

www.e-rara.ch

Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs

L'Huilier, Simon Antoine Jean

Berlin, 1786

ETH-Bibliothek Zürich

Shelf Mark: Rar 5048

Persistent Link: <https://doi.org/10.3931/e-rara-3747>

Chapitre neuvième. Sur la cubature des solides de révolution.

www.e-rara.ch

Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien – von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material – from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d'imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L'éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes – des débuts de l'imprimerie jusqu'au 20e siècle.

e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

Nutzungsbedingungen Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titelnformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

Terms of Use This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

Conditions d'utilisation Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

Condizioni di utilizzo Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]

Cela posé, le sinus de l'arc s étant une fonction de cet arc, on a (§ XXIII).

$$\begin{aligned} \sin(s + \Delta s) &= \sin s + \frac{\Delta s}{1} \times \frac{dx}{ds} + \frac{\Delta s^2}{1.2} \frac{ddx}{ds^2} + \frac{\Delta s^3}{1.2.3} \frac{d^3x}{ds^3} \\ &+ \frac{\Delta s^4}{1.2.3.4} \frac{d^4x}{ds^4} + \dots \end{aligned}$$

$$= \sin s \cos \Delta s + \cos s \sin \Delta s.$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \sin s \cos \Delta s + \cos s \sin \Delta s &= \sin s + \frac{\Delta s}{1} \cos s - \frac{\Delta s^2}{1.2} \sin s - \frac{\Delta s^3}{1.2.3} \\ \cos s + \frac{\Delta s^4}{1.2.3.4} \sin s + \frac{\Delta s^5}{1.2.3.4.5} \cos s &- \&c. \dots \end{aligned}$$

Cette équation étant générale, elle a lieu en particulier lorsque $s = 0$; alors son sinus est zéro, & son cosinus est l'unité. Donc on obtient

$$\sin \Delta s = \frac{\Delta s}{1} - \frac{\Delta s^3}{1.2.3.} + \frac{\Delta s^5}{1.2.3.4.5.} - \frac{\Delta s^7}{1.2.3.4.5.6.7.} + \dots$$

$$\text{Et en général } \sin a = a - \frac{a^3}{1.2.3.} + \frac{a^5}{1.2.3.4.5.} - \frac{a^7}{1.2.3.4.5.6.7.} + \dots$$

On trouve exactement de la même manière que

$$\cos a = 1 - \frac{a^2}{1.2.} + \frac{a^4}{1.2.3.4.} - \frac{a^6}{1.2.3.4.5.6.} + \frac{a^8}{1.2.3.4.5.6.7.8.} - \&c.$$

$$\text{De là, } \tan a = a \times \frac{1 - \frac{a^2}{1.2.3.} + \frac{a^4}{1.2.3.4.5.} - \frac{a^6}{1.2.3.4.5.6.7.} + \dots}{1 - \frac{a^2}{1.2.} + \frac{a^4}{1.2.3.4.} - \frac{a^6}{1.2.3.4.5.6.} + \dots}$$

CHAPITRE NEUVIÈME.

Sur la Cubature des Solides de Révolution.

§. LII.

Soit une courbe rapportée à un axe par des ordonnées perpendiculaires. (Tout ce qui sera dit sur le cas du perpendicularisme, s'applique aisément à la supposition de tout autre angle constant différent de l'angle droit). Soit un rectangle ayant un côté constant perpendiculaire à cet axe, & dont l'autre côté variable croît comme les abscisses de cette courbe. Que la courbe & le rectangle tournent autour de l'axe commun; je dis que la limite du

rapport qui règne entre les changements simultanés du cylindre engendré par le rectangle & du solide engendré par la courbe, répondants à un même changement de l'abscisse, est le même que celui qui règne entre le quarré du rayon constant de la base du cylindre & le quarré de l'ordonnée correspondante à cette abscisse.

