Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs

L'Huilier, Simon Antoine Jean

Berlin, 1786

Simplification des §§ VIme & a du premier chapitre de l'exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs.

Donc, en particulier, en faisant $m = n$

$$P = \frac{x^n}{1.2.3\ldots n}\, y - \frac{\frac{n}{1} x^{n+1}}{1.2.3\ldots n+1} \cdot \frac{dy}{dx}$$
$$+ \frac{\frac{n}{1} \cdot \frac{n+1}{2} x^{n+2}}{1.2.3\ldots n+2}\, \frac{ddy}{dx^2} - \frac{\frac{n}{1} \cdot \frac{n+1}{2} \cdot \frac{n+2}{3} x^{n+3}}{1.2.3\ldots n+3}\, \frac{d^3y}{dx^3}$$
$$+ \frac{\frac{n}{1} \cdot \frac{n+1}{2} \cdot \frac{n+2}{3} \cdot \frac{n+3}{4} x^{n+4}}{1.2.3\ldots n+4}\, \frac{d^4y}{dx^4} - \text{\&c.}\ldots$$

Comme ce ſujet eſt bien plus relatif à l'avancement du calcul intégral en particulier qu'à la métaphyſique des principes des calculs ſupérieurs en général, je crois ne devoir pas abuſer de la patience de mes juges, en développant la démonſtration, qui ne peut avoir aucune difficulté pour le plus grand nombre d'entr'eux.

Simplification

des §§ VI^me & a du premier Chapitre de l'Expoſition élémentaire des Principes des Calculs ſupérieurs.

(Pag. 18 & 24.)

Preſſé par le temps & diſtrait par d'autres occupations, l'Auteur de ce Mémoire n'a pas dû ſe flatter de traiter, avant le terme preſcrit pour le concours, d'une manière auſſi ſatisfaiſante qu'il eſpère le faire un jour, toutes les parties d'un ſujet auſſi vaſte que celui qui en fait l'objet; & de réunir toutes les conditions requiſes par l'Académie. En particulier, le premier Chapitre lui paroît exiger des changements importants, ſoit dans l'ordre des propoſitions en général, ſoit dans le développement de quelques-unes d'entr'elles en particulier. D'après cet avis, le Lecteur voudra bien ne pas juger trop à la rigueur un ouvrage compoſé dans un petit eſpace de temps.

Cet aveu eſt relatif en particulier au § VI du premier Chapitre. Comme le théorème qui y eſt contenu, ſur le rapport compoſé de rapports ſuſceptibles de limites, joue un très grand rôle dans le cours de ce Mémoire, & qu'il eſt d'une très-grande importance dans toute la théorie des rapports différentiels, l'Auteur déſire qu'une démonſtration plus lumineuſe & plus géométrique de cette propoſition, que celle qui eſt contenue dans le texte, ſoit rendue publique, comme exemple des améliorations dont ſon travail eſt ſuſceptible.

Théorème. Soient deux quantités variables ſuſceptibles de limites, qui s'approchent en même temps de leurs limites de manière à pouvoir en différer en même temps moins que d'aucune quantité aſſignée: j'affirme que, ou bien le rapport de ces deux quantités eſt égal au rapport de leurs limites, ou bien leur rapport limite eſt égal au rapport de leurs limites.

Soient A' & B' les limites de deux quantités variables A & B; je dis que

ou bien $A : B = A' : B'$

ou bien lim. $(A : B) = A' : B'$.

1er *cas.* Que les deux limites A' & B' ſoient de genres oppoſés; ſavoir, que A' ſoit, par exemple, la limite en petiteſſe de A, & que B' ſoit la limite en grandeur de B.

Puiſque A eſt toujours plus grand que A', & que B eſt toujours plus petit que B', le rapport de A à B eſt toujours plus grand que le rapport de A' à B': j'affirme que le rapport de A à B peut être rendu plus petit que le rapport propoſé de $A' + a'$ à B' plus grand que le rapport de A' à B'.

