Johannis Bernoulli, ... Opera Omnia, Tam Antea Sparsim Edita, quam hactenus inedita

Quo continentur ea quae ab Anno 1690 ad Annum 1713 prodierunt

Bernoulli, Johann

Lausannae et Genevae, 1742

Persistent Link: https://doi.org/10.3931/e-rara-3594

[No. XLI.-L.]

N°. XLI.

AVIS

Sur les Problémes dont il est parlé dans le Journal des Savans *du* 2. Décembre 1697.

Journal des Sçavans 1698. 7e. Journal, du 17 Fevr. pag. 78. Edit. de Paris, pag. 120. Edit. de Holl.

MOnsieur Bernoulli, Professeur à *Bâle*, Auteur de ces Problémes, prétend que la solution du principal, qui concerne les figures isopérimétres, n'y est pas entiérement conforme à la vérité. C'est pour cela qu'il veut bien accorder encore quelque temps aux Géométres pour la chercher : Et si enfin personne ne la trouve, il s'engage à trois choses.

1°. A deviner au juste l'Analyse qui a conduit son Frére à la Solution qui se voit dans ce Journal.

2°. Quelle qu'elle soit, à y faire voir des paralogismes, si on la veut publier.

3°. A donner la véritable solution du Probléme dans toutes ses parties.

Il ajoûte, que s'il se trouvoit quelqu'un, qui s'intéressât assez à l'avancement des Sciences, pour proposer quelque prix pour chacun de ces articles; il s'engage à perdre autant, s'il ne s'aquitte pas du premier; à perdre le double, s'il ne réüssit pas au second; & le triple, s'il manque au troisiéme.

REPON-

N°. XLII.

REPONSE

De Monsieur BERNOULLI, *Professeur de* Groningue, *à l'Avis inseré dans le* VII. Journal des Savans *du* 17. Février 1698.

JE vois bien par cet Avis de mon Frére, que l'inconnu *Non nemo* n'a guére envie de se rendre à la raison ; de peur sans doute d'être obligé de s'aquitter de sa promesse ; autrement il accepteroit l'offre que je lui ai faite, de nous en rapporter à la décision de Mr. LEIBNITZ, comme d'un des plus grands Géométres de ce tems; auquel, pour cet effet, j'avois envoyé mes solutions comme en dépôt; & entre les mains de qui on devroit de même remettre le prix, si l'on ne veut passer pour juge & partie tout ensemble. Ou si l'on recuse cet habile Mathématicien, qu'on en dise la raison, & qu'on en nomme un autre. Car je suis prêt de subir le jugement de tout homme désintéressé, & versé dans ces matiéres. Sans cela, quoiqu'on objecte, je ne répondrai plus à rien, & je mépriserai constamment toutes les chicanes qu'on me fera, & que je prévois déja bien qu'on me veut faire. Voici cependant ce que je veux bien encore répondre à cet Avis.

Journal des Savans 1698. 15e. Journal. du 21. Avril. pag. 172. Edit. de Paris, pag. 270. Edit. de Holl.

On est muet comme un poisson sur ma seconde Solution; ce qui fait déja voir qu'on en est parfaitement content, vû l'extrême application où l'on est à me chicaner. Aussi prens-je ce silence pour les *laudes promeritas*, que mon genereux Promoteur m'a fait esperer pour la solution de ce Probléme, qu'il jugeoit, lui-même, insoluble. Pour ce qui est de ma premiére Solution, savoir celle du Probléme sur les figures isopérimétres, (qu'on dit être le principal, quoique, selon

les

les expreſſions de mon Frére dans les *Actes de Leipſic*, ce ſoit l'autre qu'il tient pour le plus difficile,) on veut aſſurer qu'elle n'eſt pas *entiérement* conforme à la vérité. Mais ce mot, *entiérement*, fait aſſez voir, qu'on n'oſeroit diſconvenir qu'elle n'y ſoit du moins conforme en partie; & un peu plus de bonne foi auroit fait avouer, qu'elle y eſt même conforme dans toute l'étenduë du Probléme propoſé; & que s'il s'y eſt gliſſé quelque faute, ce n'eſt tout au plus que dans le ſurcroit d'étenduë que j'ai donné moi-même à ce Probléme. Pourquoi donc vouloir traiter cette Solution de paralogiſme? N'étoit-il pas plûtôt à préſumer que cette faute ne venoit point du tout du fond de la méthode; mais uniquement de quelque circonſtance accidentelle? Effectivement, pour avoir trop hâté, (vû que dès le lendemain du jour, que ces Problémes vinrent à ma connoiſſance, j'envoyai mes ſolutions à Mr. LEIBNITZ, telles qu'elles ont été inſerées depuis dans le Journal du 2. Décembre 1697. * nonobſtant le grand terme qu'on m'avoit donné, & dont j'aurois pu me prévaloir,) pour avoir, dis-je, trop hâté, il ſe gliſſa une faute légére, non dans la méthode, ni dans la ſolution du Probléme propoſé, mais uniquement dans l'application de cette méthode au ſurplus d'étenduë que j'ai donnée moi-même à ce Probléme, au delà de ce qu'il en avoit, tel qu'on l'avoit propoſé: de ſorte que cette mépriſe ne donne atteinte, ni à ma méthode, ni à la Solution requiſe. C'eſt pourquoi je ſoutiens encore, que le Probléme, tel qu'il a été propoſé par mon Frére, (*Déterminer la Courbe entre les iſopérimétres conſtituées ſur une baſe donnée, dont la ſomme des ordonnées élevées à une puiſſance donnée, faſſe un plus grand*) eſt entiérement reſolu dans le Journal du 2. Décembre 1697. & conformément à tout ce que mon Frére demandoit. Ainſi ayant encore, de ſon aveu tacite, reſolu ſon autre Probléme; auquel des deux qu'il attache le prix de ſon *Non nemo*, ce prix me ſera toujours dû. Mais je l'ai dit, & je le dis encore, n'étant

* Cy deſſus N°. XL.

tant point un mercenaire, je le cède aux pauvres; & me chicaner sur le surplus qu'on ne me demandoit pas, c'est-à-dire, sur ce que je n'ai pas donné plus qu'on ne demandoit, ce ne peut être qu'un prétexte, pour leur refuser cette aumône, ou plûtôt pour leur nier cette dette.

J'en pourrois demeurer là, puisque je n'étois pas obligé à davantage. Mais il manque si peu de chose à ma premiére solution, pour lui donner le surplus d'étenduë, que j'ai librement ajouté au Probléme proposé, que trois mots suffisent pour reparer toute la faute de ma précipitation, tant elle est légére: page 462. ligne 7. du Journal du deuxiéme Décembre 1697.* où je dis, *J'appelle b l'intégrale ou la somme des* GH *dx : x*, effacez cela, & substituez simplement, *J'appelle b les ordonnées GH:* Omettez aussi le commencement de ce qui suit, savoir ces cinq mots, *D'où il est évident que;* car ce qui suit n'a point de connexion avec ce qui précéde, comme je me le persuadois alors, pour y avoir été trop vite. Dans la même page, ligne 18. † à la place de, *comme b est à* P Z, *ou GH,* mettez, *comme b est à G T, ayant tiré B T parallèle à la tangente en H;* ou si on l'aime mieux, écrivez seulement, *comme la soustangente de la Courbe B H est à l'abscisse B G.* Tout le reste va bien: Je défie le plus clairvoyant de m'y marquer la moindre faute. TAB. X. N° XL. *Fig.* 1.

Je repéterai ici en general la proprieté très-remarquable, dont je n'avois fait mention que pour le cas particulier de mon Frére; ce qui fera voir en abregé, en quoi consiste toute ma solution generale, & d'où mon Frére pourra juger si elle s'accorde avec sa particuliére: c'est que si GH, ou PZ, doit être non seulement comme une puissance donnée de PF, mais aussi composée de PF & de données en quelque maniére que ce soit; alors on peut toujours trouver une même Courbe, pour que $\int PZ\,dy$ fasse un plus grand, ou un plus petit; & pour que $\int (dt : PZ)$ fasse réciproquement un plus petit, ou un plus grand: Car j'ai trouvé (ce qui est admirable) que quand le

 sinus

* Cy-dessus N°. XL. pag. 210. lig. 5.
† Ligne. 18.

ſinus de l'angle mixtiligne BFP eſt à l'ordonnée GH, ou PZ, en raiſon conſtante, alors la Courbe ſatisfait à l'un & à l'autre. Or, comme j'ai fait voir dans les *Actes de Leipſic*, du mois de Mai mille ſix cent quatre-vingt dix-ſept, * cette proprieté convient à la Courbe de la plus vite deſcente, dans toutes ſortes d'hypothèſes. Donc je puis dire avec raiſon, qu'ayant reſolu generalement le Probléme des *Brachyſtochrones*, j'ai auſſi reſolu celui des Iſopérimétres, avant que mon Frére l'eût propoſé.

Il en eſt de même de ſon autre Probléme de la Cycloïde, dont la portion coupée par une verticale donnée, ſoit parcouruë dans le moindre tems poſſible; puiſque j'ai montré que la ſolution en ſuit immédiatement de ma *Synchrone*, & qu'elle n'en eſt qu'un cas particulier. Il eſt ſurprenant, que mon Frére m'ayant voulu propoſer deux des plus difficiles Problémes qu'il pût imaginer, il ſoit juſtement tombé ſur deux que j'avois déja reſolus; & que la ſolution s'en ſoit trouvée dans le même mois des *Actes* où il me les a propoſés. C'eſt ce qui me fournit encore une réponſe fort ſuccincte aux deux queſtions qu'il me fait: ſavoir,

1. *Que la premiére queſtion ſur les Iſopérimétres, eſt reſoluë par mes Brachyſtochrones, & en même tems qu'elles.*

2. *Que la ſeconde queſtion ſur la deſcente à la verticale donnée, par la Cycloïde cherchée, eſt reſoluë immédiatement par ma Synchrone.*

Quant à l'autre partie du Probléme des Iſopérimétres, où l'on demande que PZ ſoit comme une puiſſance donnée de l'arc BF, (je ne ſais ſi cette partie eſt jointe à l'autre copulativement, ou disjonctivement; les particules *vel, ve,* dont on ſe ſert dans la propoſition, paroiſſant n'exiger de moi que la ſolution de l'une ou de l'autre,) j'ai dit dans le Journal du 2. Décembre 1697. † qu'on aura toujours par ma méthode une équation differentielle, ſinon du premier, du moins d'un plus haut degré, qui déterminera la nature de la Courbe. Comme

* Cy deſſus N°. XXXVII. pag. 190. † Cy-deſſus N°. XL. pag. 210.

me je me contentois alors d'avoir trouvé la méthode qui y conduit; je ne me mis guére en peine d'en faire le calcul; mais depuis ayant eu le temps d'y penser, j'ai trouvé cette équation, $v = \int (ddy : (dt^2 - dy^2))$, pour la détermination de la Courbe, en prenant dt, ou l'élement de la Courbe pour constant: j'entends par v non seulement une puissance donnée de t, ou de l'arc BF, mais toute quantité composée de cet arc BF & de données. Si v est $= t$, la Courbe se construit fort aisément par le moyen de la Logarithmique.

Au reste je remarque, que c'est le paralogisme que mon Frére a cru voir dans ma méthode, qui a donné lieu aux deux premiers des trois articles de son Avis, & qu'il y a été un peu trop vite. Par le premier de ces Articles il s'engage à *deviner au juste l'Analyse qui m'a conduit à la solution de son Probléme sur les Isopérimétres.* Je sais bien qu'il pense, que je me suis servi de la méthode des Courbes, qui se font par la pression des fluides, que je considerois autrefois pour le calcul de la *Voiliére*, comme composée de deux autres pressions collaterales, savoir d'horizontale & de verticale: Qu'il dise de bonne foi, si je n'ai pas deviné au juste sa pensée. Mais il se trompe: car quoique cette méthode (qui n'est qu'indirecte), employée adroitement, conduise aussi à la solution requise; j'en ai pourtant d'autres, & même une directe, qui m'ont toutes fourni une même solution. Ajoutez qu'un si merveilleux accord n'est pas la seule preuve que j'aye de sa bonté, & que (s'il étoit besoin) je pourrois la prouver encore par une démonstration Synthétique, faite à la maniére des Anciens, & sur-tout à l'imitation de celle que PAPPUS a donnée pour prouver que le Cercle est la plus grande des figures isopérimétres. Je conseille donc fraternellement à mon Frére de retracter la gageure qu'il offre pour le premier Article de son Avis; car il perdroit infailliblement: Il est de mon devoir de l'en avertir.

Pour ce qui est du second article, j'espére qu'il aura assez de candeur pour le revoquer, de son propre mouvement, a-

 près

près qu'il aura vu cet éclairciſſement. Il n'y a rien à dire ſur le troiſiéme. Nous en jugerons quand il aura publié la ſolution qu'il nous promet depuis ſi long-temps.

