

www.e-rara.ch

Mémoire sur la théorie mathématique des phénomènes électrodynamiques

Ampère, André-Marie

Paris, 1825

ETH-Bibliothek Zürich

Shelf Mark: Rar 5232

Persistent Link: <https://doi.org/10.3931/e-rara-3579>

Notes contenant quelques nouveaux développements sur des objets traités dans le mémoire précédent.

www.e-rara.ch

Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien – von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material – from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d'imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L'éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes – des débuts de l'imprimerie jusqu'au 20e siècle.

e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

Nutzungsbedingungen Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titelinformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

Terms of Use This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

Conditions d'utilisation Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

Condizioni di utilizzo Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]

NOTES

CONTENANT QUELQUES NOUVEAUX DÉVELOPPEMENTS SUR DES
OBJETS TRAITÉS DANS LE MÉMOIRE PRÉCÉDENT.

I. *Sur la manière de démontrer par les quatre cas d'équilibre exposés au commencement de ce Mémoire, que la valeur de l'action mutuelle de deux éléments de fils conducteurs est*

$$-\frac{2ii'}{\sqrt{r}} \cdot \frac{ds ds'}{d^2 r} ds ds'.$$

En suivant l'ordre des transformations que j'ai successivement fait subir à cette valeur, on trouve d'abord, en vertu des deux premiers cas d'équilibre, qu'elle est

$$\frac{ii' (\sin. \theta \sin. \theta' \cos. \omega + k \cos. \theta \cos. \theta') ds ds'}{r^n};$$

on déduit du troisième, entre n et k , la relation $n + 2k = 1$, et du quatrième $n = 2$, d'où $k = -\frac{1}{2}$; ce quatrième cas d'équilibre est alors celui qu'on emploie en dernier lieu à la détermination de la valeur de la force qui se développe entre deux éléments de fils conducteurs: mais on peut suivre une autre marche en partant d'une considération dont s'est servi M. de Laplace, quand il a conclu des premières expériences de M. Biot, sur l'action mutuelle d'un aimant et d'un conducteur rectiligne indéfini, que celle qu'un élément de ce fil exerce sur un des pôles de l'aimant est en raison inverse du carré de leur distance, lorsque cette distance change seule de valeur et que l'angle compris entre la droite qui la mesure et la direction de l'élément reste le même.

En appliquant cette considération à l'action mutuelle de deux éléments de fils conducteurs, il est aisé de voir, indépendamment de toute recherche préliminaire sur la valeur de la force qui en résulte, que cette force est aussi réciproquement proportionnelle au carré de la distance quand elle varie seule et que les angles qui déterminent la situation respective des deux éléments n'éprouvent aucun changement.. En effet, d'après les considérations développées au commencement de ce Mémoire, la force dont il est ici question est nécessairement dirigée suivant la droite r , et a pour valeur

$$ii'f(r, \theta, \theta', \omega) ds ds';$$

d'où il suit qu'en nommant α, β, γ , les angles que cette droite forme avec les trois axes, ses trois composantes seront exprimées par

$$ii'f(r, \theta, \theta', \omega) \cos. \alpha ds ds', \quad ii'f(r, \theta, \theta', \omega) \cos. \beta ds ds',$$

$$ii'f(r, \theta, \theta', \omega) \cos. \gamma ds ds',$$

et les trois forces parallèles aux trois axes qui en résultent entre deux circuits par les doubles intégrales de ces expressions, i et i' étant des constantes.

Or il suit du quatrième cas d'équilibre, en remplaçant les trois cercles par des courbes semblables quelconques dont les dimensions homologues soient en progression géométrique continue, que ces trois forces ont des valeurs égales dans deux systèmes semblables; il faut donc que les intégrales qui les expriment soient de dimension nulle relativement à toutes les lignes qui y entrent, d'après la remarque de M. de Laplace que j'ai de rappeler, et qu'il en soit par conséquent de même des différentielles dont elles se composent, en comprenant ds et ds' parmi les lignes qui y entrent, parce que le nombre de ces différentielles, quoi-

que infini du second ordre, doit être considéré comme le même dans les deux systèmes.

