

**www.e-rara.ch**

**Johannis Bernoulli, ... Opera Omnia, Tam Antea Sparsim Edita, quam hactenus inedita**

Quo continentur ea quae ab Anno 1727 ad hanc usque diem prodierunt - in usum illustr. March. Hospitalii conscriptae ; Accedunt Lectiones mathematicae de calculo integralium

**Bernoulli, Johann**

**Lausannae & Genevae, 1742**

**ETH-Bibliothek Zürich**

Shelf Mark: Rar 5026: 3

Persistent Link: <https://doi.org/10.3931/e-rara-3596>

No. CXLIII. Sur les courbes algébriques et rectifiables tracées sur une surface sphérique.

---

**www.e-rara.ch**

Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien - von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material - from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d'imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L'éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes - des débuts de l'imprimerie jusqu'au 20e siècle.

e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

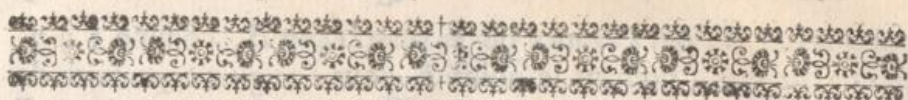
---

**Nutzungsbedingungen** Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titelinformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

**Terms of Use** This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

**Conditions d'utilisation** Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

**Condizioni di utilizzo** Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]

N<sup>o</sup>. CXLIII.SUR LES COURBES ALGÈBRIQUES ET  
RECTIFIABLES TRACÉES SUR UNE SURFACE  
SPHÉRIQUE.

## P R O B L È M E.

*Décrire sur une surface sphérique une Courbe algébrique qui  
soit rectifiable.*

## S O L U T I O N.

## I.

TAB.  
XLIX.  
N<sup>o</sup>.  
CXLIII.  
& III.  
Fig. 3 & 4.

**S**OIT *RST* [Fig. 3 & 4] un grand Cercle de la sphère supposé parallèle à l'horison, pour aider l'imagination, dont le centre est *C*. De chaque point *a, b, c, d*, de la courbe cherchée, soient conçus abaissées sur le plan du cercle *RST* les perpendiculaires *aA, bB, cE, dD*, qui forment la courbe de projection *ABED*, dont il faut maintenant chercher la nature, & qu'il faut décrire, parce qu'on décrira ensuite facilement la courbe cherchée, en élevant perpendiculairement sur le plan du cercle de chaque point *B* les droites *Bb* qui rencontrent la superficie sphérique dans les points *b*. Pour cela, soit conçue la courbe de projection *ABD* étendue séparément en ligne droite *αβδ*, qui soit comme l'axe des appliquées *αα, ββ, εε, δδ*, égales respectivement aux droites *Aa, Bb, Ee, Dd*, prenant  $\alpha\beta = AB$ ,  $\alpha\varepsilon = AE$ , &c. D'où résulte une nouvelle courbe *abcd*, dont les parties *ab, ac*, &c. seront respectivement égales aux arcs *ab, ac*, &c. de la courbe sur la superficie sphérique.

II.

## I I.

Cela supposé, je change le Problème proposé en celui-ci: Transformer l'axe rectiligne  $\alpha\beta\delta$  en un curviligne  $ABD$ , de maniere qu'ayant pris un arc quelconqué  $AB$  égal à une abscisse quelconque  $\alpha\beta$ , la hauteur  $Bb$  du point  $b$  sur le point  $B$  de la projection, soit égale à l'appliquée d'une ligne donnée  $abd$ . Si donc  $abd$  est algébrique, & de plus algébriquement rectifiable, comme le sont les droites & une infinité de Paraboles; de plus, si parmi toutes les lignes  $abd$ , il s'en trouve quelqu'une qui admette un axe courbe  $ABD$  construisible algébriquement, l'on voit que cette courbe décrite sur la surface de la sphère, dont  $ABD$  est la projection, sera algébrique, & algébriquement rectifiable, comme ayant chacun de ses arcs égaux à chaque  $ab$ .