Pour me conformer enfin à l'humeur de mon Inconnu *Non nemo*, (je ne ſaurois le nommer autrement, puiſqu'il ne veut pas ſe découvrir,) qui ne s'intéreſſe à l'avancement des ſciences, qu'autant qu'il y a de l'argent à gagner; je m'engage à perdre le quadruple de ſa promeſſe, ſi avant la fin de cette année il me détermine géométriquement, (comme je promets de le faire, s'il ne le fait pas,) *quelle demi-Ellipſe, de toutes celles qu'on peut décrire dans un plan vertical, ſur un même axe horizontal donné de grandeur, eſt parcouruë en moins de temps, ſuppoſé que le mobile commence ſon mouvement à une des extrémités de cet axe.* Je permets que mon Frére le ſecoure. J'ajoute à ce Probléme les ſix autres que j'ai propoſés dans le Journal du 26. Août 1697. * dont Monſieur le *Marquis de* L'HOSPITAL a reſolu les cinq derniers, pour les exemples particuliers que j'y donne; mais je demande des ſolutions generales; ſur tout pour les Courbes diſſemblables, dont il s'agit dans le quatriéme & le cinquiéme. Voilà toute la Replique, que j'ai cru devoir faire à l'Avis de mon Frére.

N°. XLIII.

AVIS

De Mr. BERNOULLI, *Profeſſeur des Mathématiques à* Bâle, *ſur la Réponſe de ſon Frére inſerée dans le* Journal *du* 21. Avril 1698.

Journal des Savans 1698. 20c. Journal du 26. Mai. pag. 240. Edit. de Paris, pag. 377. Edit. de Holl.

AVANT que de publier ma Réponſe aux ſolutions de mon Frére, je le prie de repaſſer tout de nouveau ſur ſa derniére, d'en examiner attentivement tous les points, & de nous dire enſuite ſi tout va bien; lui déclarant, qu'après que j'aurai donné la mienne, les prétextes de précipitation ne ſeront plus écoutés.

REPON-

* N°. XXXIX.

N°. XLIV.

REPONSE

De Monsieur BERNOULLI, *Professeur de* Groningue, *à l'Avis inseré dans le* Journal du *26.* Mai *1698.*

JE n'ai que faire de repasser sur mes solutions des Problé- mes de mon Frére: Je sai qu'en penser, & mon temps sera assûrément mieux employé à faire de nouvelles découvertes. C'est assez que mon Frére reconnoisse enfin que je possède la méthode, puisque c'est tout ce dont il s'agit ici; la précipitation qu'il croit appercevoir dans ma réponse du 21. Avril dernier, ne faisant, ni pour, ni contre la validité de cette méthode. C'est donc en vain qu'on tâche de se tirer par tous ces détours; & tandis que le *Non nemo* refusera de se soumettre au jugement d'un tiers, comme il l'a refusé jusqu'ici, nonobstant toutes les assignations que je lui ai données; tout le monde verra bien que c'est cause perdue pour lui. Cependant, pour couper pied à toutes ces chicanes, je soutiens.

Journal des Savans 1698. 24. Journal du 23. Juin. pag. 284. Edit. de Paris. pag. 446. Edit. de Holl.

1. *Que j'ai exactement & légitimement resolu par mes Brachystochrones le Probléme des Courbes, dont les ordonnées élevées à une puissance donnée, font un plus grand.*

2. *Qu'entre toutes les Cycloïdes décrites d'une même origine, & sur une base horizontale, celle qui rencontre à angles droits une ligne droite (verticale,) est aussi celle par laquelle le mobile descend le plus vite à cette même ligne droite, en commençant son mouvement à l'origine commune des Cycloïdes.*

C'est là tout ce que ma partie m'a demandé. Ainsi pour répondre juste, c'est à ces deux propositions précisément qu'elle doit répondre: oui, ou non, c'est assez; & se jetter sur le ſurplus d'étenduë que j'ai donnée moi-même à ces deux Problémes, c'eſt prendre le change, ou le vouloir donner, puiſqu'il ne s'agit point du tout de ce ſurplus, quoiqu'il ſoit auſſi parfaitement conforme à la vérité.

Au reſte, puiſque dans ce nouvel *Avis*, on ne fait aucune mention des Problémes que j'ai propoſés à mon *Non nemo* dans ma *Réponſe* du 21. Avril dernier; j'en conclus qu'il n'oſe riſquer ſeulement le quart de ce que j'expoſe, c'eſt-à-dire, de tout ce que je lui ai laiſſé la liberté de parier. Je lui donne encore cinq ſemaines, à compter du jour que ceci paroitra, pour déclarer s'il veut accepter la gageure. Ces Problémes ſont à la portée de l'eſprit humain, puiſque je les ai reſolus: Ainſi, s'il eſt brave, & auſſi habile qu'il veut le paroitre, il doit accepter ce défi, & ne pas reculer.

N°. XLV.

EXTRAIT D'UNE LETTRE

De Monſieur BERNOULLI *de* Bâle, * *du* 26 *Juin* 1698. *Contenant l'examen de la ſolution de ſes Problémes, inſerée dans le* Journal *du* 2. Décembre 1697.

Journal des Savans 1698.

Comme cette Lettre étoit faite dès le temps que l'Avis de Monſieur BERNOULLI, *inſeré dans le Journal du* 17. *Févrir* 1698, *fut publié, il n'a pas jugé à propos d'y rien changer pour l'autre ſolution du* 21. *Avril; ſe reſervant de répondre ſéparément à cette ſolution, qu'il dit être contraire à la premiére.*

30 Journal du 4 Aouſt. pag. 355. Edit. de Paris. pag. 560. Edit. de Holl.

Lorſque je propoſai, dans les *Journaux de Leipſic*, à mon Frére quelques Problémes de Géométrie, ce fut principalement dans la vûë, & dans l'eſpérance qu'il nous en donneroit un jour la ſolution. Car outre que je conſiderois, que nous pouvons avoir bonne part à la gloire de ceux qui ſe rendent habiles dans une Science, dont il n'y a pas long-

* A Mr. VARIGNON.

long-temps que nous leur avons donné les premiéres ouvertures; j'avois encore des raisons particuliéres pour souhaiter qu'il y pût réüssir, & gagner le petit prix qui y a été joint par un de mes amis. Ce que je dis, Monsieur, pour vous faire comprendre le plaisir que j'ai eu à lire la solution de mes Problémes dans le cahier du Journal que vous avez eu la bonté de m'envoyer, & plus encore à y remarquer d'abord quelque conformité avec la mienne, laquelle me faisoit croire qu'il s'en étoit aquitté en habile homme. Mais que ce plaisir a duré peu! Il a été bien-tôt suivi du chagrin de voir mon attente frustrée; lorsqu'en ayant examiné toutes les circonstances avec soin, j'ai trouvé que la solution de mon premier, & principal Probléme, étoit très-défectueuse, & même fausse en tout sens; bien qu'en un cas elle nous fasse trouver, par accident, la pure vérité. Pour prévenir la surprise, qu'un aveu de cette nature pourroit causer; il faut considerer qu'en raisonnant juste sur une hypothése vraye, l'on arrive toujours à une conclusion vraye; qu'en raisonnant juste sur une hypothèse fausse, l'on arrive toujours à une conclusion fausse; (comme l'on voit par les démonstrations qu'on appelle *ad absurdum*;) mais qu'en raisonnant faussement sur une hypothése fausse, il se peut faire, quelquefois, qu'on arrive à une conclusion vraye; une fausseté, pour ainsi dire, corrigeant l'autre. C'est justement ce que je crois être arrivé à mon Frére, qui, selon toutes les apparences, s'est d'abord jetté dans un principe faux, d'où par le moyen d'un Sophisme il a tiré une solution, qui par un bonheur extraordinaire, ne laisse pas d'être en partie véritable. Quoique je ne parle que par conjectures, (il seroit à souhaiter, pour en juger avec certitude, qu'il nous eût donné l'analyse, ou du moins la démonstration de cette solution, comme j'ai fait celle de son Probléme de la plus vite descente:) je m'assure pourtant que ces conjectures sont tellement fortes, que vous ayant expliqué la maniére, dont je m'imagine qu'il s'y est pris, vous m'avouerez qu'il est comme impossible qu'il se soit servi d'une autre.

Mais quand il n'y auroit rien à redire à la solution en elle même, je ne trouve pas encore qu'il puisse prétendre au prix qu'on y a joint; d'autant qu'il n'a resolu le Probléme, ni suivant mon intention, ni pleinement, & en toutes ses parties. Vous vous souvenez sans doute, Monsieur, que j'ai proposé mes Problémes, à l'occasion de celui de mon Frére, dont j'avois donné la solution par des principes de pure Géometrie; en sorte qu'il est visible, que mon intention étoit d'inviter mes Lecteurs à les resoudre par la même voye. Mais il est très-probable, comme je le ferai voir, que mon Frére ne s'est servi dans cette recherche que d'un principe étranger & méchanique, qu'il devoit

pluplûtôt prouver que ſuppoſer; c'eſt pourquoi l'on ne ſauroit aucunement dire, qu'il ait agi ſuivant mon intention. A quoi j'ajoûte, que celui qui aſpire au prix d'un Probléme, eſt obligé d'en donner une ſolution complette, qui ſatisfaſſe à tous les points de la queſtion propoſée. C'eſt ainſi que je fis à l'égard des Problémes propoſés par mon Frére dans ſon Programme de l'année paſſée: j'eus ſoin de les reſoudre tous, & en toutes leurs parties, juſqu'à marquer même un endroit où mon Frére pouvoit s'être trompé, en prenant des Courbes differentes pour une même. Et c'eſt ce qu'on ne peut pas dire de la ſolution qu'il nous donne à préſent de mon Probléme; puiſque, quand j'accorderois tout le reſte, il ne l'a pas reſolu dans la partie qui concerne l'arc BF, ou plûtôt parce qu'il l'a reſolu fauſſement, comme je dirai ci-après.

Mais entrons en matiére, & voyons quelle peut avoir été l'analyſe de mon Frére. Il dit qu'il avoit trouvé la ſolution du Probléme, le même jour qu'il vint à ſa connoiſſance; & dans *l'Hiſtoire des Ouvrages des Savans*, au mois de Juin 1697. Art. 2. * où il nous anonce ſa ſolution, il reſtreint ce jour-là à trois minutes. Ce peu de temps me fit auſſi-tôt ſoupçonner, qu'il ne l'avoit cherchée que par quelque principe étranger, ou indirect, & tel qu'il ſaute naturellement aux yeux; ſachant par expérience que celle qui ſe tire de la pure Géométrie, eſt trop recherchée pour être ainſi trouvée tout d'un coup. Je remarquai auſſi, qu'il n'y avoit rien qui ſe préſentât plus naturellement à l'eſprit, que ce principe de Méchanique: *Que les corps peſans deſcendent, juſqu'à ce que leur centre de gravité ſoit le plus bas qu'il ſoit poſſible*; par exemple, qu'un lambeau de linge BTN ſoutenu par ſes extrémités, B, N, & rempli de quelque liqueur juſqu'à ſa baſe BN, ou bien qu'une corde BTN chargée de differens poids dans tous les points de ſa longueur, doit prendre une figure, telle que le centre de gravité de cette liqueur, ou de ces poids, deſcende plus bas qu'il ne feroit dans toute autre. Et c'eſt, à mon avis, le principe dont mon Frére s'eſt ſervi en cette rencontre. Voici comme il l'applique. Il ſuppoſe un linge BTN rempli juſqu'à la baſe BN d'une certaine liqueur, qu'il conçoit être de differente peſanteur ſpécifique, & telle que le poids de chaque filet PF ſoit comme GH diviſé par BG; d'où il ſuit, que faiſant BP $= y$, PF $= x$, BF $= t$, & GH, ou PZ, $= p$; le poids du petit trapeze PC ſera $p\,dy : x$ (je marque la diviſion par : à la façon de Mr. LEIBNITZ, pour la commodité de l'Imprimeur, vous priant de rendre cette Lettre publique,) ſa force mouvante, *momentum*, à l'égard de la ligne BN ſera $= \frac{1}{2}\,p\,dy$; & par conſéquent la ſomme de ces forces $= \int \frac{1}{2}\,p\,dy$: & cette ſomme devant déterminer

TAB. X. N°. XLV.

la

* Cy-deſſus N°. XXXVIII. pag. 202.