Soit pris A plus petit que $A' + a'$. Soit établie la proportion $A' + a' : A = B' : B''$; & ſoit pris B plus grand que B''.

Puiſque $B > B''$: $B' : B'' > B' : B$.

Donc $A' + a' : A > B' : B$

Ou $A' + a' : B' > A : B$.

2d *cas.* Que A' & B' ſoient l'un & l'autre les limites en grandeur de A & de B; j'affirme que le rapport de A à B peut être égal au rapport de A' à B', ou en approcher plus près que n'en approche aucun rapport propoſé plus grand ou plus petit que ce dernier.

1°. Si le rapport de A à B eſt conſtant, ce rapport eſt auſſi celui de leurs limites (par le § III, qui pourroit être réuni avec celui-ci.)

2°. Que le rapport de A à B ne ſoit pas conſtant; je dis qu'on peut rendre le rapport de A à B, en même temps plus grand qu'un rapport propoſé de $A' - a'$ à B', plus petit que le rapport de A' à B', & plus petit qu'un rapport propoſé de A' à $B' - b'$ plus grand que le rapport de A' à B'.

Soit fait en même temps A plus grand que $A' - a'$, & B plus grand que $B' - b'$.

1° Puisque $A > A' - a'$; $A : B > A' - a' : B$; mais $B' > B$; donc à plus forte raiſon $\quad A : B > A' - a' : B'$.

2°. Puisque $B > B' - b'$; $A : B < A : B' - b'$; mais $A' > A$; donc à plus forte raiſon $\quad A : B < A' : B' - b'$.

3^{me} *cas.* Que A' & B' ſoient l'un & l'autre les limites en petiteſſe de A & de B. La démonſtration eſt la même, en changeant la ſouſtraction en addition, & en ſubſtituant l'une à l'autre les expreſſions *plus grand* & *plus petit.*

Théorème. Soit un nombre quelconque de rapports ſuſceptibles de limites; je dis que, ou bien leur rapport compoſé eſt égal au rapport compoſé de leurs rapports limites, ou bien il a pour limite le rapport compoſé de leurs rapports limites.

1^{er} *cas.* Que le nombre des rapports compoſants ſoit deux, que le rapport de A à B ait pour limite le rapport de A' à B' & que le rapport de B à C ait pour limite le rapport de B' à C'; je dis que, ou bien le rapport de A à C eſt égal au rapport de A' à C', ou bien il a pour limite le rapport de A' à C'.

1°. Que les rapports de A' à B' & de B' à C' ſoient l'un & l'autre les limites en grandeur des rapports de A à B & de B à C.

$$\begin{array}{ll} \text{Puisque } A : B < A' : B'; \text{ ſoit } A : B & = A' - a' : B' \\ \text{Et puisque } B : C < B' : C'; \text{ ſoit } B : C & = B' : C' + c' \\ \text{Donc } A : C & = A' - a' : C' + c'. \\ \text{Et lim. } A : C & = \text{lim. } (A' - a' : C' + c'). \end{array}$$

Or, par supposition, les quantités a' & c' peuvent l'une & l'autre être rendues plus petites qu'aucune quantité assignée; donc lim. $(A' - a' : C' + c') = A' : C'$ (Théorème précédent); donc, lim. $A : C = A' : C'$.

2°. Que les rapports de A' à B' & de B' à C' soient l'un & l'autre les limites en petitesse des rapports de A à B & de B à C. La détermination est la même.

Puisque $A : B > A' : B'$; soit $A : B = A' + a' : B'$

Et puisque $B : C > B' : C'$; soit $B : C = B' : C' - c'$

Donc $A : C = A' + a' : C' - c'$

Et lim. $(A : C) = \text{lim.}\ (A' + a' : C' - c') = A' : C'$.

