

www.e-rara.ch

Histoire des mathématiques

Montucla, Jean Etienne

A Paris, An VII (1799)-X (1802)

ETH-Bibliothek Zürich

Shelf Mark: Rar 10426

Persistent Link: <https://doi.org/10.3931/e-rara-42480>

Livre troisième.

www.e-rara.ch

Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien – von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material – from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d'imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L'éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes – des débuts de l'imprimerie jusqu'au 20e siècle.

e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

Nutzungsbedingungen Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titelinformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

Terms of Use This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

Conditions d'utilisation Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

Condizioni di utilizzo Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]

HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES.

CINQUIÈME PARTIE,

*Qui comprend l'Histoire de ces Sciences pendant le
dix-huitième siècle.*

LIVRE TROISIÈME.

*Des progrès de la Mécanique théorique et analytique ;
ou Mécanique-philosophique.*

Nous avons donné dans le second volume, p. 178 et suiv. p. 404. et suiv. l'Histoire de la mécanique dans le dix-septième siècle ; mais le siècle suivant a été plus loin , et nous allons donner une idée des travaux que les géomètres ont faits à cet égard.

La mécanique renferme essentiellement deux branches très-distinctes, la théorie et la pratique. Nous commençons par la première qui renferme les principes et les calculs de l'équilibre et du mouvement des solides et des fluides. Le livre suivant traitera des machines , qui sont la partie importante de la mécanique relativement aux besoins de la société.

Le cit. de la Grange , dans sa *Mécanique analytique* publiée en 1788 , réduisit tous les problèmes à des formules générales dont le développement donne toutes les équations nécessaires pour la solution de chaque problème ; il réunit sous un même

point de vue les différens principes trouvés pour faciliter la solution des questions de mécanique, en en montrant la liaison et la dépendance, et faire juger de leur justesse et de leur étendue.

Nous allons les exposer d'après lui; on ne sauroit trouver un guide plus sûr, un historien plus profond; d'autant plus qu'il n'a point négligé l'histoire et l'érudition, relativement aux parties dont il traitoit.

I.

Principes de Statique.

Les lois de la statique sont fondées sur des principes généraux qui se réduisent à trois, celui de l'équilibre dans le levier, celui de la composition du mouvement, et celui des vitesses virtuelles, dont Jean Bernoulli fit voir la généralité en 1717. Archimède, le seul parmi les anciens qui nous ait laissé quelque théorie sur la mécanique, dans ses deux livres de *AEquiponderantibus* est l'auteur du principe du levier, lequel consiste, comme on l'a vû, en ce que si un levier droit est chargé de deux poids quelconques placés de part et d'autre du point d'appui à des distances de ce point réciproquement proportionnelles aux mêmes poids, ce levier sera en équilibre, et son appui sera chargé de la somme des deux poids. Archimède prend ce principe, dans le cas des poids égaux placés à des distances égales du point d'appui, pour un axiome de mécanique, évident de soi-même, ou du moins pour un principe d'expérience; et il ramène à ce cas simple et primitif celui des poids inégaux. Pour cela il imagine ces poids lorsqu'ils sont commensurables, divisés en plusieurs parties, toutes égales entr'elles, et en supposant que les parties de chaque poids soient séparées et transportées de part d'autre sur le même levier, à des distances égales, ensorte que tout le levier se trouve chargé de plusieurs petits poids égaux et placés à distances égales autour du point d'appui. Ensuite, il démontre la vérité du même théorème pour les poids incommensurables à l'aide de la méthode d'exhaustion, en faisant voir qu'il ne sauroit y avoir équilibre entre ces poids, à moins qu'ils ne soient en raison inverse de leurs distances au point d'appui.

Quelques modernes, comme Galilée dans ses *Dialogues sur le Mouvement*, et Stevin dans sa *Statique*, ont rendu la démonstration d'Archimède plus simple.

D'autres, au contraire, ont cru trouver des défauts dans la démonstration d'Archimède, et ils l'ont tournée de différentes façons pour la rendre plus rigoureuse. Mais si l'on excepte Huy-

gens, il n'y en a aucun qui ait mérité sur ce point la reconnaissance des géomètres.

