2b} vv + \frac{bbvdv}{dx} + \frac{mavdv}{dx} = p$, in præſenti caſu [ubi longitudo tubi, utpote abſentis, $b = 0$, & pondus columnæ fluidi in vaſe $p = 0$] mutatur in hanc æquationem particularem $\frac{bb - mm}{2b} vv + \frac{mavdv}{dx} = 0$; & ponendo u pro v in hanc ſimilem $\frac{bb - mm}{2b} uu + \frac{maudu}{dx} = 0$.

XXVIII.

Per reductionem, & ſcribendo dy pro dx [nunc enim x eſt conſtans, dum $x + y$ eſt longitudo indeterminata & variabilis cylindri fluidi egredientis) provenit æquatio ſub hac forma $\frac{bb - mm}{2b} dy + \frac{madu}{u} = 0$; atque integrando $\frac{bb - mm}{2b} (x + y) + malu = malv + \frac{bb - mm}{2b} x$. Hoc ita ſcribo adjiciendo duos poſtremos terminos conſtantes, rectificationis gratia, eum in finem, ut evaneſcente y & incipiente u ab v ipſa

ipsa æquatio fiat identica. Habebitur itaque $mal\left(\frac{u}{v}\right) = -\left(\frac{hh-mm}{2h}\right)y$; unde transeundo ad numeros, & ponendo $1 = lf$, oritur $uu = vvf^{-(hh-mm)y:hma}$.

XXIX.

Differentiando probe inventam hanc æquationem [sumpto nimirum v pro constante,] habebitur $udu = -vvdy\left(\frac{hh-mm}{2hma}\right) : f^{(hh-mm)y:hma}$. Est autem in vase vis acceleratrix negativa, hoc est, abit illa in vim retardatricem $-\frac{mudu}{hdy}$; quæ itaque erit $= vv\left(\frac{hh-mm}{2hha}\right):f^{(hh-mm)y:hma}$.

XXX.

Hæc vis, quæ nobis usui est in primo tantum momento post abolitionem vel cessationem suppositam gravitatis quam antea columna fluidi in vase verticaliter erecto habebat, erit utique $y = 0$, & $vv = 2gz$; adeoque vis illa inventa erit $= gz\left(\frac{hh-mm}{hha}\right)$, vid. Art. XI, ubi $z = \left(\frac{hha}{hh-mm}\right) \times (1 - 1 : f^{(hh-mm)x:hma})$, ac proinde multiplicando per massam fluidi ha, habetur resistentia vel pressio in fundum $= gha(1 - 1 : f^{(hh-mm)x:hma})$ a solo motu fluidi oriunda; cui si præterea addatur pondus columnæ fluidi gha, quod in situ verticali constanter agit in fundum, seu moveatur fluidum seu quiescat, prodibit pressio totalis $= gha + gha(1 - 1 : f^{(hh-mm)x:hma})$.

COROLLARIUM.

Si $x = \infty$, erit pressio totalis $= gha + gha : f^{\circ} = 2gha$. Est enim $f^{\circ} = 1$. Si vero $x = 0$, pressio fundi erit $= gha$

$+ghα(1-1) = ghα$; quod vel hinc quoque patet verum esse, quia ab initio fluxus, solum pondus cylindri fluidi agit in fundum, postea, crescente x, crescit etiam pressio; ita tamen ut nunquam attingat $2ghα$, nedum excedat; tametsi eo appropinquet data quavis quantitate propius.

SCHOLIUM.

Ne quis autem credat, ponderosum liquorem in vase aliter forsan premere fundum, cum ipse movetur, quam cum quiescit: non obstante quod contrarium facile pateat attendenti ad naturam virium immaterialium, ut est gravitatis causa extra corpus considerata, quæ vires agunt in instanti per totam massam animandam, adeoque eodem modo agunt, eandemque pressionem exercent in obstaculum, ac si liquor gravis ei incumbens quiesceret. Probabo tamen per calculum rei veritatem in nostro casu. Statim utique liquet, liquorem gravem descendendo in vase accelerari; debet autem ejus vis motrix, quantacunque illa sit, duas habere partes, quarum una destinatur ad vim retardatricem a fundo oppositam contra ponderandam, altera vero pars residua impenditur in accelerationem descensus actualis. Hæc vero posterior illa ipsa est, quæ habetur ex æquatione §. XI petenda, nempe $z = \frac{hhα}{hh-mm} \times (1-1 : f^{(hh-mm)x:hmα})$, quam differentiando, & per g multiplicando, habebimus $gdz = vdv = \frac{h}{m} gdx : f^{(hh-mm)x:hmα}$; idcirco vis acceleratrix residua in vase, seu $\frac{mvdv}{hdx} = g : f^{(hh-mm)x:hmα}$; cui si addatur vis quam destruit retardatrix supra inventa $g(1-1 : f^{(hh-mm)x:hmα})$, faciunt simul vim acceleratricem $= g$, ideoque passionem a pondere oriundam $= ghα$, hoc est $=$ ipsi ponderi. *Q. E. D.*

Atque ita procedendum erit in reliquis casibus, ubi unus pluresve tubi adaptati sunt vasi, ut scilicet, ante omnia, quæratur vis retardatrix ad fundum alicujus ex tubis datis, supponendo fluidum

dum ſubito amittere ſuam gravitatem, atque tum vi retardatrici inventæ addatur preſſio a ſolo pondere fluidi proveniens, [conſiderando illud tanquam in quiete conſtitutum & ſtagnans] atque propagata, vel immediate ad primum fundum, vel mediate per præcedentes tubos, ad quodcunque cupimus fundum.

APPENDIX.

Adumbratio calculi inſtituendi, pro determinandis ſingulari modo velocitatibus aquæ per plures tubos ex uno in alterum fluentis, acſi ſeorſim per ſingulos ſolitarios effluerent; atque hinc inveniendis preſſionibus in fundum ſingulorum exercitis.

In anteceſſum monere oportet, nos hic ſupponere canalem compoſitum ex variis tubis ad ſe invicem adaptatis, qualemcunque habentibus ſitum, verticalem, horizontalem, vel inclinatum. Supponimus porro, canalem aquæ conſtanter plenum eſſe, fluxumque perveniſſe ad æquabilitatem; dum tantum liquoris effluit ex quolibet tubo, quantum neceſſe eſt ad ſuppeditandum tubo proxime inferiori, ut adeo unuſquiſque conſtanter plenus eſſe, atque ſinguli ita conſiderari queant, ac ſi eſſent ſolitarii & ſeorſim poſiti.

Sit longitudo tubi primi & ſupremi $= a$, ſecundi proxime inferioris $= b$, tertii $= c$, &c. amplitudo primi $= h$, ſecundi $= m$, tertii $= n$, quarti $= q$, &c. foramen tubi primi $=$ amplitudini tubi ſecundi $= m$, foramen ſecundi $= n$, foramen tertii $= q$, &c. Gravitas naturalis $= g$, gravitas naturalis in diverſis directionibus obliquis $= \gamma', \gamma'', \gamma'''$, &c. Sit vero gravitas, ex actione mutua in tubis adaptatis oriunda, pro vaſe ſeu tubo primo $= g'$, pro ſecundo $= g''$, pro tertio $= g'''$, &c.; Longitudo cylindri aquei egreſſi per foramen primum $= x'$, ea per ſecundum $= x''$, per tertium $= x'''$, &c. altitudo unde grave naturale delapſum acquirit velocitatem aquæ egredientis per

foramen primum $= z'$, ea quæ per secundum $= z''$, per tertium $= z'''$, &c.

His itaque positis, & reliquis ut sunt in Scripto hydraulico; habetur utique pro tubis ad se invicem adaptatis per translationem virium, & quidem pro canali duorum tuborum $ghα + γ'hb = g'hα + g''hb$, vel $gα + γ'b = g'α + g''b$; pro canali trium tuborum $gα + γ'b + γ''c = g'α + g''b + g'''c$. Has æquationes voco fundamentales.

Porro clarum est haberi $z' = \frac{nn}{mm} z'' = \frac{qq}{mm} z'''$, &c: Item $x' = \frac{n}{m} x'' = \frac{q}{m} x'''$, &c: Habentur autem per §. XI, æquationes sequentes, pro tubis solitariis verticaliter erectis.

Pro tubo primo, $g(hh - mm)z'dx' + ghmadz' = g'hhadx'$

. . . . secundo, $g(mm - nn)z''dx'' + gmnbdz'' = g''mmbdx''$

. . . . tertio, $g(nn - qq)z'''dx''' + gnqcdz''' = g'''nncdx'''$,

& ita deinceps.

Nota si quis ex tubis esset horizontalis, in æquatione fundamentali evanesceret $γ$ ad ipsum pertinens, sic ex. gr. si tres essent tubi, quorum primus tantum verticalis, sed reliqui duo horizontales, foret æquatio fundamentalis hæc, $gα = g'α + g''b + g'''c$, sin vero omnes tres essent verticales, hæc haberetur fundamentalis $g(α + b + c) = g'α + g''b + g'''c$. Quod nunc in hac investigatione palmarium est, oportet definire vires gravitatum g', g'', g''', &c. ex mutua actione gravitatis naturalis resultantium, unde postea tam velocitates, quam pressiones in fundo tuborum innotescent. Hoc autem ita perago. Ad imitationem operationis adhibitæ in §. XI, invenietur pro singulis tubis ut sequitur.

Pro tubo primo $z' = \frac{g'}{g}\left(\frac{hha}{hh - mm}\right) \times (\text{I} - \text{I} : f^{(hh-mm)x' : hma}$

Pro tubo secundo $z'' = \frac{g''}{g}\left(\frac{mmb}{mm - nn}\right) \times (\text{I} - \text{I} : f^{(mm-nn)x'' : mnb}$

Pro tubo tertio $z''' = \frac{g'''}{g}\left(\frac{nnc}{nn - qq}\right) \times (\text{I} - \text{I} : f^{(nn-qq)x''' : nqc}$

Atque sic porro.

Quo-

Quoniam itaque z', z'', z''', ut &, x', x'', x''' per se invicem dantur, est enim $z' = \frac{nn}{mm} z'' = \frac{qq}{mm} z'''$, atque $x' = \frac{n}{m} x'' = \frac{q}{m} x'''$; substituantur valores singulorum z & x per unum expressos, & habebuntur tot æquationes, una pauciores, quot sunt tubi, vel quot species gravitatis g', g'', g''', &c. nempe ex. gr. pro tribus, servato z' ad quod reliqua z'', z''' sunt reducenda, ut & x'', x''' ad servatum x': habebuntur hæ duæ æquationes: z' vel $\frac{g'}{g}\left(\frac{hha}{hh-mm}\right)\times\left(1-1:f^{\frac{(hh-mm)x':hma}{}}\right) = \frac{nn}{mm} z''$ vel $\frac{nng''}{mmg}\left(\frac{mmb}{nn-mm}\right)\times\left(1-1:f^{\frac{nn-mm}{mnb}\times\frac{n}{m}x'}\right)$, idemque illud primum etiam $= \frac{qqg'''}{mmg}\left(\frac{nnc}{nn-qq}\right)\times\left(1-1:f^{\frac{nn-qq}{nqc}\times\frac{q}{m}x'}\right)$. Sed cum tres sint quærendæ gravitatis species g', g'', g''', alia adhuc requiritur æquatio ad determinationem Problematis. Hæc autem peti debet ex æquatione fundamentali $ga + \gamma' b + \gamma'' c = g'a + g''b + g'''c$, aut [siquidem duo tubi supponuntur horizontales] ex hac tantum $ga = g'a + g''b + g'''c$, evanescunt enim γ', γ''.

Faciamus applicationem, brevitatis gratia, ad casum simplicissimum, duorum tuborum aqua constanter plenorum, quorum primus sit verticalis, alter horizontalis; ponamusque fluxum pervenisse ad uniformitatem, hoc est, x', x'', &c. esse $= \infty$. Prodibit una æquatio ex z' petita $g'\left(\frac{hha}{hh-mm}\right) = \frac{mg''}{mm}\left(\frac{mmb}{nn-mm}\right)$, altera vero ex fundamentali $ga = g'a + g''b$; ex quibus rite procedendo, elicitur $g' = \frac{gnn(hh-mm)}{nn(hh-nn)}$ & $g'' = \frac{ghha(nn-mm)}{mmb(hh-nn)}$.

Hinc omnia reliqua derivantur, nempe $z' = \frac{hhnna}{mm(hh-nn)}$ & $z'' = \frac{hha}{hh-mm}$, prorsus consentanea iis quæ supra demonstrata dedimus. Item pressiones in fundum cujuslibet tubi facillime eruuntur; quia enim singuli tubi considerari possunt tanquam essent solitarii, adhiberi debet formula, quam invenimus

ſupra pro tubo primo & unico, ſcribendo tantum litteras quæ cuilibet alii tubo, tanquam unico ſeu ſolitario conſiderato, conveniunt. Cum itaque pro illo unico inventa ſit preſſio totalis $= ghα + ghα(1 - 1 : f^{(hh-mm)x : hmα})$, ſcribendum hic erit pro tubo primo, preſſio totalis $= g'hα + ghα \times (1 - 1 : f^{(hh-mm)x' : hmα})$; pro ſecundo $= g''mb + gmb(1 - 1 : f^{(mm-nn)x'' : mnb})$; pro tertio $= g'''nc + gnc \times (1 - 1 : f^{(nn-qq)x''' : nqc})$, atque ſubſtitutis valoribus ipſarum g', g'', g''', vel quia applicationem facimus ad duos tantum tubos, & quidem ubi $x = \infty$, nonniſi valores ipſarum g' & g'' ſubſtitui debent; qui ſunt $g' = gnn(hh - mm) : mm(hh - nn)$ & $g'' = ghhα(mm - nn) : mmb(hh - nn)$, habebitur preſſio prima $= 2ghα \times \frac{nn(hh-mm)}{mm(hh-nn)}$, & preſſio ſecunda $= \frac{2ghhα}{m} \times \frac{mm-nn}{hh-nn}$. Si præterea $h = \infty$, ſed m & $n =$ finito, erit preſſio prima $= 2ghα \times \frac{nn}{mm} = \infty$, ut fieri par eſt, ſed preſſio ſecunda $= \frac{2gα}{m} \times (mm - nn) =$ finito.

Hac methodo probe obſervata, invenientur pro 5 tubis gravitates g', g'', g''', g^{IV}, g^{V}, ut ſequitur

$$g' = ghhssα(hh - mm) : hhmmα(hh - ss)$$
$$g'' = ghhssα(mm - nn) : mmnnb(hh - ss)$$
$$g''' = ghhssα(nn - qq) : nnqqc(hh - ss)$$
$$g^{IV} = ghhssα(qq - rr) : qqrrd(hh - ss)$$
$$g^{V} = ghhssα(rr - ss) : rrsse(hh - ss)$$

Ex hoc laterculo, plus ſatis elucet lex progreſſionis pro quocunque numero tuborum. Adeoque in canali conoidico truncato [*Fig.* 9] FB, vaſi cylindrico AF adaptato, qui canalis conſideratur tanquam conflatus ex innumeris tubis infinite parvæ longitudinis, invenietur, pro qualibet amplitudine NO, ſpecies gravitatis,

TAB. XC. *Fig.* 9.

vitatis, qua ſtratum aquæ infinite parvæ craſſitiei animatur, quando ad æquabilem fluxum pervenerit : dicendo enim amplitudinem NO $= y$, craſſitiem ſtrati aquei $= dx$, reliquaſque litteras adhibendo, quas hactenus uſurpavimus, erit gravitas animans hoc ſtratum $= \frac{ghh\omega\omega a \times 2y\,dy}{y^4 dx\,(hh - \omega\omega)} = \frac{ghh\omega\omega a \times 2dy}{y^3 dx\,(hh - \omega\omega)}$. Proin pondus ipſum hujus ſtrati, ſeu preſſio qua urgetur, prodibit ſi multiplicatur per quantitatem materiæ $y\,dx$, erit igitur hæc preſſio $= \frac{ghh\omega\omega a \times 2dy}{yy\,(hh - \omega\omega)}$. Huic autem addendæ ſunt preſſiones omnium ſtratorum ſequentium, ab O uſque ad extremum B, ſed per translationem ad locum O collectæ, ſicuti poſtulat methodus noſtra ab initio expoſita. Hunc in finem ponatur tantiſper y conſtans, & alia amplitudo variabilis RS $= t$, erit hujus ſtrati $t\,dx$ preſſio $= \frac{ghh\omega\omega a \times 2dt}{tt\,(hh - \omega\omega)}$ quæ transferatur ad locum invariabilem NO, faciendo ut t ad y, ita $\frac{ghh\omega\omega a \times 2dt}{tt\,(hh - \omega\omega)}$ ad $\frac{ghh\omega\omega ay \times 2dt}{t^3\,(hh - \omega\omega)}$, cujus integrale debite correctum dat $\frac{ghh\omega\omega ay}{\omega\omega\,(hh - \omega\omega)} - \frac{ghh\omega\omega ay}{tt\,(hh - \omega\omega)}$; ubi nunc ponendo $t = y$, habetur $\frac{ghha\,(yy - \omega\omega)}{y\,(hh - \omega\omega)} =$ preſſioni totali, qua nimirum aqua in NO comprimitur. Ut igitur reperiatur z, altitudo cylindri aquei cujus baſis eſt y, & pondus æquale huic preſſioni, faciendum eſt $gyz = \frac{ghha\,(yy - \omega\omega)}{y\,(hh - \omega\omega)}$, unde $z = \frac{hha\,(yy - \omega\omega)}{yy\,(hh - \omega\omega)}$. Ad hanc itaque altitudinem NM, hærebit aqua in fiſtula in loco N inſerta. Notandum vero, canalem FPBC conſiderari tanquam habentem diametros amplitudinum maximæ FP & minimæ CB ſatis parvas reſpectu longitudinis PB, ut nimirum hoc modo tangens curvaturæ FNC, in quolibet puncto N, faciat angulum acutiſſimum cum horizontali PB, ne alias, ex alliſione aquæ inter movendum ad canalis latus nimis curvum FNC, oriatur nova vis preſſionis [quam hic tanquam accidentalem negleximus] quæ priori ſuperveniens, augeret

geret altitudinem NM; quemadmodum id revera accidit, si canalis FB definit in laminam perforatam foramine amplitudinis ω, cui laminæ aqua perpendiculariter impingens augere potest compressionem in partibus foramini vicinis; in remotioribus augmentum illud minus fit sensibile, variatque prout postulat curvatura gurgitis, quam autem a peculiari qualitate aquæ, aliusve liquoris transfluentis dependere existimo, adeoque generaliter indeterminabilem.

DISSERTATIONIS HYDRAULICÆ PARS SECUNDA,

Continens Methodum directam & universalem solvendi omnia Problemata Hydraulica quæcunque de aquis per canales cujuscunque figuræ fluentibus formari ac proponi possunt.

I.

CAnalis esto qualiscunque sive, sit rectus, sive curvus, sive sit continuus, sive compositus ex pluribus tubis cylindricis, sive denique sit verticalis, sive pro parte horizontalis, sive in partibus suis diversis diversimode inclinatus. Plenus sit hic canalis aqua, aliove liquore gravi, homogeneo, & fluidissimo. Incipiat autem pergatque accelerando [quantum & quousque potest] fluere, & ita quidem, ut canalis constanter plenus maneat, succedente scilicet aliunde aqua nova, quæ elabentem ex imo orificio singulis momentis resarciat, influendo per summum orificium, ea cum velocitate qua suprema superficies subsideret, si influxus subito cessaret. Hæc conditio additur facilioris calculi gratia; valet enim methodus, si nihil novi liquoris aquei subintraret, ad omnimodam usque vasis canalisve depletionem. Quæritur primo velocitas liquoris effluentis, pro data qualibet quantitate liquoris, jam egressi? Quæritur deinde quantum latera canalis in singulis locis a transfluente liquore premantur; vel, quod

quod eodem recidit, ad quantam altitudinem verticalem, liquor ejusdem generis cum transfluente suspensus hærere debeat in fistula in aliquo loco inserta, & verticaliter erecta ?

II.

Detur itaque canalis (Fig. 10.) qualiscunque ECce; recta verticalis AB, tanquam abscissarum axis considerata, ad quam ordinatim applicatæ AEe, PFf, TNn, BCc; quarum partes Ee, Ff, Nn, Cc, designent amplitudines seu sectiones horizontales canalis. Concipiatur liquor in eo contentus, divisus in strata horizontalia infinite parvæ crassitudinis FMmf, NLln, &c. quorum puncta intermedia, seu centra gravitatis G, H, V, I, &c. faciant lineam, sive rectam, sive curvam, GHVI, quam vocabo *lineam centricam* seu simpliciter *centricam*; quæ utique data erit, ob datas curvas EFC, efc, quæ ex Figura data canalis determinantur. TAB. XC. *Fig.* 10.

Sit amplitudo prima $Ee = h$, amplitudo ultima $Cc = \omega$, amplitudo aliqua intermedia $Ff = y$, alia intermedia $Nn = r$, crassities singulorum stratorum PR vel $TS = dt$. Erunt strata ipsa $Fm = y\,dt$, $Nl = r\,dt$. Sit porro aliqua recta indeterminata ID, tangens centricam in I, quæ dicatur x, = longitudini cylindri obliqui liquoris effluentis in directione ipsius ID, cujus cylindri est basis Cc, & qui contineat quantitatem liquoris jam egressi. Velocitas liquoris eo ipso momento elabentis $= v$. Sit gravitas qua corpora naturaliter animantur $= g$. Nominando jam elementa lineæ centricæ Hh, &c.: $= ds$, erunt gravitates, quibus animantur strata in directionibus Hh, Vu, &c.: $= \frac{g\,dt}{ds}$, adeoque pondera, vel vires motrices ipsorum stratorum in istis directionibus $= \frac{gy\,dt^2}{ds}$, $\frac{gr\,dt^2}{ds}$ &c.; ipsæ vero vires motrices absolutæ, secundum directionem verticalem $= gy\,dt$, $gr\,dt$, & ita porro.

III.

Transferendo has vires absolutas (per Princip. Hydrost. ut in Parte prima ostensum est) ad amplitudinem primam h; erunt illæ pro singulis $ghdt$; erit ergo integrando per omnes dt, hoc est, per totam altitudinem AB [quæ dicatur $= a$] $gha =$ pressioni totali ad Ee verticaliter applicandæ, & æquipollenti summæ virium motricium absolutarum in stratis omnibus. Et hæc pressio totalis gha, ad amplitudinem primam applicanda, est ea quæ mihi vocari solet p.

Sit jam tangens in I lineæ centricæ GHI ad suam subtangentem verticalem, ut α ad 1; & tangens in G ad suam subtangentem, ut ζ ad 1; tangens autem in quolibet puncto intermedio H ad suam subtangentem, ut ds ad dt: Erit utique, per decompositionem motus, v seu velocitas actualis in I liquoris effluentis ad suam subvelocitatem verticalem, etiam ut α ad 1, adeoque subvelocitas illa $= \frac{v}{\alpha}$. Pariter nominando u velocitatem actualem in H secundum Hh, erit ejus subvelocitas $= \frac{udt}{ds}$. Verum, ut inveniatur velocitas actualis u, notandum est, stratorum subvelocitates, esse in ratione reciproca suarum amplitudinum, ad id ut transmittant eodem tempusculo elementari, quantitates æquales liquoris; faciendo itaque $y : \omega = \frac{v}{\alpha} : \frac{v\omega}{\alpha y}$, erit $\frac{v\omega}{\alpha y} =$ subvelocitati strati Fm. Faciendo nunc porro $dt : ds = \frac{v\omega}{\alpha y} : \frac{v\omega ds}{\alpha y dt}$, erit $\frac{v\omega ds}{\alpha y dt} = u$, seu velocitati actuali strati Fm in directione Hh. Hinc velocitas actualis strati primi, amplitudini Ee contigui, [ubi y ponitur h, & $ds : dt = \zeta : 1$] erit $= \frac{\zeta\omega v}{\alpha h}$.

Haud aliter ratiocinandum, pro inveniendo progressu actuali strati Fm in directione Hh. Nam nominando dx progressum momentaneum strati ultimi Cc in directione ID; erit ejus subpro-

progreſſus in directione verticali $= \frac{dx}{\alpha}$; ſunt autem hic etiam ſubprogreſſus ſtratorum in reciproca ratione amplitudinum: faciendo itaque $\gamma : \omega = \frac{dx}{\alpha} : \frac{\omega dx}{\alpha\gamma}$, erit $\frac{\omega dx}{\alpha\gamma} =$ ſubprogreſſui ſtrati F m. Proinde etiam faciendo $dt : ds = \frac{\omega dx}{\alpha\gamma} : \frac{\omega dx ds}{\alpha\gamma dt}$; erit $\frac{\omega dx ds}{\alpha\gamma dt} =$ progreſſui actuali ſtrati F m, in directione ſui motus H h.

IV.

Exiſtente jam aqua in motu, ſtrata ejus diverſimode in ſe mutuo agunt urgendo & reſiſtendo, ac viribus quidem diverſis, pro diverſitate circumſtantiarum, tam loci quam celeritatis. Vocetur itaque tantiſper γ, vis acceleratrix indeterminata, quæ ex actione mutua oritur, & u velocitas acquiſita, quam aliquod ſtratum F m habet in directione H h; adeoque $\gamma ds = u du$, unde $\gamma = \frac{u du}{ds}$. Ducatur hoc in maſſam ſtrati γdt, & prodibit ejus vis motrix $\gamma\gamma dt = \frac{\gamma u du dt}{ds}$ in directione H h. Ut autem ea habeatur in directione verticali a qua hæc produci queat, faciendum eſt $dt : ds = \frac{\gamma u du dt}{ds} : \gamma u du$, quæ erit vis motrix requiſita in directione verticali; quæ ergo tranſlata ad amplitudinem primam h, dat æquipollentem $hudu$. Integretur hæc ut habeatur $\frac{1}{2} huu$, quod per debitam correctionem, accommodandum eſt ad omnia ſtrata, in toto canali E C c e contenta, atque ſimul ſumpta. Proinde [ob velocitatem ſtrati ultimi $= v$, & primi $= \frac{6\omega v}{\alpha b}$] correctum integrale $= \frac{h}{2}\left(vv - \frac{66\omega\omega}{\alpha\alpha bb} vv\right)$ ſeu $\frac{vv(\alpha\alpha bb - 66\omega\omega)}{2\alpha\alpha b} =$ vi verticali ad E e applicandæ æquipollenti, a qua ſcilicet ſingula ſtrata vim ſuam particularem ſe mutuo urgendi obtinent, ad id tantum ut niſum ſuum con-

servent, eo momento quo aqua effluit velocitate v, quod cum fiat, non successive, sed in instanti indivisibili, & a sola figura canalis pendeat, poterit hæc vis ex translatione orta, vocari *vis* vel *potentia statica*, aut si magis arrideat, *potentia hydrostatica*, utpote quæ in solo nisu consistit transeundi ab uno strato in locum proxime inferioris, nulla facta attentione ad vim acceleratricem actualem.

V.

Quærenda porro est vis altera, quæ nascitur ex acceleratione actuali liquoris transfluentis. Hunc in finem, pono cujuslibet strati F m progredientis vim acceleratricem actualem $= \gamma'$, erit [ob progressum actualem ultimi strati C c per spatiolum dx] progressus strati F m $= \frac{\omega dx ds}{\alpha \gamma dt}$, adeoque $\frac{\gamma' \omega dx ds}{\alpha \gamma dt} = u' du'$ $=$ [Art. III.] $\frac{\omega \omega v dv ds^2}{\alpha \alpha \gamma \gamma dt^2}$, unde $\gamma' = \frac{\omega v dv ds}{\alpha \gamma dx dt}$, & vis motrix actualis in directione H h strati, seu $\gamma' \gamma dt = \frac{\omega v dv ds}{\alpha dx}$, adeoque vis motrix verticalis, ex qua illa produci potest $= \frac{\omega v dv ds^2}{\alpha dx dt}$, quæ translata ad primam amplitudinem h, dat æquipollentem $= \frac{h \omega v dv ds^2}{\alpha \gamma dx dt}$; quod ut integretur per totam longitudinem axis A B respondentem toti canali, pro quolibet strato, & pro qualibet acquisita velocitate v, debent hic non tantum h & ω, sed etiam $\frac{v dv}{\alpha dx}$, considerari tanquam constantes; & ita integrando, habebimus $\frac{h \omega v dv}{\alpha dx} \int \frac{ds^2}{\gamma dt} =$ vi alteri, ex actuali accelerationis liquoris effluentis oriundæ, quam vocari liceat *vim hydraulicam*, ad distinctionem *vis hydrostaticæ*, quæ in solo nisu vel pressione in instanti exercita consistit, idque singulis momentis, quomodocunque liquor moveatur.

VI.

VI.

Hæ duæ vires, *hydroſtatica* & *hydraulica*, componunt vim totalem, quæ nimirum generatur ab actione vis primitivæ p, quæ inventa eſt Art. III $= ghα$. Æquando itaque hanc, cum aggregato illarum duarum Art. IV & V inventarum, obtinebimus æquationem generaliſſimam, pro determinatione velocitatis quacum liquor quovis momento effluit, quæ æquatio hæc eſt $\frac{vv(\alpha\alpha bb - \mathfrak{C}\mathfrak{C}\omega\omega)}{2\alpha\alpha b} + \frac{b\omega v dv}{\alpha dx}\int\frac{ds^2}{ydt}, = ghα$. Ubi notandum per $\int\frac{ds^2}{ydt}$ intelligi ſummam omnium $\frac{ds^2}{ydt}$ quæ continentur non tantum inter Cc & Ff, ſed omnino inter extremas ab una ad alteram omnes comprehendendo.

VII.

Quod ſi lubeat exprimere æquationem per z, ſeu altitudinem unde corpus naturali gravitate g præditum delabendo acquirat velocitatem quæſitam v; ſcribendum tantum eſt, per principia dynamica, $2gz$ pro vv & gdz pro vdv; id quod dabit hanc æquationem $\frac{gz(\alpha\alpha bb - \mathfrak{C}\mathfrak{C}\omega\omega)}{\alpha\alpha b} + \frac{gb\omega dz}{\alpha dx}\int\frac{ds^2}{ydt} = ghα$, vel reductione peracta hanc $(\alpha\alpha bb - \mathfrak{C}\mathfrak{C}\omega\omega)zdx + \alpha bb\omega dz \times \int\frac{ds^2}{ydt} = \alpha\alpha bbadx$, vel quia $\int\frac{ds^2}{ydt}$, ſumendum per totam axis longitudinem, ut conſtans, adeoque ut datum ſupponi poteſt, ſaltem per quadraturas, nominetur illud M; eritque æquatio ad hanc formam reducta $(\alpha\alpha bb - \mathfrak{C}\mathfrak{C}\omega\omega)zdx + \alpha Mbb\omega dz = \alpha\alpha bbadx$. Ex reſolutione hujus æquationis, invenietur z in quantitatibus datis per x, & conſtantes M, α, b, ω, α, $\mathfrak{C}$.

COROLLARIUM I.

Exiſtente effluxus velocitate uniformi, ad quam ſenſibiliter

pervenitur citissime, & quasi uno ictu oculi, ut in suo loco hujus scripti demonstrabitur; evanescit dz: quo igitur neglecto, prodit æquatio algebraïca hæc $(\alpha\alpha hh - \mathfrak{G}\mathfrak{G}\omega\omega)z = \alpha\alpha hha$, unde quæsita $z = \frac{\alpha\alpha hha}{\alpha\alpha hh - \mathfrak{G}\mathfrak{G}\omega\omega}$.

COROLLARIUM II.

Hinc duo vasa vel duo canales, qualescunque habeant figuras, licet a se invicem diversissimas, modo eandem habeant altitudinem verticalem a, ut & amplitudines supremam & infimam, seu primam & ultimam, h & ω, in eadem ratione, ac præterea α & $\mathfrak{G}$ utrobique sibi proportionales; effluet aqua ex utroque canali, seu vase, velocitate æquali, postquam venerit utrobique ad uniformitatem.

COROLLARIUM III.

Si linea centrica GHI est linea recta, sive sit verticalis sive obliqua, erit $\mathfrak{G} = \alpha$, & $ds : dt = \alpha : 1$; proinde $ds = \alpha\, dt$, & $\int \frac{ds^2}{y dt}$ seu $M = \alpha\alpha \int \frac{dt}{y}$, id quod æquationem generalem $(\alpha\alpha hh - \mathfrak{G}\mathfrak{G}\omega\omega)z\,dx + \alpha M hh\omega\, dz = \alpha\alpha hha\, dx$ mutat in hanc $(hh - \omega\omega)z\,dx + \alpha hh\omega\, dz \int \frac{dt}{y} = hha\, dx$. Qualiscunque autem sit situs centricæ rectilineæ, sive verticalis sive obliquus, erit in casu effluxus uniformis semper $z = \frac{hha}{hh - \omega\omega}$.

COROLLARIUM IV.

Quod si manente figura canalis vel vasis, ut & utraque ejus amplitudine summa & ima Ee, Cc; fiat tantilla mutatio in directione liquoris influentis & effluentis; potest illa mutatio, etsi fere sit insensibilis, producere mutationem insignem in velocitate; ut ex. gr. si in *Figura* 11, vasi vel canali ECce adaptentur

tentur margines vel labra Emne & Cpqc, tantillæ altitudinis verticalis Em, cp, ut amplitudines mn, pq, maneant eædem cum prioribus Ee, Cc, ipsaque tota canalis altitudo sensibiliter non augeatur; nemo facile crediderit, quanta hinc in effectu futura sit velocitatis mutatio. Quoniam enim nunc aqua influit & effluit, non amplius oblique sed verticaliter, ob directionem labrorum verticalem, quæ ideo etiam dat situm verticalem tangentibus extremis lineæ centricæ, facitque $\alpha = \mathfrak{C} = 1$; manifestum est æquationem generalem $(\alpha\alpha hh - \mathfrak{C}\mathfrak{C}\omega\omega)zdx + \alpha M hh\omega dz = \alpha\alpha hh a dx$, nunc subito assumere hanc faciem $(hh - \omega\omega)zdx + Mhh\omega dz = hh a dx$, atque pro velocitate uniformi fore $z = \frac{hha}{hh - \omega\omega}$; quod monere operæ prætium duxi, ne alioquin, si in experimentis capiendis ad minimas circumstantias, quæ nullius esse momenti videntur, non satis accurate attenditur, & inde quod provenit cum nostris minus recte quadrare falso apparet, ne, inquam, theoria nostra statim erroris suspecta habeatur. Sicuti accidit aliquando Cl. POLENO, Viro alias in experimentalibus industrio & circumspecto, qui visurus quas diversas quantitates aquæ, dato tempore, emitterent diversæ amplitudinis lumina, eidem vasi aqua pleno admota, sumpserat ad hoc negotium varias laminas non admodum spissas, unamquamque peculiaris amplitudinis foramine pertusam, ut nunc hac nunc illa obtegeret aperturam in fundo vasis factam: contigit autem, ni fallor forte fortuna, ut cum aliqua ex illis laminis experimentum bis repetierit, & postea pluries de industria; ubi semper attonitus observavit unam eandemque illam laminam, per suum idem foramen, modo majorem, modo minorem aquæ copiam eodem tempore emisisse, prout una vel altera ejus laminæ facies extrorsum spectaret: tandem foraminis forma curatius examinata fuit, atque tum observatum figuram foraminis, licet in tenui lamina insculpti, non fuisse exacte cylindricam, sed instar conuli truncati, basin unam habentis tantillum ampliorem quam alteram: quod jam sufficiebat ad detegendam rationem, cur extrorsum hiante basi ampliore forami-

TAB. XC. *Fig.* 11.

foraminis, aqua largius effluxerit quam in ſenſu contrario; idque duplicem ob cauſam; nam & craſſior fuit vena aquea exiliens, & major ejus velocitas, ceu patet ex formula noſtra $z = \frac{hha}{hh - \omega\omega}$, ubi palam eſt, valorem hujus fractionis eſſe majorem, ſi major fuerit ω, reliquis h & a manentibus, & contra fore minorem, ſi ω minor fuerit.

COROLLARIUM V.

In caſu quo $ah = \mathfrak{C}\omega$, ſeu ubi $a : \mathfrak{C} = \omega : h$; habebitur $M_\omega dz = \alpha a dx$, proinde $z = \frac{\alpha a x}{M\omega}$; unde liquet, creſcente effluxu x in infinitum, etiam z in infinitum creſcere; adeoque velocitatem nunquam ad uniformitatem convergere. Quod ſane apparet quoque ex ipſa formula *Coroll.* 1, eſt enim $z = \frac{\alpha\alpha hha}{\alpha\alpha hh - \mathfrak{C}\mathfrak{C}\omega\omega} =$ [in hoc caſu] $\frac{\alpha\alpha hha}{\alpha\alpha hh - \alpha\alpha hh} = \frac{a}{0} = \infty$.

VIII.

SCHOLIUM I.

Notandum, in canalibus & tubis non admodum amplis & ſufficienter longis, hoc communiter obſervari, ſicuti jam innui in Præfatione *, quod ſtrata F m (Fig. 10) in fluxu conſtituta, ex ſitu horizontali ſe facile componunt ad ſitum perpendicularem lateribus, ſeu potius lineæ centricæ G H I; quod utique ex motu ſupremæ ſuperficiei E e [ſi nullus alius liquor ſuccedit] ut ex. gr. in tubis barometricis & aliis ejuſmodi ſiphonibus non ultra unam duaſve lineas in diametro habentibus, luculenter patet; ſive hoc fiat ob adhæſionem fluidi ad latera, quæ circumcirca in ambitu ſtratorum æquabilis eſſe debet, ut quam commodiſſime fluidum moveatur & ſine notabili frictione, ſive id contingat aliam ob cauſam phyſicam, hujus loci non eſt inquirere: ſufficit hoc loco inſinuare, hanc circumſtantiam nihil

TAB. XC. *Fig.* 10.

* pag. 396.

offi-

officere noſtræ Theoriæ. Nam quia, per legem generalem, centrum gravitatis corporum quacunque de cauſa in motum concitatorum, eodem modo eademque velocitate in ſua directione inchoata movetur, ac ſi univerſa eorum materia in ipſo centro gravitatis eſſet concentrata; poterit ſane materia cujuſlibet ſtrati Fm conſiderari tanquam congeſta in centro gravitatis H vel h. Cum igitur, in canalibus oblongis ac non admodum amplis, quælibet eorum modica portio ſumi poſſit pro quaſi cylindrica vel priſmatica; evidens eſt unumquodque ſtratum Fm, leviſſimam ob cauſam, ſitum ſuum horizontalem Ff mutare poſſe in rs perpendicularem ad Hh, manente interim Hh ejuſdem longitudinis, & quantitate ſtrati novi rtos æquali ſtrato FMmf. Concipiamus igitur quo pacto ſingula reliquorum ſtratorum Nl [ſine ulla alia mutatione, ſive in velocitate, ſive in directione ſecundum Vu] ſe componere poſſint in ſitum perpendicularem ad latera canalis, ſeu potius ad lineam centricam. Quod ſi jam porro attendimus quid fieret, ſi obturaretur exitus Cc, ejuſque loco aperiretur in latere canalis foramen cd ejuſdem amplitudinis cum Cc; haud difficulter intelligimus, aquam per aperturam cd ſub eadem obliquitate ad cd erumpere debere, ſub qua erumpebat per Cc, ejuſque adeo directionem bg fore horizontalem. Cum præterea apertura cd ponatur æqualis amplitudini Cc, & conatus erumpendi per Cc jam detorqueatur verſus dc [per vulgarem legem hydroſtaticam,] oportet ſane velocitatem aquæ per cd effluentis, eandem fore quam determinavimus pro Cc. Unde & hoc colligitur, ſi ad foramen cd adaptaretur novus canalis horizontalis, in quo nempe linea centrica horizontalis ſit, fore ut motus & velocitas aquæ per eum fluentis & effluentis eodem modo ſe habeat, ac ſe haberet, ſi idem ille novus canalis [clauſo cd] ad Cc adaptaretur ſecundum directionem ID, ſed in quo aqua fluens deſtituta ſupponi deberet propria ſua gravitate. Adeo ut ſtratorum pondera ad amplitudinem Ee translata hic etiam faciant eandem ſummam *ghα*, æque ac ſi abeſſet novus canalis, ac proin in generali æquatione expreſſa [Art. VII],

$(\alpha\alpha hh - 66\omega\omega)zdx + \alpha Mhh\omega dz = \alpha\alpha hhadx$, nihil aliud mutandum sit quam ut M, seu $\int \frac{ds^2}{ydt}$, nunc exprimat summam omnium $\frac{ds^2}{ydt}$, quæ in ambobus continentur canalibus. Velocitas vero uniformis utrobique, tam in simplici quam in combinato canali, erit eadem; [quia terminus, in quo reperitur M, in casu uniformitatis evanescit;] utpote semper ea quæ habetur per $z = \frac{\alpha\alpha bba}{\alpha\alpha bb - 66\omega\omega}$.

IX.

De Pressionibus quas sustinent latera canalis a liquore transfluente.

Ut recte clareque percipiamus, in quo consistat vis illa quæ exeritur in latera canalis, dum in illo fluit liquor; sciendum est illam vim nihil aliud esse, quam quæ originem habet a vi compressionis, qua nimirum partes fluidi sibi invicem contiguæ, ex. gr. EFfe & CFfc, una ad alteram adigitur, unde in ipso contactu Ff per actionem & reactionem gignitur vis intermedia, quam vocare soleo *immaterialem;* quia quasi extra partes se invicem prementes, inter utramque tamen intermedia residet, atque ad unam non magis pertinet quam alteram. Hujus vis proprium est urgere partem liquoris præcedentem *antrorsum*, seu ea versus qua tendit, sequentem vero *retrorsum* seu ea versus unde venit; facereque ut pars liquoris sequens, quæ a viribus translatis propellitur, atque pars liquoris præcedens, cui aliquid accelerationis imprimere debet, acquirant in ipso contactu æqualitatem virium acceleratricium; quemadmodum idem contingere dudum * monuimus in corporibus solidis, quæ diversis viribus acceleratricibus seorsim animata, quando in se mutuo agere incipiunt, oritur in eorum contactu vis intermedia *immaterialis* ad utrumque corpus communi jure spectans, quæ ita

* Nis. CLXXVII, pag. 262, & CLXXIX, pag. 333, 340.

ita temperet utriuſque vim acceleratricem particularem, unam diminuendo, alteram augendo, ut inde in tota maſſa, combinata ex duobus iſtis corporibus, reſultet una communis vis acceleratrix.

X.

Id vero diſcriminis eſt in agendi modo, quod in corporibus ſolidis directe in ſe invicem agentibus, vis illa immaterialis agat prorſum & retrorſum, inſtar elaſtri alicujus rectilinei quod inter utrumque corpus poſitum ſeſe expandere conatur: ſed in partibus fluidi in ſe mutuo agentibus, vis immaterialis intercedens conſiderari debeat tanquam aura elaſtica, quæ, non tantum in partes oppoſitas, ſed in omnes plagas circumfuſas ſeſe exerit: ex quo nunc facile intelligitur, ab hac ipſa vi immateriali provenire preſſionem, de qua hic eſt quæſtio, quæ nempe exercetur in latera canalis, & quæ viciſſim ab hiſce coërceri debet, dum agit libere antrorſum & retrorſum in partes liquoris quibus interjacet.

XI.

Reſtat igitur ut, ſecundum datam hanc ideam de vi immateriali, ejus quantitatem vel menſuram determinemus. Sit illa ubilibet in Ff quærenda, quam dicamus $= \pi$. Nunc ita procedo: Finge tantiſper partem canalis EFfe [durante fluxu] ſubito auferri, manente reliqua CFfc in ſtatu ſuo cum omnibus ſuis circumſtantiis, atque eodem momento ad amplitudinem Ff apponi novam vim motricem ipſi π æqualem. Concipis utique hoc modo effluxum liquoris ex truncato canali egredientis acceleratum iri [ſaltem in primo temporis momento] perinde ac ſi integer manſiſſet canalis. Quare jam conſiderabo canalem reſiduum CFfc tanquam canalem integrum, cujus ſuprema ſeu prima amplitudo eſt y, ſeu Ff, amplitudo alia intermedia Nn variabilis $= r$, ſtratumque adjacens Nl $= r\,dt$. Hinc ſi [Art. IV] pro h ſubſtitut y, habebo $\frac{vv(\alpha\alpha yy - \omega\omega\, ds^2 : dt^2)}{2\alpha\alpha y} =$ vi hydroſta-

TAB. XC. *Fig.* 10.

ticæ: quod enim in primo puncto G dicebatur 6, id in puncto H est $ds:dt$, ratio scilicet tangentis ad subtangentem, & [Art. V] $\frac{y\omega v dv}{\alpha dx}\int\frac{ds^2}{rdt} =$ vi hydraulicæ; ubi in integratione supponitur r continuari ab ω usque ad y.

XII.

Aggregatum harum duarum virium, hydrostaticæ & hydraulicæ, æquari deberet vi primitivæ p, quæ hic esset [Art. III & VI] gyt, si nimirum hæc sola ageret in liquorem in canali truncato contentum; sed quia π conjunctim agit cum gyt, oportet sane hanc instituere æquationem $\frac{vv(\alpha\alpha yy - \omega\omega ds^2:dt^2)}{2\alpha\alpha y} + \frac{y\omega v dv}{\alpha dx}\int\frac{ds^2}{rdt} = gyt + \pi$. Ex qua statim emergit valor quæsitus ipsius π: Transposito enim gyt, prodit $\frac{vv(\alpha\alpha yy - \omega\omega ds^2:dt^2)}{2\alpha\alpha y} + \frac{y\omega v dv}{\alpha dx} \times \int\frac{ds^2}{rdt} - gyt = \pi$; ubi quoque monendum, in integratione $\int\frac{ds^2}{rdt}$ variabile r sumi debere a B usque ad P; unde pro qualibet assumpta y dabitur $\int\frac{ds^2}{rdt}$, dicatur ergo hoc $= N$, eritque $\frac{vv(\alpha\alpha yy - \omega\omega ds^2:dt^2)}{2\alpha\alpha y} + \frac{Ny\omega v dv}{\alpha dx} - gyt = \pi$. Quoniam igitur ex resolutione æquationis generalis [Art. VII] habetur valor ipsius vv seu $2gz$, is in hac substitutus dabit valorem ipsius π in g, & quantitatibus mere linearibus; scilicet hunc $\frac{gz(\alpha\alpha yy - \omega\omega ds^2:dt^2)}{\alpha\alpha y} + \frac{gNy\omega dz}{\alpha dx} - gyt = \pi$.

XIII.

Quod si nunc porro scire lubeat, si fistula aliqua, utrinque aperta, in loco quolibet f canali inseratur, erigaturque ad situm verticalem, quousque in illa liquor ascendere debeat, ob hanc pressionem π, quæ facit ut ascendat: attendere convenit, quod π æquivalet ponderi alicujus cylindri ex liquore gravitate naturali

rali g animato confecti, qui pro basi habet amplitudinem Ff seu y, & pro altitudine illam ipsam liquoris in fistula hærentis; unde hæc altitudo erit $= \frac{\pi}{gy}$, ad quam suspensus hærebit liquor in fistula, invariabiliter quidem, postquam velocitas liquoris effluentis ad sensibilem uniformitatem pervenerit; sed antequam hoc fiat [fit autem in momento quasi] ascendere perget liquor in fistula, donec acquisiverit locum suum stabilem, quando nempe liquor effluens non amplius sensibiliter acceleratur.