3°. Que le rapport de A' à B' soit la limite en grandeur, par exemple, du rapport de A à B; & que le rapport de B' à C' soit la limite en petitesse du rapport de B à C; je dis que, ou bien le rapport de A à C est égal au rapport de A' à C', ou bien, le rapport limite de A à C est égal au rapport de A' à C'.

Puisque $A : B < A' : B'$, soit $A : B = A' - a' : B'$

Et puisque $B : C > B' : C'$, soit $B : C = B' : C' - c'$.

Donc $A : C = A' - a' : C' - c$.

Mais (par supp.) les quantités A' & C' sont respectivement les limites des quantités $A' - a'$ & $C' - c'$. Donc (Théor. précédent),

ou bien $A : C = A' : C'$

ou bien lim. $A : C = A' : C'$.

La démonstration est la même lorsque les rapports de A' à B' & de B' à C' sont respectivement les limites en petitesse & en grandeur des rapports de A à B & de B à C.

2[d] *cas.* Que le nombre des rapports composants soit plus grand que deux. L'Auteur ne trouve rien à changer au texte.

Addition & Correction au Chap. III^{me}, *postérieures au Jugement de l'Académie.*

(Pag. 47 - 51.)

L'importance du théorème de Taylor, dont le développement termine ce Chapitre, & le grand nombre des applications qu'il trouve dans le cours de ce Mémoire, m'ont engagé à développer cette proposition fondamentale mieux que je ne crois l'avoir fait avant le terme prescrit pour le concours.

Après avoir prouvé dans le texte, que la fonction (vraie ou apparente) de Δx... $\Delta x\,(a' + b'\Delta x + c'\Delta x^2 + d'\Delta x^3 + \ldots)$ est constante, j'en ai déduit que cette fonction étoit zéro, parce qu'elle évanouit pour une valeur déterminée de Δx, savoir zéro. Mais, comme Δx est supposée être une partie aliquote de b, & partant qu'elle ne peut être zéro, on peut élever des doutes sur la légitimité de cette déduction. C'est ce qui m'a engagé à rectifier ma démonstration comme il suit.

La quantité $\Delta x\,(a' + b'\Delta x + c'\Delta x^2 + d'\Delta x^3 + \ldots)$ étant constante pour toute valeur de Δx (plus petite que b); en particulier soit substitué à Δx une partie aliquote d'elle-même, p. ex. sa moitié.

On aura $\Delta x\,(a' + b'\Delta x + c'\Delta x^2 + d'\Delta x^3 + \ldots)$

$$= \tfrac{1}{2}\Delta x\,(a' + \tfrac{1}{2}b'\Delta x + \tfrac{1}{4}c'\Delta x^2 + \tfrac{1}{8}d'\Delta x^3 + \ldots)$$

Donc aussi $a' + b'\Delta x + c'\Delta x^2 + d'\Delta x^3 + \ldots$

$$= \tfrac{1}{2}a' + \tfrac{1}{4}b'\Delta x + \tfrac{1}{8}c'\Delta x^2 + \tfrac{1}{16}d'\Delta x^3 + \ldots$$

Donc $\tfrac{1}{2}a' + \tfrac{3}{4}b'\Delta x + \tfrac{7}{8}c'\Delta x^2 + \tfrac{15}{16}d'\Delta x^3 + \ldots = 0.$

Mais, si les coëfficients $\tfrac{1}{2}a'$, $\tfrac{3}{4}b'$, $\tfrac{7}{8}c'$, $\tfrac{15}{16}d' =$, &c...; ne sont pas tous en même temps zéro, les racines de cette équation, ou les valeurs de Δx, sont déterminées par ceux de ces coëfficients qui n'ont pas évanoui, & ne sauroient être prises à volonté: partant, puisque cette équation doit avoir lieu pour toutes les valeurs de Δx; tous les facteurs $\frac{1}{2}a'$, $\frac{3}{4}b'$, $\frac{7}{8}c'$, $\frac{15}{16}d'$, &c... sont zéro; & partant aussi tous les facteurs a', b', c', d, &c. . . sont zéro. Donc la fonction apparente de Δx, $\Delta x\ (a' + b'\Delta x + c'\Delta x^2 + d'\Delta x^3 + \ldots)$ est zéro.