La démonstration d'Huygens, (*Opera varia*, t. I.), est fondée sur la considération de l'équilibre d'un plan chargé de plusieurs poids égaux, et appuyé sur une ligne droite; mais cette démonstration, quoique ingénieuse et exempte des difficultés auxquelles celle d'Archimède est sujette, ne paroît pas à l'abri de toute objection; au reste il suffit que ce principe soit constant.

Le principe du levier droit et horizontal une fois posé, on en peut déduire les lois de l'équilibre dans les autres machines, et en général dans quelque système de puissances que ce soit. C'est ce que plusieurs auteurs ont fait, surtout la Hire, dans son *Traité de Mécanique*, imprimé dans le neuvième volume des anciens mémoires de l'Académie de Sciences de Paris. Cependant il paroît qu'on n'a pas d'abord conçu la manière de réduire à la théorie du levier celle de toutes les autres machines, et surtout celle du plan incliné; car non-seulement on voit par les fragmens qui nous sont parvenus du huitième livre de Pappus, que les anciens ignoroient le vrai rapport de la puissance au poids dans le plan incliné; mais on sait que la détermination de ce rapport a été longtemps un problème parmi les premiers mathématiciens modernes, problème dont la première solution exacte est due à Stévin, mathématicien du prince Maurice de Nassau; encore ne l'a-t-il trouvée que par une considération indirecte et indépendante de la théorie du levier.

Stévin considère un triangle solide posé sur sa base horizontale, ensorte que ses deux côtés forment deux plans inclinés; et il imagine qu'un chapelet formé de plusieurs poids égaux, enfilés à des distances égales, ou plutôt une chaîne d'égale grosseur soit placée sur les deux côtés de ce triangle, de manière que toute la partie supérieure se trouve appliquée aux deux côtés du triangle, et que la partie inférieure pende librement au-dessous de la base, comme si elle étoit attachée aux deux extrémités de cette base. Il en tire une démonstration curieuse; il déduit de cette théorie, celle de l'équilibre entre trois puissances qui agissent sur un même point, et il fait voir que cet équilibre a lieu lorsque les puissances sont parallèles et proportionnelles aux trois côtés d'un triangle rectiligne quelconque. Voyez les *Elémens de Statique*, et les additions à la Statique de cet auteur dans ses *Hypomnemata mathematica*.

Le second principe fondamental de l'équilibre est celui de la composition des mouvemens. Il est fondé sur cette supposition que si deux forces agissent à-la-fois sur un corps, suivant différentes directions; ces forces équivalent alors à une force unique, capable d'imprimer au corps le même mouvement que lui don-

neroient

neroient les deux forces agissant séparément ; or, un corps qu'on fait mouvoir uniformément, suivant deux directions différentes à-la-fois, parcourt nécessairement la diagonale du parallélograme dont il eût parcouru séparément les côtés en vertu de chacun des deux mouvemens. D'où il suit que deux puissances quelconques qui agissent ensemble sur un même corps, seront équivalentes à une seule, représentée dans sa quantité et sa direction, par la diagonale du parallélograme dont les côtés représentent en particulier les quantités et les directions des deux puissances données. C'est en quoi consiste le principe qu'on nomme la composition des forces.

Ce principe suffit seul pour déterminer les lois de l'équilibre dans tous les cas ; car en composant successivement toutes les forces deux à deux, on doit parvenir à une force unique, qui sera équivalente à toutes ces forces, et qui, par conséquent, devra être nulle dans le cas d'équilibre, s'il n'y a dans le système aucun point fixe ; mais s'il y en a un, il faudra que la direction de cette force unique passe par le point fixe. C'est ce qu'on peut voir dans tous les livres de Statique, et particulièrement dans la *nouvelle Mécanique de Varignon*, où la théorie des machines est déduite uniquement du principe dont nous venons de parler.

Quant à l'invention du principe dont il s'agit, il me semble qu'on doit l'attribuer à Galilée, qui, dans la seconde proposition de la quatrième journée de ses Dialogues, démontre qu'un corps mù avec deux vitesses uniformes, l'une horizontale, l'autre verticale, doit prendre une vitesse représentée par l'hypothénuse du triangle dont les côtés représentent ces deux vitesses.

