Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs

L'Huilier, Simon Antoine Jean

Berlin, 1786

Addition à l'exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs, [...]

Addition
à l'Exposition élémentaire
des Principes des Calculs supérieurs,

envoyée

à l'Académie Royale des Sciences & Belles-Lettres de Prusse,

sous la Devise

l'Infini est le goufre où se perdent nos pensées.

Conformément à la demande de l'illustre Corps littéraire auquel j'ai eu l'honneur d'envoyer mon Mémoire sur l'Infini mathématique, j'ai cru devoir m'y borner à une exposition lumineuse des Principes des Calculs supérieurs, & ne pas entrer dans des détails de calcul qui m'auroient éloigné de mon but principal. Je ne prendrois donc pas la liberté de lui adresser cette légère addition, si elle n'étoit étroitement liée avec une proposition qui a servi de base à la plus grande partie de mon Mémoire, & si elle ne servoit à faire mieux sentir combien il étoit important de la démontrer d'une manière claire & rigoureuse.

Dans la Lettre XI[me] de la Correspondance allemande de Mrs. Lambert & Holland (dont je viens de faire la lecture) ce dernier (également distingué par ses connoissances mathématiques & par la justesse & la profondeur de sa philosophie) s'exprime comme il suit. *) *Ich habe besonders durch die bernoullische* (Reihe) *finden wollen: ob sich nicht könnte* $\int. y^m dx$ *aus* $\int. y\, dx$;

*) C'est à dire: *J'ai voulu trouver par la suite de Bernoulli, si de l'intégrale* $\int. y\, dx$ *on ne pourroit pas déduire l'intégrale* $\int. y^m dx$*; ou, ce que je désirois tout particulièrement, l'intégrale* $\int. xy\, dx$. *Mais jusqu'à présent toutes mes recherches à cet égard ont été inutiles. Si cette comparaison est généralement possible, (ce dont je doute encore) j'en regarde la découverte comme une des plus importantes qu'on puisse faire pour l'avantement du Calcul intégral.*

oder, welches ich besonders wünschte, ſ. x y d x aus ſ. y d x, finden lassen. Mein Bemühen war fruchtlos, wie es noch alle meine Untersuchungen in diesem Punkt gewesen sind. Wenn diese Vergleichung allgemein möglich ist, (woran ich noch zweifle), so sehe ich die Entdeckung derselben für eine der wichtigsten an, die man zur Erweiterung der Integal-Rechnung machen kann.

Il seroit étonnant que les vœux & les tentatives de Mr. Holland n'eussent pas engagé Mr. Lambert à s'occuper de cet objet. Cependant, dans sa réponse il ne relève point cet endroit remarquable de la lettre de son ami. Auroit-il donc regardé comme peu importante une recherche qui ne tend à rien moins qu'à réduire au simple calcul différentiel une grande partie du calcul intégral? La facilité extrême avec laquelle les vœux de Mr. Holland peuvent être remplis, ne me laisse aucun doute sur le succès qu'auroit eu un mathématicien tel que Mr. Lambert, s'il s'en fût occupé.

Le théorème de Taylor, développé & démontré (indépendamment de toute idée de l'infini) dans le Chap. III[me] de mon Mémoire, sert de base aux propositions les plus importantes qui y sont contenues. Dans le Chap. VII[me] j'en ai déduit immédiatement la suite de Bernoulli, ou la quadrature des courbes; & dans les Chap. VIII, IX & X j'en ai montré l'application à la rectification des courbes, à la cubature des solides de révolution, & à la quadrature de leurs surfaces. Savoir, (pour m'en tenir aux expressions de mon Mémoire,) j'en ai déduit les valeurs de P, lorsque les valeurs de $\frac{dP}{dx}$ sont respectivement y, $\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}$, yy, & $y\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}$. Ou bien, (pour parler le langage commode adopté,) j'en ai déduit les intégrales de $y\,dx$, $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, $yy\,dx$, & $y\sqrt{(dx^2+dy^2)}$. Le procédé que j'ai suivi dans ces cas particuliers, peut être généralisé. Mais, pour m'en tenir au désir de Mr. Holland, je vais partir de la suite de Bernoulli, reconnue démontrée de la manière requise par l'Académie; d'autant plus que les deux déductions (par le théorème de Taylor immédiatement, & par la suite de Bernoulli) ne diffèrent que dans le début.