la distance du centre de gravité de la liqueur à la base BN, laquelle par l'hypothèse est la plus grande qu'elle puisse être; il conclut que $\int\frac{1}{2}\,pdy$, ou bien son double $\int pdy$, c'est-à-dire, la somme des trapèzes QZ, ou l'espace BZN, est un *Maximum*, ce que la question demande. Il s'imagine donc que, pour en venir à bout, on n'a qu'à chercher la courbure d'un tel linge, suivant la méthode que j'ai autrefoi pratiquée pour la Voiliére; ce qui se fait ainsi. Par ma Théorie de la pression des fluides, le poids PC étant $pdy : x$, il pousse la portion du linge FC, suivant sa perpendiculaire FD, avec une force FD $= pdt : x$, laquelle par la doctrine de la communication des mouvemens se peut resoudre en horizontale FE$=pdx : x$, & en verticale ED $= pdy : x$. Que toute ces petites forces verticales, qui agissent sur la partie du linge FT, soient ramassées dans le corps L, & toutes les horizontales en M; que ces deux corps tendent les deux filets FI, TI, qui touchent le linge en F & T: il faudra les mêmes puissances en F & en T, pour soutenir les corps L & M, qu'il faut pour soutenir le linge FT; & parce que la puissance T demeure constamment la même, en quelque endroit du linge que l'on applique l'autre F, il s'ensuit que la partie de cette puissance, qui est employée à soutenir le corps L est $= \int(pdx : x)$ somme des forces horizontales, qui agissent sur la partie du linge BF, laquelle jointe au corps M $= \int-(pdx : x)$ somme des forces horizontales qui agissent sur la partie FT, & que la puissance T porte toute seule, fait une somme constante. Ceci étant posé, l'on peut considerer, suivant votre beau Théorème, dont je me sers en beaucoup de rencontres très-utilement, que le corps L est à la partie de la puissance T qui le soutient, c'est-à-dire, $\int-(pdy : x)$ à $\int+(pdx : x)$, comme le sinus de l'angle FIT ou CFV au sinus de l'angle FIK ou FCV; c'est-à-dire, comme CV à FV, ou dx à dy: proportion qui se reduit justement à l'égalité que mon Frére donne pour la Courbe cherchée, qui est $dy = dx\int(pdx:x) : \sqrt{(1-(\int pdx : x)^2)}$ ou [en mettant b au lieu de $\int(pdx : x)$] $bdx : \sqrt{(1-bb)}$, & [dans le cas particulier de $p=x^m$] $dy = x^m dx : \sqrt{(1-x^{2m})}$, comme l'on peut voir en ce que par la substitution de ces valeurs les termes de la proportion s'identifient.

Par un semblable raisonnement on peut prétendre de trouver la Courbe BTN, dont $\int(dt : x^m)$ est un *Maximum* ou un *Minimum*, en feignant que cette Courbe est représentée par une corde chargée dans tous les points F de petits poids réciproquement proportionnels à x^{m+1}; par ce moyen le poids de la portion FC deviendra $dt : x^{m+1}$, la force de ce poids à l'égard de la droite BN, $dt : x^m$, & la somme de ces forces, qui doit marquer la diſtance du centre de gravité de tous les poids à la droite BN (& par conſéquent un *Maximum*) $\int(dt:x^m)$, comme il eſt requis. Le calcul en eſt le même que ci-deſſus; on doit ſeulement remarquer, que le corps M étant nul en cette rencontre, la puiſſance T qui eſt conſtante, & que l'on peut nommer $1:m$, eſt toute employée à ſoutenir le corps L ou $\int-(dt:x^{m+1})$; de ſorte que l'on a cette proportion, $\int-(dt:x^{m+1}):\frac{1}{m}=dx:dy$. D'où l'on tire encore l'égalité précédente $dy=x^m dx:\surd(1-x^{2m})$, comme mon Frére l'a trouvée.

Vous voyez, Monſieur, quelle peut avoir été l'analyſe qui l'a conduit à la ſolution qu'il nous donne de mon Probléme. Il ne faut pas être fort attentif, pour y découvrir deux défauts conſidérables. Il ſuppoſe d'abord, ſans fondement, que s'il y a pluſieurs figures iſopérimétres chargées de poids en certaine proportion par dedans, ou autour de leurs circonferences, le centre de gravité de ces poids eſt plus éloigné de l'axe dans celle que ces poids auroient donné à un linge ou à une corde, que dans toutes les autres. J'avoue que lorſqu'il y a toujours une même quantité de poids, qui agit ſucceſſivement ſur quelque matiére flexible que ce ſoit, ces poids doivent ſe ranger de telle ſorte, que leur centre de gravité ſe trouve le plus bas qu'il ſoit poſſible; mais dans la ſuppoſition précédente, la quantité des poids n'eſt pas la même dans les differentes figures iſopérimétres; ou quand il y en auroit une même quantité, il eſt impoſſible que ces poids faiſant prendre ſucceſſivement à la matiére fluide des figures differentes, puiſſent acquerir ou retenir d'eux-mêmes cette proportion ou diſpoſition qu'on leur ſuppoſe. Soient, par exemple, deux figures iſopérimétres BTN & B*btn*N, dont celle-ci renferme un eſpace B*btn*N plus grand que BTN de tout l'eſpace B*bn*N, puiſqu'on ſait que les iſopérimétres ne ſont pas égales; qu'on conçoive à la place de la figure BTN un linge rempli juſqu'à la baſe BN de quelque liqueur ordinaire, & telle que le poids de chaque filet PF ſoit proportionnel à la longueur PF, c'eſt le ſeul cas poſſible dans la nature; que cette liqueur agiſſant enſuite librement ſur le linge, lui faſſe prendre la figure B*btn*N: Il eſt clair, qu'après cela, elle n'ira plus qu'en *bn*, & que par conſéquent le centre de gravité de l'eſpace *btn* doit bien être plus bas que celui de l'eſpace BTN; mais il n'eſt nullement évident, qu'ajoutant par deſſus celui-là la portion B*bn*N, le centre de la gravité de tout l'eſpace B*btn*N ſoit encore plus bas que celui de BTN, ou de telle autre figure iſopérimétre qu'on voudra. Je ſoutiens même que cela eſt faux, & que la figure d'entre les Iſopérimétres, dont le centre de gravité eſt le plus éloigné de l'axe, n'eſt pas

celle

celle d'un linge rempli de liqueur, mais une autre que j'enveloppe dans cette anagramme, pour donner loiſir à mon Frére de la chercher auſſi, s'il veut perſuader à nos Lecteurs qu'il poſſède la véritable méthode pour ces Problémes : $a^{12} b^2 c^3 e^9 g^2 h i^7 l^6 m^3 n^6 o^4 p^7 q r^2 s^2 t^7 v^4$. *

Cependant quoi que le centre de gravité de l'eſpace abſolu ne ſoit pas le plus bas dans la figure du linge, on peut du moins conclure que le centre de cette portion, qui eſt remplie par la maſſe liquide, doit être plus bas que le centre d'une portion égale, qu'on pourroit couper depuis le ſommet de telle autre figure iſopérimétre qu'on voudra; comme effectivement je le trouve par mon analyſe : marque indubitable de ſa bonté & de ſa juſteſſe. Et c'eſt avec cette limitation qu'il faut entendre ce que j'ai dit du centre de gravité de la Courbe élaſtique, dans les *Actes de Leipſic* de l'an 1694. pag. 276.

L'autre erreur qui ſe trouve dans l'analyſe précédente de mon Frére, n'eſt pas moins conſiderable. Elle conſiſte, en ce qu'il marque la diſtance du centre de gravité des poids par la ſomme de leurs forces; & chacun ſait que cette diſtance ſe détermine par la ſomme des forces appliquée à la ſomme des poids, & qu'ainſi elle ne peut ſe proportionner à la ſeule ſomme des forces, que lorſque la ſomme des poids demeure conſtamment la même; ce qui n'arrive pas ici, comme je viens de le remarquer.

Ibid. 31. Journal, du 11 Aouſt. pag. 361. Ed. de Paris, pag. 570. Édit. de Holl.

Voilà donc deux fauſſetés aſſez palpables dans un même raiſonnement; mais auſſi deux fauſſetés, dont l'une redreſſe l'autre ſi heureuſement, qu'elles font trouver, dans quelques cas, la véritable ſolution; quoique cela ne puiſſe être que l'effet d'un pur hazard, qui ne donne pas plus de droit à la gloire d'avoir réüſſi, qu'auroit celui, qui pour ſoutenir qu'*un caillou eſt de la pierre*, le prouveroit par ce raiſonnement : *Tout homme eſt pierre; Tout caillou eſt homme; Donc tout caillou eſt pierre.* Marque de cela, c'eſt que l'on peut propoſer tel Probléme, où l'une des fauſſetés venant à ceſſer, l'autre nous conduiroit à une concluſion néceſſairement fauſſe : comme ſi l'on propoſoit de trouver entre une infinité de Courbes iſopérimétres BTN, B*t*N, &c. (qui ſeroient toutes chargées dans leurs circonferences, en ſorte que le poids de chaque portion FC fût comme la portion correſpondante de la baſe PQ) celle qui a le centre de gravité de ces poids le plus éloigné de l'axe; car en ce cas on trouve que la chainette eſt une parabole, ainſi que je l'ai dit dans les *Actes* de 1691 au mois de Juin, pag. 288. au lieu que la Courbe cherchée doit être un Cercle; parce que la ſomme des poids étant ici comme la ſomme des PQ, ou comme la baſe BN, & par conſéquent la

 même

* Le ſens de cette Anagramme eſt celui-ci *Illa nempe* (figura) *quæ ſinum anguli tangentis & applicatæ cubo applicatæ proportionalem habet*, par où l'on déſigne la Courbe dont l'équation eſt $dy = x^3\, dx : \sqrt{(a^6 - x^6)}$

même dans toutes les Courbes iſopérimétres, la diſtance du centre de gravité des poids à la baſe eſt véritablement proportionnelle à la ſomme de leurs forces, c'eſt-à-dire, à $\frac{1}{2} \int x\,dy$, laquelle on ſait n'être la plus grande que dans le Cercle.

Mais quoiqu'il en ſoit de tout ceci, il eſt ſeur que la ſolution de mon Frére, généralement parlant, eſt fauſſe; ſur tout, que celle qui regarde l'arc BC, l'eſt même dans tous ſes cas : ce qui me confirme entiérement dans la perſuaſion où je ſuis, que l'analyſe qui l'y a conduit, ne peut être differente de celle que j'ai rapportée, & qui fait trouver ſi juſtement ſa ſolution. Tout le monde ſait, qu'il eſt aſſez ordinaire qu'on arrive à une même vérité par différentes voyes; parce que la vérité n'eſt qu'une, & toujours ſimple : mais le faux étant infini en nombre, il eſt moralement impoſſible qu'on arrive à une même fauſſeté par deux raiſonnemens auſſi plauſibles & auſſi apparens que celui-là. Et c'eſt cette conſidération qui a donné lieu au premier des trois Articles du mois de Février dernier de ce Journal, où je me ſuis engagé à deviner l'analyſe de mon Frére. * Vous jugerez, Monſieur, ſi je puis avoir bien rencontré.

Au reſte, il y auroit lieu de s'étonner, ſi une analyſe auſſi défectueuſe que celle-là, n'étoit pas ſujette à pluſieurs contradictions : Auſſi l'eſt-elle à plus d'une. Premiérement j'obſerve que, ſi au lieu de ſe repréſenter la Courbe, dont $\int x^m\,dy$ eſt un *Maximum*, comme un linge, & celle dont $\int (dt : x^m)$ eſt un *Minimum*, comme une corde : l'on peut tourner la choſe, en ſe ſervant de la conſideration de la corde pour celle-là, & du linge pour celle-ci; & alors on trouvera des ſolutions très differentes de celles qu'on a trouvées. J'obſerve auſſi que la raiſon du choix de mon Frére, qui a préféré le linge pour la premiére, a été, ſans doute, parce qu'il a vu que, s'il faiſoit autrement, la ſolution qu'il trouveroit, ne l'accommoderoit pas pour le cas de $m = 1$, auquel on ſait que la Courbe doit être un Cercle. Je ne parle point ici de ce que, ſuivant cette analyſe, la qualité $\int (dt : x^m)$ de la Courbe cherchée devroit plûtôt être un *plus grand*, qu'un *plus petit*; je remarque ſeulement que cette Courbe ſe peut encore trouver, ſi on la conſidére comme un rayon de lumiére, qui paſſe par un milieu inégalement tranſparent, & dont la rareté à la hauteur BG eſt comme GH; mais qu'elle ne s'accorde avec celle, qui ſe trouve par la conſidération de la corde, que lorſque GH eſt comme une ſimple puiſſance de BG; ce qui eſt peut être cauſe que mon Frére, après avoir donné la Courbe dont $\int p\,dy$ eſt un *plus grand*, généralement pour tout les rapports de GH à eſt

* Ci-deſſus N°. XLI. pag. 214.