## I I I.

Prenons donc la plus simple de toutes les lignes algébriques rectifiables  $abd$ , savoir la ligne droite [ que je trouve très-propre à nôtre dessein, car une autre, comme la seconde Parabole cubicale, qui est aussi rectifiable, ne réussit pas ]. Ayant tiré  $df$  parallèle à l'axe  $\delta\alpha$ , soit la raison de  $af$  à  $fd$  comme 1 à  $n$ , & ainsi  $fa:da = 1:\sqrt{(nn+1)}$ , ou [ faisant  $nn+1=mm$  ]  $af:da = 1:m$ . Maintenant, pour changer l'axe rectiligné  $\alpha\beta\delta$  dans le curviligne  $ABD$ , ayant tiré du centre  $C$  les rayons infiniment proches  $CS$ ,  $CT$ , qui coupent la courbe  $ABD$ , dans les points  $B$ ,  $E$ , & prenant  $R$  pour le commencement des arcs variables  $RS$ ,  $RT$ , &c. soit fait  $RS=x$ ,  $CB=y$ , le rayon  $CS=1$ ,  $ST=dx$ ,  $FE=dy$ ; ayant décrit le petit arc concentrique  $BF$  qui sera  $=ydx$ , on aura  $BE=\sqrt{(yydx^2+dy^2)}=\beta\epsilon$ , la hauteur du point  $b$  sur le plan du cercle, c'est-à-dire  $bB=\sqrt{(1-yy)}$ , & la différence  $d(bB)=-ydy:\sqrt{(1-yy)}$ .

## IV.

## IV.

Puisque donc  $d(bB): BE = af: df = 1: n$ , l'on aura  
 $\frac{-y dy}{\sqrt{(1-yy)}}: \sqrt{(yy dx^2 + dy^2)} = 1: n$ ; &  $\sqrt{(yy dx^2 + dy^2)} = -ny dy: \sqrt{(1-yy)}$ , ou  $yy dx^2 + dy^2 = nny dy^2: (1-yy)$ .  
 Donc  $yy dx^2 = nny dy^2: (1-yy) - dy^2 = ((nn+1)yy dy^2 - dy^2): (1-yy)$ , & par là on aura  $dx = dy \sqrt{((nn+1)yy - 1): (1-yy)} = [ \text{à cause de } nn+1 = mm ] dy \sqrt{(mmyy - 1): (1-yy)} = (mmyy dy - dy): y \sqrt{((1-yy)(mmyy - 1))} = mmyy dy: \sqrt{((1-yy)(mmyy - 1))} - dy: y \sqrt{((1-yy)(mmyy - 1))}$ .

## V.

La première partie s'intègre comme il suit. Soit fait  $yy = 2z$ , & l'on aura  $mmyy dy: \sqrt{((1-yy)(mmyy - 1))} = mmdz: \sqrt{((1-2z)(2mmz - 1))} = mmdz: \sqrt{(-1 + (2mm+2)z - 4mmz^2)} = mmdz: \sqrt{((mm-1)^2 - 4mmz(2mmz - 1))} = \frac{2m^3 dz: (mm-1)}{\sqrt{(1 - (\frac{4mm}{mm-1}z - \frac{mm+1}{mm-1})^2)}} [ \text{en substituant pour } 2z \text{ sa valeur } yy ] = \frac{2m^3 y dy: (mm-1)}{\sqrt{(1 - (\frac{2mm}{mm-1}yy - \frac{mm+1}{mm-1})^2)}} = \frac{\frac{1}{2}m \times 4mmy dy: (mm-1)}{\sqrt{(1 - (\frac{2mm}{mm-1}yy - \frac{mm+1}{mm-1})^2)}}: \text{Donc } \int \frac{mmy dy}{\sqrt{((1-yy)(mmyy - 1))}} = \frac{1}{2}m \int \frac{4mmy dy: (mm-1)}{\sqrt{(1 - (\frac{2mm}{mm-1}yy - \frac{mm+1}{mm-1})^2)}} \text{ c'est-à-dire, } = \text{à un arc de cercle pris } \frac{1}{2}m \text{ fois, dont le rayon } = 1, \text{ \& le sinus droit } = \frac{2mm}{mm-1}yy - \frac{mm+1}{mm-1}: \text{ soit appelé cet arc } A.$