Par la ſuite de Bernoulli: lorsque $\frac{dP}{dx} = z$; ou $P = \int z\,dx$ (ſuivant l'expreſſion adoptée) $P = zx - \frac{x^2}{1.2}\frac{dz}{dx} + \frac{x^3}{1.2.3}\frac{ddz}{dx^2} - \frac{x^4}{1.2.3.4}\frac{d^3z}{dx^3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5}\frac{d^4z}{dx^4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6}\frac{d^5z}{dx^5} +$ &c...

Cette ſuite ayant lieu, quelle que ſoit la valeur de z, (ſimple ou compoſée, rationelle ou irrationelle, algébrique ou transcendante), pourvu qu'on puiſſe obtenir les expoſants des rapports différentiels ſucceſſifs de z & de x: lorsque z ſera une quantité complexe, les expoſants des rapports différentiels ſucceſſifs de z & de x, au lieu de ſe préſenter ſous une forme ſimple, pourront ſe préſenter ſous la forme de quantités compoſées, mais de manière que l'expreſſion de P ne différera que par la complication de ſes termes, de ſon expreſſion dans le cas où z eſt une quantité ſimple.

Je vais éclaircir cette aſſertion générale par les deux formules que Mr. Holland a priſes pour exemples.

1°. Soit $\frac{dP}{dx} = xy$: ou, $P = \int xy\,dx$. Soit $z = xy$.

Partant $\frac{dz}{dx} = y + x\frac{dy}{dx}$.

$$\frac{ddz}{dx^2} = 2\frac{dy}{dx} + x\frac{ddy}{dx^2}.$$
$$\frac{d^3z}{dx^3} = 3\frac{ddy}{dx^2} + x\frac{d^3y}{dx^3}$$
$$\frac{d^4z}{dx^4} = 4\frac{d^3y}{dx^3} + x\frac{d^4y}{dx^4}$$
$$\frac{d^5z}{dx^5} = 5\frac{d^4y}{dx^4} + x\frac{d^5y}{dx^5}$$
$$\frac{d^6z}{dx^6} = 6\frac{d^5y}{dx^5} + x\frac{d^6y}{dx^6} \text{ \&c. \&c. \&c. ..}$$

Dans la ſuite de Bernoulli, ſubſtituant à z & aux expoſants des rapports différentiels de z & de x leurs valeurs en y & x, on obtient

$$P = xxy$$

$$- \frac{xxy}{1.2} - \frac{x^3}{1.2}\frac{dy}{dx}$$

$$+ \frac{2x^3}{1.2.3}\frac{dy}{dx} + \frac{x^4}{1.2.3}\frac{ddy}{dx^2}$$

$$- \frac{3x^4}{1.2.3.4}\frac{ddy}{dx^2} - \frac{x^5}{1.2.3.4}\frac{d^3y}{dx^3}$$

$$+ \frac{4x^5}{1.2.3.4.5}\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{x^6}{1.2.3.4.5}\frac{d^4y}{dx^4}$$

$$- \frac{5x^6}{1.2.3.4.5.6}\frac{d^4y}{dx^4} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6}\frac{d^5y}{dx^5}$$

$$+ \frac{6x^7}{1.2.3.4.5.6.7}\frac{d^5y}{dx^5} + \text{\&c. \&c. \&c.} \ldots$$

$$= \frac{xxy}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3}\frac{dy}{dx} + \frac{x^4}{1.2.3.4}\frac{ddy}{dx^2} - \frac{x^5}{1.2.3.4.5}\frac{d^3y}{dx^3}$$

$$+ \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6}\frac{d^4y}{dx^4} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7}\frac{d^5y}{dx^5} + \ldots$$

2°. Soit $\frac{dP}{dx} = y^m$; ou $P = \int . y^m dx$. Soit $z = y^m$.