GB, ou de p à x, n'oſe faire la même choſe de $\int (dt : p)$, & qu'il ſe contente de nous dire ſimplement quelle eſt la Courbe dont $\int (dt : x^m)$ eſt un *plus petit*; bien que cette précaution ait été aſſez ſuperflue, & qu'il eût pû nous donner hardiment tout ce qu'il a trouvé ſur cette derniére ſuppoſition, l'analyſe qui s'y fonde étant tout autrement évidente que celle qui prend la Courbe pour une corde. Il faut cependant avouer qu'elle n'eſt pas plus propre que les autres pour faire trouver la Courbe dont $\int t^m dy$ eſt un *plus grand*, ou un *plus petit*; puiſque l'on conçoit aiſément que les longueurs BF de différentes iſopérimétres, qui correſpondent à une même hauteur BG, étant differentes, il faudroit que les GH qui y ont raport, & qui marquent la rareté du milieu, fuſſent auſſi differentes à la même hauteur BG; ce qui eſt abſurde. Enfin, Monſieur, cela eſt ſi clair, qu'il n'y a pas lieu de douter, que mon Frére n'ait bien vu & bien connu tout cela. Mais le moyen d'y rémédier! Il s'étoit déja précipité de publier par tout qu'il avoit trouvé la véritable ſolution, & il n'y avoit plus moyen de ſ'en dédire: le temps preſſoit, le terme alloit expirer, & il n'en avoit pas trouvé de meilleure. Il faloit donc publier celle qu'on avoit, malgré l'inévidence, & toutes les contradictions qui s'y rencontrent.

Deux autres Anagrammes, dont peut-être on donnera un jour la clef.

$a^{44}\ b^{2}\ c^{25}\ d^{20}\ e^{45}\ f^{3}\ g^{4}\ h^{2}\ i^{51}\ l^{21}\ m^{32}\ n^{32}\ o^{17}\ p^{19}\ q^{8}\ r^{30}\ s^{39}\ t^{42}\ v^{54}\ x.$

$a^{45}\ b^{2}\ c^{16}\ d^{10}\ e^{50}\ f^{3}\ g^{7}\ h^{2}\ i^{40}\ l^{7}\ m^{15}\ n^{33}\ o^{7}\ p^{12}\ q^{4}\ r^{18}\ s^{33}\ t^{40}\ v^{30}\ x^{4}.$

NB. Le ſens de ces deux Anagrammes eſt celui-ci.

Ex infinitis curvis, genere iisdem, illa gravi celerrimum deſcenſum ad datum perpendiculum concedit, quæ tempus totius deſcenſus, poſitis celeritatibus in ratione ſubduplicata altitudinum, duplum; in ſubtriplicata, triplum; in ſubſeſquialtera ſeſquialterum efficit ſummæ quorundam elementorum, quæ ad reſpectiva tempuſcula rationem habent duplicatam elementorum applicatæ ad elementa Curvæ. Conſtat igitur, quomodo hæc per interſectionem duarum tranſcendentium determinetur. Imo dico amplius, in ſpecialibus quibusvis curvis, quæſitam, etiam unius tranſcendentis & algebraicæ ope, ſemper inveniri.

Tangens lineæ ex infinitis genere iiſdem curvis æquales arcus abſcindentis ita reperitur. Ductis per datum in abſcindente punctum una ex infinitis, ejuſque tangente & applicata, fiat: Ut exceſſus hujus tangentis ſupra ſummam tertiorum proportionalium ad elementa abſciſſæ Curvæ & elementa applicatæ, ad ipſam Tangentem; ita ſubtangens ad quartam; Denotabit hæc portionem axis tangentibus utriuſque abſcindentis & abſciſſæ Curvæ interceptam.

N°. XLVI.

AVIS SUR LA REPONSE

Inſerée dans le Journal du 23. Juin dernier 1698.

Ibid. pag. 364. Edit. de Paris & pag. 575. Edit. de Holl.

JE n'ai jamais cru que mon Frére poſſedât la véritable méthode pour le Probléme des iſopérimétres; mais maintenant j'en doute plus que jamais, vu la difficulté qu'il fait de repaſſer ſur ſes ſolutions. Car enfin pourquoi nous refuſer une choſe ſi-tôt faite, ſi ce n'eſt qu'il ne ſe fie pas lui-même à ſa méthode? S'il n'*a emploié que trois minutes de temps*, comme il le dit, *pour tenter*, *commencer*, & *achever d'approfondir tout le myſtère*, il y a apparence que la revuë de ce qu'il a trouvé, ne lui en coûtera pas davantage: d'ailleurs quand il y en mettroit le double, eſt-ce que ſix minutes, emploiées à cet examen, diminueroient tant le nombre de ſes nouvelles découvertes? Mais quelque peu de peine que cela lui doive donner, je veux bien encore lui faire grace de plus de la moitié, en le priant ſeulement de retoucher ce qui concerne l'arc B F, ou du moins de nous dire, s'il n'y a point de faute d'impreſſion dans ſon égalité $dv = ddy : (dt^2 - dy^2)$ Il ſait que cela fait *une partie de ce que j'ai demandé*, quoiqu'il le diſſimule; & qu'ainſi il eſt indiſpenſablement obligé de reformer ſa ſolution, ſi elle eſt fauſſe, comme je le ſoutiens; à moins qu'il ne veuille ſe déſiſter de ſes prétentions. Autrement, ſur quoi veut-il que nos Lecteurs fondent leur jugement, n'aiant vu de lui ni analyſe, ni démonſtration? (parce que peut-être il n'en oſe donner.) Je déclare que bien loin de refuſer dans tout ce differend l'arbitrage de Mr. LEIBNITZ, je veux encore accepter de bon cœur celui de Mr. *le Marquis de* L'HOSPITAL & de Mr. NEWTON, comme de tous les plus excellens Géométres de ce temps; pourvu qu'ils veuillent ſurſeoir leur jugement, juſqu'à ce que j'aie parlé à mon tour, & que j'aie achevé de répondre aux deux ſolutions que mon Frére nous a données dans le Journal.

Je ne dis rien des nouveaux Problémes, par leſquels mon Frére tâche de faire diverſion dans l'eſprit des Lecteurs; tant parce que n'aiant pas encore ſatisfaction ſur le mien, je ne m'y crois pas obligé, que parce qu'il ſemble n'en vouloir proprement qu'à ſon *Non nemo*. Je ne ſais ſi celui-ci nous en donnera un jour la ſolution; mais je ſais bien qu'il eſt homme à le faire, & peut-être l'a-t-il fait déja. Du moins, ſi l'on eſt ſage, on en demeurera là, & on ne le pouſſera pas davantage.

N°. XLVII.

EXTRAIT D'UNE LETTRE

De Monsieur BERNOULLI, Professeur *de* Groningue, *du* 22 Aout 1698, *pour servir de Réponse à celle de son* Frére Professeur *à* Bâle, *inserée dans les* Journaux *du* 4 & 11, *du même mois.*

*COmme les dates pourroient être ici de quelque consideration, M. V. * croit devoir avertir qu'il a reçu cette Lettre dès le 2 Septembre dernier, & que les vacances du* Journal *n'ont pas permis qu'elle parût plûtôt.* *Journal des Savans* 1698. 40 Journal du 8. Déc. pag. 477. Ed. de Paris. pag. 759. Edit de Holl.

Il est bien surprenant, qu'en voulant ménager une personne, il se trouve qu'on l'offense. Je croyois n'avoir affaire qu'à un Inconnu; je prenois toutes les mesures possibles, pour ne point donner sujet à mon Frére de se plaindre de moi; je tâchois de conserver l'union & la charité qui doit être entre deux fréres; & je me trouve malheureusement trompé: l'extrait de sa Lettre, que je reçus hier, me faisant voir, que tant de mesures & tant d'égards pour lui, n'ont pu l'empêcher de s'intéresser de toute sa force pour cet Inconnu, & de prendre parti contre moi; mais d'une maniére si chaude & si violente, qu'il n'y a personne qui ne voye qu'au lieu de cette louable émulation dont je me flattois, ce n'est qu'une aveugle envie qui le conduit. C'en est fait, son imagination plus forte & plus vive que celle de ces prétendus sorciers, qui croyent se trouver corporellement au Sabbat, l'a séduit; il se laisse entrainer au torrent de ses vaines conjectures; en un mot, il ne paroit plus donner cours à la raison, ni même en état d'entendre tout ce que je lui en pourrois alleguer. Je l'abandonne

* Mr. VARIGNON

ne donc à ses passions ; & je me contenterai de faire voir au Lecteur l'absurdité de ses attaques.

Mon Frére avouë qu'il n'a point encore vû mon analyse ; cependant il la refute : étrange maniére de refuter ! Il s'en forge d'abord une, il me l'attribuë à faux ; il y raisonne à perte de vuë ; il en déduit des absurdités, des contradictions, & je ne sai quelles niaiseries : il n'en faut pas davantage ; il est entêté ; il me les impute toutes ; ce sont des suites de ma prétenduë analyse ; il en parle dans tout le cours de sa Lettre positivement comme de la mienne, & avec une assurance inconcevable. Quelle témérité ! Quelle impudence ! de me vouloir imputer à outrance une analyse, qui n'est point la mienne, dont je me défens, & que je désaprouve moi-même. Que veut-il davantage ? Voilà toute la force de son attaque abattue : Car je lui nie absolument, que l'analyse, qu'il entreprend de refuter, soit la mienne. Il me semble que j'ai été meilleur prophête que lui, en ce qu'au XV. Journal, pag. 176. * j'ai si bien deviné ses conjectures ; mais d'où vient qu'il n'a pas lû cet endroit-là ? J'y dis expressément que ma Méthode est directe, géométrique, & telle qu'il la demande ; que celle des fluides employée adroitement (& non comme mon Frére l'employe) conduit à la même & véritable solution. En vérité, s'il avoit lû sans prévention tout ce que je dis en cet endroit, il se seroit épargné la peine d'écrire tout son galimatias, lequel ne me touche aucunement, & qui n'est pas plus contre moi que contre le grand Turc. Je passe volontiers sous silence toutes ses grosses expressions, seur qu'il s'en repentira dès qu'il reviendra à soi. C'est pourquoi je ne m'arrêterai qu'à ce qui m'oblige indispensablement d'y répondre.

On feroit bien mieux de se taire, que de prétendre nous avoir donné quelque ouverture dans cette Science : Je crois que ces ouvertures se sont données mutuellement ; & si nous voulions entrer en compte, je ne sais à qui on seroit en reste. Je

* N°. XLII. pag. 219.

Je prie ſeulement mon Frére de ſe reſſouvenir à qui il eſt redevable de la premiére Théorie des chainettes, de laquelle il ſe ſert préſentement en Maitre dans toute ſa Lettre: les gens qui le ſavent, ſauront qu'en penſer; ces ſortes de reproches ſentent trop la vanité.

Mon Frére dit, pag. 355 * que *le plaiſir qu'il avoit d'abord, de voir quelque conformité entre ma ſolution & la ſienne, a été bien-tôt ſuivi du chagrin de voir ſon attente fruſtrée; lorsqu'en ayant examiné toutes les circonſtances avec ſoin, il a trouvé que la ſolution de ſon premier & principal Probléme étoit très-défectueuſe.*

S'il a eu du plaiſir, plûtôt que du chagrin, de voir quelque conformité entre ma ſolution de ſon premier Probléme & la ſienne, que ne me rend-il donc juſtice ſur ma ſolution de ſon dernier Probléme, que j'ai reſolu infiniment au delà de ſa condition, & même dans les cas qu'il tenoit lui-même pour déſeſperés? Que ne témoigne-t-il la joye qu'il en a? Qui eſt-ce qui le rend ſi muet? Eſt-ce l'excès du plaiſir qui lui lie la langue?

Il eſt ridicule que mon Frére ſe reſerve, pag. 356 † dans ſon intention des conditions qu'il n'a pas exprimées, ſavoir que *ſon intention étoit d'inviter les Lecteurs à reſoudre ſes Problémes, par des principes de pure Géométrie.* Pourquoi n'a-t-il pas ajouté cette condition dès le commencement? Peut-être pour avoir matiére de chicaner enſuite. Si la queſtion eſt légitimement reſolue, que lui importe de quelle méthode on ſe ſoit ſervi? Il a exigé une ſolution & non pas une méthode: ce n'eſt pas que je n'aye une méthode directe & purement géométrique, qu'il verra un jour; mais il ſuffit préſentement qu'on voye la foibleſſe de cette reſervation mentale, que les honnêtes gens abhorreront toujours comme des artifices frauduleux. S'il eſt permis d'en uſer ainſi, je prouverai ſans peine que la ſolution de ma Brachyſtochrone, donnée par Monſieur NEWTON, n'eſt pas légitime; parce qu'il n'y a ni démonſtration, ni analyſe; parce qu'il l'a tirée peut-être d'un principe méchanique. Il ne me ſera pas difficile non plus

* Cy-deſſus, pag. 223.