Or le produit $ds ds'$ est de deux dimensions : il faut donc que $f(r, \theta, \theta', \omega) \cos. \alpha, f(r, \theta, \theta', \omega) \cos. \beta, f(r, \theta, \theta', \omega) \cos. \gamma$ soient de la dimension -2 ; et comme les angles $\theta, \theta', \omega, \alpha, \beta, \gamma$ sont exprimés par des nombres qui n'entrent pour rien dans les dimensions des valeurs des différentielles, et que $f(r, \theta, \theta', \omega)$ ne contient que la seule ligne r , il faut nécessairement que cette fonction soit proportionnelle à $\frac{1}{r^2}$, en sorte que la force qu'exercent l'un sur l'autre deux éléments de fils conducteurs est exprimée par

$$\frac{ii' \varphi(\theta, \theta', \omega)}{r^2} ds ds'.$$

Les deux premiers cas d'équilibre déterminent ensuite la fonction φ , où k seul reste inconnu, et l'on a

$$\frac{ii'(\sin. \theta \sin. \theta' \cos. \omega + k \cos. \theta \cos. \theta')}{r^2} ds ds',$$

pour la valeur de la force cherchée : c'est, comme on sait, sous cette forme que je l'ai donnée dans le Mémoire que j'ai lu à l'Académie le 4 décembre 1820. En remplaçant alors $\sin. \theta \sin. \theta' \cos. \omega$, et $\cos. \theta \cos. \theta'$ par leurs valeurs

$$-\frac{r d^2 r}{ds ds'}, -\frac{dr}{ds} \cdot \frac{dr}{ds'},$$

il vient

$$-\frac{ii'}{r^2} \left(\frac{d^2 r}{ds ds'} + k \frac{dr}{ds} \cdot \frac{dr}{ds'} \right) ds ds' =$$

$$\frac{ii'(r d d' r + k d r d' r)}{r^2} = \frac{ii' r^k d d' r + k r^{k+1} d r d' r}{r^{k+2}} =$$

$$\frac{ii' d(r^k d' r)}{r^{k+1}} = \frac{ii' d d' (r^{k+1})}{(k+1) r^{k+1}}.$$

et en faisant pour abrégé $k+1=m$, on a pour la valeur de la force cherchée cette expression très-simple

$$-\frac{ii' d d' (r^m)}{m r^m}.$$

Il ne reste plus alors qu'à déterminer m d'après le cas d'équilibre qui démontre que la somme des composantes des forces qu'exerce un fil conducteur sur un élément, prises dans la direction de cet élément, est toujours nulle quand le fil conducteur forme un circuit fermé. Ce cas d'équilibre, que j'ai considéré dans ce Mémoire comme le troisième, doit l'être alors comme le quatrième, puisqu'il est le dernier qu'on emploie dans la détermination complète de la force cherchée. En remplaçant d' r par $-\cos.\theta' ds'$ dans la valeur

$$-\frac{ii' d(r^{m-1} d'r)}{r^m}$$

de la force que les deux éléments exercent l'un sur l'autre, on a, pour sa composante, dans la direction de l'élément ds' ,

$$\frac{ii' ds' \cos.\theta' d(r^{m-1} \cos.\theta')}{r^m} = \frac{1}{2} \cdot \frac{ii' ds' d(r^{2m-2} \cos.^2 \theta')}{r^{2m-1}},$$

dont il faut que l'intégrale relative aux différentielles qui dépendent de ds soit nulle toutes les fois que la courbe s est fermée; mais il est aisé de voir, en intégrant par parties, qu'elle est égale à

$$\frac{1}{2} ii' ds' \left[\frac{\cos.^2 \theta'_2}{r_2} - \frac{\cos.^2 \theta'_1}{r_1} + (2m-1) \int \frac{\cos.^2 \theta' dr}{r^2} \right].$$

La première partie de cette valeur s'évanouit quand la courbe s est fermée, parce qu'alors $r_2=r_1$, $\cos.\theta'_2=\cos.\theta'_1$, à l'égard de la seconde on démontre facilement, comme nous l'avons fait, page 209, que $\int \frac{\cos.^2 \theta' dr}{r^2}$ ne peut s'évanouir, quelle que soit la forme de la

courbe fermée s ; il faut donc qu'on ait $2m-1=0$, $m=\frac{1}{2}$, et que la valeur de la force due à l'action mutuelle des deux éléments ds, ds' soit

$$-\frac{ii' d d' (r^m)}{m \epsilon^m} = -\frac{2 ii' d d' \sqrt{r}}{\sqrt{r}}.$$