Partant $\frac{dz}{dx} = m y^{m-1} \frac{dy}{dx}$

$$\frac{ddz}{dx^2} = m.m-1\, y^{m-2}\frac{dy^2}{dx^2} + my^{m-1}\frac{ddy}{dx^2}$$

$$\frac{d^3z}{dx^3} = m.m-1.m-2\,y^{m-3}\frac{dy^3}{dx^3} + 2m.m-1.y^{m-2}\frac{dy}{dx}.\frac{ddy}{dx^2}$$

$$+ m.m-1.y^{m-2}\frac{dy}{dx}.\frac{ddy}{dx^2} + my^{m-1}\frac{d^3y}{dx^3}$$

$$= m.m-1.m-2\,y^{m-3}\frac{dy^3}{dx^3} + 3m.m-1.y^{m-2}\frac{dy}{dx}\frac{ddy}{dx^2}$$

$$+ my^{m-1}\frac{d^3y}{dx^3}$$

$$\frac{d^4z}{dx^4} = m.m-2.m-1.m-3\,y^{m-4}\frac{dy^4}{dx^4}$$

$$+ 3m.m-1.m-2.y^{m-3}\frac{dy^2}{dx^2}.\frac{ddy}{dx^2}$$

+ 3

$$+ 3m.m - 1.m - 2y^{m-3}\frac{dy^2}{dx^2}.\frac{ddy}{dx^2}$$

$$+ 3m.m - 1.y^{m-2}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)^2 + 3m.m - 1y^{m-2}\frac{dy}{dx}.\frac{d^3y}{dx^3}$$

$$+ m.m - 1y^{m-2}\frac{dy}{dx}\frac{d^3y}{dx^3} + my^{m-1}\frac{d^4y}{dx^4}$$

$$= m.m - 1.m - 2.m - 3y^{m-4}\frac{dy^4}{dx^4}$$

$$+ 6m.m - 1.m - 2y^{m-3}\frac{dy^2}{dx^2}\frac{ddy}{dx^2} + 3m.m - 1.y^{m-2}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)^2$$

$$+ 4m.m - 1.y^{m-2}\frac{dy}{dx}.\frac{d^3y}{dx^3} + my^{m-1}\frac{d^4y}{dx^4}. \text{ \&c... \&c... \&c...}$$

Partant, ſubſtituant dans la ſuite de Bernoulli à z & aux expoſants des rapports différentiels de z & de x, leurs valeurs en y & x; on obtient la valeur de P en y & x.

Ce procédé eſt général pour toute valeur de z; p. ex. lorsqu'elle eſt le produit de pluſieurs quantités variables dont on peut déterminer les rapports différentiels ſucceſſifs à x.

Exemple. Soit $\frac{dP}{dx} = vy$; ou, $P = \int vy\,dx$. Soit $z = vy$.

Partant $\frac{dz}{dx} = v\frac{dy}{dx} + y\frac{dv}{dx}$.

$$\frac{ddz}{dx^2} = v\frac{ddy}{dx^2} + 2\frac{dv}{dx}.\frac{dy}{dx} + y\frac{ddv}{dx^2}$$

$$\frac{d^3z}{dx^3} = v\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{dv}{dx}.\frac{ddy}{dx^2} + 3\frac{ddv}{dx^2}.\frac{dy}{dx} + y\frac{d^3v}{dx^3}.$$

$$\frac{d^4z}{dx^4} = v\frac{d^4y}{dx^4} + 4\frac{dv}{dx}\frac{d^3y}{dx^3} + 6\frac{ddv}{dx^2}.\frac{ddy}{dx^2} + 4\frac{d^3v}{dx^3}\frac{dy}{dx} + y\frac{d^4v}{dx^4}$$

$$\frac{d^5z}{dx^5} = v\frac{d^5y}{dx^5} + 5\frac{dv}{dx}\frac{d^4y}{dx^4} + 10\frac{ddv}{dx^2}.\frac{d^3y}{dx^3} + 10\frac{d^3v}{dx^3}\frac{ddy}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx}.\frac{d^4v}{dx^4} + y\frac{d^5v}{dx^5} \text{ \&c... \&c... \&c...}$$