Avis. D'après cette rectification de la détermination de la valeur de P^N, le Lecteur est prié de supprimer (comme tout au moins inutile) cette phrase du texte: *Si ce n'étoit pas là la veritable valeur de* P^N, *on montreroit (par absurde) qu'elle ne peut en différer d'aucune quantité assignée.*

Autre Démonstration.

En admettant la démonstration élémentaire du théorème binomial, pris suivant toute sa généralité, on peut démontrer, comme il suit, le théorème de Taylor.

1^er^ *cas.* Que P soit une puissance de x, savoir x^n.

Puisque $P = x^n$.

$$\frac{dP}{dx} = nx^{n-1}$$

$$\frac{ddP}{dx^2} = n.\overline{n-1}.x^{n-2}$$

$$\frac{d^3P}{dx^3} = n.\overline{n-1}.\overline{n-2}.x^{n-3}$$

$$\frac{d^4P}{dx^4} = n.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}.x^{n-4}$$

&c... &c...

$$\text{Donc } P + \frac{b}{1}\frac{dP}{dx} + \frac{b^2}{1.2}\frac{ddP}{dx^2} + \frac{b^3}{1.2.3}\frac{d^3P}{dx^3} + \frac{b^4}{1.2.3.4}\frac{d^4P}{dx^4} + \&c\ldots$$

$$= x^n + \frac{n}{1}x^{n-1}b + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}x^{n-2}b^2 + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}x^{n-3}b^3$$

$$+ \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}.\frac{n-3}{4}x^{n-4}b^4 + \&c\ldots$$

$$= (x+b)^n = P^N.$$

Donc,

Donc, dans ce cas, la fonction de Δx, $\Delta x\,(a' + b'\,\Delta x + c'\,\Delta x^2 + d' x^3 + \ldots)$ est zéro.

Lorsque la fonction P est de la forme $A x^n$, savoir le produit d'une puissance de x par une quantité constante, la démonstration est exactement la même.

2^d *cas.* Que la fonction P soit de la forme $A x^a + B x^b + C x^c + D x^d + \ldots$ Pour abréger; que les termes successifs qui composent cette fonction, soient désignés par Q, R, S, T, &c... & que les mêmes termes, quand on y substitue $x + b$ à x, soient désignés par Q^N, R^N, S^N, T^N, &c...

On a les équations suivantes:

$$P^N = Q^N + R^N + S^N + T^N + \ldots$$

$$\frac{dP}{dx} = \frac{dQ}{dx} + \frac{dR}{dx} + \frac{dS}{dx} + \frac{dT}{dx} + \ldots$$

$$\frac{ddP}{dx^2} = \frac{ddQ}{dx^2} + \frac{ddR}{dx^2} + \frac{ddS}{dx^2} + \frac{ddT}{dx^2} + \ldots$$

$$\frac{d^3P}{dx^3} = \frac{d^3Q}{dx^3} + \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^3S}{dx^3} + \frac{d^3T}{dx^3} + \ldots$$

$$\frac{d^4P}{dx^4} = \frac{d^4Q}{dx^4} + \frac{d^4R}{dx^4} + \frac{d^4S}{dx^4} + \frac{d^4T}{dx^4} + \ldots$$

&c... &c... &c...