II. *Sur une transformation propre à simplifier le calcul de l'action mutuelle de deux conducteurs rectilignes.*

Quand les deux conducteurs sont rectilignes, l'angle formé par les directions des deux éléments est constant et égal à celui des directions mêmes des deux conducteurs; il est donc censé connu, et en le désignant par ϵ , on a, page 207,

$$r \frac{dx}{ds} \frac{dx'}{ds'} + \frac{dy}{ds} \frac{dy'}{ds'} = -\frac{dz}{ds} \frac{dz'}{ds'} = -\cos. \epsilon,$$

d'où il suit que

$$\frac{d d' (r^m)}{m r^m} = \frac{(m-1) dr dr' + r d d' r}{r^2} = \frac{(m-2) dr dr' - \cos. \epsilon ds ds'}{r^2}.$$

En désignant par p un autre exposant quelconque, on a de même

$$\frac{d d' (r^p)}{p r^p} = \frac{(p-2) dr dr' - \cos. \epsilon ds ds'}{r^2},$$

et, en éliminant $\frac{dr dr'}{r^2}$ entre ces deux équations, on obtient

$$\frac{(p-2) d d' (r^m)}{m r^m} - \frac{(m-2) d d' (r^p)}{p r^p} = \frac{(m-p) \cos. \epsilon ds ds'}{r^2},$$

d'où

$$\frac{d d' (r^m)}{m r^m} = \frac{m-2}{p-2} \cdot \frac{d d' (r^p)}{p r^p} + \frac{m-p}{p-2} \cdot \frac{\cos. \epsilon ds ds'}{r^2}.$$

En substituant $\frac{1}{2}$ à m dans cette équation, et en multipliant les deux membres de celle qui résulte de cette substitution par $-ii'$, on a la valeur de l'action de deux éléments de fils conducteurs transformée ainsi

$$-\frac{2 i i' d d' \sqrt{r}}{\sqrt{r}} = \frac{\frac{3}{2} i i'}{p-2} \cdot \frac{d d' (r^p)}{p r^p} - \frac{(\frac{1}{2}-p) i i' \cos. \varepsilon d s d s'}{p-2} \cdot \frac{1}{r^2},$$

et l'on peut, dans cette expression, assigner à p la valeur que l'on veut. Celle qui donne un résultat plus commode pour le calcul est $p = -1$, en l'adoptant, il vient

$$\begin{aligned} -\frac{2 i i' d d' \sqrt{r}}{\sqrt{r}} &= \frac{1}{2} i i' r d d' \frac{1}{r} + \frac{1}{2} \cdot \frac{i i' \cos. \varepsilon d s d s'}{r^2} \\ &= \frac{1}{2} i i' d s d s' \left(\frac{\cos. \varepsilon}{r^2} + r \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d s d s'} \right). \end{aligned}$$

J'ai déjà trouvé d'une autre manière, page 253, cette expression de la force qu'exercent l'un sur l'autre deux éléments de fils conducteurs; on ne peut l'employer, pour simplifier les calculs, que quand les conducteurs sont rectilignes, parce que ce n'est qu'alors que l'angle ε est constant et connu; mais dans ce cas, c'est elle qui donne de la manière la plus simple les valeurs des forces et des moments de rotation qui résultent de l'action mutuelle de deux conducteurs de ce genre. Si j'ai employé dans ce Mémoire d'autres moyens de calculer ces valeurs, c'est qu'à l'époque où je l'ai écrit j'en ne connaissais pas encore cette transformation de ma formule.

III. *Sur la direction de la droite désignée dans ce Mémoire sous le nom de directrice de l'action électro-dynamique à un point donné, lorsque cette action est celle d'un circuit fermé et plan dont toutes les dimensions sont très-petites.*