Mais il paroît en même-temps que Galilée n'a pas connu toute l'importance de ce théorème dans la *Théorie de l'Equilibre* ; car dans le troisième dialogue où il traite du mouvement des corps pesans sur des plans inclinés, au lieu d'employer le principe de la composition du mouvement pour déterminer directement la gravité relative d'un corps sur un plan incliné ; il déduit plutôt cette détermination de la théorie de l'équilibre sur les plans inclinés, d'après ce qu'il avoit établi auparavant dans son traité : *Della scienza mecanica*, où il ramène le plan incliné au levier.

On trouve ensuite la théorie des mouvemens composés dans les écrits de Descartes, de Roberval, de Mersenne, de Wallis : mais, c'est Varignon qui, le premier montra l'usage de cette théorie dans l'*Equilibre des Machines*.

Le projet d'une nouvelle mécanique qu'il publia en 1687, n'a pour objet que de démontrer les règles de la Statique par la composition des mouvemens ou des forces ; et cet objet a

été rempli ensuite avec plus d'étendue dans la *Nouvelle Mécanique* qui ne parut qu'après sa mort, en 1725. Il avoit déjà donné en 1685, dans l'*Histoire de la République des Lettres*, un mémoire sur les poulies, où il expliquoit la théorie de ces sortes de machines, par celle des mouvemens composés.

Le troisième principe de Statique est celui des vitesses virtuelles. On doit entendre par vitesse virtuelle celle qu'un corps en équilibre est disposé à recevoir en cas que l'équilibre vienne à être rompu, c'est-à-dire la vitesse que ce corps prendroit réellement dans le premier instant de son mouvement; et le principe dont il s'agit consiste en ce que des puissances sont en équilibre quand elles sont en raison inverse de leurs vitesses virtuelles, estimées suivant les directions de ces puissances.

Pour peu qu'on examine les conditions de l'équilibre dans le levier et dans les autres machines, il est facile de reconnoître la vérité de ce principe; cependant il ne paroît pas que les géomètres qui ont précédé Galilée, en aient eu connoissance, et Lagrange croit pouvoir en attribuer la découverte à cet auteur qui, dans son traité, *Della scienza meccanica*, et dans ses dialogues sur le mouvement, le proposa comme une propriété générale de l'équilibre des machines. Voyez le Scholie de la seconde proposition du troisième dialogue.

Galilée entend par moment d'un poids, ou d'une puissance appliquée à une machine, l'effort, l'action, l'énergie, l'*impetus* de cette puissance pour mouvoir la machine, de manière qu'il y ait équilibre entre deux puissances, lorsque leurs momens pour mouvoir la machine en sens contraire sont égaux. Et il fait voir que le moment est toujours proportionel à la puissance multipliée par la vitesse virtuelle dépendante de la manière dont la puissance agit.

Cette notion des momens a aussi été adoptée par Wallis dans sa *Mécanique*, publiée en 1669. L'auteur y pose le principe de l'égalité des momens pour fondement de la statique, et il en déduit au long la théorie de l'équilibre dans les principales machines.

Aujourd'hui on n'entend plus communément par moment que le produit d'une puissance par la distance de sa direction à un point ou à une ligne, c'est-à-dire par le bras du levier par lequel elle agit; mais il semble que la notion du moment, donnée par Galilée et par Wallis, est plus naturelle et plus générale; et l'on ne voit pas pourquoi on l'a abandonnée pour y en substituer une autre qui exprime seulement la valeur du moment dans certains cas, comme dans le levier.

Descartes a réduit pareillement toute la statique à un principe unique, qui revient pour le fond à celui de Galilée, mais

qui est présenté d'une manière moins générale. Ce principe est qu'il ne faut ni plus ni moins de force pour élever un poids à une certaine hauteur, qu'il n'en faudroit pour élever un poids plus pesant à une hauteur d'autant moindre, ou un poids moindre à une hauteur d'autant plus grande. (Voyez la lettre 73 de la première partie, et le Traité de Mécanique, imprimé dans ses Ouvrages posthumes). De là il résulte qu'il y aura équilibre entre deux poids, lorsqu'ils seront disposés de manière que les chemins perpendiculaires qu'ils peuvent parcourir ensemble, soient en raison réciproque des poids. Mais dans l'application de ce principe aux différentes machines, il ne faut considérer que les espaces parcourus dans le premier instant du mouvement, et qui sont proportionnels aux vitesses virtuelles, autrement on n'auroit pas les véritables lois de l'équilibre.