XIV.

Accidit, in quibusdam casibus, ut valor ipsius π evadat negativus, quando scilicet in illo quantitates negativæ $\frac{-vv\omega\omega ds^2}{2\alpha\alpha y dt^2}$ $-gyt$ prævalent affirmativis $\frac{1}{2}vvy + \frac{y\omega v dv}{\alpha dx}\int\frac{ds^2}{rdt}$; aut jam existente velocitate in sua uniformitate, ita ut $dv = 0$, quando $\frac{vv\omega\omega ds^2}{2\alpha\alpha y dt^2} + gyt$ majus est quam $\frac{1}{2}vvy$: id quod contingere potest, non tantum in illis casibus ubi αy minus est quam $\frac{\omega ds}{dt}$, sed etiam in illis ubi αy majus quam $\frac{\omega ds}{dt}$, modo interim gyt sat magnum sit ut ejus excessus supra $\frac{y\omega v dv}{\alpha dx}\int\frac{ds^2}{rdt}$ superet prioris defectum. Quocunque autem modo id fiat, palam est in ejusmodi casibus compressionem converti in relaxationem, qua fit, ut latera canalis circa Ff, non tantum plane non extrorsum premantur, sed omnino introrsum [si laterum rigiditas non impediat] contrahantur. Unde sequitur, per fistulam canali implantatam, sed ex alto ad imum demissam verticaliter, ubi hiet in vasculum liquore plenum, posse liquorem quasi per suctionem sursum attolli ad altitudinem $= \frac{\pi}{gy}$.

XV.

SCHOLIUM II.

Hactenus non attendimus ad causas quasdam particulares & accessorias [non semper locum habentes] quæ alterare possunt, seu pressiones, seu suctiones π nostra methodo determinatas. Inter tales causas hæc præcipue occurrit, quæ facit ut aqua in motu constituta, offendens in via superficiem immobilem, ei per allapsum imprimat vim, quæ vocatur *vis resistentiæ fluidorum*, proportionalis utique partim quadrato velocitatis, partim quadrato sinus obliquitatis incidentiæ, ut notum est. Eo ipso itaque hæc vis fit insensibilis in canalibus angustioribus oblongis: in iis enim, ob FM fere parallelam ipsi hH, quæ est directio motus fluidi cum venit ad Ff, sicuti in quolibet alio loco Nn, directio Vu fere parallela est ipsis NL, nl, sinus incidentiæ pro nullo reputari potest. In canali ex tubis cylindricis conflato, sinus ille prorsus nihil est, quia directio fluidi omnino est parallela lateribus cylindrorum, per totam canalis longitudinem. Alia insuper causa accessoria, quæ turbare posset effectum a pressione π oriundum, reperitur in canali valde incurvato, in quo quippe liquor celeriter fluens acquirit vim centrifugam [de qua alibi egimus], hæc vis centrifuga majorem redderet pressionem π quam revera est, in parte convexa canalis, sed minorem in parte concava ejusdem. Quocirca, si cui volupe esset experimentum instituere ope fistulæ canali implantandæ; insertio facienda esset neque in convexitate, neque in concavitate curvedinis, sed a latere, ita ut fistula exeat ex canali perpendiculariter ad planum convexitatis & concavitatis, & deinde, si planum illud non sit horizontale, ut fistula quantum opus inflectatur, donec situm verticalem obtineat.

XVI.

XVI.

Corollaria generalia circa velocitates & preſſiones.

In effluxu liquoris uniformi & æquabili, æquatio generalis [Art. VI] mutatur, ob $dv = 0$, in hanc $\frac{vv(\alpha\alpha bb - \epsilon\epsilon\omega\omega)}{2\alpha\alpha b} = gha$, ſeu $vv = \frac{2\alpha\alpha ghba}{\alpha\alpha bb - \epsilon\epsilon\omega\omega}$. Unde hoc elegans Theorema deducitur: Si duo ſint vaſa vel canales, habentes æquales altitudines verticales, æqualeſque amplitudines tam ſupremas quam infimas, qualeſcunque de cætero figuras habeant canales, & quantumvis diſſimiles inter ſe, dummodo earum centricæ ita ſint comparatæ, ut ratio inter α & ϵ in uno ſit eadem quæ eſt inter α & ϵ in altero vaſe & canali: Dico ex utroque [ſubintellige jugiter pleno exiſtente] liquorem, poſtquam ad æquabilem effluxum pervenerit, effluxurum utrobique eadem velocitate. Quod ſane patet ex ipſo valore ipſius vv qui eſt $\frac{2\alpha\alpha ghba}{\alpha\alpha bb - \epsilon\epsilon\omega\omega}$; utpote in quo amplitudines intermediæ, haud reperiuntur. Sint ex. gr. duo vaſa cujuſcunque figuræ ABCD, EFGH [*Fig.* 12], quorum lineæ centricæ ſint rectæ, & quidem nil refert an ſint verticales an obliquæ, aut una magis minuſve obliqua quam altera, in omnibus enim his caſibus erit utrobique ſemper $\alpha = \epsilon$, dummodo habeant illa duo vaſa æquales altitudines verticales a, item æquales amplitudines extremas $AD = EH = b$, & $BC = FG = \omega$, aut quod ſufficit, modo ſit $AD : EH = BC : FG$; ſintque illa vaſa conſtanter plena aqua, aliove liquore homogeneo, in quibus nempe utrobique eſt eadem gravitas g naturalis animans ſtrata; erit velocitas maxima & uniformis aquæ per BC effluentis æqualis velocitati maximæ & uniformi aquæ effluentis per FG. In tali enim caſu, habetur utrobique [Art. VI] ob $dv = 0$, & $\alpha = \epsilon$, habetur, inquam, $(bb - \omega\omega)z = bha$; adeoque $z = \frac{bha}{bb - \omega\omega}$; conformiter *Corollario*

TAB. XC. *Fig.* 12.

rollario 2 Art. VII, & ut alias, in prima Parte, pro vase cylindrico tantum invenimus. Manifestum interim est valorem $\frac{hha}{hh-\omega\omega}$ pro data altitudine a utriusque vasis esse eundem, si ratio inter h & ω utrobique sit eadem, hoc est, si AD: EH = BC: FG. Notandum autem nos hic abstrahere a contractione venæ aqueæ, quæ aliquousque ultra orificium observari solet, in illis præcipue vasis, quæ subito in foramen desinunt in fundo latiori apertum, secus ac fit in illis figuram EFGH habentibus, & quasi in tubum cylindricum convergentibus, in quibus nulla conspicitur sensibilis venæ contractio. Interim, si ejus quoque habenda esset ratio; considerari deberet vas tanquam continuatum ad maximam venæ contractionem, ubi contrahi cessat: atque tunc amplitudo venæ contractæ esset sumenda pro ipso foramine inferiori ω, hujusque distantia ab amplitudine summa pro vera altitudine verticali.

XVII.

Si jam stantibus iisdem conditionibus, ut in præcedenti, duorum vasorum æque altorum ABCD, EFGH [*Fig.* 12] & in extremitatibus æque amplorum, atque centricas rectas habentium; habeant præterea adhuc tertiam amplitudinem alicubi LM, NO sibi mutuo æqualem, & ab orificiis BC, FG æqualiter distantem: erit non tantum velocitas maxima [per præced.] utrobique æqualis, sed etiam pressiones in LM & in NO æquales erunt; adeoque in fistulis iis in locis insertis atque in situm verticalem inflexis, aqua utrobique ad altitudinem eandem suspensa hærebit. Patet veritas hujus ex æquatione [Art. XII] quæ, ob $\alpha = \zeta = \frac{ds}{dt}$, in casu velocitatis uniformis abit in hanc simpliciorem $\frac{vv(yy-\omega\omega)}{2y} - gyt = \pi$, vel (scribendo $2gz$ pro vv) in hanc $\frac{gz(yy-\omega\omega)}{y} - gyt = \pi$, in qua, quia pro utroque vase sunt eadem z, y, ω, g, t, debet utique resultare idem valor

TAB. X C. *Fig.* 12.

valor ipsius π, proindeque etiam ipsius $\frac{\pi}{gy} = \frac{z(yy - \omega\omega)}{yy} - t$
$= \frac{bba(yy - \omega\omega)}{yy(bb - \omega\omega)} - t.$

XVIII.

Hinc si omnes LM, NO in æqualibus distantiis verticalibus a BC, FG, essent æquales; id quod fieret, si vasa illa duo ABCD, EFGH essent ex. gr. conoidica truncata ejusdem generis, unum rectum, alterum scalenum, in hoc casu non solum velocitates uniformes quibus aqua ex utroque vase effluere forent æquales, sed etiam pressiones in singulis altitudinibus æqualibus forent æquales, adeoque etiam suspensiones aquæ in fistulis hærentibus haberent in utroque vase eandem altitudinem.

XIX.

Quoniam æquatio Art. VII inventa pro velocitate generaliter determinanda, sive jam sit æquabilis, sive nondum æquabilis, dat $dx = \frac{\alpha M bb\omega dz}{\alpha\alpha bba - \alpha\alpha bbz + CC\omega\omega z}$, substituatur hic valor in æquatione pro pressionibus π [Art. XII] & $2gz$ pro vv, habebimus $\frac{gz(\alpha\alpha yy - \omega\omega ds^2 : dt^2)}{\alpha\alpha y} + \frac{(\alpha\alpha bba - \alpha\alpha bbz + CC\omega\omega z)gNy}{\alpha\alpha Mbb}$
$- gyt = \pi$: hinc altitudo liquoris in fistula, seu $\frac{\pi}{gy}$
$= \frac{z(\alpha\alpha yy - \omega\omega ds^2 : dt^2)}{\alpha\alpha yy} + \frac{N(\alpha\alpha bba - \alpha\alpha bbz + CC\omega\omega z)}{\alpha\alpha Mbb} - t$;
quæ adeo, pro quacunque determinata z, exprimit generaliter altitudinem liquoris in fistula. Hinc, quod curiosum est, invenitur statim altitudo illa initialis, hoc est, ea quæ observaretur in fistula primo momento quo orificium inferius aperiretur & liquor in procinctu esset exeundi. Cum enim, primo temporis momento, sit adhuc $z = o$, erit certe [deletis z] $\frac{\pi}{gy} = \frac{Na}{M} - t.$

XX.

Ante hanc demonſtrationem, potuiſſet aliquis dubius hærere, annon forte, in momento quo orificium BC aperitur, & antequam liquor in actualem motum erumpat, annon, inquam, preſſiones in quolibet loco LM adhuc eædem ſint, ſaltem per momentum temporis, quæ modo ante fuerant, cum orificium BC eſſet adhuc clauſum vel obturatum. Verum trita & vulgaris lex hydroſtatica ubique recepta docet, pro caſu vaſis obturati in BC, liquorem, in fiſtula alicubi in circumferentia ſtrati alicujus LM inſerta & verticaliter erecta, hærere ſuſpenſum in altitudine $= a - t$, hoc eſt, in eodem horizonte cum ſuperficie ſuprema AD liquoris in vaſe contenti. Nunc autem videmus rem aliter ſe habere, in caſu orificii clauſi BC, & aliter in caſu aperti ejuſdem, etiamſi liquor nondum actualiter effluat. Quia enim N, tanquam pars, minor eſt quam tota M, erit $\frac{Na}{M}$ minor quam a, adeoque etiam $\frac{Na}{M} - t$ minor quam $a - t$. Unde patet, in primo inſtanti quo aperitur orificium BC, liquorem jam aliquid quaſi amittere, vel potius remittere de ſua gravitate, quod impendit non ad premendum latera, ſed ad propellendum liquorem; adeo ut latera vaſis non amplius tam graviter premat, quam fecerat ante aperturam factam. Interim etiam hic monendum, me abſtrahere a cauſis acceſſoriis, quæ inventam altitudinem in fiſtula $\frac{Na}{M} - t$ poſſent alterare. Ex. gr. figuræ vaſis aliquid dandum eſt: Si enim eſſet valde amplum & ſubito convergeret in anguſtum foramen, tunc ſine dubio noſtra Theoria poſſet abludere ab eo quod experientia monſtraret: Ratio eſt quia Theoria ſupponit, ſtrata Fm, Nl, [*Fig.* 10] eam diſpoſitionem ad motum affectare [etiamſi nondum actu moveantur] ut per totum decurſum amplitudines Ff, Nn &c. conſervent ſitum horizontalem, undique ad latera uſque extenſum, atque inſuper linea centrica GHI tranſeat ubique per puncta media

TAB. XC. *Fig.* 10.

G,

N. CLXXXVI

Fig. 6.

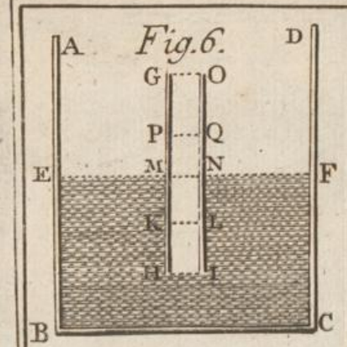


Fig. 7.

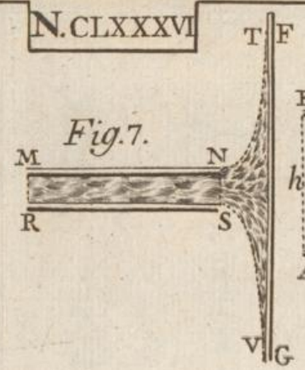


Fig. 8.

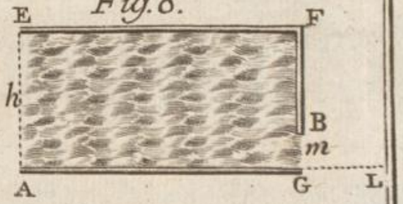


Fig. 9.

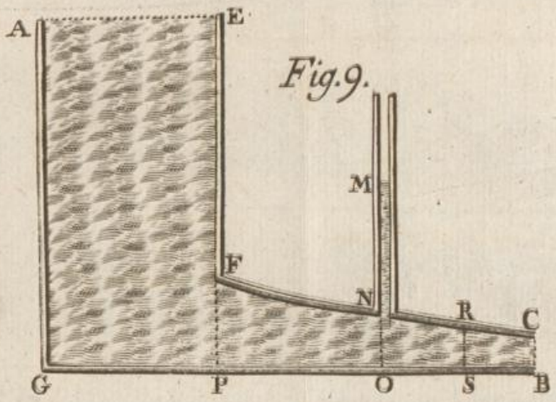


Fig. 10.

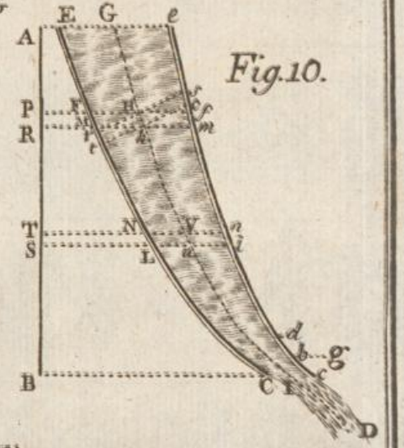
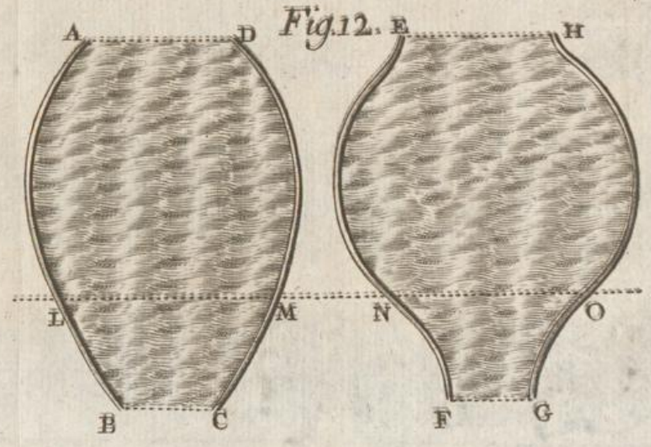


Fig. 11.



Fig. 12.



G, H, V, I; quod quidem iis in vaſis & canalibus, quorum latera paulatim, neque ſubito, ad orificium inferius convergunt vel divergunt, accurate ſatis ita obtinere debet ut Theoria docet; ſed in aliis valde amplis & deſinentibus in fundum amplum, quod pro exitu habet foramen anguſtum, in hiſce, ut probabile eſt, ſtrata ſe non extendunt per totas vaſis amplitudines, ſed aliquouſque tantum, prout id requirit qualitas liquoris non perfecte fluidi, ſed magis minuſve tenacis, ut a frictione minimam, quæ ſit poſſibilis, patiatur reſiſtentiam; relicta nimirum parte liquoris prope latera vaſis in quiete, vel ſine ſufficiente diſpoſitione ad motum. Unde fieri poteſt ut, in tali vaſe, gurges continuus ſeu aliqua quaſi cataracta generetur, qualem fere NEWTONUS concepit, quamvis non ea neceſſaria lege quam indicavit. Intelligitur ex dictis, in hujuſmodi vaſis non eſſe conſiderandam eorum figuram externam & artificialem, ſed illam internam gurgitis continui a natura formati, non qualem concepit NEWTONUS, ſed quæ optime convenit qualitati vel conſtitutioni liquoris. In hujus ergo gurgitis ſuperficie ambiente, ſi poſſet implantari fiſtula, obſervaretur liquoris in illa ſuſpenſi altitudo omnino ſemper ut regula noſtra poſtulat, ſive jam ſit in motu, ſive moveri incipiat liquor in vaſe.

XXI.

Cum vero non poſſit facile ſenſibus obſervari, quouſque in vaſe peramplo gurges vel cataracta terminetur, ſeu ubinam ejus ſuperficies ambiens exiſtat; ſecurius erit, ſi fiſtula intra vas uſque ad meditullium, hoc eſt, uſque ad lineam centricam perpendiculariter penetret; ac dein pars altera fiſtulæ extra vas ſurſum inflexa ſit verticalis. Hoc enim modo altitudo liquoris in fiſtula hoc unicum monſtrat, quanta ſit liquoris compreſſio in loco lineæ centricæ quem orificium fiſtulæ attingit, & ubi cauſæ illæ acceſſoriæ effectum compreſſionis alterantes, de quibus ſupra [Art. XV] egimus, jam nihil officiunt. Id tamen curandum, ut ſaltem portio fiſtulæ intra liquorem vaſis intruden-

da fit ſatis gracilis, ne alioquin nimia ejus craſſities libero motui liquoris aliquid impedimenti objiciat. His probe obſervatis, non dubito accuratiſſime obſervatum iri ſequentia; 1°. Generalem altitudinem liquoris in fiſtula fore [Art. XII. & XIII.] $\frac{\pi}{gy} = \frac{2(\alpha\alpha yy - \omega\omega ds^2 : dt^2)}{\alpha\alpha yy} + \frac{N\omega dz}{\alpha dx} - t$, durante adhuc effluxus acceleratione; 2°. ſed ceſſante ſenſibili acceleratione, ubi nempe velocitas pervenerit ad ſenſibilem uniformitatem, fore $\frac{\pi}{gy} = \frac{2(\alpha\alpha yy - \omega\omega ds^2 : dt^2)}{\alpha\alpha yy} - t$; 3°. altitudinem initialem fore [Art. XIX] $\frac{\pi}{gy} = \frac{Na}{M} - t$.

XXII.

Applicatio Theoriæ noſtræ ad Exempla vaſorum & canalium ſemper plenorum.

Sit vaſis alicujus linea centrica in ſitu verticali. Pro hoc caſu faciliori, ubi $\alpha = 6 = 1$, habetur [Art. VII] $z = \frac{hha}{hh - \omega\omega} \times (1 - 1 : f^{\frac{(hh-\omega\omega)x}{Mhh\omega}})$; id quod invenitur ex reductione æquationis ibi traditæ, & huic caſui applicatæ $(hh - \omega\omega) \times zdx + Mhh\omega dz = hhadx$, poſito ſcilicet $lf = 1$; adeoque exiſtente $x = \infty$, hoc eſt, in caſu æquabilis effluxus ſeu velocitatis uniformis, erit $z = \frac{hha}{hh - \omega\omega}$; unde fluit Theorema Art. XVI jam demonſtratum. Sit igitur vas ABCD (Fig. 13) cujuſcunque figuræ, cujus centrica vel altitudo verticalis $= a$, habeatque ſibi adaptatum canalem CK conflatum ex pluribus tubis, ex. gr. tribus cylindricis CG, FI, HK in ſitu horizontali poſitis: Sit amplitudo ſuprema AD [ad quam vas cum tubis jugiter plenum ſupponitur] $= h$, amplitudines CE $= m$, FG $= n$, HI $= q$, & foramen ultimi tubi $= \omega$. Dico fore ſemper $z = \frac{hha}{hh - \omega\omega}$, adeo ut nec figura vaſis, nec multitudo tuborum,

TAB. XCI. N°. CLXXXVI. *Fig.* 13.

borum, nec eorum amplitudines in consideracionem veniant, modo prima h & ultima ω sint datæ, ut & data sit altitudo vasis a. Neque etiam scire attinet, utrum gurges, vel cataracta sese extendat per totam vasis capacitatem, an tantum partem aliquam ejus circa lineam centricam occupet. Res est clara per Art. XV, quia canalis CK supponitur horizontalis, adeoque eadem semper est velocitas uniformis, quæ esset si foramen ω immediate ad CE esset adaptatum, ope laminæ alicujus perforatæ ad aperturam CE applicandæ.

COROLLARIUM.

Si ω sit valde parvum respectu h, erit $z = a$, ac proinde velocitas aquæ uniformiter effluentis, quæ maxima est quam acquirere potest, erit æqualis ei quam acquirit corpus grave cadendo ex altitudine $= a$.

XXIII.

Pro invenienda altitudine liquoris in fistula implantanda alicubi in canali horizontali CK; notetur in hoc casu esse $t = 0$, quia t significat excessum altitudinis verticalis loci ubi fistula inseritur, supra altitudinem foraminis per quod liquor egreditur; seu, quod idem est, t significat altitudinem loci insertionis fistulæ supra locum effluxus. Hic autem, ob positionem canalis horizontalem, ipsa quoque centrica quasi horizontalis censetur; præsertim si ejus tubi ex quibus canalis componitur, non admodum sunt ampli, ita ut [Art. XXII] strata liquoris per illos fluentis fiant verticalia. Erit igitur altitudo liquoris in fistula [Art. XIX], seu $\frac{\pi}{gy} = \frac{z(yy - \omega\omega)}{yy} + \frac{N(bba - bbz + \omega\omega z)}{Mbb}$; ob $\alpha = 6 = \frac{ds}{dt}$. In casu velocitatis uniformis, ubi (§. præced.) habetur $z = \frac{bba}{bb - \omega\omega}$; hoc valore substituto pro

z, evaneſcet terminus poſterior $\frac{N(hha - hhz + \omega\omega z)}{Mhh}$ & prior $\frac{z(yy - \omega\omega)}{yy}$ evadet $= \frac{hha(yy - \omega\omega)}{yy(hh - \omega\omega)}$; prodibit igitur altitudo in fiſtula $\frac{\pi}{gy} = \frac{hha(yy - \omega\omega)}{yy(hh - \omega\omega)}$. Conferantur quæ in Partis primæ Appendice † ſub finem jam invenimus, quamvis per aliam viam. Adeoque pro tubo primo CG, ubi y eſt m, erit illa altitudo $= \frac{hha(mm - \omega\omega)}{mm(hh - \omega\omega)}$; pro ſecundo tubo FI, ubi y eſt n, erit illa $= \frac{hha(nn - \omega\omega)}{nn(hh - \omega\omega)}$; pro tertio tubo HK, ubi y eſt q, erit altitudo in fiſtula $\frac{hha(qq - \omega\omega)}{qq(hh - \omega\omega)}$, & ſic porro, quotquot eſſent tubi canalem componentes. Quæ omnia accuratiſſime reſpondent experimentis de hac re ſumptis.

COROLLARIUM.

Altitudo initialis in fiſtula eſt $= \frac{Na}{M}$, ut ſupra inventum eſt pro vaſis ipſis ſine canalibus.

XXIV.

Quod itaque attinet ad altitudinem liquoris in fiſtula inſerenda aliquo in loco ipſius vaſis [& ſi opus producenda uſque ad lineam centricam, quam in poſterum ſemper rectilineam verticalem, alteram vero canali ad vas adaptato ut horizontalem ſupponimus]; ſit locus inſertionis in aliquo puncto ſtrati indeterminati LM, cujus diſtantia ab horizonte infimo $= t$, amplitudo gurgitis [ſi non ſit ipſa LM] quæcunque illa ſit per experientiam capienda $= r$; habebitur altitudo liquoris in fiſtula [per Art. XI huc applicatum] $= \frac{z(rr - \omega\omega)}{rr} + \frac{N(hha - hhz + \omega\omega z)}{Mhh} - t$, ubi $N = \int \frac{dt}{r}$, contentum inter BE

† ſupra, pag. 431.

&

& LM, & $M = \int \frac{dt}{r}$, sed contentum inter BE & AD [Art. VII]. Pro velocitate liquoris uniformiter effluentis, ubi $z = \frac{hha}{hh - \omega\omega}$, substituatur hic valor pro z, & prodibit altitudo in fistula $= \frac{hha(rr - \omega\omega)}{rr(hh - \omega\omega)} - t$, [evanescit enim terminus in quo N & M habentur]; addita itaque altitudine t, seu loci insertionis, habebitur totalis altitudo summitatis liquoris hærentis in fistula supra horizontem infimum BE $= \frac{hha(rr - \omega\omega)}{rr(hh - \omega\omega)}$. Quod si ω infinite parvum respectu h & r, erit illa totalis altitudo $= a$, hoc est, summitas liquoris in fistula est in eodem horizonte cum suprema amplitudine AD : hoc ita evenire debere, vel hinc quoque colligere possemus, quia liquor in vase quasi quiescit. Cæterum initialis altitudo totalis in fistula, existente nimirum $z = 0$, hic etiam est $= \frac{Na}{M}$. Quæ omnia egregie inter se conspirant.

XXV.

Ponamus nunc canalem horizontalem CK convergere in conum truncatum, seu qualemcunque conoïdicum, habereque majorem basin vasi obversam. Erit, pro velocitate uniformi aquæ effluentis, altitudo in fistula quovis in loco inter F & H implantata, [nominando amplitudinem FG $= y$] erit, inquam, altitudo illa [ut Art. XXIII expressa] $= \frac{hha(yy - \omega\omega)}{yy(hh - \omega\omega)}$. Hinc si minor basis sit vasi applicata, & canalis oblongus non nimis subito divergat, ne aqua in illo diffluat, sed strata ordine insequentia succedant præcedentibus, sicuti Theoria rite stabilita supponit, erit, ob y minus quam ω, pressio in latera negativa, ac proin mutatur in suctionem; qua fit ut, aqua in fistula verticaliter descendente, & hiante in aquam vasculo inferiori contentam, attollatur per suctionem ad altitudinem $=$

$\frac{hha(\omega\omega - yy)}{yy(hh - \omega\omega)}$. Quod si quoque ω majus sit quam h, fit numerator & denominator fractionis negativus, ideoque valor ejus rursus affirmativus, id quod indicat adesse pressionem. Quare existente vase ABCD semper pleno, quod haberet amplitudinem supremam AD minorem orificio canalis conoïdici divergentis, per cujus majorem basin aqua erumpit, observaretur iterum aquam in fistula sursum erecta continuo & sine fine ascensuram esse; in tali enim casu acceleratio aquæ effluentis nunquam cessat, nunquam proin pervenitur ad æquabilitatem velocitatis, quod patet ex generali æquatione [ex Art. VII huc applicata] $(hh - \omega\omega)z\,dx - Mhh\omega dz = hhadx$; vel clarius ex æquatione Art. XXII expositа in terminis finitis, $z = \frac{hha}{hh - \omega\omega} \times (1 - 1 : f^{\frac{(hh - \omega\omega)x : Mhh\omega}{}})$, quæ æquivalet huic $z = \frac{hha}{\omega\omega - hh} \times (f^{\frac{(\omega\omega - hh)x : Mhh\omega}{}} - 1)$; ex qua statim liquet, in casu quo ω majus quam h, evadere $z = \infty$, adeoque velocitatem infinitam, quando x est infinitum; secus ac fit si h majus est quam ω.

XXVI.

De brevitate temporis, ab initio effluxus, usque ad velocitatem sensibiliter æquabilem seu uniformem.

Etiamsi, accurate loquendo, requiratur tempus infinitum, antequam fluxus aquæ ex vasis per foramen prosilientis perveniat gradatim ad uniformitatem perfectam & geometricam; Experientia tamen quotidie monstrat aquam, ex vasis præsertim amplioribus, quamvis altitudinis vix trium quatuorve pedum, a primo fluxus momento, tanta rapiditate ad maximam suam & æquabilem fluxus velocitatem convergere, dum effluit per foramen mediocriter licet angustum, ut sensibus percipi non possint incrementa gradualia velocitatis, per quæ transit a quiete

ad

ad uniformem & maximam possibilem velocitatem quam sensibiliter acquirere potest. Ut hujus phænomeni rationem reddamus ex nostra Theoria; consideremus vas cylindricum vel prismaticum, sat magnæ amplitudinis h, & justæ altitudinis a; ex quo prorumpat aqua per foramen angustum ω in directione horizontali, sive id fiat immediate ex ipso vase, sive mediante canali in extremitate orificium ω habente. Supponamus tamen prius, brevitatis gratia, scilicet foramen ω in ipso vasis latere prope fundum esse insculptum.

XXVII.

Æquatio generalis [Art. VI] pro determinatione velocitatis adhuc crescentis hæc fuit, $\frac{vv(hh-\omega\omega)}{2h}+\frac{hh\omega vdv}{dx}\int\frac{dt}{y}=ghdx$, quæ in nostro casu, ubi $\int\frac{dt}{y}=\frac{a}{h}$, & $\omega\omega$ juxta hh negligi potest, in hanc mutatur $2a\omega vdv=2ghadx-hvvdx$, seu $dx=\frac{2a\omega vdv}{2gha-hvv}$; adeoque elementum temporis $d\theta$, seu $\frac{dx}{v}$, erit $\frac{2a\omega dv}{2gha-hvv}=\frac{2a\omega dv:h}{2ga-vv}=\frac{a\omega}{h\sqrt{2ga}}\left(\frac{dv}{v+\sqrt{2ga}}+\frac{dv}{-v+\sqrt{2ga}}\right)$; integrando habetur $\theta=\frac{a\omega}{h\sqrt{2ga}}\times l\left(\frac{v+\sqrt{2ga}}{-v+\sqrt{2ga}}\right)=$ [ob $v=\sqrt{2gz}$] $\frac{a\omega}{h\sqrt{2ga}}\times l\left(\frac{\sqrt{z}+\sqrt{a}}{-\sqrt{z}+\sqrt{a}}\right)=$ [art. XXII] $\frac{a\omega}{h\sqrt{2ga}}\times l\left(\left(1+\sqrt{(1-1:f^{hx:a\omega})}\right):\left(1-\sqrt{(1-1:f^{hx:a\omega})}\right)\right)$; Est enim in hoc casu $z=a(1-1:f^{hx:a\omega})$. Hinc $\frac{h\sqrt{2ga}}{a\omega}\theta=l\left(\left(1+\sqrt{(1-1:f^{hx:a\omega})}\right):\left(1-\sqrt{(1-1:f^{hx:a\omega})}\right)\right)$. Transeundo a logarithmis ad numeros & rite procedendo, invenietur $f^{hx:2a\omega}=$ huic fractioni $\left(f^{h\theta\sqrt{2ga}:a\omega}+1\right):2f^{h\theta\sqrt{2ga}:2a\omega}$.

XXVIII.

Verum ex principio dynamico pro lapsu libero gravium, po-

nendo $C =$ altitudini quam grave libere cadens percurrit tempore dato θ, invenietur $\theta = \sqrt{\frac{2C}{g}}$; ſubſtituatur hic valor in fractione modo inventa, & habebitur $f^{hx : 2a\omega} =$ huic alteri fractioni $(f^{2h\sqrt{aC} : a\omega} + 1) : 2f^{h\sqrt{aC} : a\omega}$. Nunc quia amplitudo vaſis h valde major ſupponitur quam amplitudo foraminis ω, & altitudo lapſus liberi C uno ſecundo horario percurrenda $= 15$ pedibus, ac præterea, ex natura curvæ logarithmicæ, f major quam binarius; manifeſtum eſt, pro qualibet mediocri altitudine vaſis a, hunc numerum $f^{2h\sqrt{aC} : a\omega}$ in immenſum ſuperare unitatem, ita ut hæc contemni poſſit in numeratore fractionis noſtræ: erit igitur ſenſibiliter $f^{hx : 2a\omega} = f^{2h\sqrt{aC} : a\omega} : 2f^{h\sqrt{aC} : a\omega} = \frac{1}{2} f^{h\sqrt{aC} : a\omega}$, ſeu $2f^{hx : 2a\omega} = f^{h\sqrt{aC} : a\omega}$, vel ſumendo logarithmos $\frac{hx}{2a\omega} + l\,2 = \frac{h\sqrt{aC}}{a\omega}$, unde $x = 2\sqrt{aC} - \frac{2a\omega l 2}{h} =$ [ob ω incomparabiliter minus quam h] $2\sqrt{aC} =$ [ponendo $a = 4$ ped. & $C = 15$ ped.] $2\sqrt{60}$ ped. $=$ circiter 16 pedibus. Quod ſi igitur in æquatione $z = a(1 - 1 : f^{hx : a\omega})$, quæ pro quolibet aquæ effluxu longitudinis x determinat velocitatem, ſubſtituamus 4 pro a, 16 pro x, 2 pro f [quamvis, quod rem fortius probaret, f majus ſit quam 2] & ponamus amplitudinem vaſis h eſſe ad amplitudinem foraminis ω, tantum ut 100 ad 1, habebimus $z = 4(1 - 1 : 2^{400})$, quod ob ſtupendam parvitatem fractionis $1 : 2^{400}$, non differre cenſetur a quatuor pedibus, quæ deſignat altitudinem vaſis, & ſimul illam a qua grave delapſum acquirit velocitatem æqualem ei quam habet effluxus cum pervenerit ad uniformitatem; unde patet uno ſecundo temporis elapſo, aquam effluentem jam habere ſenſibiliter illam velocitatem uniformem.

Sed ut melius appareat, quanta promptitudine convergat velocitas effluxus ad uniformitatem; videamus quam parum debeat abludere velocitas aquæ effluentis, acquiſita poſt elapſam deci-

decimam partem unius ſecundi, a maxima velocitate quam acquirere poſſet, ſi effluxus duraret per infinitum temporis ſpatium. Reducamus pedes ad pollices, & habebimus $a = 48$ poll. atque reperietur C circiter $= 2$ poll. unde x ſeu $2\sqrt{aC}$ circiter $= 20$ poll. & $f^{hx:a\omega} = f^{2000:48}$, pro quo ſcribo tantum 2^{40}. Erit itaque $z = a(1 - 1:2^{40})$; quod etiamnum, ob imperceptibilem parvitatem fractionis $1:2^{40}$, ab ipſo a denotante velocitatem uniformem neutiquam differre cenſendum eſt.

COROLLARIUM.

Effluxus aquæ ex vaſis amplioribus per anguſta foramina, poteſt tuto conſiderari tanquam æquabilis in momento poſt motus initium.

XXIX.

Theorema hydraulicum generale directe deductum ex principiis hydrodynamicis, demonſtratum per Methodum indirectam virium vivarum.

Ad uberiorem confirmationem bonitatis methodi noſtræ directæ & univerſalis, lubet nunc tradere ſolutionem indirectam, ex Theoria conſervationis virium vivarum eruendam, Propoſitionis principalis de velocitate aquæ erumpentis ex vaſe & canali ſemper pleno, prout illam ſtabilivimus per æquationem Art. VII traditam.

Concipiamus aquam per Cc [*Fig.* 10] egredientem, dirigi ſtatim ad ſitum horizontalem, ut conſiderari poſſit ſine aſcenſu & ſine deſcenſu in ſuo progreſſu: Sit vero x longitudo cylindri aquei ſecundum directionem obliquam ID, habentis pro baſi Cc, qui cylindrus contineat tantam quantitatem aquæ quanta jam egreſſa eſt; erit illa quantitas $= \frac{\omega x}{a}$, cujus differentiale $\frac{\omega dx}{a}$ deſignat particulam aquæ elementarem porro ſtatim egreſſuram ex TAB. XC. *Fig.* 10.

Cc, poſtquam egreſſa eſt quantitas $\frac{\omega x}{\alpha}$. Sit z altitudo verticalis, ex qua grave aliquod libere delapſum acquirat velocitatem quæſitam, quam nempe debet habere particula illa elementaris aquæ $\frac{\omega dx}{\alpha}$; erit, per principium virium vivarum ejus, velocitas $= \sqrt{z}$, & ſubvelocitas $= \frac{1}{\alpha}\sqrt{z}$, unde ſubvelocitas in G $= \frac{\omega\sqrt{z}}{\alpha b}$, ipſa vero velocitas actualis in G in directione tangentis $= \frac{\mathfrak{C}\omega\sqrt{z}}{\alpha b}$. Similiter ſubvelocitas in quolibet puncto H $= \frac{\omega\sqrt{z}}{\alpha y}$, adeoque ipſa actualis velocitas in H $= \frac{\omega dz\sqrt{z}}{\alpha y dt}$.

XXX.

Quoniam autem per ſingulas amplitudines, in toto canali, eodem tempuſculo, eadem quantitas aquæ $\frac{\omega dx}{\alpha}$ perfluere debet, concipienda eſt talis quantitas elementaris $\frac{\omega dx}{\alpha}$ tanquam collocata ſupra ſupremam Ee, in altitudine verticali $= \frac{\mathfrak{C}\mathfrak{C}\omega\omega z}{\alpha\alpha bb}$, ut convenienti tempore cadere incipiens ſua gravitate perveniat ad amplitudinem Ee, ibique reſarciat, eodem momento & eadem velocitate $\frac{\mathfrak{C}\omega\sqrt{z}}{\alpha b}$, particulam ſupremam $\frac{\omega dx}{\alpha}$ deſcendentem in canali, atque hoc modo canalis jugiter plenus conſervabitur, prout conditio Problematis id requirit.

XXXI.

Quod ſi igitur ſingulæ $\frac{\omega dx}{\alpha}$ ſua quæque altitudine $\frac{\mathfrak{C}\mathfrak{C}\omega\omega z}{\alpha\alpha bb}$ collocatæ ſupra Ee fuerint, & jam omnes ſucceſſive delapſæ ſint, per Ee ingreſſuræ, canalem ſemper plenum conſervantes, patet æqualem quantitatem aquæ $\int\frac{\omega dx}{\alpha}$ ſeu $\frac{\omega x}{\alpha}$ per orificium Cc eſſe egreſ-

egreſſam, quam in plano horizontali Cc prolongato moveri concipimus, & ita quidem ut ſingulæ ejus particulæ $\frac{\omega dx}{a}$ habeant ſuam acquiſitam velocitatem $\sqrt{z}$. Quare unaquæque ex particulis $\frac{\omega dx}{a}$ cenſenda eſt deſcendiſſe ex loco primitivo quietis, uſque ad infimum horizontem BCc prolongatum, hoc eſt, ex altitudine $= \frac{\mathfrak{C}\mathfrak{C}\omega\omega z}{aabb} + AB = \frac{\mathfrak{C}\mathfrak{C}\omega\omega z}{aabb} + a$. Oportet itaque multiplicare deſcenſus per particulas deſcendentes, ut habeatur $\frac{\mathfrak{C}\mathfrak{C}\omega^3 z dx}{a^3 bb} + \frac{a\omega dx}{a}$; quod integratum dat $\frac{\mathfrak{C}\mathfrak{C}\omega^3}{a^3 bb}\int z dx + \frac{a\omega x}{a} =$ vi vivæ ex deſcenſu univerſo particularum gravium collectæ. Hæc autem æqualis eſſe debet effectui ſuo, qui conſiſtit in aggregato productorum, quæ fiunt ducendo ſingulas particulas in quadrata ſuarum reſpective velocitatum.

XXXII.

Quocirca particulam $\frac{\omega dx}{a}$ jam egreſſam ex canali multiplico per quadratum velocitatis ſuæ, quod eſt z, & habebo $\frac{\omega z dx}{a}$, cujus integrale $\frac{\omega}{a}\int z dx$, exprimit vim vivam ex velocitatibus oriundam totius materiæ aqueæ ex canali egreſſæ; cui addenda adhuc eſt ea quam habet omnis materia intra canalem fluens, & quæ reperitur multiplicando ſingula ſtrata ydt per quadratum ſuarum reſpective ultimarum velocitatum $\frac{\omega\omega z ds^2}{aayydt^2}$, adeo ut cujuſlibet ſtrati ydt prodeat vis viva ex motu ſuo oriunda $\frac{\omega\omega z ds^2}{aayydt^2} \times ydt = \frac{\omega\omega z ds^2}{aaydt}$: proinde vis viva omnium ſtratorum $= \frac{\omega\omega z}{aa}\int\frac{ds^2}{ydt}$, per totum canalem ſumendorum $=$ [ob datum per magnitudinem datam totius canalis $\int\frac{ds^2}{ydt}$, quod di-

catur M] $\frac{M\omega\omega z}{aa}$. Sumendo itaque aggregatum ambarum harum virium vivarum ex motu oriundarum, habebimus vim vivam universi systematis aquei $= \frac{\omega}{a}\int z dx + \frac{M\omega\omega z}{aa}$.

XXXIII.

Hinc æquando hanc vim ex motu collectam, cum illa quam modo ante ex descensu particularum collegimus; suppeditabitur nobis hæc æquatio $\frac{\mathfrak{G}\mathfrak{G}\omega^3}{a^3hh}\int z dx + \frac{a\omega x}{a} = \frac{\omega}{a}\int z dx + \frac{M\omega\omega z}{aa}$, quæ differentiata & a fractionibus liberata, hanc præbet, $\mathfrak{G}\mathfrak{G}\omega\omega z dx - aahhz dx = Mzhh\omega dz - aahhadx$, vel denique [reductione peracta] hanc $(aahh - \mathfrak{G}\mathfrak{G}\omega\omega) z dx + aMhh\omega dz = aahhadx$: omnino ut invenimus per methodum directam [Art. VII].

COROLLARIUM.

Si h vel Ee sit amplitudinis permagnæ respectu ω vel Cc, æquatio inventa abit in hanc $azdx + M\omega dz = aadx$, & pro effluxu uniformi in hanc $z = a$. Sin vero Ee non quidem sit valde magnæ amplitudinis respectu Cc, velimus tamen ut aqua nova succedat continuo descendenti intra canalem, non cum velocitate acquisita aliqua, sed ex quiete incipiat succedere, ita ut etiam hoc modo canalis semper plenus conservetur; poterit hoc effectui dari, si ad Ee (*Fig.* 14) adaptatur vas amplissimum sed valde parvæ altitudinis, quod sit aqua plenum. Effluet utique ex illo aqua sumens motum ex quiete, & tamen influens in canalem cum debita velocitate, conservabit jugiter ejus plenitudinem. Res ipsa patet ex figura: Ubi canalis ECce adaptatum habet vas cylindricum amplissimum AQVK, cujus altitudo AK vel QV valde parva supponitur, ita ut altitudinem verticalem AB canalis Ec sensibiliter non augeat, id est, ut KB sumi possit pro AB, & tamen capacitas AV hujus

TAB. XCI. N°. CLXXXVI. *Fig.* 14.

jus vasis cylindrici permagnam aquæ copiam contineat. Quare ut jam velocitas aquæ effluentis per C c determinetur, non amplius E e, sed K V, sumenda est pro prima amplitudine b, manente interim altitudine verticali a canalis, quia per hypothesin sensibiliter non differt A B a K B. Hoc pacto, habebimus semper pro velocitate uniformi $z = a$, hoc est, eam velocitatem quam grave acquireret cadendo libere ex altitudine $= a = AB$, seu K B.

XXXIV.

Exemplum singulare determinandi motus aquæ in canali conoidico verticaliter descendentis, ubi nihil effluit nullaque nova aqua descendenti succedit.

Esto Hyperbola B E G (*Fig.* 15) inter asymptotos orthogonales, unam verticalem A M, alteram horizontalem A H; cujus applicatæ D I, E K, F L, G M, &c. designent amplitudines ipsas canalis conoidici in infinitum continuati, qui generari intelligitur, si alia hyperbola inter easdem asymptotos [cujus applicatæ sunt ut radices hyperbolæ ordinariæ prioris] descripta circa asymptoton verticalem, tanquam circa axem, revolvitur. Concipiatur in loco quocunque canalis dari partitionem aquæ, designatam per aream hyperbolicam D K, a quiete descendere incipientem, & eam descendendo perveniisse in locum quemlibet alium F M; ita ut per consequens F M sit $=$ D K. Quæruntur velocitates in G M, in F L, &c. & velocitas cujuscunque strati intermedii P O o p. TAB. XCI. N°. CLXXXVI. *Fig.* 15.

XXXV.

Sit unumquodque rectangulum coordinatarum, hoc est, productum amplitudinis cujusque P O per altitudinem conoidis A O $= aa$; item absciss æ datæ A I $= b$, A K $= c$; descensus quilibet assumptus A L amplitudinis superioris $= x$. Erunt, ex natura

tura hyperbolæ, amplitudo $DI = \frac{aa}{b}$, $EK = \frac{aa}{c}$, $FL = \frac{aa}{x}$, & præterea [ob $DK = FM$] $AM = \frac{cx}{b}$, proinde $GM = \frac{aab}{cx}$; ipsaque area vel potius solidum DK vel $FM = aa(lc - lb)$. Erit porro [calculo docente] centri gravitatis areæ DK distantia ab horizonte $AH = \frac{c-b}{lc-lb}$, & distantia centri gravitatis areæ FM [nota, per aream semper solidum me intelligere] ab eadem $AH = \frac{x(c-b)}{b(lc-lb)}$. Hinc descensus centri gravitatis ex situ DK in situm $FM = \frac{(x-b)\times(c-b)}{b(lc-lb)}$, multiplicetur per quantitatem aquæ descendentis designatam per $aa(lc-lb)$, erit productum $\frac{aa(x-b)\times(c-b)}{b} =$ vi vivæ ex descensu productæ.

XXXVI.

Dicatur jam velocitas in $GM = \sqrt{z}$, erit velocitas in $FL = \frac{b}{c}\sqrt{z}$: Dicatur etiam quælibet $AO = y$, erit $PO = \frac{aa}{y}$, stratum $Po = \frac{aady}{y}$, ipsaque ejus velocitas $= \frac{by}{cx}\sqrt{z}$. Hujus ergo quadratum ductum in stratum Po dat $\frac{aabbzydy}{ccxx} =$ vi vivæ strati Po, cujus integrale debite correctum [sumendo a, b, c, z & x pro constantibus] $= \frac{aabbz}{2ccxx}yy - \frac{aabbz}{2cc}$ $=$ [in casu y, seu AO, $= \frac{cx}{b}$ seu AM] $\frac{1}{2}aaz - \frac{aabbz}{2cc}$ $= \frac{aaz}{2cc}(cc-bb) =$ vi vivæ totius massæ aqueæ ex motu oriundæ. Comparando hanc cum præcedente, habebimus

$\frac{aa(x-b)\times(c-b)}{b} = \frac{aaz}{2cc}(cc-bb)$; unde per reductionem invenietur $z = \frac{(x-b)2cc}{(c+b)b}$ = quadrato velocitatis in GM; adeoque quadratum velocitatis in FL $= \frac{(x-b)2b}{c+c}$, & quadratum velocitatis cujuſcunque ſtrati intermedii Po [pro abſciſſa AO ſeu y] $= \frac{(x-b)2byy}{(c+b)xx}$.

