Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum ex primis nostrae cognitionis principiis stabilita et ad omnes motus, qui in huiusmodi corpora cadere possunt, accommodata

Euler, Leonhard

Gryphiswaldiae, MDCCXC [1790]

Persistent Link: https://doi.org/10.3931/e-rara-34868

Caput VII.

CAPUT VII.

DE MOTU OSCILLATORIO CORPORUM GRAVIUM.

PROBLEMA 44.

522. Si corpus rigidum fuerit mobile circa axem horizontalem fixum, ejusque motus a sola gravitate turbetur, determinare mutationem momentaneam in motu gyratorio productam.

SOLUTIO.

Tab. IX. Fig. 67. Communem hic gravitatis hypothesin assumo, qua singula corporis elementa massis proportionaliter deorsum urgentur secundum directiones inter se parallelas. Quatenus ergo corpus est rigidum, his omnibus viribus aequivalet una vis ponderi corporis aequalis, cujus directio deorsum tendens per ejus centrum inertiae transit. Quare si corporis massa dicatur $= M$, ejusque centrum inertiae sit in I, indeque deorsum ducatur recta verticalis IG, ob gravitatem corpus sollicitabitur in directione IG a vi, quae ipsa massae M aequalis est statuenda, quandoquidem ipsam massam M per pondus hujus corporis exprimimus. Porro cum axis gyrationis sit horizontalis, ad eum normaliter constituatur planum per centrum inertiae I transiens, quod erit verticale, et ipso plano tabulae referatur: axis igitur gyrationis ad hoc planum normalis per punctum O trajectus concipiatur, unde ad I ducta recta OI exhibet distantiam centri inertiae I ab axe gyrationis. His praemissis teneat nunc corpus AEBF situm in figura repraesentatum, ductaque verticali OC, ex angulo COI situs corporis innotescit. Ponatur intervallum $OI = f$, et ad tempus $= t$ angulus $COI = \phi$, erit vis $IG = M$ momentum respectu axis gyrationis $= Mf \sin\phi$, tendens ad angulum COI minuendum, quae in probl. 22. loco momenti Vf est substituenda. Praeterea vero necesse est nosse momentum inertiae corporis respectu axis gyrationis O, ibi per $\int rr dM$ indicatum: hunc in finem concipiatur axis per ipsum centrum inertiae I transiens axi gyrationis parallelus, cujus respectu sit momentum inertiae corporis $= Mkk$, eritque ejusdem momentum inertiae respectu axis gyrationis $O = M(ff + kk)$ ob intervallum horum axium $OI = f$. Hinc

si

si corpus ita gyretur, ut recta OI accedat ad verticalem OC, fueritque celeritas angularis $= \varepsilon$, quia ea a vi sollicitante augetur, per §. 408. erit $d\varepsilon = \frac{2g \cdot Mf \sin\phi}{M(ff + kk)} dt$ seu $d\varepsilon = \frac{2fgdt \sin\phi}{ff + kk}$; sin autem recta OI recederet a verticali OI celeritate angulari $= \varepsilon$, foret $d\varepsilon = \frac{-2fgdt \sin\phi}{ff + kk}$. Cum autem illo casu sit $\varepsilon = \frac{-d\phi}{dt}$, hoc vero $\varepsilon = \frac{d\phi}{dt}$, sumto dt constante pro utroque erit $dd\phi = \frac{-2fgdt^2 \sin\phi}{ff + kk}$, ubi signum $-$ adest, quia momentum vis sollicitantis tendit ad angulum ϕ minuendum.

COROLL. 1.

523. Si corpus in situ AEBF nullum adhuc habeat motum, a gravitate ita rectam verticalem OC versus urgebitur, ut tempusculo dt eo sit accessurum per angulum $= \frac{fgdt^2 \sin\phi}{ff + kk}$, qui est infinite parvus secundi ordinis.

COROLL. 2.

524. Si ergo corpus fuerit in quiete, in quiete persistere nequit nisi sit $\sin\phi = 0$, hoc est nisi centrum inertiae I in recta verticali OC versetur. Quare si corpus quodcunque hoc modo suspendatur, in quiete esse nequit, nisi recta OI sit verticalis, quod fit si centrum inertiae locum vel imum vel summum obtineat.

COROLL. 3.

525. Quoties autem recta OI fuerit obliqua, corpus ob gravitatem ad motum sollicitabitur, ac si jam habuerit motum, ejus motus perturbabitur, vel accelerando vel retardando, prout motus vel ad OC accedat vel ab eo recedat.

COROLL. 4.

526. Patet etiam, si axis per ipsum centrum inertiae I transeat, ut sit $OI = f = 0$, momentum gravitatis evanescere, motumque gyratorium propterea plane non turbari. Hoc ergo casu corpus vel quiescet, vel uniformiter circa axem O gyrabitur.

SCHOLION.

527. Hic ſtatim notari convenit, corpus non perinde moveri, ac ſi tota ejus maſſa in ipſius centro inertiae I eſſet collecta, quemadmodum in motu progreſſivo uſu venire vidimus. Si enim hic tota corporis maſſa M revera in centro inertiae I eſſet collecta, ejus momentum inertiae reſpectu axis per I ducti evaneſceret, foretque $kk = 0$; motusque ergo ita perturbaretur, ut eſſet $dd\varphi = \frac{-2gdt^2 \sin\varphi}{f}$, quae formula major eſt quam caſu propoſito. Unde intelligitur, motum corporis extenſi, quale hic contemplamur, minus a gravitate perturbari, quam ſi tota corporis maſſa in centro inertiae eſſet collecta. Verum infra videbimus, dari in recta OI aliud punctum magis ab axe O remotum, in quo ſi tota corporis maſſa eſſet collecta, motus eandem perturbationem eſſet paſſurus, quod punctum in motu gyratorio imprimis notari meretur, quoniam eſt id ipſum quod vulgo *centrum oſcillationis* appellari ſolet, et de cujus inventione plurima paſſim occurrunt praecepta.

PROBLEMA. 45.

Fig. 67. 528. Si corpus rigidum AEBF fuerit mobile circa axem horizontalem, ejusque detur ſitus et celeritas initio motus, ad tempus quodvis invenire ejus ſitum et celeritatem.

SOLUTIO.

