Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum ex primis nostrae cognitionis principiis stabilita et ad omnes motus, qui in huiusmodi corpora cadere possunt, accommodata

Euler, Leonhard

Gryphiswaldiae, MDCCXC [1790]

Caput II.

quae scilicet parallela sit maximae quasi declivitati in contactu illo sinuoso: atque haec declivitas seu obliquitas respondet asperitati utriusque superficiei in contactu ita, ut pro majore minoreve asperitate angulus VOS major minorve sit concipiendus. Statuatur ergo iste angulus VOS $= \zeta$, corpusque superficiei apprimatur vi OP $=$ P, ac jam videamus, quanta vi secundum directionem OV agente opus sit, ut corpus de situ suo dimovere valeat. Agat ergo vis OV $=$ V, a qua corpus secundum directionem OS sollicitabitur vi $=$ V $\cos\zeta$: at vis pressionis OP $=$ P huic actioni resistit vi $=$ P $\sin\zeta$. Quare nisi fuerit V $\cos\zeta >$ P $\sin\zeta$ seu V $>$ P $\tang\zeta$, corpus de quiete non deturbabitur; vel quamdiu vis sollicitans OV $=$ V minor fuerit quam P $\tang\zeta$, corpus in quiete perseverabit. Id quod egregie cum supra traditis convenit, cum loco fractionis illius δ hic habeamus tangentem cujuspiam anguli ζ. Verum fateri cogor, hinc non intelligi, cur dum corpus movetur, frictionis vis motui contraria etiam ipsi P $\tang\zeta$ aequalis esse debeat: cum enim basis corporis alternatim se ex illis sinuositatibus expediat, iterumque se eo insinuet, minus patet quantum detrimentum hinc motus sit passurus. Quoniam tamen hypothesis stabilita hinc non evertitur, ei inhaereamus, causamque hic assignatam tanquam a vero non abhorrentem spectemus.

CAPUT II.

DE MOTU PROGRESSIVO CORPORUM GRAVIUM A FRICTIONE IMPEDITO.

PROBLEMA 2.

1117. Si corpus grave super plano horizontali motu progressivo incedat, determinare motus retardationem a frictione oriundam.

SOLUTIO.

Fig. 127. Sit M corporis massa idemque ejus pondus, quod planum horizontale EF tangat basi sua AB, quam pariter planum esse oportet. Consideretur corporis centrum inertiae O, in quo ejus pondus M collectum concipia-

cipiatur, ita ut corpus deorſum ſollicitetur vi $OP = M$, quae cum ad planum EF ſit normalis, tanta quoque vi ad planum apprimitur: ubi primum obſervo, niſi recta OP intra corporis baſin AB cadat, motum progreſſivum eſſe non poſſe. Verum ne hoc quidem ſufficit, cum enim progrediente corpore ſecundum directionem BF id ſecundum directionem contrariam BE ob frictionem retrahatur vi $= \delta M$, denotante $1 : \delta$ rationem preſſionis ad frictionem, haec vis conatur corpori motum gyratorium circa horizontalem axem per O tranſeuntem inducere, cujus momentum eſt $= \delta M \cdot OP$. Cui vi ſi corpus obſequatur, primo inſtanti baſis punctum A elevari incipiet, ita ut jam totum corpus extremitati baſis B innitatur, quo etiam preſſio transferetur. In hoc ergo ſtatu ad gyrandum proclivi corpus in B ſurſum urgeri cenſendum eſt vi $BM = M$, unde momentum gyrationi reſiſtens naſcitur $= M \cdot BP$: quod niſi ſuperet illud $\delta M \cdot OP$, corpus revera incipiet. Quare cum hic tantum motum progreſſivum contemplari ſtatuerimus, haec conditio inſuper requiritur, ut ſit $BP > \delta \cdot OP$, quam ergo hic locum habere aſſumamus. Fuerit ergo initio corporis celeritas ſecundum directionem $EF = c$, et elapſo tempore t confecerit ſpatium $= s$, habeatque celeritatem $= v$. Atque ob vim δM motui contrariam erit $\frac{dv}{2gdt} = \frac{-\delta M}{M} = -\delta$, ideoque $v = c - 2gdt$. Porro quia eſt $ds = vdt$, fiet $s = ct - \delta gtt$. Motus autem tamdiu tantum durabit, quoad corpus ad quietem fuerit reductum, frictione δM tum ſubito ceſſante: corpus ergo ad quietem redigetur elapſo tempore $t = \frac{c}{2\delta g}$ et percurſo ſpatio $= \frac{cc}{4\delta g}$.