COROLLARIUM I.

Stratum infimum EK, deſcendens ex quiete in ſitum GM, acquirit majorem velocitatem quam corpus grave libere cadens ex altitudine KM. Eſt enim $\frac{(x-b)2cc}{(c+b)b}$ majus quam KM, vel quam $\frac{cx}{b} - b$.

COROLLARIUM II.

Sed ſtratum ſupremum DI deſcendens in locum FL, acquirit minorem velocitatem quam grave cadens libere ex altitudine IL. Nam $\frac{(x-b)2b}{c+b}$ minus eſt quam IL, ſeu quam $x-b$.

COROLLARIUM III.

Partes ergo inferiores maſſæ aqueæ fortius, & ſuperiores ſegnius accelerantur, quam ſi libere deſcenderent a ſola naturali gravitate animatæ. Quod vel hinc quoque citra calculum prævideri poterat, quia partes aquæ in locis anguſtioribus premuntur ab incumbentibus, atque ſic ad majorem accelerationem incitantur; contra vero renituntur partibus iis quæ occupant loca ampliora, atque ita ſuperiores in acceleratione ſua naturali retardantur.

COROLLARIUM IV.

Datur itaque alicubi ſtratum P o intermedium, quod nec incitatur nec retardatur, ſed eodem ritu acceleratur, ac ſi libere deſcenderet. Hoc autem ut determinetur, facio ut AL ad AO, ſeu ut x ad y, ita AI ſeu b ad $A\omega$, quæ erit $\frac{by}{x}$, eritque $\pi\omega$ ſitus primitivus ſtrati P o. Proinde ωO, ſeu $y - \frac{by}{x}$, eſt altitudo per quam deſcendit ſtratum P o. Ut igitur acceleratio hujus ſtrati ſit = naturali, oportet tantum facere $y - \frac{by}{x} = \frac{(x-b)2byy}{(c+b)xx}$; nunc prodibit $y = \frac{(c+b)x}{2b}$; id quod oſtendit diſtantiam AO eſſe mediam arithmeticam inter AL & AM; ſicuti $A\omega$ eſt media arithmetica inter AI & AK: adeoque LO = OM, & $I\omega = \omega K$. His itaque in locis, ſtratum intermedium P o tantundem premitur deorſum verſus ab incumbente aqua FO, quantum ſurſum verſus reprimitur ab aqua ſubjecta p M; ita ut haud aliter deſcendat, quam ſi libere deſcenderet a ſola gravitate naturali animatum. Cæterum & hoc quoque obſervandum, in iiſdem his locis fieri maximam aquæ compreſſionem; unde concludimus, ſi in loco ſtrati P o inſereretur fiſtula verticaliter, fore ut aqua in illa ad majorem altitudinem a loco inſertionis aſcenderet, quam ſi inſereretur in cujuſlibet alius loci ſtrato inter FL & GM. Etenim altitudo in fiſtula dependet a ſola aquæ compreſſione, ut ex ſupra explicatis patet.

XXXVII.

Collatio hujus ſolutionis per vires vivas, cum ea quæ elicitur per methodum noſtram directam ex principiis mere dynamicis petitam.

In Scripti hujus hydraulici Parte ſecunda Art. VII* dedimus

* ſupra pag. 437.

per

per principia dynamica æquationem generaliſſimam pro determinatione velocitatis, nempe hanc $(\alpha\alpha hh - \mathfrak{C}\mathfrak{C}\omega\omega)\,zdx + \alpha Mhh\omega dz = \alpha\alpha hhadx$. Sed ibi ſupponitur vas vel canalis ſemper plenus, ſuccedente nimirum continuo liquore novo, eadem velocitate ſeſe adjungente illi qui in ſuprema amplitudine jam jam deſcendit, ipſeque canalis exiſtit datæ & determinatæ altitudinis verticalis. Cum vero, in præſenti exemplo, canalis ſit indefinitæ altitudinis, in quo quippe pars tantum liquore plena FM locum ſuum ſemper mutat, habetque proin altitudinem ſuam LM ſingulis momentis variabilem; adeo ut non ſtatim videatur hujus exempli caſum contineri ſub formula illa inventa Art. VII; cum præſertim nullus novus liquor hic ſuccedat deſcendenti, ſed una eademque ſemper ejus quantitas DK vel FM in canali conſervetur, modo hunc, modo alium locum occupans.

XXXVIII.

Interim monſtrabimus, quo pacto, per aliquam mentis fictionem, præſens caſus reduci poſſit ad leges hypotheſeos Art. VII ſtabilitæ. Conſiderandum nempe ſpatium primitivum DEKI ſub ſpecie canalis datæ altitudinis IK, cujus amplitudo ſuperior eſt DI, inferior EK; utraque data & determinata: Jam ex EK dum liquor fluit, occupaturus loca inferiora canalis prolongati; fingo per ſupremam amplitudinem DI ſubingredi fluidum aliquod, tam gravitatis quam omnis inertiæ vel reſiſtentiæ expers, quod, quamvis tale in rerum natura non detur, tamen ita fingi poteſt, ut nihil aliud agat quam ſupplere ſpatium quod a liquore deſcendente vacuum relinqueretur. Hoc ita præſuppoſito, deſcenderit jam liquor realis ex DK in locum FM: Hujus ſingulorum ſtratorum PO vires, tum hydroſtaticas tum hydraulicas, transfero ad ſupremam amplitudinem DI, ubi premat fluidum fictum, quod occupat ſpatium DFLI, eundemque effectum præſtare debet, quam præſtat vis a gravitate oriunda liquoris realis FM pariter tranſlata ad amplitudinem ſupremam

DI, & hæc est illa vis quam vocavi p seu $ghα$: omnia applicando ad mentem Theoriæ nostræ in Scripto hoc hydraulico expositæ. Atque sic nullæ aliæ vires in computum venient, quam quæ resultant a gravitate & motu liquoris realis, fluido ficto nihil omnino contribuente, & nullum alium in finem inservente, quam ut transmittat vires translatas ad depellendum liquorem realem FM.

XXXIX.

Nihil igitur aliud restat, quam ut debita fiat applicatio methodi expositæ in Art. IV, & V; eum in finem ut accommodetur ad exemplum propositum: ubi statim patet, esse $α = ϵ = 1$; reliquæ vero litteræ designant hic ea quæ sequuntur, scilicet b = DI, $ω$ = EK, a seu altitudo liquoris realis = LM, M = summæ omnium $\frac{Oo}{IO}$ in altitudine LM contentorum; item z = altitudini ex qua grave libere delapsum acquirit velocitatem v, qua cum liquor realis, sub initium descensus, vel postea fluidum fictum effluit per EK, ac denique dq = progressui momentaneo ex amplitudine EK.

XL.

His probe observatis, nunc ita procedo: Posita velocitate per EK = v, erit velocitas per FL = $\frac{xv}{c}$, velocitas per GM = $\frac{xv}{b}$; progressus momentaneus per GM = $d(AM) = \frac{cdx}{b}$, progressus per PO = $d(AO) = \frac{ydx}{x}$, progressus per EK seu $dq = \frac{cdx}{x}$; qui progressus omnes cum debeant esse simultanei, sunt utique in ratione reciproca amplitudinum, sicuti & ipsæ velocitates, adeoque in ratione directa distantiarum ab horizontali AH. Quærenda jam est, ad imitationem Art. IV [existente hic $α = ϵ = 1$] vis hydrostatica, quæ exprimitur per semissem amplitudinis

dinis ſupremæ DI multiplicatum per differentiam quadratorum velocitatum maximæ per GM & minimæ per FL. Eſt autem DI $= \frac{aa}{b}$, velocitas per GM $= \frac{xv}{b}$, & velocitas per FL $= \frac{xv}{c}$, unde tota vis hydroſtatica $= \frac{aa}{2b}\left(\frac{xxvv}{bb} - \frac{xxvv}{cc}\right) = \frac{aaxxvv}{2b^3cc} \times (cc - bb)$.

XLI.

Ad imitationem Art. V, vim hydraulicam ita determino. Vim acceleratricem ſtrati indefiniti Po, quam voco γ', multiplico per ejus progreſſum $\frac{ydx}{x}$, & habebo per principium dynamicum $\frac{\gamma' ydx}{x} = u'du' = \frac{yyvdv}{cc}$; unde vis acceleratrix progreſſiva $\gamma' = \frac{xyvdv}{ccdx}$, & ipſa vis motrix ſtrati Po, hoc eſt, γ' Po $= \frac{aaxvdvdy}{ccdx}$, quæ tranſlata ad amplitudinem DI, ſeu ad $\frac{aa}{b}$, facit $\frac{aaxvdvydy}{bccdx}$, quod integratum dat $\frac{aaxvdvyy}{2bccdx} =$ [corrigendo vel ſumendo per omnes yy, quæ ſunt contentæ in intervallo LM] $\frac{aax^3vdv(cc-bb)}{2b^3ccdx}$ = vi hydraulicæ. Aggregatum virium hydroſtaticæ & hydraulicæ erit $\frac{aaxxvv(cc-bb)}{2b^3cc} + \frac{aax^3vdv(cc-bb)}{2b^3ccdx}$ ſeu $\frac{aaxx}{2b^3cc}\left(vv + \frac{xvdv}{dx}\right) \times (cc - bb)$, quod virium aggregatum debet eſſe æquale vi primitivæ tranſlatæ ex gravitate ſtratorum oriundæ. Habetur autem vis primitiva tranſlata cujuſlibet ſtrati Po, faciendo ut PO ad DI, ſeu ut AI ad AO, hoc eſt, ut b ad y, ita $g \times$ Po ſeu $\frac{gaady}{y}$ ad $\frac{gaady}{b}$, quod debite integratum per intervallum LM dat $\frac{gaax(c-b)}{bb}$ pro tota vi primitiva tranſlata.

XLII.

Lucramur ergo æquationem inter aggregatum virium hydroſtaticæ & hydraulicæ, atque inter vim primitivam translatam, quæ æquatio ita ſe habet $\frac{aaxx}{2bcc}\left(vv+\frac{xvdv}{dx}\right)\times(cc-bb)=\frac{gaax(c-b)}{bb}$, unde dividendo per $\frac{aax}{bb}(cc-bb)$ prodit hæc altera $\frac{x}{2bcc}\left(vv+\frac{xvdv}{dx}\right)=\frac{g}{c+b}$, vel reducendo, hæc, $xvvdx+xxvdv=\frac{2gbccdx}{c+b}$; atque integrando, & corrigendo debito modo [ut AL, vel x, exiſtente $=$ AI vel $=b$, ipſum v ſit $=0$] habebitur $\frac{1}{2}xxvv=\frac{2gbccx-2gbbcc}{c+b}$, aut ſcribendo, ſecundum legem dynamicam, $2gz$ pro vv, & dividendo per g, erit $xxz=\frac{2bccx-2bbcc}{c+b}$, adeoque $z=\frac{(x-b)2bcc}{xx(c+b)}$, quod determinat velocitatem per EK; ex qua nunc determinatur velocitas per quamlibet aliam amplitudinem. Faciendo namque ut GM^2 ad AM^2, hoc eſt ut cc ad $\frac{ccxx}{bb}$, ſive ut bb ad xx, ita $\frac{(x-b)2bcc}{xx(c+b)}$ ad $\frac{(x-b)2cc}{b(c+b)}$, erit hoc $=$ altitudini, ex qua grave libere cadendo acquirit velocitatem quam habet liquor in puncto infimo M. Faciendo porro ut cc ad xx, ita $\frac{(x-b)2bcc}{xx(c+b)}$ ad $\frac{(x-b)2b}{c+b}=$ altitudini unde grave libere delapſum habebit velocitatem eam quæ convenit liquori in ſupremo puncto L. Ac denique faciendo ut cc ad yy, ita $\frac{(x-b)2bcc}{xx(c+b)}$ ad $\frac{(x-b)2byy}{xx(c+b)}$, indicabit hoc altitudinem ex qua grave libere cadere debet ut acquirat debitam velocitatem, quam liquor habebit in puncto quolibet dato intermedio O. Quæ omnia mirifice conſpirant cum iis quæ invenimus per Theoriam virium vivarum.

XLIII.

XLIII.

Sed & hoc jam præstare possumus, quod non æque facile præstari potest per vires vivas, scilicet invenire quantum liquor inter descendendum in quavis sui parte comprimatur. Vidimus quidem supra in *Coroll.* IV, liquorem, postquam ex situ initiali seu primitivo DK descendit in situm FM, in singulis suis partibus PO diversas pati compressiones; atque earum maximam esse, ubi PO bifariam secat LM: verum ejus quantitatem determinare & cum pondere aliquo dato comparare, nedum in aliis locis, cum scilicet PO dividit LM in alia quacunque ratione, res esset altioris indaginis, si quis id ex natura virium vivarum eruere vellet. Per methodum nostram directam, in capite de pressionibus expositam, haud arduum est quæsitum obtinere, etiam pro hoc peculiari exemplo.

XLIV.

Sit itaque indagandum, quanta vi massa liquoris FM comprimatur in quolibet loco PO, quam vim quærendam hic etiam vocabo π. Ostendi Art. XI & XII, si portio tantum PM, remoto residuo FO, descendere pergeret, sed ita ut non solum a propria gravitate, sed insuper etiam a π urgeretur, fore ut [saltem primo momento] eodem modo acceleraretur, quo accelerari debet tota massa FM a sola sua gravitate. Secetur IK in ω in simili ratione ut secta est LM in O, ita ut AI: $A\omega$ = AL: AO; erit $\pi\omega$ situs initialis ipsius P. Et πK = PM. Sit AL ad AO, vel AI ad $A\omega$, ut 1 ad n, proinde AO = nx & $A\omega = nb$. Fingamusque liquorem in πK contentum descendere vi suæ gravitatis, ac præterea vi π, quæ in quolibet loco descensus ipsi convenit, ut acceleratio fiat perinde ac si tota massa DK vi sola suæ gravitatis descenderet. Quare quod erat AL, vel x, id nunc est AO, vel nx; & quod erat AI, vel b, id nunc est nb. Ideoque vires hydrostaticæ & hydrauliçæ inveniun-

tur,

tur, si nx pro x, & ndx pro dx, item nb pro b scribatur, atque sic habebitur $\frac{aannxxvv}{2n^3b^3cc}(cc - nnbb)$ vel $\frac{aaxxvv}{2nb^3cc}(cc - nnbb)$ = vi hydrostaticæ, nec non $\frac{aan^3x^3vdv}{2n^3b^3ccndx}(cc - nnbb)$ vel $\frac{aax^3vdv}{2nb^3ccdx}(cc - nnbb)$ = vi hydraulicæ. Vis autem per translationem a gravitate oriunda, quæ erat $\frac{gaax(c-b)}{bb}$, nunc est utique $\frac{gaanx}{nnbb}(c - nb)$ vel $\frac{gaax}{nbb}(c - nb)$.

XLV.

Sumendo jam aggregatum virium hydrostaticæ & hydraulicæ; illudque æquando cum vi primitiva translata ex gravitate oriunda $\frac{gaax}{nbb}(c - nb)$, cui addi debet vis compressionis translata ex PO in $\pi\omega$, quæ habetur si facimus ut PO ad $\pi\omega$, seu ut AI ad AL, hoc est, ut b ad x, ita π ad $\frac{x\pi}{b}$, lucramur hanc æquationem $\left(\frac{aaxxvv}{2nb^3cc} + \frac{aax^3vdv}{2nb^3ccdx}\right)\times(cc - nnbb) = \frac{gaax}{nbb}\times(c - nb) + \frac{x\pi}{b}$, quæ ordinata hanc induit formam $\frac{aa}{2nbbcc}\times\left(d\left(\frac{1}{2}xxvv\right)\times(cc - nnbb)\right) = \frac{gaadx}{nb}\times(c - nb) + \pi dx$. Quoniam autem velocitas massæ diminutæ PM, sed pressæ a vi π, eadem esse debet quæ est velocitas massæ integræ FM, pro qua velocitate modo supra invenimus $\frac{1}{2}xxvv = \frac{2gbccx - 2gbbcc}{c+b}$; scribamus hujus differentiale, quod est $\frac{2gbccdx}{c+b}$ pro $d\left(\frac{1}{2}xxvv\right)$, & prodibit $\frac{gaadx}{nb(c+b)}(cc - nnbb) = \frac{gaadx}{nb}(c - nb) + \pi dx$. Dividendo per dx, & transponendo obtinebimus $\pi = \frac{gaa(cc - nnbb - (c - nb)\times(c+b))}{nb(c+b)} = \frac{gaa(cn - c - nnb + nb)}{n(c+b)}$. Quocirca si ad PO inseratur fistula verticaliter erigenda, ut cognosca-

gnoſcatur ad quam altitudinem liquor in illa [ſaltem per tempus breviuſculum] ſuſpenſus hærere poſſet, dividendum eſt π per $g \times PO$, hoc eſt, per $\frac{gaa}{nx}$, ut habeatur $\frac{\pi n x}{gaa} = \frac{x(cn-c-nnb+nb)}{c+b}$ = altitudini liquoris in fiſtula, ex qua altitudine æſtimanda eſt compreſſio abſoluta liquoris in PO. *Q. E. I.*

XLVI.

Quod ſi porro determinare oporteat punctum O in data qualibet LM, ubi intenſitas compreſſionis ſit maxima, id eſt, ubi liquor in fiſtula maximam obtinebit altitudinem; differentianda eſt quantitas inventa $\frac{x(cn-c-nnb+nb)}{c+b}$, ſumto n pro variabili, & reliquis pro conſtantibus; quo facto prodibit $c+b-2bn=0$, unde reſultat $n = \frac{c+b}{2b}$, adeoque nx ſeu AO $= \frac{(c+b)x}{2b} = \frac{c+b}{2b}$ AL $= \frac{c}{2b}$ AL $+ \frac{1}{2}$ AL $= \frac{1}{2}$ AM $+ \frac{1}{2}$ AL. Unde patet punctum O maximæ compreſſionis eſſe in medio inter M & L; plane ut ſupra in *Coroll.* IV conjectando prævidimus.

XLVII.

Præterea, ſi in expreſſione $\frac{x(cn-c-nnb+nb)}{c+b}$ ſubſtituatur valor inventus ipſius n, qui eſt $\frac{c+b}{2b}$, habebitur ipſa liquoris maxima altitudo in fiſtula $\frac{x(c-b)^2}{4b(c+b)}$. Hinc quia $\frac{1}{2}$ LM, ſeu LO $= \frac{x(c-b)}{2b}$, erit LO, ſeu altitudo liquoris in canali ſupra punctum O ubi fiſtula inſeritur, ad altitudinem liquoris in fiſtula $= \frac{x(c-b)}{2b} : \frac{x(c-b)^2}{4b(c+b)} = 2(c+b) : c-b$, ſeu ut duplum ſummæ diſtantiarum primitivarum AK + AI ad earundem ſimplam differentiam, hoc eſt ut 4 A ω ad I K.

XLVIII.

Cæterum, vel sola ratio sana dictat, massam liquoris descendentis FM in extremitatibus FL & GM nullam pati compressionem, adeoque altitudinem in fistula tam in L quam in M inserta debere esse nullam. Et hoc ipsum quidem per formulam confirmatur; nam in priori casu, ubi $n = 1$, mutatur formula $\frac{x(cn - c - mb + nb)}{c+b}$ in hanc $\frac{x(c-c-b+b)}{c+b} = 0$; in posteriori vero, ubi $n = \frac{c}{b}$, eadem mutatur in hanc $\frac{x(cc-cb-cc+cb)}{b(c+b)}$ etiam $= 0$.

XLIX.

SCHOLIUM III.

Hoc exemplum liquoris sua gravitate descendentis in Tuba hyperbolica ad indefinitum continuata, quod speciminis loco fusius pertractavi, monstrat quomodo sit procedendum in aliis ejusmodi casibus, ubi liquor intra canalem sufficienter longum eadem semper quantitate delabitur, ita nempe ut nihil inde effluat, nihilque pariter novi liquoris subingrediatur. Aperit insuper aditum ad solutionem Problematum de determinando motu oscillatorio fluidorum in tubis recurvis vel reflexis, cujuscunque sint figuræ atque amplitudinis utcunque variantis: In talibus namque tubis seu siphonibus, dum pars quædam fluidi per unum crus descendit, per alterum crus, licet multum dissimile, pars alia fluidi priori æqualis ascendit, hoc est, negative descendit: ita ut perinde ac in tubis continuo deorsum vergentibus eadem semper fluidi massa conservetur. Unde si, mutatis mutandis quantum ad signa in calculo, per eandem methodum quam adhibuimus in allato exemplo procedatur, haud arduum erit pervenire ad supputationem velocitatis fluidi transfluentis in singulis locis, pro quolibet ejus descensu vel ascensu: unde omnia reliqua dependent.

L.

L.

De Vasis quæ interea dum emittunt liquorem per aperturam in fundo vel prope fundum factam, nihil novi liquoris desuper influentis accipiunt.

Pro istis casibus vasorum, quæ emittendo liquorem, sed nullum alium accipiendo, tandem deplentur atque evacuantur; posset adhiberi methodus illa, quam explicui §.XLIV & sequentibus; ubi agebatur de determinatione motus datæ massæ aqueæ intra canalem hyperbolico-conoidicum continuo delabentis, scilicet ope fluidi fictitii, quod nihil aliud agat quam supplere spatium ab aqua descendente vacuum relictum: ista vero mentis fictione insuper habita atque neglecta, sufficiet in rem præsentem æquatio nostra in §. VII data, $(\alpha\alpha hh - \zeta\zeta\omega\omega) \times z\,dx + \alpha\, Mh\omega\,dz = \alpha\alpha hh\,a\,dx$, quam pro vasis semper plenis existentibus valere vidimus. Illa quippe æquatio nullo negotio accommodabitur ad ea quoque vasa, quæ ob nullum novum liquorem influentem paulatim deplentur, atque adeo in quibus suprema liquoris superficies Ee (*Fig.* 10) continuo descendit. TAB. XC. *Fig.* 10.

LI.

Ad imitationem ejus quod pro casu vasis cylindrici jam solutum extat in Parte prima Art. XII*, considerabimus hic vas cujuscunque figuræ, in quo superne nullus ingrediatur novus liquor, dum ille qui jam inest per orificium infimum continuo ductu elabitur. Ponamus itaque supremam superficiem descendendo ex situ Ee perveniisse in situm Ff, ad quod momentum determinanda sit liquoris effluentis velocitas: quem in finem ipsa amplitudo Ff, seu y, licet variabilis sumenda est pro suprema amplitudine, cui respondet altitudo BP seu t, quæ & ipsa variabilis est [hoc certe permittit natura translationis virium motricium in fluidis, ut cuilibet attendenti patebit], ipsum

* supra pag. 405.

vero M seu $\int \frac{ds^2}{ydt}$, quod in vasis constanter plenis constans erat, nunc est variabile; capiendum nempe per altitudinem variabilem B P.

Scribatur ergo in æquatione nostra yy pro hh, t pro a, & $\frac{ds}{dt}$ pro ζ, atque prodibit hæc æquatio, quæ desideratur; $(\alpha\alpha yy - \omega\omega\frac{ds^2}{dt^2})\, z\,dx + \alpha yy\omega\,dz\int\frac{ds^2}{ydt} = \alpha\alpha yyt\,dx$. Ex eo vero quod elementum aquæ elabentis $\frac{\omega dx}{\alpha}$ = strato descendenti; $-y\,dt$ [pono $-y\,dt$, quia crescente x decrescit t] erit $dx = \frac{-\alpha y\,dt}{\omega}$. Substituendo igitur hunc valorem pro dx, habebit æquatio hanc faciem $(\alpha\alpha yy - \omega\omega\frac{ds^2}{dt^2})\,z\,dt - \omega\omega y\,dz\int\frac{ds^2}{ydt} = \alpha\alpha yyt\,dt$; quæ pro vasis habentibus centricam verticalem, ubi $\alpha = 1$, $ds = dt$, in hanc abit æquationem simpliciorem $(yy - \omega\omega)\,z\,dt - \omega\omega y\,dz\int\frac{dt}{y} = yyt\,dt$.

LII.

Ex hac æquatione exemplum ex prima Parte allegatum [Art. XII], ubi vas supponebatur cylindricum, nunc porro ad finem prosequemur, ac quædam notatu digna adjiciemus. Hic igitur vicissim ponendum est h pro constante y, atque $\int\frac{dt}{y}$ erit $\int\frac{dt}{h}$, sive $\frac{t}{h}$, totusque terminus $\omega\omega y\,dz\int\frac{dt}{y}$ erit $\omega\omega t\,dz$; unde æquatio pro casu cylindri recti hanc formam habebit $(hh - \omega\omega)\,z\,dt - \omega\omega t\,dz = hht\,dt$, quæ, per modum integrandi dudum mihi usitatum, dat in terminis finitis valorem quæsitum ipsius $z = \frac{hht}{hh-2\omega\omega} \times (1 - (t:a)^{(hh-2\omega\omega):\omega\omega})$.

Hinc statim liquet velocitatem, tam initialem quam finalem, esse nullam, hoc est in casu quo $t = 0$, vel quo $t = a$: unde colli-

colligere est alicubi fore velocitatem maximam aquæ, tum effluentis ex vase, tum in ipso vase descendentis. Ea ut determinetur, quærendum est maximum z, quod fiet, quando superficies aquæ in cylindro descendit ad eam a base distantiam t, quæ sit $= a\left(\frac{\omega\omega}{hh-\omega\omega}\right)^{\omega\omega:(hh-2\omega\omega)}$, id quod duabus viis invenitur, nempe vel differentiando valorem inventum ipsius z more solito; vel quod commodius est, ponendo, in præcedente æquatione differentiali $(hh-\omega\omega)zdt-\omega\omega tdz=hhtdt$, terminum secundum $\omega\omega tdz=$ nihilo; unde prodit $z=\frac{hht}{hh-\omega\omega}$; qui comparatus cum invento valore generali $\frac{hht}{hh-2\omega\omega}\left(1-\left(\frac{t}{a}\right)^{(hh-2\omega\omega):\omega\omega}\right)$ dabit, ut dixi, $t=a\left(\frac{\omega\omega}{hh-\omega\omega}\right)^{\omega\omega:(hh-2\omega\omega}$.

LIII.

Interim, in casu particulariſſimo, ubi $hh=2\omega\omega$, ubi amplitudo vasis cylindrici se habet ad amplitudinem foraminis, ut $\sqrt{2}$ ad 1, hoc incommodi accidit, ut $\frac{hht}{hh-2\omega\omega}\times\left(1-\left(\frac{t}{a}\right)^{(hh-2\omega\omega):\omega\omega}\right)$ evadat $=\frac{hht}{0}(1-1)$, nec non ut alterum $a\left(\frac{\omega\omega}{hh-\omega\omega}\right)^{\omega\omega:(hh-2\omega\omega)}$, fiat $=\left(\frac{\omega\omega}{\omega\omega}\right)^{\omega\omega:0}$, seu $=1^{\infty}$; ex quo utroque nihil concludi potest. Hoc autem incommodum tollitur per regulam, cum aliqua dexteritate adhibitam, quam olim communicavi cum illustri HOSPITALIO, ut videre est in Analysi infinite parvorum, Art. 163. *

Prius enim modo allatum $\frac{hht}{hh-2\omega\omega}\left(1-\left(\frac{t}{a}\right)^{(hh-2\omega\omega):\omega\omega}\right)$ invenitur pro præsenti casu $=-2(a-t)l(a-t)$; alterum vero $a\left(\frac{\omega\omega}{hh-\omega\omega}\right)^{\omega\omega:(hh-2\omega\omega)}=\frac{1}{c}$, assumendo scilicet a pro unitate, & $lc=1$; atque hinc utrumque per Logarithmicam

* Vid. Nus. LXXI. pag. 401. *Tom. I.*

micam vulgarem, cujus ſubtangens $= a = 1$, facillime conſtruitur.

LIV.

De Clepſydris conficiendis.

Figuras vaſorum aquas per foramen inferius permittentium hucuſque haud aliter tractavimus, quam tanquam datas, ut nimirum erueremus leges ſecundum quas motus aquarum procederet. Nunc vero lubet inquirere ordine inverſo in figuram vaſis ad id requiſitam, ut aquæ ſuprema ſuperficies ſubſidat ſecundum propoſitam aliquam legem; ex. gr. ut uniformi celeritate deorſum feratur; unde ex quantitate deſcenſuum duratio fluxus immediate innoteſcat: qui uſus olim fuit apud Veteres frequentiſſimus Clepſydrarum ad horas dimetiendas inſtitutus. Id autem duobus præcipue modis obtineri poteſt, unus ſcilicet eſt, quo ex quantitate elapſæ aquæ, alter quo ex quantitate aquæ in vaſe adhuc remanente, de temporis ſpatio judicari poteſt. De utroque ſeorſim agemus.

LV.

Conſideremus vaſa ſimpliciora, quæ nimirum habent centricas ſuas verticales, quarumque æquatio [§. LI] hæc erat $(yy - \omega\omega) \times z\,dt - \omega\omega\, y\, dz \int \frac{dt}{y} = yyt\,dt$; ubi indeterminatæ t & y originem ducunt a loco infimo, ſeu a foramine ω. Quod ſi jam velimus facere ut aqua erumpat velocitate uniformi; ponendum eſt $z =$ conſtanti c; quo poſito, erit $dz = 0$, & ita evaneſcet ſecundus terminus $\omega\omega\, y\, dz \int \frac{dt}{y}$, reliquique diviſi per dt, dabunt hanc æquationem algebraïcam $(yy - \omega\omega)\, c = yyt$; unde elicitur $yy = \frac{\omega\omega c}{c - t}$ & $y = \sqrt{\frac{\omega\,\omega\, c}{c - t}}$ ſeu $\sqrt{y} = \sqrt{\sqrt{\frac{\omega\,\omega\, c}{c - t}}}$.

COROLLARIUM I.

Ea igitur eſt vaſis natura & figura, ut generari poſſit ex circum-

cumvolutione Hyperbolæ planæ biquadraticæ descriptæ inter duas asymptotos, quarum una verticalis, altera horizontalis, distans ab orificio ω altitudine $= c$.

COROLLARIUM II.

Altitudo prima, seu t initialis, $= c$, ipsaque amplitudo initialis y est infinita: est enim tunc $y = \sqrt{\frac{\omega\omega c}{c - t}} = \sqrt{\frac{\omega\omega c}{c - c}} = \infty$.

COROLLARIUM III.

Quantitas aquæ remanentis in vase pro quavis altitudine t, seu $\int y dt$, invenietur integrando riteque corrigendo $\int dt \sqrt{\frac{\omega\omega c}{c - t}} = 2\omega c - 2\omega\sqrt{(cc - ct)}$. Hinc quantitas totalis aquæ ab initio fluxus $= 2\omega c$; hoc est $=$ cylindro aquæ cujus basis est ω & altitudo $2c$.

COROLLARIUM IV.

Quod si igitur aquæ effluxuræ ex orificio ω substernatur receptaculum cylindricum capacitatis non minoris quam $2\omega c$; aqua effluxa, in eo receptaculo collecta, æqualibus temporibus æqualiter ascendet, atque ita, altitudine receptaculi in gradus æquales divisa, habebitur Clepsydra.

LVI.

SCHOLIUM IV.

Dissimulandum non est hoc genus Clepsydrarum in praxi vix ullum habere posse usum, ob immanem altitudinem quæ danda esset vasi hyperbolico, ut effluxus durare posset per temporis spatium, etiamsi valde mediocre: quod ex eo satis colligi potest, quia si vas altum esset 15 pedes, id est, si $c = 15$ ped. contineret aquam $2\omega c = 30\omega$, hoc est, columnam aqueam cujus

cujus altitudo 30 ped. ſuper baſi ω: cum autem ex orificio ω aqua egrediatur uniformi velocitate debita altitudini 15 pedum, ſitque tempus caſus per hanc altitudinem non niſi unius tantum minuti ſecundi horarii, manifeſtum utique eſt, intra unum minutum ſecundum elabi ex vaſe cylindrum aqueum amplitudinis ω, & longitudinis bis quindecim ſeu triginta pedum, adeoque tantillo tempore totum vas exhauſtum iri. Ut nihil jam dicam de impoſſibilitate ſtructuræ vaſis, quod ſupponit ſupremam ſuam amplitudinem infinitam; cui inconvenienti quidem liceret mederi, prolongando vas ſatis prope ad aſymptoton ſuperiorem horizontalem, ut acquirat amplitudinem multo majorem, quam eſt ea foraminis ω, quæ dein amplitudo circumdari poſſet margine uſque ad aſymptoton aſſurgente.

LVII.

Commodiori modo parari poteſt Clepſydra, per æquabilem deſcenſum aquei ſtrati ſupremi in ipſo vaſe, cujus adeo inveſtiganda eſt figura ad id apta, ut elabente aqua per orificium ω, ſuperficies aquæ reſiduæ in vaſe æqualibus temporibus æqualiter deſcendat; adeo ut, diviſo axe vaſis verticali in partes æquales, ſuperficies dato temporis intervallo percurrat datum numerum partium in ſcala illa ſumptarum. Duo autem ſunt caſus, quibus intentum obtineri poteſt: aut enim amplitudo luminis ω tam parva eſt, ut nullam habeat rationem ſenſibilem ad amplitudinem in vaſe y; aut amplitudo illa ω ſat magna eſt, ut ſit comparabilis cum qualibet y. Priorem caſum, utpote faciliorem atque in praxi utiliorem, nunc tractabimus; de altero poſtea acturi.

LVIII.

Patet utique æquationem noſtram $(yy - \omega\omega)\,z\,dt - \omega\omega y dz \times \int \frac{dt}{y} = yytdt$ reduci, in caſu quo ω valde parvum eſt ratione y, ad hos duos terminos duntaxat $yyzdt = yytdt$, unde $z = t$, hoc eſt, in quolibet vaſe habente foramen ω, nimirum aquam ex illo emanare

nare ea velocitate quæ acquiritur a corpore gravi cadente ex altitudine t, quam aqua reſidua in vaſe habet; cujus rei veritatem [a nobis ſcientifice inventam] Scriptores hydraulici ſuperiorum annorum non niſi per experimenta cognitam habebant. Ea vero ſemel ſuppoſita, facile tunc fuit invenire naturam vaſis conoïdici, foramine ω tanquam ejus vertice deorſum ſpectante, quod hunc præſtet effectum, ut quovis momento ſumma ſuperficies y aquæ reſiduæ deſcendat uniformi vel æquabili celeritate. Cum enim velocitates fluidi, in eadem quantitate eodemque tempore per duas diverſas amplitudines transfluentis, ſint in reciproca ratione amplitudinum, faciendum eſt $y : \omega = \sqrt{z} : \frac{\omega\sqrt{z}}{y}$, eritque $\frac{\omega}{y}\sqrt{z}$ deſignans celeritatem ſuperficiei y deſcendentis, quæ celeritas cum debeat eſſe conſtans, ponatur $\frac{\omega}{y}\sqrt{z} = \sqrt{c}$, unde erit $\frac{cyy}{\omega\omega} = z = t$. Sunt autem, in conoidibus rectis, amplitudines nihil aliud quam circuli, quorum areæ y ſunt ut quadrata radiorum, ſeu applicatarum curvæ genitricis quæ ſui revolutione circa axem deſcribit conoides quæſitum. Nominando igitur applicatam in curva genitrice $= s$, & radium orificii ω circularis $= b$; itemque aream circuli ad quadratum radii, ut n ad 1, erit ſane $y = nss$, $yy = nnss^4$, $\omega = nbb$, & $\omega\omega = nnb^4$, atque adeo pro æquatione $t = \frac{cyy}{\omega\omega}$, habebitur $s = \frac{cs^4}{b^4}$ ſeu $\frac{b^4 t}{c} = s^4$; quæ oſtendit curvam genitricem conoidis quæſiti eſſe Parabolam biquadraticam, in cujus puncto infimo, ſeu vertice deorſum ſpectante, orificium ω venam aqueam emittens inſculptum eſſe debet.

COROLLARIUM.

Parameter Parabolæ inventæ eſt $b\sqrt[3]{(b : c)}$, ubi c eſt arbitraria; adeoque tam parva aſſumi poteſt ut $b\sqrt[3]{(b : c)}$ fieri poſſit quantumvis magna; eum in finem, ut amplitudines conoidis fiant incomparabiliter majores quam amplitudo foraminis ω. Sic

ergo pro lubitu tanta capacitas conciliari poteſt vaſi, foramenque ω tam parvæ amplitudinis fieri, ut effluxus aquæ ſat longo tempore durare queat, antequam vas penitus exhauriatur; ad quod imprimis attenditur in Clepſydrarum ſtructura.

LIX.

Quod nunc ſpectat ad alterum caſum, ubi foramen ω non inſenſibilis adeo amplitudinis ſupponitur, ut termini in æquatione univerſali $(yy - \omega\omega)\,z\,dt - \omega\omega\,y\,dz \int \frac{dt}{y} = yyt\,dt$, in quibus ω reperitur, evaneſcant: oportet ſane ut maneant omnes termini, atque tunc ponatur $\frac{cyy}{\omega\omega}$ pro z, & $\frac{2cy\,dy}{\omega\omega}$ pro dz, in eum ſcilicet finem, ut ſuperficies ſuprema aquæ in vaſe deſcendat celeritate uniformi, quæ celeritas debeatur altitudini arbitrariæ c, quo facto reſultabit æquatio reſolvenda, quæ hæc eſt, nempe $(yy - \omega\omega)\,c\,dt - 2c\omega\omega\,dy \int \frac{dt}{y} = \omega\omega t\,dt$. Sunt quædam indicia, ex quibus ſtatim ſuſpicabar dari quandam curvam algebraïcam, quæ huic æquationi in abſtracto ſumptæ reſpondeat; imo poſt brevem indagationem iſta protinus ſe mihi obtulit $yy = \frac{\omega\omega(t+3c)}{c}$, & pro curva genitrice hæc $y^4 = \frac{b^4(t+3c)}{c}$, quæ rurſus eſt Parabola biquadratica, ſed cujus abſciſſæ t initium ſumunt, non ab ipſo ejus vertice, verum intra eundem in axe, in diſtantia $= 3c$. Interim inventa æquatio $yy = \frac{\omega\omega(t+3c)}{c}$, quæ quidem in abſtracto ſatisfacit, ideo ſatisfacere non poteſt in hac materia, quia tacitam conditionem non adimplet; quæ conditio in hoc conſiſtit, ut exiſtente $t = 0$, tota æquatio in nihilum abeat, ac proin etiam $\int \frac{dt}{y}$ debeat evaneſcere, id quod non fit per æquationem $yy = \frac{\omega\omega(t+3c)}{c}$.

Nil

Nil quippe novi est, ut quædam propositio, quæ in thesi est vera, non semper quadret in hypothesi; cum nempe aliquid adimplendum accedit, ad quod, rem sumendo in genere, attendi necessario non requiritur. Vera autem curva genitrix pro quæsita figura vasis conoidici reperietur, si qua arte universaliter resolvi potest æquatio $(yy - \omega\omega)\, c\, dt - 2\, c\, \omega\omega\, dy \int \frac{dt}{y} = \omega\omega t dt$; ita ut y per t, vel vice versa t per y determinetur; sive id fiat in terminis finitis algebraïcis, vel exponentialibus, sive demum per quadraturas. Hoc autem negotium, cum hujus loci non sit, aliis, quibus vacat, perficiendum relinquo.

LX.

SCHOLIUM V.

Opportuna jam datur occasio examinandi cataractam *Newtonianam*, quam describit Auctor in Editione secunda *Princip. Math. Phil. Nat. Prop.* 36. Lib. II. pag. 303 & seq. Ubi statim animadvertendum formam quam NEWTONUS tribuit suæ cataractæ ABNFEM [vid. *Fig.* 16, quæ *Newtoniana* est in loco allegato] prorsus eandem esse quam supra inveni [§. LV] pro figura Clepsydræ, quæ aquam per orificium ω emittit celeritate uniformi. Notemus jam, quod ipse NEWTONUS agnoscit, in tali cataracta quodlibet stratum MN, ea cum velocitate descendere, quam acquireret si libere caderet a puncto dato I per altitudinem IO, nulla alia vi quam sua naturali gravitate animatum: unde sequitur strata quidem inter se contigua manere descendendo, sed ita tamen, ut in se mutuo nullam vim exerceant, nec premendo nec resistendo, æque ac si singula pondere suo solitaria descenderent. Compressio itaque illa, de qua supra egi in peculiari capite, nulla erit per totam cataractam *Newtonianam*, neque proin de vi pressionis, quam vocavi π, vel minimum exercebitur in latera AME, BNF, id quod etiam patebit ex ipsa mea formula quam pro π dedi in §. XII. Si

TAB. XCI. N°. CLXXXVI. *Fig.* 16.

enim illa ad casum præsentem applicetur, comperietur, ut dixi, valorem ipsius π esse nullum per totam cataractæ altitudinem. Quid ergo hinc concludi debet? Haud dubie hoc, quod si latera cataractæ AME, BNF essent rigida, instar infundibuli, cum quo NEWTONUS comparat illam, atque si quocunque in loco, facto foramine, inseratur fistula ad situm verticalem erecta, nihil aquæ transfluentis ex cataracta in fistulam sit ingressurum & ascensurum; sicuti fieret, si premerentur latera ab aqua transfluente. Interim premuntur latera AME, BNF introrsum versus axem HG a pondere aquarum stagnantium in AMEC, BNFD, per ordinariam legem hydrostaticam, quæ docet pressiones in singulis locis M, N exercitas esse proportionales altitudinibus HO. Cum autem latera cataractæ non sint rigida, & pressiones istæ aquarum stagnantium nullas habeant pressiones sibi oppositas ab aquis transfluentibus; oportet sane ut aquæ, quæ stagnare ponuntur, & continuo premunt, sortiantur suum effectum, hoc est, ut se ingerant in cataractam, commisceantque sese cum ipsis aquis fluentibus. Ergo figura cataractæ destruetur, turbabitur, aliterque secundum nostram explicationem aquæ descendunt.

Ergo explicatio *Newtoniana*, utpote legibus hydrostaticis adversa, subsistere non potest.

EPIMETRUM.

De vi per quam vas retrourgetur, dum aqua ex eo erumpit in directione horizontali.

Veritas est receptissima *Actionem esse æqualem reactioni;* hoc est, vim quamlibet externam, quæ agit in corpus quoddam aliudve obstaculum, simul quoque agere retrorsum in plagam directe oppositam, quemcunque habeat vel inveniat obicem; sicuti fieri videmus, quando ex. gr. elastrum tensum inter duo corpora positum, statim ac soluto vinculo relaxari incipit, æquis viribus pellit corpus utrumque, unum antrorsum, alterum retrorsum.

ſum. Nec aliter fieri obſervamus, dum globus ferreus per accenſum pulverem pyrium magna violentia ex tormento bellico exploditur; ſimul etiam ipſum tormentum in contrariam partem repelli, quamvis multo minori impetu, ob ingentem maſſam tormenti reſpectu ipſius globi.

Pari modo, cum videmus aquam explodi ex vaſe in directione horizontali, ſive id fiat immediate per foramen in latere vaſis apertum, ſive mediante aliquo canali ſitum horizontalem habente, concludere debemus adeſſe aliquam vim ſeu potentiam, quæ exploſionem hanc producat, quæ proin æque valide agat premendo retro in latus vaſis foramini extremo canalis directe oppoſitum. Id unum igitur diſpiciendum eſt, ut rite æſtimetur quantitas ſeu menſura illius potentiæ ultro citroque urgentis. Occurrunt menti ſtatim variæ ideæ, quæ primo intuitu videntur deducere ad quæſitum; ſed cum ſingulæ exhibeant ejus rei menſuras a ſe invicem diſcrepantes, incertum eſt, an aliqua ex illis ſit vera, aut potius annon ſingulæ a vero abludant. Quocirca tutiſſima erit via atque certiſſima, quam inibimus, ſi ex ipſis principiis in hac noſtra Theoria hydraulica ſtabilitis immediate eruamus quæſitum.

Hunc in finem, conſideremus quæ ab initio dicta ſunt de tranſlatione virium motricium ſingulorum ſtratorum aqueorum Fm, Nl, (*Fig.* 10) &c. ad amplitudinem communem ſupremam Ee; ubi oſtenſum eſt iſtas vires, ita collectas in unum, præſtare eundem effectum ad expellendum per aperturam Cc liquorem, licet gravitate deſtitutum, idque eadem velocitate ſingulis momentis, qua id fit modo naturali per gravitatem liquoris ſine tranſlatione deſcendentis. Nunc vero clare concipimus, tranſlationem illam ad amplitudinem ſupremam Ee eſſe arbitrariam; ſiquidem ex eodem principio hydroſtatico, quod aſſumſimus, facile colligi poteſt, poſſe transferri vires motrices ſtratorum ſingulorum ad aliam quamcunque aſſumtam amplitudinem ex. gr. ad Ff, quam ut datam ſeu conſtantem conſiderare licet; nec eſt quod dicas, vires ad illam tranſlatas agere tantum premendo ſtrata inferiora, non vero ſuperiora. Nam dum ſtra- TAB. XC. *Fig.* 10.

ta contigua ita inter se adhærent, ut unum sine altero de loco moveri non possit, haud ægre concipimus, quod propulsa massa aquea inferior FCcf etiam superiorem EFfe simul quasi secum trahere, atque cum ea effectum potentiæ prementis in Ff partiri debeat; adeo ut non alia velocitate elapsurus sit liquor per Cc, quam si stratorum vires motrices ad amplitudinem supremam Ee fuissent translatæ.

His probe perceptis, intelligamus jam vires stratorum transferri, non ad amplitudinem supremam Ee, neque ad aliquam intermediam Ff, sed ad infimam Cc, ita ut potentia resultans ex collectione omnium virium stratorum, dum agit immediate tantum in stratum infimum, hoc tamen totam massam aqueam ECce in motum concitare debeat; eadem prorsus lege, ac si vires motrices ad amplitudinem supremam Ee, vel ad aliam quamcunque Ff, fuissent translatæ. Est autem, ex vulgari principio hydrostatico, summa virium motricium ad quamcunque amplitudinem translatarum proportionalis ipsi amplitudini: proinde, faciendo ut Ee ad Cc, seu ut h ad ω, ita gha, seu pondus cylindri aquei cujus basis est Ee & altitudo verticalis AB, ad $g\omega a$, seu ad pondus cylindri cujus eadem est altitudo a seu AB, & basis ω seu Cc: dicatur hoc pondus $= p$, atque sic habemus quantitatem pressionis p, quacum aqua per orificium Cc expellitur, & quæ pellendo antrorsum, simul nititur retrorsum in directione communi.

TAB XCI. N°. CLXXXVI. *Fig.* 13.