Le principe des vitesses virtuelles peut être rendu très-général de cette manière : si un système quelconque de tant de corps ou points que l'on veut, tirés chacun par des puissances quelconques est en équilibre, et qu'on donne à ce système un petit mouvement quelconque ; en vertu duquel chaque point parcourt un espace infiniment petit qui exprimera sa vitesse virtuelle, la somme des puissances, multipliées chacune par l'espace que le point où elle est appliquée parcourt suivant la direction de cette même puissance, sera toujours égale à zéro, en regardant comme positifs les petits espaces parcourus dans le sens des puissances, et comme négatifs les espaces parcourus dans un sens opposé : Jean Bernouilli est le premier qui ait aperçu cette grande généralité du principe des vitesses virtuelles et son utilité pour résoudre les problèmes de statique : c'est ce qu'on voit dans une de ses lettres à Varignon, datée de 1717 que ce dernier a placée à la tête de la section neuvième de sa *Nouvelle Mécanique*, section employée toute entière à montrer par différentes applications la vérité et l'usage du principe des vitesses virtuelles.

Ce même principe a donné lieu ensuite à celui que Maupertuis a proposé dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences*, pour 1740, sous le nom de *Loi de Repos*. et qu'Euler a développé davantage, et rendu plus général dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin*, pour l'année 1751. Enfin, c'est encore le même principe qui sert de base à celui que le marquis de Courtivron a donné dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris*, pour 1748 et 1749.

La Grange estime que tous les principes généraux, qu'on pourroit peut-être encore découvrir dans la science de l'équilibre, ne seront que le même principe des vitesses virtuelles envisagé différemment, et dont ils ne différeront que dans l'expression.

Au reste, ce principe est non-seulement en lui-même très-simple et très-général ; il a de plus l'avantage précieux et unique de pouvoir se traduire en une formule générale qui renferme tous les problèmes qu'on peut proposer sur l'équilibre des corps. La Grange expose cette formule dans toute son étendue. Il la présente même d'une manière encore plus générale qu'on ne l'avoit fait avant lui, et il donne des applications nouvelles pour un système quelconque de forces, dans sa *Mécanique analytique*.

I I.

Principes de Dynamique.

La Dynamique est la science des forces accélératrices ou retardatrices et des mouvemens variés qu'elles peuvent produire. Cette science est due entièrement aux modernes, et Galilée est celui qui en a jeté le premier fondement. Avant lui on n'avoit considéré les forces qui agissent sur les corps que dans l'état d'équilibre, et quoiqu'on ne pût attribuer l'accélération des corps pesans et le mouvement curviligne des projectiles qu'à l'action constante de la gravité, personne n'avoit encore réussi à déterminer les lois de ces phénomènes. Galilée fit le premier ce pas important, et ouvrit par-là une carrière nouvelle et immense à l'avancement de la mécanique. Ces découvertes sont exposées et développées dans l'ouvrage intitulé : *Dialoghi delle scienze nuove*, lequel parut pour la première fois à Leyde en 1637. Elles ne procurèrent pas à Galilée, de son vivant, autant de célébrité que celles qu'il avoit faites sur le système du monde ; mais elles font aujourd'hui la partie la plus solide et la plus réelle de la gloire de ce grand homme, au jugement de la Grange. Car, dit-il, les découvertes des satellites de Jupiter, des phases de Vénus, des taches du soleil, ne demandoient que des télescopes et de l'assiduité ; mais il falloit un génie extraordinaire pour démêler les lois de la nature dans des phénomènes que l'on avoit toujours eus sous les yeux, et dont l'explication avoit néanmoins toujours échappé aux recherches des philosophes.

Huygens, qui paroît avoir été destiné à perfectionner et compléter la plupart des découvertes de Galilée, ajouta à la théorie de l'accélération des graves celles du mouvement des pendules et des forces centrifuges, et prépara ainsi la route à la grande découverte de la gravitation universelle.

La mécanique devint une science nouvelle entre les mains de Newton, et ses principes mathématiques, qui parurent pour la première fois en 1687, furent l'époque de cette révolution.

Enfin, l'invention du calcul infinitésimal, mit les géomètres en état de réduire à des questions analytiques les lois du mouvement des corps ; la recherche des forces et des mouvemens qui en résultent, est devenue depuis le principal objet de leurs travaux, et le cit. de la Grange, dans sa mécanique analytique, a donné encore un nouveau moyen de faciliter cette recherche.