Manentibus omnibus uti in praecedente problemate, ſcilicet maſſa corporis $= M$, diſtantia centri inertiae I ab axe gyrationis O ſcilicet $OI = f$, et momento inertiae reſpectu axis ipſi axi gyrationis paralleli et per I tranſeuntis $= Mkk$; teneat corpus elapſo tempore $= t$ ſitum in ſigura repraeſentatum, ſitque angulus $COI = \varphi$, exiſtente CO recta verticali, atque ſumto elemento dt conſtante pervenimus ad hanc aequationem $dd\varphi = \frac{-2fgdt^2 \sin\varphi}{ff+kk}$, quae per $2d\varphi$ multiplicata et integrata praebet

$$d\varphi^2 = \alpha dt^2 + \frac{4fgdt^2 \cos\varphi}{ff+kk}$$

unde cognoſcitur quadratum celeritatis $\varepsilon\varepsilon = \alpha + \frac{4fg \cos\varphi}{ff+kk}$. Deinde

poſito

posito brevitatis gratia $\frac{4fg}{ff+kk} = \lambda$, ob $d\phi^2 = dt^2(\alpha + \lambda \cos\phi)$ reperitur $dt = \frac{d\phi}{\sqrt{(\alpha + \lambda \cos\phi)}}$ et $t = \int \frac{d\phi}{\sqrt{(\alpha + \lambda \cos\phi)}}$: ubi constans α et ultera in ultima integratione ingressa ex statu initiali dato debent definiri.

COROLL. 1.

529. Evanescente angulo $COI = \phi$, sit celeritas angularis $\varepsilon = \sqrt{\left(\alpha + \frac{4fg}{ff+kk}\right)}$ omnium maxima, in aequalibus autem elongationibus rectae OI a verticali OC celeritates sunt aequales: et nisi constans α sit minor, quam $\frac{4fg}{ff+kk}$, corpus integras revolutiones circa axem absolvet: quoniam tum pro angulo $\phi = 180°$ celeritas angularis adhuc est realis.

COROLL 2.

530. Sin autem fuerit $\alpha < \frac{4fg}{ff+gg}$, angulus $COI = \phi$ non ultra certum limitem crescere potest, corpusque cum eo pertigerit rursus descendet, motumque oscillatorium peraget: ac ducta IK horizontali ob $OK = f\cos\phi$, angulo elongationis COI respondebit celeritas angularis $\varepsilon = \sqrt{\left(\alpha + \frac{4g \,.\, OK}{ff+kk}\right)}$

SCHOLION.

531. Sive corpus integras revolutiones absolvat, sive oscillando eat redeatque, determinatio motus eundem calculum postulat, atque motus penduli simplicis, quo corpusculum infinite parvum filo inertiae experti alligatum circa axem horizontalem gyratur. Quem motum cum jam supra exposuerimus, superfluum foret, eosdem calculos hic repetere: sufficiet igitur, pro quovis casu pendulum simplex assignasse, quod pari motu angulari feratur. Atque hic quidem tantum longitudo hujus penduli simplicis in computum venit, cùm motus ejus solum ab ejus longitudine pendeat; siquidem initio utrique eundem motum angularem tribuimus.

DEFINITIO. 9.

532. Pro motu gyratorio vel oscillatorio corporis cujusvis gravis circa axem horizontalem, *pendulum simplex isochronum* vocatur, quod cum

cum femel in pari a recta verticali elongatione parem celeritatem angularem acceperit, deinceps continuo fimili motu angulari feratur.

EXPLICATIO.

Fig. 67. 533. Si corpus ponatur quodcunque AEBF, quod a fola gravitate follicitatum circa axem horizontalem O gyretur, primo ejus centrum inertiae I fpectandum eft, quod fi in recta verticali OC verfetur, corporis fitum naturalem, in quo acquiefcat, indicat: angulus autem COI *elongatio a fitu naturali* vocatur. Quodfi jam huic corpori in data elongatione datus motus angularis fuerit impreffus, pendulum fimplex ifochronum ita debet effe comparatum, ut fi ei in pari elongatione aequalis motus angularis imprimatur, deinceps hujus motus perpetuo fit refponfurus motui corporis propofiti. Vel quia totum negotium a longitudine hujus penduli fimplicis pendet, fi id fuerit OS atque ex communi axe O fupenfum concipiatur, motu fuo perpetuo motum corporis AEBF comitabitur, dummodo femel aequalem motum gyratorium acceperit. Perinde quidem eft, five hoc pendulum fimplex eidem axi applicatum concipiatur, five fecus: fed quoniam utrinque elongationes a fitu verticali OC perpetuo eaedem effe debent, corporisque elongatio ex fitu rectae OI eft aeftimanda, pendulum fimplex commodiffime in puncto O fufpenfum confideratur, ut ejus fitus OS perpetuo in rectam OI incidat, totaque quaeftio ad determinationem puncti S revocetur.

COROLL. 1.

534. Invento hoc puncto S in recta OI producta, corpus perinde movebitur, ac fi tota ejus maffa in ipfo hoc puncto S effet collecta: tum enim ob extenfionem evanefcentem habetur pendulum fimplex longitudinis OS.

COROLL. 2.

535. Hoc ergo punctum S quaeri debet in recta, quae per centrum inertiae corporis ad axem gyrationis normaliter ducitur, etiamfi hic non fit neceffarium, et pendulum fimplex OS ex eodem axis puncto O fufpenfum ftatuatur.

SCHOLION.

536. Cum iftud pendulum fimili motu latum ob maffae evanefcentiam *fimplex* vocetur ad hunc modum corpora quaevis extenfa circa axem fixum mobilia vocari folent *pendula compofita*; ita ut quaeftio

huc

huc reducatur, ut propoſito quocunque pendulo compoſito, quod ſcilicet ſit corpus rigidum, aſſignetur pendulum ſimplex iſochronum, quam quaeſtionem nunc quidem facillime reſolvere poterimus. Ceterum monendum eſt, filum, quo pendulum ſimplex axi alligatum intelligimus, non ſolum inertiae expers ſtatui, ſed etiam rigidum concipi oportere, ne ulla inflexio calculum turbare queat.

PROBLEMA 46.

537. Propoſito corpore quocunque rigido et gravi AEBF circa axem horizontalem fixum O mobili, definire pendulum ſimplex iſochronum OS.

SOLUTIO.

Poſita maſſa totius corporis $= M$ ejusque centro inertiae in I, hinc ad axem ducatur recta normalis $IO = f$, quae jam a verticali OC diſtet angulo $COI = \varphi$: tum vero ſit Mkk momentum inertiae corporis reſpectu axis per I ducti et axi gyrationis paralleli. His poſitis, quicunque motus corpori initio fuerit impreſſus, elapſo tempore $= t$, motus variatio hac formula exprimitur: $dd\varphi = \frac{-2fgdt^2 \sin\varphi}{ff+kk}$. Ponatur nunc penduli ſimplicis iſochroni longitudo $OS = l$, quod cum eodem angulo COS $= \varphi$ a ſitu verticali diſtet, ejus motus hanc variationem patietur, ut ſit $dd\varphi = \frac{-2gdt^2 \sin\varphi}{l}$, quae quidem formula ex praecedente fluit, ponendo $k = 0$ et $f = l$. Quare cum eadem variatio utrin que evenire debeat, obtinemus $l = \frac{ff+kk}{f}$ ſeu $l = f + \frac{kk}{f}$. Fig. 67.