## VI.

## VI.

L'autre partie —  $dy: y \sqrt{(1-yy) \times (mmyy-1)}$  s'intégre de cette maniere: soit divisé chaque terme par  $y^3$ , l'on a

$$\frac{-dy: y^3}{\sqrt{(1:yy-1)(mm-1:yy)}} = [\text{faisant } 1:yy = 2z] dz:$$

$$\sqrt{(2z-1)(mm-2z)} = dz: \sqrt{(-mm + (2mm+2)z - 4zz)} = dz: \sqrt{(\frac{1}{4}(mm-1)^2 - (2z - \frac{1}{2}(mm+1))^2)}$$

$$= \frac{2dz: (mm-1)}{\sqrt{(1 - (\frac{4}{mm-1}z - \frac{mm+1}{mm-1})^2)}} [\text{en substituant pour } 2z \text{ la}$$

valeur qui est ici  $yy]$

$$\frac{-2dy: y^3 (mm-1)}{\sqrt{(1 - (\frac{2}{(mm-1)yy} - \frac{mm+1}{mm-1})^2)}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot -4dy: y^3 (mm-1)}{\sqrt{(1 - (\frac{2}{(mm-1)yy} - \frac{mm+1}{mm-1})^2)}} . \text{ Donc } f(-dy: y \sqrt{(1-yy)}):$$

$$(mmyy-1) = \frac{1}{2} f \frac{-4dy: y^3 (mm-1)}{\sqrt{(1 - (\frac{2}{(mm-1)yy} - \frac{mm+1}{mm-1})^2)}} \text{ c'est-à-dire}$$

à la moitié d'un arc de cercle dont le rayon = 1 & le sinus droit =  $2: (mm-1)yy - (mm+1): (mm-1)$ . Soit appellé cet arc  $B$ .

## VII.

Nous avons donc, par les §. 5 & 6,  $\frac{1}{2}mA + \frac{1}{2}B = f(mmydy: \sqrt{(1-yy)(mmyy-1)}) - dy: y \sqrt{(1-yy)(mmyy-1)}$   
 = [§. 4]  $f(dy \sqrt{(mm+1)yy-1}): y \sqrt{(1-yy)}) = fdx_2$   
 ou  $mA + B = 2fdx = 2x$ .

## VIII.

Pour la construction de cette Equation, voici comme il faut s'y prendre. Soit  $SLM$  [Fig. 5] encore un grand cercle de la sphère, dont le rayon  $CL = 1$ ; soit pris dedans le sinus  $MN$

Joan. Bernoulli Opera omnia Tom. III.

Gg =

T A B.  
 XLIX.  
 N<sup>o</sup>. CXLII.  
 & CXLIII.  
 Fig. 5.

$= (2mmy - mm - 1) : (mm - 1)$ , & encore l'autre sinus  $SR$   
 $= (2 : yy - mm - 1) : (mm - 1)$ , l'on aura l'arc  $LM = A$   
 & l'arc  $LS = B$ . Si donc on prend l'arc  $LM$ ,  $m$  fois, &  
 qu'on lui ajoute l'arc  $LS$ , la moitié de la somme des deux arcs  
 donnera l'arc cherché  $x$ , ou [ dans la *Fig. 3* ] l'arc  $RS$  pour un  
 $y$  quelconque, ou  $CB$ .

## IX.

Pour avoir une équation algébrique entre  $y$  & le sinus de  
 l'arc  $x$  qui détermine la nature de la courbe de projection  $ABD$   
 [ *Fig. 3* ] & la courbe algébriquement rectifiable sur la surface  
 sphérique, il faut choisir pour  $m$  quelque nombre rationnel [ car  
 on aura différentes courbes selon la diversité du nombre  $m$  ].  
 On fait que le sinus d'un arc  $A$  étant donné, l'on a algébri-  
 quement le sinus d'un arc  $mA$  multiple ou soumultiple, & que  
 les sinus des arcs  $mA$  &  $B$  étant donnés, l'on a algébrique-  
 ment le sinus de la somme des arcs  $mA + B$ , & le sinus de  
 la moitié de cette somme. Car faisant le rayon, ou sinus to-  
 tal  $= 1$ , le sinus de l'arc  $mA = S$ , & le sinus de l'arc  $B = T$ ,  
 l'on trouve le sinus de la somme  $mA + B = T \times \sqrt{(1 - SS)}$   
 $+ S \sqrt{(1 - TT)}$ .