Pour calculer le mouvement d'un corps, le moyen le plus simple est de rapporter le mouvement à des directions fixes dans l'espace. Alors en employant, pour déterminer le lieu du corps dans l'espace, trois coordonnées rectangles qui aient ces mêmes directions, les variations de ces coordonnées représenteront les espaces parcourus par le corps, suivant les directions de ces coordonnées ; par conséquent leurs différentielles secondes, divisées par le carré de la différentielle constante du temps, exprimeront les forces accélératrices qui doivent agir suivant ces mêmes coordonnées. Ainsi, en égalant ces expressions à celles des forces données par la nature du problème, on aura trois équations semblables qui serviront à déterminer toutes les circonstances du mouvement. Cette manière de déterminer le mouvement d'un corps animé par des forces accélératrices quelconques, est, par sa simplicité, préférable à toutes les autres. Il paroît que Maclaurin est le premier qui l'ait employée dans son *Traité des Fluxions*, imprimé en 1742 : elle est maintenant universellement adoptée.

Mais si on cherche le mouvement de plusieurs corps qui agissent les uns sur les autres par impulsion ou pression, soit immédiatement comme dans le choc ordinaire, ou par le moyen de fils, ou de leviers inflexibles auxquels ils soient attachés, ou en général par quelqu'autres moyens que ce soit, alors la question est d'un ordre plus élevé, et les principes précédens, sont insuffisans pour la résoudre ; car ici les forces qui agissent sur les corps sont inconnues, et il faut déduire ces forces de l'action que les corps doivent exercer entre eux, suivant leur disposition mutuelle. Il est donc nécessaire d'avoir recours à un nouveau principe qui serve à déterminer la force des corps en mouvement, eu égard à leur masse et à leur vitesse.

Ce principe consiste en ce que, pour imprimer à une masse donnée une certaine vitesse, suivant une direction quelconque, soit que cette masse soit en repos, ou en mouvement, il faut une force dont la valeur soit proportionnelle au produit de la vitesse, et dont la direction soit la même que celle de cette vitesse. Ce produit de la masse d'un corps multipliée par sa vitesse, s'appelle communément la quantité de mouvement de ce corps, parce qu'en effet c'est la somme des mouvemens de toutes les parties

matérielles. Ainsi, les forces se mesurent par les quantités de mouvemens qu'elles sont capables de produire, et réciproquement la quantité de mouvement d'un corps, est la mesure de la force que le corps est capable d'exercer contre un obstacle, et qui s'appelle la percussion; d'où il s'ensuit que si deux corps non élastiques viennent à se choquer directement en sens contraires avec des quantités de mouvement égales, leurs forces doivent se contre-balancer et se détruire; par conséquent les corps doivent s'arrêter et demeurer en repos; mais si le choc se faisoit par le moyen d'un levier, il faudroit, pour la destruction du mouvement des corps, que leurs forces suivissent la loi connue de l'équilibre du levier.

Il paroît que Descartes aperçut le premier le principe que nous venons d'exposer; mais il se trompa dans son application au choc des corps, pour avoir cru que la même quantité de mouvement absolu devoit toujours se conserver.

Wallis est proprement le premier qui ait eu une idée nette de ce principe, et qui s'en soit servi avec succès pour découvrir les lois de la communication du mouvement dans le choc des corps durs ou élastiques, comme on le voit dans les *Trans. philos.* de 1669 et dans la troisième partie de son *Traité de Motu*, imprimé en 1671.

De même que le produit de la masse et de la vitesse exprime la force finie d'un corps en mouvement, ainsi le produit de la masse et de la force accélératrice que nous avons vu être représentée par l'élément de la vitesse divisé par l'élément du temps, exprimera la force élémentaire ou naissante; et cette quantité, si on la considère comme une mesure de l'effort que le corps peut faire en vertu de la vitesse élémentaire qu'il a prise, ou qu'il tend à prendre, constitue ce qu'on nomme pression; mais si on la regarde comme la mesure de la force, ou puissance nécessaire pour imprimer cette même vitesse, c'est alors ce qu'on nomme force motrice.

Ainsi, des pressions ou des forces motrices se détruiront ou se feront équilibre, si elles sont égales et directement opposées, ou si étant appliquées à une machine quelconque, elles suivent les lois de l'équilibre de cette machine.