COROLL. 1.

538. Longitudo ergo penduli ſimplicis iſochroni OS ſuperat diſtantiam centri inertiae I ab axe gyrationis O, eſtque intervallum $IS = \frac{kk}{f}$. Cognita vero longitudine $OS = l$, erit $kk = f(l-f) = OI \,.\, IS$, ita ut pro eodem corpore rectangulum $OI \,.\, IS$ ſit conſtans.

COROLL. 2.

539. Si pro eodem corpore diſtantia $OI = f$ varietur, patet, tam caſu $f = 0$, quam $f = \infty$, pendulum ſimplex iſochronum l evadere infinitum; breviſſimum autem erit, ſi capiatur $f = k$, quo caſu fit $l = 2k$; praeterea ſemper eſt $l > 2k$.

COROLL. 3.

540. Invento pendulo ſimplici iſochrono l, quoniam oſcillationes minimae corporis perinde atque iſtius penduli ſunt iſochronae; tempus cujusque oſcillationis erit $= \frac{\pi\sqrt{l}}{\sqrt{2g}}$ min. ſec. (215). Hinc ſi prodeat $l = \frac{2g}{\pi\pi}$, ſingulae oſcillationes minimae corporis abſolventur minutis ſecundis.

SCHOLION.

541. Hinc colligitur methodus facilis cujusque corporis momentum inertiae practice definiendi. Suſpenſo enim corpore ex axe horizontali, circa quem liberrime gyrari queat, omni cura primo definiatur diſtantia centri inertiae I ab axe gyrationis O, nempe $OI = f$, quod etiam practice fieri poteſt: deinde corpus ad minimas oſcillationes peragendas incitetur, pluribusque dato tempore numeratis, inde colligatur tempus unius oſcillationis, quod ſit $= \tau$ min. ſec. hincque habebitur $l = \frac{2g\tau\tau}{\pi\pi}$: quo invento erit $kk = f(l - f)$, et pondus corporis M per kk multiplicatum dabit momentum inertiae, reſpectu axis per ejus centrum inertiae tranſeuntis et axi gyrationis paralleli. Poteſt etiam hoc experimentum multiplicari, dum corpus ſucceſſive ex variis axibus, qui tamen ſint inter ſe paralleli, ſuſpenditur, quo certiores de vero valore kk reddamur. Quin etiam hinc viciſſim longitudo penduli ſimplicis ſingulis minutis ſecundis oſcillantis explorari poteſt, quandoquidem neque pendulis ſimplicibus uti licet, neque altitudo lapſus g uno minuto ſecundo abſoluta ſatis accurate per experimenta lapſus determinari poteſt. Hinc autem pro corpore ſuſpenſo quantitates f et kk accurate noſſe oportet, unde colligitur $l = f + \frac{kk}{f}$: tum ſi tempus unius oſcillationis minimae τ ſit obſervatum, habebitur $g = \frac{\pi\pi l}{2\tau\tau}$, hincque longitudo penduli ſimplicis ſingulis minutis ſecundis oſcillantis $\frac{2g}{\pi\pi} = \frac{l}{\tau\tau}$.

DEFINITIO. 10.

542. Centrum oſcillationis in pendulo compoſito eſt punctum, in quo ſi tota corporis maſſa eſſet collecta, idem motus oſcillatorius eſſet prodi-

prodituros. Sumitur autem in recta, quae per centrum inertiae corporis transiens ad axem gyrationis est normalis.

COROLL. 1.

543. Distantia ergo centri oscillationis ab axe gyrationis aequalis est longitudini penduli simplicis isochroni: ac semper ab axe gyrationis O magis distat, quam centrum inertiae, intervallo IS $= \frac{kk}{f}$.

COROLL. 2.

544. Ad centrum igitur oscillationis S inveniendum nosse oportet momentum inertiae corporis respectu axis per ejus centrum inertiae I transeuntis et axi gyrationis paralleli, quod si fuerit $= Mkk$, dividi debet per Mf, hoc est per productum ex massa corporis M in distantiam axis gyrationis a centro inertiae OI $= f$, et quotus $\frac{Mkk}{Mf}$ ostendet distantiam centri oscillationis a centro inertiae.

SCHOLION.

545. Hoc modo investigatio motus pendulorum compositorum ad centri oscillationis investigationem perduci solet, etsi ad hoc sufficit, longitudinem penduli simplicis isochroni nosse, neque ulla ratio urget, ut hoc pendulum eidem axi suspensionis, et quidem secundum rectam per centrum inertiae ad axem suspensionis normaliter ductam applicatum concipiatur. Verum hic modus rem concipiendi est commodissimus, et si corpus in situ quietis pendeat, ut recta per centrum inertiae ad axem normaliter ducta simul sit verticalis, centrum oscillationis in eadem recta profundius quam centrum inertiae erit situm; neque enim hic opus est, ut corpus tanquam in motu spectetur. Ita recta OI in verticalem OC incidens consideratur, in qua erit centrum oscillationis S profundius situm centro inertiae I, quod hic revera nomen *centri gravitatis* obtinet, ita ut sit intervallum IS $= \frac{Mkk}{Mf} = \frac{kk}{f}$. Quare calculus centri oscillationis facillime expeditur calculo, quem supra pro momento inertiae inveniendo tradidimus.

EXEMPLUM.

546. Experimenta ante memorata globo ex materia homogenea confecto institui solent, qui ope fili OB suspensus ad minimas oscillationes Fig. 68.

 inci-

incitatur, ubi quidem filum tam tenue eſt ſumendum, ut ejus maſſa prae globo pro nihilo haberi liceat. Sit igitur radius globi BI $= b$, et diſtantia puncti ſuſpenſionis O a centro globi I, quod ſimul ejus eſt centrum inertiae vel gravitatis, nempe OI $= f$, erit ut ſupra invenimus $kk = \frac{2}{5}bb$. Quare centrum oſcillationis erit in S, ut ſit IS $= \frac{2bb}{5f}$, ſeu oſcillationes convenient cum oſcillationibus penduli ſimplicis, cujus longitudo eſt $= f + \frac{2bb}{5f}$. Ut ergo hoc pendulum ſingulis minutis ſecundis oſcilletur, neceſſe eſt ſit $f + \frac{2bb}{5f} = \frac{2g}{\pi\pi}$ ſeu $ff = \frac{2gf}{\pi\pi} - \frac{2}{5}bb$, unde $f = \frac{g}{\pi\pi} \pm \surd\left(\frac{gg}{\pi^4} - \frac{2}{5}bb\right)$, ita ut pro f duplex habeatur valor, qui ſimul ſumti dent $\frac{2g}{\pi\pi}$. Hi ambo valores fient aequales, ſi globus tantus accipiatur, ut ſit $bb = \frac{5gg}{2\pi^4}$, et $b = \frac{g}{\pi\pi}\surd\frac{5}{2}$: hoc eſt in pedibus Rhenanis debet eſſe radius globi $= 2,50317$, ac tum diſtantia OI $= f$ fit $= 1,583144$ ped. ita ut punctum ſuſpenſionis ſeu axis gyrationis intra globum capi debeat. Cum autem ſit $f = \frac{g}{\pi\pi} = b\surd\frac{2}{5}$ ſeu $f = k$, evidens eſt hoc caſu globum celerrime oſcillari. Scilicet ſi ſit $I\omega = b\surd\frac{2}{5}$, ducta horizontali $\mu\nu$, quae axem gyrationis referet, erit $\cos B\mu = \surd\frac{2}{5}$, ideoque arcus $B\mu = 50°, 46'$. Sin autem globus fuerit valde parvus, ut fieri ſolet, ad minuta ſecunda producenda ſumi debet OI $= \frac{2g}{\pi\pi} - \frac{\pi\pi bb}{5g}$: quare ut globus ex ipſo puncto B ſuſpenſus hoc praeſtet, ejus radius debet eſſe $b = \frac{(\surd 65 - 5)g}{2\pi\pi} = 0,155136g$ proxime.