Soit SMM' (Fig. 15.) une courbe rapportée à l'axe SPP' . Soit un rectangle ayant pour côté constant une ligne donnée SA , & pour côté variable les abscisses variables SP, SP' . Soient achevés les rectangles $PF'RR$, $PP'mM$, $PP'M'm'$. Le rapport des changements simultanés du cylindre ayant AS pour rayon de sa base & du solide engendré par la courbe, est plus grand que le rapport des cylindres engendrés par les rectangles PR' & PM' , mais plus petit que le rapport des cylindres engendrés par les rectangles PR' & Pm . Ou, ce rapport est plus grand que le rapport des quarrés des droites SA & $P'M'$, mais plus petit que le rapport des quarrés des droites AS & PM . Mais le rapport d'égalité est la limite du rapport des droites PM & $P'M'$, & partant aussi celui du rapport de leurs quarrés. Donc aussi le rapport d'égalité est la limite du rapport des exposants des rapports de AS^2 à PM^2 & de AS^2 à $P'M'^2$. Donc, à plus forte raison, le rapport des changements simultanés du cylindre ayant AS pour rayon de sa base & du solide engendré par la courbe peut approcher de l'un ou l'autre des rapports de AS^2 à PM^2 ou de AS^2 à $P'M'^2$ plus près que n'en approche aucun rapport assigné plus petit ou plus grand qu'eux. Partant, la limite du rapport qui règne entre ces changements simultanés est bien celui qui règne entre le quarré de la droite constante AS & le quarré de l'une ou l'autre de deux ordonnées PM ou $P'M'$. Que le solide variable engendré par la courbe soit désigné par S , & le cylindre ayant AS pour rayon de sa base par C . Que les abscisses & les ordonnées soient désignées par x & y . On aura

$$\lim \frac{\Delta S}{\Delta C} = \frac{yy}{aa}; \text{ mais } \Delta C = aa \Delta x; \text{ donc } \lim \frac{\Delta S}{aa \Delta x} = \frac{yy}{aa};$$

ou $\frac{dS}{aa dx} = \frac{yy}{aa};$ & $\frac{dS}{dx} = yy.$

Substituant dans cette équation différentielle à la place de y la fonction de x qu'elle représente & qui est donnée par l'équation de la courbe, on aura une équation différentielle entre S & x , de laquelle on pourra remonter à leur équation intégrale.

Exemple. Soit $y = x^m$.

$$\frac{dS}{dx} = yy' = x^{2m}. \quad \text{Donc (§ XIV) : } S = \frac{1}{2m+1} x^{2m+1}$$

$$= \frac{1}{2m+1} x^{2m} \times x = \frac{1}{2m+1} yyx.$$

1^{er} cas. Soit m un nombre positif quelconque. La courbe génératrice est une parabole; & le solide parabolôide est au cylindre de même base & de même hauteur, comme 1 est à $2m+1$.

2^d cas. Que m soit un nombre négatif. La courbe génératrice est une hyperbole rapportée à son asymptote, dont l'équation est $yx^m = ba^m$.

Dans ce cas, comme l'ordonnée répondante à l'abscisse 0 ne rencontre pas la courbe, soit prise l'origine des abscisses à une distance a du centre à laquelle réponde l'ordonnée b ; &

$$\text{soit } y(a+x)^m = ba^m$$

$$\frac{dS}{dx} = yy' = \frac{bba^{2m}}{(a+x)^{2m}} = bba^{2m} (a+x)^{-2m}$$

$$\text{d'où l'on déduit, } S = C - \frac{1}{2m-1} bba^{2m} (a+x)^{-2m+1}.$$

Or le solide cherché doit évanouir lorsque $x = 0$; donc $C = \frac{1}{2m-1}$

$$bba^{2m} a^{-2m+1} = \frac{1}{2m-1} abb, \quad \text{donc } S = \frac{1}{2m-1} \left(abb - bba^{2m} (a+x)^{-2m+1} \right) \\ = \frac{1}{2m-1} \left(abb - \frac{bba^{2m}}{(a+x)^{2m}} \right) (a+x) = \frac{1}{2m-1} (abb - (a+x)yy).$$

Savoir, le solide hyperboloïde engendré par un segment hyperbolique tournant autour d'une asymptote à un rapport donné à la différence des cylindres engendrés pendant la même révolution par les deux rectangles qui ont pour hauteurs les abscisses comptées depuis le centre & pour bases les cercles dont les rayons sont les ordonnées qui terminent ce segment.

On montre, tout comme dans le § XLII, que lorsque $2m > 1$ ou $m > \frac{1}{2}$, le fuseau hyperboloïde est susceptible d'une limite en grandeur, laquelle est $\frac{1}{2m-1} bba$, du côté des x positives, quoiqu'une de ses dimensions, savoir sa hauteur, ne soit susceptible d'aucune limite, & que du côté des x négatives ledit solide ne soit susceptible d'aucune limite. Ce fuseau n'est susceptible d'aucune limite lorsque $2m$ est plus petit que l'unité. Et enfin le cas où $2m = 1$ est réduit à la quadrature de l'hyperbole d'Apollonius ou aux logarithmes.