Applicatio ut fiat: Esto vas cujuscunque figuræ ABD (*Fig.* 13) instructum canali oblongo CEK, non multum amplo, in situ horizontali jacente. Sit, brevitatis ergo, vasis centrica verticalis, nec refert qualemcunque habeat canalis figuram, sive sit conoïdicus truncatus, sive ex pluribus tubis compositus, cujus extremum orificium in K per quod aqua expellitur $= \omega$. Posito jam vase constanter pleno, vidimus supra, pro determinatione velocitatis v aquæ erumpentis, hanc haberi æquationem $\frac{vv(hh - \omega\omega)}{2h} + \frac{hM\omega vdv}{dx} = gha$; si scilicet vires motrices transferuntur ad supremam amplitudinem h, seu ad AD; unde si

eas

eaſdem transferamus ad amplitudinem infimam ω prodibit $\frac{vv\omega(hh-\omega\omega)}{2hh}+\frac{M\omega\omega vdv}{dx}=g\omega a=p$, ſeu ponderi cylindri aquei cujus baſis eſt ω & altitudo $=a=$ altitudini aquæ ſupra horizontalem BK. Finge igitur in vaſis pariete BA, ſuperficieculam Bb e regione oppoſitam & æqualem foramini K, patietur hæc Bb a retroactione potentiæ fluidum expellentis preſſionem ipſi ſimilem & $=p$.

Hæc quidem retropreſſio p in Bb exercita naſcitur in tota ſua intenſitate, ſtatim ac moveri incipit; hoc eſt, a primo motus momento, ubi velocitas eſt adhuc infinite parva, uſque dum pervenit ad gradum æquabilitatis, vis illa retropreſſionis conſtanter eſt eadem. Qualiſcunque enim eſt v, ſemper habetur $g\omega a$ ſeu $p=\frac{vv\omega(hh-\omega\omega)}{2hh}+\frac{M\omega\omega vdv}{dx}$; unde ab initio fluxus, ubi v eſt $=0$, ſeu infinite parva, erit idem $p=\frac{M\omega\omega vdv}{dx}$; ubi vero v pervenerit ad uniformitatem, ita ut dv ſit $=0$, erit pariter $p=\frac{vv\omega(hh-\omega\omega)}{2hh}$. Ex quo ſequitur fore $\frac{M\omega\omega vdv}{dx}=\frac{vv\omega(hh-\omega\omega)}{2hh}$, ſumendo ſcilicet in primo termino v pro velocitate initiali, in altero vero v pro velocitate uniformi. Porro vel hinc quoque patet retropreſſionem noſtram eſſe æqualem ipſi ponderi cylindri aquei habentis baſin ω, & altitudinem eam quam habet aqua in vaſe ſupra horizontalem BK, quia notiſſimum principium hydroſtaticum docet amplitudinem CE, per quam ingreditur aqua in canalem CK, premi a pondere incumbentis columnæ aqueæ, cujus baſis eſt ipſa CE atque altitudo ſupremæ ſuperficiei AD ſupra EC. Poſita itaque amplitudine $CE=m$, & altitudine aquæ in vaſe $=a$; erit preſſio quæ urget aquam in canali a CE verſus K $=gma$: factoque, ut amplitudo CE ad amplitudinem aperturæ K, hoc eſt, ut m ad ω, ita gma ad $g\omega a$, erit, per eadem principia hydroſtatica, vis $g\omega a$ illa ipſa quæ aquam cogit ad eruptionem

per

per orificium ω: huic ergo vis directe oppoſita ex reactione naſcens, agenſque in Bb, pariter erit $= g\omega a = p$. *Q. E. D.*

COROLLARIUM.

Liquet in vaſis conſtanter plenis vim iſtam retropreſſionis eſſe invariabilem, a primo effluxus momento ad æquabilem uſque velocitatem, utpote ſemper $= g\omega a$. Errant igitur qui illam ſtatuunt variabilem, minorem nempe in effluxu tardiori, majorem in velociori, maximam in æquabili.

N°. CLXXXVII.

PROBLEMA HYDRAULICUM.

TAB. XCI. N°. CLXXXVII. *Fig.* 1.

AB *eſt tubus cylindricus, ſeu uniformiter amplus & utrinque apertus in* A *&* B. *Sit ille perpendiculariter aliquouſque immerſus fluido infinito cujus ſuperficies eſt* LR, *& pars tubi immerſa* BC: *Concipiatur totus tubus* AB *eodem fluido plenus, ita ut obducto pollice ad* A *nihil effluere poſſit. Quæritur nunc, ſi remoto pollice libertas detur fluido deſcendendi; quouſque infra* LR *ſit deſcenſurum, & quouſque poſtea ſupra* LR *ſit iterum aſcenſurum; hoc eſt, poſito* P *pro termino deſcenſus &* O *pro termino ſubſequentis aſcenſus, quæritur longitudo* CP, *ut & longitudo* CO?

SOLUTIO.

COnſiderandum primo eſt, partem fluidi in CB contentam nullius eſſe ponderis, vel potius ejus conatum deſcendendi a gravitate oriundum deſtrui a preſſione contraria fluidi tubum ambientis; atque ita ſtatim ac aliquid fluidi inter deſcendendum ex parte prominente AC deſcendit in partem tubi ſubmerſam, illud cenſendum eſt protinus amittere ſuam gravitatem; adeo ut tota vis acceleratrix, ſingulis momentis, dependeat

deat tantum a pondere ejus partis fluidi quæ in tubo eminente adhuc exiſtit. Unde ſtatim patet deſcenſum fluidi debere accelerari, quamdiu aliquid eſt in AC; proinde maximam velocitatem fore, cum deſcenderit ad horizontalem LR; deinde iterum retardari debere, ob prævalentem preſſionem fluidi ambientis; donec velocitate penitus deſtructa in P, cogatur fluidum a preſſione externa ambiente rurſus aſcendere ad O, atque habiturum in C rurſus maximam velocitatem: poſtea ab O altera vice delabetur, ſed non ad tantam qua prius profunditatem; mox iterum in altum aſcenſurum: & ita deinceps continuabit oſcillando. Quæritur itaque primus deſcenſus ad P, primuſque aſcenſus ſubſequens ad O; utpote a quibus omnes reliqui dependent.

Quod attinet ad determinationem deſcenſus; habetur ea per duplicem viam, vel directe ex principiis mechanicis, vel indirecte ex natura virium vivarum. Rem utroque modo ita perago.

PRIMUS MODUS.

Principia mechanica docent, incrementum momentaneum velocitatis haberi, ſi elementum temporis multiplicetur per vim acceleratricem: elementum autem temporis habetur, dividendo elementum ſpatii percurrendi per velocitatem acquiſitam. Sit itaque tota longitudo tubi $AB = a$, pars immerſa $CB = 1$, pars quælibet AE a fluido deſcendente percurſa $= x$, gravitas naturalis, qua ſcilicet corpora ad deſcenſum naturaliter animantur vel ſollicitantur, $= g$. Vocetur velocitas acquiſita fluidi delapſi ex A in $E = v$. His ita nominatis, erit pondus fluidi totum tubum adimplentis $= ga$; pondus partis $CB = g \times 1 = g$; pondus partis $CE = g \times CE = ga - g - gx$. Nunc quia pondus partis CB ab æquivalente preſſione fluidi ambientis deſtruitur, reſtat tantum pondus fluidi CE, quod omne fluidum reſiduum EB ad deſcendendum accelerare debet. Erit itaque vis acceleratrix $= \frac{g \times CE}{BE} = \frac{ga - g - gx}{a - x}$; quare $\frac{ga - g - gx}{a - x}$

$\times \frac{dx}{v} = dv$; proinde $v\,dv = \frac{gadx - gdx - gxdx}{a - x} = gdx - \frac{gdx}{a-x}$; & integrando $\frac{1}{2}vv = gx + gl(a - x) - gla$. [*Nota.* Adjicio hic gla correctionis gratia; ut nimirum existente $x = 0$, ubi velocitas nulla est, evanescat ejus valor inventus]. Ut itaque sciatur quousque liquor in tubo descendere debeat, ut iterum v fiat $= 0$; oportet facere $x + l(a - x) - la = 0$; eritque, capiendo AP = radici hujus æquationis, punctum P terminus in quo descensus finitur.

TAB. XCI. N°. CLXXXVII. *Fig.* 2. Radix vero x ope Logarithmicæ habetur hoc modo: Sit Logarithmica HCG, cujus subtangens $= 1 =$ BC = parti immersæ tubi. In BC prolongata capiatur BA = longitudini totius tubi, quousque nempe ab initio plenus est liquore, ex A ducta asymtoto BL parallela AH, occurrens Logarithmicæ in H, atque ex hoc puncto H acta tangenti in C parallela HG, quæ secet curvam in G; unde porro ducatur GP asymtoto BL parallela: erit punctum P terminus ad quem descendet fluidum; & in quo descensus finietur. Demonstratio est facilis. Quia enim $AH = l\,AB = la$, & $PG = -l\,PB = -l(AB - AP) = -l(a - x)$, & $AH + PG = AP$; erit $la - l(a - x) = x$; unde $x + l(a - x) - la = 0$. Quæ est ipsissima æquatio construenda. *Q. E. D.*

SECUNDUS MODUS.

TAB. XCI. N°. CLXXXVII. *Fig.* 1. Ex Theoria virium vivarum idem invenio hunc in modum. Nominando hic iterum (*Fig.* 1) AB = a, CB = 1, pars indeterminata descensus AE = x. Sit altitudo quædam verticalis z, per quam grave libere descendens acquireret velocitatem æqualem illi quam fluidum in tubo delapsum ex A in E acquirit; erit ergo hæc velocitas $= \sqrt{z}$. Abscindendo autem BF = AE; clarum est per descensum fluidi ex A in E, columnam AF esse translatam in EB, & tunc singulas ejus particulas habere velocitatem $= \sqrt{z}$; quocirca omnis materia fluidi hanc columnam EB constituens habebit vim vivam =

(a

$(a - x) \times \sqrt{z} \times \sqrt{z} = az - xz$; cui addendæ sunt particulares vires vivæ collectim sumtæ singularum particularum in spatio BF contentarum, quæ, descendente fluido ex A in E, successive ex orificio B egressæ sunt, quarum utique aggregatum est $= \int z dx$. Ergo quantitas vis vivæ totius materiæ in motu constitutæ $= az - xz + \int z dx$.

Quia vero hæc vis viva debet esse effectus gravitatis partis fluidi supra horizontem LR existentis, oportet utique quantitatem illam vis vivæ $az - xz + \int z dx$, tanquam effectum, esse æqualem suæ causæ adæquatæ, hoc est, summæ productorum quæ fiunt multiplicando singulas fluidi descendentis particulas per suam cujusque altitudinem, per quam quælibet a gravitate sua deprimitur. Sumta igitur CD = AE, erit DC descensus columnæ AD, adeoque AD × DC exprimit vim vivam a gravitate oriundam materiæ fluidi in columna AD contentæ, postquam descendit in situm EC, ubi partes inferiores jamjam infra horizontem delapsuræ incipiunt suam gravitatem amittere. Quod autem attinet ad particulas fluidi in DC contentas; singulæ singulares descensus faciunt, antequam ad horizontem LR perveniant, pro earum diversis distantiis ab LR, quæ distantiæ cum exprimantur per indeterminatam x, & quælibet particula ei respondens per dx; erit productum xdx vis viva cujuslibet particulæ a gravitate oriunda, adeoque $\int x dx$ seu $\frac{1}{2} xx =$ vi vivæ collectim sumtæ omnium particularum in CD contentarum; quæ ergo addita ad AD×DC, hoc est, ad $(a - 1 - x) \times x$ seu ad $ax - x - xx$, habebitur vis viva totalis a gravitate oriunda $= ax - x - \frac{1}{2} xx$; per consequens æqualis inventæ vi vivæ ex motu collectæ $az - xz + \int z dx$. Differentiando itaque provenit $adx - dx - xdx = adz - xdz$, unde $dz = dx - \frac{dx}{a - x}$; rursusque integrando $z = x + l(a - x) - la$. Sed z est proportionale quadrato velocitatis quæsitæ vv. Ergo vv, seu si mavis $\frac{1}{2} vv = x + l(a - x) - la$; omnino ut superiori modo directo invenimus, quod

nempe quadratum velocitatis fluidi descendentis per altitudinem x debeat esse proportionale ipsi $x + l(a - x) - la$.

Ut nunc porro determinetur punctum O ad quod, finito descensu, iterum ascendet; advertendum est ante omnia, quod liquor ad supremum usque punctum A esset ascensurus, si particulæ eædem, quæ inter descendendum ex orificio B egressæ fuerant, nunc iterum, inverso ordine, retentis suis velocitatibus acquisitis, singulæ per orificium B subintrarent, & ita quælibet cum præcedentibus junctim in altum protruderetur ab ambientis fluidi pressione; sicuti accidit in omni genere oscillationum, quæ, seposita resistentia, eosdem semper itus & reditus faciunt. Sed quoniam particulæ fluidi egredientes, statim post egressum, intra ambientem liquorem dilabuntur, vel hinc inde divagantur; manifestum est easdem illas particulas suis acquisitis velocitatibus non amplius tubum subingredi, sed eorum loco alias, quæ orificium sine motu obsident, successive in altum rapi, cum præcedenti columna fluidi; quæ particulæ itaque, cum ab initio ingressus nullum adhuc habeant motum, id efficient, ut columna fluidi præcedens cum ipsis adhærentibus segnius ascendat, quam faceret, si particulæ ingrederentur cum aliqua velocitate quæ ascensum juvaret. Hinc ergo liquor non ad A, sed ad punctum aliquod inferius O ascendere valebit. Hujus puncti O altitudo CO supra horizontem ut cognoscatur; concipiamus tantisper particulas ex orificio B dilapsas intra ambientem liquorem, in quo nullam habeant gravitatem, sursum dirigi; adeoque, nulla suæ velocitatis jactura facta, ad horizontem LR pervenire; ex quo postea singulæ, recuperata gravitate, in altum prosiliant, quantum possunt pro sua cujusque velocitate, occupantes ordine locum secundum aliquam curvam LMN. Jam vero, quia quantitas virium vivarum conservari debet, necesse est, ut summa productorum singularum particularum in CO contentarum per suos respective ascensus supra horizontem LR, una cum aggregato productorum quæ fiunt pariter multiplicando singulas particulas in curva

LMN

LMN per ſuos aſcenſus & diſtantias ab LR, ſit æqualis ſummæ productorum ſimilium totius columnæ AC: hanc enim liquor habuit ab initio deſcenſus. Quocirca, ſi a ſumma productorum columnæ AC auferatur ſumma productorum particularum LMN, remanebit ſumma productorum in columna CO, & hinc ipſa altitudo CO innoteſcet. Nam ſumma prior $= \frac{1}{2}$ AC×AC$= \frac{1}{2}$ AC$^2 = \frac{1}{2}aa - a + \frac{1}{2}$; altera $= \int z\,dx = ax - x - \frac{1}{2}xx - az + xz =$ [in caſu quo x, ſeu indeterminata AE fit AP, ubi z evaneſcit] $ax - x - \frac{1}{2}xx$; adeoque $\frac{1}{2}aa - a + \frac{1}{2} - ax + x + \frac{1}{2}xx$ = ſummæ productorum in CO $= \frac{1}{2}$ CO^2: unde CO $= \sqrt{(aa - 2a + 1 - 2ax + 2x + xx)} = 1 + x - a =$ [in eodem hoc caſu ubi $x =$ AP] CP. Ex quo patet fluidum in tubo ad tantam altitudinem CO aſcendere ſupra horizontem LR, ad quantam profunditatem CP infra LR immediate prius deſcenderat.

COROLLARIUM.

Cognita CO, cognoſcetur, per conſtructionem ſupra datam, deſcenſus ſecundus, & ſubſequens aſcenſus ſecundus: ex hoc poſtea deſcenſus & aſcenſus tertii: atque ita porro excurſiones ſingularum oſcillationum limitari poterunt.

Nus. CLXXXVIII

AD CHRONOLOGIAM PERTINET.

****

De die, qua celebrandum Festum Paschatis, Anno 1724 *.

LEgi, PATRES CONSCRIPTI, Concluſum de Celebratione Paſchatis Anni proximi 1724: quod exaratum eſt die 30 Januarii 1723, a Conſiliariis & Legatis Plenipotentiariis Electorum, Principum, & Statuum Evangelicorum in Comitiis *Sacri Romani Imperii*; & ab ipſis cum Illuſtriſſima *Tigurinorum* Republica communicatum, cujus Ampliſſimus Magiſtratus illud vobis, Magnifici Domini, perſcribi curavit. Ejus contenta ſumma ponderavi attentione; & ad gratioſa Veſtra Juſſa, hoc $\frac{17}{24}$ Februarii die hujus Anni 1723, ſequentem expoſitionem ſubmiſſo obſequio offero.

Ante omnia ſciendum eſt, hujus rei diſquiſitionem non Aſtronomice ſolum, verum etiam Theologice & Politice inſtitui; & hinc a me ad quæſtionem propoſitam non perfecte reſponderi poſſe; ſed ſolummodo, quantum ea ad Aſtronomiam ſpectat.

Primo itaque, quod attinet ad caput rei, unde reliqua omnia dependent: An nimirum plenilunium Paſchale [quo illud intelligitur plenilunium, quod aut ipſo æquinoctii verni tempore contingit, aut illud proxime ſequitur] anno Chriſti 1724, in 8 Aprilis diem incidat. Reſpondeo ad hanc quæſtionem *Affirmando.*

Ut

* Diſſertatio iſta, Germanico idiomate ſcripta ad Ampliſſ. Senatum *Baſilecenſem*, a quodam Auctoris Diſcipulo latine verſa eſt.

N° CLXXXVI

Fig. 13.

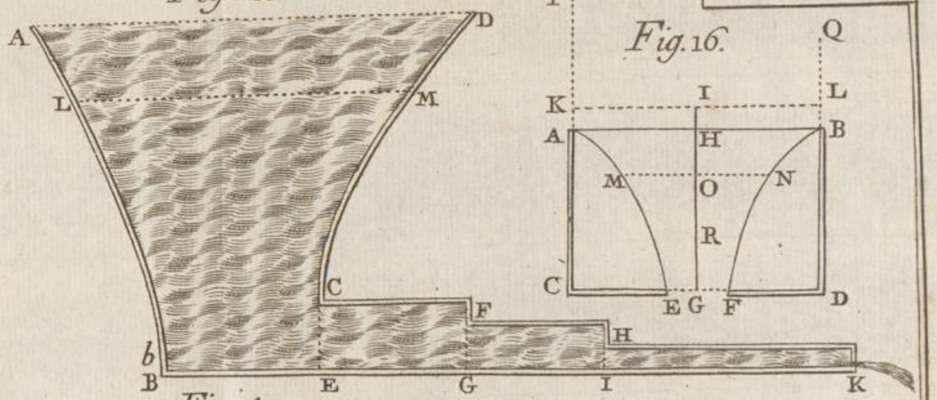


Fig. 16.

Fig. 14.

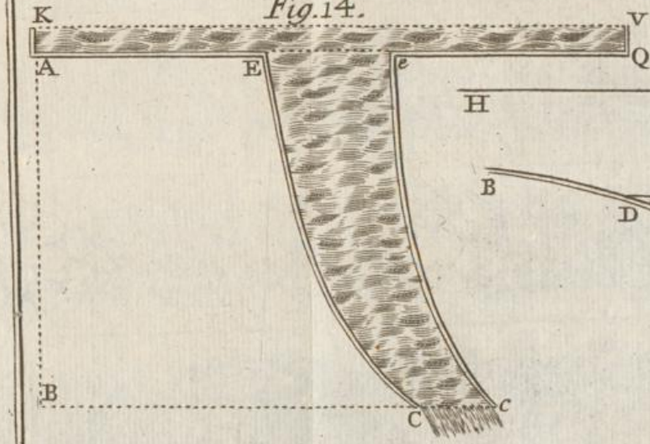
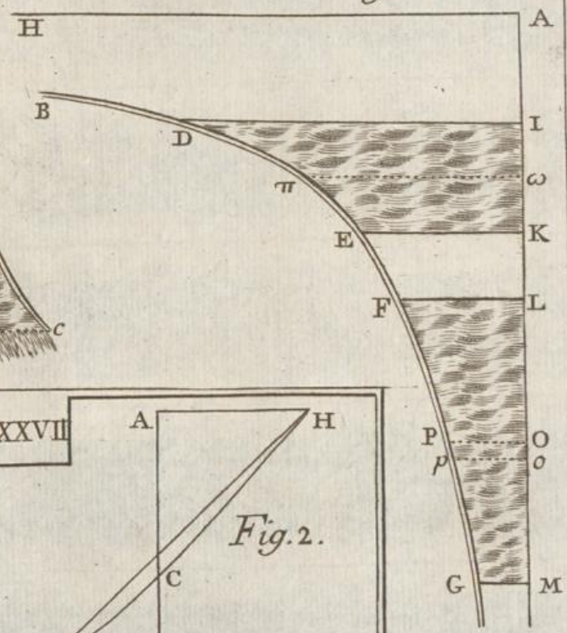


Fig. 15.



N° CLXXXVII

Fig. 1.

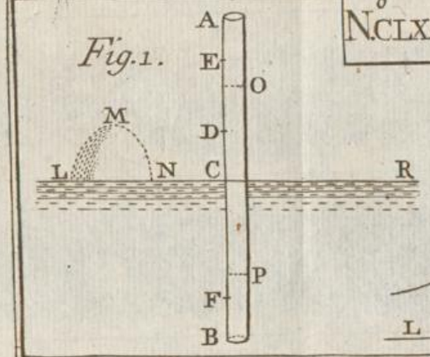
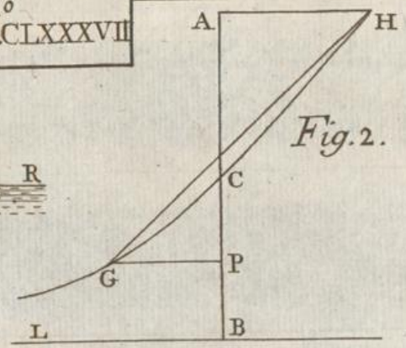


Fig. 2.



Ut autem appareat, hanc meam affirmationem nequaquam niti nuda illorum Aſtronomorum & Mathematicorum aſſertione, quorum in Concluſo Ratisbonenſi fit mentio; opus omni modo eſſe judicavi, ut ipſe prædicti plenilunii diem, horam, & minutum proprio marte ſupputarem, ſine auxilio ullarum Ephemeridum ab aliis computatarum, utpote quibus ſemper tuto credi non poteſt. Facto igitur calculo, inveni prædictum plenilunium Paſchale anni 1724, hic & in omnibus locis ſub noſtro meridiano ſitis, fore die Sabbathi 8 Aprilis, hora 4, minuto 21, poſt meridiem, poſtquam æquinoctium vernum, id eſt, ingreſſus Solis in Signum Arietis, inciderat in 2 minutum horæ 10 antemeridianæ, diei 20 Martii.

Secundo, Jam porro quæritur, an hoc plenilunium Paſchale, ſi per Cyclos fiat computus, incidat, in ſequentem demum Solis [nonum nempe Aprilis] diem, ut volunt illi Aſtronomi, quorum nomina recenſentur in Concluſo Ratisbonenſi. Ad hanc etiam quæſtionem *affirmando* mihi eſt reſpondendum; quoniam Regula vulgaris inveniendi plenilunium Paſchale ope Epactarum id liquido monſtrat; ita ut exiguo valde opus ſit labore.

Mentionem hic facio Epactarum, & non Cycli decemnovenalis, id eſt, Cycli numerorum aureorum, ita dictorum. Tantum enim abeſt, ut Pontifex GREGORIUS XIII hunc Cyclum, ut quidam perperam aſſerunt, in reformatione *Calendarii Juliani* introduxerit, vel præſcripſerit, ut potius Pontifex iſte hunc ipſiſſimum Cyclum, antea in Calendario Juliano uſurpatum, utpote vitioſum aboleverit, & illius loco Epactas introduxerit, quarum ope novilunia & plenilunia multo exactius & accuratius determinantur, quæque proin etiam in *Calendario Gregoriano*, inde ab anno 1582 uſque in hodiernum diem adhibentur.

Quantumvis prope autem Epactæ novilunia & plenilunia indigitent; impoſſibile tamen eſt, ut ſemper præciſe in eundem diem coincidant cum veris & ope calculi aſtronomici inventis noviluniis & pleniluniis; nec ullus unquam Cyclus reperietur tam accuratus, qui non aliquando, ſpatio unius diei, differat.

ferat a computo aſtronomico, &, una vel altera vice, diem Solis loco diei Saturni exhibeat; cujus erroris quatuor in hoc decimo octavo Seculo habebimus exempla, in annis nempe 1724, 1744, 1778, & 1798.

Quantam autem hæc aberratio unius diei, in determinando Paſchatis Feſto, producet differentiam, ſi illud ſecundum decreta *Concilii Nicæni primi* celebrandum eſt, quod, anno Æræ *Dionyſianæ* 325, a 318 Epiſcopis habebatur, ex argumento horum Decretorum patebit; quod ſequentibus duobus capitibus comprehenditur:

1°. Quod Chriſtiani hoc Feſtum nunquam debeant eodem die celebrare, quo Judæi Paſcha ſuum celebrant.

2°. Cum itaque Judæi Paſcha ſuum ipſo illius plenilunii die celebrent, quod vel in ipſum æquinoctium vernum incidit, vel illud proxime ſequitur; Chriſtiani ſuum Paſchatis feſtum celebrare decreverunt die Solis immediate ſequente: quod ſi vero Paſcha Judaïcum in Solis diem incidat; tum illud poſt octiduum demum celebrare ſtatuerunt.

Hinc patet quidem, cum verum plenilunium Paſchale, anno proxime ſecuturo 1724, incidat in 8 Aprilis diem, qui dies erit Sabbathi, quo proinde Judæi Paſcha celebrare deberent; quod Feſtum Paſchatis a Chriſtianis die Solis proxime ſequente, nimirum nono Aprilis, ſine ulteriore mora celebrandum ſit; vi illius, quod *Concilium Nicænum* in poſteriore capite decrevit, quo etiam Concluſum Ratisbonæ exaratum nititur.

Quia vero ignotum eſt, qua regula Judæi per Orbem terrarum diſperſi ad determinandum plenilunium Paſchale utantur; conjici poteſt, eos forſitan Cyclum Epactarum adhibere, tanquam rem quæ ſine difficiliore calculo etiam a rudioribus peragi poteſt; cum nulli inter ipſos magni nominis Mathematici exiſtant, qui ipſis verum plenilunii tempus, ope calculi aſtronomici, indigitare queant. Quod ſi ita fuerit; Judæi Paſcha ſuum nono Aprilis die, & conſequenter, eodem tempore eſſent celebraturi, quo Chriſtiani Auguſtanæ Confeſſionis Paſcha ſuum celebrarent; quod priori capiti intentionis *Concilii Nicæni*

Nicæni adverſaretur : quod caput ſane Patribus hujus Concilii multo magis curæ fuit, quam poſterius, ob odium irreconciliabile veterum Chriſtianorum in Judæos; quod tam ingens fuit, ut Chriſtiani Orientales, ſive Aſiatici, qui Paſcha ſuum eodem cum Judæis die celebrarunt, [hinc Quarto-decimani dicti] reliquis abominationi eſſent, & tanquam Schiſmatici ex Eccleſia ejicerentur.

In hoc caſu igitur Pontificii, qui Paſcha ſuum anno 1724, 16 Aprilis die celebrabunt, in poſterius quidem; Proteſtantes autem in prius & majoris momenti caput impingent. Meo itaque judicio melius fuiſſet, [quandoquidem omnino a Methodo *Gregoriana* determinandi Paſcha recedendum fuit] ſi Domini Plenipotentiarii Comitiorum Ratisbonenſium, neque Statuta *Concilii Nicæni* eſſent ſecuti, neque Cyclis *Gregorianis* uſi: ſed potius, neglecto prorſus plenilunio, quendam Solis diem in principium Veris incidentem, exempli gratia, primum poſt æquinoctium vernum, aut poſt 21 Martii determinaſſent; ac decreviſſent, ut eo die in poſterum annuatim Feſtum Paſchatis celebraretur. Hac facili methodo, cujus ope quivis plebeius, etiam abſque Calendario, quovis anno ſcire poſſet quo die Paſcha ſit celebrandum, omnes lites & difficultates tolli poſſent; quæ certe nonniſi ſuperfluis & minime neceſſariis ſubtilitatibus ortum ſuum debent, ſicque ſummo jure vocari poſſunt difficiles nugæ. Vi hujuſmodi ſubtilitatum, in nimis rigida Canonum *Concilii Nicæni* obſervatione, accidere poſſet, ut, in quibuſdam locis Orbis Chriſtiani, ubi Concluſum Ratisbonenſe obſervaretur, adhuc dies eſſet Saturni, in aliis autem jam dies Solis, eo ipſo momento quo verum aſtronomicum plenilunium contingeret. Priores itaque, vi hujus Concluſi, eo ipſo die Solis; poſteriores vero, demum poſt octiduum, Paſcha ſuum deberent celebrare; unde mirabilis oriretur confuſio.

Hoc autem revera contingere poſſe illi experientur, qui anno 1778 erunt ſuperſtites; quo anno æquinoctium vernum, ſecundum computum meum [ſalvo tamen errore calculi], hic

& in omnibus civitatibus ſub noſtro meridiano ſitis, erit viceſimo die Martii, hora pomeridiana, minuto 49, ſecundum horologia extra urbem adhiberi ſolita †: unde verum plenilunium Paſchale incidet in 11 diem Aprilis proxime ſequentem, qui erit dies Saturni, hora 9 pomeridiana, minuto 56, ſecundum eadem horologia: quo tempore autem media nox in aliis regionibus Orbis Chriſtiani multo magis verſus ortum ſitis jam præterierit, quarum incolæ proinde jam diem Solis habebunt, dum apud nos adhuc dies Saturni erit; quod omnibus notum eſt, qui Aſtronomiam & Geographiam vel e limine tantum ſalutarunt.

Sic, exempli gratia [locum enim nominabo intra Europæ fines ſitum] dicto plenilunii Paſchalis tempore, *Moſcuæ*, [quæ eſt Metropolis potentiſſimi *Ruſſorum* Imperatoris] jam ſeptem minuta poſt mediam noctem erunt præterlapſa. *Moſcovitæ* itaque, etiamſi ſupponamus eos ſe quoque Concluſo Ratisbonenſi accommodare, nihilominus tamen Paſcha ſuum octo diebus ſerius quam nos eſſent celebraturi. Niſi omnium locorum incolæ, neglecto proprio meridiano, communem aliquem meridianum ad calculum dierum, horarum & minutorum adhibere vellent: quem in finem, Corpus Evangelicum Ratisbonæ neceſſario meridianum Uranoburgicum proponit, ſub quo olim Celeberrimus *Danorum* Aſtronomus *Tycho* BRAHEUS obſervationes ſuas condidit. Interea probe ſciendum eſt, nullum meridianum præ alio aliquam prærogativam habere in rei natura fundatam, hincque ſpem non eſſe, ut omnes populi, qui ex ſcopo Corporis Evangelici calculo aſtronomico, utpote cæteris accuratiore, uti vellent, ſe adigi patiantur ad recipiendum alium meridianum a ſuo diverſum, in determinandis diebus & horis. Mihi certe perſuadere non poſſum, vel *Ruſſorum* Imperatorem, vel ejus Patriarcham, conceſſurum ut is dies qui jam a dimidio quadrante horæ apud ipſos cæpit eſſe dies Solis, nihilomi-

† Notum eſt horologia *Baſileæ* una citius hora quam extra urbem tempus indicare: adeo ut in Urbe hora ſecunda numeretur quo momento extra Urbem prima.

hilominus dies Saturni vocaretur; quæ res esset metamorphosis admodum ridicula, non absimilis illi, qua olim summus quidam Pontifex, occasione exortæ tum in populo universalis lætitiæ, dicitur, pro auctoritate sua, diem Veneris mutasse in diem Jovis, ut populo permitti posset esus carnis & libertas genio indulgendi. His omnibus accedit, quod si certus quidam meridianus præscribatur, cui omnes qui jam Concluſum Ratisbonense sequuntur se accommodare debeant, in locis ab hoc meridiano procul dissitis Pascha non poterit celebrari secundum tenorem rigidum Decretorum *Concilii Nicæni*, in annis supradictis; quæ tamen decreta in Concluso Ratisbonensi pro fundamento adducuntur. Unde sequitur nimium rigorem parere contradictionem; quoniam accidere potest, ut principia, iisque innixa praxis a Ratisbonensibus præscripta, secum invicem consistere nequeant. Hoc, & alia hujusmodi asystata satis ostendunt melius fore, si vel Dominica vigesimam primam diem Martis proxime sequens, vel alia quædam, methodo supra explicata, celebrationi Paschatis assignaretur, & inde omnia hinc pendentia Festa determinarentur; neglectis tam Canonibus *Concilii Nicæni*, quam operosa supputatione plenilunii Paschalis ope calculi astronomici peragenda, ut & Cyclo Epactarum a GREGORIO XIII adhibito. Cum enim Lex Mosaïca ceremonialis nos Christianos non amplius obstringat; hi Canones modo memorati, aliæque hominum traditiones, nos multo minus obligabunt. PAULUS enim *Apostolus* diserte ait: *Alius diem a die discernit; alius dies omnes eodem loco habet. Suam quisque sententiam exploratam habeat; qui dierum rationem habet, Domino habet.* Item *qui dierum rationem non habet, Domino non habet.* Rom. XIV. 5. 6. Et ad Galatas. *At nunc Deum cognoscentes, vel potius a Deo cogniti, qui fit ut vos rursus ad infirma egenaque rudimenta convertatis, quibus rursum de integro servire vultis. Dies observatis, & menses & tempora, & annos.* Gal. IV. 9. 10.

Optandum esset, ut Christiani non tam solliciti forent de eligendo die Paschatis, quam de eodem semel electo rite & mo-

re Christianos decente celebrando, in honorem Dei & memoriam gloriosæ resurrectionis Domini nostri JESU CHRISTI.

Quia igitur determinatio diei Paschatis apud Christianos res est mere indifferens & arbitraria; neque sperandum, id quod supra de Dominica vigesimam primam Martii diem proxime sequente proposui, a Statibus Imperii Evangelicis probatum iri & vim Legis obtenturum; audiendæ imprimis erunt rationes politicæ circa eligendam alterutram methodum determinandi Pascha.

Si itaque & mihi licet hac in re, salvo tamen aliorum judicio, mentem meam aperire; haud abs re alienum mihi videtur fore, si nuperrime exarato Concluso Ratisbonensi nos conformemus, non quidem ob causas in eo adductas, sed potius quia Ratio Status videtur requirere ut in puris formalibus a reliquis Evangelicis non secedamus; quandoquidem maxima pars *Helvetiæ* Reformatæ, jam sub finem Seculi præcedentis, se tum publicato Concluso Statuum Imperii Evangelicorum accomodavit, recipiendo Calendarium novum & correctum quod Concluso illo sanciebatur & introducebatur: quo jam tum in Comitiis S. Rom. Imperii decretum fuerat, ut imputatio Paschatis neque per Cyclum *Dionysianum* in *Calendario Juliano* receptum, neque per Cyclum *Gregorianum*, sed unice per calculum astronomicum instituatur; ut ita ipso facto indigitetur Pagos *Helvetiæ* Reformatæ eodem quo Pontificii Calendario uti nolle. Ita ut hodiernum Concluſum Ratisbonense nihil aliud sit, quam executio prioris a Reformatis *Helvetiæ* Pagis jam ab initio hujus Seculi approbati & recepti. Præterea attendendum etiam est ad hodiernum rerum statum. Conamur enim stabilire arctissimam unionem inter Ecclesias Reformatas & Fratres *Augustanæ* Confessionis: quod opus nunquam satis laudandum dissidio nullatenus necessario circa Calendarium facile impediri posset.

Hæc ad mandatum vestrum gratiosissimum de hac materia adducere volui, PATRES CONSCRIPTI; omnia prudentissimo vestro judicio debita reverentia submissurus. Quod si

autem

autem hæ meæ conſiderationes non viderentur ſufficere; negotium hoc, quod etiam ad ſcientias phyſicas ſpectat, ulteriori examini noſtri Profeſſoris Phyſices ſubmitti poſſet; ad exemplum Inclyti Magiſtratus *Tigurini*, qui in eadem conſultatione Profeſſorem Phyſicæ & Ingeniarium Profeſſori Matheſeos aſſociavit. Qui tres Viri illud ſcriptum compoſuerunt, cujus Apographum ad Vos, PATRES CONSCRIPTI, tranſmiſſum eſt.

Interea, Vobis apprecando perennem in adminiſtranda Republica proſperitatem & omnis generis felicitatem, ſumma veneratione ſemper ero,

PATRES CONSCRIPTI,

Die 26. Febr. 1723.

Veſter Obſequioſiſſimus Civis,

JOHANNES BERNOULLI

Doct. & Profeſſ.

N°. CLXXXIX.

DE TERRÆ MOTIBUS

Carolo-Heſychii factis.

I.

EPISTOLA Dni. TEXTORIS AD Dnum. BERNOULLIUM.

Vir Nobiliſſime & Celeberrime, Honoratiſſime Domine Profeſſor, Fautor colendiſſime,

INæſtimabili afficior voluptate, præter omnem expectationem occaſionem nactus, meum in Te, *Vir Nobiliſſime & Celeberrime*, affectum plane ſingularem litteris ad Te meis teſtandi. Poſtquam enim, inde ab undecimo die Maii ad minimum uſque ad 26 ejuſdem menſis diem, perpetuis fere, modo quidem debilioribus, modo autem vehementioribus Terræ motibus, modo in his regionibus inuſitato prorſus, fuimus agitati; Sereniſſimus Princeps, Dominus meus Clementiſſimus, mihi in mandatis dedit, ut Tibi, *Vir Nobiliſſime & Celeberrime*, gratioſiſſime a ſe ſalutato, illorum hiſtoriam, quanta id fieri poterit ἀκριβεία, exponerem; additis inſuper precibus, ut Tu, *Vir Nobiliſſime & Celeberrime*, quantum id Tibi graviſſima Tua permittent negotia, & commode poterit fieri, nos pro Tua humanitate digneris reddere certiores: An & quamdiu hujuſmodi Terræ motus *Baſileæ* & in vicinia fuerint obſervati? Item, ut paucis, iiſque generalioribus, judicium tuum aperias, quod nobis maximi erit ponderis, ob fiduciam, quam merito in Tuo iſto, *Vir Nobiliſſime & Celeberrime*, acumine ingenii plane ſingulari collocamus, unde hujuſmodi inſolita phænomena hoc tempore potuerint oriri? cum nemo noſtrum meminerit, ab annis innumerabilibus, in hiſce regionibus tale quid accidiſſe, uti nunc ſumus experti, paucis exceptis Terræ tremoribus, & tamen interea nullæ mutationes, quoad cauſas univerſales, antea fuerint obſervatæ, quæ potuerint ſufficere producendis hiſce effectibus. Additam rei enarrationem non potui exigere ad rigorem geometricum, cum mihi non ſit horologium accuratum, quod notet minuta prima & ſecunda, & cum fuerim ſæpiſſime impeditus negotiis quæ poſtulabat officii ratio, quibus factum eſt, ut non potuerim pro rei neceſſitate obſervationibus vacare; ſed nunc hic, nunc illic, debuerim viſitare ægrotos. His accedit, quod ſubitanei hujuſmodi naturæ effectus nullas admittant obſervationes

vationes accuratas. Nihilominus tamen ſpero, hiſtoriam horum effectuum, quam Tecum communicavi, ſufficere explendo deſiderio Sereniſſimi & Gratioſiſſimi Principis. Cæterum me Tuo favori & benevolentiæ inæſtimabili humillime commendo, *Vir Nobiliſſime & Celeberrime*, & omni, qua poſſum, nominis Tui veneratione indeſinenter ero,

Vir Nobiliſſime & Celeberrime,

Carolo-Heſychii 28 Maii 1737.

Tuus obſequioſiſſimus Cultor

TEXTOR

Doctor, Conſiliarius aulicus, & Medicus Sereniſſimi Principis.

NARRA-

I I.

NARRATIO PROLIXA *TERRÆMOTUS,*

Quem menſe Maio Anni 1737 *Carolo-Heſychii* ſenſimus.

Nota diviſionem Barometri, quo ſum uſus in fine hujus narrationis exhiberi.

POſtquam hic amæniſſima Veris tempeſtate ſatis diu cœloque conſtanter ſereno fuimus uſi, ſpirantibus ſubſolanis; experti tandem ſumus æſtum extraordinarium, fere qualis eſſe ſolet in menſe Julio & Auguſto.

Barомet. 16 grad. inter cœlum ſubnubilum & ſerenum.

Subſolanus, æſtus vehemens, cœlum ſudum, malacia.

1 11 Maii, anni currentis, die Saturni, hora circiter 3 matutina, minuto 45, cepimus ſentire primum notabilem Terræ motum, cum ſtridore, qualem equi curribus juncti ſolent excitare.

2 Hora 2 pomeridiana, minuto 30, ſenſimus ſubitaneum Terræ motum, cum tanto fragore, ac ſi e longinquo vehemens audiretur tonitru, vel ictus tormenti bellici per aërem tranſiens. Tremor fragorem hunc ſecutus, & titubatio durabat circiter duo minuta. Cuidam cæmentario turrem operienti pileus ex capite deciderat, & Præfectus cæmentariorum aſſeverabat turrim in eo motu, quantum quidem oculis dijudicare potuerit, 3 ½ pedes a perpendiculo in alterum latus declinaſſe. Hic quidem ædificia hoc tremore cum magno fragore huc illuc concuſſa ſunt; unde quibuſdam in locis cibi e parietibus, imagunculæ, peræ, & vaſa vitrea ex abacis deciderunt; camini concuſſi ſunt; ſellæ & ſpecula in quibuſdam conclavibus huc illuc titubarunt. Verumtamen poſtea edocti ſumus, hunc Terræ motum *Roſtadii*, [quod 5 horis hinc *Argentoratum* verſus diſtat] multo fuiſſe violentiorem.

3 Hora 10, & rurſus hora 12 nocturna, iterum
4 Terræ motum concuſſionibus notabilem ſentiebamus; cum illo tamen non comparandum, quem antea hora 2 & 3 ſenſeramus.

Barometri

Barometrum in eodem gradu.
Turbines procelloſæ, ſed cito deſinentes.
SW. SSW. & WSW. variant.
Cœlum ſudum, æſtus.

5 Die Solis 12 Maii, hora tertia matutina, minuto 45, vehementem ſenſimus concuſſionem & fragorem, cum conquaſſatione domuum. Toto die quemvis ventorum impetum comitabatur concuſſio notabilis, præter tremorem perpetuum.

Baromet. in eodem gr. SW. Turbines, nubes,
Hora 3 pomeridiana, procellæ, æſtus.

6 Die Lunæ 13 Maii, $\frac{3}{4}$ poſt horam tertiam pomeridianam, ſenſimus ab occidente vehementem fragorem ſubterraneum & vehementem Terræ motum.

7 Inter horam tertiam & quartam notabilem concuſſionem.

8 Hora 5, iterum notabilem concuſſionem.

Baromet. in eodem gr. SW. & WSW.
Cœlum ſerenum & ſudum, æſtus.

9 Die Martis 14 Maii, hora 2 matutina, vehementem Terræ motum cum crepitu parietum in domibus.

Barometer in eod. gr., ut & ventus & tempeſtas.

10 Die Mercurii 15 Maii, hora circiter tertia matutina, minuto 49, vehementem Terræ tremorem.

11 Hora quinta, minuto 45, vehementem Terræ motum, cum fragore concuſſione & conquaſſatione domuum, & ſubſequente titubatione tria minuta durante.

12 Hora ſexta, minuto 46 & 47, duas vehementes concuſſiones, cum titubatione.

13 Hora 8, minuto 20, notabilem concuſſionem, cum vehemente titubatione, 8 minuta durante.

14 Hora 10, vehementem tremorem, cum pertinace & vehemente titubatione. Tremorem debilem, qui a 12 hujus Menſis die conſtanter duravit, & etiam hoc toto die ſine intermiſſione.

Barometrum, ventus & tempeſtas in eodem gr.

15 Die Jovis, 16 Maii, ab hora quinta matutina uſque ad 15 minutum horæ ſequentis, quinque aut ſex vehementes concuſſiones. Minuto 37, vehementem tremorem cum trepidatione parietum.

16 Minuto 46, concuſſionem vehementem, cum tremore & trepidatione.

17 Poſt meridiem, imprimis paulo ante horam 4, uſque ad horam 5 & ultra, complures & vehementes concuſſiones cum tremore & trepidatione.

Barometrum descendit, usque ad horam 2 pomerid. ad gradum 14.

Cœlum incipit esse nubilum.

Versus horam 4, barometrum descendit ad gradum 13.

a S. SW. & W. tres apparent tempestates.

Cœlum incipit esse serenum, hora 8 pomerid.

Noctu, cœlo sereno fulgurat a SW. & WSW.

Barometrum in eod. gr.

Cœlum subnubilum, nubes a SW.

Hora 8 antemer. tonitru, tempestas, pluvia.

Versus horam 9 cessat pluvia.

Hora 9 nocturna, minuto 45, meteoron ignitum. Vide infra observatione quinta.

Hora 2 antemer. W, cœlum nubibus magis tegitur.

18 Die Veneris, 17 Maii, hora 5 matutina usque ad 6, concussiones frequentes & vehementes ut die præcedente.

19 Hora 8 antemeridiana, strepitum e longinquo, sequente tremore vehemente cum trepidatione.

20 Post quinque minuta, similes strepitus, tremores ac trepidationes, qui sæpius repetiti durarunt minimum 15 minuta.

21 Die Saturni 18 Maii, mane, ab hora 5 usque ad horam 6, complures concussiones atque tremores.

22 Hora nona, quosdam tremores vehementes.

23 Hora 9 nocturna, minuto 45, Terræmotum terribilem cum fragore & tonitru subterraneo conjunctum, ab occasu & libe, cum concussione domuum vehementissima, quæ omnes terrore haud exiguo affecit. Duravit ista concussio in maximo suo vigore, minimum 3 vel 4 minuta; eratque ad sensum multo vehementior ea, quæ hora 2 & 3 pomeridiana, diei 11, contigit.

24 Inter horam 10 & 11, tremores quosdam notabiles: hora 10, minuto 45 circiter, vehementem impetum perpendicularem cum fragore subterraneo, quem secutus est sonitus hujusmodi, ac si solum sub pedibus nostris esset fornicatum.

25 Ultra 40 minuta post horam 11, vehementior adhuc tremor Terræ productus a duobus impulsibus perpendicularibus se invicem secutis, cum fragore veluti Tormenti bellici vehementer tonante, & hujusmodi sono, ac si antrum spatiosissimum esset sub pedibus nostris.

26 Ab hora 12, usque ad 1, frequentes tremores notabiles.

27 Die Solis, 19 Maii, paulo ante horam primam matutinam, vehementes soli concussiones, debiliores tamen iis, quas duabus horis præcedentibus, circiter

Hora

Hora 4 antemer. nubes ſparſæ in horizonte. Aurora.

Barometrum 14 grad.

Ante meridiem, poſt horam 7, ventus validus. Frigor notabilis.

Ab hora 11, cœlum magis nubilum, S & SO. In meridie, ab hora 12 ad 1, æſtus vehemens, mox rurſus aër frigidus. Omnibus horis pomerid. W, & SW.

circiter decima & duodecima, ſenſeramus.

28 Verſus horam tertiam, vehementem Terræ motum, cum concuſſionibus & tremoribus.

29 Quibuſdam minutis ante horam quartam, duos vehementes impetus perpendiculares, ſe invicem immediate ſequentes, cum fragore tormenti bellici in diſtantia mediocri diſploſi.