Partant $P = vxy$

$$- \frac{x^2}{1.2}\left(v\frac{dy}{dx} + y\frac{dv}{dx}\right)$$

$$+ \frac{x^3}{1.2.3}\left(v\frac{ddy}{dx^2} + 2\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dy}{dx} + y\frac{ddv}{dx^2}\right)$$

$$- \frac{x^4}{1.2.3.4}\left(v\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{dv}{dx}\frac{ddy}{dx^2} + 3\frac{ddv}{dx^2}\frac{dy}{dx} + y\frac{d^3v}{dx^3}\right)$$

$$+ \frac{x^5}{1.2.3.4.5}\left(v\frac{d^4y}{dx^4} + 4\frac{dv}{dx}\cdot\frac{d^3y}{dx^3} + 6\frac{ddv}{dx^2}\cdot\frac{ddy}{dx^2}\right.$$
$$\left. + 4\frac{d^3v}{dx^3}\cdot\frac{dy}{dx} + y\frac{d^4v}{dx^4}\right)$$

$$- \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6}\left(v\frac{d^5y}{dx^5} + 5\frac{dv}{dx}\frac{d^4y}{dx^4} + 10\frac{ddv}{dx^2}\cdot\frac{d^3y}{dx^3}\right.$$
$$\left. + 10\frac{d^3v}{dx^3}\frac{ddy}{dx^2} + 5\frac{d^4v}{dx^4}\cdot\frac{dy}{dx} + y\frac{d^5v}{dx^5}\right)$$

$$+ \text{\&c... \&c... \&c...}$$

Enfin la ſuite de Bernoulli ne renferme pas ſeulement la ſolution des équations différentielles ſimples du premier degré, dans leſquelles on a $\frac{dP}{dx} = y$, ou $P = \int y\,dx$; mais encore la ſolution des équations différentielles ſimples de tous les degrés, compriſes ſous la forme $\frac{d^nP}{dx^n} = y$. Savoir, je trouve que, ſi $\frac{d^nP}{dx^n} = y$, on a

$$\frac{d^{n-m}P}{dx^{n-m}} = \frac{x^m}{1.2.3....m}y - \frac{\frac{m}{1}x^{m+1}}{1.2.3...m+1}\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$+ \frac{\frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}x^{m+2}}{1.2.3...m+2}\frac{ddy}{dx^2} - \frac{\frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\cdot\frac{m+2}{3}x^{m+3}}{1.2.3...m+3}\frac{d^3y}{dx^3}$$

$$+ \frac{\frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\cdot\frac{m+2}{3}\cdot\frac{m+3}{4}x^{m+4}}{1.2.3.....m+4}\frac{d^4y}{dx^4} - \text{\&c...}$$

Donc, en particulier, en faisant $m = n$

$$P = \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} y - \frac{\frac{n}{1} x^{n+1}}{1.2.3\ldots n+1} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\frac{n}{1} \cdot \frac{n+1}{2} x^{n+2}}{1.2.3\ldots n+2} \frac{ddy}{dx^2} - \frac{\frac{n}{1} \cdot \frac{n+1}{2} \cdot \frac{n+2}{3} x^{n+3}}{1.2.3\ldots n+3} \frac{d^3y}{dx^3} + \frac{\frac{n}{1} \cdot \frac{n+1}{2} \cdot \frac{n+2}{3} \cdot \frac{n+3}{4} x^{n+4}}{1.2.3\ldots n+4} \frac{d^4y}{dx^4} - \&c\ldots$$

Comme ce ſujet eſt bien plus relatif à l'avancement du calcul intégral en particulier qu'à la métaphyſique des principes des calculs ſupérieurs en général, je crois ne devoir pas abuſer de la patience de mes juges, en développant la démonſtration, qui ne peut avoir aucune difficulté pour le plus grand nombre d'entr'eux.

Simplification
des §§ VI^me & a du premier Chapitre de l'Expoſition élémentaire des Principes des Calculs ſupérieurs.

(Pag. 18 & 24.)

Preſſé par le temps & diſtrait par d'autres occupations, l'Auteur de ce Mémoire n'a pas dû ſe flatter de traiter, avant le terme preſcrit pour le concours, d'une manière auſſi ſatisfaiſante qu'il eſpère le faire un jour, toutes les parties d'un ſujet auſſi vaſte que celui qui en fait l'objet; & de réunir toutes les conditions requiſes par l'Académie. En particulier, le premier Chapitre lui paroît exiger des changements importants, ſoit dans l'ordre des propoſitions en général, ſoit dans le développement de quelques-unes d'entr'elles en particulier. D'après cet avis, le Lecteur voudra bien ne pas juger trop à la rigueur un ouvrage composé dans un petit eſpace de temps.