Or (1^{er} *cas*)

$$Q^N = Q + \frac{b}{1}\frac{dQ}{dx} + \frac{b^2}{1.2}\frac{ddQ}{dx^2} + \frac{b^3}{1.2.3}\frac{d^3Q}{dx^3} + \frac{b^4}{1.2.3.4}\frac{d^4Q}{dx^4} + \ldots$$

$$R^N = R + \frac{b}{1}\frac{dR}{dx} + \frac{b^2}{1.2}\frac{ddR}{dx^2} + \frac{b^3}{1.2.3}\frac{d^3R}{dx^3} + \frac{b^4}{1.2.3.4}\frac{d^4R}{dx^4} + \ldots$$

$$S^N = S + \frac{b}{1}\frac{dS}{dx} + \frac{b^2}{1.2}\frac{ddS}{dx^2} + \frac{b^3}{1.2.3}\frac{d^3S}{dx^3} + \frac{b^4}{1.2.3.4}\frac{d^4S}{dx^4} + \ldots$$

$$T^N = T + \frac{b}{1}\frac{dT}{dx} + \frac{b^2}{1.2}\frac{ddT}{dx^2} + \frac{b^3}{1.2.3}\frac{d^3T}{dx^3} + \frac{b^4}{1.2.3.4}\frac{d^4T}{dx^4} + \ldots$$

&c... &c... &c...

$$\text{Donc } P^N = Q + R + S + T + \ldots (= P)$$
$$+ \frac{b}{1}\left(\frac{dQ}{dx} + \frac{dR}{dx} + \frac{dS}{dx} + \frac{dT}{dx} + \ldots \left(= \frac{b}{1}\frac{dP}{dx}\right)\right.$$
$$+ \frac{b^2}{1.2}\left(\frac{ddQ}{dx^2} + \frac{ddR}{dx^2} + \frac{ddS}{dx^2} + \frac{ddT}{dx^2} + \ldots \left(= \frac{b^2}{1.2}\frac{ddP}{dx^2}\right)\right.$$
$$+ \frac{b^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3Q}{dx^3} + \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^3S}{dx^3} + \frac{d^3T}{dx^3} + \ldots \left(= \frac{b^3}{1.2.3}\frac{d^3P}{dx^3}\right)\right.$$
$$+ \frac{b^4}{1.2.3.4}\left(\frac{d^4Q}{dx^4} + \frac{d^4R}{dx^4} + \frac{d^4S}{dx^4} + \frac{d^4T}{dx^4} + \ldots \left(= \frac{b^4}{1.2.3.4}\frac{d^4P}{dx^4}\right)\right.$$

&c... &c... &c...

$$\text{Donc } P^N = P + \frac{b}{1}\frac{dP}{dx} + \frac{b^2}{1.2}\frac{ddP}{dx^2} + \frac{b^3}{1.2.3}\frac{d^3P}{dx^3} + \frac{b^4}{1.2.3.4}\frac{d^4P}{dx^4} + \ldots$$

3^{me} *cas*. Il eſt connu que toute fonction algébrique de x peut être ramenée (tout au moins en la réduiſant en ſuite) à une fonction de la même variable, compoſée ſeulement de puiſſances de cette dernière, de manière qu'elle revête la forme du ſecond cas; & qu'il en eſt de même de toute fonction transcendante (comme nous le verrons dans la ſuite). Partant la propoſition eſt générale pour toute fonction de x.

Note poſtérieure au Jugement de l'Académie. (Pag. 188. lig. 2.)

Les réflexions phyſiques contenues dans ce Chapitre ſont tout particulièrement le fruit des inſtructions que j'ai eu le bonheur de recevoir de ce profond Philoſophe. La reconnoiſſance dont me pénètrent les ſoins paternels que ce reſpectable Parent a donnés à mon éducation; l'importance que j'attache à ce que ſes méditations ſur les points fondamentaux de la Phyſique ſoient auſſi répandues qu'elles méritent de l'être; & le déſir que j'ai d'y contribuer autant qu'il eſt à ma foible portée; m'ont guidé dans l'esquiſſe que j'ai tracée de ſes ſentiments ſur les Imperceptibles ou Infiniment-petits phyſiques: en me bornant (pour le fond) à l'expoſition qu'il en a faite lui-même dans ſes ouvrages mentionnés dans le texte; & en me contenant dans les limites que je devois me preſcrire, dans une digreſſion peut-être étrangère à la queſtion purement mathématique, propoſée par l'Académie.