30 Hora 6, 40 & aliquot minutis, duas concuſ-
31 ſiones terribiles ſe invicem excipientes. Deinde, minuto ſequente, tertiam concuſſionem, cum tremore & trepidatione pertinace.

32 Poſt horam 12 meridianam, vehementem impetum perpendicularem, cum fragore tormenti diſploſi.

33 Iteratum & multiplicem impulſum & concuſſionem, cum multiplice fragore & crepitu.

34 Hodiernus fragor, ab hora 6 uſque ad præſens tempus, videtur, judicio aurium, procedere a Notapeliote, ſive ab Euroauſtro.

35 Hora prima pomeridiana, ſenſimus iterum fragorem tormenti & concuſſionem vehementem ab Euroauſtro.

36 Hora duodecima, minuto 30, vehementem concuſſionem.

37 Hora prima, minuto 30, fragorem tormenti cum concuſſione ab Euroauſtro.

38 Hora 2, minuto 15, fragorem tormenti cum concuſſione ab Euroauſtro.

39 Aliquot minutis poſt horam tertiam, concuſſionem abſque fragore notabili. Eodem die didicimus aliquos caminos nocte præterita damnum cepiſſe, & quoſdam parietes *cratitios*, ligno & lapidibus interpoſitis confectos, & calce illitos, ſolvi cœpiſſe. Impetus horæ 12 noctis præteritæ concutiebat ſpeculam excubitoris ante arcem. Impetus vero immediate ſequens excubitorem, e ſpecula hacce metu ruinæ exſilientem, in terram proſternebat, ita ut ſemianimis ad contubernales deportaretur. Specula, licet ſatis ponderoſa, corruebat; ita ut plures aſſeres e tecto deciderent.

Excubiæ Portæ Linkhemienſis & Durlacenſis in parietem projiciebantur.

Barometrum 13 *grad. W. & SW. Aurora, cœlum nubibus ſparſis obductum, verſus SW, tenues & atræ nubes tempeſtatem minantes. Aër obſcuratur a nubibus ſpiſſis; verſus horam* 8, *pluvia exigua; poſt horam* 8, *cœlum ſubſerenum; verſus horam* 9, *cœlum redditur ſerenum.*

Verſus horam 12 *merid. Barom.* 12 $\frac{1}{2}$ *grad. Aër frigidus. Soles ardentes. SW & W.*

Verſus horam 1, *Barometrum* 12 *grad.*

Verſus horam 4, *Barom.* 11 $\frac{3}{4}$ *grad.*

Verſus horam 7 *pom. Barom.* 11 *grad.*

SW & W pergit.

Cœlum nubibus obductum, ventus validus, quandoque fulgures. Hora 11 *&* 12 *nocturna, imber & caligo. Poſt horam* 12, *ceſſat pluvia.*

Barometrum 11 *grad. SW, & W. Fulgor notabilis. Mane Sol per vices intercurrens.*

Poſt meridiem 2 --- 3, *tempeſtas valde nubila, pluvia tempeſtatem annuntians. Hora* 3, *aër a nubibus valde obſcuratus. Ante Solis occaſum Iris; crepuſculum in horizonte occiduo, inſtar incendii ingentis; præterea pluvia, quæ demum poſt horam decimam ceſſavit.*

Poſt mediam noctem tonitru.

40 Die Lunæ, 20 Maii, hora prima antemeridiana uſque ad horam duodecimam, ſenſimus quoſdam tremores notabiles.

41 Poſt horam ſeptimam antemeridianam, fragorem tonitrus, raucum quidem, ſed vehementem ab Africo, & e longinquo venientem, cum concuſſione domuum.

42 Paulo ante horam decimam, impetum vehementem cum fragore tormenti e longinquo & ab Africo venientem, atque concuſſionem domuum & ſoli.

43 Quibuſdam minutis poſt horam 10, ſimilem impulſum, cum vehemente tremore Terræ.

44 Minuto 45 poſt horam 10, mediocrem impulſum & concuſſionem.

45 Hora 10 nocturna, minuto 30, tremorem cum trepidatione.

46 Die Martis, 21 Maii, hora 2 matutina, Terræ motum cum trepidatione & titubatione.

47 Die

Barometrum 11 *grad.*

Ventus in eodem, frigor, interdum pluvia. Montes, ab occidente meridie usque ad orientem, vaporant modo insolito, ac si ingentes fornaces ibi fumarent. Post meridiem, cessatio pluviæ, malacia.

47 Die Mercurii 22 Maii, ab hora prima
48 matutina usque ad horam tertiam, succes-
49 sive quatuor Terræ motus mediocres, cum
50 tremore & trepidatione conclavium & lectorum.

51 Hora 10 nocturna, 40 & aliquot minutis, notabilem Terræ motum, qui 4 minuta duravit, in unica serie, cum mediocri trepidatione & titubatione; ita ut nonnulli hanc ob rem e domibus voluerint aufugere.

52 Die Jovis, 23 Maii, hora 12 pomeridiana, impulsum notabilem & trepidationem soli.

53 Hora 3 & 5, Terræ motum debilem.

Barom. 11 $\frac{1}{4}$ *grad.*

Ventus in eodem. Cœlum valde nubilum & perquam nebulosum; pluvia generalis; e montibus surgunt plurimi vapores spissi in altum. Pluvia copiosa usque ad noctem.

Ante occasum Solis nubes moventur a SO versus NW, a NW versus SO, & a NO versus SW, & a SW versus NO. Sol per vices intercurrens, crepusculum.

Ventus similiter a SW versus NO, a NO ad SW, &c.

Barom. 12 *grad. Tempestas nubila, NO. Turbines procellosi. Nubes a NO versus SW, & ab NW versus SO. Montes iterum vehementer fumant. Pluvia spissa & nebulosa.*

Hora 4 pomer. Barom. 13 $\frac{1}{2}$ *grad. Malacia. Cœlum nubilum absque pluvia.*

54 Die Veneris, 24 Maii, hora 2 matutina, vehementem impulsum & fragorem, cum concussione conclavium & lectorum.

Barom. 14 *grad.*

SW, ab occasu per septentrionem, usque ad SO, nubes tenues

55 Die Saturni, 25 Maii, hora 6 matutina, minuto circiter 45, impulsum perpendicularem & vehementem e locis inferioribus,

tenues & ſparſæ. Sol per vices intercurrens. Deinde a SO ad W, Nubes pluvioſæ. Poſt horam 7, turbines procelloſæ ſed cito tranſeuntes.

Verſus horam 9, NW, nubes pluvioſæ, quæ movebantur a NW verſus SO.

Verſus horam 11, N a N verſus S, moventur nubes, pluvia larga & continua.

Sub veſperam tempeſtas valde nubiloſa. Pluvia durans per integram noctem, cum aëre procelloſo.

Hodie tempeſtas aliquantum magis calida.

Barometr. in eodem gr.

Hora 10, Barom. 14 ½ grad.

Mane, ante horam 1, ventus validus & procelloſus, indeſinenter uſque ad ortum Solis, poſt ortum Solis pluvia larga, pergit ventus procelloſus. Boreas. Nubes, Lumen boreale.

Frigor ingens. Tempeſtas nebuloſa, montes nebulis ſpiſſis & caliginoſis obducti.

Poſt meridiem pluvia larga & generalis, quæ poſt horam 10 pomerid. ceſſat aliquantulum, & brevi poſtea rurſus incipit, & pergit uſque ad tempus matutinum ſequens.

Hora 9 & 10 nocturna, in montibus nebulæ ſpiſſæ & caliginoſæ, cum coruſcationibus ſubobſcuris.

cum ſequente trepidatione & titubatione quatuor circiter minuta durante.

56 Hora 6, minuto circiter 40, vehementem impulſum, cum trepidatione & titubatione.

57 Hora 8, frequentem & vehementem trepidationem & titubationem.

58 Hora 9, minuto 15, impulſum notabilem & concuſſionem, aliquot minutis poſtea redeuntem.

59 Hora 4 pomeridiana, minuto 30, tremorem ſubterraneum & notabilem perquam frequentem; & quandoque huc illuc trepidantem.

60 Hora 5, tremorem notabilem.

61 Die Solis, 26 Maii, hora 1 antemeridiana, minuto 30, Terræ motum, cum vehemente trepidatione & procelloſo turbine.

62 Hora 7 matutina, Terræ motum cum trepidatione.

63 Hora 6 pomeridiana, impulſum perpendicularem cum fragore rauco.

64 Hora 8 nocturna, impulſum perpendicularem & vehementem, cum fragore rauco.

65 Deinde, poſt minutum dimidium, alterum, ſed paulo debiliorem.

Barome-

66 Die

Barometrum in eodem grad. W a S. ſive Meſolibonotus. Pluvia generalis, nubes valde obſcuræ, nebula ſpiſſa, imber perpetuus per totam noctem, montes modo inſolito fumantes.

66 Die Lunæ, 27 Maii, hora ſecunda pomeridiana, impulſum perpendicularem cum tremore.

Barometr. 15 grad. Boreas. Hora 8 Baromet. 15 $\frac{3}{4}$ grad. Hora 9, Barom. 16 grad. Hora 12, Barom. 16 $\frac{1}{2}$ grad. Hora 1, Barom. 17 grad. Toto tempore antemer. montes nebulis & vaporibus adeo fumantes, ut prorſus non potuerint conſpici. Mane verſus horam ſextam, adhuc parum pluviæ; quæ deinde ceſſat uſque ad horam 7: poſtea pluvia larga, cum nebulis, per totum tempus antemerid. Poſt horam 9, SW. Poſt meridiem, Boreas, pluvia ceſſat; ante Solis occaſum, cælum fit aliquantiſper ſerenum. Noctu, nubes ſparſæ cum ſtellis intermicantibus. Major æſtus, quam diebus præcedentibus.

67 Die Martis, 28 Maii, hora 2 matutina, Terræ motum, cum tremore & trepidatione, abſque tamen fragore, circiter 8 vel 10 minuta durantem.

Horum Terræ motuum vehementiſſimi fuerunt illi, quos experti ſumus die 11 Maii, hora 2 pomeridiana, minuto 30; die 18 Maii, hora nona pomeridiana, minuto 45; deinde hora 11, min. 45.

His proxime accedunt quos ſenſimus die 11 Maii, hora 4 matutina; eodem, hora 12 pomeridiana; die 12 Maii; die 14 Maii, hora 2 matutina; die 15 Maii, hora 3 matutina, minuto 45; die 18 Maii, hora 10 pomeridiana, minuto 45; die 19 Maii hora 0 matutina, 40 & aliquot minutis; horis itidem, 3; 4; 6; 12; & 12 minuto 15, matutinis; & 1; 1, 30 minuto, 2; 15 minuto veſpertinis. His autem adhuc debiliores erant reliqui ſupra memorati.

Præter-

Præter hos impulſus & concuſſiones, admodum notabiles in campo etiam aperto, toto hoc tempore, uſque ad 26 Maii, facillime ſentiri potuerunt perpetui tremores, trepidationes & titubationes: deinde etiam impulſus & ſtrepitus debiliores ſatis frequentes.

Cæterum die 17 Maii, poſt meridiem, ab hora ſexta uſque ad noctem; die 20 ejuſdem, ab hora prima matutina uſque ad horam quintam, ab hora 11 antemeridiana uſque ad horam 10 nocturnam, ſolum valde adhuc erat quietum, ſi paucos tremores debiliores excipias. Econtrario ſenſeramus iterum moleſtiam tanto majorem, ob frequentiores tremores & concuſſiones, quibus a die 21 uſque ad diem 26, fuimus obnoxii.

OBSERVATIONES

Hac occaſione factæ.

In omnibus hiſce, tam vehementioribus concuſſionibus, quam debilioribus tremoribus Terræ, omnes galli urbani & agreſtes, interdiu & noctu, ſemper multo quam ſolent vehementius cecinerunt. Plurimæ etiam gallinæ hujuſmodi ediderunt cantum, ac ſi omnes in gallos fuiſſent mutatæ. In concuſſionibus autem vehementioribus, hæ aves celerrime ad ſe invicem acceſſerunt, ac ſi quam-maxime fuiſſent perterritæ. Unde colligi poteſt, ſolum toties peculiares vapores exhalaſſe, quoties fuit concuſſum; qui has aves peculiari affecerint ſenſatione, iiſque occaſionem ita canendi ſubminiſtraverint.

2°. Poſtquam Terræ motus ab initio jam tres dies duraviſſet, calor deſiiſſet & aër jam ſatis refrixiſſet; tam hic in Urbe, quam in agro, obſervatum fuit, lac vaccinum, noctu emulſum, mane ſequente in optimis cellis acorem contraxiſſe, etiamque coagulatum fuiſſe, ſi quis illud fervefecerit, ut in tempeſtatibus ſolet coagulari.

3°. Homines fide digni, & alieni ab omni ſuperſtitione, digitis ſolo infixis, calorem peculiarem & tam inſolitum ſenſerunt, ac ſi illud aqua bulliente tinctum fuiſſet; quamvis hoc experimentum tum demum tentaverint, poſtquam Terræ motus jam diu duravit, & jam aër cepit eſſe pluvioſus & frigidus.

4°. Complures, qui aurem noctu ſolo admoverunt, in eoque ſæpius ultra quadrantem horæ perſtiterunt, hujuſmodi ſtrepitum audiverunt, ac ſi magna aquæ copia in gremio Terræ perpetuo coqueretur & ebulliret.

5°. Homines fide digni, tres ſeptimanas ante initium Terræ motus, verſus hypophænicem diutiſſime ignem viderunt, quem ab initio ignem terreſ-

terreſtrem crediderunt, ſed poſt attentam & accuratam obſervationem deprehenderunt, illum fuiſſe phænomenon in nubibus procul a terra remotis apparens.

Cuſtos agreſtis *Cillensfeldii*, ita dicti, hora non prorſus dimidia verſus Euro auſtrum hinc diſſiti, nomine DAUSIG, vir honeſtus & fide dignus, affirmat, ſe, die 18 Maii, & ut conjiciebat, paulo ante horam 10 nocturnam, quercui innixum, vultu trans *Carolo-Heſychium*, *Landaviam* verſus, ſive Meſargeſtem directo, animadvertiſſe ignem, minimum 15 pedes longum & latum, vehementiſſime radiare; unde conjecerit, incendium ortum eſſe *Carolo-Heſychii*, & poſtquam, ut aiebat, hoc phænomenon tamdiu viderit, ut interea Oratio Dominica commode potuerit bis recitari, illudque *Landaviam* verſus, id eſt, ab ortu in occaſum progredi obſervaſſet, ſibi viſum fuiſſe, ſe una cum quercu in altum tolli, & una cum illo rurſus in terram decidere; quam primum autem, poſt concuſſionem hanc violentam & inde ortum terrorem, ad ſe redierit, & ſupradictum ignem diutius voluerit obſervare, illum jam prorſus diſparuiſſe.

6°. Quamvis eruptiones notabiles & vehementes horum Terræ motuum non ſtricte & accurate eadem hora diei redierint; nihilominus tamen ex hac mea vera narratione apparebit, eos ordinem quendam horarum diei obſervaſſe; nempe, ante meridiem circiter ab hora tertia uſque ad 7 aut 8, poſt meridiem ab hora 12 uſque ad horam tertiam vel quartam, & tandem noctu ab hora 9 uſque ad horam 12.

7°. Tandem *Ulma* accepimus, auctore Viro honeſto & prænobili, Terræ motum ibi quidem obſervatum eſſe valde exiguum, verum Ulmenſes quotidie fere tempeſtatibus fuiſſe territos.

Tempus præterlapſum & negotia urgentia mihi nullum relinquunt otium plura notandi. Hoc tantum paucis addere volui, me uſum eſſe Barometro communi, cujus hæc eſt diviſio.

a	1	uſque	ad	4	gradum	inclusive:			Procellæ.
a	5	--	--	8	—	—	—		Pluvia larga.
a	9	--	--	12	—	—	—		Pluvia & Ventus.
a	13	--	--	16	—	—	—		Tempeſtas variabilis.
a	17	--	--	20	—	—	—		Cœlum ſerenum.
a	21	--	--	24	—	—	—		Serenitas conſtans.
a	25	--	--	28	—	—	—		Valde ſiccum.

III.

Ad præcedentes litteras & narrationem Dni. TEXTORIS *Reſponſio.*

Vir Nobiliſſime & Celeberrime, Domine & Fautor honoratiſſime, æſtumatiſſime.

LItteræ Tuæ graviſſimæ, die 28 Maii exaratæ, die 4 hujus menſis ad me pervenerunt, una cum Relatione prolixa & cognitu jucunda multiplicium Terræ motuum quos, intra 15 aut 16 dies, *Carolo-Heſychii* & in vicinia ſenſiſtis.

Ante omnia gratias Tibi habeo, quantas poſſum, pro communicatione hujus relationis; deinde veniam rogo, *Vir Nobiliſſime & Celeberrime*, quod ad humaniſſimas litteras Tuas non ſtatim reſpondi. Cujus rei cauſa eſt, non tam multitudo negotiorum meorum, quam imbecillitas corporis mihi a morbo graviſſimo relicta, quem hoc vere fui perpeſſus; & quo præcipue trepidatio manuum mearum, qua jam a multis annis laboravi, adeo invaluit, ut difficulter calamum ſcriptorium regere potuerim.

Admiratione dignum utique eſt, quod talis regio, qualis Veſtra eſt, ubi concuſſiones Terræ ſunt rariſſimæ, ut probe animadvertis, *Vir Nobiliſſime & Clariſſime*, jam brevi adeo tempore a pluribus hujuſmodi terribilibus caſibus ſubito obruta & perturbata ſit; adeo ut amæniſſimum *Carolo-Heſychium* (hoc ſaltem tempore) ſuo nomine haudquaquam reſponderit, ſed ſummo jure vocari poſſit *Carol-Aneſychium.*

Ex omnibus hiſce Terræ motibus, in Urbe noſtra nonniſi duos ſumus experti. Nempe 11 Maii, hora tertia pomeridiana, ſecundum noſtrum numerandi modum, & deinde hora quinta matutina diei ſequentis, quorum uterque nihilominus tam debilis fuit, ut pauciſſimi homines eos animadverterint vel ſenſerint, etſi poſterior aliquantulum fortior fuerit priore.

Argen-

Argentorato mihi scriptum est, eadem binas concussiones ibi paulo majore impetu vim suam exeruisse. Unde conjicio originem ipsarum *Argentinensibus* propiorem fuisse quam *Basileensibus*, & *Carolo-Hesychianis* adhuc propiorem quam *Argentinensibus*.

Concludo tamen primam hujus vestri continui Terræ motus causam, ubicunque primum sortita fuerit effectum, non adeo violentam fuisse; cum illius effectus, quantumquidem notum est, se non in regiones remotas extenderit, ut sæpe fieri solet, & ut præsertim in eo est observatum quem, circiter ante quinque vel sex annos, hora sexta pomeridiana, sensimus, quique se extendit a confiniis *Poloniæ* usque ad *Montes Pyrenæos*.

Anno proxime præterito, die 12 Junii, paulo ante horam octavam pomeridianam, Terræ motum valde fortem experti quoque sumus per totam *Helvetiam* & loca vicina, qui nullo quidem damno notabiliore nos affecit, præterquam quod aliquos caminos dejecit, & aliquas murorum fissuras produxit. In quibusdam locis Terræ motus sunt multo frequentiores quam in aliis; præsertim in regionibus *Italiæ* & *Siciliæ*, haud procul dissitis a montibus ignivomis *Vesuvio* & *Ætna*, quemadmodum etiam, ante annos circiter octo vel decem, Urbs Siculorum *Panormus* Terræ motu vehementissimo fere prorsus fuit eversa, & in ea deleta fuerunt multa hominum millia; qui partim miserrime conquassati, partim vero prorsus a Terra absorpti fuerunt.

Etiam Urbs nostra *Basilea* huic malo quandoque fuit obnoxia, præsertim antiquis temporibus; quippe, anno 1356, duæ tertiæ Urbis partes Terræ motu horribilissimo fuerunt eversæ, & magna etiam pars flammis exortis in cineres abiit.

In vastissima *Americæ* regione *Peruviana*, & cum primis in illius Metropoli, Terræ motus tam sunt frequentes, ut rarissime dies præterlabatur, quo non aliquæ sentiantur concussiones; unde etiam omnia ejus ædificia perquam humilia & solida solent exstrui.

Quod itaque attinet ad causam unde hi tam prodigiosi effectus oriuntur; vellem certe lubentissime desiderio Serenissimi &

Gratioſiſſimi Principis per omnia ſatisfacere, ſi hoc ullo modo fieri poſſet.

Ut tamen nihilominus generales meas conjecturas Ipſi ea, qua decet, reverentia aperiam, ſequentia breviter notabo.

1°. Circumſtantiæ, quarum in recenſione Tua mentionem facis, *Vir Nobiliſſime & Celeberrime*, abunde evincunt eſſe plurimas cavitates ſeu cryptas ſubterraneas; cum ſubinde dicas auditum eſſe fragorem ſubterraneum, qui hujusmodi ſonum poſt ſe reliquerit, ac ſi ſolum eſſet fornicatum.

2°. Hinc itaque poteſt concludi, in ſpatioſis iſtis cavitatibus formari materiam inflammabilem; quæ ſi accenditur, magno impetu conatur erumpere, & Terram longe lateque concutit, inſtar cuniculi ſubterranei in loco munito, qui incenſus diſſilit, Terramque circumjacentem ita concutit, ut illius tremor ad aliquot milliarium diſtantiam quaquaverſum poſſit ſentiri.

3°. Hoc illis confirmatur Terræ motibus, qui in vicinia *Veſuvii*, *Ætnæ*, & reliquorum montium ignem eructantium oriuntur, & communiter tum incipiunt, cum novæ flammæ magno fragore & crepitu e montibus iſtis conantur erumpere. Tum enim concuſſiones atque tremores iſti tam diu durant, donec ignis exitum liberrimum abſque ullo impedimento ſortitur. Conſiderandum etiam eſt in poris particularum, exempli gratia, nitri in pulvere pyrio contenti incluſum eſſe aërem quam arctiſſime condenſatum atque compreſſum; qui, cum pori admoto igne aperiuntur, ſubito erumpit, & conjunctis viribus, mediante vi ſua elaſtica, fortiſſimos parietes cavitatum ſubterranearum penetrat atque diſrumpit, [ut hoc etiam fieri ſolet, quando cuniculus ſubterraneus, vel ſaltem bomba diſſilit] unde in regione circumjacente neceſſario concuſſio debet oriri, major vel minor, pro ratione quantitatis materiæ incenſæ.

4°. Quam fortem & violentum autem effectum aër in poris coarctatus poſſit habere, ſi per illorum aperturam emittitur, ex eo fere poteſt concludi, quod vi aëris in ſclopeto pneumatico vi humana condenſati, ſi illud ejaculamur, globus tanta vi propellatur ut in 50 paſſuum diſtantia hominem occidere poſ-

ſit;

fit; quamvis non nisi decies aut duodecies densior reddi possit aëre externo & naturali.

5°. Quid jam non fiet, si aër in poris nitri, naturæ viribus, non decies tantum, sed & centies, imo millies & sæpius, condensatur plusquam aër naturalis, & ejus vis elastica in eadem augetur ratione; quemadmodum peculiari experimento demonstravi in Dissertatione mea *de effervescentia* *, quam, jam ante annos 47, edidi, cum essem adhuc juvenis.

6°. Si igitur hoc ut hypothesis stabilita conceditur, & porro supponitur sulphurem & nitrum in cryptis subterraneis naturaliter posse generari, ex quibus pulvere carbonario mixtis pulvis pyrius confici solet; facile apparet, post harum materiarum permixtionem, mediante unica ignis scintillula, [quæ oriri potest, si tantum unus silex in alterum incidit] hanc ita natam materiam illico capturam ignem, & terram superjacentem, instar cuniculi incensi, magna vi & fragore disrupturam, & ita longe lateque concussionem Terræ, sive Terræ motum producturam.

7°. Verum etiam fieri potest, ut materia inflammabilis in tam exigua copia adsit, & tam profunde jaceat, aut tanta mole terræ tegatur, ut realis ignis eruptio non sequatur; sed ut ignis multos cuniculos & fornices successive penetret, & tandem pedetentim per meatus terræ evaporet; unde non nisi tremores aut concussiones se invicem sequentes sentiuntur, & varii ignes fatui exhalationibus oriri debent: quod ais, *Vir Nobilissime & Clarissime*, apud Vos observatum esse.

8°. Si ingens adest materiæ copia, eaque ubique simul incenditur, ut fere fieri solet in incensione cuniculi subterranei, tunc necessario a subitanea disruptione soli circum circa terribilis Terræ motus oriri debet, qui unicam tantum, verum vehementissimam, concussionem producet, præcedentibus lentibus tremoribus destitutam; quia initium, medium, & finis hujus effectus unico veluti momento transeunt. Quod merito vocari potest subitanea & in summo gradu excitata effervescentia, quod

* N°. I. pag. 3. *Tom. I.*

in permixtione quorundam liquorum chymicorum apparet, veluti olei vitrioli cum oleo tartari, quorum effectus, quantumvis ſubitaneus, nequidem comparari poteſt cum eo quod obſervatur in fulguratione accenſi pulveris pyrii.

9°. Quod ſi autem ſubitanea efferveſcentia caſu quodam impeditur, ut hoc fit in præparatione pyroboli, vel cum ſolummodo pulvis pyrius humectatur & ſubigitur; tum ipſa materia per incenſionem ſenſim conſumetur; aër autem in poris incluſus & condenſatus, de quo ſupra egi, ſe nihilominus exeret, quamvis lentius, & vehementi ſua preſſione & pulſu in parietes fornicum ſubterranearum, varios per aliquod tempus durantes tremores, concuſſiones, aliaque ſymptomata, ut apud Vos obſervaſti, producere poterit; quæ autem profecto non tam periculoſa erunt, quam unicus impetus, qui oritur ex incenſione ſubitanea univerſæ, quæ adeſt, materiæ.

10°. Idem judicium eſt ferendum de omnibus fermentationibus in quacunque materia ortis; obſervabimus enim eam ſtatim extendi, & majus ſpatium occupare, quamprimum incipit fermenteſcere; adeo ut, ſi alicubi incluſa eſt, magna vi exitum quærat; quod utique abunde apparet ex muſto fermenteſcente, quod dolium etiam ferreis circulis circumdatum poſſet diſrumpere, niſi in ſuperiore parte ſuperficiei dolii fieret apertura. Cauſa hujus vis ſupernaturalis, ut videtur, non niſi ex condenſatione perquam violenta aëris oritur, qui ante initium fermentationis in poris particularum muſti incluſus, poſtquam aperiuntur, erumpit & omni ſua vi in aſſulas dolii ita agit, ut illud neceſſario diſrumpi debeat; niſi aër, qui ſe dilatare conatur, per apertum ſpiramen exitum inveniat.

11°. In fermentationibus communiter ingens exoritur æſtus, ob internum motum particularum in ſe invicem impingentium; ita ut materia, natura ſua inflammabilis, ſua ſponte facillime in flammas abire poſſit; quemadmodum fænum demeſſum, quod, antequam prorſus ſiccum eſt & aridum, in horreum colligitur, & coarctatur, ſæpiſſime ſponte in flammas abit & incendium gignit.

12°. Cele-

12°. Celebris Chymicus Dominus LEMERY edidit in *Commentariis Academiæ Scientiarum Parisinis* Anni 1700, pag. 101 & seqq. Dissertationem lectu dignam, cui titulus est: *Explicatio physica & chymica Ignium subterraneorum, Terræ motuum, Ventorum furentium, Fulgurum & Tonitrus.* In ea est sententia non tantum Terræ motus sed & reliqua meteora, quorum titulus meminit, una cum phænomenis & effectibus suis, oriri ex sulphure, qui sub terra generatur & ferro miscetur. Quomodo autem hoc re ipsa demonstrari, & ope præparationis artificiosæ ante oculos poni possit, sequenti docet descriptione.

13°. Sumit portionem limaturæ ferri, eamque miscet cum ingenti portione sulphuris in pulverem redacti, ex qua materia deinde, affusa copia aquæ sufficiente, pastam conficit, quam horis aliquot in digestione sinit. Hæc sensim incipiet magno æstu fermentescere & intumescere, ac hinc inde aget rimas, ex quibus ascendent vapores, qui quidem tantum erunt calidi, quando mediocris tantum adest materiæ copia; sed qui in flammas erumpent, quando magna aderit, veluti cum pasta adhibetur triginta vel quadraginta librarum.

14°. Quamvis Auctor putat effectum hujus operationis in eo tantum consistere, quod particulæ acutæ sulphuris, violenta intrusione in particulas ferri, mutuam cum istis & vehementem attritionem, hincque magnum æstum producant; tamen, me judice, nodus nondum est solutus. Quamvis enim, mediante hac hypothesi, inflammatio aliquo modo potest explicari; nondum tamen apparet, unde intumescentia, vehemens impetus, exhalatio, aliaque symptomata oriantur; nisi dixero, hæc omnia præcipue oriri ex dimissione particularum martialium, quæ in poris inclusæ sunt & condensatæ, quando nimirum cuspidatæ & acutæ sulphuris particulæ poros aperiunt; ut jam supra in explicatione effectus pulveris pyrii ostendi: hac tamen differentia, quod particulæ sulphureæ hic agant in poros particularum nitrosarum, ibi autem in poros particularum martialium: ubi notandum, in his æque ac in illis aërem condensatum tamdiu-

con-

percelluntur terrore, & ad varios ſtrepitus & motiones impelluntur.

Quod porro notas, lac vaccinum noctu emulſum mane ſequente etiam in optimis cellis aceſcere; nulla alia utique hujus rei eſt cauſa, præter eam, quæ in tempeſtatibus horrendis eundem producit effectum. Tremor nimirum in lacte producit motum inteſtinum vehementiſſimum; unde oritur diſſolutio partium, & per conſequens diffluxus earundem, & acor, idque eo magis, quoniam æque in tonitru, ac in Terræ motu, multi vapores ſulphurei accedunt, qui acore præditi ſunt, ut ex corroſivitate ſpiritus ſuphuris ſufficienter apparet.

IV.

Dni. TEXTORIS *Reſponſio.*

Vir Nobiliſſime & Celeberrime, Honoratiſſime Domine Profeſſor; Patrone Colendiſſime,

JUdicium tuum de nupero Terræ motu Principi Sereniſſimo Domino meo clementiſſimo perplacuit, qui & affirmavit, ſibi a Te, *Vir Nobiliſſime & Celeberrime*, per omnia eſſe ſatisfactum, ſeque ex animo dolere, quod hac re tantopere fueris occupatus. Interea Te, per me, gratioſiſſime ſalutat, & certiorem reddit, ſe gratum ſuum animum proxima occaſione ipſo facto eſſe teſtaturum. . . . . .

. . . . . .

Cæterum inſigni hac fruor voluptate, ut me favori Tuo inæſtimabili humillime commendare & ſumma veneratione perpetuo eſſe poſſim,

Vir Nobiliſſime & Celeberrime,

Tuus obſequioſiſſimus Servus

Carolo-Heſychii die 10 Julii 1737.

TEXTOR.

FINIS.

INDEX

INDEX NUMERORUM

Quos TOMUS QUARTUS *complectitur.*

NUM. CL. De Seriebus varia, pag. 5
CLI. Methodus exhibendi ſummas progreſſionum finitarum per numerorum naturalium quamcunque potentiam datam procedentium, 16
CLII. Summatio Seriei Quadratorum reciprocæ, 20
Appendix, 24
CLIII. PROBL. Maximum terminum binomii ad quamcunque dimenſionem elevati invenire, 25
CLIV. De Alea, ſive Arte conjectandi, Problemata quædam, 28
CLV. Geometricæ Propoſitiones variæ, 33
CLVI. Methodus reſolvendi æquationem differentialem primi gradus, in qua incognitæ non aſcendunt ultra primam dimenſionem, 42
Applicatio ad exemplum de curva velocitatum in Cycloïde, 44
CLVII. PROBL. Invenire conditiones ſeparabilitatis differentialium in æquationibus hujus formæ $as^m ds + bu^q s^p ds = du$, 49
CLVIII. Formulæ reductionum, 52
Methodus pro reductione Formulæ *Petropoli* miſſæ, 56
CLIX. Reſolutio binomii $1 \pm x^n$ in ſuos factores reales duarum dimenſionum, 58
CLX. Inveſtigatio & Demonſtratio Theorematis *Coteſiani*, 67
CLXI. Æquationes differentiales incompletas cujuſque gradus completas reddere, 77
CLXII. Reductio æquationis $y^m ddy = qx^n dx^p dy^{2-p}$ ad æquationem differentialem primi gradus, 79
Reductio æquationis ejuſdem ad genus Parabolarum, 88
CLXIII. PROBL. Rectificare curvam datam, per aliam formulam quam $\int \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, 89

NUM. CLXIV. De transformationibus & rectificationibus curvarum, *pag.* 92
CLXV. De evolutione ſucceſſiva & alternante curvæ cujuſcunque in infinitum continuata, tandem Cycloïdem generante, Schediaſma Cyclometricum. 98
CLXVI. PROBL. In ſuperficie quacunque curva ducere lineam inter duo puncta breviſſimam, 108
Applicatio ejuſdem Methodi ad ſuperficies conoïdicas, 118
Ejuſdem Problematis Solutio per methodum de maximis & minimis, 127
CLXVII. Animadverſiones in Cl. CHEYNÆI *Methodum Fluxionum inverſam*, 129
CLXVIII. Obſervationes in Cl. MOIVRÆI *Animadverſiones in Dni.* CHEYNÆI *Tractatum de Fluxionum methodo inverſa*, 146
CLXIX. Extrait d'une Lettre à l'Auteur du *Commentaire ſur l'Analyſe des infiniment petits*, 160
CLXX. Remarques ſur le Livre de Mr. STONE, intitulé, *Analyſe des infiniment petits, contenant le Calcul integral, &c.* 169
CLXXI. Optica varia.
I. Problema Opticum, de inveniendo puncto, unde tria objecta inæqualia in rectam lineam diſpoſita, æqualia videantur, 193
II. Problema Dioptricum generale, quod comprehendit omnia Hugeniana circa lentes, 195
III. Ordre du Calcul pour la détermination des Iris ou Arc-en-Ciels de toutes les Claſſes, 197
CLXXII. Le Cabeſtan délivré des inconvéniens ordinaires, par raport à ſon uſage ſur mer, 205
CLXXIII. Solutio Problematis catenarii generaliter concepti, per methodum HERMANNI ab errore repurgatam, 234
CLXXIV. Solutio Problematis curvaturæ laminæ elaſticæ a pondere appenſo curvatæ, 242
CLXXV. De lege virium, qua fit ut mobile ad centrum deſcendat temporibus quæ ſint ut poteſtates datæ diſtantiarum a quibus deſcenſum inchoat, 243
CLXXVI. De curva quam deſcribit corpus incluſum in tubo circulante, 248
CLXXVII. Propoſitiones variæ Mechanico-dynamicæ, 253
De compoſitione & reſolutione virium, 253
De viribus motricibus ad vectem applicatis, 256
De communicatione motus per vectem, 262
De centro ſpontaneo rotationis, 265
De motu corporum irregularium, ex percuſſione vel colliſione aliorum producto, 273

De

De Corporum aquæ insidentium oscillationibus, & de invenienda longitudine Penduli simplicis oscillationibus illis isochroni. . *p.* 286
De oscillationibus corporum titubantium super superficie aliqua immobili, 296
De Pendulo luxato, & ejus reductione ad Pendulum simplex isochronum, 302
De Pendulis sympathicis, 310
CLXXVIII. De Pendulis multifilibus, 313
Idea solutionis pro Pendulis trifilibus, quadrifilibus, seu quibuscunque multifilibus, 318
Typus alterius solutionis Problematis de multifilibus Pendulis, 325
Solutio brevior & simplicior ex natura oscillationum petita, 329
CLXXIX. Problema statico dynamicum, 332
CLXXX. Continuatio Tractationis de descensu gravis super hypothenusa Trianguli rectanguli mobilis super plano horizontali immobili, 341
CLXXXI. Problema *Newtonianum* generaliter conceptum & solutum, 347
CLXXXII. Problema ballisticum, 354
CLXXXIII. De oscillationibus Penduli in medio quod resistit in ratione simplici velocitatum, 374
CLXXXIV. De Corporis gravis ascensu & descensu per arcus æquales in medio resistente. 378
CLXXXV. Du Pendule composé dans un milieu résistant, 382
CLXXXVI. Hydraulica, 387
EULERI *ad Auctorem Epistola*, 389
Præfatio, 391
Hydraulicæ Pars I, agens de motu aquarum per vasa & canales cylindricos, qui ex pluribus tubis cylindricis sibi invicem adaptatis sunt conflati, 397
Problema hydraulicum, 409
De pressione fluidi in fundum vasis cylindrici (sine annexo tubo) per foramen effluentis, 423
Appendix, 427
Hydraulicæ Pars II, continens methodum directam & universalem solvendi omnia Problemata hydraulica, quæcunque de aquis per canales cujuscunque figuræ fluentibus formari ac proponi possunt, 432
De Pressionibus quas sustinent latera canalis a liquore transfluente, 442
Corollaria generalia circa velocitates & pressiones, 447

Applicatio Theoriæ noſtræ ad Exempla vaſorum & canalium ſemper plenorum, *pag.* 452
De brevitate temporis ab initio effluxus uſque ad velocitatem ſenſibiliter æquabilem ſeu uniformem, 456
Theorema hydraulicum generale, directe deductum ex principiis hydrodynamicis, demonſtratum per methodum indirectam virium vivarum, 459
Exemplum ſingulare determinandi motus aquæ in canali conoidico verticaliter deſcendentis, ubi nihil effluit, nullaque nova aqua deſcendenti ſuccedit, 463
Collatio hujus ſolutionis per vires vivas cum ea quæ elicitur per methodum noſtram directam ex principiis mere dynamicis petitam, 466
De Vaſis quæ interea dum emittunt liquorem per aperturam in fundo vel prope fundum factam, nihil novi liquoris deſuper influentis accipiunt, 475
De Clepſidris conficiendis, 478
EPIMETRUM. De vi per quam vas retro urgetur, dum aqua ex eo erumpit in directione horizontali, 484
CLXXXVII. Problema Hydraulicum, 488
CLXXXVIII. De die qua celebrandum Feſtum Paſchatis anno 1724, 494
CLXXXIX. De Terræ motibus *Carolo-Heſychii* factis, 502
I. *Epiſtola* Dni. TEXTORIS *ad* Dnum. BERNOULLIUM, ibid.
II. *Narratio prolixa Terræ motus, quem menſe Maio anni* 1737 Carolo-Heſychii *ſenſimus*, 504
III. Ad præcedentes litteras & narrationem Reſponſio, 514
IV. Dni. TEXTORIS *Reſponſio*, 522

INDEX

INDEX
RERUM NOTABILIORUM.

A

Abbreviationis Penduli ſub æquatore cauſa. I. 524
Acceleration *des corps peſants dans leur chute, comment elle peut être conſiderée.* III. 48
Acidum (Sal) Chymicorum. I. 13. 15
— efferveſcere ſæpius poteſt, alcali ſemel. I. 16
— qualem figuram habeant ejus particulæ. I. 15. 18
Acor lactis poſt Terræ motum IV. 512. 522
Action & réaction, *leur égalité.* II. 14 III. 16
Actioni æqualis & contraria reactio. I. 372. IV. 484
Ænigma geometricum teſtudinis hemiſphericæ quadrabilis. III. 211
— — univerſaliter ſolutum. I. 160
Æquabilis preſſionis curva Geometris indaganda proponitur. I. 141
Æqualitas cauſæ & effectus. III. 242
— curvarum diverſarum. I. 152. 406. 414. 419 423. 437. ſ. 449. 451. IV. 92. ſ. 144. ſ.
Æquatio canonica. III. 116
— — primi gradus ſoluta. III. 119. IV. 42. 46.
— — ſecundi & ulteriorum graduum. IV. 46
— curvæ æquilibrationis. I. 131
— — Beaunianæ. I. 128. 147. III. 424
— — brachyſtochronæ, vel celerrimi deſcenſus. I. 191. II. 468. 470. 472
— — catenariæ. I. 233. 234. III. 493. 498. 501. 503. 507. IV. 235. 238
— — cauſticæ circularis. I. 56. III. 468
— — clepſydrarum. IV. 478. 481. 482
— — cujus planum oſculans ad planum tangens habet inclinationem datam. IV. 114
— — cujus radius oſculi eſt ad normalem in ratione data. II. 278 280. 283. 290. 300. 308. 469

Æquatio

Æquatio curvæ deſcriptæ a corpore deſcendente per hypothenuſam curvam Trianguli mobilis. IV. 345
— — — a corpore in Tubo circulante. IV. 250. 251
— — — a projectili in medio quod reſiſtit in ratione ſimplici velocitatum. II. 400
— — elaſticæ. I. 122. IV. 89. 243
— — exponentialis. I. 184. 186. 270. 310. II. 271. III. 376
— — genitæ ex biſectione arcus circuli. IV. 37. 38
— — iſochronæ. III. 484
— — — paracentricæ. I. 120. III. 487. 488
— — lintearıæ. III. 515. IV. 89
— — logarithmicæ exponentialis. I. 186
— — pantogoniæ. II. 608. 609
— — per cujus arcus grave deſcendens a quiete impendat tempora quæ ſint ut poteſtates altitudinum. IV. 246
— — quæ inter iſoperimetras dat aliquod maximum. II. 214. 215 218. 228. 229. 231. 233. 234
— — quam formant applicatæ ſemi-circuli in punctis biſectionum. I. 52. III. 469
— — — perpetuo tangit recta fluens intra anguli recti crura, & ejus evolutæ. I. 57. III. 448
— — — quam refert catena oſcillans. IV. 329
— — — quam refert chorda muſica vibrans. IV. 210
— — rectam per datum punctum ductam ita ſecantis ut ſegmentorum rectangulum datum ſit. I. 157
— — rectam datæ poſitione parallelam ita ſecantis ut datum ſit rectangulum ſub ſegmentis. *ibid.*
— — rectam per datum punctum ductam ita ſecantis ut ſegmentorum ſumma data ſit. I. 158. IV. 41
— — ſolidi minimæ reſiſtentiæ. I. 309. 316
— — tautochronæ. III. 490
— — velariæ. III. 512
— — velocitatum corporis cycloidem deſcribentis in medio quod reſiſtit in ratione ſimplici velocitatum. II. 44. 375
— curvarum algebraïcarum univerſalis. I. 379. 384
— lineæ breviſſimæ in ſuperficie curva. IV. 111. 112. 115. 121. 122. 123. 125. 128
— modularis trajectoriarum orthogonalium. II. 302. 455. 460. 464
— parabolæ helicoidis vel ſpiralis parabolicæ. I. 46
— parabolarum omnis generis. I. 380. II. 300
— trajectoriarum orthogonalium. I. 270. 271. 277. 398. II. 271. 276. 278. 284. 285. 303. 460. 461

Æquatio

Æquatio trajectoriarum reciprocarum. II. 565. 615
Æquationi differentiali uni infinitæ curvæ ſatisfaciunt. I. 124
Æquationis aſſumptæ cum coëfficientibus indeterminatis conditiones. IV. 131. 139
Æquationis differentialis cujuſdam ſecundi gradus reductio ad primum. IV. 79
—— —— —— —— —— —— ad genus Parabolarum. IV. 88
Æquationes differentiales homogeneæ, quales. III. 110
—— —— lineis rectis conſtruuntur. III. 117
—— —— incompletas completas reddere. III. 412. IV. 137. 150. 77. II. 442
Æquationum differentialium primi gradus conſtructio. I. 123. III. 108. 419
—— —— —— —— ſolutio. I. 175. 320. II. 441. III. 108--124. 110. 419. IV. 42. 46. 381. 408
Æquationum radices quomodo per approximationem continuam inveniantur. III. 537. ſ.
Æquilibrationis curva eſt epicyclois. I. 133
—— —— ejus conſtructio. I. 129. 140
—— —— —— —— generalior & ſimplicior. I. 134
—— —— —— uſus. I. 132
—— —— Leibnitio conſiderata. I. 139
Aër, an generetur de novo. I. 23
—— ex fermentatis exhalans animalibus noxius. *ibid.*
—— in particulis corporum latet denſus. I. 14. 19. ſ.
—— in pulvere pyrio centies denſior naturali. I. 34
—— —— —— —— —— quales effectus edat. IV. 516
—— nocet lumini barometro, niſi ſit valde rarefactus. II. 348
—— quanta vi elaſtica gaudeat. I. 34. 114
—— ſubtilior exiſtit. I. 102. II. 330
V. Air.
Aërea bullula in barometro lucida apparet. II. 328. 345
Agens. V. *Corpus agens*.
Agens, *quand ils ſont en equilibre*. III. 23
Air, *ſon elaſticité eſt-elle proportionelle à ſa denſité*. III. 101. 105
Alcali (Sal) chymicorum. I. 13. 15
—— effervescere ſemel poteſt. I. 16
—— qualem figuram habeant ejus particulæ. I. 15. 18
Alea (Quæſtiones de). IV. 28. ſ.
V. Hazard, Jeux.
Alimenta convertuntur in ſubſtantiam humani corporis. I. 286
Altitudo ad quam liquor, concepto impetu, aſcendit in Tubo in liquorem partim immerſo. IV. 419
—— aſcenſus projectilis in medio reſiſtente. IV. 360. 371
—— liquoris in fiſtula canali per quem aqua fluit inſerta. IV. 444 ſ.

Amplitudo curvæ, quid. I. 412
Anagrammatum explicationes. I. 227. 229. 239. II. 557. 577
Analyſe des infiniment petits, *quelle part Mr.* BERNOULLI *a à cet Ouvrage.* II. 500 508. ſ. IV. 168
Analytici Problematis a TAYLORO propoſiti ſolutio. II. 402 ſ.
Anaſtomoſis venarum capillarium cum arteriolis. I. 280
Angle *de la Derive.* II. 13
Angularis motus duplex in uno eodemque corpore. IV. 279
Anguli multiplicatio & diviſio per ſeriem. I. 386. ſ. II. 526. ſ. IV. 69
——————— ſine ſerie. I. 511 ſ.
Angulus turbinationis. II. 192
Animadverſiones in CHEYNÆUM. IV. 129 ſ.
— in CRAIGIUM. I. 136. 140. 144. 408. 451
— in Fratrem ſuum. I. 262. ſ. 331. ſ. 386 ſ.
— in HERMANNUM. II. 297. 306. 427. ſ. III. 259. IV. 239
— in HOSPITALIUM. I. 132. ſ. 317 ſ.
— in MOIVREUM. IV. 146 ſ.
— in NEWTONUM. I. 534. 542. 548. II. 275. 293. III. 253. IV. 340. 350 ſ. 483
— in NIEUWENTIITIUM. I. 145. 179
— in Principii hydraulici demonſtrationem. II. 210
— in ſolutiones Problematis trajectoriarum orthogonalium. II. 424 ſ.
— in ſolutionem Probl. trajectoriarum reciprocarum. II. 521. ſ. 578 ſ.
— in TSCHIRNHAUSIUM. I. 52. 158. 176. III. 407. 469
— in varias explicationes refractionis. I. 369
Animalibus noxius aer e fermentatis exhalans. I. 23
Animari vi quadam corpora quando dicantur. II. 169. III. 365
Aphélie, *leur mouvement expliqué.* III. 162. 328
——————— *imité par celui d'un Pendule.* III. 169
——————— *inexplicable dans le ſyſtême de* NEWTON. III. 164. 327
——————— *ſi lent que pluſieurs Aſtronomes en doutent.* III. 135. 163
Apologia TAYLORI. II. 478 ſ.
——— ad eandem Reſponſio. II. 483 ſ.
Appropinquatio continua & prompta ad inveniendas radices numerorum. IV. 15. 16
——————————————— aquationum. III. 537 ſ.
——————————— menſuram circuli. I. 444. ſ. IV. 98 ſ.
——————————— ellipſis. I. 437. ſ. 447 ſ.
——————————— ſpatiorum. I. 162 ſ.
Apſides. V. Aphélie.
Aquæ guttula barometri lucem extinguit. II. 328. 343. 347
Aquarum a mari ad fontes & a fontibus ad mare circulus. I. 43
V. *Fluidum. Liquor.*
Arc-en-Ciels, *leur calcul &c.* IV. 192 ſ.

