

www.e-rara.ch

Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs

L'Huilier, Simon Antoine Jean

Berlin, 1786

ETH-Bibliothek Zürich

Shelf Mark: Rar 5048

Persistent Link: <https://doi.org/10.3931/e-rara-3747>

Chapitre dixième. Sur la quadrature des surfaces courbes des solides de révolution.

www.e-rara.ch

Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien – von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material – from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d'imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L'éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes – des débuts de l'imprimerie jusqu'au 20e siècle.

e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

Nutzungsbedingungen Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titelnformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

Terms of Use This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

Conditions d'utilisation Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

Condizioni di utilizzo Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]

rapport des droites MF & $M'F$ que de leur rapport triplé; donc le rapport d'égalité est aussi la limite du rapport du solide engendré par le secteur MFM' à chacun des solides engendrés par les secteurs MFm , & $M'Fm'$. Des points X & X' soient abaissées sur SF les perpendiculaires XY , $X'Y'$; le solide engendré par le secteur XSX' est égal à un solide pyramidal qui auroit pour hauteur SF & pour base la surface engendrée par l'arc XX' ; ou à un cône ayant pour hauteur le double de YY' & pour base le cercle dont SF est le rayon; partant l'expression du solide engendré par le secteur XSX' est $\frac{2}{3} YY' \times SF^2$ (SF^2 désignant le cercle dont SF est le rayon). Soient désignés par S & S' les solides engendrés par le secteur de la courbe SFM , & par le secteur circulaire SFX ; & soient Δs & $\Delta s'$ leurs changements simultanés; on obtient $\lim \frac{\Delta s}{\Delta s'} = \frac{FM^3}{SF^3}$,

$$\text{Ou } \lim \frac{\Delta s}{\frac{2}{3} YY' \times SF^2} = \frac{FM^3}{SF^3}; \text{ ou } \lim \frac{\Delta s}{YY'} = \frac{3}{2} \frac{FM^3}{FS}.$$

$$\text{Ou } \lim \frac{\frac{\Delta s}{XX'}}{\frac{YY'}{XX'}} = \frac{3}{2} \frac{FM^3}{FS}.$$

$$\text{Ou } \lim \frac{\frac{\Delta s}{XX'}}{\frac{YY'}{XX'}} = \frac{3}{2} \frac{FM^3}{FS}. \text{ Mais } \lim \frac{\Delta s}{XX'} = \frac{ds}{dx}; \text{ \& } \lim \frac{YY'}{XX'} = \frac{XY}{SF} \\ = \sin x.$$

Donc $\frac{ds}{dx} = \frac{3}{2} \frac{FM^3}{FS} \sin x$; & de cette équation différentielle on pourra déduire l'équation intégrale entre s & x .

CHAPITRE DIXIÈME.

Sur la Quadrature des Surfaces courbes des Solides de Révolution.

§. LVII.

Soit une courbe quelconque tournante autour d'un axe auquel elle est rapportée par des ordonnées perpendiculaires; je dis que le rapport d'égalité

est la limite du rapport des surfaces engendrées pendant cette révolution par un arc de cette courbe & par sa corde.

Soit MM' (Fig. 21.) un arc de courbe engendrant une surface courbe par la révolution autour de l'axe SP . Par les extrémités M & M' de cet arc soient menées deux tangentes MT & $M'T$ qui se rencontrent en T . Soient menées les deux ordonnées MP & $M'P$ & la corde MM' .

1^{er} cas. Que la courbe soit concave vers l'axe SP .