† Cy-deſſus, pag. 223.

plus de faire des conjectures, de forger une analyse fausse; enfin de démontrer, par l'argument de mon Frére, que Monsieur NEWTON n'a rencontré la vérité que par le moyen de deux faussetés qui se redressent mutuellement. Mais je suis de trop bonne foi, pour imputer de telles pauvretés à personne.

* Cy-dessus, pag. 224.

Sur la fin de la même page *, mon Frére se vante qu'*il a resolu tous mes Problémes, & en toutes leurs parties, jusqu'à marquer même un endroit où je pouvois m'être trompé, en prenant des courbes differentes pour une même.* Je le prie de me dire cet endroit, & de me marquer, non où je puis m'être trompé, mais où je me suis trompé en effet. De plus il n'a pas trop à se glorifier, d'avoir satisfait à tous mes Problémes. Dans les *Actes* de *Leipsic*, page 216. An. 1697. il confesse ingénûment, que sa solution d'un de mes Problémes * implique une manifeste contradiction: cela s'appelle-t-il resoudre? S'il n'a point d'autre solution, je lui en donnerai une légitime, s'il la souhaite, & même par une courbe géométrique; ou bien qu'il la demande à Monsieur LEIBNITZ, à qui je l'ai communiquée, il y a plus d'un an, & qui l'a trouvée fort bonne.

† Cy-dessus, pag. 225.

Page 358 † Mon Frére s'arroge à tort la Théorie de la pression des fluides suivant la perpendiculaire. Il y a long-temps qu'elle a été connuë de Messieurs MARIOTTE, WALLIS, NEWTON, & d'autres, qui ont écrit sur cette matiére; mais il lui arrive fort souvent de venir *post festum.* C'est ainsi qu'il croyoit être le premier qui pût démontrer, que le Cercle est la plus grande figure de ses isopérimétres, ignorant que PAPPUS l'a déja fait très géométriquement. Il se regardoit aussi comme le premier inventeur des Théorémes pour l'expression des développées dans les Spirales, qu'il se persuadoit m'avoir été inconnus, & long-temps après que Monsieur *le Marquis de* L'HOSPITAL les avoit rendus publics &c.

Dans

* C'est le Probléme proposé au N°. XXX. pag. 158. qui consiste à trouver une courbe telle, qu'en menant d'un point donné une droite quelconque, qui la coupe en deux points, le solide sous un des segmens & le quarré de l'autre soit donné.

Dans l'autre membre de sa Lettre page 362 * mon Frére soutient, qu'*il est moralement impossible qu'on arrive à une même fausseté, par deux raisonnemens aussi plausibles & aussi apparens que les siens.* Mais pourquoi n'est-il pas aussi moralement impossible, que je sois arrivé par deux raisonnemens faux à une même vérité? C'est que le premier l'accommode, pour fortifier ses conjectures.

* Cy-dessus, pag. 228.

Ibid. 41. Journal du 15. Déc. pag. 481. Ed. de Paris 765. Ed. de Holl.

Je remarque, dans ce qui suit, un paralogisme semblable à celui-ci: *Tout caillou est pierre; Donc toute pierre est caillou*: lors qu'il dit que, *si au lieu de se représenter la courbe dont* $\int x^m dy$ *est un* Maximum, *comme un linge; & celle dont* $\int (dt : x^m)$ *est un* Minimum *comme une corde: l'on peut tourner la chose, en se servant de la consideration de la corde pour celle-là, & du linge pour celle-ci;* Car il est bien vrai que si $\int (dt : x^m)$ est un *Minimum*, aussi $\int x^m dy$ sera toujours un *Maximum*: mais la converse ne s'ensuit aucunement; puisque j'ai trouvé par mes analyses directes & indirectes, qu'il y a des courbes où $\int x^m dy$ fait un *plus grand*, sans que pour cela $\int (dt : x^m)$ fasse un *plus petit*. Ce paralogisme de mon Frére vient de ce qu'il n'a pas pris garde, que son Probléme des isopérimétres souffre plusieurs solutions; & c'est pour la seconde fois qu'il choppe contre ce même écueil: Mr. LEIBNITZ lui ayant très bien objecté la même faute, qu'il a déja commise touchant la courbe Paracentrique, lorsqu'il croyoit qu'il n'y en avoit qu'une. C'est ce qui m'a fait prendre la précaution de dire en general, pag. 174 † qu'*on peut toujours trouver une même courbe, pour que* $\int GH dy$ *fasse un* plus grand, *ou un* plus petit, & *pour que* $\int (dt : GH)$ *fasse réciproquement un* plus petit, *ou un* plus grand: pour marquer que mes Brachystochrones satisfont toujours aux Isopérimétres; mais qu'il y a d'autres courbes qui y satisfont aussi, lesquelles ne sont pas des Brachystochrones.

† Cy-dessus, pag. 217.

* Cy-dessus, pag. 228.

Au commencement de la page 363 * il semble que mon Frére soit dans la pensée, qu'en faisant $m = 1$; auquel cas on sait que la courbe doit être un Cercle pour $\int x\,dy$ *Maximum*, elle ne le soit pas de même pour $\int(dt : x)$ *Minimum*. Cependant je puis prouver par une démonstration synthétique, faite à la maniére des Anciens, sans faire attention ni à son linge, ni à sa corde, qu'effectivement le Cercle a cette proprieté; que $\int(dt : x)$ soit un *Minimum*. Je ne saurois donc pénétrer ce qu'il veut dire par *la raison du choix*, que je dois avoir tenu dans cette recherche; puisque c'est une même courbe considerée de l'une & de l'autre façon: c'est à dire, posant que $\int x\,dy$ soit un *Maximum*; ou que $\int(dt : x)$ soit un *Minimum*. Je ne comprends rien non plus dans tout ce qu'il dit de son linge & de sa corde; & je puis dire en conscience qu'en découvrant cette belle convenance entre $\int(dt : GH)$ *Maximum*, & $\int GH\,dy$ *Minimum*, ou entre les Problémes des Brachystochrones & Isochrones, je n'ai pas plus songé au chifon de linge, & à la corde, dont il fait tant de bruit, qu'aux Lapons. Il devroit donc reconnoitre par cette seule découverte que je fis, que ce n'est ni par hazard, ni par la supposition de deux faussetés, que j'ai rencontré la vérité; mais que c'est plûtôt parce que j'en possède la véritable méthode; & que si dans mon premier écrit il se glissa une faute légére, que je corrigeai si aisément dans le second, ce n'étoit tout au plus qu'une faute de précipitation, qui laisse la méthode sans atteinte. Si je ne proposai cette proprieté dans le premier écrit, que pour la simple puissance de BG, c'est parce qu'il ne s'agissoit que de répondre au Probléme de mon Frére, & qu'il n'étoit pas question de pousser ma découverte plus avant. Mais s'il avoit voulu lire ce que je dis à la page 174 † où je la donne pour generale, il auroit pû se passer de son injuste *peut-être*, & suspendre le jugement qu'il tire de ses fausses conjectures.

† Cy-dessus, pag. 218.

Voilà, Monsieur, tout ce que j'ai pû remarquer à la hâte dans la Lettre de mon Frére: touchons un peu à l'Avis qui la la ſuit immédiatement. Il me reproche d'abord que je me vante de n'avoir *emploïé que trois minutes de temps pour tenter, commencer, & achever d'approfondir tout le myſtère.* Qu'il prenne la peine de reflêchir un peu ſur ce que ces Problêmes, publiés dans les *Actes de Leipſic* au mois de *Mai 1697*, ne ſont venus à ma connoiſſance que ſur la fin du même mois ; que ma Lettre aſſez longue, écrite à l'Auteur de *l'Hiſtoire des Ouvrages des Savans* *, s'y trouve inſerée au mois de *Juin* ſuivant ; que l'Auteur l'a retardée, à cauſe de la Figure qu'il y faloit faire graver ; & que ſans cela ma Lettre auroit paru dès le même mois de Mai, ainſi que l'Auteur lui-même me l'a écrit : combien de temps me reſtoit-il donc, pour y avoir pû penſer ? Si mon Frére veut conſiderer tout cela, il trouvera, ſans doute, qu'il n'y a point de gaſconade ſi palpable qu'il ſemble penſer, dans ce que j'ai dit ; du moins il verra qu'il s'en faut bien que je n'y aye employé les trois mois qu'il m'avoit accordés. Mais ce ſont choſes differentes, que d'inventer une méthode, & la mettre en pratique, ou d'en faire le calcul : il eſt quelquefois facile de trouver une méthode, dont l'analyſe devient pourtant très-pénible & très-prolixe. Je dis donc à mon Frére que j'ai bien repaſſé, & plus d'une fois, ſur ma méthode, parce qu'il s'agit là d'examiner s'il n'y a point de faux raiſonnement ; mais de repaſſer ſur la ſolution, ou ſur l'analyſe, comme c'eſt l'affaire d'un écolier que d'examiner s'il n'y a point de faute de calcul, il n'eſt pas beſoin que je m'en mette en peine, me fiant entiérement à ma méthode ; outre que je ſoutiens, comme tout le monde le peut voir, que ce qui concerne l'arc BF n'eſt qu'une partie disjonctive, & non copulative, de ce qu'il a demandé. Mais qu'il examine bien ſa ſolution ; peut-être que ſi elle eſt differente de la mienne, [ce que je ne ſais pas encore] c'eſt elle qui eſt fauſſe : il n'eſt pas infaillible. Il commence dans cet Avis d'admettre tout ; il n'y a plus que l'égalité $dv = ddy : (dt^2 - dy^2)$ qui lui faſſe de la peine. Si par hazard ſa ſolution touchant

* N°. XXXVIII.

la ſimple puiſſance de l'arc BF ou de t, conſiſte en cette égalité $a^m y = t^{m+1}$, laquelle donneroit une conſtruction de la courbe fort aiſée; qu'il ſache que ſa ſolution ſeroit abſolument fauſſe. Quoiqu'il en ſoit, j'ai bien de la joye de ce qu'enfin il veut bien accepter l'arbitrage de Mr. LEIBNITZ; je ſuis auſſi content de celui de Mr. le *Marquis de* L'HOSPITAL, & de celui de Mr. NEWTON: s'il avoit accepté plûtôt cet expédient, il auroit pû éviter bien d'inutiles débats. Il y a long-temps que j'ai envoyé en dépôt à Mr. LEIBNITZ toutes mes ſolutions avec mon analyſe, * & mes méthodes tant directes qu'indirectes, leſquelles il a fort approuvées & louées; bien loin d'y trouver ces ſortes de fauſſetés, qui en ſe redreſſant font rencontrer la vérité. Je prie donc mon Frére d'envoyer auſſi inceſſamment les ſiennes, tant méthode que ſolution & analyſe, à Mr. LEIBNITZ, lequel les rendra publiques toutes à la fois, afin que nos Lecteurs, ſur tout Meſſieurs nos Juges, puiſſent les confronter, les examiner, & en juger. Demeurons-en là donc, & que mon Frére ſe taiſe, juſqu'à ce que nos ſolutions & nos méthodes aient paru: auſſi n'accepterai-je plus rien de lui, à moins qu'il n'ait livré les ſiennes à Mr. LEIBNITZ, & qu'elles ſoient publiées avec les miennes, à même temps, & en même lieu. La juſtice demande auſſi que ſon ami inconnu remette le prix entre les mains de quelqu'un de nos Juges; & il le fera, s'il eſt homme de bien & d'honneur. J'ai déja dit, & je le dis encore, que je n'y prétends rien; mais les pauvres y prétendent.

Quant aux nouveaux Problémes, que je lui ai propoſés; mon Frére dit que cet Inconnu eſt homme à les reſoudre, & me conſeille (ſi je ſuis ſage) d'en demeurer là, & de ne le pas pouſſer davantage. Je ſuis obligé à mon Frére de ce conſeil: mais il me permettra de dire, que cet Inconnu (quel qu'il ſoit) eſt très peu ſage, de n'avoir pas accepté un défi auſſi avantageux pour lui que le mien, s'il eſt vrai qu'il ſoit ſi habile

* Voiez le N°. LXXV.

bile homme, & qu'il en ait déja trouvé les solutions, comme mon Frére nous l'assure.