§. LIII.

On peut aussi déterminer la cubature des paraboloides & des hyperboloïdes d'une manière tout à fait analogue à celle qui a été employée dans les §§ XLI. XLII. pour la quadrature des paraboles & des hyperboles.

1°. Soit SMP un segment parabolique tournant autour de l'axe SP . Par M soit menée une tangente qui rencontre l'axe en T ; & par le sommet S soit menée une tangente SQ . Soit menée une autre ordonnée $M'P'$ qui rencontre en n la tangente MT . Par M' & n soient menées à l'axe les parallèles $M'Q'$, nq , qui rencontrent l'ordonnée PM en m' & n' . Par M soit encore menée la parallèle à l'axe MQ , qui rencontre $M'P'$ en m .

Toute la Figure tournant autour de l'axe SP , le cylindre engendré par le rectangle Pm & l'écorce cylindrique engendrée par le rectangle Mq sont entr'eux comme $MP^2 \times PP' & MQ \times Mn' (MP + n'P)$; ou comme $MP^2 \times PP' & MQ \times mn (2MP + mn)$; ou comme $MP^2 \times \frac{PP'}{mn}$ & $MQ(2MP + mn)$.

Or $\frac{PP'}{mn} = \frac{PT}{MP}$; donc ce cylindre & cette écorce sont entr'eux comme $MP \times PT$ & $MQ(2MP + mn)$, ou comme $MP \times \frac{PT}{MQ}$ & $2MP + mn$.

Soit $y = x^m$, l'équation de la parabole; donc $\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}$

$$\text{donc, } y \frac{dx}{dy} = \frac{y}{mx^{m-1}} = \frac{x^m}{mx^{m-1}} = \frac{1}{m} x.$$

Ou $PT = \frac{1}{m} MQ$; & $\frac{PT}{MQ} = \frac{1}{m}$; donc le cylindre & l'écorce cylindrique sont entr'eux comme $\frac{1}{m} MP$ & $2MP + mn$, ou comme MP & $m(2MP + mn)$.

Partant la limite du premier rapport est égale à la limite du second, favoir au rapport de 1 à $2m$. Or le solide engendré par le trapèze parabolique $MP P' M'$ est la limite du cylindre engendré par le rectangle Pm . Je dis que le solide engendré par l'espace parabolique $MQ Q' M'$ est aussi la limite de l'écorce cylindrique engendrée par le rectangle $MQ q n'$.

En effet, les écorces engendrées par les rectangles Mq & MQ' sont entr'elles comme Mn' ($2MP + Mn'$) & Mm' ($2MP + Mm'$); d'où il est aisé de montrer que la limite du rapport de ces écorces est le rapport d'égalité: & les écorces engendrées par les rectangles MQ' & mQ' sont entr'elles comme les droites MQ & mQ , & partant la limite de leur rapport est le rapport d'égalité; donc à plus forte raison le rapport d'égalité est la limite du rapport du solide engendré par le trapèze $MQ Q' M'$ & l'écorce cylindrique engendrée par MQ , & partant aussi le rapport d'égalité est la limite du rapport des solides engendrés par le rectangle Mq & le trapèze paraboliques.

Partant, la limite du rapport des solides engendrés par les rectangles MP' & Mq est le rapport des solides engendrés par les trapèzes paraboliques $MPP' M'$ & $MQ Q' M'$; & partant les solides engendrés par ces deux trapèzes sont entr'eux dans le rapport constant de 1 à $2m$. Donc aussi tout le solide engendré par le segment SMP , est au solide engendré par l'espace intérieur SMQ , dans le même rapport constant de 1 à $2m$, & le premier solide est au cylindre engendré par le rectangle $SMPQ$ dans le rapport de 1 à $2m + 1$.

De même, soit (Fig. 16.) une hyperbole dont l'équation est $MP \times SP^m = AB \times SB^m$, tournant autour de l'asymptote SP .

Par M soit menée la tangente MT , qui rencontre en T l'asymptote SP , & soit menée MQ ordonnée à l'autre asymptote. Par un autre point

M' soient menées aux asymptotes les ordonnées $M'P'$, $M'Q'$, dont la première rencontre la tangente en n & MQ en m & dont la seconde rencontre MP en m' . Par n soit menée nq ordonnée à l'asymptote SQ & qui rencontre MP en n' . Enfin, que MQ , $M'Q'$, nq , rencontrent AB , en R , R' , r .