Arcus circuli in partes incommenſurabiles non poteſt geometrice dividi. III. 452
—— multiplicatio & diviſio per ſeriem. I. 386. II. 526. IV. 69
—— —— —— —— —— ſine ſerie. I. 511
Arcuum parabolicorum comparatio erronea. I. 151. 159. 171
—— —— —— vera. I. 242. ſ.
—— —— differentia rectificabilis. I. 247. 252
Arquebuſe a vent, *quelle doit être ſa longueur.* III. 22
Arteriolarum cum venis anaſtomoſis. I. 280
Artis Conjectandi Problemata. IV. 28 ſ.
Artificia DIOPHANTI in calculo integralium utilia. III. 293
—— integrandi varia. I. 320. 478. II. 407. ſ. 441. III. 108 ſ. 149. 155. 232. 388. ſ. 416. ſ. IV. 42. ſ. 49. ſ. 52. ſ. 79. ſ. 408
—— ſeparandi indeterminatas. I. 175. II. 316. III. 422. IV. 49. ſ. 381
Aſcenſus & deſcenſus corporis gravis per arcus æquales in medio reſiſtente. IV. 378
—— fluidi in tubo vacuo cujus pars quædam immergitur. IV. 419
—— projectilis gravis in medio reſiſtente. IV. 360. 371
Aſſignabilis quantitas quæ. I. 184
Aſſumptæ æquationis vel ſeriei cum indeterminatis coefficientibus conditiones. IV. 131. 139
Aſtronomicum vel Gnomonicum Problema. I. 91
Atmoſphæra Planetarum. IV. 284
Atmoſphere *du ſoleil.* III. 281
Attraction *n'eſt pas ſi évidente que l'impulſion.* III. 137. 266
—— refutée. III. 299
Avancemens (*courbe des plus prompts*). II. 29
Aura elaſtica, annon aer. I. 23
Axe *de l'équilibre des impulſions du vent ſur le Voile.* II. 83. 84
—— *de la réſiſtance moienne d'un corps mû dans un fluide.* II. 74. 77
—— *de rotation des planetes, pourquoi oblique au plan de leur orbite.* III. 324
—— —— —— —— —— *ſon parallelisme.* III. 326
Axis turbinationis. II. 191

B

BAlle de plomb, *quel chemin elle parcourt dans l'air, avant que perdre la moitié de ſa viteſſe.* III. 72
V. Conoide, *Globus.*
Ballifticum Problema de aſcenſu & deſcenſu gravis in altum projecti in medio reſiſtente. IV. 354 ſ.
Barometra lucentia. II. 326 ſ.
—— —— quomodo parentur. II. 353 ſ.
Barometres lumineux. I. 337 ſ.

Barometri Hireani & Hugeniani defectus. II. 206
— lux humore quovis extinguitur. II. 328. 343. 347
Barometrum, cur in eo mercurius ſuſpenſus. I. 88
— novum. II. 204
BARTHOLINI experimentum rarum. I. 29. 30
Baſſette (*Problême ſur la*). I. 457
BEAUNE (De) *ſolution de ſon Problême.* I. 62.
Beauniana curva eſt logarithmica ſemirectangula, & trajectoria reciproca. II. 513
— — per ſe rectificabilis. I. 66
— — ejus æquatio & conſtructio. I. 65. 128. 147. III. 423
BERNOULLI (Dan.) Opus hydrodynamicum. IV. 392
BERNOULLI (Jac.) I. 45. 46. 48. 50. 52. 58. 60. 61. 64. 107. 119. 122. 136. 138. 175. 200. 206. 214 215. 220. 221. 222. 230. 231. 253. 256. 262. 328. 330. 336. 377. 379. 386. 391. 424. II. 81. 82. 90. 132. 168. 214. 219. 235. 257. 467. III. 212. IV. 22. 125. 190. 381.
BERNOULLI (Nic.) Joh. fil. II. 270. 286. 299. 303. 423 ſ.
BERNOULLI (Nic.) Nic. fil. I. 509. II. 294. 305. 419. 437. 442
Binomialis quantitas quando perfecte integrabilis. IV. 129
Binomii ad potentiam indefinitam elevatio. III. 522
— — — — elevati terminus maximus IV. 25
— poteſtates & rectanguli differentiæ comparatæ. II. 486
— $1 \pm x^n$ in ſuos factores reales reſolutio. IV. 58
BONTEKOE notatus. I. 16
BORELLI hypotheſis de effervescentia. I. 24
— — de motu muſculorum. I. 96. 100. 104.
Boulet, *ſa viteſſe dans & au ſortir du Canon.* III. 16 ſ.
BOYLEUS, an audivit de barometro lucente. II. 324
Brachyſtochrona curva ad indagandum propoſita. I. 161. 165. 166.
— — cyclois. I. 187. 191
— — eadem cum tautochrona in hypotheſi Galilæana. I. 189
— — ejus æquatio generalior. II. 468. 470. 472.
Brachyſtochrones. V. Courbe de la plus vite deſcente.
Brachyſtochronismus Cycloidis. I. 324.
Branchiarum in piſcibus uſus. I. 20
Breviſſima linea in ſuperficie curva. V. *Linea.*
Bullula aerea. V. *Aerea Bullula.*
BURCARDI Reſponſio ad Apologiam TAYLORI. II. 483 ſ.

C

CAbeſtan, *délivré de ſes inconvenients.* IV. 207
— quelle machine. IV. 209
— ſes inconvéniens. IV. 211

Calculi

— — — reduits au calcul. IV. 213
— — — leur remede. IV. 215 ſ. 222. 228
Calculi differentialis admirator HUGENIUS. I. 179
— — uſus in inveniendo valore fractionis cujus numerator & denominator certo caſu evaneſcunt. I. 401 ſ.
Calculi exponentialis principia. I. 179 ſ.
Calcul integral de Mr. Stone, Remarques ſur cet ouvrage. IV. 169
— —, Problème important ſur ce calcul. I. 393
Calculi integralium prima ſtamina LEIBNITIO debentur. I. 96
— — methodus. III 387. ſ.
— — Problemata. I. 175. II. 402. 442. III. 108. 400. 482. IV. 42. 49. 52. 77. 79. 381. 408
— — uſus. III. 390
— — — in ſolvendis Problematibus phyſico-mechanicis. III. 482 ſ.
Calendarii reformatio a GREGORIO XIII. IV. 495
— — apud Proteſtantes quando recepta. IV. 500
Calor, an explicet abbreviationem Penduli ſub æquatore. I. 524
Canalis conicus vel conoidicus. IV. 416. 455
— duorum pluriumve tuborum IV. 397. 410
— latera qualem preſſionem a transfluente liquore patiantur. IV. 442 ſ.
Canonicæ æquationes. V. *Æquationes canonicæ*.
Canons, *calcul de leur juſte longueur*. III. 20
Cantus gallorum & gallinarum in Terræ motibus. IV. 512. 521
Carolo-Heſychii Terræ motus facti. IV. 502 ſ.
Carteſianæ Geometriæ defectus & ſupplementum. I. 155
— — uſus in inveniendis cauſticis & evolutis. I. 52. 58. III. 435. 448.
CARTESII explicatio refractionis vitioſa. V. DES CARTES. I. 369 ſ.
Cataractæ Newtonianæ a gurgite diſcrimen. IV. 451
— — confutatio. IV. 483 ſ.
Catenæ oſcillantis curva IV. 328
Catenaria curva mechanica. I. 48. III. 491
— quo caſu hyperbola. IV. 241
Catenariæ conſtructiones variæ. I. 49. III. 426. 428. 491 ſ.
— figura, quando inæqualiter craſſa I. 50. III. 497
— — quando extenſibilis. III. 505
— generalis ſolutio. I. 108. II. 232. IV. 234
— gravitatis centrum infimum. I. 50. II. 232. III. 497
— proprietates. I. 49. III. 495. 504
— varia inſunt maxima & minima. II. 218
V. Chainette.
Catoptricæ fundamentum demonſtratum. I. 375
Cavitatum ſubterranearum exiſtentia. IV. 516
Cauſæ & effectus æqualitas. III. 242
Cauſtica curva per reflexionem. III. 464. 473
— — — — rectificabilis. III. 466. 474

Cauſtica curva tangitur a radio reflexo. III. 465
—— per refractionem. III. 546. 554
———— rectificabilis. III. 548
———— tangitur a radio refracto. III. 546
Cauſtica circularis per reflexionem. I. 52. III. 467. 475
—— eſt cycloidalis. I. 62. II. 469. 476
—— evoluta aliam ſimilem gignit. III. 469
———— invenitur per Geometriam CARTESII. I. 58
—— per refractionem. III. 552
— cycloidalis. I. 61. III. 472. 478. 480
—— eſt cyclois. I. 61. III. 479
— parabolica per reflexionem. III. 471. 477
—— per refractionem. III. 552
— ſpiralis logarithmicæ ipſa eſt. I. 61. III. 481
Celeritas. V. *Velocitas*.
Centre de gravité *de la chainette deſcend le plus bas qu'il eſt poſſible.* I. 208
——— *de deux corps mûs par un reſſort interpoſé, reſte en repos.* III. 24
——— *quelle eſt la figure où il eſt le plus éloigné de l'axe.* I. 226. 227. 239
——— *ſon mouvement ne change point par le choc des Corps.* III. 32
——— *ſon uſage pour déterminer la direction moyenne de pluſieurs forces.* II. 15
Centre d'oſcillation, *déterminé par la théorie des forces vives.* III. 4. 77
—— *d'un Pendule compoſé dans un milieu réſiſtant.* IV. 385
— *de percuſſion & d'oſcillation, s'ils ſont toujours le même point.* IV. 180
— *de réſiſtance moyenne.* II. 77
— *du Tourbillon.* III. 279 ſ.
——— *la matiere céleſte y eſt plus denſe.* III. 156
Centrica linea, quæ. IV. 396. 433
—— ſtratis fluentis liquoris perpendicularis. IV. 396. 440
Centri gravitatis catenariæ deſcenſus infimus. I. 50
—— conſideratio ſummationem involvit. II. 139
—— deſcenſus maximus, principium ſtaticum. I. 373. 375
—— duorum corporum interpoſito elaſtro motorum quies. III. 248
—— gravium æquilibratorum aſcenſus aut deſcenſus nullus. I. 134. 374
—— proprietas inſignis. I. 151. 160. 170
—— quies aut motus uniformis. IV. 340
—— ſegmenti & ſectoris ſolidi cycloidici determinatio algebraïca. I. 332. 333. 336. 391
—— uſus in metiendis curvis. I. 151. 153. 158
Centri oſcillationis determinatio. II. 168 ſ.
—— inveniendi methodus indicata. I. 528
———— an TAYLORO primum perſpecta. II. 474. 476. 480. 492. 516. 518

Centri oſcillationis inveſtigatio ex theoria virium vivarum. III. 252
—— nova, ex applicatione virium motricium ad vectem. IV. 259
—— penduli in liquoribus oſcillantis determinatio. II. 182
—— relatio cum centro rotationis ſpontaneo. IV. 269. 271
—— uſus in determinanda velocitate corporum rotando deſcendentium & tenſione fili eadem ſuſtinentis. III. 127. 129
Centrum oſculi. V. *Circulus oſculator.*
Centrum rotationis ſpontaneum. IV. 265. 270
—— qualem cum centro oſcillationis relationem habeat. IV. 269. 271
Centrum turbinationis. II. 191
—— determinatum. II. 195. 198. 200. 201
—— figuræ turbinantis in planum, idem quod centrum gravitatis ſolidi a figura deſcripti. II. 202
Cercle, *eſt la plus grande figure de celles qui ont le même circuit.* I. 207
— *polygone infini-lateral.* IV. 162
— *ſa quadrature indéfinie impoſſible.* IV. 172
— *ſes ſegmens proportionels aux ordonnées extérieures de la Cycloïde.* I. 198
Chainette, *methode pour la recherche de leur courbure.* I. 430. II. 96. 251
— *ſa conſtruction par Mrs.* HUYGENS, LEIBNITZ & BERNOULLI. I. 59
— *ſon centre de gravité deſcend le plus bas qu'il ſoit poſſible.* I. 208
— *une de ſes proprietés.* I. 61
V. *Catenaria.*
Chaleur, *combien augmente la force du reſſort.* III. 98
— *comment produite par les raions du ſoleil.* III. 289
CHEYNÆUS *in* BERNOULLIUM injurius. II. 491
— in ejus methodum inverſam fluxionum animadverſiones. IV. 129
Choc, *des corps durs.* II. 126
—— *ou elaſtiques.* III. 27. 28. 32. 33. 59. 65. 70
— *des corps fluides.* II. 125
— *oblique des corps elaſtiques.* III. 34
— *ſa force dépend des viteſſes reſpectives.* III. 27
Chordæ oſcillantis curvatura. III. 210
— muſicæ oſcillationes. III. 125. 207
— ponderibus onuſtæ oſcillationes. III. 127. 198
Chordarum arcus ſimpli & multipli relatio. I. 387. 388. IV. 69
Chronologica quæſtio de Feſto Paſchatis a°. 1724 celebrando. IV. 494
Chute & *acceleration des corps peſants comment elle doit être conſiderée.* III. 48
Chylificatio. I. 278
Chymia digna quæ excolatur. I. 13
Circulabiles curvæ, quæ. I. 142. 152. 158. 172. 417
Circulatio aquarum a mari ad fontes & a fontibus ad mare. I. 43

Circularis lineæ cum algebraïca conjunctæ rectificatio. IV. 96 f.
—— cum parabolica comparatio per approximationem. I. 445
—— in curvam algebraïcam transformatio. I. 423
Circuli evolutione curva genita. III. 446 f.
— quadratura indefinita impossibilis. I. 91. 150
—— per celerem approximationem. I. 446 f. IV. 98 f.
— segmentis proportionales arcus curvæ algebraicæ. IV. 94
Circulus osculator. III. 432 f.
—— curvam tangit simul & secat. III. 434
—— ejus centrum determinatum. *ibid.* f.
———— est in evoluta. III. 433
—— in curvæ verticæ. III. 439
Circumferentiæ ad radium ratio per numeros celeriter appropinquantes. IV. 107. 108
Cissoide, IV. 175. 177. 179
Clausarum figurarum quadratura impossibilis. I. 91. 150
Clepsydrarum Problema. IV. 478 f.
Clepsydres (*Problème des*). IV. 188
Collisio corporum irregularium. IV. 273
Colorum mutatio in fermentatis. I. 40
Cometes, *leurs Orbites dispofées irrégulierement, & pourquoi.* III. 310
——— *s'aprochent insensiblement du plan de l'équateur solaire.* III. 313
Commentaire *sur l'Analyse des infiniment petits.* IV. 160 f.
Communication du mouvement, *ses loix.* III. 1. 7. 28 f. 55. 57
Communicatio motus per triangulum rectangulum. IV. 332
—— per vectem. IV. 262
Comparatio curvarum. II. 402. f. IV. 52 f.
—— per theoremata Moivreana insufficiens. IV. 133 f.
Complanatio superficierum conoidicarum & sphæroidicarum. I. 160
Completam reddere æquationem differentialem primi gradus. III. 412. IV. 137. 150. II. 442
———— secundi gradus. IV. 77
Compositio & resolutio virium demonstrata. IV. 253
— barometrorum lucidorum. II. 351
— phosphori mercurialis. II. 365
Conchoidis quadratura. III. 400
Conciliation *des systêmes de* DESCARTES *&* NEWTON. III. 270
Concilii Nicæni decreta de Paschate. IV. 496
Condescriptæ curvæ una evolutione. I. 143
—— summam habent vel differentiam æqualem arcui circuli. I. 143. 417
—— una earum si rectæ vel arcui circuli æqualis sit, aliæ per arcus circulares mensurantur. I. 144

Conditiones æquationis assumptæ cum coefficientibus indeterminatis, integrationis gratia. IV. 131. 139
— separabilitatis indeterminatarum in æquatione quadam differentiali. IV. 49
Cone isoscele de plomb, *son chemin dans l'air, avant qu'il ait perdu la moitié de sa viteſſe.* III. 72
Conicæ superficiei inscripta brevissima linea I. 257. 265. IV. 122
Coni recti proprietas insignis. I. 160
Coniſectionum latus rectum. I. 45
— — mensura per quas curvas detur. I. 150
Conoide, *quel chemin il parcourt dans l'air avant que perdre une certaine partie de ſa viteſſe.* III. 72
Conoidicarum superficierum complanatio. I. 160
— — proprietas. I. 174
Conoidicum corpus quale spatium in medio resistente percurrat, priusquam datam velocitatis partem amittat. IV. 357. 367
Conoidis parabolici titubantis oscillationes. IV. 300
Consensus mirus inter potestates binomii & differentias rectanguli. II. 486
Conservation *des forces vives.* III. 38
Conservatio motus non indiget principio motrice. III. 253
— virium vivarum V. *Vires vivæ.*
Constructio, æquationum differentialium. V. *Æquationum diff. constructio*,
— brachystochronæ. I. 192
— catenariæ. I. 49. III. 491 s.
— clepsydrarum. IV. 478 s.
— curvæ æquilibrationis. I. 129. 133. 140
— — algebraicæ quæ spirali propositæ sit æqualis. I. 47
— — Beaunianæ. I. 65. 148. III. 423 s.
— — cujus perpendiculares sint æquales ordinatis alterius curvæ. III. 431
— — quæ sit ad tangentem suam in data ratione. III. 425
— — quam describit corpus in tubo circulante. IV. 248
— — — — projectile in medio resistente. II. 399
— curvarum ex arcuum circuli bisectione. IV. 36 s.
— — ex arcuum circuli comparatione. I. 553
— — exponentialium. I. 184. 186
— cycloidis per quam citissime a puncto ad rectam grav edelabitur. I. 254
— elasticæ. I. 122
— geometrica Problematum solidorum & hypersolidorum. III. 539. 542
— isochronæ. III. 482
— — paracentricæ. I. 121
— lineæ brevissimæ in superficie conoidica. I. 256. IV. 108
— lintearis. III. 515
— pantogoniæ. II. 603
— perpetui mobilis. I. 42

Conſtructio problematis aſtronomici. I. 91
—— de methodo tangentium directa. I. 138
— problematum de maximis & minimis. I. 254. 256
—— geometricorum. IV. 33
— radiorum oſculi in curvis quibuſvis. I. 382
— ſolidi minimæ reſiſtentiæ. I. 310. 313. 316
— ſynchronæ. I. 192
— trajectoriarum orthogonalium. I. 256. 266. II. 271. 290. 313
—— reciprocarum. II. 536. 541. 545
— trajectoriæ reciprocæ ſimpliciſſimæ. II. 577. 593
Conſtruction *de l'axe & du centre de la moienne réſiſtance d'un arc de cercle mû dans un fluide.* II. 77
— *de la courbe de Mr.* DE BEAUNE. I. 62
—— —— —— *déterminatrice des viteſſes pour un vaiſſeau rectangulaire.* II. 23
—— —— —— —— *par laquelle un corps deſcend le plûtôt d'un point donné à une droite donée.* I. 212
— *de la viteſſe d'un Vaiſſeau retenu par une corde infinie.* II. 142. 158
— *des barometres lumineux.* I. 344
— *des courbes algébriques rectifiables décrites ſur une ſurface ſphérique.* III. 233
— *des égalités avec une portion donnée de courbe.* I. 67 ſ.
— *des tautochrones dans un milieu réſiſtant.* III. 176
— *du Cabeſtan delivré de ſes inconveniens.* IV. 222. 228
— *d'une Table pour la manœuvre des Vaiſſeaux.* II. 68
— *du Problême inverſe des forces centrales.* I. 476
Conſtructiones problematum, quænam ſimpliciſſimæ. I. 132. 133
Continuité (*Loy de*). III. 9
Contractio muſculorum, quomodo fiat. I. 100. 108. 109
— venæ aqueæ fluentis. IV. 448
COPERNIC, *vérité de ſon ſyſtême.* III. 136
Coradius, quid. I. 531
Corde *roulée autour d'un cylindre, ſa preſſion.* IV. 220
Corporis ex gravitate deſcendentis vis viva. III. 251
— gravis deſcendentis & poſt ſe aliud aſcendens trahentis velocitas. III. 125. 237
—— deſcendentis rotando velocitas. III. 127
—— deſcenſus & aſcenſus per arcus æquales in medio reſiſtente. IV. 378
Corporis humani moles quanta fieret, ſi nihil de ſua ſubſtantia deperderet. I. 294
—— mutatio ſucceſſiva per calculum determinata. I. 288
—— partes omnes tempore renovantur. I. 285
—— reſurrectio. I. 297 ſ.

Cor-

Corporis humani ſubſtantia nunquam remanet eadem numero. I. 285. 287
Corporum aquæ inſidentium oſcillationes laterales. IV. 286. 291
— — — — — verticales. IV. 294
— — — — ſitus ab ARCHIMEDE recte definitus. IV. 286
— durorum in ignem injectorum diſruptio. I. 21
— gravium in liquoribus levioribus ſolutio. I. 38. 39
— gravium pendulorum & projectilium motus. I. 514 ſ.
— irregularium colliſio. IV. 273
— ſpecifica gravitas quomodo per Pendula explorari poſſit. I. 524. 527
— titubantium oſcillationes. IV. 296
Corps *durs, leur choc.* II. 126
— *elaſtiques ou roides, les loix de leur mouvement.* III. 1. 7. 28 ſ. 55. 57.
— *fluides, leur choc.* II. 125
— *frottés dans l'obſcurité, lumineux.* I. 435
— *leur inertie.* III. 36
Corpus agens & patiens, eorumque actio mutua. I. 14. 15. 18
— ſimplex. I. 8
— — non effervescit. I. 8. 9
— vivens de ſua ſubſtantia perpetuo amittit. I. 276
Coteſianum Theorema, demonſtratum. IV. 67
COTES ſa méthode & ſes Tables. IV. 175. 178
Courbe *algébrique rectifiable décrite ſur une ſurface ſphérique.* III. 230 ſ.
— *ciſſoide.* V. Ciſſoide.
— *de la chainette.* V. Chainette.
— *de la plus vite deſcente, eſt la Cycloide.* I. 194. II. 253. IV. 190
— — — — — — *reduite à une chainette.* I. 199
— — — — — — *réſout le Problème des iſopérimetres.* I. 218. 221. 430
— — — — — — *Problème de cette courbe & remarques ſur les ſolutions qui en ont été données.* I. 194 ſ.
— — — — — — —, *méthode directe de le réſoudre.* I. 197. 198. II. 267
— — — — — — *entre les iſopérimetres.* II. 254
— *de la voile.* I. 60. II. 85. 94
— *de Mr. de* BEAUNE. I. 62
— *de projection des Epicycloides ſphériques.* III. 219.
— *des plus prompts avancemens.* II. 29
— *des viteſſes d'un corps jetté en haut dans un milieu réſiſtant.* III. 77
— *des viteſſes d'un boulet dans le canon.* III. 16
— *des viteſſes & du tems d'un corps mû dans un milieu réſiſtant* III. 75 ſ.
— *déterminatrice des viteſſes d'un Vaiſſeau rectangulaire.* II. 23. 31
— *dont l'arc eſt proportionel à l'abſciſſe.* III. 223
— *du linge rempli de liqueur.* I. 431. II. 95
— *élaſtique.* V. Elaſtique.
— *entre les iſochrones qui renferme le plus grand ſegment.* II. 263

Courbe *entre les isopérimetres dont l'aire a le centre de gravité le plus éloigné de l'axe.* I. 227. 239
— *epicycloide.* V. Epicycloides.
— *isochrone, ou de l'egale descente.* IV. 184
— *loxodromique.* IV. 185
— *que décrit un mobile jetté & attiré vers un centre.* I. 474 f.
— *qui résout le Problême des isopérimetres.* I. 202. 208. 225. 428. 430. II. 244. 249. f. 254
— — — — — — — — *proprieté de leurs raions osculateurs.* I. 210
— *synchrone.* I. 211
Courbes semblables, *quelle est celle par laquelle un corps pesant parvient le plûtôt d'un point à une droite.* I. 212
Courbure *d'un fil pressé perpendiculairement en tous ses points.* I. 434. II. 91. 93
CRAIGIUS an primus quadraturas transcendentes dederit. IV. 137
— ejus methodus quadraturarum non est universalis. I. 136. 140. 144
— — — reducendi quadraturas ad extensiones curvarum non est idonea praxi. I. 136
— solutionem dedit erroneam Problematis de transformatione curvarum. I. 406. 409. 449. 451
— ejus recantatio. I. 452
Crépuscule (*Problême du plus petit*). I. 64
CROUSAZ (De) *son Commentaire sur l'Analyse des infiniment petits.* IV. 160 f.
— *son Discours sur le mouvement.* *ibid.*
Cube de plomb, *quel chemin il parcourt dans l'air avant que perdre la moitié de sa viteſſe.* III. 72
Cubi duplicatio per normam & circinum. III. 542
Cuborum series reciproca. IV. 11
Curvæ algebraïcæ quam mechanicæ rectificatione præstat uti in construendis Problematibus. I. 121
— amplitudo quid. I. 412
— geometricæ caustica & evoluta est geometrica. III. 434
— genesis ex evolutione curvæ alterius. III. 433. 441. 446
— natura ex relatione punctorum ejus. I. 156. 169. 173. 178
Curvæ datæ aliam æqualem invenire. I. 152. 406. 409. 449. 451. IV. 92 f.
— — — aliam apponere sic ut summa vel differentia sit æqualis arcui circuli. I. 143. 417
— — — — — — — — — — rectificabilis. I. 249. IV. 95
— — — parallelam ducere. I. 154. 158
Curvæ datæ, an connexionem habeant cum mensura arcuum circularium. I. 143
— —, quali in medio describantur. I. 481. f. 537. f. IV. 347 f.
— directrices. I. 122

Curvæ

Curvæ genitæ ex evolutione curvæ duarum partium æqualium & similium circulabiles. I. 143
— infinitæ uni æquationi differentiali satisfaciunt. I. 124
— per se rectificabiles. I. 66
— similes quotuplici sensu dicantur. II. 480
Curva æquabilis pressionis. I. 141
— æquilibrationis V. *Æquilibrationis curva.*
— algebraïca cujus partes circuli segmenti sunt proportionales. IV. 94
— algebraïca spirali propositæ æqualis. I. 47
— Beauniana. V. *Beauniana curva.*
— brachystochrona. V. *Brachystochrona.*
— catenæ oscillantis. IV. 329
— catenaria. V. *Catenaria.*
— caustica. V. *Caustica.*
— chordæ musicæ oscillantis. IV. 210
— clepsydræ. IV. 478. f.
— cujus resectæ sit ad tangentem in ratione data. I. 66
— cujus planum osculans ad planum tangens habeat datam inclinationem. IV. 114
— cujus radius osculi sit ad normalem in ratione data. II. 278. 280. 283. 290. 300. 308. 469
— cum qua datus arcus circuli sit rectificabilis. IV. 96
— cyclois. V. *Cyclois.*
— descensus æquabilis. V. *Isochrona.*
— elastica. V. *Elastica.*
— elliptica. V. *Ellipsis.*
— evoluta. V. *Evoluta.*
— ex arcuum circuli comparatione genita. I. 513
— ex bisectione arcuum circuli genita. IV. 36. 37
— ex evolutione genita. III. 433. 441. 446
— exponentialis. I. 184 f. 270. 310. II. 271. III. 376
— funicularia. V. *Catenaria.*
— hyperbolica. V. *Hyperbola.*
— isochrona. V. *Isochrona.*
— lintearia. V. *Lintearia.*
— logarithmica. V. *Logarithmica.*
— multigibba. I. 440
— pantogonia. II. 571. 581. 600 f.
— parabolica. V. *Parabola.*
— per cujus arcus grave descendens tempora impendit altitudinum potestatibus proportionalia. IV. 246
— quæ habeat spatia numero determinato quadrabilia. III. 406 f. II. 315 f.
— quæ inter isoperimetras det maximum aliquod. II. 214. 215. 218. 228. 229. 231. 233. 234.

Curva quæ ſit ad ſuam tangentem in ratione data. III. 425
— quæ ſui evolutione ſe ipſam deſcribat. I. 52. 61. III. 459
— quam applicatæ ſemi-circuli in punctis biſectionum formant. I. 52. 57 III. 468
— quam deſcribit corpus deſcendens per hypothenuſam curvam Trianguli mobilis. IV. 345
— quam deſcribit corpus in Tubo circulante. IV. 248
— quam deſcribit projectile in medio reſiſtente. II. 396. 399. 417. 513
— quam deſcribit radius ſolaris in atmoſphæra. III. 516
— quam tangit perpetuo recta fluens intra anguli recti crura, & ejus evoluta. I. 57 f. III. 447
— receſſus æquabilis a puncto dato. V. *Iſochrona paracentrica.*
— rectas omnes per datum punctum actas, vel datæ poſitione parallelas ita ſecans ut ſegmentorum rectangulum vel ſumma aut differentia poteſtatum quarumvis data ſit. I. 156. 158. 169
— refractionis. I. 201
— reptoria. I. 413 f. 437 f.
— ſinuum verſorum. I. 334. III. 210
— ſolidi minimæ reſiſtentiæ. I. 308. 310. 318
— ſpiralis. V. *Spiralis.*
— ſynchrona. V. *Synchrona.*
— tautochrona. V. *Tautochrona.*
— trajectoria. V. *Trajectoria.*
— velaria. III. 510. 512
— velocitatum gravis in medio reſiſtente cycloidem deſcribentis. IV. 44. 375
— viribus cubo diſtantiarum proportionalibus deſcripta. I. 553
Curvarum additio & ſubtractio. I. 416
— comparatio per Theoremata Moivreana non ſatis generalis. IV. 153 f.
— dimenſio. I. 149. 153
— — per arcus circulares. I. 142. 152. 158. 172. 417. 440 f.
— geneſis per focos. I. 144. 159. 170. 171
— mechanicarum varia genera. III. 430
— quadratura. I. 125. 162. III. 394. 399
— — ad rectificationes revocata. I. 121. 137. II. 582. IV. 144
— rectificatio ope ſuæ evolutionis. III. 444
— — ſingularis. IV. 89
— ſimilitudo quotuplex. II. 450 f.
— tranſcendentium gradus. II. 591
Curvatura fili ex preſſione fluidi. I. 106. III. 507
— funis extenſibilis. III. 505
— funis inæqualiter craſſi. III. 497
— laminæ elaſticæ. IV. 242
— lineæ curvæ, quomodo determinanda. I. 486
— radii lucis in diaphano non uniformi. I. 187. 197. III. 516

Curvaturæ radius determinatus. I. 379. 384. III. 432 f. 437
V. *Radius oſculi.*
Cycloidalis cauſtica. V. *Cauſtica cycloidalis.*
Cycloide, *a ſes ordonnées extérieures proportionelles aux ſegmens du cercle generateur.* I. 198
— *eſt la courbe de la plus vite deſcente.* I. 194. II. 256
— *eſt une de celles qui ſatisfont au Problème des Iſopérimetres.* I. 209
— *quelle eſt celle par laquelle un corps peſant deſcend le plûtôt d'un point à une droite.* I. 202. 211. 218. 221
— *ſon tautochroniſme mal demontré.* I. 240
Cycloides curvæ quales. III. 449 f.
— — aliæ geometricæ, aliæ mechanicæ. III. 450
Cycloidis cauſtica Cyclois. I. 61. III. 479
— evoluta Cyclois. I. 52. III. 458
— inventor & hiſtoria. I. 322
— radius oſculi. III. 438 f.
— ſegmentum & ſector ſolidus quorum centra gravitatis algebraice determinari poſſunt. I. 332. 333. 336. 391
— ſociæ figuram refert chorda muſica oſcillans. II. 210
— — ſegmentum quadrabile. I. 334
— ſpatia quadrabilia. I. 322. 328. 330. 336. 389. III. 460. 463
Cycloidum contractarum & protractarum ſegmenta quadrabilia. I. 334
— omnium communis initii trajectoria orthogonalis ſynchrona. I. 193. II. 279. 314
— quadratura & rectificatio. III. 453. 455
Cyclois eſt curva brachyſtochrona. I. 189. 191
— eſt trajectoria orthogonalis reciproca. II. 521. 523. 524. 539. 542. 550. 559. 573
— naſcitur tandem ex evolutione ſucceſſiva & alternante cujuslibet curvæ. IV. 98
— qualis illa ſit per quam citiſſime a dato puncto ad datam rectam grave delabitur. I. 254. 262
— quomodo ex dato vertice per datum punctum duci poſſit. I. 192
Cyclometria nova. IV. 98
Cyclus numerorum aureorum a GREGORIO XIII rejectus. IV. 495

D

DEgrés *des infiniment petits.* IV. 165
DE LA HIRE, *ſon paralogiſme ſur le Tautochroniſme de la Cycloide.* I. 240
V. HIRIUS.
Denſitas aëris in pulvere pyrio latentis. I. 34. 35
— — an ejus elaſticitati proportionalis. I. 114

Denſitas medii, qualis eſſe debeat, ut corpus datam curvam deſcribere poſſit. I. 481. ſ. 542. ſ. 546. ſ. IV. 348 ſ.
Denſité *de l'air eſt-elle proportionelle à ſon élaſticité.* III. 101. 105
— *de la matiére céleſte plus grande vers le centre du Tourbillon.* III. 156
Deliacum Problema per circinum & normam ſolutum. III. 542
Derive. II. 13 ſ.
— *d'une Planéte ſphéroide cauſe de l'inclinaiſon de ſon orbite à l'équateur du Tourbillon.* III. 336
— *d'un Vaiſſeau rectangulaire.* II. 18 ſ.
— — — *rhomboique.* II. 44. 51
— — — *qui a la figure de deux ſegmens de cercle egaux ſur une même chorde.* II. 60
DESCARTES *comparé a* HUGUENS. IV. 372
— *ſa méthode de réſoudre les égalités.* I. 67
— — — — — — *moins aiſée que celle de* SLUSE. I. 73
— *ſes élemens.* II. 273
— *ſon ſyſtême des Tourbillons.* III. 264 ſ.
— — — — *Penſées ſur ce ſyſtême.* III. 133 ſ.
— — — — — *comparé a celui de* NEWTON. III. 136
Deſcenſus æquabilis curva. V. *Iſochrona*
— & aſcenſus corporis gravis per arcus æquales in medio reſiſtente. IV. 378
— corporis gravis ſuper Trianguli rectanguli hypotenuſa. III. 365. IV. 337. 341
— corporum rotantium. III. 128
— globi in altum projecti in medio reſiſtente. IV. 360. ſ. 372 ſ.
Deſcente (*Courbe de la plus vite*) V. Courbe de la plus vite deſcente.
Deus nihil efficit quod ſuis perfectionibus repugnet. I. 296
— potentiam & ſapientiam ſuam manifeſtavit in ſuis operibus. I. 306
Dez (*Queſtions ſur les jeux de*). I. 461
V. *Teſſera.*
Diamant *luit frotté dans l'obſcurité.* I. 436
Differentiæ rectanguli cum poteſtatibus binomii comparatæ. II. 486
Differentialis æquatio. V. *Æquatio differentialis.*
Differentialis calculus V *Calculus differentialis.*
Diferentialis quantitas, & integralis ejus eaſdem habent radicum varietates. I. 140. 144
Differentiatio de curva in curvam. II. 439 ſ.
— quantitatum exponentialium. I. 183
— logarithmi. *ibid.*
Differentielles *leur transformation.* I. 399
— *d'un degré plus élevé que le premier, mal priſes par* NEWTON. I. 509
Dimenſio curvarum. I. 149. 153

Dimenſio per arcus circulares. I. 142. 152. 158. 172. 417. 440 ſ.
— ſpatiorum ex proprietate centri gravitatis deducta. I. 153. 158
— functionum ſimilium quomodo æſtimetur. II. 453
Dimenſions *des fonctions ſemblables comment on les eſtime.* III. 174
DINOSTRATIS quadratrix per puncta deſcribitur. I. 447
DIOPHANTI artificia in Calculo integrali utilia. III. 393
Dioptricæ fundamentum demonſtratum. I. 373
Dioptricum Problema generale. IV. 195
— theorema SUELLII. I. 370
Direction *ſa quantité la même avant & après le choc.* II. 254
Direction moienne *de pluſieurs forces qui agiſſent ſur un même point.* II. 15
— — — — — — *qui agiſſent perpendiculairement ſur un même fil.* II. 85. 87
Directrices curvæ. I. 122
Diviſio angulorum & arcuum. I. 586. 511. II. 526. III. 452. IV. 69
— figurarum curvilinearum in elementa ſua. III. 394
— — — — in ratione data. I. 173
— ſectoris elliptici in partes æquales. I. 150. 159. 160. 170. 177
DUILLERIUS (FATIO) problema ſolvit de ſolido minimæ reſiſtentiæ. I. 307
— reſponſio ad ejus querelas. I. 307. 311
Duplicatio cubi per circinum & normam. III. 542
Dureté *ce que c'eſt.* III. 8. II. 81
— *parfaite ou abſolue, impoſſible.* III. 9
— *qualité accidentelle des corps.* III. 275
DUTAL, Defenſio phoſphori Bernoulliani. II. 375

E

E *Bullitio.* I. 7
— ſanguinis & ſpirituum animalium muſculorum energiam explicat. I. 101. 110
Effectus & cauſæ æqualitas. III. 242
Efferveſcentia. I. 7
a fermentatione num differat. I. 7. 8. 9. 10
efficitur triplici mixtionis genere. I. 10
ejus cauſæ ſpuriæ. I. 12. 13
— cauſa vera. I. 15. 28
— hiſtoria & proceſſus. I. 11
— phænomena. I. 30
Egalité *de l'action & de la réaction.* II. 14. III. 16
— *de l'action du Vent ſur la voile & de la réſiſtance de l'eau au corps du vaiſſeau.* II. 105 ſ.
Egalités, *leur reſolution au moien d'une portion donnée de courbe.* I. 67. 72. 90

Elaſticæ curvæ analyſis. IV. 242
— — conſtructio. I. 122
— — proprietas quædam. IV. 89. 91
Elaſticitas aeris, an denſitati proportionalis. I. 114
Elaſticité. III. 13
— *de l'air eſt-elle proportionelle à ſa denſité ?* III. 101. 105
— *ſa cauſe.* III. 89 ſ.
V. Reſſort.
Elaſtique (*courbe*) *eſt une de celles qui réſout le Problème des iſopérimetres.* I. 209
— *n'eſt pas entre les iſopérimetres celle dont le centre de gravité deſcend le plus bas.* I. 227. 377.
Elaſtra quomodocunque applicata, corpori ſemper eandem velocitatem dant. III. 245
Elaſtrorum a corpore moto tenſorum numerus eſt ut quadratum velocitatis ejus. I. 321
Elaſtrum inter duo corpora poſitum qualem vim utrique communicet. III. 249
— tenſum non agit, ſed habet facultatem agendi. III. 245
Electionum alea. IV. 32
Elemens *de* DESCARTES. III. 273
Ellipſes *décrites par les Planétes.* III. 135. ſ. 139. 157. 161. 309
Ellipſium ejuſdem centri & verticis trajectoria orthogonalis. II. 272
Ellipticæ curvæ ad circularem reductio per approximationem. I. 437 ſ. 447.
Elliptici ſectoris diviſio in æquales ſectores. I. 150. 159. 170. 177
Enuntiatio. I. 79
Enuntiationes variæ. I. 83 ſ.
Epactæ a Gregorio XIII. introductæ. IV. 495
Epicycloides ſphæricæ. III. 211. 213 ſ.
Epicycloides ſphériques. III. 216
— — *accourcies & allongées.* III. 228
— — *leur generation.* III. 225. 236
— — *leur rectification dépend en general de la quadrature de l'hyperbole.* III. 219
— — *quand rectifiables.* III. 223
Equateur du Tourbillon *coincide avec celui du Soleil.* III. 332
— — — *pourquoi les Planétes ne ſe meuvent pas dans ſon plan.* III. 334 ſ.
Equation *de la chainette.* I. 60
— *de la ciſſoide.* IV. 175
— *de la courbe de la plus vite deſcente entre les iſopérimetres.* II. 255 ſ.
— — — — *décrite par un corps jetté & attiré vers un Centre.* I. 475. 480
— — — — *des viteſſes d'un boulet dans le canon.* III. 19
— — — — *des viteſſes & des tems d'un corps mû dans un milieu réſiſtant.* III. 75 ſ.

Equa-

Equation *de la courbe qui coupe à angles droits une infinité de Paraboles.* I. 398
——— *qui, entre les isochrones, renferme le plus grand segment.* II. 265
——— *qui, entre les isopérimetres, a le centre de gravité de son aire le plus éloigné de l'axe.* I. 227. 239
— *de la lintéaire.* II. 95
——— *tautochrone dans un milieu résistant.* III. 179
——— *vélaire.* I. 60. II. 94
——— *viteſſe des couches d'un Tourbillon.* III. 149 ſ. 152. 155
— *des chainettes en general.* II. 253
— *des courbes algébriques décrites ſur une ſurface ſphérique.* III. 233. 236
— — — *qui réſolvent le Problême des iſopérimetres.* I. 208. 209. 219. 225. 226. 230. 428. 430. II. 244. 246. 249. 250
— *des épicycloïdes ſphériques.* III. 219
— *des ſections coniques en general.* I. 470. 472
— *du deuxième degré réſolue.* I. 74
— *du troiſième dégré réſolue.* I. 68
— *exponentielles.* III. 179
Equations *ſemblables.* I. 67
Equilibre *entre deux agens, quand il a lieu.* III. 23
Equinoxes, *cauſe de leur préceſſion.* III. 355
Etoiles fixes, *leur génération.* III. 280
— — leur latitude eſt peut-être variable. III. 357
EULERUS ſolvit Problema de invenienda trajectoria reciproca dati ordinis. II. 616
——— de linea breviſſima in ſuperficie curva. IV. 112
——— de oſcillationibus corporum aquæ inſidentium. IV. 288
Evolvens radius. V. *Radius oſculi.*
Evoluta curva. III. 434 ſ.
— curvæ geometricæ eſt geometrica. *ibid.*
— ejus inventio per Geometriam Carteſianam. I. 58. III. 435
— cycloidis eſt cyclois. I. 52 III. 458
— parabolæ. I. 58 ſ. III. 435
— ſpiralis logarithmicæ eſt eadem curva. I. 61. III. 459
Evolutio curvarum. III. 432 ſ.
— curvæ datæ. III. 441
— circuli. III. 446
— parabolæ cubicalis ſecundæ. III. 443
Evolutione ſui ſe ipſas deſcribentes curvæ. I. 52. 61. III. 458. 459
Evolutiones infinitæ variæ. I. 150. 159. 172. 177
Evolutionis motus ab HUGENIO in Geometriam introductus. I. 415
— ope curvæ rectificantur. III. 444
Exercitatio geometrica de trajectoriis orthogonalibus. II. 423 ſ.
Expériences *de la conſtruction d'un Baromètre lumineux.* I. 344
— *qui confirment la meſure des forces vives.* III. 51

Experimentalis philoſophiæ vindicatio. I. 306
Experimentum aëris denſioris in poris corporum latentis. I. 21. 23. 33
— aëris in pulvere pyrio latentis. I. 35
— efferveſcentiæ duorum, ſolidorum. I. 29. 30
— ferri & ſulphuris fermentantium. IV. 519 f.
— Hawksbeianum de mercurio lucente. II. 347
— penduli in aqua oſcillantis. I. 523
— POLENI de fluxu aquæ per foramen. IV. 439
Exponentiales quantitates. I. 180. III. 133. 151
— — mediæ inter algebraïcas & tranſcendentes. I. 180
Exponentialis æquatio. V. *Æquatio exponentialis.*
Exponentialis calculi principia. I. 179
— curvæ conſtructio. I. 184. 186. IV. 251
— — ordinata minima. I. 185
— — quadratura. I. 185. III. 376
Exponentialium quantitatum differentiatio. I. 183
— — gradus. I. 180
Extractio radicum commoda per approximationem. IV. 15. 16
— — — per ſeries. III. 529 f.
— — Rolliana vitioſa. III. 529. 533.

F

F*Actores* reales duarum dimenſionum binomii $1 \pm x^n$. IV. 58
Facultates chymericæ Veterum ridentur. I. 277
FATIO. V. DUILLERIUS.
FERMATII explicatio refractionis. I. 189
— — — inſufficiens. I. 370
Fermentatio. I. 7. 8
— ab efferveſcentia non differt, niſi gradu. I. 8. 9. 10. 17
— ejus cauſa. I. 15. 18
— — effectus miri. IV. 517
— — phænomena. I. 30
— — vis quanta. I. 33
— muſti. I. 17
— non ſuccedit in aëre frigido, vel loco clauſo. I. 31 f.
— panis. I. 31
— quomodo impediatur. I. 32
— ſulphuris & ferri. IV. 519 f.
Fermentum. I. 7
Ferri & ſulphuris fermentantium experimentum. IV. 519 f.
Feſtum Paſchatis, quo die a. 1724 celebrandum. IV. 494 f.

