

**www.e-rara.ch**

## **Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs**

**L'Huilier, Simon Antoine Jean**

**Berlin, 1786**

**ETH-Bibliothek Zürich**

Shelf Mark: Rar 5048

Persistent Link: <https://doi.org/10.3931/e-rara-3747>

Addition à l'exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs, [...]

---

### **www.e-rara.ch**

Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien – von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material – from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d'imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L'éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes – des débuts de l'imprimerie jusqu'au 20e siècle.

e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

---

**Nutzungsbedingungen** Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titelnformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

**Terms of Use** This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

**Conditions d'utilisation** Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

**Condizioni di utilizzo** Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]

A d d i t i o n  
à l'Exposition élémentaire  
des Principes des Calculs supérieurs,

envoyée

à l'Académie Royale des Sciences & Belles-Lettres de Prusse,

sous la Devise

*l'Infini est le goufre où se perdent nos pensées.*

Conformément à la demande de l'illustre Corps littéraire auquel j'ai eu l'honneur d'envoyer mon Mémoire sur l'Infini mathématique, j'ai cru devoir m'y borner à une exposition lumineuse des Principes des Calculs supérieurs, & ne pas entrer dans des détails de calcul qui m'auroient éloigné de mon but principal. Je ne prendrois donc pas la liberté de lui adresser cette légère addition, si elle n'étoit étroitement liée avec une proposition qui a servi de base à la plus grande partie de mon Mémoire, & si elle ne servoit à faire mieux sentir combien il étoit important de la démontrer d'une manière claire & rigoureuse.

Dans la Lettre XI<sup>me</sup> de la Correspondance allemande de Mrs. Lambert & Holland (dont je viens de faire la lecture) ce dernier (également distingué par ses connoissances mathématiques & par la justesse & la profondeur de sa philosophie) s'exprime comme il suit. \*) *Ich habe besonders durch die bernoullische (Reihe) finden wollen: ob sich nicht könnte  $\int y^m dx$  aus  $\int y dx$ ;*

B b 3

\*) C'est à dire: J'ai voulu trouver par la suite de Bernoulli, si de l'intégrale  $\int y dx$  on ne pourroit pas déduire l'intégrale  $\int y^m dx$ ; ou, ce que je desirois tout particulièrement, l'intégrale  $\int xy dx$ . Mais jusqu'à présent toutes mes recherches à cet égard ont été inutiles. Si cette comparaison est généralement possible, (ce dont je doute encore) j'en regarde la découverte comme une des plus importantes qu'on puisse faire pour l'avancement du Calcul intégral.

oder, welches ich besonders wünschte,  $\int xy dx$  aus  $\int y dx$ , finden lassen. Mein Bemühen war fruchtlos, wie es noch alle meine Untersuchungen in diesem Punkt gewesen sind. Wenn diese Vergleichung allgemein möglich ist, (woran ich noch zweifle), so sehe ich die Entdeckung derselben für eine der wichtigsten an, die man zur Erweiterung der Integral-Rechnung machen kann.

Il seroit étonnant que les vœux & les tentatives de Mr. Holland n'eussent pas engagé Mr. Lambert à s'occuper de cet objet. Cependant, dans sa réponse il ne relève point cet endroit remarquable de la lettre de son ami. Auroit-il donc regardé comme peu importante une recherche qui ne tend à rien moins qu'à réduire au simple calcul différentiel une grande partie du calcul intégral? La facilité extrême avec laquelle les vœux de Mr. Holland peuvent être remplis, ne me laisse aucun doute sur le succès qu'auroit eu un mathématicien tel que Mr. Lambert, s'il s'en fût occupé.

Le théorème de Taylor, développé & démontré (indépendamment de toute idée de l'infini) dans le Chap. III<sup>me</sup> de mon Mémoire, sert de base aux propositions les plus importantes qui y sont contenues. Dans le Chap. VII<sup>me</sup> j'en ai déduit immédiatement la suite de Bernoulli, ou la quadrature des courbes; & dans les Chap. VIII, IX & X j'en ai montré l'application à la rectification des courbes, à la cubature des solides de révolution, & à la quadrature de leurs surfaces. Savoir, (pour m'en tenir aux expressions de mon Mémoire,) j'en ai déduit les valeurs de  $P$ , lorsque les valeurs de  $\frac{dP}{dx}$  sont respectivement  $y$ ,  $\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}$ ,  $yy$ , &  $y\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}$ . Ou bien, (pour parler le langage commode adopté,) j'en ai déduit les intégrales de  $y dx$ ,  $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ ,  $yy dx$ , &  $y\sqrt{dx^2 + dy^2}$ . Le procédé que j'ai suivi dans ces cas particuliers, peut être généralisé. Mais, pour m'en tenir au désir de Mr. Holland, je vais partir de la suite de Bernoulli, reconnue démontrée de la manière requise par l'Académie; d'autant plus que les deux déductions (par le théorème de Taylor immédiatement, & par la suite de Bernoulli) ne diffèrent que dans le début.