Le cylindre engendré par le rectangle $MPP'm$ est à l'écorce cylindrique engendrée par $MQqn'$, comme $MP^2 \times PP'$ est à $SP \times Mn' \times (MP + Pn')$; ou comme $MP^2 \times PP'$ est à $SP \times Mn' (2MP - Mn')$

ou comme $MP^2 \times \frac{PP'}{Mn'}$ est à $SP (2MP - Mn')$

comme $MP^2 \times \frac{PT}{MP}$ est à $PS (2MP - Mn')$

comme $MP \times PT$ est à $SP (2MP - Mn')$

comme $MP \times \frac{PT}{SP}$ est à $2MP - Mn'$.

Mais, puisque $MP \times SP^m = AB \times SB^m$; $PT = \frac{1}{m} SP$ (§ XVI), donc $\frac{PT}{SP} = \frac{1}{m}$. Donc le cylindre & l'écorce cylindrique ci-dessus sont entr'eux comme MP & $m(2MP - Mn')$, & partant le rapport limite de ce cylindre & de cette écorce est égal au rapport limite de MP à $m(2MP - Mn')$. Mais on montre, tout comme pour la parabole, que la limite du premier rapport est le rapport des solides engendrés par les trapèzes hyperboliques $MPP'M'$ & $MQQ'M'$, & la limite du second rapport est le rapport de MP à $m \times 2MP$ ou de 1 à $2m$. Donc le solide engendré par le trapèze $MPP'M'$ est au solide engendré par le trapèze $MQQ'M'$, dans le rapport constant de 1 à $2m$; & partant le solide engendré par tout le trapèze $ABPM$ est au solide engendré par le trapèze $ADQM$, dans le même rapport constant de 1 à $2m$. Or sol. $ADQM = \text{sol. } ADQR + \text{sol. } AMR = \text{cyl. } ADSB - \text{cyl. } SBRQ + \text{sol. } ABPM - \text{cyl. } BPMR = \text{cyl. } ADSB - \text{cyl. } SPMQ + \text{sol. } ABPM$. Donc sol. $ABPM : \text{cyl. } ADSB - \text{cyl. } SPMQ + \text{sol. } ABPM = 1 : 2m$.

1^{er} cas. Soit $2m < 1$

$$\text{fol } ABPM : \text{cyl } SPMQ - \text{cyl } ADSB = 1 : 1 - 2m$$

2^d cas. Soit $2m > 1$

$$\text{fol } ABPM : \text{cyl } ADSB - \text{cyl } SPMQ = 1 : 2m - 1$$

3^{me} cas. Soit $2m = 1$

$$\text{fol } ABPM = \text{cyl } ADSB - \text{cyl } SPMQ + \text{fol } ABPM$$

ou, $\text{cyl } ADSB = \text{cyl } SPMQ$; & partant on ne peut rien conclure de ce moyen pour le solide $ABPM$.

§. LIV.

Il suit de tout ce qui précède, que la cubature d'un solide de révolution peut toujours être réduite à la rectification de la circonférence, & à la quadrature d'une autre courbe, décrite sur le même axe, & dont les ordonnées sont entr'elles comme les carrés des ordonnées de la courbe génératrice correspondantes aux mêmes abscisses. Les cylindres inscrits & circonscrits au solide sont entr'eux comme les rectangles inscrits & circonscrits à la seconde courbe; & partant les limites de ces cylindres sont proportionnelles aux limites de ces rectangles; ou, les solides engendrés par des trapèzes de la courbe génératrice sont proportionels aux trapèzes correspondants à la seconde courbe; & tout le solide engendré par la courbe génératrice est proportionel à la surface de la seconde courbe.

Ainsi la cubature du solide engendré par une parabole dont l'équation est $y = x^m$ est réduite à la quadrature de la parabole dont l'équation est $y' = x^{2m}$.

§. LV.

On peut encore trouver une suite pour exprimer la grandeur d'un solide de révolution d'après le § XXIII & d'une manière conforme aux procédés développés dans les §§ XLV & XLIX.

Soit S l'expression du solide, lequel est une certaine fonction de x ; & que leurs changements simultanés soient Δs & Δx .