PROBLEMA. 47.

547. Si corpus rigidum circa axem horizontalem mobile pluribus conſtet partibus, quarum ſingularum centra inertiae et momenta inertiae ſint cognita, definire totius corporis centrum oſcillationis.

SOLUTIO.

Fig. 69. Axis gyrationis horizontalis ad planum figurae in puncto O normalis concipiatur, ſintque A, B, C, D centra inertiae partium, ex quibus corpus

corpus eſt compoſitum, quarum partium maſſae ſint A, B, C, D, et momenta inertiae reſpectu axium ipſi axi gyrationis parallelorum et per cujusque centrum inertiae tranſeuntium Aa^2, Bb^2, Cc^2, Dd^2: centra autem inertiae diſtent ab axe gyrationis intervallis AO, BO, CO, DO; perinde enim eſt, ſive haec intervalla ad idem axis punctum O tendant, ſive ad diverſa, quoniam tam momenta gravitatis quam momenta inertiae tantum a diſtantiis ab axe pendent, aeque diverſitas punctorum O quicquam eo confert. Primum ergo centrum inertiae I totius corporis, cujus maſſa ſit $= M = A + B + C + D$, definiatur, quod in tali recta OI erit ſitum, ut ſit AOA . ſi AOI + BOB . ſi BOI = COC, ſCOI + DOD . ſin DOI: tum vero erit:

$$M \,.\, OI = A \,.\, AO \,.\, \cos AOI + B \,.\, BO \,.\, \cos BOI + C \,.\, CO \cos COI + D \,.\, DO \,.\, \cos DOI,$$

quae quantitas in ſuperiori formula $IS = \frac{Mkk}{Mf}$ loco Mf ſcribi debet. At momentum inertiae totius corporis reſpectu axis gyrationis $M(ff + kk)$ ex partibus ita componitur, ut ſit:

$$A(AO^2 + aa) + B(BO^2 + bb) + C(CO^2 + cc) + D(DO^2 + dd).$$

Quare cum ſit $OS = \frac{M(ff+kk)}{Mf}$, erit

$$OS = \frac{A(AO^2 + aa) + B(BO^2 + bb) + C(CO^2 + cc) + D(DO^2 + dd)}{A \,.\, AO \,.\, \cos AOI + B \,.\, BO \,.\, \cos BOI + C \,.\, CO \,.\, \cos COI + D \,.\, DO \,.\, \cos DOI}$$

COROLL. 1.

548. Si ſingulae partes ſeorſim conſiderentur, earumque centra oſcillationis ſtatuantur in punctis a, b, c, d, ob $Oa = \frac{A(AO^2 + aa)}{A \,.\, OA}$, erit

$$OS = \frac{A \,.\, OA \,.\, Oa + B \,.\, OB \,.\, Ob + C \,.\, OC \,.\, Oc + D \,.\, OD \,.\, Od}{A \,.\, OA \cos AOI + B \,.\, OB \,.\, \cos BOI + C \,.\, OC \,.\, \cos COI + D \,.\, OD \,.\, \cos DOI}$$

COROLL. 2.

549. Invento autem centro inertiae ſeu gravitatis totius corporis I loco denominatoris poni poteſt M . OI: per praecepta autem ſtatica centrum gravitatis totius corporis ex datis centris gravitatis partium, facile colligitur.

EXEMPLUM.

550. Sit pendulum compoſitum ex virga cylindrica recta ACB et globo illi annexo BEDF, quod circa axem horizontalem eOf ſit mobile, cu- Fig. 70.

 jus

jus centrum oſcillationis S quaeratur. Virga autem et globus conſtent ex materia uniformi, ponaturque virgae longitudo $AB = a$, pondus $= A$, et extremitatis B ab axe gyrationis O diſtantia $BO = b$, baſis autem hujus cylindri radius $= c$; erit ejus centrum inertiae in C, ut ſit $AC = BC = \frac{1}{2}a$, et $OC = b - \frac{1}{2}a$, momentum vero inertiae reſpectu axis per C ducti et axi gyrationis paralleli $= A(\frac{1}{12}aa + \frac{1}{4}cc)$. Porro globi annexi ſit maſſa $= E$, radius $BG = e$, erit ejus centrum inertiae in G et momentum inertiae $= \frac{2}{5}Eee$. Sit jam totius corporis centrum inertiae in I erit $(A + E)$. $OI = A(b - \frac{1}{2}a) + E(e + b) = Mf$; deinde momentum inertiae reſpectu axis gyrationis $= A(\frac{1}{12}aa + \frac{1}{4}cc = (b - \frac{1}{2}a)^2) + E(\frac{2}{5}ee + (b+e)^2)$ quod loco $M(ff + kk)$ ſubſtitui debet. Sicque centrum oſcillationis erit in S ut ſit:

$$OS = \frac{A(\frac{1}{3}aa - ab + bb + \frac{1}{4}cc) + E(bb + 2be + \frac{7}{5}ee)}{A(b - \frac{1}{2}a) + E(b + e)}$$

ergo ob $OG = b + e$ fiet

$$GS = \frac{A(be + \frac{1}{2}ab - \frac{1}{2}ae - \frac{1}{3}aa - \frac{1}{4}cc) - E \cdot \frac{2}{5}ee}{A(b - \frac{1}{2}a) + E(b + e)}.$$

COROLL. 1.

551. Si axis gyrationis O capiatur in ſummitate virgae A, ut ſit $b = a$, erit

$$OS = \frac{A(\frac{1}{3}aa + \frac{1}{4}cc) + E(aa + 2ae + \frac{7}{5}ee)}{A \cdot \frac{1}{2}a + E(a + e)}$$

$$\text{et } GS = \frac{A(\frac{1}{2}ae + \frac{1}{6}aa - \frac{1}{4}cc) - E \cdot \frac{2}{5}ee}{A \cdot \frac{1}{2}a + E(a + e)}$$

ſi quidem ſumamus punctum S ſupra G cadere.