Ainsi donc si l'on appelle  $v$  le sinus de l'arc indéterminé  $x$  ;  
 l'on aura le sinus de l'arc double  $2x = 2v \sqrt{(1 - vv)}$  ; puis-  
 que donc les arcs  $mA + B$  &  $2x$  doivent être égaux, il faut  
 que leurs sinus soient aussi égaux ; d'où l'on tirera l'Équation  
 algébrique entre les fonctions de  $y$  &  $v$ , qui déterminera la  
 nature de la courbe de projection, & la courbe que l'on cher-  
 che sur la surface de la sphère, & qui sera celle-ci,  $T \times$   
 $\sqrt{(1 - SS)} + S \times \sqrt{(1 - TT)} = 2v \sqrt{(1 - vv)}$  ;  $S$  &  $T$  étant  
 données par  $y$ . Donc, &c. C. Q. F. T.

## X.

EXEMPLE. Soit pris le nombre  $m = 2$ , & par conséquent

$n = \sqrt{mm - 1} = \sqrt{3}$ ; l'on aura le sinus de l'arc  $A$ , ou  $(2mmy - mm - 1) : (mm - 1) = (8yy - 5) : 3$ ; le sinus de l'arc  $B$ , ou  $(2 : yy - mm - 1) : (mm - 1) = (2 - 5yy) : 3yy$ ; le sinus de l'arc  $mA$ , ou  $2A = \frac{16yy - 10}{3} \sqrt{\frac{-16 + 80yy - 64y^4}{9}}$ , &

partant le sinus de la somme des arcs  $2A + B = \frac{2 - 5yy}{3yy} \times \sqrt{(1 - \frac{(16yy - 10)^2 \times (-16 + 80yy - 64y^4)}{81})} + \frac{16yy - 10}{3} \times$

$\sqrt{\frac{-16 + 80yy - 64y^4}{9}} \times \sqrt{(1 - \frac{(2 - 5yy)^2}{9y^4})} = 2v \sqrt{(1 - vv)}$ ,

ou, parce que la dernière partie du premier membre a deux côtés commensurables, on peut abrégier l'équation de cette manière  $\frac{2 - 5yy}{27yy} \times \sqrt{(81 - (16yy - 10)^2 \times (-16 + 80yy - 64y^4))}$

$+ \frac{32yy - 20}{27yy} \sqrt{(-4 + 20yy - 16y^4)} = 2v \sqrt{(1 - vv)}$ , & cette

équation est celle qui exprime la nature de la courbe de projection, de tous les points de laquelle si l'on élève les droites  $= \sqrt{(1 - yy)}$  perpendiculaires au plan sur lequel elle est décrite, ces perpendiculaires rencontreront la superficie de la sphère dans les points de la courbe qu'on cherche, qui sera algébriquement rectifiable, aussi-bien que sa projectée; car la différence de la hauteur de deux perpendiculaires, dont chacune est exprimée par son  $\sqrt{(1 - yy)}$ , est à l'arc de la courbe de projection intercepté entre ces deux hauteurs, comme 1 à  $n$ ; c'est-à-dire, [à cause de  $n = \sqrt{mm - 1}$ ] comme 1 à  $\sqrt{3}$ ; & cette même différence de hauteurs est à l'arc de la courbe décrite sur la superficie sphérique, intercepté entr'elles, comme 1 à  $\sqrt{(1 + mm)}$ , c'est-à-dire, dans cet exemple, comme 1 à 2. Ainsi chaque arc de la projectée est à son arc correspondant sur la superficie sphérique, comme  $\sqrt{3}$  à 2, ou comme la hauteur du triangle équilatéral à son côté. L'on aura donc entre l'arc sur la superficie sphérique, l'arc correspondant de la projection, & la différence des hauteurs perpendiculaires, les rapports qui sont entre 2,  $\sqrt{3}$ , & 1.

G g 2

SCHO.