P. S. *Du* 4 *Octobre*, *reçu entre le* 14 *&* *le* 20.

Comme je n'ai jamais soutenu, que *la figure d'entre les Isopérimétres, dont le centre de gravité est le plus éloigné de l'axe, & celle d'un linge rempli de liqueur, soient une même figure*; Je ne vois pas pourquoi mon Frére s'écrie en l'air, & s'efforce tant pour prouver leur diversité : cependant il ne m'a pas falu tant de loisir pour trouver celle-là; la voici cachée (à l'exemple de mon Frére) sous cette Anagramme,

$a^2\ b\ c^2\ d^3\ e^5\ i^7\ l^2\ m\ o^2\ p^2\ q^3\ r^5\ s^7\ t^6\ v^9\ x^2\ y.$ †

dont je donnerai la clef, après la décision de nôtre differend, quand mon Frére aura donné la sienne. Pour cet effet, (à moins que mon Frére ne veuille faire trainer ce procès en longueur) il me semble qu'il vaudroit mieux le remettre au seul arbitrage de Mr. LEIBNITZ, ou d'un autre, si ce grand homme, tout désintéressé qu'il est, lui paroit suspect. Pour lui ôter toute excuse & tout soupçon de collusion, je m'engage à deux choses très-avantageuses pour lui : la premiére, que je m'en tiendrai à la décision de Mr. LEIBNITZ, quand même il décideroit contre moi : la seconde, qu'en cas qu'il décidât en ma faveur, & que mon Frére ne s'en trouvât pas satisfait, je lui permettrai d'en appeller au jugement de Mr. le *Marquis de* L'HOSPITAL & de Mr. NEWTON, tant s'en faut que je les recuse. Voilà deux articles que mon Frére acceptera infailliblement, s'il ne craint déja pour sa cause. N'est-ce pas assez de condescendance, que de me priver de mon droit d'appeller, pour le ceder entiérement à mon Frére?

Voiés N°. LXVI.

† Le sens de cette anagramme est celui-ci; *Si spatium curvæ quæsitæ vocetur* x, *erit, positis* dt *æqualibus*, dy *æquale* x$\int$rdx.

EXTRAIT

N°. XLVIII.

EXTRAIT

Du Traité de Méchanique *de Monsieur* DE LA HIRE.

PROPOSITION CXX.

Traité de Méchanique. Paris 1695.12°. pag. 421. TAB. XI. N°. XLVIII.

QUE les Corps, qui tombent dans une Cycloïde renversée, arriveront à son sommet dans le même tems, de quelque hauteur que ce soit qu'ils commencent à tomber.

Soit la demi-Cycloïde renversée F E D, dont A F soit la base, & D le sommet renversé, laquelle soit décrite par le demi-cercle A B D. Je dis, qu'un corps, qui tombe dans la courbure de la demi-cycloïde F E, arrivera à même tems au point D, de quelque point E que ce soit qu'il commence à tomber.

Si de tous les points B du demi-cercle générateur A B D, on méne des cordes B D, & que par tous les points B on méne aussi des paralléles K G B E à la base A F, qui rencontrent la Cycloïde en E, & la corde la plus proche en dessus en G, & le Diametre A D en K: on sait, par la nature de la Cycloïde, que sa courbure F E D est formée par des parties égales aux parties des cordes comme B G, qui en sont les touchantes, & qui ne diférent pas de la courbe quand les arcs B B du cercle générateur sont très petits.

Mais, par ce qui est démontré dans la précédente Proposition, que le corps, qui tombe par le plan incliné B G, y emploie un tems, qui est à celui qu'il emploie à parcourir B I paralléle à A D, & comprise entre les B E, comme les longueurs de ces lignes B G, B I, quelque vitesse que le corps ait en B. Et puisque la vitesse qu'il a en G est la même qu'en I, il s'ensuit que la somme des tems que le Corps emploieroit à parcourir chaque portion des cordes de suite, comme B G, avec les vitesses acquises successivement dans la chute de chaque partie B G, sera à la somme des tems que le corps employeroit à parcourir chaque perpendiculaire B I, comme la somme de toutes les parties B G, qui sont égales à la portion de Cycloïde E E D, à la somme de toutes les perpendiculaires B I, qui sont égales à B H, ou K D.

Mais

Mais aussi, par la nature de la Cycloïde, la portion de la courbe E E D est double de la corde B D, qui lui répond dans le cercle générateur A B D. Donc le tems de la chute par la portion de Cycloïde E E D, sera au tems de la chute par la perpendiculaire B H, comme 2 B D à B H.

Enfin, par la même Proposition, le tems de la chute par B D sera au tems de la chute par B H, comme BD à B H: Donc le tems par E E D étant au tems par B H, comme 2 B D à B H, & le tems par B H au tems par B D, comme B H à B D; *en raison égale*, le tems par E E D sera au tems par B D, comme 2 B D, ou la courbe E E D son égale, à B D. Mais, par la Proposition 100, les tems de la chute par les cordes B D sont tous égaux entr'eux; & par conséquent, le tems de la chute par toutes les portions de la Cycloïde E E D jusqu'a son sommet D, qui répondent aux cordes, seront aussi égaux entr'eux, puisqu'ils sont doubles des autres.

C'est par cette proprieté de la Cycloïde, que M. HUGENS DE ZULICHEM a rectifié le mouvement des pendules qu'il avoit appliqués aux Horloges, ce mouvement étant de lui-même inégal. Il a accommodé deux portions de Cycloïde au point de suspension du pendule, ce qui fait que les vibrations de differentes longueurs sont *isochrones*, ou d'égale durée. Car si ce poids du pendule est consideré comme un point, il décrira une Cycloïde semblable à celles qui sont jointes à la suspension, pourvû que le diametre du cercle générateur de ces Cycloïdes soit égal à la moitié de la longueur du pendule.

N°. XLIX.

JOHANNIS BERNOULLI

Investigatio algebraïca arcuum Parabolicorum assignatam inter se rationem habentium.

Demonstratio Isochronismi Descensuum in Cycloide, &c

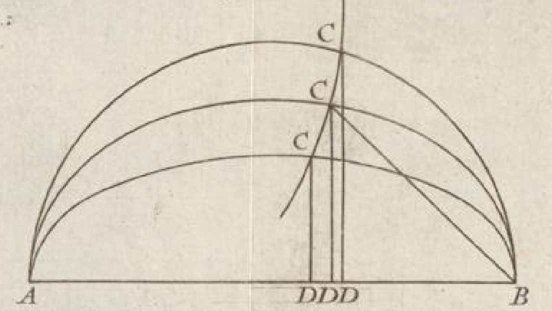
Acta Erudit. Lipf. 1698. Jun. *pag.* 261.

JAM diu eſt quod novimus extenſionem Curvæ parabolicæ & quadraturam ſpatii hyperbolici mutuam connexionem habere; novimus etiam areas hyperbolicas, inter aſymtoti applicatas ſecundum progreſſionem geometricam procedentes, eſſe æquales; quod pariter intelligendum de ipſis ſegmentis hyperbolicis, quibus illæ areæ a trapeziis rectilineis deficiunt: ſunt enim etiam hæc trapezia rectilinea inter ſe æqualia. Unde non difficulter ad aſſignatam aream hyperbolicam, inter aſymtoti applicatas comprehenſam, inveniri poſt alia hujuſmodi area in data ratione.

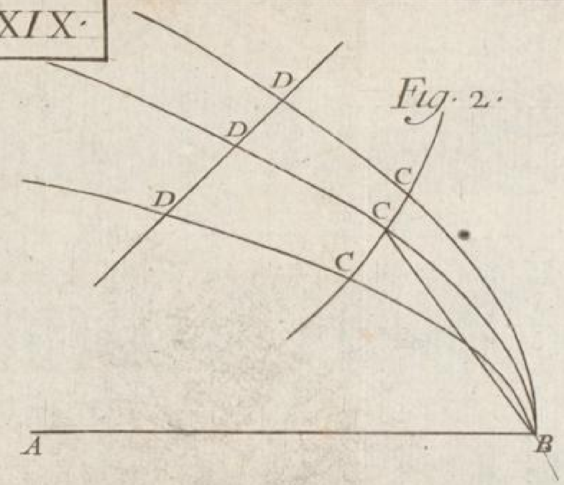
Quod ſi igitur portiones Curvæ parabolicæ in eadem eſſent ratione cum iſtis areis, oppido factum haberemus quod quærimus; hoc eſt, a dato quovis in Parabola puncto, in promtu eſſet ſtatim reſecare arcum, qui haberet ad alium datum rationem datam. Verum enimvero portiones Curvæ parabolicæ, licet generaliter dicantur per quadraturam Hyperbolæ rectificari, non tamen iſtis areis inter applicatas aſymtoti proportionari poſſunt, ſed aliis areis comprehenſis inter applicatas axis conjugati: aſt hæ areæ, ut alteræ illæ, inter ſe æquari non poſſunt, niſi binæ tantum, & quidem ſimiliter ultra citraque axem ſumtæ: unde etiam contingit, ut impoſſibile ſit dato arcui parabolico alium æqualem, ſed diſſimilem, abſcindere. Hoc enim ſi fieri poſſet, ipſam quoque rectificationem Parabolæ, Hy-

N°XXXIX·

Fig· 1·

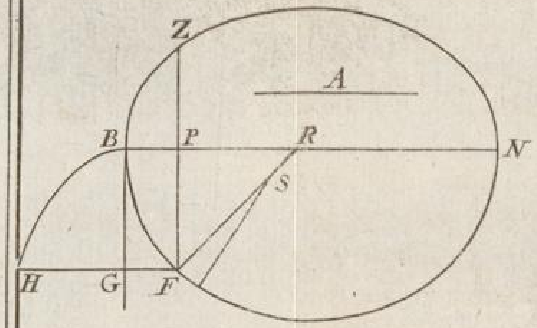


Fig· 2·

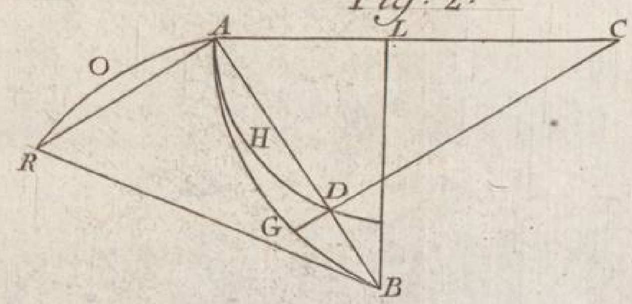


N.° XL·

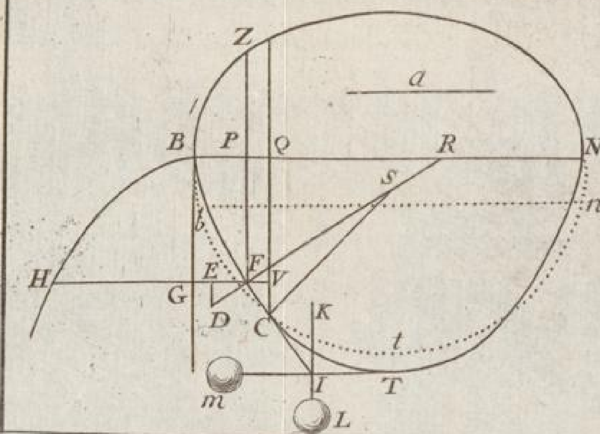
Fig·1·

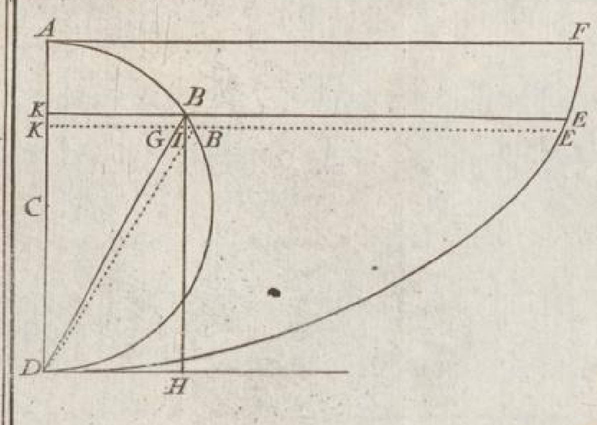


Fig· 2·



N°XLV· N°XLVIII·





Hyperbolæve quadraturam, post se traheret. Hinc etiam accidit, quod etiamsi ratio data sit inæqualitatis, non tamen a quovis, in Parabola ad lubitum assumto, puncto resecari possit arcus quæsitus; sed id ipsum punctum, per constructionem demum, sit determinandum.

Ut igitur modum invenirem comparandi arcus parabolicos, in ratione data quavis inæqualitatis; vidi quidem perfacile, areas illas hyperbolicas super axe conjugato esse prius in data ratione sumendas: sed hoc ipsum est, quod aliquid laboris & industriæ requirere videbatur. Qua tamen via, Algebra duce sola, (hic enim methodus differentialis, aliave infinitesimalis nihil omnino præstat,) redditus fuerim voti compos, ut ostendam; calculi quem inivi capita principaliora indicabo.