COROLL. 2.

552. Si ſit exempli gratia $E = 30\,A$; $a = b = 3$ ped. $e = \frac{1}{12}$ ped. et $c = \frac{1}{300}$ ped. ita ut cc tuto negligi poſſit, erit $OG = 3\frac{1}{12} = 3{,}0833$ et $OS = \frac{3 + 285\frac{7}{24}}{1\frac{1}{2} + 92\frac{1}{2}} = \frac{828\frac{7}{24}}{94} = 3{,}0669$, hocque caſu punctum S ſupra G cadit; ſin autem maſſa virgae evaneſceret, foret $OS = 3{,}0842$, ſicque S infra G caderet.

SCHOLION.

553. Hic poſtremus caſus ideo eſt notatu dignus, quod vulgo filum, ſi fuerit valde tenue ac leve reſpectu globi, vix quicquam ad centrum

trum oſcillationis conferre videatur, hic enim certe, etſi globus tricies ponderoſior eſt filo, hujus ratio ſine inſigni errore negligi non poſſet. Ponamus enim, hoc pendulum oſcillationes abſolviſſe minutis ſecundis, hincque longitudinem penduli ſimplicis iſochroni determinari oportere. Haec igitur neglecta fili maſſa prodiret $= 3,0842$ ped. cum tamen revera tantum ſit $3,0669$, ped. ita ut error $0,0173$ ped. $2\frac{1}{2}$ lin. committeretur minime certe tolerandus. Sin autem manentibus reliquis dimenſionibus, filum adhuc levius atque $E = 60\, A$ eſſet, foret $OS = \dfrac{3 + 570\frac{7}{12}}{1\frac{1}{2} + 185}$ $= 3,0782$, cujus loco ſi ſumeretur $3,0842$ error committeretur $= 0,0060$ ped. $= \frac{13}{15}$ lin.

PROBLEMA 48.

554. Si pendulum conſtet ex virga tenuiſſima OB inertiae experte rigida tamen, et globo BEDF, invenire locum, ubi alius globus datus eidem virgae affigi debeat, ut oſcillationes fiant promtiſſimae. Fig. 71.

SOLUTIO.

Cum in O ſit axis gyrationis, ſit diſtantia $OG = b$, et radius globi infra affixi $BG = c$; maſſaque hujus globi $= B$: tum alterius globi affigendi ſit maſſa $= L$, et radius $QK = e$, pro loco autem ejus quaeſito diſtantia $OQ = q$. His poſitis ſit I centrum inertiae commune, erit $(B + L)\, OI = Bb + Lq = Mf$, tum vero momentum inertiae totius penduli reſpectu axis gyrationis $= B(\frac{2}{5}cc + bb) + K(\frac{2}{5}ee + qq) = M(ff + kk)$. Quare ſi centrum oſcillationis ſtatuatur in S, erit $OS = \dfrac{B(\frac{2}{5}cc + bb) + L(\frac{2}{5}ee + qq)}{Bb + Lq}$, quae longitudo minima eſſe debet, ut oſcillationes fiant promtiſſimae. Hinc prodit iſta aequatio:

$$2BLbq - BL(\tfrac{2}{5}cc + bb) - \tfrac{2}{5}LLee + LLqq = 0$$

$$\text{ſeu } Lq = -Bb + \surd(BBbb + BLbb + \tfrac{2}{5}BLcc + \tfrac{2}{5}LLee)$$

unde innoteſcit diſtantia $OQ = q$: ex qua porro colligitur longitudo penduli ſimplicis iſochroni

$$OS = \frac{2}{L}\surd(BBbb + BLbb + \tfrac{2}{5}BLcc + \tfrac{2}{5}LLee) - \frac{2Bb}{L} = 2q.$$

Hinc ſi ambo globi ex eadem materia fuerint confecti, ob $B : L = c^3 : e^3$ erit $OS = \dfrac{2\surd(c^6bb + c^3e^3bb + \frac{2}{5}c^5e^3 + \frac{2}{5}e^8) - 2c^3b}{e^3}$ et OQ

$$= q = \frac{\surd(c^6bb + c^3e^3bb + \tfrac{2}{5}c^5e^3 + \tfrac{2}{5}e^8) - c^3b}{e^3},$$

CO-

COROLL. 1.

555. Si diametri globorum fuerint minimi, ut cc et ee prae bb negligi queant, distantia $OQ = q$ ita capi debet, ut sit $OQ = \frac{\sqrt{B(B+L)} - B}{L} b$, et longitudo penduli simplicis isochroni erit $= 2 \cdot OQ = 2b \cdot \frac{\sqrt{B(B+L)} - B}{L}$.

COROLL. 2.

556. Si globus alter KLMN plane omitteretur, foret $OS = b + \frac{2cc}{5b}$, quae major est, quam adjuncto isto globo, si fuerit $b + \frac{2cc}{5b} > 2e\sqrt{\frac{2}{3}}$. Unde nisi sit $e > \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\left(b + \frac{2cc}{5b}\right)$, hoc altero globo adjungendo oscillationes promtiores reddi possunt.

COROLL. 3.

557. Sin autem fuerit $e = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\left(b + \frac{2cc}{5b}\right)$ quantacunque etiam fuerit hujus globi massa L, pro oscillationibus celerrimis obtinendis sumi debet $OQ = q = \frac{1}{2}b + \frac{cc}{5b}$, et tum longitudo penduli simplicis isochroni erit $= b + \frac{2cc}{5b}$, omnia ac si globus KLMN removeretur.

COROLL. 4.

558. Si ambo globi fuerint aequales, ut sit $L = B$ et $e = c$, oscillationes promtissimae evadent, capiendo $OQ = q = \sqrt{(2bb + \frac{4}{5}cc)} - b$: ac si cc prae bb negligere liceat, $OQ = OG(\sqrt{2} - 1)$; hincque longitudo penduli simplicis isochroni $= 2OG(\sqrt{2} - 1) = 0{,}828427\,OG$.

COROLL. 5.

559. Si ambo globi ex eadem materia constent, definiri potest globi KLMN radius e, ut eo rite adjungendo oscillationes fiant promtissime; scilicet e quaeri debet ex hac aequatione, $16e^{10} - 48c^5e^5 - 120bbc^3e^5 - 600bbc^6ee + 9c^6(5bb + 2cc)^2 = 0$.

SCHOLION.