Fibres muſculaires *ſe courbent en Cercle.* II. 93
Fibrillæ muſculares. I. 98. 104
— — arcuantur in circulum. I. 106. 108. 113
Figuræ clauſæ quadraturam indefinitam non admittunt. I. 150
— quæ ſint quadrabiles. III. 395
Figuratorum numerorum ſeries. III. 521. IV. 14
Figure *de la Terre.* III. 345
Figures curvilignes iſopérimetres, quelle eſt celle dont le centre de gravité eſt le plus éloigné de l'axe. I. 226. ſ. 239
— — leur mouvement dans un fluide. II. 55
Fil (*courbure d'un*) *dilaté par un fluide élaſtique.* II. 93
— — — *preſſé par une infinité de puiſſances.* I. 434. II. 96 ſ.
Fili curvatura ex preſſione fluidi. I. 106. III. 507
— tenſio, cum ſuſtinet grave rotando deſcendens. III. 128
Firmitatis vis reſiſtens inclinationi corporum aquæ inſidentium. IV. 295
Fiſtula canali per quem aqua fluit implantata. IV. 444 ſ.
V. *Preſſio liquoris.*
Fixes. V. Etoiles fixes.
Fluentis per canalem liquoris preſſio. V. *Preſſio.*
— — — — velocitas. V. *Velocitas.*
Fluentium fluentes. II. 486
Fluides, *force avec laquelle ils frapent un plan.* II. 10. 101
— *leur choc.* II. 125
— *leur réſiſtance.* V. Réſiſtance.
Fluidi in ſyphone vel tubo inflexo oſcillationes. II. 125. IV. 474
— in tubo partim immerſo motus. IV. 419. 488
— preſſio in fundum & latera. V. *Preſſio.*
— preſſio qualem filo curvaturam inducat. I. 106. III. 507
— reſiſtentia. V. *Reſiſtentia.*
— retropreſſio in Vas ex quo effluit. IV. 484 ſ.
— velocitas. V. *Velocitas.*
Fluidum nerveum. V. *Spiritus animales.*
Fluxionum methodus Newtoniana. IV. 129. 134. 136
Fluxus liquoris e vaſe. II. 208. III. 124. IV. 391 ſ.
Focorum uſus in geneſi curvarum. I. 149. 159. 170. 171
Focus lentis datæ determinatus. IV. 195.
— per reflexionem. III. 464
— per refractionem. IV. 546 ſ.
Fonction *d'une variable, ce que c'eſt.* II. 241
Fonctions *ſemblables.* III. 174
— — *comment on eſtime leurs dimenſions.* ibid.
— — *de dimenſion nulle ſont égales.* III. 175
Fonticulus ſaliens lucidus. II. 391
Fontium aquæ, a mari ad montes cur aſcendant. I. 43

Force, *avec laquelle un fluide frape un plan.* II. 10. 101. 125
— *centrifuge.* III. 89
— — *ſa meſure.* III. 90
— *communiquée à un corps par un ou pluſieurs reſſorts.* III. 25. 44
— *morte.* III. 23
— — *conſiſte dans un ſimple effort.* III. 35
— — *differe de la force vive.* III. 37
— *mouvante* (Ligne de la) II. 11. 12
— *vive.* III. 23
— *differe de la force morte.* III. 37
— *ne peut ni naître ni périr en un inſtant.* III. 41. 51. 53
— *proportionelle au quarré de la viteſſe.* III. 4. 25. 39. 45. 47. 51. 52. 53
— *ſa meſure.* III. 44
— *ſa nature.* III. 37 f.
— *ſa quantité ſubſiſte la même dans le monde.* III. 38
Forces *centrales* (*le Problême inverſe des*) I. 469. 470
— — *dans les milieux réſiſtans.* I. 502 f.
— — (*Theorême ſur les*) I. 477
— *de deux corps mus par un reſſort interpoſé.* III. 25
— (*direction moyenne de pluſieurs*) *qui agiſſent ſur un même point.* II. 25
— — — — — *qui preſſent ou tirent perpendiculairement un fil.* II. 87
Formulæ reductionum pro quadraturis. II. 307. 417. 419. IV. 52
Fractionis, cujus numerator & denominator certo caſu evaneſcunt, valor. I. 401
Fractions rationelles, *leur intégration.* I. 393
Fractionum integrandarum ratio. III. 389. 397. 399. IV. 132
Frottement *de certains corps produit de la lumiere.* I. 435
— *d'une corde roulée autour d'un cylindre.* IV. 216
— *proportioné à la preſſion.* IV. 214
— *utile dans l'uſage du Cabeſtan.* IV. 215
Functiones ſimiles II. 453
— — harum dimenſiones quomodo æſtimentur. *ibid.*
— — inter ſe quam rationem habeant. *ibid.*
— — nullius dimenſiones ſunt æquales inter ſe. *ibid.*
Funicularia. V. *Catenaria.*
Funis extenſibilis curvatura. III. 505 f.
— inæqualiter craſſi curvatura. III. 497 f.
— quo caſu curvetur in circulum. III. 502. 504
— — — — — — hyperbolam. III. 503
— — — — — — logarithmicam. *ibid.*
— — — — — — parabolam. III. 501. 502. 503. 504

G

GALILÆUS Cycloidem primus conſideravit, ſecundum Italos. I. 322
— putavit catenariam eſſe parabolam. I. 48
GALILE'E *ſa mépriſe ſur la nature de la chainette & de la courbe de la plus vite deſcente.* I. 199
Gulli & gallinæ, durantibus Terræ motibus vehementius cecinerunt. IV. 512. 521
Geneſis curvarum per focos. I. 150. 159. 170. 171
Geometria Carteſiana V. *Carteſiana Geometria.*
Geometrica ſolutio, quæ. I. 256. 263
— conſtructio Problematum ſolidorum & hyperſolidorum. III. 539. 542
Globi ferrei in medio reſiſtente uniformiter denſo, tam elaſtico quam non elaſtico motus, & reſiſtentia. IV. 356. f. 365 f.
— reſiſtentia duplo minor quam cylindri. IV. 368
Globis pluribus ludentium fortes. IV. 30
Gnomonicum Problema. I. 91
Gouvernail, *ſa ſituation pour faire tourner le Vaiſſeau le plus promtement.* II. 40. IV. 192
GRANDI (*Guid.*) Problemata Vivianea. III. 212
Grave. V. *Corpus grave.*
Graviora corpora liquoribus levioribus ſoluta cur innatent. I. 38. 39
Gravitas materiæ ſubtiliſſimæ & agitatiſſimæ debetur. I. 89. II. 330
— ſpecifica corporum quomodo explorari poſſit ope Penduli. I. 524. 527
— tangentialis, normalis. I. 530
Gravitatis a pondere diſcrimen. II. 169
— vires in diverſis Terræ locis per Pendula agnoſcuntur. I. 519
Gregoire DE ST. VINCENT. IV. 171
GREGORI (*Dav.*) Series abrumpentes. III. 520
GREGORII XIII Reformatio Calendarii. IV. 495 f.
GULDINI Regula pro dimenſionibus figurarum promota. I. 153. 158
Gurges in fluxu liquorum formatus. IV. 392. 398
— a nemine præter Auctorem animadverſus. IV. 392. 399
— diverſus a cataracta Newtoniana. IV. 451
— pro diverſa liquoris fluentis qualitate curvaturam habet diverſam. IV. 432. 451
— quamvis infinite parvus, requirit ad ſui formationem vim finitam & conſtantem. IV. 392. 398. f. 400

H

Harmonica series infinita. IV. 8. 11
HARTZOEKERI contra phosphorum mercurialem objectiones discutiuntur. III. 377
HAWKSBEII de luce mercurii experimenta Bernoullianis originem debent. II. 347
— explicatio luminis barometrici. II. 383
Hazard (*Problèmes sur les jeux de*) I. 453 f.
V. *Alea.*
Helix. V. *Spiralis.*
Hemisphærii titubantis oscillationes. IV. 300
HERIGONII explicatio refractionis insufficiens. I. 371
HERMAN (Jaq.) *sa mépriſe sur les Epicycloides sphériques.* III. 220
— *sa solution du Problème inverse des forces centrales.* I. 469
HERMANNI constructio curvæ quam describit projectile in medio resistente. II. 399
— de epicycloidibus sphæricis. III. 218
— error in determinanda velocitate gravis per curvam descendentis & aliud ascendens post se trahentis. III. 237. 259
— methodus solvendi Problematis catenarii ab errore repurgata. IV. 234
— solutio Problematis de inveniendis curvis quæ datum habeant numerum spatiorum quadrabilium. III. 315
— inversi virium centralium. I. 555
— — — offenburgii erronea. III. 212. 215
— — — trajectoriarum orthogonalium. II. 275. 296
— — — — — supplementum ejusdem. II. 279. 297. 306. 428
— — — — — & additamentum. II. 299. 428
HIRII barometrum quales habeat defectus. II. 206
— experimentum Penduli in aqua oscillantis. I. 523
— explicatio abbreviationis Penduli prope æquatorem insufficiens. I. 521
— paralogismus in demonstratione tautochronismi cycloidis I. 247
V. DE LA HIRE.
Historia Problematis trajectoriarum orthogonalium. II. 286
HOMBERGII experimentum de barometris lucidis infausto successu tentatum. II. 360
— objectionibus respondetur. I. 371. 372
Homo, si nihil de sua substantia amitteret, ad quam molem excresceret. I. 294
V. *Corpus humanum.*
Homogeneæ æquationes differentiales. III. 116
— — — harum integratio. *ibid.* IV. 42 f.

Horolo-

Horologium nocturnum mercuriale lucidum. II. 389
HOSPITAL (*le marquis de l'*) *a réſolu le Problême de la courbe de Mr. de* BEAUNE. I. 63
——————————— *de la plus vite deſcente.* I. 199
——————————— *de la cycloide par laquelle un corps parvient le plus vite d'un point donné à une verticale donnée.* I. 213
Hoſpitalianæ Lectiones. II. 509. III. 385
HOSPITALIUS (*Marchio*) conſtruxit Problema de curva æquilibrationis. I. 129. 140
——— de curva preſſionis æquabilis. I. 142
——— de curva ſolidi minimæ reſiſtentiæ. I. 311 f.
——— Problemata de maximis & minimis. I. 258
— quam multa a BERNOULLIO mutuatus ſit. II. 508 f.
HUGENII barometrum quo defectu laboret. II. 206
— de calculo exponentialium jocus. I. 180
— de cycloide inventa. I. 323 f.
— de pendulo turbinante. II. 187
— error notatus. I. 138
— explicatio refractionis. I. 370
— Regula de centro oſcillationis demonſtrata. II. 175. 181. III. 252. IV. 261
HUGENIUS calculi differentialis admirator. I. 179. 187
— contra PARENTIUM vindicatus. I. 188
— evolutionis motum in Geometriam introduxit. I. 415
HUGUENS, *a bien déterminé la viteſſe d'un Vaiſſeau rectangulaire.* II. 31
— *a découvert les loix du choc des corps à reſſort.* III. 3
— *a réſolu le Probléme de la chainette.* I. 59.
— *comparé à* DESCARTES. IV. 172
— *ſa diſpute avec Mr.* RENAU *ſur la manœuvre des Vaiſſeaux.* II. 4. 99. 115. 129
— *ſa mépriſe ſur cette manœuvre.* II. 71
— — *ſur le choc des corps, corrigée.* III. 34
— *ſa regle pour trouver le Centre d'oſcillation démontrée par la théorie des forces vives.* III. 80
— *ſa ſolution des Problémes ſur les jeux de hazard.* I. 460 f.
Humidité *nuiſible à la lumiere du barometre.* I. 348
Humoris nutritii e vaſis eductio. I. 281
Humorum ſecretio. I. 280
Hydrargyrum. V. *Mercurius.*
Hydraulica ſcientia IV. 391 f.
— problemata. IV. 419. 488
— vis. IV. 436
Hydraulicorum problematum ſolvendorum methodus directa. IV. 432 f.
Hydraulici principii demonſtratio. II. 208

— — — impugnata. II. 210
— — — propugnata II. 212
Hydraulicum theorema de velocitate æquabili liquoris e vaſe effluentis. IV. 401. 459
Hydrodynamica Dan. BERNOULLI. IV. 392
Hydropis tympanitis cauſa. I. 103
Hydroſtatica ſcientia. IV. 391
— vis ſeu potentia. IV. 436
Hyperbola biquadratica clepſydræ conficiendæ idonea. IV. 479. 480
— communis, extremitate umbræ bacilli deſcripta. I. 91
— in quali medio a projectili gravi deſcribatur. I. 489
— — ſcala elaſticitatum. I. 115
Hyperbolæ figuram quo caſu catena flexilis aſſumat. IV. 241
— quadratura dat longitudinem Parabolæ. I. 242
— quadraturæ ſubſtitui poteſt deſcriptio Logarithmicæ. I. 65
— radius oſculi. III. 438
— ſegmenta æqualia, quomodo abſcindenda. I. 242. III. 411
Hyperbolarum ejuſdem centri & verticis trajectoria orthogonalis. II. 271 276. 311
— in alias curvas transformatio. IV. 93
Hyperbolica ſpiralis. I. 552
— tuba in qua deſcendit liquor. IV. 463 ſ.
Hyperbolicorum ſpatiorum differentialia. III. 396
Hyperboloides in quali medio a projectili gravi deſcribatur. I. 490

I

JActus (quot) colluſoribus concedendi, ut ſortes eorum æquales fiant. IV. 29
Idem numero nunquam remanet corpus humanum. I. 287
— reſurget corpus, ſed non idem numero. I. 296
Jeux de hazard (*Problèmes ſur les*). I. 453 ſ.
V. *Alea.*
Ignées (*Particules*) *peu vraiſemblables.* I. 364
Impedimenta fluxus liquorum. IV. 396. 446
— luminis barometrici. II. 337 ſ.
Inclinaiſon de l'orbite *de la Lune avec le plan de l'équateur.* III. 359
— — — *des Cometes.* III. 310
— — — — — — *diminue peu a peu.* III. 313
— — — *des Planètes, leur cauſe.* III. 330
— — — *des ſatellites de Saturne.* III. 361
— — — *d'une Planète ſphéroide eſt différente, ſelon que le ſphéroide eſt applati ou allongé.* III. 339
— — — — *du ſecond ſatellite de Jupiter.* III. 361

Incompatibilité *des deux loix de* KEPLER *dans le ſyſtême ordinaire des Tourbillons.* III. 269
Inertie *des corps.* III. 36
Indeterminatarum ſeparatio. I. 120. 123. 175. II. 316. III. 110. 422. IV. 49. 79. 381
Infiniment petits, *leurs degrés.* IV. 165
—— *ne ſont pas les indiviſibles.* IV. 161. 167
Infiniti ſcientia, opus LEIBNITIO meditatum. I. 119
Infidentia aquæ corpora. V. *Corpora aquæ infidentia.*
Intégral. V. Calcul intégral.
Integrale & differentiale eaſdem habent radicum varietates. I. 140. 144
— negativum quod deſignet. III. 399
— quantitatis binomialis & trinomialis quibus in caſibus haberi poſſit terminis finitis. IV. 129. 130
— quantitatis differentialis non ſemper haberi poteſt. III. 391
Integralem æquationem completam reddere. III. 412. IV. 137. 150. 77. II. 442
Integralia quæ ad circuli & hyperbolæ quadraturam reduci poſſunt. III. 391. II. 402. 407. 418
— quantitatum quæ duæ indeterminatas complectuntur, quomodo ſumenda. III. 416
Integralis calculus. V. *Calculus integralis.*
Integralium natura & calculus. III. 387 ſ.
Integrandi modus & artificia. III. 388. 392. ſ. 397. 399
— ratio ſingularis. II. 487
Integrationes æquationum. I. 175. 320. 469. 470. 478. II. 407. 417. 419. 441. III. 108. 110. 119. 149. 155. 232. 233. 388. ſ. 416. IV. 42. 45. 46. 49. 52. 80. 129. 381. 408
— fractionum. III. 389. 397. 399
— quantitatum logarithmicarum. III. 378. 381. 382. IV. 148
Intenſitas vis motricis. IV. 394
Jocus HUGENII de calculo exponentiali. I. 180
Jovis motus diurnus. IV. 184
Iris. V. Arc-en-Ciels.
Irregularium corporum colliſio. IV. 273
Iſochrona curva. III. 482
— pendula, qualia. I. 518. II. 194
Iſochronæ paracentricæ æquatio. I. 120. III. 486
—— conſtructio. I. 121
—— infinitæ diverſæ. I. 138
Iſochrones, *quelle courbe entre les iſochrones comprend le plus grand ſegment.* II. 263
Iſopérimetres (*Problème des*) *propoſé.* I. 202. 208
——— *réſolu.* I. 208. 424. ſ. II. 235 ſ.

—— —— —— —— *disputé à ce sujet.* I. 206. 214. 215. 220. 221. 222. f. 230. 231. 377. II. 235. 257. 273
Isoperimetrici Problematis propositio. I. 201
—— —— analysis. II. 219
—— —— solutio. II. 214
—— —— —— impugnata & defensa. II. 475. 431. 503
Judicium, quid. I. 79
Jupiter, *calcul de son mouvement diurne.* III. 320
—— *inclinaison de l'orbite de son satellite.* III. 361
JURINI objectiones in demonstrationem principii hydraulici. II. 210

K

KEILLIUS. II. 393. f. 501. 512
KEPLER, *incompatibilité de ses deux Loix dans le système ordinaire des Tourbillons.* III. 269
KLINGENSTIERNÆ. IV. 108.

L

Lac, post Terræ motum acescens. IV. 512. 522
Laminæ elasticæ curvatura. IV. 242
Lansquenet, *avantage de la main à ce jeu.* I. 457
Lassitudinis gradus æstimati. I. 116
Lateralis similitudo curvarum. II. 450
Latitude *des fixes est peut-être variable.* III. 357
Latus rectum Coni sectionum determinatum. I. 45
Lectiones Hospitalianæ. II. 509. III. 385
LEIBNITII cogitata de curva æquilibrationis. I. 139
—— constructio catenariæ. III. 494
—— —— isochronæ paracentricæ. I. 137
—— defensio. II. 403
—— error notatus. I. 137. 139
—— inventa de usu centri gravitatis in dimensionibus curvarum. I. 153. 158
—— methodus serierum ingeniosa. I. 125
—— opus de scientia infiniti. I. 119
—— problema de trajectoriis orthogonalibus. II. 270. 288 f.
—— quadratura segmenti cycloidalis. I. 324
—— solutio ænigmatis florentini. III. 212
—— —— problematis brachystochronæ. I. 188
—— —— —— de transformatione curvarum. I. 410
—— —— —— funicularii. I. 48
—— testimonium de phosphoro mercuriali. II. 369

— theorema de virium vivarum menſura. I. 321
LEIBNITIO debentur prima ſtamina calculi integralium. I. 96
— debetur introductio motus tractionis in Geometriam. I. 415
LEIBNITS *a découvert que la force vive eſt comme le quarré de la Viteſſe.* III. 4. 39. 49
— a réſolu le Problème de la chainette. I. 59
— — — — — — de la plus vite deſcente. I. 194. 198. 200
— défendu. IV. 169. 170
LEMERI, experimentum de ferro & ſulphure fermentantibus. IV. 518
Lentis focus determinatus generaliter. IV. 195
Lex virium qua fit ut tempora deſcenſus corporum ad centrum, ſint ut poteſtates datæ altitudinum. IV. 243
LIEBKNECHT de phoſphoro mercuriali. II. 387
Ligne *de la force mouvante.* II. 11. 12
— *des plus promts avancements.* II. 29
Linea breviſſima in ſuperficie curva. I. 256. 264. IV. 108. 115. 127
— — in ſuperficie conica. I. 257. 265. IV. 122
— — — — conoidica. I. 256. 264. IV. 118. 125
— — — — plana, eſt recta. IV. 121
— — — — ſphærica eſt circulus maximus. IV. 122 ſ.
Linea centrica. IV. 396. 433
— — eſt perpendicularis ſtratis liquoris fluentis. IV. 396. 440
Linea centri in Pendulo oſcillante. II. 181
— — — — turbinante. II. 191
Linge *qui contient une liqueur peſante, ſa courbure.* I. 224. 431. II. 95
— — — — *eſt une des courbes qui réſolvent le Problème des iſopérimetres.* I. 209
— — — — *n'eſt pas celle entre les iſopérimetres dont le centre de gravité de l'aire eſt le plus bas.* I. 227. 377
Lintearia curva. III. 512
— — ejus conſtructio. III. 515
— — proprietas quædam. IV. 89. 91
Liquoris fluentis in canalibus preſſio in fundum vaſis. IV. 423. 430
— — in Latera canalium. IV. 442. 448. 449. 450. 453
— — — — velocitas. IV. 401. ſ. 411. ſ. 427. 437. ſ. 447. ſ. 452. ſ. 473 ſ.
— in tuba hyperbolica deſcenſus. IV. 463 ſ.
— in tubis inflexis aut ſyphonibus oſcillationes. III. 125. IV. 174
— in tubo partim immerſo motus. IV. 419. 488
Locorum inventio nondum ſatis univerſalis per Geometriam Carteſianam. I. 155
Logarithmes *imaginaires, ſe réduiſent à des ſecteurs circulaires réels.* I. 400
Logarithmi dati numerus per ſeriem exhibitus. I. 127. III. 378
— differentiale quomodo ſumendum. I. 183

Logarithmica curva, ejus æquatio. I. 186
—— ejus radius oſculi. I. 383. III. 439
—— eſt curva velocitatum corporis in medio uniformiter denſo. IV. 354. 367
——— exponentialis curva. I. 180
——— per ſe rectificabilis. I. 66
——— trajectoria reciproca. II. 521. 523. 525. 539. 550. 559
——— tranſcendentium ſimpliciſſima. I. 180
——— utilis conſtruendis æquationibus differentialibus. I. 65. 184. 186. 258. 260. 261. 270. 313. 396. II. 271. 400. 608. III. 77. 397. IV. 380. 490
— Hugeniana. V. *Tractoria.*
— rectangula, acut angula, obtuſangula. II. 523
Logarithmicarum infinitarum trajectoria orthogonalis. I. 260. 269. II. 277. 310
Logarithmicæ quantitatis differentiatio. I. 185
—— differentiale. IV. 132
—— integrale. III. 378. 381. 382. IV. 147 ſ.
Logarithmicæ ſpiralis evoluta eſt ipſi æqualis & ſimilis. I. 61. III. 459
—— in medio reſiſtente deſcriptio. I. 495. 500. 547 ſ. IV. 350 ſ.
Logarithmique, *courbe des viteſſes du boulet dans le canon.* III. 18. 19
— *courbe des viteſſes & des tems d'un corps mû dans un milieu réſiſtant comme le quarré de la viteſſe.* III. 75
Logarithmus dati numeri per ſeriem exhibitus. I. 126
Loi de continuité *dans la Nature.* III. 9
Loix *de* KEPLER *incompatibles dans le ſiſtême ordinaire des Tourbillons.* III. 269
— *de la communication du mouvement.* III. 1. 7. 28. 55
———— *leur liaiſon.* III. 57
Longitudo viæ quam Conoides deſcribit in medio reſiſtente, priuſquam velocitatis partem datam amittat. III. 369
Loſange, *route & viteſſe d'un vaiſſeau qui a cette figure.* II. 41. 45. 51
Lotio mercurii, ut magis luceat. II. 350
Loxodromique (*Solution du Problême*). IV. 185. 186
Lucerna mercurialis inextinguibilis. II. 390
Ludentium ſortes. IV. 28. 30. 31. 32
Lumen barometri conſpicitur deſcendente hydrargyro. II. 327. 336
——— in ſummitate columnæ. II. 327. 337
—— cur non conſpicitur in omnibus barometris. II. 337. 344
—— debilitatur tempore & tandem extinguitur. II. 328
—— eo vividius quo fortius agitatur mercurius. II. 327. 337
—— guttula humidi prorſus extinguitur. II. 328. 343. 347
—— qualem cauſam agnoſcat. II. 334
—— quomodo ab aliis explicetur. II. 382

Lumen

Lumen zodiacale. I. 89
Lumiere *des corps frottez.* I. 435
— *du mercure dans le barometre.* I. 337 f. 349 f. 357 f.
— — — — — — — *sa cauſe.* I. 339 f.
— *du ſoleil ne conſiſte pas dans une ſimple preſſion.* III. 286
— *zodiacale, ou équinoctiale.* III. 281
Luminis cauſa & natura. II. 329. 331
— velocitas. II. 332
— unda qualis. I. 193 f.
Lune, *inclinaiſon de ſon orbite ſur le plan de l'équateur.* III. 359
— *mouvement de ſon orbite.* III. 165
Luxata pendula. IV. 302

M

MAin (*avantage de la*) *aux jeux de hazard.* I. 458
MAJOWII experimentum, utrum aër de novo generetur. I. 22
MAIRAN (*De*) *ſon explication du mouvement diurne des planètes.* III. 314
Manœuvre *des Vaiſſeaux.* II. 1
Mare, quomodo aquæ inde ad montium cacumina aſſurgant. I. 43
MARIOTTE *ſur le mouvement.* III. 3
Martis motus diurnus. IV. 184
Mât, *où il doit être placé.* II. 73
Materiæ aëre ſubtilioris exiſtentia. II. 329. 339
Matiere céleſte *n'eſt pas toute d'une même denſité.* III. 154
— *du ſecond élément.* III. 276
— *première diviſée à l'infini.* III. 275
— — *ne réſiſte point au mouvement des corps.* III. 277
MAUPERTUIS (*De*) *ſon expoſé des ſyſtêmes de* DESCARTES *&* NEWTON. III. 264
De Maximis & Minimis (*Problêmes*) I. 64. 202. 204. 211. 254 f. 308 f. 424. II. 32. 40. 214 f. 242 f. III. 62. 64. 193. 372. IV. 189.
— — — (quæſtiones numericæ). IV. 25. 27
Maximum. I. 50. 225. 235. 424. II. 33. 40. 214 f. 242 f. III. 21. 62. 64. 193. 372. IV. 25. 27. 189. 376. 406. 438. 473
Maximorum & minimorum Methodus non ſufficit inveniendis curvis quæ ipſæ maximi vel minimi proprietate gaudent. I. 188
Maximum maximorum *comment il ſe détermine.* II. 36
Mechanicarum curvarum genera. II. 591. III. 470
Medii reſiſtentia & denſitas, qualis eſſe debeat, ut corpus in data curva moveatur. I. 481 f. 532 f. 537 f. 543 f. IV. 347 f.
— — quæ ſit ejus cauſa. I. 529

— — quantum retardet projectile. IV. 356. 366 f.
in *Medio resistente* motus. I. 481 f. 502 f. II. 399. 513. IV. 347 f. 354 f. 374 f. 378 f. 382 f.
Mémoire *de Mr.* RENAU *sur un principe de Méchanique* II. 97
Mensura virium vivarum, qualis. I. 321. III. 245. 248. 371. 374. 375. IV. 264. 459. 490
Mercure (*le*) *contracte dans l'air une pellicule.* I. 341
— *quel qu'il soit, est propre à luire dans le vuide.* II. 358. 362. 366
V. *Phosphore.*
Mercurialis phosphorus. V. *Phosphorus mercurialis*
Mercurii natura. II. 335
— præparatio per lotiones. II. 350
Mercurius in barometro cur suspensus hæreat. I. 88
— lucet in vacuo. II. 319
— minus lucet impurus. II. 341
— ut luceat qualis eligendus. II. 350
Meridianus nullus aliis præferendus. IV. 498
Mersennus Cycloidem primus consideravit juxta Gallos. I. 322
Mesure *des forces vives.* II. 39. 41. 49. 51. 53
Metaphysica principia, qua cautione in mechanicis adhibenda. I. 88. IV. 272
Méthode *d'élever un Polynome à une puissance quelconque.* I. 461
— *des isopérimetres.* II. 235
— *directe du Probléme de la plus vite descente.* I. 197 f. II. 267
— *inverse des Tangentes, Probléme utile dans cette méthode.* I. 396
— *pour résoudre une égalité donnée avec une portion donnée de courbe.* I. 67. 90
— *pour trouver la nature des courbes de la voile, du linge, d'une corde dilatée par la pression d'un fluide.* II. 91
— — — *les tautochrones dans un milieu résistant.* III. 173
Methodi Newtonianæ. IV. 136
Methodus determinandi radios osculi. I. 381
— differentiandi de curva in curvam. II. 439
— directa solvendi Problemata hydraulica. IV. 432
— exhibendi summas progressionum per numerorum naturalium potentiam datam procedentium. IV. 16
— extrahendi radices Rolliana vitiosa. III. 529. 533
— fluxionum Newtoniana. IV. 129
— Hermanniana solvendi Problema catenarium ab errore repurgata. IV. 234
— incrementorum TAYLORI quid novi contineat. II. 485
— integralium. III. 385 f.
— integrandi sine prævia separatione indeterminatarum. III. 108 f. IV. 42 f. 408

Methodus inveniendi catenarias & velarias. I. 107. 108
—— centrum oſcillationis. I. 528. II. 168. III. 252. IV. 259
—— curvas quæ datum habeant numerum ſpatiorum quadrabilium. III. 406. ſ. II. 315 ſ.
—— evolutas & cauſticas datæ curvæ. I. 58
—— ſolidum minimæ reſiſtentiæ. I. 311
— parandi barometra lucentia. II. 353
—— phoſphorum mercurialem. II. 365. 371
— quadraturarum Craigiana inſufficiens. I. 136. 140. 144
— reducendi quadraturas ad longitudines curvarum. I. 150. II. 582
— tangentium inverſa. III. 413 ſ.
— univerſalis non debet temere dici. I. 136. IV. 140
— vulgaris de maximis & minimis non ſufficit omnibus hujuſmodi Problematibus ſolvendis I. 187
MICHELOTTI defenſio Demonſtrationis Principii hydraulici. II. 212
Milieu réſiſtant (*Force centrale dans un*). I. 502
—— (*Pendule compoſé dans un*). IV. 382
—— (*Tautochrone dans un*). III. 173
— *ſa réſiſtance*. V. Réſiſtance.
Minimum. I. 64. 185. 201. 202. 211. 225. 235. 255. 308. II. 214. ſ. 242. ſ. IV. 127. 271
Mobile perpetuum artificiale. I. 41. 90
MOIVRE (De) *Théoreme ſur les forces centrales*. I. 477
— *Théoreme pour élever une ſuite infinie à une puiſſance quelconque*. IV. 173
MOIVREUS dedit theorema pro lege virium centralium invenienda. I. 551
——— pro comparatione curvarum ſed non ſatis univerſalia. IV. 153 ſ.
——— theoremata pro extractione radicis ex ſerie infinita & pro infinitinomio ad poteſtatem indeterminatam elevando. IV. 152
— demonſtravit ſeriem Bernoullianam. II. 490
—— theorema Coteſianum. IV. 67
— in eum animadverſiones. IV. 146 ſ.
Moles corporis humani quanta fieret, ſi nihil de ſua ſubſtantia amitteret. I. 295
MONTMORT (*Lettre a Mr. de*) *ſur les jeux de hazard*. I. 453
— *extraits de ſes Lettres*. II. 494. ſ. 499. ſ. 507. 509. 512
Motus angularis. IV. 257. 262. 265
—— duplex in uno eodemque corpore. IV. 279
— annui & diurni Planetarum relatio. IV. 280 ſ.
— communicatio ope trianguli rectanguli. IV. 332
—— per vectem. IV. 262
— conſervatio non indiget principio motrice. III. 253
— corporum duorum per elaſtrum interpoſitum. III. 249

Motus corporum, gravium pendulorum & projectilium theoria. I. 514 f.
— curvilineus corporum in medio reſiſtente. I. 481. f. 532. f. 537. f. 543. f. IV. 347 f.
— ex colliſione corporum irregularium. IV. 273
— globi ferrei in medio reſiſtente. IV. 357. f. 365 f.
— liquoris in ſiphone, ſeu tubo inflexo. III. 125. IV. 474
— in tubo partim immerſo. IV. 419. 488
— liquorum per vaſa & canales. IV. 391 f.
— muſculorum. I. 93 f.
— omnis poteſt intelligi tanquam ab elaſtro productus. III. 242
— pendulorum. I. 514. II. 168. IV. 285. 302. 310. 313. 374
— — circularium. II. 187
— perpetuus artificialis. I. 41. 90
— projectilium. I. 481. f. 530. f. IV. 347 f.
— quantitas, non virium, augetur ac minuitur. III. 254
— reptorius. I. 408. f. 437. f. 450. 452
Moulins à vent (*Problême ſur les*). IV. 192
Mouvement *commun des Planétes d'Occident en Orient inexplicable dans le ſyſtême de* NEWTON. III. 307
— *de deux corps par un reſſort interpoſé.* III. 24 f.
— *de l'orbite de la Lune, ſa cauſe.* III. 165
— *des corps eſt le même ſur un plan en repos ou en mouvement.* III. 27
— *des figures curvilignes dans un fluide.* II. 55
— *diurne de Jupiter.* III. 320
— — *de Venus.* III. 322
— — *des Planétes.* II. 313. f. 321 f.
— *loix de ſa communication.* III. 1. 7. 28. 55. 57
— *produit & détruit par la force d'un reſſort.* III. 15
— *régle générale de ſa communication.* III. 28 f.
— *ſa quantité ne ſubſiſte pas la même dans l'Univers.* III. 38
Multifilia pendula. IV. 313
Multigibbæ curvæ I. 440
Multiplicatio anguli & arcus. I. 386. 511. II. 526. IV. 69
Multiplication *des lignes, comment elle doit être entendue.* IV. 164
Multiſectio anguli. I. 386. 511. IV. 69
MUSCHENBROEK, methodus parandi phoſphorum mercurialem. II. 371
Muſcularis veſiculæ figura circularis. I. 106. 108. 113
Muſculorum motus. I. 93 f.
— ſtructura. I. 97
Muſculus nulla vi tertia ſui parte poteſt contrahi. I. 113
Muſſii fermentatio. I. 17
— — quomodo impediatur. I. 32
Mutatio ſucceſſiva corporis humani per calculum determinata. I. 288

Natura

N

Natura agit per vias ſimpliciſſimas. IV. 271
Navium pondus explorari poteſt per oſcillationes eorum. IV. 296
Negativa integralis quid deſignet. III. 399
Nervorum ſtructura. I. 100
NEWTONI cataracta confutata. IV. 483. 484
— de Cycloide inventa. I. 324
— determinatio curvæ minimæ reſiſtentiæ. I. 309
— errores quidam. I. 534. 535. 542. 548. ſ. 555. IV. 350
— explicatio refractionis ingenioſa magis quam vera. I. 372
— laudes.
— methodi. IV. 129. 136
— problema de motu corporum in medio reſiſtente generalius conceptum. IV. 347
— ſolutio problematis trajectoriarum orthogonalium. II. 273
— theorema de quiete aut motu uniformi centri gravitatis. IV. 34
— — de ſummis potentiarum radicum æquationis propoſitæ. IV. 22
NEWTONUS non habuit perſpectam theoriam virium vivarum. III. 253
NEWTON *la régle qu'il donne pour prendre les differences n'eſt bonne que pour le premier degré.* I. 509
— *ſa ſolution du Problême de la plus vite deſcente.* I. 196. 200
— *ſes mépriſes ſur la détermination des forces centrales dans un milieu réſiſtant.* I. 505
— *ſes objections contre les Tourbillons réſolues.* III. 143 ſ.
— *ſon ſyſtême de Phyſique céleſte.* III. 137. 264
— — — *comparé à celui de* DESCARTES. III. 136
— — — *eſt géométrique.* III. 265
— — — *ne rend pas raiſon du mouvement commun des Planétes d'Occident en Orient.* III. 307
— — — — — — — *du mouvement d'Aphélie.* III. 164. 327
— — — *ſes inconvéniens.* III. 266. 267
— *ſuppoſe ſans démonſtration l'inverſe du Problême des forces centrales.* I. 480
Nicæni Concilii decreta de Paſchate. IV. 496
NIEUWENTIITIUS calculi differentialis impugnator notatus. I. 145. 179 ſ.
Nœuds *des Orbites des Planétes leur mouvement.* III. 358
Notio vera virium vivarum. III. 239
Numeri dati Logarithmus per ſeriem exhibitus. I. 126 ſ.
Numerorum aureorum Cyclus abolitus. IV. 495
— figuratorum ſeries. III. 521. IV. 14
— primorum inveniendorum ratio. I. 89. 90

Numerus dati Logarithmi per ſeriem exhibitus. I. 127. III. 378
Nutritio. I. 275 ſ.
Nutritionis finis. I. 286.
— modus. I. 277. ſ. 282 ſ.
— ſpecies. I. 276. 283.

O

Objecta tria in eadem recta, ex quo puncto æqualia videantur. IV. 293
Obliquité *de l'axe de rotation des Planétes à leur Orbite, & ſa cauſe.* III. 324
Obrepere curvam curva quando dicatur. I. 412
Obſervationes occaſione Terræ motuum factæ. IV. 512 ſ.
— pendulorum prope æquatorem non ſatis accuratæ. I. 520
OFFENBURGI Problema de deſcribendis in ſuperficie ſphærica curvis algebraicis rectificabilibus. III. 212. 226.
Onde *de lumiére, ſa courbure.* I. 197
Opticum Problema. IV. 293
Opus hydrodynamicum Dan. BERNOULLI. IV. 392
Or *frotté contre le verre donne de la lumiére.* I. 436.
Orbitæ Planetarum, cur ellipticæ. I. 555
Orbite *de la Lune, mobile & pourquoi.* III. 165
— — — — — *inclinée à l'équateur & pourquoi.* III. 359
— *du ſecond ſatellite de Jupiter, cauſe de ſon inclinaiſon.* III. 362
Orbites *des Cometes pourquoi diſpoſées irrégulièrement.* III. 310
— — — *leur inclinaiſon diminue.* III. 313
— *des Planétes elliptique, & pourquoi.* III. 135. 136. 139. 157. 161. 309
— — — *leur inclinaiſon.* III. 330 ſ.
— — — *leur mouvement.* III. 135. 162. 164. 169. 327. 328
— — — *leurs nœuds.* III. 358
— — — *pourquoi renfermées dans le zodiaque.* III. 308 ſ.
— *des ſatellites de Saturne, leur inclinaiſon.* III. 361
Orthogonalis Trajectoria. V. *Trajectoria orthogonalis.*
Oſcillantis catenæ figura. IV. 328
— chordæ muſicæ figura. III. 210
Oſcillation. V. Centre d'Oſcillation.
Oſcillationis centrum. V. *Centrum oſcillationis.*
Oſcillationes corporum aquæ inſidentium laterales. IV. 286. 291
— — — — verticales. IV. 294
— — titubantium. IV. 296
— chordæ muſicæ. III. 125. 207
— — ponderibus onuſtæ. III. 126. 198
— liquoris in ſiphone ſeu tubo recurvo. III. 125. IV. 474
— — in tubo partim immerſo. IV. 488

Oſcillationes penduli in medio reſiſtente. IV. 374
— penduli luxati. IV. 302
— penduli multifilis. IV. 313
— pendulorum diverſis viribus agitatorum. I. 518. II. 170
— pendulorum ſympathicorum. IV. 310
Oſcillationibus minimis pendulum iſochronum determinare. IV. 281
— navis pondus ejus explorare. IV. 296
Oſculans planum. IV. 113
Oſculator circulus. V. *Circulus oſculator*.
Oſculi radius. V. *Radius oſculi*.

P

PAnii fermentatio. I. 31
Pantogonia curva. II. 571. 581. 600 ſ.
PAPPI Regula de menſurandis ſpatiis genitis ex motu centri extenſionis genitricis, promota. I. 153. 158
Parabola ex evolutione parabolæ cubicalis ſecundæ deſcribitur. III. 443
— in quali medio a projectili gravi deſcribitur. I. 488
— omnis aut per ſe aut cum alia rectificabilis. I. 250
— ſpirali æqualis æquale ſpatium comprehendit. I. 47
— vulgaris cum cubico-biquadratica conjuncta rectificationem admittit. I. 251. IV. 95
Parabolæ cauſtica. III. 471. 477. 552
— evoluta. I. 58 ſ. III. 435. 438
— extenſio pendet a quadratura hyperbolæ. I. 242
— longitudo circuli arcubus comparata per approximationem. I. 444
— radius oſculi determinatus. I. 383. III. 435. 438
Parabola biquadratica clepſidris conficiendis idonea. IV. 481. 482
Parabolæ cubicalis primæ arcus differentiam habentes rectificabilem. I. 252
— — — radius oſculi. III. 438
Parabola helicoides, vel *ſpiralis parabolica* parabolæ cubicali æqualis. I. 47
Parabola ſemicubica, vel *cubicalis ſecunda* evoluta eſt parabolæ vulgaris. I. 58 ſ. III. 435. 438.
— — iſochrona curva eſt. III. 485
— — proprietate gaudet analoga iſochroniſmo. IV. 250
— — quales curvas ſui evolutione generet. III. 443
— — rectificabilis. I. 252
— — trajectoria eſt reciproca ſimpliciſſima II. 566. 568. 572. 574. 576. 593
Parabolarum in alias curvas algebraicas transformatio. IV. 92
— quadratura I. 164.
— radius oſculi. I. 380
— rectificatio quando poſſibilis. I. 250. IV. 142
— trajectoriæ. I. 260. 261. 267. 270. II. 309. 310. 312

Paraboles, *équation de la courbe qui en coupe une infinité à angles droits.* I. 396
Parabolici conoidis titubantis oscillationes. IV. 301
Parabolicorum arcuum comparatio. I. 242
— — — erronea Tschirnhausiana. I. 151. 159. 171. 177
— — differentia rectificabilis. I. 247
— spatiorum comparatio. I. 151
Paraboloides in quali medio a projectili gravi describatur. I. 493
Parallelum lineam ducere lineæ datæ. I. 154. 158
Parallélisme *de l'axe des Planétes.* III. 326
Parallélogramme rectangle, *route, dérive & viteſſe d'un vaiſſeau de cette figure.* II. 15 f.
Paralyſis causa. I. 103
PARDIES demonstratio tautochronismi cycloidis confusum chaos. III. 491
PARENTII in HUGENIUM iniqua censura. II. 188
Partes omnes corporis humani tempore renovantur. I. 285
Particules ignées *peu vraiſemblables.* I. 364
PASCAL, *ſon Triangle arithmétique.* I. 460
PASCHALII de Cycloide inventa. I. 323
Paſchatis festum, quo die anni 1724 celebrandum. IV. 494 f.
Patiens. V. *Corpus patiens.*
Pellicula mercurii lumen ejus in vacuo impedit. II. 338
Pellicule, *qui envelope le mercure, ſes effets.* I. 341. 353
Pelotons *du torrent central.* III. 292. 295 f.
PEMBERTON demonstratio theorematis Cotesiani. IV. 68
— solutio problematis trajectoriarum reciprocarum. II. 520. 521. 524. 548. 552. 557. 575. 601
Pendula, cur abbrevianda prope æquatorem. I. 520
— isochrona sunt quorum longitudines sunt ut vires quibus agitantur. I. 518
— luxata. IV. 302
— multifilia. IV. 313
— sympathica. IV. 310
— turbinantia. II. 190
— — sunt isochrona quæ describunt superficies conicas æque altas. II. 194
Pendule *composé dans un milieu réſiſtant.* IV. 382
— *qui imite le mouvement des planétes.* III. 169
Penduli oscillationibus minimis isochroni longitudo. IV. 285
— velocitas in medio resistente. IV. 374
Pendulorum diversis viribus agitatorum oscillationes. I. 518
— motus. I. 514. f. II. 168. f. IV. 285. 302. 310. 313. 374

Pendu-

Pendulorum motus circularis. II. 187
— ope gravitas corporum ſpecifica exploratur. I. 524. 527
— oſcillantium in fluidis centrum oſcillationis. II. 182
— oſcillationes in fluidis. I. 522 ſ.
Penſées *ſur le ſyſtême de* DESCARTES. III. 132 ſ.
Percurrens quantitas, quæ. I. 180
Percuſſionis vis infinite major maxima vi ponderis. I. 89
Percuſſion, *ſon centre eſt-il le même que celui d'oſcillation.* IV. 180
Perfectio regulæ pro inveniendo valore fractionis, cujus numerator & denominator certo caſu evaneſcunt. I. 401
Peripheriæ ad radium ratio per numeros celeriter appropinquantes. IV. 107. 108
Perpetuum mobile artificiale. I. 42. ſ. 90
Perreptanda & perreptans curva. I. 412
Peſanteur *des corps vers le Centre de la Terre.* III. 300
— — — *ne tendroit pas au centre dans le ſyſtême des Tourbillons.* III. 272
— *des Planétes vers le ſoleil.* III. 297. 298
Phenomena barometri lucentis. II. 327
Pharaon, *Problême ſur ce jeu.* I. 454
Philoſophiæ experimentalis vindicatio. I. 306
Phoſphore *de mercure.* I. 337 ſ. 349 ſ.
Phoſphorus mercurialis. II. 321
— — portatilis. II. 362
— — quomodo parandus. II. 365
— — ejus uſus varii. II. 389
Phyſique *céleſte.* III. 261
PICARDI barometrum lucens. II. 324
Pilotage. II. 3
Piſces in aqua reſpirant. I. 20.
Planetarum motus annui & diurni ex eadem cauſa proficiſci potuerunt. IV. 280
— orbitæ ellipticæ. I. 555
Planétes, *leur axe.* V. Axe.
— *leur mouvement commun d'occident en orient, inexplicable dans le ſyſtême de* NEWTON. III. 307
— *leur mouvement diurne, ſa cauſe.* III. 313 ſ. 317
— *leur Orbites.* V. Orbites.
— *leur peſanteur vers le Soleil.* III. 297 ſ.
— *ne ſuivent pas exactement le courant du Tourbillon.* III. 282
— *raport de leurs tems périodiques & de leur diſtances* III. 155
— *ſe meuvent comme dans un vuide parfait.* III. 307
— *ſphériques, ſe mouvroient dans le plan de l'équateur du tourbillon.* III. 334

Planétes ſphéroïdes ſe meuvent dans un plan incliné à l'équateur du tourbillon. III 335 ſ.
Planum oſculans lineam in ſuperficie curva deſcriptam. IV. 313
— turbinationis. II. 191
Plenilunii paſchalis anno 1724 momentum. IV. 495.
Pluvia mercurialis ignea. II. 390
POLENI experimenta de aquis fluentibus. IV. 439
— obſervatio de bullula aerea lucente in barometro luminoſo. II. 345
Polygone *infini-lateral.* IV. 162
Polygoni regularis in circulo inſcriptio per æquationem algebraicam. IV. 69
— — circulo inſcripti proprietas. IV. 71
Polynome, *elevé a une puiſſance indéfinie.* I. 461 ſ.
Ponderibus onuſtæ chordæ oſcillationes. II. 126. 198
Pondus a gravitate quid differat. II. 169
Pondus majus, cur non multo difficilius minori elevetur. I. 116
— navis ex oſcillationibus ejus explorare. IV. 296
— qua copia ſpirituum animalium elevetur. I. 113
Pons ſublicius in æquilibrio tenendus V. *Æquilibrationis curvæ*
Poſitiones de propoſitionibus. I. 77
Potentia hydroſtatica. IV. 436
— indeterminata binomii. III. 522
— — — conſenſus ejus cum differentia rectanguli. II. 486
— — — terminus ejus maximus. IV. 25
Potentialis ſimilitudo curvarum. II. 450
Potentiarum compoſitio & reſolutio. IV. 253
— ſeries reciproca. IV. 12. 22
— vel radicum numerorum naturalium ſumma. IV. 16
Poudre à canon, *ſes effets dans les piéces d'artillerie.* III. 20
Præcipitatio chymica. I. 37. 39
Præcipitatum. I. 11
Préceſſion *des équinoxes.* III. 355
Preſſio, vis mortua. III. 241
— elaſtrorum in corpus. III. 247
— fluidi in fundum vaſis cylindrici dum effluit. IV. 423
— in fundos plurium tuborum, dum ex uno in alium fluit. IV. 430
— — in latera canalium per quos fluit. IV. 442 ſ. 448. 449. 450. 453
— — in tubam hyperbolicam. IV. 470
— ſtratorum fluidi in inferiora. IV. 395. 435. 465. 471
Preſſion *des couches de fluide qui compoſent un Tourbillon, les unes contre les autres.* III. 147. 155
— d'une corde contre le cylindre autour duquel elle eſt roulée. IV. 219. 220. 225