On obtient, comme dans les §§ XLV & XLIX,

$$\Delta s = \frac{\Delta x}{1} \cdot \frac{ds}{dx} - \frac{\Delta x^2}{1.2} \frac{d^2s}{dx^2} + \frac{\Delta x^3}{1.2.3} \frac{d^3s}{dx^3} - \frac{\Delta x^4}{1.2.3.4} \frac{d^4s}{dx^4} + \dots$$

$$\text{Et } S = x \frac{ds}{dx} - \frac{x^2}{1.2} \frac{d^2s}{dx^2} + \frac{x^3}{1.2.3} \frac{d^3s}{dx^3} - \frac{x^4}{1.2.3.4} \frac{d^4s}{dx^4} + \dots$$

Or $\frac{ds}{dx} = yy$; yy désignant la surface du cercle dont y est le rayon.

$$\text{Donc } \frac{d^2s}{dx^2} = 2y \frac{dy}{dx}.$$

$$\frac{d^3s}{dx^3} = 2 \frac{dy^2}{dx^2} + 2y \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\frac{d^4s}{dx^4} = 2 \left(3 \frac{dy}{dx} \frac{d^2y}{dx^2} + y \frac{d^3y}{dx^3} \right)$$

$$\frac{d^5s}{dx^5} = 2 \left(3 \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)^2 + 4 \frac{dy}{dx} \times \frac{d^3y}{dx^3} + y \times \frac{d^4y}{dx^4} \right)$$

&c. . . .

Donc, substituant ces expressions différentielles dans l'expression de S , on obtiendra la valeur de S dans x & y & dans leurs expressions différentielles des ordres successifs.

Mais, quoique cette expression soit remarquable, ses termes sont souvent trop compliqués & trop peu convergents pour que son application soit commode.

§. LVI.

PL. II. Lorsque la courbe génératrice d'un solide de révolution est rapportée à un point pris sur l'axe de révolution, la détermination de sa solidité est fondée sur les mêmes principes.

Soit décomposée la courbe génératrice SMM' (Fig. 19.) en secteurs $MF M'$, dont les angles au sommet $MF M'$ croissent uniformément. Du foyer F comme centre, avec les rayons FM , FM' , soient décrits les arcs de cercle Mm , $M'm'$; le solide engendré par le secteur $MF M'$ est moyen entre les solides engendrés par les secteurs circulaires MFm , $m'FM'$. Mais ces deux solides sont entr'eux en raison triplée de leurs dimensions correspondantes MF & MF' : & le rapport d'égalité est la limite tant du rapport

rapport des droites MF & $M'F$ que de leur rapport triplé; donc le rapport d'égalité est aussi la limite du rapport du solide engendré par le secteur MFM' à chacun des solides engendrés par les secteurs MFm , & $M'Fm'$. Des points X & X' soient abaissées sur SF les perpendiculaires XY , $X'Y'$; le solide engendré par le secteur XSX' est égal à un solide pyramidal qui auroit pour hauteur SF & pour base la surface engendrée par l'arc XX' ; ou à un cône ayant pour hauteur le double de YY' & pour base le cercle dont SF est le rayon; partant l'expression du solide engendré par le secteur XSX' est $\frac{2}{3} YY' \times SF^2$ (SF^2 désignant le cercle dont SF est le rayon). Soient désignés par S & S' les solides engendrés par le secteur de la courbe SFM , & par le secteur circulaire SFX ; & soient Δs & $\Delta s'$ leurs changements simultanés; on obtient $\lim \frac{\Delta s}{\Delta s'} = \frac{FM^3}{SF^3}$,

$$\text{Ou } \lim \frac{\Delta s}{\frac{2}{3} YY' \times SF^2} = \frac{FM^3}{SF^3}; \text{ ou } \lim \frac{\Delta s}{YY'} = \frac{3}{2} \frac{FM^3}{FS}.$$

$$\text{Ou } \lim \frac{\frac{\Delta s}{XX'}}{\frac{YY'}{XX'}} = \frac{3}{2} \frac{FM^3}{FS}.$$

$$\text{Ou } \lim \frac{\frac{\Delta s}{XX'}}{\frac{YY'}{XX'}} = \frac{3}{2} \frac{FM^3}{FS}. \text{ Mais } \lim \frac{\Delta s}{XX'} = \frac{ds}{dx}; \text{ \& } \lim \frac{YY'}{XX'} = \frac{XY}{SF} \\ = \sin x.$$

Donc $\frac{ds}{dx} = \frac{3}{2} \frac{FM^3}{FS} \sin x$; & de cette équation différentielle on pourra déduire l'équation intégrale entre s & x .

CHAPITRE DIXIÈME.

Sur la Quadrature des Surfaces courbes des Solides de Révolution.

§. LVII.

Soit une courbe quelconque tournante autour d'un axe auquel elle est rapportée par des ordonnées perpendiculaires; je dis que le rapport d'égalité