560. Ceterum patet, quo minor sit radius e globi KLMN manente ejus massa L, eo minorem prodire distantiam $OQ = q$, ideoque eo prom-

promtiores fore oscillationes. At vero manente radio e oscillationes fient celerrimae, si massa L globi affigendi fuerit quam maxima; nam si esset $L = 0$, foret $OS = b + \frac{2cc}{5b}$, qui est valor maximus, si quidem affigendo altero globo oscillationes crebriores reddi possunt. At vero si fuerit $5bb + 2cc = 2be\sqrt{10}$, seu $e = \frac{5bb + 2cc}{2b\sqrt{10}}$, quantacunque fuerit hujus globi massa L, eo rite annexo oscillationes manent ejusdem durationis, et si hic globus adhuc fuerit major, oscillationes adeo tardiores evadent. Quodsi ambo globi ex materia aeque gravi fuerint confecti, magnitudo affigendi, ut motus oscillatorius fiat rapidissimus, ex aequatione decimi gradus definiri debet: verum si axis per centrum G globi BCDF transeat, ut sit $b = 0$, inde prodit $e = c\sqrt[5]{\tfrac{3}{2}}$; pro radio globi affigendi, et pro ejus loco $OQ = q = \sqrt{(\tfrac{2}{5}\frac{c^5}{e^3} + \tfrac{2}{5}e^2)} = c\sqrt[10]{\tfrac{8}{27}}$, et et longitudo penduli simplicis isochroni $= 2c\sqrt[10]{\tfrac{8}{27}}$. Axis ergo gyrationis per centrum prioris globi transiens alterum ita trajicere debet, ut ab ejus centro distet intervallo $OQ = c\sqrt[10]{\tfrac{8}{27}}$, quod minus est ejus radio $e = c\sqrt[5]{\tfrac{3}{2}}$. Hujusmodi autem quaestiones circa motum oscillatorium plures proponi possent, quae autem ex stabilitis hic principiis non difficulter solventur. Plurimum autem intererit investigare, quantas vires ipse axis gyrationis inter motum sustineat.

PROBLEMA. 49.

561. Dum corpus rigidum grave circa axem horizontalem fixum OA gyratur, ad quodvis tempus definire vires, quas axis in datis duobus punctis O et A sustinet. Fig. 72.

SOLUTIO.

Repraesentet tabula planum verticale per axem gyrationis OA transiens, versetturque jam centrum inertiae corporis extra hoc planum in I, unde tam ad planum verticale, quam ad axem ducantur perpendiculares IK et IG, erit angulus $IGK = \phi$ elongatio corporis a situ naturali, ac posito distantia $IG = f$, erit $KI = f \sin\phi$ et $GK = f \cos\phi$. Tum sit massa corporis $= M$, quae cum simul ejus pondus exprimat, vis sollicitans erit $= M$ in directione verticali IV urgens, cujus momentum $= Mf \sin\phi$ tendit ad angulum IGK minuendum. Deinde consideretur elementum corporis quodcunque dM in Z, unde ad planum verticale et axem ductis perpendiculis ZY, ZX vocentur coordinatae $OX = x$, $XY = y$, et $YZ = z$, eritque $OG = \frac{\int x dM}{M}$, $GK = \frac{\int y dM}{M}$ et $KI = \frac{\int z dM}{M}$: posita autem distantia $XZ = \sqrt{(yy + zz)} = r$, exprimit $\int rr dM$ momentum inertiae corporis respectu axis OA, quod sit $= Mkk$: denique ponatur distantia punctorum axis $OA = a$, et per ambo ducantur rectae BOb, COc et EAe, FAf ipsis KG et KI parallelae. His praeparatis secundum ductum probl. 23. primum observo nullam adesse vim, cujus directio cum axe sit in eodem plano: cum autem hic momentum vis $Mf \sin \phi$ in sensum contrarium vergat, atque ibi sumsimus, erit $Vf = -Mf \sin \phi$.

Nunc igitur ob vim $IV = M$, quae axi in G secundum directionem GK applicata est concipienda, axis in punctis O et A has sustinebit vires:

$$\text{sec. OB vim} = \frac{M \cdot AG}{a}; \text{ sec. AE vim} = \frac{M \cdot OG}{a}.$$

Quibuscum conjungendae sunt illae, quae ex viribus elementaribus contrarie applicatis nascuntur: quae sunt

$$\text{pro termino O} \begin{cases} \text{sec. } Ob \text{ vis} = \dfrac{f \sin \phi \cdot \int (a - x) z dM}{akk} \\ \text{sec. OC vis} = \dfrac{f \sin \phi \cdot \int (a - x) y dM}{akk} \end{cases}$$

$$\text{pro termino A} \begin{cases} \text{sec. } Ae \text{ vis} = \dfrac{f \sin \phi \cdot \int xz dM}{akk} \\ \text{sec. AF vis} = \dfrac{f \sin \phi \cdot \int xy dM}{akk}. \end{cases}$$

hasque vires axis ob actionem gravitatis corporis sustinet, verum ob motum, quo jam gyratur, si celeritas gyratoria vocetur $= \varepsilon$, axis in punctis O et A has vires sustinet:

$$\text{pro termino O} \begin{cases} \text{sec. OB vim} = \dfrac{\varepsilon\varepsilon \int (a - z) y dM}{2ag} \\ \text{sec. OC vim} = \dfrac{\varepsilon\varepsilon \int (a - x) z dM}{2ag} \end{cases}$$

pro

$$\text{pro termino A}\begin{cases}\text{sec. AE vim} = \dfrac{\varepsilon\varepsilon\int xydM}{2ag}\\[2ex] \text{sec. AF vim} = \dfrac{\varepsilon\varepsilon\int xzdM}{2ag}\end{cases}$$

COROLL. 1.

560. Si distantiae terminorum O et A a puncto G vocentur $OG = b$ et $AG = c$, ut sit $a = b + c$; tum vero ponatur $GX = u$, erit $x = b - u$ et $a - x = c + u$; ideo

$$\int (a - x)\, zdM = \int (c + u)\, zdM = Mc\,.\,KI + \int uzdM$$
$$\int (a - x)\, ydM = \int (c + u)\, ydM = Mc\,.\,GK + \int uydM$$
$$\int xzdM = \int (b - u)\, zdM = Mb\,.\,KI - \int uzdM$$
$$\int xydM = \int (b - u)\, ydM = Mb\,.\,GK - \int uydM.$$

COROLL. 2.