Par la suite de Bernoulli: lorsque  $\frac{dP}{dx} = z$ ; ou  $P = \int z dx$  (suivant l'expression adoptée)  $P = z x - \frac{x^2}{1.2} \frac{dz}{dx} + \frac{x^3}{1.2.3} \frac{ddz}{dx^2} - \frac{x^4}{1.2.3.4} \frac{d^3z}{dx^3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} \frac{d^4z}{dx^4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} \frac{d^5z}{dx^5} + \&c..$

Cette suite ayant lieu, quelle que soit la valeur de  $z$ , (simple ou composée, rationnelle ou irrationnelle, algébrique ou transcendante), pourvu qu'on puisse obtenir les exposants des rapports différentiels successifs de  $z$  & de  $x$ : lorsque  $z$  sera une quantité complexe, les exposants des rapports différentiels successifs de  $z$  & de  $x$ , au lieu de se présenter sous une forme simple, pourront se présenter sous la forme de quantités composées, mais de manière que l'expression de  $P$  ne différera que par la complication de ses termes, de son expression dans le cas où  $z$  est une quantité simple.

Je vais éclaircir cette assertion générale par les deux formules que Mr. Holland a prises pour exemples.

1°. Soit  $\frac{dP}{dx} = xy$ : ou,  $P = \int xy dx$ . Soit  $z = xy$ .

$$\text{Partant } \frac{dz}{dx} = y + x \frac{dy}{dx}.$$

$$\frac{ddz}{dx^2} = 2 \frac{dy}{dx} + x \frac{ddy}{dx^2}.$$

$$\frac{d^3z}{dx^3} = 3 \frac{ddy}{dx^2} + x \frac{d^3y}{dx^3}$$

$$\frac{d^4z}{dx^4} = 4 \frac{d^3y}{dx^3} + x \frac{d^4y}{dx^4}$$

$$\frac{d^5z}{dx^5} = 5 \frac{d^4y}{dx^4} + x \frac{d^5y}{dx^5}$$

$$\frac{d^6z}{dx^6} = 6 \frac{d^5y}{dx^5} + x \frac{d^6y}{dx^6} \&c. \&c. \&c. \dots$$

Dans la suite de Bernoulli, substituant à  $z$  & aux exposants des rapports différentiels de  $z$  & de  $x$  leurs valeurs en  $y$  &  $x$ , on obtient

$$P = xxy$$

$$\begin{aligned} &= \frac{xy}{1.2} - \frac{x^3}{1.2} \frac{dy}{dx} \\ &+ \frac{2x^3}{1.2.3} \frac{dy}{dx} + \frac{x^4}{1.2.3} \frac{ddy}{dx^2} \\ &\quad - \frac{3x^4}{1.2.3.4} \frac{ddy}{dx^2} - \frac{x^5}{1.2.3.4} \frac{d^3y}{dx^3} \\ &+ \frac{4x^5}{1.2.3.4.5} \frac{d^3y}{dx^3} + \frac{x^6}{1.2.3.4.5} \frac{d^4y}{dx^4} \\ &\quad - \frac{5x^6}{1.2.3.4.5.6} \frac{d^4y}{dx^4} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6} \frac{d^5y}{dx^5} \\ &+ \frac{6x^7}{1.2.3.4.5.6.7} \frac{d^5y}{dx^5} + \&c. \&c. \&c. \dots \\ &= \frac{xy}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3} \frac{dy}{dx} + \frac{x^4}{1.2.3.4} \frac{ddy}{dx^2} - \frac{x^5}{1.2.3.4.5} \frac{d^3y}{dx^3} \\ &\quad + \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} \frac{d^4y}{dx^4} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} \frac{d^5y}{dx^5} + \dots \end{aligned}$$

2°. Soit  $\frac{dP}{dx} = y^m$ ; ou  $P = \int y^m dx$ . Soit  $\zeta = y^m$ .