La droite que j'ai nommée *directrice de l'action électro-dyna-*

mique à un point donné est celle qui forme avec les trois axes des angles dont les cosinus sont respectivement proportionnels aux trois quantités A, B, C dont les valeurs, trouvées à la page 227, deviennent

$$A = \lambda \left(\frac{\cos. \xi}{r^3} - \frac{3q x}{r^5} \right),$$

$$B = \lambda \left(\frac{\cos. \eta}{r^3} - \frac{3q y}{r^5} \right),$$

$$C = \lambda \left(\frac{\cos. \zeta}{r^3} - \frac{3q z}{r^5} \right),$$

quand on substitue à n le nombre 2 auquel n est égal; si donc on suppose le petit circuit d'une forme quelconque situé comme il l'est (pl. I, fig. 14), c'est-à-dire qu'après avoir placé l'origine A des coordonnées au point donné, on prenne pour l'axe des z la perpendiculaire AZ abaissée du point A sur le plan du petit circuit, et pour le plan des xz celui qui passe par cette perpendiculaire et par le centre d'inertie O de l'aire LMS auquel se rapportent les x, y, z qui entrent dans les valeurs de A, B, C, il est évident qu'on aura $y=0, q=z, \xi=\eta=\frac{\pi}{2}, \zeta=0$, et que ces valeurs se réduiront par conséquent à

$$A = -\frac{3\lambda xz}{r^5}, B = 0, C = \lambda \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5} \right) = \frac{\lambda(x^2 - 2z^2)}{r^5},$$

parce que $r^2 = x^2 + z^2$. B étant nul, la directrice AE est nécessairement dans le plan des xz déterminé comme nous venons de le dire. La tangente de l'angle EAX qu'elle forme avec l'axe des x est évidemment égale à $\frac{C}{A}$, c'est-à-dire à $\frac{2z^2 - x^2}{3xz}$; et comme celle de l'angle OAX l'est à $\frac{z}{x}$, on trouvera pour la valeur de la tangente de OAE

$$\text{tang. OAE} = \frac{\frac{z}{x} - \frac{2z^2 - x^2}{3xz}}{1 + \frac{2z^2 - x^2}{3x^2}} = \frac{(z^2 + x^2)x}{(2x^2 + 2z^2)z} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{z} = \frac{1}{2} \text{ tang. COA:}$$

d'où il suit que si l'on prend $OB = \frac{1}{2}OA$, et qu'on élève sur OA au point B un plan perpendiculaire à AO qui rencontre en D la normale OC au plan du petit circuit, la droite ADE menée par les points A, D , sera la directrice de l'action exercée au point A par le courant électrique qui le parcourt, puisqu'on aura

$$AB = 2OB, \text{ tang. } BDA = 2 \text{ tang. } BDO,$$

et

$$\text{tang. } OAE = \cot. BDA = \frac{1}{2} \cot. BDO = \frac{1}{2} \text{ tang. } COA.$$

Cette construction donne de la manière la plus simple la direction de la droite AE suivant laquelle nous avons vu que le pôle d'un aimant placé en A serait porté par l'action de ce courant. Il est à remarquer qu'elle est située à l'égard du plan LMS du petit circuit qu'il décrit, de même que la direction de l'aiguille d'inclinaison l'est en général à l'égard de l'équateur magnétique; car le point O étant considéré comme le centre de la terre, le plan OAC comme celui du méridien magnétique, et la droite AE comme la direction de l'aiguille d'inclinaison, il est évident que l'angle OAE compris entre le rayon terrestre OA et la direction AE de l'aiguille aimantée est le complément de l'inclinaison, et que l'angle COA est le complément de la latitude magnétique LOA ; l'équation précédente devient ainsi

$$\cot. \text{ incl.} = \frac{1}{2} \cot. \text{ lat.},$$

ou

$$\text{tang. incl.} = 2 \text{ tang. lat.}$$

IV. *Sur la valeur de la force qu'un conducteur angulaire indéfini exerce sur le pôle d'un petit aimant.*

Soit que l'on considère le pôle B (pl. 2, fig. 34) du petit aimant AB comme l'extrémité d'un solénoïde électro-dynamique ou comme une molécule magnétique, on est d'accord, dans les deux manières de voir, à l'égard de l'expression de la force exercée

sur ce pôle par chaque élément du conducteur angulaire CMZ : on convient généralement qu'en abaissant du point B sur une de ses branches CμM prolongée vers O la perpendiculaire BO = b, en faisant Oμ = s, BM = a, Bμ = r, l'angle BμM = θ, l'angle CMH = BMO = ε, et en désignant par ρ un coefficient constant, la force exercée sur le pôle B par l'élément ds situé en μ est égale à

$$\frac{\rho \sin. \theta \, ds}{r^2},$$

qu'il s'agit d'intégrer depuis s = OM = a cos. ε jusqu'à s = ∞, ou, ce qui revient au même, depuis θ = ε jusqu'à θ = 0 : mais, dans le triangle BOμ, dont le côté OB = b = a sin. ε, on a