La surface courbe engendrée par la corde MM' est égale à un rectangle qui auroit pour hauteur la corde MM' , & pour base la circonférence dont le rayon est moyen arithmétique entre MP & $M'P$. Donc cette surface est plus grande que le rectangle qui a pour hauteur MM' & pour base la circonférence dont MP est le rayon, & au contraire elle est plus petite que le rectangle de même hauteur ayant pour base la circonférence dont $M'P$ est le rayon. Soit TQ perpendiculaire à l'axe SP . La surface engendrée par la révolution de MT est plus petite que le rectangle qui a pour hauteur MT & pour base la circonférence dont QT est le rayon; & à plus forte raison elle est plus petite que le rectangle qui a pour hauteur MT & pour base la circonférence dont $M'P$ est le rayon. Mais la surface engendrée par la révolution de $M'T$ est plus petite que le rectangle ayant pour hauteur $M'T$ & pour base la circonférence dont $M'P$ est le rayon. Donc, à plus forte raison, la surface courbe engendrée par la révolution des deux tangentes MT & $M'T$ est plus petite que le rectangle ayant pour hauteur la somme des deux tangentes MT & $M'T$, & pour base la circonférence dont $M'P$ est le rayon; & au contraire, elle est plus grande que le rectangle de même hauteur ayant pour base la circonférence dont MP est le rayon.

Partant le rapport qui règne entre les surfaces engendrées par la corde MM' & par les tangentes MT & $M'T$ est plus grand que le rapport qui règne entre les rectangles $MP \times MM'$ & $(MT + M'T) M'P$, mais plus petit que le rapport qui règne entre les rectangles $M'P \times MM'$ & $(MT + M'T) MP$.

Or, le rapport d'égalité étant la limite de chacun des rapports de MP à $M'P$, & de MM' à $MT + M'T$ (§. XVII), le rapport d'égalité est

aussi la limite des rapports, tant du rectangle $MP \times MM'$ au rectangle $(MT + M'T) MP$, que du rectangle $M'P' \times MM'$ au rectangle $(MT + M'T) MP$ (§ VI). Donc aussi le rapport d'égalité est la limite du rapport des surfaces engendrées par la corde MM' & par les tangentes MT & $M'T$. Mais la surface engendrée par l'arc MM' est moyenne entre les surfaces engendrées par cette corde & par ces deux tangentes. Donc, à plus forte raison, le rapport d'égalité est la limite du rapport de la surface engendrée par l'arc MM' à chacune des surfaces engendrées par la corde MM' & par les tangentes MT & $M'T$; & en particulier il est la limite du rapport de la surface engendrée par l'arc MM' & la surface engendrée par sa corde, & partant la première surface est bien la limite de la seconde.

2^d cas. Que la courbe soit convexe vers l'axe.

En tant que la corde MM' est plus petite que la somme des deux tangentes MT , & $M'T$; la surface engendrée par cette corde est plus petite que la somme des surfaces engendrées par ces tangentes: mais d'un autre côté, en tant que cette corde est plus éloignée de l'axe de révolution, elle peut engendrer une surface plus grande que la somme des surfaces engendrées par les tangentes; & partant il paroît qu'on ne peut pas conclure comme dans le premier cas. Cependant on peut le faire à plus forte raison. En effet, si les deux élémens desquels dépendent les grandeurs de ces surfaces, tendoient l'un & l'autre à rendre l'une d'elles plus grande ou plus petite que l'autre, nous avons vu par le premier cas que le rapport d'égalité seroit la limite de leur rapport; donc, à plus forte raison, le rapport de ces deux surfaces pourra-t-il différer du rapport d'égalité moins que n'en diffère aucun rapport proposé, lorsque l'un de ces élémens tendant à éloigner ce rapport du rapport d'égalité, l'autre élément tendra à s'en rapprocher ou à s'en éloigner dans un sens opposé. D'où l'on peut conclure que le rapport d'égalité est aussi la limite du rapport de l'une de ces deux surfaces à la surface engendrée par l'arc de la courbe; ou qu'il est égal à leur rapport.