$$\text{Partant } \frac{d\zeta}{dx} = m y^{m-1} \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dd\zeta}{dx^2} = m.m-1 y^{m-2} \frac{dy^2}{dx^2} + m y^{m-1} \frac{ddy}{dx^2}$$

$$\frac{d^3\zeta}{dx^3} = m.m-1.m-2 y^{m-3} \frac{dy^3}{dx^3} + 2m.m-1 y^{m-2} \frac{dy}{dx} \cdot \frac{ddy}{dx^2}$$

$$+ m.m-1 y^{m-2} \frac{dy}{dx} \cdot \frac{ddy}{dx^2} + m y^{m-1} \frac{d^3y}{dx^3}$$

$$= m.m-1.m-2 y^{m-3} \frac{dy^3}{dx^3} + 3m.m-1 y^{m-2} \frac{dy}{dx} \frac{ddy}{dx^2}$$

$$+ m y^{m-1} \frac{d^3y}{dx^3}$$

$$\frac{d^4\zeta}{dx^4} = m.m-2.m-1.m-3 y^{m-4} \frac{dy^4}{dx^4}$$

$$+ 3m.m-1.m-2 y^{m-3} \frac{dy^2}{dx^2} \cdot \frac{ddy}{dx^2}$$

$$\begin{aligned}
& + 3m \cdot m - 1 \cdot m - 2y^{m-3} \frac{dy^2}{dx^2} \cdot \frac{ddy}{dx^2} \\
& + 3m \cdot m - 1 \cdot y^{m-2} \left( \frac{ddy}{dx^2} \right)^2 + 3m \cdot m - 1 \cdot y^{m-2} \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^3y}{dx^3} \\
& \quad + m \cdot m - 1 \cdot y^{m-2} \frac{dy}{dx} \frac{d^3y}{dx^3} + m y^{m-1} \frac{d^4y}{dx^4} \\
& = m \cdot m - 1 \cdot m - 2 \cdot m - 3 y^{m-4} \frac{dy^4}{dx^4} \\
& + 6m \cdot m - 1 \cdot m - 2 y^{m-3} \frac{dy^2}{dx^2} \frac{ddy}{dx^2} + 3m \cdot m - 1 \cdot y^{m-2} \left( \frac{ddy}{dx^2} \right)^2 \\
& + 4m \cdot m - 1 \cdot y^{m-2} \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^3y}{dx^3} + m y^{m-1} \frac{d^4y}{dx^4} \cdot \&c... \&c... \&c...
\end{aligned}$$

Partant, substituant dans la suite de Bernoulli à  $\zeta$  & aux exposants des rapports différentiels de  $\zeta$  & de  $x$ , leurs valeurs en  $y$  &  $x$ ; on obtient la valeur de  $P$  en  $y$  &  $x$ .

Ce procédé est général pour toute valeur de  $\zeta$ ; p. ex. lorsqu'elle est le produit de plusieurs quantités variables dont on peut déterminer les rapports différentiels successifs à  $x$ .

*Exemple.* Soit  $\frac{dP}{dx} = vy$ ; ou,  $P = \int vy dx$ . Soit  $\zeta = vy$ .

$$\text{Partant } \frac{d\zeta}{dx} = v \frac{dy}{dx} + y \frac{dv}{dx}.$$

$$\frac{dd\zeta}{dx^2} = v \frac{ddy}{dx^2} + 2 \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dy}{dx} + y \frac{ddv}{dx^2}$$

$$\frac{d^3\zeta}{dx^3} = v \frac{d^3y}{dx^3} + 3 \frac{dv}{dx} \cdot \frac{ddy}{dx^2} + 3 \frac{ddv}{dx^2} \cdot \frac{dy}{dx} + y \frac{d^3v}{dx^3}.$$

$$\frac{d^4\zeta}{dx^4} = v \frac{d^4y}{dx^4} + 4 \frac{dv}{dx} \frac{d^3y}{dx^3} + 6 \frac{ddv}{dx^2} \cdot \frac{ddy}{dx^2} + 4 \frac{d^3v}{dx^3} \frac{dy}{dx}$$

$$+ y \frac{d^4v}{dx^4}$$

$$\frac{d^5\zeta}{dx^5} = v \frac{d^5y}{dx^5} + 5 \frac{dv}{dx} \frac{d^4y}{dx^4} + 10 \frac{ddv}{dx^2} \cdot \frac{d^3y}{dx^3} + 10 \frac{d^3v}{dx^3} \frac{ddy}{dx^2}$$

$$+ 5 \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^4v}{dx^4} + y \frac{d^5v}{dx^5} \&c... \&c... \&c...$$