563. His valoribus introductis axis in puncto O has vires sustinet: primo secundum directionem OB vim

$$\frac{Mc}{a} - \frac{Mcf\,\mathrm{si}\,\varphi\,.\,KI}{akk} - \frac{f\,\mathrm{si}\,\varphi\,.\int uzdM}{akk} + \frac{\varepsilon\varepsilon\,.\,Mc\,.\,GK}{2ag} + \frac{\varepsilon\varepsilon\,.\int uydM}{2ag}$$

deinde secundum directionem OC vim

$$\frac{Mcf\,\mathrm{s}\,\varphi\,.\,GK}{akk} + \frac{f\,\mathrm{s}\,\varphi\,.\int uydM}{akk} + \frac{\varepsilon\varepsilon\,.\,Mc\,.\,KI}{2ag} + \frac{\varepsilon\varepsilon\,.\int uzdM}{2ag}$$

At vero in puncto A istas:

primo secundum directionem AE vim

$$\frac{Mb}{a} - \frac{Mbf\,\mathrm{s}\,\varphi\,.\,KI}{akk} + \frac{f\,\mathrm{s}\,\varphi\,.\int uzdM}{akk} + \frac{\varepsilon\varepsilon\,.\,Mb\,.\,GK}{2ag} - \frac{\varepsilon\varepsilon\,.\int uydM}{2ag}$$

deinde secundum directionem AF vim

$$\frac{Mbf\,\mathrm{s}\,\varphi\,.\,GK}{ahk} - \frac{f\,\mathrm{s}\,\varphi\,.\int uydM}{akk} + \frac{\varepsilon\varepsilon\,.\,Mb\,.\,KI}{2ag} - \frac{\varepsilon\varepsilon\int uzdM}{2ag}.$$

COROLL. 3.

564. Si corpus ita fuerit comparatum, ut a plano IGK in duas partes similes et aequales dividatur, sitque $GO = GA = \frac{1}{2}a$, ob $\int uzdM = 0$ et $\int uydM = 0$, axis in puncto O sustinebit has vires

$$\text{sec. OB vim} = \tfrac{1}{2}M - \frac{Mf\,\mathrm{s}\,\varphi\,.\,KI}{2kk} + \frac{\varepsilon\varepsilon\,.\,M\,.\,GK}{4g}$$

 sec.

$$\text{fec. OC vim} = \frac{Mf\int\phi . GK}{2kk} + \frac{\varepsilon\varepsilon . M . KI}{4g}$$

in puncto autem A fuftinebit has vires

$$\text{fec. AE vim} = \tfrac{1}{2}M - \frac{Mf\int\phi . KI}{2kk} + \frac{\varepsilon\varepsilon . M . GK}{4g}$$

$$\text{fec. AF vim} = \frac{Mf\int\phi . GK}{2kk} + \frac{\varepsilon\varepsilon . M . KI}{4g}$$

hoc ergo cafu vires non a magnitudine diftantiae OA $= a$ pendent.

COROLL. 4.

565. Hoc ergo cafu, quo $\int uyd\mathrm{M} = 0$ et $\int uzd\mathrm{M} = 0$, nihil impedit, quominus diftantia OA $= a$ evanefcens accipiatur, atque axis in unico puncto G retineri poterit, hic quippe fuftinet binas vires

$$\text{alterum fecundum GK} = M - \frac{Mff\,\text{fin}\,\phi^2}{kk} + \frac{M\varepsilon\varepsilon f\,\text{cof}\,\phi}{2g}$$

$$\text{alterum fecundum GH} = \frac{Mff\int\phi\,\text{cof}\,\phi}{kk} + \frac{M\varepsilon\varepsilon f\int\phi}{2g}$$

exiftente GH ipfi KI parallela.

SCHOLION.

566. Corpora, quae vulgo ad motum ofcillatorium adhiberi folent, ita funt comparata, ut plano, quod per eorum centrum inertiae ad axem gyrationis normaliter ducitur, in duas portiones aequales et fimiles fecentur: de iis igitur locum habet, quod axis in unico puncto retineri

Fig. 67. queat. Scilicet fi figura 67. repraefentet planum verticale per talis corporis centrum inertiae I ductum et ad axem gyrationis normale, qui figurae in O normaliter infiftere concipiatur, exiftente OC recta verticali, et OH in hoc plano horizontali, axis in puncto ipfo O vires modo indicatas fuftinebit. Nempe fi angulus COI ponatur $= \phi$, diftantia OI $= f$, maffa corporis $= M$, ejus momentum inertiae refpectu axis gyrationis $= Mkk$, et celeritas angularis in hoc ftatu fit $= \varepsilon$, five ad angulum COI augendum tendat, five minuendum, axis O fuftinet duas vires,

$$\text{alterum fecundum OC} = M - \frac{Mff\,\text{fin}\,\phi^2}{kk} + \frac{M\varepsilon\varepsilon f\,\text{cof}\,\phi}{2g}$$

$$\text{alterum fecundum OH} = \frac{Mff\,\text{fin}\,\phi\,\text{cof}\,\phi}{kk} + \frac{M\varepsilon\varepsilon f\int\phi}{2g}.$$

Priori

priori ergo vi deorſum ſollicitatur, eamque ſuſtentaculum ſuſtinet: ob alteram vero vim axis in eam plagam, in qua centrum inertiae verſatur, horizontaliter ſuper ſuſtentaculo procedere conatur, quem effectum obice arceri convenit. Quando centrum inertiae in contrariam plagam divagatur, haec vis horizontalis in contrarium dirigitur. Ceterum ambae vires ex duabus conſtant partibus, quarum altera actioni gravitatis, altera motui gyratorio ipſi debetur, ac ducta OL ad OI normali, hae partes ad pauciores ita redigentur, ut axis in puncto O ab his viribus ſollicitetur.

$$\text{ſec. OG vi} = \text{M}; \text{ ſec. OL vi} = \frac{\text{M}ff \sin\phi}{kk}; \text{ ſec. OI vi} = \frac{\text{M}fgg}{2g}.$$

Si non fuerit $\int uy d\text{M} = 0$ et $\int uz d\text{M} = 0$, tum praeter iſtas vires axis inſuper in punctis O et A fig. 72. eas virium §. 563. partes ſuſtinet, quae has formulas integrales involvunt, quoniam reliquas partes immunes ad unicum punctum reducere licuit.

PROBLEMA. 50.

576. Si axis OA, circa quem corpus rigidum grave eſt mobile, non fuerit horizontalis, definire motum gyratorium ut et vires, quas axis inde ſuſtinet. Fig. 73.

SOLUTIO.