Esto Parabola CAN, cujus axis AX, semiparameter AD; in eaque arcus datus BC, ad quem assignandus sit alius MN, rationem habens datam n ad 1. Ducta normali RAδ, centroque A & semi axe AD, descripta Hyperbola æquilatera IDZ; erit, ceu notum est, rectangulum sub AD & arcu parabolico quovis BC æquale areæ, seu trapezio hyperbolico correspondenti HRSI, quod nimirum continetur inter applicatas axis conjugati HR, IS; hoc est, arcus parabolici, BC, MN sunt ut correspondentia trapezia hyperbolica RI, αZ. Res itaque eo recidit ut, dato RI, determinetur aliud αZ, quod se habeat ad illud ut n ad 1; id quod sic efficio. TAB. XI. N°. XLIX. *Fig. 1*

Ductis asymtotis AG, AT, & ad eas applicatis DE, HF, IG, intelligantur AK, AL, AQ, AT, continue proportionales in ratione AF ad AG: palam est, quod ductis applicatis KV, LW, QY, TZ, non solum trapezia hyperbolica KW, LY, QZ, tam inter se, quam ipsi trapezio hyperbolico FI sint æqualia; sed etiam ductis subtensis IH, VW, WY, YZ, ipsa segmenta hyperbolica VW, WY, YZ, sint inter se, & ipsi segmento IH, æqualia: ideoque, si sumantur tot continue proportionales AK, AL, &c. quot sunt unitates in $n+1$, erit numerus segmentorum inter V & Z $= n$; & proinde summa segmentorum VW +

WY + &c. eſt ad ſegmentum HI ut n ad 1. Jam vero, ſi prima continue proportionalium AK ſumatur debitæ magnitudinis, ita ut demiſſis applicatis ad axem conjugatum $V\alpha$, $W\beta$ &c. ſumma trapeziorum rectilineorum $\alpha W + \beta Y +$ &c. ſeu polygonum rectilineum $\alpha VWYZ\delta$ ſit ad trapezium rectilineum RI, ut n ad 1, [quod utique fieri poteſt, quamvis trapezia rectilinea αW, βY &c. inter ſe non ſint æqualia; ſufficit enim quædam majora eſſe, quædam minora, ut ita, per compenſationem, ſimul omnia toties præciſe contineant ipſum RI, quoties n continet unitatem] hoc, inquam, ſi ita factum ſit, manifeſtum eſt aream hyperbolicam $VZ\delta\alpha$, ſeu ſummam trapeziorum hyperbolicorum $\alpha W + \beta Y +$ &c. fore ad trapezium hyperbolicum RI, ut n ad 1: eſt enim totum ad totum, ſeu polygonum rectilineum $\alpha VWYZ\delta$ ad trapezium rectilineum RI, ut ablatum ad ablatum, ſeu ut ſumma ſegmentorum $VW + WY + YZ$ ad ſegmentum HI; utrobique nempe ut n ad 1: ergo etiam reliquum ad reliquum ſeu trapez. hyperb. αZ ad trapez. hyperb. RI, & per conſequens arcus parabolicus MN ad arcum parabolicum BC, datam habebit rationem n ad 1. Id unicum igitur intendendum eſt, ut determinetur punctum K. In hunc finem voco cognitas DE, ſeu AE, $= a$, AF $= b$, AG $= c$; incognitam AK $= x$; erunt AL $= cx : b$, AQ $= ccx : bb$, AT $= c^3x : b^3$, &c. reperietur autem $\alpha V = x\sqrt{\frac{1}{2}} + aa\sqrt{\frac{1}{2}} : x$, $\beta W = cx\sqrt{\frac{1}{2}} : b + aab\sqrt{\frac{1}{2}} : cx$, $\gamma Y = ccx\sqrt{\frac{1}{2}} : bb + aabb\sqrt{\frac{1}{2}} : ccx$, &c. Item $A\alpha = x\sqrt{\frac{1}{2}} - aa\sqrt{\frac{1}{2}} : x$, $A\beta = cx\sqrt{\frac{1}{2}} : b - aab\sqrt{\frac{1}{2}} : cx$, $A\gamma = ccx\sqrt{\frac{1}{2}} : b^2 - aabb\sqrt{\frac{1}{2}} : ccx$, &c.

ideoque

$$\overset{\alpha V + \beta W}{\frac{cx+bx}{b}\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \frac{aac+aab}{cx}\sqrt{\tfrac{1}{2}}}, \quad \overset{\beta W + \gamma Y}{\frac{ccx+bcx}{bb}\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \frac{aabc+aabb}{ccx}\sqrt{\tfrac{1}{2}}}, \text{ \&c.}$$

multiplicatis reſpective per

$$\overset{A\beta - A\alpha\,(\alpha\beta)}{\frac{cx-bx}{b}\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \frac{aac-aab}{cx}\sqrt{\tfrac{1}{2}}}, \quad \overset{A\gamma - A\beta\,(\beta\gamma)}{\frac{ccx-bcx}{bb}\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \frac{aabc-aabb}{ccx}\sqrt{\tfrac{1}{2}}}, \text{ \&c.}$$

prove-

provenit

$$\frac{cc-bb}{2bb}xx+\frac{aacc-aabb}{bc}+\frac{cc-bb}{2ccxx}a^4,\quad \frac{c^4-bbcc}{2b^4}xx+\frac{aacc-aabb}{bc}+\frac{bbcc-b^4}{2c^4xx}a^4,$$

$\alpha V + \beta W$ in $\alpha\beta$ $\beta W + \gamma \Upsilon$ in $\beta\gamma$

2 trapez. rectil. αW 2 trapez. rectil. $\beta \Upsilon$

$$\frac{c^6-bbc^4}{2b^6}xx+\frac{aacc-aabb}{bc}+\frac{b^4cc-b^6}{2c^6xx}a^4, \text{ \&c.}$$

$\gamma \Upsilon + \delta Z$ in $\gamma\delta$

2 trap. rectil. γZ ,   &c.

$$\frac{c^{2n}-bbc^{2n-2}}{2b^{2n}}xx+\frac{aacc-aabb}{bc}+\frac{b^{2n-2}cc-b^{2n}}{2c^{2n}xx}a^4$$

$=$ duplo ultimi trapezii rectilinei.

His omnibus in summam collectis, [quod commode fieri potest, omnes enim primi termini, ut & omnes ultimi, constituunt progressionem geometricam, cujus numerus terminorum est n, medii vero faciunt seriem æqualium] habebitur adhibendo vulgares regulas pro summandis progressionibus geometricis.

$$\frac{c^{2n}-b^{2n}}{2b^{2n}}xx+\frac{naacc-naabb}{bc}+\frac{c^{2n}-b^{2n}}{2c^{2n}xx}a^4 = 2 \text{ sum.trapezior.}$$

rectil. $=$ 2 polyg. rectil. $\alpha VWYZ\delta$: sed multiplicando RH $+$ SI per RS, prodibit duplum trapezii rectilinei RI, $=$ $(cc-bb):2+(aacc-aabb):bc+(cc-bb)a^4:2bbcc$; & secundum ea quæ supra dicta sunt, trapez. rectil. RI est ad polyg. rectil $\alpha VWYZ\delta$, ut 1 ad n, hoc est $(ncc-nbb):2$ $+(naacc-naabb):bc+(ncc-nbb)a^4:2bbcc$ debet æquari $(c^{2n}-b^{2n})xx:2b^{2n}+(naacc-naabb):bc+$ $(c^{2n}-b^{2n})a^4:2c^{2n}xx$; quibus reductis pervenietur ad hanc æquationem quadratam,

$$c^{2n}x^4:(cc-bb)=(nc^{2n}b^{2n}+na^4c^{2n-2}b^{2n-2})xx:$$
$$(c^{2n}-b^{2n})-a^4b^{2n}(cc-bb).$$

Sumta itaque AK = radici hujus æquationis x, factoque ut b^n ad c^n, ita AK ad AT, determinabunt applicatæ KV, TZ puncta V & Z, ex quibus eductæ axi parallelæ VM, ZN, auferent ex Parabola arcum optatum MN, qui scilicet ad arcum expositum BC rationem obtinebit datam n ad 1. *Q. E. F.*

Quod notatu dignum hic venit, atque mihi, ad longe operosiorem calculum ab initio animum præparanti, supra votum tamen & expectationem successit, est, quod trapezia rectilinea αW, βY, &c. formaverint tres progressiones indefinite summabiles; si enim aliæ prodiissent a geometricis diversæ, & non indefinite summabiles, [quod facillime accidere potuisset, si pro incognita alia quævis quam AK accepta fuisset] Problema sane per unam & generalem æquationem pro numero indefinito n solvi non potuisset, sed pro singulis numeris, iisque integris & rationalibus duntaxat, singulares semper de novo æquationes fuissent quærendæ, magis minusve compositæ pro re nata. Hoc vero incommodum opportune sublatum est progressionibus illis geometricis; adeo ut pro numero n, non solum numerum integrum, sed & fractum surdumve quemvis substituere possimus in æquatione generali; quæ ideo tamen nunquam supra quadratam ascendet, unde Problema in omni casu est planum. Suppono autem datarum b & c etiam datas esse potestates b^n & c^n; quarum quidem ratio, si n sit numerus surdus, haberi non potest, nisi mediante Logarithmica.

Dixi supra, non posse citra ipsam rectificationem Parabolæ inveniri duos arcus æquales & dissimiles. Jam dico porro, si ratio data 1 ad n sit inæqualitatis, arcum majorem debere intra limites suos complecti minorem; seu extremitatem unam M majoris fore viciniorem vertici A, quam extremitatem minoris B, alteram vero majoris extremitatem N, ab eodem A remotiorem fore, quam minoris alteram extremitatem C: Id est, si intelligantur BO, CP normales ad axem AX, cadet necessario arcus OP, qui utique ipsi BC est æqualis, totus in-

intra MN. Quod si quis se habere putet aliam methodum, quæ aliud doceat, * per quam scilicet arcus minor BC, vel OP, sive totus, sive pro parte, extra majorem caderet; sciat, ex hoc solo, aut absolute eam esse fallacem, aut inventam se habere quadraturam Hyperbolæ, hactenus frustra quæsitam.

Quod superest, ex iisdem fundamentis, quibus hic usus sum, potest etiam solvi sequens: *Datis duobus, tribus, pluribusve arcubus parabolicis discretis, assignare alium arcum continuum omnibus illis simul sumtis æqualem.* Memorabile quoque est, quod quamvis omnis arcus parabolicus rectificationem recuset, possit tamen inveniri arcus, qui datum alium arcum excedat, vel ab eodem deficiat, excessu, vel defectu rectificabili. Hujusmodi alia multa omitto. †

Hæc jam jam dimissurus accipio D. L. H. †† *Tractatum Mechanicum* A. *1695 Parisiis* impressum, quem aperiens fortuito incidi in Propositionem 120, ubi demonstrare nititur *Author* Isochronismum in Cycloide ab HUGENIO primo inventum. Posteriora tantum hujus demonstrationis verba legens, vidi eum concludere, tempus descensus per Cycloidem esse duplum temporis descensus per Diametrum verticalem circuli generatoris: hoc autem cum absolute falsum scirem; (ipso quippe HUGENIO jam demonstrante, tempus per Cycloidem sese habere ad tempus per Diametrum, in ratione semicircumferentiæ circuli ad Diametrum) animum incessit explorare, unde gravis iste error originem traxerit.

Hanc itaque ut detegerem, demonstrationem memoratam [quam alias, quod de Propositionis veritate diu ante persuasus essem, forsan nunquam legissem,] legere cœpi; sed ulterius progredi non erat necesse, quod in ipso statim limine deprehendi anguem in herba non latentem, sed patentem. Concludit enim positis quotcunque & quibuscunque analogiis $a : b = c : d$ $m : n = p : q; r : s = t : u$, fore aggregatum omnium prima-

* Vide supra Num. XXIII. Art. III. pag. 152. & Nos. XXX. pag. 159. XXXIV. p. 171. 172. XXXV. pag. 177.

† Videatur Nus. sequens.

†† DE LA HIRE. Vide Num. præced.

marum $a + m + r$ ad aggregatum omnium ſecundarum $b + n + s$, ut aggregatum omnium tertiarum $c + p + t$ ad aggregatum omnium quartarum $d + q + u$; quod num verum ſit, judicent alii. Hoc ſaltem dico, quod ſi id verum eſſet, Circulus, Hyperbola, & nulla non figura foret quadrabilis, & nulla non curva rectificabilis: mirabile quoque compendium nobis ſubminiſtraret inveſtigandi dicto citius tempus deſcenſus per quamcunque curvam; foret enim ſemper, ſecundum ratiocinium *Authoris*, tempus per curvam ad tempus per altitudinem ejus verticalem, ut ipſa curva ad ipſam altitudinem.