Partant  $P = vxy$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{x^2}{1.2} \left( v \frac{dy}{dx} + y \frac{dv}{dx} \right) \\
 & + \frac{x^3}{1.2.3} \left( v \frac{ddy}{dx^2} + 2 \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dy}{dx} + y \frac{ddv}{dx^2} \right) \\
 & - \frac{x^4}{1.2.3.4} \left( v \frac{d^3y}{dx^3} + 3 \frac{dv}{dx} \frac{ddy}{dx^2} + 3 \frac{ddv}{dx^2} \frac{dy}{dx} + y \frac{d^3v}{dx^3} \right) \\
 & + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} \left( v \frac{d^4y}{dx^4} + 4 \frac{dv}{dx} \cdot \frac{d^3y}{dx^3} + 6 \frac{ddv}{dx^2} \cdot \frac{ddy}{dx^2} \right. \\
 & \quad \left. + 4 \frac{d^3v}{dx^3} \cdot \frac{dy}{dx} + y \frac{d^4v}{dx^4} \right) \\
 & - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} \left( v \frac{d^5y}{dx^5} + 5 \frac{dv}{dx} \frac{d^4y}{dx^4} + 10 \frac{ddv}{dx^2} \cdot \frac{d^3y}{dx^3} \right. \\
 & \quad \left. + 10 \frac{d^3v}{dx^3} \frac{ddy}{dx^2} + 5 \frac{d^4v}{dx^4} \cdot \frac{dy}{dx} + y \frac{d^5v}{dx^5} \right) \\
 & + \&c... \&c... \&c...
 \end{aligned}$$

Enfin la suite de Bernoulli ne renferme pas seulement la solution des équations différentielles simples du premier degré, dans lesquelles on a  $\frac{dP}{dx} = y$ , ou  $P = \int y dx$ ; mais encore la solution des équations différentielles simples de tous les degrés, comprises sous la forme  $\frac{d^n P}{dx^n} = y$ . Savoir, je trouve que, si  $\frac{d^n P}{dx^n} = y$ , on a

$$\begin{aligned}
 \frac{d^{n-m} P}{dx^{n-m}} &= \frac{x^m}{1.2.3\dots m} y - \frac{x^{m+1}}{1.2.3\dots m+1} \cdot \frac{dy}{dx} \\
 &+ \frac{m \cdot m+1}{1.2.3\dots m+2} x^{m+2} \frac{ddy}{dx^2} - \frac{m \cdot m+1 \cdot m+2}{1.2.3\dots m+3} x^{m+3} \frac{d^3y}{dx^3} \\
 &+ \frac{m \cdot m+1 \cdot m+2 \cdot m+3}{1.2.3\dots m+4} x^{m+4} \frac{d^4y}{dx^4} - \&c...
 \end{aligned}$$

Donc, en particulier, en faisant  $m = n$

$$\begin{aligned}
 P = & \frac{x^n}{1.2.3\dots n} y - \frac{\frac{n}{1} x^{n+1}}{1.2.3\dots n+1} \cdot \frac{dy}{dx} \\
 + & \frac{\frac{n}{1} \cdot \frac{n+1}{2} x^{n+2}}{1.2.3\dots n+2} \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{\frac{n}{1} \cdot \frac{n+1}{2} \cdot \frac{n+2}{3} x^{n+3}}{1.2.3\dots n+3} \frac{d^3y}{dx^3} \\
 + & \frac{\frac{n}{1} \cdot \frac{n+1}{2} \cdot \frac{n+2}{3} \cdot \frac{n+3}{4} x^{n+4}}{1.2.3\dots n+4} \frac{d^4y}{dx^4} - \&c\dots
 \end{aligned}$$

Comme ce sujet est bien plus relatif à l'avancement du calcul intégral en particulier qu'à la métaphysique des principes des calculs supérieurs en général, je crois ne devoir pas abuser de la patience de mes juges, en développant la démonstration, qui ne peut avoir aucune difficulté pour le plus grand nombre d'entr'eux.

## Simplification

des §§ VI<sup>m</sup> & a du premier Chapitre de l'Exposition élémentaire des Principes des Calculs supérieurs.

(Pag. 18 & 24.)

Pressé par le temps & distrait par d'autres occupations, l'Auteur de ce Mémoire n'a pas dû se flatter de traiter, avant le terme prescrit pour le concours, d'une manière aussi satisfaisante qu'il espère le faire un jour, toutes les parties d'un sujet aussi vaste que celui qui en fait l'objet; & de réunir toutes les conditions requises par l'Académie. En particulier, le premier Chapitre lui paroît exiger des changements importants, soit dans l'ordre des propositions en général, soit dans le développement de quelques-unes d'entr'elles en particulier. D'après cet avis, le Lecteur voudra bien ne pas juger trop à la rigueur un ouvrage composé dans un petit espace de temps.