COROLL. 1.

1118. Ut ergo corpus grave ſuper plano horizontali motu progreſſivo incedere poſſit, perpendiculum OP ex centro inertiae corporis O in planum demiſſum non ſolum intra baſin AB cadere, ſed etiam a termino baſis anteriori B tanto intervallo BP remotum eſſe debet, ut ſit $BP > \delta \cdot OP$.

COROLL. 2.

1119. Ductis igitur ex centro inertiae O cum perpendiculari OP, tum ad anteriorem baſis terminum B recta OB, angulum BOP majorem eſſe oportet angulo, cujus tangens eſt $= \delta$. Unde ſi fuerit $\delta = \frac{1}{3}$, angulus BOP major eſſe debet quam $18°, 26'$. Sin autem fuerit minor, corpus progrediendo ſimul provolvetur.

COROLL. 3.

1120. At si corpus motu progressivo puro promoveatur, ejus motus erit uniformiter retardatus, et similis ei, quo corpus celeritate c sursum projectum ascenderet, deorsum sollicitatum vi, quae sit ad ejus massam ut δ ad 1. Hoc tantum discrimine, quod hic corpus ad quietem redactum perpetuo in quiete sit permansurum.

SCHOLION. 1.

1121. Ut tali corpori quieto motus imprimatur, necesse est ut secundum directionem horizontalem impellatur vi, quae major sit quam δM: quamdiu autem sollicitatur vi minore, in quiete perseverabit, nisi forte ad provolutionem incitetur, quod quando evenire debeat, accuratius evolvamus. Sollicitetur ergo primo corpus secundum directionem horizontalem OS, quae per ejus centrum inertiae O transeat, vi $OS = S$, ut sit $S < \delta M$, et frictio pari vi S secundum BA renitetur. An autem circa extremitatem B provolvatur? judicium petetur ex momento frictionis $S . OP$ et momento pressionis M in B translatae, quod est $= M . BP$: hin si fuerit $S . OP > M . BP$, corpus provolvetur, sin minus, in quiete persistet: quia enim vis sollicitans $OS = S$ ipsi centro inertiae est applicata, ea nihil huc confert. Sit nunc vis S infra centrum inertiae in R applicata, et quia hinc momentum provolutioni contrarium nascitur $= S . OR$, ne corpus provolvatur, esse oportet $S . OR + M . BP > S . OP$, seu $S . PR < M . BP$; unde simul patet, si vis horizontalis S sublimius in r esset applicata, corpus provolutioni non fore obnoxium, si fuerit $S . Pr < M . BP$, ubi quidem assumimus esse $S < \delta M$. Idem etiam hinc magis fit perspicuum, si punctum B ut axem fixum, corpusque circa eum mobile spectemus, tum enim vis $rv = S$ momentum in sensum DC est $= S . Pr$ ex pondere autem corporis M in O collecto oritur momentum in sensum contrarium $M . BP$: ideoque corpus provolvetur si $S . Pr > M . BP$, quiescet vero si $S . Pr < M . BP$.

SCHOLION. 2.

1122. Sin autem vis $rv = S$ major fuerit quam δM, motus corpori progressivus inducetur ab excessu $S - \delta M$, quia frictio jam tantum vi $= \delta M$ secundum directionem BE reluctatur. Utrum autem simul corpus sit motum gyratorium adepturum, nec ne? hoc modo cognoscetur. Seposito nimirum motu progressivo, assumo corpori alium motum gyratorium imprimi non posse, nisi circa axem horizontalem per centrum inertiae O transeuntem et ad motus directionem OS normalem, ad quem investivestigandum, cum basis punctum B maneat in plano horizontali, simul ac punctum A elevari incipit, tota pressio in puncto B exercetur, ita ut tum in B habeatur vis sursum urgens $BM = M$. Nunc igitur ex viribus $rv = S$, $BE = \delta M$, $OP = M$ et $BM = M$ colligitur momentum provolutionem producens $= S \,.\, Or + \delta M \,.\, PO - M \,.\, BP$; quare ut corpus solo motu progressivo feratur, haec conditio requiritur, ut sit $S \,.\, Or + \delta M \,.\, PO < M \,.\, BP$, ubi per hypothesin est $S > \delta M$. Si vis horizontalis S infra centrum inertiae in R esset applicata, corpus provolutioni non erit obnoxium, si fuerit $\delta M \,.\, PO < M \,.\, BP + S \,.\, OR$ seu $S \,.\, OR + M \,.\, BP > \delta M \,.\, PO$. Hinc igitur clare intelligimus, quantum cum amplitudo basis, seu distantia perpendiculi ex centro inertiae dimissi OP ab ejus terminis, tum elevatio centri inertiae supra planum horizontale, tum altitudo in qua vis horizontalis applicatur, atque ipsa frictio conferant, ut nulla provolutio sit metuenda.