Ex dictis liquet quanto conſultius fuiſſet, nudam allegaſſe Propoſitionem nobiliſſimi hujus inventi, & Lectorem remiſiſſe ad demonſtrationem *Hugenianam*. Quod ſi vero *Hugeniana*, licet legitima, ſed ob multarum propoſitionum farraginem & perplexitatem non arriſit; laudo propoſitum ſuccinctiorem tradendi, modo tradidiſſet genuinam. Qua in re; cum a ſcopco multum aberraverit, hic ego vices ejus ſupplebo, demonſtraturus breviſſime ac perſpicue, quod *in Cycloide, cujus axis ad perpendiculum erectus eſt, vertice deorſum ſpectante, tempora deſcenſus quibus mobile, a quocunque in ea puncto dimiſſum, ad punctum imum verticis pervenit, ſunt inter ſe æqualia.* Sit Cyclois FDC, cujus axis AD, circulus generator ABD; dico tempus per quamvis portionem GMD fore æquale tempori per integram ſemicycloidem FED. Concipiatur DG diviſa in partes indefinite parvas Mm, ut & DF in alias numero æquales Ee; unde erit partium una in DF, ad partium unam in DG, ut ipſa DF ad DG; aſſumanturjam ex illis partibus duæ homologæ Mm, Ee, id eſt, tales quæ ſecent DF, DG proportionaliter in E, M; ducanturque applicatæ ET, MN, item DB, D.O, DL.

Tab. XI. N°.XLIX. *Fig.* 2.

Quoniam igitur per hyp. DF, DE, & DG, DM, ſunt proportionales, ergo etiam earum ſemiſſes, quæ, per naturam Cycloidis, ſunt DA, DB, & DL, DO, harumque quadrata proportionalia, id eſt DA q : DB q [= DA : DT] = DL q : DO q [= DH : DN], *dividendo* AT : DT = HN : DN, ideoque $\sqrt{}$ AT : $\sqrt{}$ HN [ſeu, per naturam gra-

gravium descendentium, velocitas in E ad velocitatem in M] $= \sqrt{DT} : \sqrt{DN} = DB : DO = DE : DM =$ [per hyp.] Ee : Mm; quoniam itaque velocitas in E est ad velocitatem in M, ut Ee ad Mm, patet quod tempus per Ee sit æquale tempori per Mm; id quod de omnibus aliis portionibus homologis demonstratur: unde tempus per omnes Ee, id est, per DF, erit æquale tempori per omnes Mm, id est, per DG; ergo descensus per DF & DG sunt isochroni. *Q. E. D.*

N°. L.

JOHANNIS BERNOULLI

Theorema universale rectificationi Linearum Curvarum inserviens. Nova Parabolarum proprietas. Cubicalis primariæ arcuum mensura, &c.

EXhibui in *Actis Anni* 1695, *pag.* 374, * modum generalem, *ad datam quamvis Curvam describendi aliam, quarum summa, vel differentia, per arcum circuli sit mensurabilis*, deductum ex generali illo de evolutione condescriptarum theoremate, quod postea ad alias speculatione viam aperuit celeberrimis Viris LEIBNITIO & TSCHIRNHAUSIO in eodem *Actor. Anno m. Novembr.* † Ex eo tempore cogitare cœpi, an non forte, alia combinatione Curvarum, id fieri possit per solas lineas rectas; seu an non ad Curvam propositam inveniri possit alia, quarum summa, vel differentia, absolute rectificabilis existat; nec spe vana. Cum enim non ita pridem hæc in mentem redirent, sequens insigne theorema se mihi obtulit: *Si positis cujusvis curvæ datæ coordinatis x & y, fiat alia curva cujus coordinatæ sint* $xdy^3 : dx^3$ & $3xdy^2 : 2dx^2 - \frac{1}{2}\int(dy^2 :$

Acta Erudit. Lips. 1698. Octob. pag. 462.

* Supra N°. XXVI.
† Nis. XXVIII. & XXIX.

$\frac{3}{2}\int(dy^2 : dx)$ *erunt ambæ curvæ, genitrix & genita, simul sumtæ rectificabiles: Facta enim recta, quæ se habeat ad abscissam curvæ datæ* x, *ut cubus tangentis ad cubum subtangentis in eadem curva data; æquabitur hæc recta longitudini curvarum simul sumtarum: id est, expressione litterali adhibita, si elementum curvæ datæ vocetur* dt, *longitudo ejusdem* D, *longitudo genitæ* G, *erit* $D + G = xdt^3 : dx^3$. *Notandum hic si Curva proposita versus axem sit cava & [posita* dx *constante],* $3\,xddy$ *sit majus quam* $dxdy$, *tunc differentia curvarum dicta rectæ æquatur.*

Non opus est indicare, qua via, quave analysi huc pervenerim; calculus foret nimiæ prolixitatis: si tamen alicui animus erit asserti veritatem explorare, poterit id commodissime synthetico more præstare; differentiando scilicet assignatam hanc ex constructione rectam, & quod prodit conferendo cum aggregato elementi curvæ genitricis & elementi genitæ: reperiet enim utrobique æqualitatem. Hinc, sive curva proposita algebraïca sit, sive transcendens primi gradus, si modo $dy^2 : dx$ sit summabile, curva genita tunc semper erit algebraïca: datur namque algebraïcæ ratio dx ad dy. Hinc etiam, quod incognitum hactenus fuit, & inter rara hujus sæculi inventa numerari potest, sequitur omnem Parabolam cujusvis gradus, aut per se, aut cum alia alius gradus Parabola conjunctam, absolute esse rectificabilem: per se, si exponens parabolæ sit $= (1 + 2p) : 2p$ [per p intelligo quemlibet numerum integrum]; cum alia vero generaliter in omni casu. Esto enim datæ parabolæ gradus seu exponens n: dico eam cum alia parabola cujus exponens $= (2n - 1) : (3n - 2)$ junctim admittere rectificationem; qualiscunque etiam sit numerus n, sive fractus, sive integer, sive surdus, sive rationalis, sive affirmativus, sive negativus. Unde pro Parabola communi *Archimedea* reperitur parabola cubico-biquadratica, id est cujus exponens est $\frac{3}{4}$, seu ubi biquadrata applicatarum sunt in triplicata ratione abscissarum. Hanc vero rectificationem, in quam alia quoque via particulari incidi, quoniam non pos-

tre-

tremam proprietatem conſtituit hujus ab omni antiquitate decantatiſſimæ curvæ, placet hic plenius exponere.

Eſto (*Fig.* 1.) AB Parabola communis, ex B agatur normalis BI ſecans axem AI in I; & IM normalis ad BI, occurrens diametro BM in M: reſecetur IK = ſubnormali ſeu ſemiparametro. Deſcripta jam Parabola cubico-biquadratica AG, cujus parameter ſit $= 3\frac{13}{81}$ parametri Parabolæ AB, ſumatur abſciſſa AH = tertiæ proportionali ad parametrum, ſeu ad duplam IK & ad BK, appliceturque HG. Dico curvam GAB compoſitam ex portionibus parabolicis AG, AB eſſe æqualem lineæ rectæ IM. TAB. XI. N°. L. *Fig.* 1.

Si hæc porro conferantur cum iis, quæ primus inveni pro ſectione arcuum parabolicorum in data ratione, quæque in *nupero Junio* * edita habentur, ubi ſimul innui ad arcum quemvis datum Parabolæ communis inveniri poſſe, ope methodi meæ, alium arcum in eadem Parabola, ita ut datam habeant differentiam rectificabilem: apparebit facile ratio comparandi quoque arcum Parabolæ cubico-biquadraticæ AG, cum arcu vel arcubus quibuſdam Parabolæ communis. Unde novum emerget inventum, meo judicio haud quaquam ſpernendum, quod facem accenderet inſignem ad menſurandam Parabolæ longitudinem per meras rectas lineas, ſi modo id poſſibile eſſet: perſpicio quippe arcum AG, cum aliquo arcu vel arcubus Parabolæ AB, poſſe habere rationem algebraïcam. Jam vero aliquis operæ pretium ageret, ſi oſtenderet arcum AG, non cum aliquo tantum, ſed cum ipſo arcu AB, comparabilem eſſe: haberet profecto rectificationem Curvæ parabolicæ & quadraturam Hyperbolæ dudum fruſtra quæſitam; dividenda enim tunc tantum adhuc foret recta IM in ratione inventa; diviſæque hinc una pars arcui AG, altera arcui AB æquaretur. Sed id ipſum quod quadraturæ Hyperbolæ impoſſibilitas pro demonſtrata fere habeatur, invictum eſt argumentum, arcus Parabolæ cubico-biquadraticæ cum quibuſdam arcubus,

* N°. præced.

non cum omnibus Parabolæ comparabiles esse: insolitum quidem hoc est, sed tamen verum.

Quod si ulterius pergamus, & inquiramus, qualis exponens n debeat assumi, ita ut genitrix & genita fiant eædem curvæ, oportet æquari n cum $(2n - 1):(3n - 2)$ id quod dat $n = \frac{1}{3}$: adeoque est *Parabola cubicalis primaria*, quæ cum se ipsa comparata rectificari potest, seu in qua assignari possunt duo arcus quorum differentia est rectificabilis. Hic ergo incidimus, quasi fortuito, in perelegantem hujus famosissimæ curvæ alias irrectificabilis proprietatem; quod inventum alteri illi *Heuratiano*, seu, prout WALLISIUS contendit, *Neliano*, quo primum Parabola cubicalis secundaria rectificari cœpit, nobilitate non modo non cedit, sed multis parasangis præcellit, si id æstimare velimus ex difficultate eruendi; vilescit enim hoc, & desiit esse novum, ex quo methodi infinitesimales inclaruere, cum earum nulla sit, quæ non, immediate & facillime, hujus Curvæ parabolicæ secundariæ rectificationem exhibeat, & vel primo mentis obtutu. Nostra vero primaria, postquam omnes Geometrarum ejus dimensionem quærentium sudores & labores actenus elusit, nobis in tantum obsecundavit, ut arcuum suorum differentia mensuram, rectis lineis algebraice determinabilem, a nobis acciperet. Nec video, qua alia via, quam hic præscripta, ad hujus cognitionem perveniri potuisset. Egregiam adeoque habuissem occasionem, si, suppressa methodo, aliis idem problematice proponendo, vanæ gloriolæ litare voluissem: sed malui publicæ quam propriæ utilitati prospicere, exponendo inventum sine pompa. In vulgari Parabola conica eandem rem præstiti, ut supra dixi: illud autem, cum ex nuda attentione ad Hyperbolam ultro fluat, præ hoc novo nihili facio. Sit itaque Parabola cubicalis primaria ABC, (*Fig.* 2.) in qua arcus expositus BC; a punctis B & C ducantur applicatæ BF, CG: sumatur AI æqualis tertiæ proportionali ad vigecuplam septuplam AF, & ad parametrum Parabolæ; fiatque ut AG ad AF, ita AI ad AH; ad puncta I & H ductæ applicatæ IE, HD resecabunt arcum DE, qui ablatus ex arcu

TAB. XI. N°. L. *Fig.* 2.

arcu BC relinquet differentiam rectilinearem, quæ ita invenitur: Duc tangentes CP, BK, occurrentes AP normali ad axem in punctis P, K: ex quibus age axi parallelas PN, KL, quæ secent normales ad curvam CN, BL, in N, L: erige perpendiculares NO, LM, tangentibus productis occurrentes in O, M. Dico differentiam rectarum OP, MK esse æqualem differentiæ arcuum parabolicorum CB, ED.

N°. LI.

ART. I.

JAC. B. * DEMONSTRATIO SYNTHETICA

Problematis de Infinitis Cycloidibus, absque adminiculo infinite parvorum.

Item Constructio aliorum huic affinium a se propositorum mense Maio A. 1697.

CUM sub finem anni 1696. solutione mea Problematis de Curva celerrimi descensus, quam omnibus nunc constat esse Cycloidem, *Lipsiam* paranda occuparer; animum subiit aliud, huic quidem quoad materiam affine, sed quoad applicationem methodi de *Maximis & Minimis* plane diversum, quo videlicet porro quæritur, quænam ex infinitis Cycloidibus illa sit, per quam descendens grave ad datam quandam positione lineam citissime pertingat. Et quoniam ex consideratione similitudinis Cycloidum solutioni viam patere illico videbam; indeque animadvertebam modum operandi in omnibus aliis Curvis similibus eundem existere; imo non ad descensum tantum celerrimum, sed ad plurimas alias Curvarum functiones applicari posse; quemadmodum si quæratur ex infinitis Curvis similibus illa, cujus inter commune principum & datam positione lineam interceptus, vel arcus, vel area, vel nata conversione arcus superficies, aut spatii conversione solidum sit minimum, &c. constitui Problema, non minus utile quam elegans, publice proponere; ut & alii ejus contemplationi vacare, mecumque in partem solutionis venire possent. Ad imitationem itaque *Fratris,*

Acta Erudit. Lipf. 1697. Maj. pag. 223.

* *Jacobi* BERNOULLI.