Pour mettre cette conclusion dans le plus grand jour, je remarque que la surface engendrée par l'arc MM' est plus petite que la surface courbe

d'un cylindre droit engendrée par un rectangle dont le côté parallèle à l'axe MM' seroit égal à l'arc MM' , & dont l'autre côté seroit égal à la plus grande des ordonnées MP ; & au contraire elle est plus grande que la surface courbe d'un cylindre droit, engendré par le rectangle dont le côté parallèle à l'axe est égal à l'arc MM' , & dont l'autre côté est égal à la plus petite des deux ordonnées $M'P'$. Partant la surface courbe engendrée par l'arc MM' tient un milieu entre les surfaces courbes des cylindres droits engendrés par les rectangles ayant une hauteur égale à l'arc MM' & dont les bases sont les ordonnées MP & $M'P'$. Mais la surface courbe engendrée par la corde MM' est aussi égale à la surface courbe d'un cylindre droit engendré par un rectangle dont la hauteur est égale à la corde MM' & dont la base est moyenne (arithmétique) entre les ordonnées MP & $M'P'$. Et le rapport d'égalité est la limite des rapports des deux ordonnées MP & $M'P'$, & à plus forte raison de deux droites qui sont l'une & l'autre moyennes entre ces ordonnées; & le rapport d'égalité est aussi la limite du rapport de l'arc MM' & de sa corde. Donc le rapport d'égalité est la limite du rapport de la surface engendrée par l'arc & par sa corde (§. VI); ou, la surface engendrée par l'arc est la limite de la surface engendrée par la corde.

$$\text{Soit l'abscisse } SP = x \quad SP' = x + \Delta x$$

$$\text{l'ordonnée } MP = y \quad M'P' = y \pm \Delta y.$$

$$\text{corde } MM' = \sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)} = \Delta x \sqrt{\left(1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}\right)}.$$

La surface courbe engendrée par la corde MM' est proportionnelle $(y \pm \frac{1}{2} \Delta y) \Delta x \sqrt{\left(1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}\right)}$.

Soit un rectangle ayant pour côté constant une droite a , & pour autre côté variable l'abscisse SP , & que ce rectangle tourne autour de l'axe SP en même tems que la courbe. La surface courbe engendrée par la corde MM' sera à la surface courbe du cylindre engendré en même tems par le rectangle ayant pour hauteur PP' , comme $(y \pm \Delta y) \Delta x \sqrt{\left(1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}\right)}$

est à $a\Delta x$; ou comme $(y \pm \Delta y) \sqrt{\left(1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}\right)}$ est à a ; ou comme $\frac{(y \pm \Delta y) \sqrt{\left(1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}\right)}}{a}$ est à l'unité.

Soit S la surface engendrée par la courbe, & C la surface engendrée par le cylindre.

$$\text{On a } \lim. \frac{\Delta S}{\Delta C} = \lim. \frac{(y \pm \Delta y) \sqrt{\left(1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}\right)}}{a} = \frac{dS}{adx}$$

$$\text{ou } y \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)} = \frac{dS}{dx}.$$

Partant, substituant à y la fonction de x donnée par l'équation de la courbe génératrice, on obtient l'équation différentielle entre S & x , de laquelle on peut déterminer leur relation intégrale.

Exemple. Soit $yy = rr - xx$, ou, que le solide engendré soit une sphère.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}; \quad \frac{dy^2}{dx^2} = \frac{xx}{yy}; \quad 1 + \frac{dy^2}{dx^2} = 1 + \frac{xx}{yy} - \frac{xx + yy}{yy} = \frac{rr}{yy};$$

$$\& \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)} = \frac{r}{y}.$$

Donc $y \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)} = y \times \frac{r}{y} = r$. Partant $\frac{dS}{dx} = r$; & partant $S = rx$. Ce qui s'accorde avec ce qui est connu dans les élémens.

§. LVIII.

On montre, tout comme dans les §§ XLV & XLIX, qu'une surface courbe de révolution peut être déterminée par une suite déduite du § XXIII.