PROBLEMA. 3.

1123. Si corpus grave ABCD plano inclinato EF imponatur, definire conditiones, sub quibus id ob frictionem in quiete sit permansurum. Fig. 128.

SOLUTIO.

Sit angulus, quem planum inclinatum EF cum horizonte GF constituit, $GFE = \zeta$, corporis autem ei impositi massa $= M$, et centrum inertiae O, basi autem AB plano inclinato incumbat. Ducatur recta verticalis OQR, secundum quam corpus ob gravitatem sollicitari censendum est vi $= M$, quae resolvatur secundum directiones OP et OC, quarum illa in planum EF sit normalis, haec vero eidem parallela, et ob angulum $POQ = GFE = \zeta$, erit vis $OP = M \cos\zeta$ et vis $OC = M \sin\zeta$. Illa autem vi OP corpus ad planum EF apprimitur, unde si moveretur, frictio foret $= \delta M \cos\zeta$: hac vero vi $OC = M \sin\zeta$ ad motum secundum plani inclinati EF directionem sollicitatur. Nisi ergo haec vis $M \sin\zeta$ major sit, quam $\delta M \cos\zeta$, corpus nullum motum progressivum adipiscetur: quare ut corpus quiescat, necesse est, sit $M \sin\zeta < \delta M \cos\zeta$ seu $\tang\zeta < \delta$. Prima ergo conditio ad conservationem quietis necessaria exigit, ut anguli inclinationis $F = \zeta$ tangens minor sit quam fractio δ qua frictio determinatur. Deinde manifesto requiritur, ut recta verticalis OQ intra basin AB cadat. Nam ne corpus circa basis extremitatem B provolvatur, necesse est, ut vis $OQ = M$ momentum respectu puncti B, quod est $M \,.\, BQ \cos\zeta$ sit positivum, ideoque BQ positivum, seu punctum Q intra basin AB cadere

dere debet. Quod etiam ex motu gyratorio circa O generando ita ostendi potest. Fingamus enim corpus jam talem motum gyratorium incipere, et dum punctum A elevatur, tota pressio M cof ζ in B transferetur, ut nunc corpus in B sollicitetur primo vi BM $=$ M cos ζ, ob frictionem autem vi BA $=$ M sin ζ, ex quibus momentum generans motum gyratorium erit $=$ M sin ζ . OP $-$ M cos ζ . BP. Quare ne talis motus oriatur, debet esse BP cos $\zeta >$ OP . sin ζ seu BP $>$ OP tang ζ, at OP tang $\zeta =$ PQ, ergo ob BP $>$ PQ intervallum BQ positivum esse oportet. Consequenter ut corpus ABCD plano inclinato EF impositum quiescat, primo requiritur, ut verticalis OQ intra basin AB cadat, deinde ut tangens anguli inclinationis F minor sit quam δ.

COROLL. 1.

1124. Hinc igitur facillimum modum nanciscimur, explorandi frictionem seu fractionem δ: planum enim EF eousque elevetur, quoad corpus super eo descendere incipiat, et tangens anguli maximi F, quo corpus etiamnum in quiete persistit, dabit valorem fractionis δ.

COROLL. 2.

1125. Quodsi fuerit $\delta = \frac{1}{3}$, corpus tamdiu in quiete permanebit, quamdiu angulus elevationis GFE non superat 18°, $26'$. Sin autem sit $\delta = \frac{1}{4}$, hunc angulum minorem esse oportet, quam 14°, $2'$, sicque vicissim ex hoc angulo valor ipsius δ innotescit.

COROLL. 3.

1126. Ut autem corpus super plano inclinato quiescat, non sufficit ut sit tang GFE $< \delta$, sed etiam basis corporis tum ampla esse debet, ut sit BP $>$ OP tang GFE; seu ut angulus BOP major sit quam angulus GFE.