*SCHOLIE.* L'on voit par-là que les courbes que nous venons de trouver par la méthode analytique, sont les mêmes que les Epicycloïdes sphériques, décrites par un grand cercle de la sphère qui tourne sur un petit; car j'ai fait voir dans le §. 16 \*, des Epicycloïdes sphériques, que ces sortes d'Epicycloïdes ont chacun de leurs arcs aux arcs correspondans de la courbe de projection en raison donnée de 1 à  $g$ , ou comme le sinus total est au sinus de l'inclinaison du cercle mobile sur l'immobile. Si donc nous voulons construire sur la superficie de la sphère une courbe dont la longueur ait une raison donnée à la longueur de sa projectée, par exemple, de 2 à  $\sqrt{3}$ , il faut seulement pour le cercle immobile, prendre celui qui fait avec un grand cercle mobile, un angle d'inclinaison, tel que 1 à  $g$  soit dans le rapport de 2 à  $\sqrt{3}$ , ou de 1 à  $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ . Or c'est l'angle que forment deux côtés d'un triangle équilatéral, savoir,  $\frac{2}{3}$  d'un angle droit, ou l'angle de 60 degrés. Concevons donc, dans la Sphère, un Tropicque éloigné de l'Equateur de 60 degrés, & faisant tourner sur lui l'Ecliptique, un point pris dans sa circonférence décrira la courbe qu'on cherche, qui satisfait à cette prolixie équation que nous avons trouvée ci dessus,  $\frac{2-5yy}{27yy} \sqrt{(81-(16yy-10)^2 \&c)} + \frac{32yy-20}{27yy} \sqrt{(-4+\&c)} = 2v \sqrt{(1-vv)}$ . Et il paroît presque incroyable qu'on puisse construire une équation si composée par un mouvement si simple.

Au reste, l'on voit que dans cette supposition, l'Ecliptique sera double du Tropicque, & que par conséquent il devra le parcourir deux fois, avant que le point décrivant revienne au point d'où il est parti; & la longueur de la demi-Epicycloïde sera double de la plus grande hauteur ou de la distance entre les Tropicques, & par conséquent la longueur de l'Epicycloïde entière sera égale à quatre fois cette distance. Cette courbe [ comme il est facile de le voir par la manière dont elle se produit ] a quatre parties semblables & égales, terminées aux quatre points qu'on appelle Cardinaux; la 1<sup>e</sup>. compri-

\* N<sup>o</sup>. précéd. pag. 224.

comprise entre le point du Solstice d'Hiver [ si l'on suppose que la rotation de l'Ecliptique se fait d'Orient en Occident ] & le point équinoxial d'Automne; la 2<sup>e</sup>. entre ce point & le Solstice d'Été; la 3<sup>e</sup>. entre le Solstice d'Été & l'Équinoxe du Printems; la 4<sup>e</sup>. enfin entre l'Équinoxe du Printems & le Solstice d'Hiver: & ainsi la longueur de chacune de ces parties est égale à l'intervalle entre les Tropiques; c'est-à-dire, à la corde de 120 degrés; en supposant toujours, comme nous avons fait dans cet exemple; le Tropicque éloigné de l'Équateur de 60 degrés.

Cet Exemple, qui paroît le moins compliqué de tous, me fait tellement craindre les autres, qui sans doute demanderoient un travail immense, pour trouver l'équation algébrique des courbes de projection, que j'aime mieux les laisser chercher à d'autres: Il me suffit d'avoir trouvé la méthode, & de l'avoir indiquée.

N<sup>o</sup>. CXLIV.

## E X C E R P T U M

E X

## THEORIA GENERALI MOTUUM,

Auctore Jac. HERMANNO.

**E**X similibus principiis varia alia Problemata facilem solutionem admittunt. Ut si corpus B in curva quacunq; CB gravitate sua descendat, post se tamen trahens alterum minus corpus A filo ACB super trochleam C mobile annexum, quodque ascendere cogatur in altera curva AC, & quantur celeritates horum corporum ubi vis acquisita: analysis institui potest ut sequetur, postquam lineis & lineolis ad rem facientibus nomina dederimus. Sint ergo CB = x, EB = y, elem. curvæ Bb = ds, Bn = dx, & BO = dy, celeritas in curvæ puncto B = u, celeritas corporis A in directione AC = v; item am = dp = dx; al = dy & Aa = dr.

G g 3

Sunt

Comment.  
Acad. P.  
trop. Tom.  
II. pag.  
168. §. 31.  
T A B.  
XLI X.  
N<sup>o</sup>.  
CXLV.  
Fig. 3.