$$r = \frac{a \sin. \varepsilon}{\sin. \theta}, \quad s = a \sin. \varepsilon \cot. \theta, \quad ds = -\frac{a \sin. \varepsilon \, d\theta}{\sin.^2 \theta}, \quad \frac{ds}{r^2} = -\frac{d\theta}{a \sin. \varepsilon},$$

ainsi

$$\frac{\rho \sin. \theta \, ds}{r^2} = -\frac{\rho \sin. \theta \, d\theta}{a \sin. \varepsilon},$$

dont l'intégrale est

$$\frac{\rho}{a \sin. \varepsilon} (\cos. \theta + C),$$

ou, en la prenant entre les limites déterminées ci-dessus,

$$\frac{\rho (1 - \cos. \varepsilon)}{a \sin. \varepsilon} = \frac{\rho}{a} \text{tang. } \frac{1}{2} \varepsilon,$$

valeur qu'il suffit de doubler pour avoir la force exercée sur le pôle B par le conducteur angulaire indéfini CMZ; cette force, en raison inverse de BM = a, est donc, pour une même valeur de a, proportionnelle à la tangente de la moitié de l'angle CMH, et non à cet angle lui-même, quoiqu'on prétende que la valeur

$$\frac{\rho \sin. \theta \, ds}{r^2}$$

de la force exercée par l'élément ds sur le pôle B, ait été trouvée en analysant par le calcul la supposition que la force produite

par le fil conducteur CMZ était proportionnelle à l'angle CMH. On ne peut douter qu'il n'y eût quelque erreur dans ce calcul; mais il serait d'autant plus curieux de le connaître, qu'il avait pour but de déterminer la valeur d'une différentielle par celle de l'intégrale définie qui en résulte entre des limites données, ce qu'aucun mathématicien ne me paraît, jusqu'à présent, avoir cru possible.

Comme on ne peut pas, dans la pratique, rendre les branches MC, MZ du conducteur angulaire réellement infinies, ni éloigner les portions du fil dont il est formé qui mettent ces branches en communication avec les deux extrémités de la pile, à une assez grande distance du petit aimant AB pour qu'elles n'aient sur lui absolument aucune action, on ne doit, à la rigueur, regarder la valeur que nous venons d'obtenir que comme une approximation. Afin d'avoir à vérifier par l'expérience une valeur exacte, il faut calculer celle qu'exerce sur le pôle B du petit aimant un fil conducteur PSRMTSN, dont les portions SP, SN, qui communiquent aux deux extrémités de la pile, sont revêtues de soie et tordues ensemble, comme on le voit en SL, jusqu'auprès de la pile, en sorte que les actions qu'elles exercent se détruisent mutuellement, et dont le reste forme un losange SRMT situé de manière que la direction de la diagonale SM de ce losange passe par le point B. Pour cela, en conservant les dénominations précédentes et faisant de plus l'angle BRM = θ_r , l'angle BRO' = θ_r' , la distance BS = a' et la perpendiculaire BO' = $b' = -a' \sin. \epsilon$ parce que l'angle BSO' = $-\epsilon$, on verra aisément que l'action de la portion RS du fil conducteur sur le pôle B est égale à

$$-\frac{\rho (\cos. \epsilon - \cos. \theta_r')}{b'},$$

comme, à cause de $b = a \sin. \epsilon$, on aurait trouvé

$$\frac{\rho (\cos. \theta_r - \cos. \epsilon)}{b},$$

pour celle qu'exerce la portion MR sur le même pôle B, en prenant l'intégrale précédente depuis $\theta = \varepsilon$ jusqu'à $\theta = 0$.

En réunissant ces deux expressions et en doublant la somme, on a, pour l'action de tout le contour du losange MRST,

$$2\rho \left(\frac{\cos.\theta_1}{b} - \frac{\cos.\varepsilon}{b} + \frac{\cos.\theta'_1}{b'} - \frac{\cos.\varepsilon}{b'} \right).$$