On obtient

$$S = x \frac{dS}{dx} - \frac{x^2}{1.2.} \frac{d^2 S}{dx^2} + \frac{x^3}{1.2.3.} \frac{d^3 S}{dx^3} - \frac{x^4}{1.2.3.4.} \frac{d^4 S}{dx^4} + \dots$$

$$\text{Or, puisque } \frac{dS}{dx} = y \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$$

$$\frac{d^2 S}{dx^2} = \frac{dy}{dx} \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} + \frac{y \left(\frac{dy}{dx} \times \frac{d^2 y}{dx^2} \right)}{\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}}$$

$$\frac{d^3 S}{dx^3} = \frac{d^2 y}{dx^2} \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} + \frac{2 \times \frac{dy^2}{dx^2} \times \frac{d^2 y}{dx^2}}{\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}}$$

$$+ \frac{y \times \frac{dy}{dx} \times \frac{d^3 y}{dx^3}}{\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}} - \frac{y \times \frac{dy^2}{dx^2} \times \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2}{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2} \right)^{\frac{3}{2}}}$$

D'où l'on voit que cette suite devient si compliquée, qu'elle ne peut être d'aucune application commode.

§. LIX.

La détermination des surfaces courbes de révolution peut toujours être réduite à la rectification de la circonférence du cercle, & à la quadrature d'une surface plane dont l'équation est déterminée par celle de la courbe génératrice.

En effet, sur l'axe SP soit décrite une courbe $SS'NN'$, dont les ordonnées PN , $P'N'$ soient respectivement égales aux normales dans les points M & M' de la courbe génératrice; je dis que la surface courbe engendrée par l'arc SM tournant autour de SP , est à la surface SPN de la seconde courbe, dans le rapport constant de la circonférence d'un cercle à son rayon.

En effet, la normale au point M est $y \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}$. Partant, désignant par S' la surface de SNP , on aura $\frac{dS'}{dx} = NP = y \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}$ (§ XL).

$$\text{Mais } \frac{dS}{dx} = \pi y \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}.$$

Donc $\frac{dS}{dS'} = \pi$. Ou le rapport différentiel de la surface engendrée par la révolution de la première courbe, à la surface de la seconde, est celui

de la circonférence d'un cercle à son rayon, & partant ces deux surfaces sont entr'elles dans le même rapport constant.

§. LX.

De même qu'on détermine la nature d'une courbe toute située sur un même plan, en la rapportant à deux droites faisant entr'elles un angle donné p. ex. un angle droit; par des coordonnées à ces deux droites: on déterminera de même la nature d'une surface courbe, & celles des courbes qu'on peut tracer sur elles & qui ne peuvent pas être placées sur un même plan; en les rapportant à deux plans p. ex. perpendiculaires l'un à l'autre, & en comparant non seulement les perpendiculaires abaissées sur ces plans des points de cette surface ou de cette courbe (dite à double courbure); mais encore en rapportant les pieds de ces perpendiculaires sur ces plans, à des droites fixes prises sur les mêmes plans, p. ex. deux droites perpendiculaires l'une & l'autre à leur commune section, ou, ce qui revient au même, à un troisième plan perpendiculaire aux deux premiers. On obtient ainsi sur les deux premiers plans les projections de la courbe à double courbure, & de la connoissance de ces projections on remonte à déterminer la nature même de cette dernière.

P. ex. Les projections des tangentes & sécantes d'une courbe à double courbure sont aussi tangentes & sécantes à ces projections, & en particulier la connoissance des tangentes de ces dernières sert à déterminer les tangentes des premières. Qu'il me suffise de m'occuper de ce seul exemple de la théorie des courbes à double courbure, assez connue depuis le bel ouvrage de Clairaut.

Soit AQ (Fig. 22.) la commune section de deux plans perpendiculaires l'un à l'autre, & A l'origine commune des axes de deux courbes qui sont les projections d'une courbe à double courbure sur les deux plans. Soit M un point de la courbe à double courbure, duquel soit abaissée sur un des plans la perpendiculaire MP ; du pied P de cette perpendiculaire soit abaissée sur l'axe commun la perpendiculaire PQ . Les droites PQ & AQ seront