SCHOLION.

1127. In figura repraesentatur sectio corporis verticalis per ejus centrum inertiae O facta, quae simul ad planum inclinatum sit normalis; in qua propterea recta OP ad id est perpendicularis, et OC fit directio motus progressivi, quem gravitas corpori imprimere conatur. Ex dictis autem manifestum est, motum progressivum coerceri, si fuerit tang F $< \delta$. Verum ad judicium expediendum, num corpus motum gyratorium sit accepturum, non sufficit ad solam sectionem ABCD ejusque basin AB spectare, cum fieri posset, ut in hac sectione corpus plano nusquam incumberet, sed contactus in extremitatibus corporis tantum existeret. Tum igitur universus

versus contactus considerari ac dispici debet, quomodo et circa quamnam lineam provolutio oriri possit, quae utique ex figura basis est dijudicanda. Quodsi ergo corpora tam irregularia adhibeantur, ut hoc judicium nimis difficile evadat, experientiam consulere conveniet, an corpus ad provolutionem sit proclive? prior vero conclusio de angulo F manet, et ab hac irregularite neutiquam pendet.

PROBLEMA. 4.

1128. Si elevatio plani inclinati EF major fuerit, quam ut grave ei incumbens ABCD in quiete persistere possit, definire conditiones, quibus id solo motu progressivo super plano inclinato EF sit descensurum.

SOLUTIO.

Sit massa, idemque pondus corporis $= M$, et ejus centrum inertiae O ut ante, atque δ exponens frictionis. Vocato ergo angulo elevationis GFE $= \zeta$, erit per hypothesin $\tang \zeta > \delta$. Iam ex vi gravitatis OQR $= M$ colligimus pressionem in planum inclinatum, seu vim OP $= M \cos \zeta$, et vim ad descensum sollicitantem OC $= M \sin \zeta$. Cum igitur frictio ei renitatur vi $= \delta M \cos \zeta$, corpus revera ad descensum incitabitur excessu virium $M \sin \zeta - \delta M \cos \zeta = M(\sin \zeta - \delta \cos \zeta)$, a qua motus progressivus producetur, dummodo praeterea in corpore nullus motus gyratorius generetur. Videamus ergo, sub quibusnam conditionibus corpori motus gyratorius circa axem horizontalem et ad planum COP normalem per centrum inertiae O ductum generari possit; statim autem ac talis motus incipit, tota pressio $M \cos \zeta$ in B transfertur, ita ut nunc corpus sollicitetur a vi BM $= M \cos \zeta$, et ob frictionem a vi BA $= \delta M \cos \zeta$, unde momentum gyrationem in sensum BADC generans est $= \delta M \cos \zeta \,.\, OP - M \cos \zeta \,.\, BP$. Quare ne corpus provolutioni sit obnoxium, oportet hanc quantitatem esse negativam, ideoque $BP > \delta OP$. seu $\tang BOP > \delta$. Fig. 128.

COROLL. 1.

1129. Quia conditio inventa $\tang BOP > \delta$ non pendet ab inclinatione plani EF, si corpus in minori inclinatione provolutioni non fuerit obnoxium, etiam in majori elevatione nulla provolutio erit metuenda.

COROLL. 2.

1130. Quodsi ergo fuerit $\delta = \frac{1}{3}$, dummodo angulus BOP major sit quam $18^\circ, 26'$, corpus nullum motum volutorium accipiet, sed super plano inclinato vel quiescet, vel solo motu progressivo descendet.

SCHO-

SCHOLION.

1131. In hoc autem judicio pro puncto B non tam extremitas in ipsa sectione ABCD per centrum inertiae O facta est sumenda, sed in tota basi, qua fit contactus, linea per terminos a puncto P maxime remotos ducta est intelligenda, cujus a P distantia pro intervallo PB accipi debet.

PROBLEMA 5.

1132. Si corpus ita fuerit comparatum, ut nulla provolutio sit metuenda, ejus motum descensus super plano inclinato EF determinare.

SOLUTIO.