Cette expression est susceptible d'une autre forme qu'on obtient en rapportant la position des quatre angles du losange à deux axes BX, BY menés par le point B parallèlement à ces côtés et qui les rencontrent aux points D, E, F, G; si l'on fait $BD = BF = g$, $BE = BG = h$, on aura

$$b = BO = g \sin. 2\varepsilon, b' = BO' = h \sin. 2\varepsilon,$$

$$\cos.\theta_1 = \frac{OR}{BR} = \frac{h + g \cos. 2\varepsilon}{\sqrt{g^2 + h^2 + 2gh \cos. 2\varepsilon}},$$

$$\cos.\theta'_1 = \frac{O'R}{BR} = \frac{g + h \cos. 2\varepsilon}{\sqrt{g^2 + h^2 + 2gh \cos. 2\varepsilon}},$$

et au moyen de ces valeurs, celle de la force exercée sur le pôle B deviendra

$$2\rho \left(\frac{h + g \cos. 2\varepsilon}{g \sin. 2\varepsilon \sqrt{g^2 + h^2 + 2gh \cos. 2\varepsilon}} + \frac{g + h \cos. 2\varepsilon}{h \sin. 2\varepsilon \sqrt{g^2 + h^2 + 2gh \cos. 2\varepsilon}} - \frac{\cos.\varepsilon}{g \sin. 2\varepsilon} - \frac{\cos.\varepsilon}{h \sin. 2\varepsilon} \right) =$$

$$\rho \left(\frac{2\sqrt{g^2 + h^2 + 2gh \cos. 2\varepsilon}}{gh \sin. 2\varepsilon} - \frac{1}{g \sin.\varepsilon} - \frac{1}{h \sin.\varepsilon} \right),$$

en remplaçant dans les deux derniers termes $\sin. 2\varepsilon$ par sa valeur $2 \sin.\varepsilon \cos.\varepsilon$.

Abaissons maintenant du point D les perpendiculaires DI, DK sur les droites BM, BR: la première sera évidemment égale à $g \sin.\varepsilon$, et la seconde s'obtiendra en faisant attention qu'en la multipliant par $BR = \sqrt{g^2 + h^2 + 2gh \cos. 2\varepsilon}$, on a un produit égal au double de la surface du triangle BDR, c'est-à-dire à $gh \sin. 2\varepsilon$,

en sorte qu'en nommant $p_{1,1}$ et $p_{1,2}$ ces perpendiculaires, il vient

$$\frac{1}{p_{1,1}} = \frac{1}{g \sin. \epsilon}, \quad \frac{1}{p_{1,2}} = \frac{\sqrt{g^2 + h^2 + 2gh \cos. 2\epsilon}}{gh \sin. 2\epsilon};$$

en abaissant du point E les deux perpendiculaires EU, EV sur les droites BT, BS, et en les représentant par $p_{2,1}$ et $p_{2,2}$, la première sera égale à DK à cause de l'égalité des triangles BDR, BET, et la seconde aura pour valeur $h \sin. \epsilon$, en sorte que l'expression de la force exercée par le contour du losange MRST sur le pôle B pourra s'écrire ainsi :

$$\rho \left(\frac{1}{p_{1,2}} + \frac{1}{p_{2,1}} - \frac{1}{p_{1,1}} - \frac{1}{p_{2,2}} \right).$$

Sous cette forme elle s'applique non-seulement à un losange dont une diagonale est dirigée de manière à passer par le point B, mais à un parallélogramme quelconque NRST (fig. 44) dont le périmètre est parcouru par un courant électrique qui agit sur le pôle d'un aimant situé dans le plan de ce parallélogramme. Il résulte, en effet, de ce qui a été dit, pages 229 et 276, que l'action de NRST sur le pôle B est la même que si tous les éléments $d^2\lambda$ dont se compose sa surface agissaient sur ce pôle avec une force égale à $\frac{\rho d^2\lambda}{r^3}$; d'où il suit qu'en nommant x et y les coordonnées rapportées aux axes BX, BY, et à l'origine B d'un point quelconque M de l'aire du parallélogramme ce qui donne

$$d^2\lambda = dx dy \sin. 2\epsilon, \text{ et } r = \sqrt{x^2 + y^2 + 2xy \cos. 2\epsilon},$$

on aura, pour la force totale imprimée au pôle B,

$$\rho \sin. 2\epsilon \iint \frac{dx dy}{(x^2 + y^2 + 2xy \cos. 2\epsilon)^{\frac{3}{2}}}.$$

Or nous avons vu, page 266, que l'intégrale indéfinie de
1823.