les coordonnées de la projection de la courbe proposée sur ce plan; & les droites MP & AQ seront les coordonnées de la projection de la même courbe sur l'autre plan. Soit M' un autre point de la courbe duquel soit abaissée la perpendiculaire $M'P'$; & du point P' soit la perpendiculaire $P'Q'$. Soient menées les droites PP' , MM' . Les droites MP , $M'P'$, perpendiculaires à un même plan, sont parallèles entr'elles, partant le quadrilatère $MPP'M'$ est tout dans un même plan: donc en particulier les droites PP' , MM' , sont dans un même plan. Que ces droites se rencontrent en S . Soient $M'm$, $P'p$ perpendiculaires à MP , PQ , & que PP' rencontre AQ en S . Soit $AQ = x$, $PQ = y$; $MP = z$; soit $QQ' = \Delta x$, $Pp = \Delta y$ & $Mm = \Delta z$, $sQ = y \times \frac{\Delta x}{\Delta y}$; $PP' = M'm = \sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)} = \Delta x \sqrt{\left(1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}\right)}$. Les triangles MmM' , MPS sont semblables. Partant $Mm : M'm = MP : PS$, ou $\Delta z : \Delta x \sqrt{\left(1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}\right)} = z : PS$; donc $PS = z \times \frac{\Delta x}{\Delta z} \sqrt{\left(1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}\right)} = z \times \sqrt{\left(\frac{\Delta x^2}{\Delta z^2} + \frac{\Delta y^2}{\Delta z^2}\right)}$. Donc la projection de la sécante MS sur le plan APQ est toujours $z \sqrt{\left(\frac{\Delta x^2}{\Delta z^2} + \frac{\Delta y^2}{\Delta z^2}\right)}$. Or la projection PT de la tangente MT est la limite de la projection de la sécante; donc la projection PT de la tangente MT est exprimée par la limite de la quantité $z \sqrt{\left(\frac{\Delta x^2}{\Delta z^2} + \frac{\Delta y^2}{\Delta z^2}\right)}$, ou par $z \sqrt{\left(\frac{dx^2}{dz^2} + \frac{dy^2}{dz^2}\right)}$.

Item, l'expression du carré de la corde MM' est $Mm^2 + M'm^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 \dots$. Donc le rapport de cette corde à QQ' ou Δx est celui de $\sqrt{\left(1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} + \frac{\Delta z^2}{\Delta x^2}\right)}$ à l'unité, & le rapport différentiel de l'arc de la courbe à double courbure à l'abscisse AP est celui de $\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}\right)}$ à l'unité.

Au reste, quoique cette manière de déterminer les affections des courbes à double courbure, en les rapportant à trois plans, soit la plus générale, elle n'est pas toujours la plus commode dans les cas particuliers. Je n'en citerai pour exemple que les loxodromiques tracées sur la surface d'une sphère, dont il est plus court & plus lumineux de s'occuper immédiatement que de les rapporter à d'autres surfaces.

CHAPITRE ONZIÈME.

Sur l'Infini & sur les différentes expositions des Principes des Calculs supérieurs.

Dans tout ce qui précède je me suis efforcé de montrer que les calculs appelés supérieurs sont indépendants de toute idée de l'infini, soit en grandeur, soit en petitesse; & je me suis proposé de répondre à l'intention (qui m'a paru être la principale) de mes juges, en développant d'une manière plus étendue & plus rigoureuse que je crois qu'on ne l'a fait jusqu'à présent, les nombreuses conséquences des principes lumineux élémentaires & vraiment mathématiques contenus dans le premier Chapitre; & tout particulièrement de ceux qui sont contenus dans les §§ V. VII. a. Si des quantités variables, susceptibles de limites, ont entr'elles un rapport constant, leurs limites sont entr'elles dans ce même rapport: & si des quantités variables, susceptibles de limites, ont entr'elles un rapport variable, mais de manière que leur rapport variable soit lui-même susceptible de limites, les limites de ces quantités sont entr'elles dans ce rapport limite.

Ces principes me paroissant incontestables, & démontrés avec la rigueur mathématique, je ne puis prévoir les difficultés qu'on pourroit élever contre eux & contre leurs applications. Je pourrois donc regarder comme remplie la tâche que je m'étois imposée, en traitant la question proposée par l'illustre Corps littéraire auquel j'ai l'honneur de présenter mon travail, s'il n'avoit demandé en même tems qu'on examinât la nature d'un être qui échappe peut-être à tout examen; ou du moins à tout examen fait par une