Preſſion *d'une ſuite de reſſorts contre un corps.* III. 43
Preſſoir, *ajouté au Cabeſtan pour le délivrer de ſes inconvéniens.* IV. 228
Primi numeri, quomodo quærendi. I. 89. 90
Principe de Méchanique (*Mémoire ſur un*). II. 97
—— —— *attaqué.* II. 149
—— —— *défendu.* II. 138. 160
—— *d'uniformité, employé dans la ſolution du Problème des iſopérimetres.* II. 237. 239. 243. 247. 248
Principia calculi exponentialis. I. 179
—— metaphyſica, qua cautione in mechanicis adhibenda. I. 88. IV. 272
Principii hydraulici demonſtratio. II. 208. 210. 212
Principium, non datur ſaltus in rerum natura fœcundiſſimum. I. 187. III. 9
—— uniformitatis adhibitum in ſolutione Problematis iſoperimetrici. II. 481. 506
Prix de l'Académie, *Diſcours pour les mériter.* III. 1. 131. 261. IV. 205
Problema analyticum, de quadraturis reducendis ad quadraturam circuli & hyperbolæ. II. 402
—— —— —— —— —— —— —— —— —— —— —— —— —— ſolutum. II. 407. IV. 52
—— arcuum parabolicorum datam inter ſe rationem habentium. I. 243
—— aſtronomicum vel gnomonicum de hyperbola æquilatera quam deſcribit extremitas umbræ bacilli. I. 91
—— balliſticum, de aſcenſu & deſcenſu gravis in altum projecti, in medio reſiſtente. IV. 354 ſ.
—— Beaunianum ſolutum & demonſtratum. I. 65. 128. 146. 148
—— brachyſtochronæ propoſitum. I. 161. 165. 167
—— —— ſolutum. I. 190. II. 469 ſ.
—— breviſſimæ lineæ in ſuperficie curva. I. 256. 265. IV. 108. 127
—— calculi integralis. I. 175. II. 402. 442. III. 108. ſ. IV. 42. 49. 52. 77. 79. 381. 408
—— catenarium. I. 48. II. 232. 251. III. 491. IV. 234
—— cauſticarum. I. 52. ſ. III. 464 ſ.
—— clepſydrarum. IV. 478 ſ.
—— curvæ æquilibrationis. I. 129. 133. 140
—— —— algebraïcæ quæ habeat determinatum numerum ſpatiorum rectificabilium. III. 407. II. 315
—— —— algebraïcæ rectificabilis in ſuperficie ſphærica deſcribendæ. III 212
—— —— cujus perpendiculares ſint æquales tangentibus curvæ datæ. III. 431
—— —— cujus reſecta ſit ad tangentem in ratione data propoſitum. I. 66
—— —— per cujus arcus grave deſcendens a quiete ad imum impendat tempora altitudinum poteſtatibus proportionalia. IV. 246

—— —— preſſionis æquabilis propoſitum. I. 141
—— —— quæ cum arcu circuli vel parabolæ ſit rectificabilis. IV. 95. 96
—— —— quæ ſit ad ſuam tangentem in ratione data. III. 425
—— —— quam deſcribit corpus in tubo circulante. IV. 248
—— —— —— —— grave in medio reſiſtente projectum. II. 399. 513
—— —— —— —— radius ſolaris in atmoſphæra. III. 516
—— —— rectam per datum punctum actam, vel datæ poſitione parallelam ita ſecantis ut ſegmentorum rectangulum datum ſit. I. 156
—— —— —— —— —— —— —— —— ut ſegmentorum ſumma vel differentia data ſit. I. 158. IV. 40
—— —— —— —— —— —— —— —— ut ſegmentorum data poteſtas datam ſummam efficiat. I. 169. 170
— cycloidis, aut curvæ cujuſvis, quæ inter ſimiles talis ſit, ut per illam grave a dato puncto ad datam rectam citiſſime perveniat. I. 201. 254. 262
— de alea. IV. 28 f.
— de aſcenſu & deſcenſu corporis per arcus æquales in medio reſiſtente. IV. 378
— de centro rotationis ſpontaneo. IV. 265
— de chordarum vibrationibus. III. 126. 198
— de colliſione corporum irregularium. IV. 273
— de communicatione motus per triangulum rectangulum. IV. 332
—— —— per vectem. IV. 262
— de complenda æquatione differentiali. II. 442. IV. 77
— de deſcenſu gravis per planum inclinatum mobile. III. 395. IV. 337. 341
—— —— poſt ſe aliud aſcendens trahentis. III. 237. 256
— de evolutionibus curvarum. I. 60. III. 432 f.
— de lege virium qua fit ut tempora deſcenſus corporis ad centrum ſint ut poteſtates altitudinum ex quibus deſcenſum inchoant. IV. 243
— Deliacum ope circini & normæ ſolutum. III. 542
— de linea in ſuperficie curva, cujus planum oſculans, cum plano tangente datam inclinationem habeat. IV. 113
— de maximis & minimis. I. 254. 308. II. 214. III. 372. IV. 189
—— —— —— —— in numeris. IV. 25. 27
— de methodo tangentium directa. I. 138
—— —— —— —— inverſa. III. 413 f.
— de motu corporum in medio reſiſtente. I. 481 f. 502 f. II. 399. 513 IV. 347 f. 354 f. 374 f. 378 f. 382 f
— de oſcillationibus corporum aquæ inſidentium. IV. 286 f.
— —— —— titubantium. IV. 296

Proble-

— — — — penduli in medio quod reſiſtit in ratione ſimplici velocitatum. IV. 374
— — — — pendulorum luxatorum. IV. 302
— — — — multifilium. IV. 313
— — — — ſympathicorum. IV. 310
— de quadratura curvarum. III. 400 ſ. II. 402. IV. 52
— de quadraturis tranſcendentibus reducendis ad extenſiones curvarum. II. 585
— de rectificationibus curvarum. IV. 89. 92
— de transformationibus curvarum. I. 419. IV. 89
— de ſummis ſerierum. IV. 5 ſ. 20
— de viribus motricibus ad vectem applicatis. IV. 256
— dioptricum generale. IV. 195
— elaſticæ laminæ inflexæ. I. 122. IV. 242
— funicularium. V. *Problema catenarium.*
— geometricum. I. 66. 169. IV. 34. 36. 38
— gnomonicum. V. *Problema aſtronomicum.*
— hydraulicum IV. 419. 488
— inverſum virium centralium. I. 555
— iſochronæ. III. 482
— — paracentricæ. III. 486. I. 120
— iſoperimetricum. I. 201. II. 214. 219. 475. 481. 503
— lintearıæ. III. 512
— opticum. IV. 193
— pantogoniæ. II. 571. 581. 602 ſ.
— ſectionum angularium. I. 331. 386. 511. II. 526. IV. 69. 144
— ſolidi minimæ reſiſtentiæ. I. 308. 311. 316
— ſynchronæ. I. 192
— tautochronæ. III. 488
— trajectoriarum orthogonalium. I. 193. 259. 266. II. 270. 273. 275 281. 286. 290. 291. 295. 305. 314. 403. 435 ſ.
— trajectoriarum reciprocarum. II. 472. 520. 535. 537
— trajectoriæ reciprocæ ſimpliciſſimæ. II. 554. 575. 593
— trajectoriæ reciprocæ dati ordinis. II. 616
Problemata proponere utile eſt. II. 393
— phyſico-mechanica per Calculum integralium ſoluta. III. 482 ſ.
— ſoluta quotuplici ſenſu dici poſſint. II. 435
Problematum hydraulicorum ſolvendorum methodus directa & univerſalis. IV. 432
— ſolidorum & hyperſolidorum conſtructio geometrica. III. 539. 542
Probléme *de la brachyſtochrone, ou courbe de plus vite deſcente.* I. 194 ſ. IV. 190

— — — — — *ſa ſolution directe.* I. 198. II. 267 ſ.
— — — — — *d'une longueur donnée.* II. 254 ſ.
— *de la chainette.* I. 59. 430. II. 96. 251 ſ.
— *de la courbe de Mr.* DE BEAUNE. I. 62
— — — — *entre les iſochrones qui renferme le plus grand ſegment.* II. 264
— — — — *entre les iſopérimetres dont le centre deſcend le plus bas.* I. 227. 239
— *de la courbure du linge chargé d'une liqueur.* I. 225. 432. II. 91. 95
— — — — *d'une voile enflée par le vent.* I. 59. II. 81 ſ. 94
— *de la cycloide, ou en general de la courbe entre les ſemblables, le long de laquelle un corps peſant parvient le plûtôt d'un point donné à une droite donnée.* I. 202. 211. 212. 218. 221
— *de la demi-ellipſe, entre toutes celles qui ont un même axe, qui eſt parcourue dans le moins de tems.* I. 220
— *de la dérive d'un Vaiſſeau rectangulaire.* II. 15 ſ.
— *de la ligne la plus courte décrite ſur une ſurface courbe.* I. 204
— *de la ſituation la plus avantageuſe de l'aîle d'un moulin à vent.* IV. 192
— *de la ſituation la plus avantageuſe du gouvernail.* II. 40. IV. 192
— — — — — — — — *de la quille d'un Vaiſſeau.* II. 26. 35
— *de la transformation des courbes.* I. 406
— *de la Viteſſe d'un Vaiſſeau retenu par une corde infinie.* II. 142. 158
— *de maximis & minimis.* I. 64. 202. 205. 208. 220. 424 ſ. II. 33. 40. 242 ſ. III. 21. 62. 64. 193. IV. 189
— *de méchanique.* IV. 189
— *des clepſydres.* IV. 186
— *des courbes algébriques rectifiables décrites ſur une ſurface ſphérique.* III. 226. 230
— *des iſopérimetres.* I. 202. 206. 214. 215. 220. 221. 222. 230. 231 377. 424 ſ. II. 235 ſ.
— *des loix du choc des corps à reſſort.* III. 28. 59. 62. 64. 66
— *des tautochrones dans un milieu réſiſtant.* III. 176 ſ.
— *du calcul intégral.* I. 393
— *du pendule compoſé dans un milieu réſiſtant.* IV. 382
— *du plus petit crépuſcule.* I. 64
— *du ſolide de moindre réſiſtance.* IV. 191
— *inverſe des forces centrales.* I. 469. 474. 478
— *loxodromique.* IV. 185. 186
— *propoſé aux Géométres ſur la conſtruction des égalités, avec une portion donnée de courbe, réſolu.* I. 66. ſ. 90
— *ſur les épicycloides ſphériques.* III. 216
— *ſur les jeux de hazard.* I. 454 ſ.
Production & *deſtruction du mouvement par la force du reſſort.* III. 15
Programma, quo bina eruditis proponuntur Problemata. I. 166

Projecti-

Projectilium motus. I. 481 f. 514 f. II. 399. 477. 513. IV. 354
Propositio, quid. I. 79
Propositionum variæ species. I. 83
Puissance *indéterminée d'un polynome.* I. 461
Pulveris pyrii vis, unde. I. 33. f. IV. 516 f.
Purificatio mercurii. II. 350
Purification *du mercure pour le rendre lumineux.* I. 361

Q

Quadrabiles curvæ quæ sint, quæ non sint. III. 395
Quadrabilia spatia numero determinata habentes curvæ. II. 315. III. 407
Quadraticæ radicis extractio per approximationem. IV. 15
Quadratorum series reciproca. IV. 11. 22
Quadratrice. IV. 177
— *propre pour la section des angles.* I. 199
Quadratricis DINOSTRATIS puncta facile determinantur. I. 447
Quadratura circuli & figurarum clausarum impossibilis. I. 91. 150
— curvæ exponentialis. I. 185. III. 376
— curvarum. III. 394 f. 400 f.
— — reducibilis ad rectificationes. I. 137. 150. II. 582. f. IV. 144
— — reductæ ad simpliciores. III. 396. II. 407. 419. IV. 52
— spatiorum cycloidalium. I. 322. 328. 330. 336. 389
— universalis per approximationem geometricam. I. 162
— — per seriem universalem. I. 125
Quadraturarum methodus Craigiana insufficiens. I. 136. 140. 144
— transcendentium gradus. II. 591
Quæstio chronologica, de festo paschatis anno 1724 celebrando. IV. 494
Quæstiones numericæ de maximis & minimis. IV. 27
Quantitas motus, non virium, augetur ac minuitur. III. 254
Quantité de direction. III. 32
— — — *reste la même avant & après le choc.* *ibid.*
— *de force vive subsiste la même dans l'Univers.* III. 38
— *de mouvement ne subsiste pas la même.* *ibid.*
Quille *de vaisseau, sa situation la plus avantageuse, pour gagner au vent ou le fuir.* II. 26. 35

R

Radicum extractio commoda per approximationem. III. 537. IV. 15. 16

— — — — extractio per series. III. 528
Radii lucis curvatura in diaphanis non uniformibus. I. 187
— — dum reflectuntur aut refringuntur compendiosissimam viam sequuntur. I. 375
— solaris in atmosphæra curvitas. III. 516
Radii reflexi in caustica longitudo. III. 465 f. 473 f.
— refracti in caustica longitudo. III. 549 f. 554 f.
Radius oſculi æqualis est evolutæ. III. 433
— — evolutam tangit & curvam evolutione descriptam secat ad angulos rectos. *ibid.*
— — expressus per differentiales. I. 382. III. 437
— — quomodo determinandus. I. 379. 380. 382. 384
— — — — variis in curvis determinatur. I. 380. III. 438 f.
Raion de lumiére, *ſa courbure dans un milieu inégalement denſe.* I. 197. 201
Raion oſculateur *des courbes qui ſatisfont au Probléme des iſopérimetres.* I. 210
Raions du Soleil, *leur origine.* III. 285
— — — *leurs effets.* III. 289
— — — *parvenus aux extrémités du Tourbillon, ce qu'ils deviennent.* I. 291
Ratio circumferentiæ ad radium per numeros celeriter appropinquantes. IV. 107. 108
Rationis usus in Theologia. I. 196
Ratisbonense concluſum de festo Paschatis celebrando. IV. 495 f.
Reactio actioni æqualis & contraria. I. 372. IV. 484
Réaction *égale & contraire à l'action.* II. 14. III. 16
Rectificabiles per se curvæ. I. 372
Rectificatio causticarum. III. 466
— circuli cum algebraïca curva conjuncti. IV. 96. 97
— curvæ algebraïcæ præstat rectificatione mechanicæ in constructionibus problematum. I. 121
— curvæ per additionem alterius. I. 249. IV. 95. 96
— curvarum haud vulgaris. IV. 89
— ope suæ evolutionis. IV. 444
— parabolarum aut per se, aut cum aliis conjunctæ. I. 250. IV. 142. 95
Rectificationibus curvarum aliæ quadrantur. I. 137. 150. II. 582. IV. 144
Reductio æquationis differentialis secundi gradus ad primum. IV. 79
— — — — — ad parabolarum genus. IV. 88
— integralium ad quadraturam circuli & hyperbolæ. II. 402. 407
— perimetri ellipseos ad peripheriam circuli per approximationem. I. 447

Reductio quadraturarum ad longitudines curvarum. I. 137. 150. II. 582. IV. 144
— quadraturarum ad ſimpliciores. II. 402. 407. 419. III. 396. IV. 52
— — — — per theoremata Moivreana non ſatis univerſalis. IV. 158
Reflexionis & *refractionis* natura explicata. I. 369
Reformatio Calendarii Gregoriana. IV. 495
Refractionis demonſtrationem veram dedit nemo. I. 371
— explicatio. I. 373
Refraction, *ſa loi.* IV. 184
Régle *générale de la détermination du mouvement.* III. 28
— *pour déterminer la direction moyenne de pluſieurs forces.* II. 82
Regula *Hugeniana* de centro oſcillationis demonſtrata. II. 175. 181. III. 252. IV. 261
— integrandi. III. 388
— pro determinanda tangente arcus multipli vel ſub-multipli, ex tangente ſimpli. I. 513
— pro determinandis radiis oſculi. I. 379. 384
— — — tangentibus curvarum. I. 381
— pro determinando valore fractionis cujus numerator & denominator certo caſu evaneſcunt. III. 421
Remarques *ſur le calcul intégral de Mr.* STONE. IV. 169
— *ſur le Commentaire ſur l'Analyſe des infiniment petits.* IV. 160
— *ſur les ſolutions qui ont été données des Problèmes iſopérimetres.* II. 235 257
RENAU (*Le Chevalier*) *a écrit le premier ſur la Manœuvre des Vaiſſeaux.* II. 4. 99
— *erreur de ſa théorie ſur l'angle de la dérive.* II. 19. 150
— — — — — *ſur la viteſſe des Vaiſſeaux.* II. 71
— *ſa diſpute avec M.* HUGUENS. II. 4. 99. 15. 129
— *ſon mémoire ſur un principe de méchanique.* II. 8. 97 ſ.
Reptoria curva. I. 413
— — æqualis ſummæ vel differentiæ curvarum perreptantis & perreptandæ. I. 414
— — algebraïca eſt ſi perreptans & perreptanda tales ſint. *ibid.*
— — ellipſis motu repente genita. I. 437 ſ.
Reptorius motus. I. 408. ſ. 437. ſ. 450. 452
Réſiſtance *de l'eau au mouvement d'un Vaiſſeau.* II. 104 ſ.
— — — — — — — — *égale à l'impreſſion du vent ſur la voile.* II. 105 ſ.
Réſiſtance *d'un milieu fluide, comment la concevoir.* II. 135
— — — — *déterminée par les loix du choc.* III. 71
— — — — — *diminuë la viteſſe des corps.* III. 474
— — — — — *ne change pas les loix du choc.* III. 73

Reſiſ-

— — — — — *ne dépend pas de la ſubtilité des parties du fluide.* III. 277
— — *la matière céleſte n'en oppoſe aucune au mouvement des planètes. ibid.*
Réſiſtance moienne *d'une figure curviligne mue dans un fluide.* II. 55
— — — *ſon axe.* II. 74. 77
— — — *ſon centre.* II. 77
Reſiſtentia fluidi adverſus corpus ſolidum ejuſdem ſecum denſitatis. IV. 422
— globi duplo minor quam cylindri. IV. 368
— medii computata. I. 481. 528. 532. 544. 555. IV. 365
— — — quæ ſit ejus cauſa. I. 529
— — — quantum retardet projectilia. IV. 356. f. 369 f.
Reſolutio binomii $1 \pm x^n$ in ſuos factores reales duarum dimenſionum. IV. 58
— virium demonſtrata. IV. 253
Réſolution *des égalités avec une portion donnée de courbe.* I. 67. 74. 90
Reſſort (*force de*) *augmente en raiſon doublée de la chaleur.* III. 100 f.
— *comment on la peut concevoir.* III. 12
comment produit ou détruit le mouvement. III. 15
— *conjectures ſur ſa cauſe.* III. 83 f.
— *explication probable de ſa cauſe.* III. 81. 89. 91. 96
— *parfait ou imparfait pourquoi.* III. 98
Reſſorts (*ſuite de*) V. Suite de reſſorts.
Reſurrectio corporum non involvit contradictionem. I. 296
— — quomodo intelligenda. I. 297 f.
Retropreſſio vaſis per fluidum erumpens. IV. 484
— — — — — — invariabilis. IV. 488
Rhombe, *route & dérive d'un Vaiſſeau qui a cette figure.* II. 41. 45. 51
Robervallii & Toricellii de Cycloide contentiones. I. 322
— refractionis explicatio vitioſa. I. 371
Roboris gradus eſtimati. I. 117
Roideur, *élaſticité.* III. 13
Rolle ejus methodus extrahendarum radicum. III. 529
— — — — — — vitioſa. III. 533 f.
— *ſes méthodes.* I. 66
Rotando deſcendentia corpora. III. 127 f.
Rotationis centrum ſpontaneum. IV. 265. 270
Route *d'un Vaiſſeau.* II. 113. 133. 146. 155
— — — *pouſſé par deux Vents.* II. 108. 133. 137. 146. 155. 165
— — — *qui a la figure d'un rectangle.* II. 18. f.
— — — — — — — — *d'un rhombe.* II. 41. 51
— — — *qui eſt terminé par deux arcs de cercle égaux.* II. 60 f.

Sanguifé-

S

Sanguificatio I. 279
Sanguinis & Spirituum animalium effervescentia motuum muscularium causa I. 101. 110
Sarbacanne, *qu'elle doit en être la longueur* III. 22
Satellites *de Jupiter & de Saturne, inclinaison de leurs Orbites* III. 361
Saturne, *inclinaison de l'Orbite de ses Satellites* III. 361
Scientia infiniti, opus a LEIBNITIO meditatum I. 119
Secretio humorum I. 280
Section des Angles, *Quadratrice propre pour la résolution de ce Problême* I. 199
Sections coniques, *sont les seules courbes que puisse décrire un corps attiré vers un centre, avec une force réciproquement proportionelle au quarré de la distance* I. 469. 470. 475
Sectionum angularium problema I. 331. 386. 511. II. 526. IV. 69. 144
Sectionum conicarum latus rectum I. 45
—— —— mensura per quas lineas detur I. 150
Sectores cycloidici quadrabiles I. 326. 329
Sectoris elliptici in partes æquales divisio I. 150. 159. 170. 177
Sector solidus cycloidicus, cujus centrum gravitatis potest algebraice determinari I. 333. 336. 391
Segmens de cercle *proportionels aux ordonnées exterieures de la cycloide* I. 198
Segmenta æqualia quomodo ex hyperbola abscindenda III. 411
—— circuli arcubus curvæ algebraicæ proportionalia IV. 94
—— quadrabilia cycloidis I. 325. 335
—— —— cycloidis sociæ I. 334
Segmentum cycloidicum, cujus centrum gravitatis sit algebraice determinabile I. 332
Semicirculus in medio resistente descriptus I. 485. 532. f. IV. 349
Separatio indeterminatarum in æquationibus differentialibus I. 175. IV. 381. III. 421. f. IV. 49. 80. 375. II. 314
Séparation des indéterminées I. 478
Seriei cuborum reciprocæ termini impares omnes sunt parium omnium septupli IV. 11
—— figuratæ summa quam rationem habent ad summam totidem terminorum maximo æqualium III. 521. IV. 14
—— fractionum quarum numeratores & denominatores sunt arithmetice progressionales terminus infinitesimus IV. 5
—— harmonicæ summa infinita IV. 8. 11
—— quadratorum reciprocæ summa est sub-sextupla quadrati peripheriæ, cujus diameter unitas IV. 22

—— —— —— termini omnes impares parium omnium tripli IV. 11
Serierum convergentium uſus in calculo integrali III. 519. 524
—— —— —— in computando motu corporis datam curvam in medio reſiſtente deſcribentis I. 485. 535
—— —— —— in radicibus extrahendis III. 528 ſ. IV. 15. 16
—— methodus Leibnitiana laudata I. 125
—— variarum ſumma V. *Summa*
Series, *leur légitime uſage dans la Solution des Problêmes* IV. 170. 172. 174
Series abrumpentes D. GREGORII III. 520
—— exprimens logarithmum per numerum I. 126
—— —— numerum per logarithmum I. 127. III. 378
—— —— ſinum per arcum I. 127. IV. 20. 25
—— —— tangentem per arcum II. 533. IV. 24
—— quædam ſingularis naturæ III. 539 ſ. IV. 13
—— quarum ſummæ, licet incognitæ, datam habent inter ſe rationem IV. 10
—— univerſaliſſima pro integrationibus I. 125. III. 378. IV. 134. 155
—— —— ejus inveſtigatio quædam II. 488
—— —— hanc Taylorus uſurpavit II. 489. 584
Similitudo curvarum, quotuplex II. 450
Sinus arcus dati per ſeriem exhibitus I. 127. IV. 20. 25
Sinuum Tabulis condendis utile Theorema II. 525
—— verſorum. Curva V. *Trochoidis Socia*
Siphones liquorum in illis oſcillationes II. 125. IV. 474
SLUSE *ſa méthode de conſtruire les égalités* I. 73
SMITHIUS theorematis Coteſiani editor IV. 67
SNELLII theorema dioptricum I. 370
Solaris radii in atmoſphæra curvitas III. 516
Soleil, *ſa formation* III. 280
—— *ſa lumiére & ſa chaleur* III. 284. 285
—— *ſes raions* III. 285
—— —— —— *leur emiſſion ne diminue pas ſa maſſe* III. 286
—— *ſes taches* III. 283
—— *ſon atmoſphére* III. 281
—— *peſanteur des planétes vers cet Aſtre* III 297 ſ.
Solidarum partium in corpore humano compages I. 282
—— —— —— —— —— nutritio & incrementum I. 284
Solide *de la moindre réſiſtance* II. 34. IV. 191
Solidi minimæ reſiſtentiæ problema I. 308. 311 316
Soluta liquoribus corpora cur innatent I. 38. ſ.
— Problemata quotuplici ſenſu dici poſſunt II. 435
Solutio. V. *Æquatio. Problema*

Solu-

Solution. V. Equation, Problème
Sortes colluſorum IV. 28 ſ.
Sorts *des joueurs* I. 453 ſ.
Spatia curvilinea in partes infinite parvas diviſa concipiuntur, ut quadrentur III. 394
— Cycloidalia quadrabilia I. 322. 326. 328. 330. 336. 389. III. 460. 463
— hyperbolica æqualia quomodo aſſignanda I. 242. III. 417
— quadrabilia numero determinato habentes curvæ II 315. III. 407
Specifica gravitas, corporum ope pendulorum exploranda I. 524. 527
Sphæræ ſegmenti titubantis oſcillationes IV. 300
Sphæricæ ſuperficiei portio quadrabilis III. 212
In *Sphærica ſuperficiei* curvam deſcribere rectificabilem III. 211 ſ.
Sphæroidearum ſuperficierum complanatio I. 160. 174
Sphæroiduum proprietas I. 174
Spirale *hyperbolique ou reciproque* I. 480. IV. 177
— *logarithmique, décrite dans un milieu réſiſtant* I. 506
— — *décrite par un corps attiré vers le centre avec une force réciproquement proportionelle au cube des diſtances* I. 480
Spiralis Archimedea æqualis parabolæ idem cum illa ſpatium comprehendit I. 47
— hyperbolica, qua vi deſcribi poſſit I. 552
— logarithmica evoluta eſt & cauſtica ſui ipſius I. 61. III. 459. 481
— — qua vi & in quali medio deſcribatur I. 495. 500. 547. IV. 350
— parabolica æqualis parabolæ cubicali I. 47
— quælibet curvæ cuidam algebraicæ æqualis I 47
Spiritus animales quid conducant ad motum muſculorum I. 100 ſ.
— — horum quantitas requiſita ad datum pondus ſuſtinendum I. 113. 114
Spiritus vini lucem barometricam mercurii extinguit II. 338 347
STENONIS hypotheſis de motu muſculorum I. 99
STONE, *Remarques ſur ſon Livre du calcul integral* IV. 164 ſ.
Strata liquoris fluentis ad ſitum lineæ centricæ perpendicularem ſe componunt IV. 396. 440
— — alia in alia agunt IV. 395. 435. 465. 471
Subrepere curvam curva quando dicatur I. 412
Subterraneæ cavitates IV. 516
Subtilité *des parties d'un fluide n'en change pas la réſiſtance* III. 277
Suite de reſſorts, *quelle preſſion elle exerce contre un corps, & quelle force elle lui communique* III. 42
Sulphuris & ferri fermentatio, Terræ motuum cauſa IV. 519. 520
Summæ ſerierum incognitæ, ſed datam habentes rationem inter ſe IV. 10
Summa progreſſionum per potentias vel radices numerorum rationalium procedentium IV. 16
—— primorum mille numerorum ad decimam poteſtatem elevatorum IV. 19

Summa ſeriei cujuſdam ſingularis III. 540 ſ. IV 13
—— figuratæ, quam rationem habeat ad ſummam totidem terminorum maximo æqualium III 521. IV. 14
—— fractionum, quarum numeratores æquales, denominatores trigonales IV. 8
—— numeratores arithmetice, denominatores geometrice progrediuntur IV. 6
—— numeratores & denominatores ſunt geometrice progreſſionales ſed illi data quantitate aucti IV. 12
—— harmonicæ infinita IV. 8. 11
—— potentiarum parium quarum vis reciproca IV. 20
—— quadratorum reciprocæ IV. 22
— ſerierum variarum IV. 7. 8. 9. 10. 25. 149
Summandus terminus & *ſummator* iiſdem radicum ſignis conſtare debent I. 144
In *Superficie curva* linea breviſſima I. 256. 265. IV. 108 ſ. 113 ſ. 127 V. *Linea*
Superficiei ſphæricæ portio quadrabilis III. 212
In *Superficie ſphærica* curvam deſcribere rectificabilem III. 211
Superficierum conoidicarum & ſphæroidicarum complanatio I. 160. 174
Superficies conoidea cycloidis habens centrum gravitatis algebraice determinabile I. 333
Surface courbe, *Problême de la ligne la plus courte qu'on puiſſe y décrire* I. 204
Surface Sphérique, *Problême des courbes algébriques rectifiables à décrire ſur cette ſurface* III. 230 ſ.
Syllogiſmorum reductio I. 83
Sympathica Pendula IV. 310
Synchrona curva I. 187. 192
—— eſt trajectoria orthogonalis cycloidum omnium ejuſdem initii I. 193. II. 279. 314
Synchrone, *& ſon uſage* I. 197. 203. 211. 218
Syſtême *de* COPERNIC, *véritable* III. 136
Syſtêmes *de* DESCARTES *& de* NEWTON *comparez* III. 136. 137. 264
—— *conciliez* III. 270
V. DESCARTES. NEWTON.

T

TAble *pour la manœuvre des Vaiſſeaux* II. 62
—— *ſa conſtruction* II. 68
Tabula problematum iſoperimetricorum II. 214
Tabulis ſinuum & condendis utile theorema II. 526
Taches du Soleil, *leur formation* III. 283
Tangens arcus æqualis ſummæ vel differentiæ plurium arcuum II. 527 ſ.
— arcus multipli vel ſubmultipli I. 512. II. 532

Tangens ex arcu per ſeriem exhibita II. 533. IV. 24
Tangentium methodi directæ Problema I. 138
— — methodus inverſa III. 413 ſ.
— tabulis condendis utile theorema II. 526
Tautochrona curva cyclois I. 52. 247. ſ. III. 488
— — *eadem quæ brachyſtochrona in hypotheſi Galilæi* I. 189. 192
Tautochrone *dans un milieu réſiſtant* III. 173. ſ.
— — — — — *ſa conſtruction* III. 180
Tautochroniſme *de la Cycloide, démonſtration erronée de Mr.* DE LA HIRE I. 240
TAYLOR, ſa ſolution du Probléme des Iſopérimetres II. 237. 473
TAYLORI Apologia II. 478. ſ.
— — ad eam reſponſio II. 483. ſ.
— objectiones adverſus ſolutionem Bernoullianam Problematis iſoperimetrici II. 473. 475
— — ad eas reſponſio II. 505
— obſcuritas in ſcribendo II. 494
— problema analyticum ſolutum II. 402
— ſolutio problematis trajectoriarum orthogonalium II. 281. 293. 424
TAYLORUS, an inventor novæ theoriæ centri oſcillationum II. 474. 476. 480. 492. 516. 517.
— an plagii reus II. 480. 485. 489. 519.
Tempeſtatis ratio habenda eſt in conſtructione barometri luminoſi II. 361
Tempora deſcenſus gravis ad centrum IV. 243
Temporis ratio, qualis habenda ſit in æſtimatione virium III. 243
Tempus ab initio effluxus ad velocitatem æquabilem fluidi breviſſimum IV. 456. ſ.
— aſcenſus & deſcenſus corporis in altum projecti, in medio uniformiter denſo IV. 362. 364. 372. 374
Tenſio Fili actione fluidi dilatati I. 106
— funiculi corpus rotando deſcendens ſuſtinentis III. 128
— — cujus ope corpus deſcendens aliud aſcendens poſt ſe trahit III. 259
Termini impares omnes ad pares omnes, quam rationem habeant in ſeriebus reciprocis potentiarum IV 11. 12.
Terminus infiniteſimus ſeriei fractionum, quarum numeratores & denominatores ſunt in progreſſione arithmetica IV. 5
— — alterius ſeriei IV. 15
— maximus binomii ad datam poteſtatem elevati IV. 25
Terræ motibus obnoxiæ regiones IV. 515
Terræ motus Carolo-Heſychii facti IV. 502. ſ.

Terræ motuum cauſæ IV. 515. ſ.
Terre *ſa figure* IV. 345
Teſſeræ quot jactibus quis ſuſcipere poſſit, datum datarum facierum numerum jacere IV. 30
Teſſerarum luſus IV. 31
V. Dez.
Teſtudo hemiſphærica quadrabilis III. 211. I. 160
Tetragoniſmus univerſalis per approximationem geometricam I. 162
— — per ſeriem appropinquantem I. 125
V. *Series*.
TEXTORIS ad BERNOULLIUM Epiſtolæ IV. 502. 522
Theorema Coteſianum IV. 67
— de Polygono regulari Circulo inſcripto IV. 71
— Dioptricum SUELLII I. 370
— hydraulicum de velocitate fluidi e vaſe effluentis IV. 401. 459
— inſigne, pro reducendo perimetro Ellipſeos ad peripheriam circuli I. 447
— Moivreanum pro elevando infinitinomio ad poteſtatem indefinitam IV. 157. 173
— — pro lege virium centralium determinanda I. 551
— Newtonianum de quiete vel motu uniformi centri gravitatis IV. 340
— — pro determinanda ſumma radicum æquationis, & Potentiarum earum IV. 22
— rectificationi curvarum inſerviens I. 249
— utile condendis Tabulis ſinuum Tangentium &c. II. 526
Theoremata analytica de reductione integralium II. 417
— — — — — demonſtrata II. 419. IV. 52
— Moivreana pro comparatione curvarum non ſatis univerſalia IV. 153
— pro conſervatione virium vivarum demonſtranda & experimentis confirmanda III. 124
Theorème *pour le calcul des forces centrales* IV. 477
Théorie *de la manœuvre des Vaiſſeaux* II. 1
Titubantium corporum oſcillationes IV. 296
Torrent central *dans le Tourbillon, ce que c'eſt & ſon origine* III. 293
— — *cauſe de la peſanteur* III. 298 300
— — — *du mouvement diurne des Planétes* III. 317
TORICELLII & ROBERVALLII de cycloide contentiones I. 323
Tourbillons céleſtes *defendus contre les objections de* NEWTON III. 143
— — *les Planétes n'en ſuivent pas exactement le cours* III. 282
— — *leur formation & leur nature* III. 278
— — *leur équateur coincide avec celui de l'aſtre central* III. 332

Tourbillons céleſtes *leur figure eſt Sphérique* III. 158
— — *leur mouvement produit par celui de l'Aſtre central* III. 333
— — *ſont compoſés de deux matiéres avec deux mouvemens principaux* III. 273
— *terminez par une eſpéce de Voile d'un tiſſu rare & poreux* III. 292
Tourbillons de DES CARTES III. 139. ſ. 264. ſ.
— — — *leurs inconvéniens* III. 267
Tractionis motus in Geometriam introductus a LEIBNITIO I. 415
Tractoire d'HUGUENS *eſt une Tautochrone dans un milieu réſiſtant* III. 180
Tractoria Hugeniana IV. 381
— — per ſe rectificabilis I. 66
Trajectoire *décrite par un corps attiré par une force centrale* I. 474
Trajectoria in medio reſiſtente deſcripta a corpore gravi I. 481 ſ.
Trajectoria orthogonalis circulorum II. 285
— — curvæ circa datum punctum in orbem converſæ I. 261. 271
— — curvarum motu angulari ex principali quadam genitarum II. 467
— — — motu parallelo latarum II. 308
— — — quæ ad brachyſtochronas reduci poſſunt II. 467. 469
— — — ſimilium II. 444. 451. 456. 462
— — cycloidum ejuſdem initii I. 193. II. 279. 313
— — ellipſium ejuſdem centri & verticis II. 272. 311
— — hyperbolarum ejuſdem centri & verticis II. 270. 276. 311
— — logarithmicarum per idem punctum ductarum I. 193. 260 ſ. 269. II. 277. 310
— — parabolarum I. 260. 261. 267. 270. 396. II. 309. 310. 312
Trajectoriarum orthogonalium Problematis hiſtoria II. 286
— — — propoſitio I. 193. 259. 266. II. 270
— — — ſolutiones Bernoullianæ I. 267. 269. II. 290. 291. 436 ſ.
— — — ſolutio Jac. BERNOULLI I. 259 ſ.
— — — — Nic. BERNOULLI II. 295. 305
— — — — HERMANNI II. 275. 279. 296. 297. 306. 427
— — — — NEWTONI II. 273. 275. 293
— — — — TAYLORI II. 281. 293. 424
Trajectoriarum reciprocarum Problema propoſitum II. 472
— — — ſolutum II. 520. 535 ſ. 557. ſ.
— — ſimpliciſſima II. 552. 566. 575 ſ. 593 ſ.
— — — poſt primam II. 613
Tranſcendentes quadraturæ II. 591
Transformatio æquationis differentialis incompletæ in completam II. 442
— curvarum in alias æquales I. 152. 402. 409. 449. 451
— differentialium conſtantium in alias conſtantes IV. 77 ſ.
— hyperbolarum in alias curvas algebraicas IV. 93

Trans-

Transformatio lineæ circularis in algebraicam curvam I. 423
—— parabolarum in alias curvas algebraicas IV. 92
Transformation *des courbes algébriques en d'autres égales, Problème proposé* I. 406
—— *des differentielles* I. 399
Translatio preſſionis fluidorum ad ſupremam eorum ſuperficiem, quomodo concipienda IV. 395
Treize (*Problème ſur le jeu du*) I. 460
Triangle arithmétique *de* PASCAL *ibid.*
Trianguli rectanguli, cujus lateribus applicata ſunt tria corpora, unumque impellitur, motus III. 332
—— —— juxta cujus hypothenuſam rectam, vel curvam, grave deſcendit, motus III. 365. IV. 337. 341
Triangulorum proprietas IV. 33
Trinomialis quantitas, quibus in caſibus integrari poſſit, terminis finitis IV. 130
Trochoidis ſociæ proprietates I. 334
—— —— figura ea eſt quam oſcillando chorda muſica induit III. 210
TSCHIRNHAUSEN (*De*) *a cru que pluſieurs courbes ſont propres à réſoudre le Problème de la plus vite deſcente* I. 197
TSCHIRNHAUSIUS cauſticarum inventor III. 464
—— ejus de dimenſione curvarum inventa I. 149
—— ejus errores I. 52. 151. 171. 173. III. 406 ſ. 410. 464. 468
Tuba hyperbolica, liquoris in illa motus IV. 463
Tubi inflexi, vel recurvi, fluidorum in illis oſcillationes III. 125. IV. 474
Tubo circulanti incluſum corpus, qualem curvam deſcribat IV. 248
Tubus barometri amplior luci magis favet quam gracilior II. 329. 343. 349
—— —— inæqualis melior cylindrico II. 329. 349.
—— —— ſordidus nocet lumini II. 343
Tubus conicus, liquoris per illum fluentis velocitas & preſſio IV. 416. 455
Tubus partim immerſus, liquoris in illo motus IV. 419. 488
Tuiaux, *les plus larges ſont les meilleurs pour faire des barometres lumineux* I. 351
Turbinari, quid II. 190
—— in latus, in planum II. 191
Turbinationis centrum I. 187. 191. 195

V

Vacuum datur I. 87
Vaiſſeau, *où l'on doit y planter le mât* II. 71
—— *quelle impulſion il reçoit du vent* II. 103 ſ.

— *qui a la figure d'un rectangle.* II. 15 f.
— — — — — *d'un rhombe ou losange.* II. 41. 45. 51
— *qui a une figure terminée par deux arcs de cercles égaux.* II. 55. 58 f.
— *sa route & sa viteſſe.* II. 113. 133. 146. 155
— — — — — — — *quand il eſt pouſſé par deux vents.* II. 108. 133. 137 146. 155
Valor fractionis, cujus numerator & denominator, certo caſu evaneſcunt. I. 401
VARIGNONII Propoſitio mechanica. I. 106
Vas nihil novi liquoris accipiens, fluxus liquoris ex eo erumpentis. IV. 405 414. 475
— plenum ſemper remanens. IV. 401. 403. 410. 452
— qua vi retrourgeatur dum liquor ex eo erumpit. IV. 484. 488
Vectis communicando motui quomodo inſerviat. IV. 262
— viribus motricibus impulſi motus. IV. 256
Velaria curva. III. 510
— — eadem cum catenaria. III. 512
Velariarum & catenariarum inveniendarum methodus. I. 107 f.
Velocitas æquabilis liquoris e vaſe effluentis. II. 208 f. III. 124. IV. 401 404. 411. 437. 447. 452. 462
— — breviſſimo tempore acquiritur. IV. 456
— globi in medio uniformiter denſo quantum retardetur. IV. 357. 369
— gravis cycloidem deſcribentis in medio reſiſtente. IV. 44. 374
— — deſcendentis & aliud aſcendens poſt ſe trahentis. III. 125. 237. 256
— — deſcendentis rotando. III. 127
— — in medio reſiſtente aſcendentis & deſcendentis. IV. 361 f. 371 f.
— — — — — — datam curvam deſcribentis. I. 481 f. 531 f. 537 f. 543 f. IV. 348 f.
— liquoris fluentis in diverſis tubis. IV. 398
— — — — in tuba hyperbolica. IV. 465. 470
— — — — per canalem ſeu tubum cylindricum. IV. 401 f.
— — — — per canalem figuræ cujuslibet. IV. 437 f. 447
— — — — per plures tubos. IV. 397. 410. 427
— — — — per tubos ad horizontem obliquos. IV. 418
— — — — per tubum conoidicum. IV. 416. 430. 455
— projectilium. I. 531. 537. 543
Velocitates corporum viribus uniformibus agitatorum ſunt in ratione ſubduplicata virium & ſpatiorum. I. 517
Venarum capillarium & arteriolarum anaſtomoſis. I. 281
Venæ aqueæ contractio, quando. IV. 448
Vent, *ſa viteſſe ſuppoſée finie ou infinie par rapport à celle du Vaiſſeau.* II. 89 103. 242
— *ſon impreſſion ſur la voile.* II. 83. 103

— — — — — — — *égale à la réſiſtance de l'eau au mouvement du Vaiſſeau.* II. 105
— — — — — — — *ſon axe d'équilibre.* II. 84
Venus, *ſon mouvement diurne calculé.* III. 322
Verre *frotté lumineux.* I. 435 ſ.
Vertex turbinationis. II. 190
Vertu élaſtique. V. Reſſort.
Veſicula bubula inflata magna pondera elevantur. I. 111
Veſiculæ aëre plenæ in interſtitiis muſculorum conſpiciendæ. I. 103
— muſcularis inflatæ figura circularis. I. 106. 113
Veterum facultates chimericæ videntur. I. 276
Via radiorum lucis reflexorum vel refractorum compendioſiſſima. I. 88 189. 375
— conoidis & globi in medio reſiſtente, priuſquam amittat datam velocitatis ſuæ partem. IV. 357. 369 ſ.
Vibrationes. V. *Oſcillationes.*
Vif argent. V. Mercure.
VILLEMOT, *n'explique pas bien le mouvement diurne des planètes.* III. 314
— — — — la peſanteur. III. 300
Vires centrales quomodo inveniendæ. I. 530. 551
— duæ in ſe invicem libere agentes ſponte ad æquilibrium ſeſe componunt. I. 372
— gravitatis in diverſis Terræ locis ope pendulorum explorantur. I. 519
— motrices ad vectem applicatæ. IV. 256
— — ſunt in ratione maſſarum & virium acceleratricium. IV. 393
— vivæ ſunt ut quadrata velocitatum. I. 321. III. 124. 248. ſ. 371. ſ. IV. 264. 459. 463. 490
— uniformes ſunt ut ſpatia eodem tempore emenſa. I. 517
Virium compoſitio & reſolutio demonſtrata. IV. 253
— muſcularium ſupputatio. I. 109 ſ.
— quantitas non mutatur in univerſo. III. 254
— vivarum æſtimatio. III. 245
— — conſervatio & menſura. I. 321. III. 124. 240. 248. 371. 374. 375. IV. 264. 459. 463. 490.
— — theoria NEWTONO non perſpecta. III. 253
— — vera notio. III. 239 ſ.
Virtus agitativa. II. 173
Vis acceleratrix. IV. 393
— ad formandum gurgitem requiſita. IV. 400
— aëris, quos edat effectus. I. 34

Vis corporis quomodo possit in aliud tota transferri. IV. 263
— elastica corporum, unde. I. 25
— fermentationis, quanta. I. 33
— firmitatis requisita ne filum actione fluidi dilatatum rumpatur. I. 107
— — resistens inclinationi corporum aquæ insidentium. IV. 295
— gravitatis normalis & tangentialis. I. 530
— hydrostatica. IV. 436
— hydraulica. *ibid.*
— immaterialis. IV. 252. 333. 394. 442
— — aliter agit in corpora solida, aliter in fluida. IV. 443
— — eodem modo agit in corpus motum ac in quiescens. IV. 394
— mortua. III. 240
— — est quid relativum. III. 241
— — quid differat a viva. *ibid.*
— motrix. IV. 393
— — est in ratione composita massarum & virium acceleratricium. *ibid.*
— — ejus intensitas. IV. 394
— percussionis infinite major vi ponderis. I. 89
— pulveris pyrii unde. I. 33. IV. 516
— resistentiæ fluidorum. IV. 446
— viva, agendi facultas. III. 239
— — a mortua quid differat. III. 241
— — conservatur semper. III. 124. 240. 248. 371 f. IV. 459. 463. 490
— — corporis ex gravitate descendentis. III. 251
— — est quid reale & substantiale. III. 240
Viteſſe, *comment elle diminue par la réſiſtance d'un milieu.* III. 4. 7 f. 74
— *des Planétes primitivement imprimée.* III. 307
— *du mouvement diurne calculée.* III. 321
— — — — *d'où elle dépend.* III. 329
— *d'un corps jetté en haut dans un milieu réſiſtant.* III. 77
— — — *qui décrit une tautochrone dans un milieu réſiſtant.* III. 184
— *d'un pendule compoſé dans un milieu réſiſtant.* IV. 382
— *d'un Vaiſſeau de figure curviligne.* II. 59
— — — *de figure rectangulaire.* II. 20
— — — — — — *ſa courbe déterminatrice.* II. 23. 31
— — — *de figure rhomboique.* II. 45. 51
— — — *pouſſé par deux voiles.* II. 108 f. 133. 137. 146. 155
— — — *retenu par une corde infinie.* II. 122. 142
— *du Tourbillon autour du Soleil.* III. 304 f.
— — — *deux cent fois plus petite que celle des Planétes.* III. 306
— *virtuelle, ce que c'eſt.* III. 23

Vivens de ſua ſubſtantia indeſinenter amittit. I. 276
VIVIANI (*Vinc*). Ænigma florentinum Geometris propoſuit. III. 211
Unda luminis, ſynchrona. I. 193
Univerſalis tetragoniſmus. I. 125. 162
Univerſalitas methodi non temere affirmanda. IV. 139
Voile, *ſa courbure.* I. 59. II. 81. 94
——— — *la même que celle d'une chainette.* I. 60. II. 81
— *ſa ſituation la plus avantageuſe pour gagner au vent, ou le fuir.* II. 26. 32

V. Vent.

Vuide du barometre, *n'a pas beſoin d'être parfait pour qu'il ſoit lumineux.* I. 369

W

WALLIS *a écrit ſur le mouvement.* III. 3
WALLISII calculus virium requiſitarum ad pondus elevandum per inflationem veſicæ. I. 111
— de Cycloïde inventa. I. 323
— ſolutio Ænigmatis florentini. III. 212
WEIDLERI explicatio phoſphori mercurialis. II. 386
WREN *a écrit ſur le mouvement.* III. 3
WRENNUS Cycloidis ſegmentum quadravit. I. 324

Z

Zodiacale lumen. I. 89
Zodiacale (*Lumiere*) III. 281
Zodiaque, *pourquoi les orbites des Planètes y ſont renfermées.* III. 309
Zonæ cycloidales quadrabiles. I. 327. 328. 330 ſ. 336. 389

FINIS.

СХЕ 192