Posita corporis massa eodemque pondere $= M$, et elevatione plani supra horizontem seu angulo GFE $= \zeta$, ut sit $\tan \zeta > \delta$, quia alioquin corpus in quiete perseveraret. Confecerit jam corpus tempore $= t$ super plano inclinato spatium $= s$, motu scilicet a quiete inchoato, et quia vis accelerans est $= M \sin \zeta$, a gravitate oriunda, retardans autem $= \delta M \cos \zeta$ a frictione profecta, hinc nanciscimur istam aequationem: $\frac{dds}{2g\,dt^2} = \frac{M \sin \zeta - \delta M \cos \zeta}{M} = \sin \zeta - \delta \cos \zeta$, hincque integrando $\frac{ds}{dt} = 2gt (\sin \zeta - \delta \cos \zeta)$, quae est celeritatis corporis hoc tempore t acquisita, ipsum autem spatium interea confectum fit $s = gtt (\sin \zeta - \delta \cos \zeta)$.

COROLL. 1.

1133. Frictio ergo non impedit, quo minus corpus super plano inclinato descendat motu uniformiter accelerato, cum celeritates in ratione temporum crescant: verum in multo minore ratione crescunt: sublata enim frictione foret $s = gtt \sin \zeta$.

COROLL. 2.

1134. Si observetur tempus t quo datum spatium s fuerit confectum, simulque elevatio plani seu angulus ζ fuerit exploratus, inde exponens frictionis δ colligi poterit: erit enim $\delta = \tan \zeta - \frac{s}{gtt \cos \zeta}$.

SCHOLION.

1135. Hoc modo explorari poterit, utrum pro quiete idem valor exponentis δ reperiatur, ac pro motu eoque sive celeriore sive tardiore: sed

ſed hujusmodi experimenta ſunt lubrica, quia exiguus error in obſervatione temporis t commiſſus multum turbat. Tum vero etiam reſiſtentiae aeris ratio eſt habenda, quae praeſertim in motibus velocioribus inſigne momentum afferre poteſt. Quare nonnniſi plurimis hujusmodi experimentis ſumma cura inſtitutis quicquam certi in hoc negotio concludi poterit. Ne autem reſiſtentia aeris moram faceſſat, planum non multum ultra ſtatum quietis elevari convenit, quia in motibus tardioribus ejus effectus eſt minimus. Tum vero corpus quantum fieri poteſt, ponderoſum efficiatur, fruſtum plumbi intra ejus volumen includendo, ut tamen baſis ex ea conſtet materia, cujus frictionem explorare lubet.

EXEMPLUM.

1136. Ponamus tabulae EF longitudinem eſſe 6 ped. Rehn. tempusque t obſervari, quo corpus deſcendendo totam hanc longitudinem conficiat, ac videamus, quantum diſcrimen in tempore t frictione δ parumper mutatu oriri debeat. Cum igitur ſit $g = 15\frac{5}{8}$ ped. Rhen. erit tempus deſcenſus $t = \sqrt{\dfrac{48}{125\,(\sin\zeta - \delta\cos\zeta)}}$.

Ponamus $\delta = \frac{1}{3}$, et angulum $\zeta = 20°$, quia debet eſſe tang $\zeta > \frac{1}{3}$, ac reperietur tempus daſcenſus $t = 3,\ 652$ min. ſec. ſeu $t = 3\frac{2}{3}$ ſec. proxime.

Sit jam δ aliquantulum majus, nempe $\delta = \frac{1}{3} + \frac{1}{100}$, manente $\zeta = 20°$, et prodit tempus $t = 4,\ 45 = 4\frac{9}{20}$ ſec.

At ſi eſſet $\delta = \frac{1}{3} - \frac{1}{100}$ manente $\zeta = 20$, invenitur tempus $t = 3,\ 171 = 3\frac{1}{6}$ ſec.

Pars igitur centeſima unitatis in valore ipſius δ gignit temporis diſcrimen illo caſu $\frac{4}{5}$ ſec. hoc vero tantum $\frac{1}{2}$ ſec. unde in obſervatione temporis valde attentum eſſe oportet. Si plano minor tribuatur elevatio, ut motus multo lentior oriatur, dubium eſt, an obſervationibus multum confidere queamus. Leviſſima enim inaequalitas in ſuperficie deſcenſum vehementer perturbare valebit, ita ut ſi experimentum idem aliquoties repetatur, phaenomena multum diſcrepare poſſint. Atque hanc ob cauſam, etſi hic calculum hypotheſi de frictione ſtabilitae ſuperſtruo, tamen ſi concluſiones inde deductas cum experientia conferre velimus, minime perfectum conſenſum expectare debemus.