est

$$\frac{ds ds'}{(a^2 + s^2 + s'^2 - 2ss' \cos. \varepsilon)^{\frac{3}{2}}}$$

ou

$$\frac{1}{a \sin. \varepsilon} \text{arc. tang.} \frac{ss' \sin.^2 \varepsilon + a^2 \cos. \varepsilon}{a \sin. \varepsilon \sqrt{a^2 + s^2 + s'^2 - 2ss' \cos. \varepsilon}},$$

ou

$$-\frac{1}{a \sin. \varepsilon} \text{arc. tang.} \frac{a \sin. \varepsilon \sqrt{a^2 + s^2 + s'^2 - 2ss' \cos. \varepsilon}}{ss' \sin.^2 \varepsilon + a^2 \cos. \varepsilon},$$

en supprimant la constante $\frac{\pi}{2}$. Quand a est nul, cette quantité se présente sous la forme $\frac{0}{0}$; mais comme l'arc doit être alors remplacé par sa tangente, le facteur nul $a \sin. \varepsilon$ disparaît, et l'on a

$$\iint \frac{ds ds'}{(s^2 + s'^2 - 2ss' \cos. \varepsilon)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\sqrt{s^2 + s'^2 - 2ss' \cos. \varepsilon}}{ss' \sin.^2 \varepsilon},$$

qu'il est aisé de vérifier par la différentiation. On en conclut immédiatement que l'expression de la force que nous calculons, considérée comme une intégrale indéfinie, est

$$-\frac{\rho \sqrt{x^2 + y^2 + 2xy \cos. 2\varepsilon}}{xy \sin. 2\varepsilon} = -\frac{\rho}{p},$$

en nommant p la perpendiculaire PQ abaissée du point P sur BM, parce que le double de l'aire du triangle BPM est à la fois égal à $p \sqrt{x^2 + y^2 + 2xy \cos. 2\varepsilon}$ et à $xy \sin. 2\varepsilon$, ce qui donne

$$\frac{p}{\rho} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy \cos. 2\varepsilon}}{xy \sin. 2\varepsilon}.$$

Il ne reste plus maintenant qu'à calculer les valeurs que prend cette intégrale indéfinie aux quatre sommets N, R, T, S du parallélogramme, et à les ajouter avec des signes convenables; en continuant de désigner respectivement par $p_{1,1}$, $p_{1,2}$, $p_{2,1}$, $p_{2,2}$ les

perpendiculaires DI, DK, EU, EV, il est évident qu'on obtient ainsi pour la valeur de la force cherchée

$$\rho \left(\frac{1}{p_{1,2}} + \frac{1}{p_{2,1}} - \frac{1}{p_{1,1}} - \frac{1}{p_{2,2}} \right).$$

La direction perpendiculaire au plan du parallélogramme NRST suivant laquelle le pôle d'un aimant situé en B est porté par l'action du courant électrique qui parcourt le contour de ce parallélogramme, est la directrice de l'action électro-dynamique qu'il exerce au point B: d'où il suit que s'il y avait à ce point un élément de courant électrique situé dans le plan du parallélogramme, il formerait un angle droit avec la directrice, et qu'ainsi l'action de ce courant sur l'élément serait une force située dans ce plan, perpendiculaire à la direction de l'élément, et égale à celle que le même courant exercerait sur le pôle d'un aimant placé au point B multipliée par un rapport constant, qui est ici celui de ρ à $\frac{1}{2} ii' ds$, en nommant cet élément ds ; en sorte que la force ainsi dirigée qui agirait sur l'élément aurait pour valeur

$$\frac{1}{2} ii' ds \left(\frac{1}{p_{1,2}} + \frac{1}{p_{2,1}} - \frac{1}{p_{1,1}} - \frac{1}{p_{2,2}} \right).$$

Lorsque l'élément situé en B n'est pas dans le plan du parallélogramme, mais forme avec ce plan un angle égal à ω , on peut le remplacer par deux éléments de même intensité, l'un dans ce plan, l'autre qui lui est perpendiculaire: l'action du courant du parallélogramme sur ce dernier étant nulle, on ne doit tenir compte que de celle qu'il exerce sur le premier; elle est évidemment dans le plan du parallélogramme, perpendiculaire à l'élément et égale à

$$\frac{1}{2} ii' ds \cos. \omega \left(\frac{1}{p_{1,2}} + \frac{1}{p_{2,1}} - \frac{1}{p_{1,1}} - \frac{1}{p_{2,2}} \right).$$