Per axem OA ductum concipiatur planum verticale, in quo ſit GC recta verticalis, ponaturque angulus OGC $= \zeta$, cujus complementum $90° - \zeta$ dat axis OA inclinationem ad horizontem. Reperiatur nunc corporis centrum inertiae I extra hoc planum verticale, unde ad axem ducta normali IG $= f$, et ex G in plano verticali ad axem pariter normali GK, erit ipſum planum IGK ad planum verticale normale, ponaturque angulus IGK $= \phi$, elongationem corporis a ſitu ſuo naturali metiens: recta enim GI in plano IGK movebitur. Statuatur maſſa corporis, eademque ejus pondus $=$ M, ejusque momentum inertiae reſpectu axis OA $=$ Mkk, quod perinde colligitur, ac ſi axis eſſet horizontalis: inclinatio enim tantum ad vim ſollicitantem ſpectat. Effectus autem gravitatis eo redit, ut corpus in puncto I ſollicitetur in directione verticali IV a vi $=$ M, ad quam reſolvendam ducantur IM et IN parallelae ipſis GO et GK, eruntque rectae IM, IV et IN in plano verticali, angulusque MIV $= \zeta$. Hinc ex vi IV $=$ M naſcuntur duae vires, altera ſec. IM $=$ M coſζ et altera ſecundum IN $=$ M ſinζ. Prior cum

cum ſit axi parallela, nihil plane ad motum confert, ſed tota in axem impenditur, quemadmodum ſupra docuimus. Pro motu ergo reſtat ſola vis $IN = M \sin\zeta$ cujus directio cum ſit ipſi GK parallela, orietur momentum $= Mf\,\text{ſ}\zeta\,\text{ſ}\phi$ tendens ad angulum IGK minuendum, atque pro motu definiendo formulae ſuperiores pro axe horizontali inventae valebunt, niſi quod loco momenti vis ſollicitantis, quod ante erat $= Mf \sin\phi$, hic ſcribi debeat $Mf \sin\zeta \sin\phi$: vel quatenus M pondus corporis denotat, ejus loco ſcribi debet $M \sin\zeta$, quatenus autem in momentum inertiae ingreditur, immutatum relinqui debet. Quare motus ſimilis erit motui penduli ſimplicis circa axem horizontalem, cujus longitudo $= \dfrac{Mkk}{Mf\,\text{ſ}\zeta} = \dfrac{kk}{f\,\text{ſ}\zeta}$: quo ipſo motus perfecte determinatur. Quod autem ad vires attinet, quas axis interea ſuſtinet in datis ſi placet punctis O et A, primo ob vim $IM = M\cos\zeta$, axis ſecundum ſuam directionem AO a tanta vi urgetur, praeterea vero in utroque O et A a vi $= \dfrac{GI}{OA} \cdot M\cos\zeta$, in puncto A ſcilicet ſecundum directionem ipſi GI parallelam, in O vero ſecundum oppoſitam. Tum vero praeter has vires in punctis O et A ab iisdem viribus ſollicitabitur, quas in problemate praecedente determinavimus, hoc tantum obſervato, quod pro M ſcribi debeat $M\text{ſ}\zeta$ et $f\text{ſ}\zeta\text{ſ}\phi$ loco $f\text{ſ}\phi$.

Fig. 72. Nempe ſi in fig. 72. OA ſit noſter axis inclinatus et reliqua maneant ut in problemate praecedente, tum axis praeter vires a vi $IM = M\cos\zeta$ natus ſuſtinet inſuper has vires. Primo in puncto O ſecundum directionem OB vim

$$\frac{Mc\sin\zeta}{a} - \frac{Mcff\,\text{ſ}\zeta\,\text{ſ}\phi^2}{akk} - \frac{f\,\text{ſ}\zeta\,\text{ſ}\phi \cdot \int uzdM}{akk} + \frac{Mcf\varepsilon\varepsilon\cos\phi}{2ag} + \frac{\varepsilon\varepsilon\int uydM}{2ag}$$

et ſecundum directionem OC vim

$$\frac{Mcff\,\text{ſ}\zeta\,\text{ſ}\phi\cos\phi}{akk} + \frac{f\,\text{ſ}\zeta\,\text{ſ}\phi \cdot \int uydM}{akk} + \frac{Mcf\varepsilon\varepsilon\,\text{ſ}\phi}{2ag} + \frac{\varepsilon\varepsilon\int uzdM}{2ag}$$

Deinde in puncto A ſecundum directionem AE vim

$$\frac{Mc\,\text{ſ}\zeta}{a} - \frac{Mbff\,\text{ſ}\zeta\,\text{ſ}\phi^2}{akk} + \frac{f\,\text{ſ}\zeta\,\text{ſ}\phi : \int uzdM}{akk} + \frac{Mbf\varepsilon\varepsilon\cos\phi}{2ag} - \frac{\varepsilon\varepsilon\int uydM}{2ag}$$

et ſecundum directionem AF vim

$$\frac{Mbff\,\text{ſ}\zeta\,\text{ſ}\phi\cos\phi}{akk} - \frac{f\,\text{ſ}\zeta\,\text{ſ}\phi \cdot \int uydM}{akk} + \frac{Mbf\varepsilon\varepsilon\,\text{ſ}\phi}{2ag} - \frac{\varepsilon\varepsilon\int uzdM}{2ag}$$

ubi eſt $OA = a$, $OG = b$, $AG = c$, et celeritas angularis $= \varepsilon$, integralibus ſumtis ut ibi definivimus,

COROL.

COROLL. 1.

568. Cum longitudo penduli ſimplicis iſochroni ſit $= \frac{kk}{f \sin \zeta}$, corpus circa axem inclinatum tardius oſcillationes ſuas abſolvit quam ſi axis eſſet horizontalis, ac ſi oſcillationes fuerint minimae, tempus unius erit $= \pi \sqrt{\frac{kk}{2fg \int \zeta}}$ min. ſec.

COROLL. 2.

569. Si axis eſt inclinatus, etiam vim ſuſtinet ſecundum ſuam directionem AO, quae eſt $=$ M coſζ, reliquae vires omnes ad axem ſunt normales, et ad duo data puncta O et A revocari poſſunt. Fig. 73.

COROLL. 3.

570. Si corpus a plano IGK in duas partes ſimiles et aequales biſecetur, valores integralium $\int uyd$M et $\int uzd$M evaneſcunt et omnes vires praeter eas, quae ex vi IM naſcuntur, ad unicum punctum G reduci poſſunt, ut ſupra

SCHOLION.

571. Haec ſint, quae de motu gyratorio corporum rigidorum circa axem fixum proponenda videbantur, ubi quidem ipſius motus determinatio eo eſt reducta, ut plus difficultatis non habeat, quam motus corpuſculi circa axem fixum, ſi modo momentum inertiae fuerit exploratum. Vires autem, quas axis gyrationis inter motum ſuſtinet, moleſtiorem calculum plerumque exigunt, cum ex corporis figura valores binorum integralium $\int xyd$M et $\int xzd$M erui debeant. Verum haec inveſtigatio maximi eſt momenti, ſi ad motum corporum rigidorum circa axes non fixos progredi velimus: ubi primo quidem eos caſus diligentius evolvi convenit, quibus axis ſponte manet immobilis, etiamſi extrinſecus non retineatur. Propoſito ergo corpore quocunque rigido, inquirendum eſt, utrum in eo dentur ejusmodi axes, circa quos ſi corpus motum gyratorium receperit, ipſi inde nullas ſuſtineant vires: deinde etiam videndum eſt, a quibusnam viribus corpus circa talem axem motum ſollicitari debeat, ut etiam hinc nullae vires ad axem dimovendum naſcantur.

CAPUT