Lorsque des corps sont joints ensemble, de manière qu'ils ne puissent obéir librement aux impulsions reçues et aux forces accélératrices dont ils sont animés, ces corps exercent nécessairement les uns sur les autres des pressions continuelles qui altèrent leurs mouvemens, et qui en rendent la détermination difficile.

Le premier problème et le plus simple de ce genre dont les géomètres se soient occupés, est celui des centres d'oscillations.

Ce problème a été fameux dans le 17^e siècle et au commencement du 18^e, par les efforts et les tentatives que les plus grands géomètres firent pour en venir à bout ; et comme c'est principalement à ces tentatives qu'on doit les progrès immenses que la dynamique a faits depuis ; la Grange en donne une histoire détaillée, pour montrer par quels degrés cette science s'est élevée à la perfection où elle est parvenue dans ces derniers temps. Mersenne avoit proposé ce problème à Descartes, qui donna une règle, contestée par Roberval. Huygens vit qu'on ne pouvoit déterminer ce centre d'une manière rigoureuse, sans connoître la loi suivant laquelle les différens poids du pendule composé altèrent mutuellement les mouvemens que la gravité a tend à leur imprimer à chaque instant ; mais au lieu de chercher à déduire cette loi des principes fondamentaux de la mécanique, il se contenta d'y suppléer par un principe indirect, lequel consiste à supposer que si plusieurs poids, attachés comme l'on voudra, à un pendule, descendent par la seule action de la gravité, et que, dans un instant quelconque, ils soient détachés et séparés les uns des autres, chacun d'eux, en vertu de sa vitesse acquise pendant sa chute, remontera à une telle hauteur, que le centre commun de gravité se trouvera remonté à la même hauteur d'où il étoit descendu. A la vérité, Huygens n'établit pas ce principe immédiatement ; mais il le déduit de deux hypothèses qu'il croit devoir être admises comme des demandes de mécanique : l'une, c'est que le centre de gravité d'un système de corps pesans, ne peut jamais remonter à une hauteur plus grande que celle d'où il est tombé, quelque changement qu'on fasse à la disposition mutuelle des corps ; car autrement le mouvement perpétuel ne seroit plus impossible : l'autre, c'est qu'un pendule composé peut toujours remonter de lui-même à la même hauteur d'où il est descendu librement. Au reste, Huygens observe que le même principe a lieu dans le mouvement des corps pesans liés ensemble, d'une manière quelconque, comme aussi dans le mouvement des fluides. Huygens, *de Horologio oscillatorio*, 1673. (La Grange, p. 174).

Jacques Bernoulli ayant examiné la théorie d'Huygens fit un peu plus, mais il se trompa, et l'Hôpital le fit revenir ; il en résulta enfin la première solution directe et rigoureuse du problème des centres d'oscillations ; solution qui contient le germe du principe de Dynamique, devenu fécond entre les mains de d'Alembert.

Il seroit trop long de parler des autres problèmes de dynamique qui ont exercé la sagacité des géomètres après celui du centre d'oscillation, et avant que l'art de les résoudre fût réduit à des règles fixes. Ces problèmes, que les Bernoulli, Clairaut,

Euler se proposoient eux-mêmes, se trouvent répandus dans les premiers volumes des *Mémoires* de Pétersbourg et de Berlin, dans les *Mémoires* de Paris (années 1736 et 1742), dans les *Œuvres* de Jean Bernoulli et dans les *Opuscules* d'Euler. Ils consistent à déterminer les mouvemens de plusieurs corps pesans ou non qui se poussent ou qui se tirent par des fils ou des leviers inflexibles où ils sont fixement attachés, ou le long desquels ils peuvent couler librement, et qui, ayant reçu des impressions quelconques, sont ensuite abandonnés à eux-mêmes, ou contraints de se mouvoir sur des courbes ou des surfaces données. Mais il falloit toujours une adresse particulière pour démêler dans chaque problème toutes les forces auxquelles il étoit nécessaire d'avoir égard; ce qui rendoit ces problèmes piquans et propres à exciter l'émulation. Le *Traité de Dynamique* donné par d'Alembert en 1743, mit fin à ces espèces de défis, en offrant une méthode directe et générale pour résoudre, ou du moins pour mettre en équations tous les problèmes de dynamique que l'on peut imaginer.

Cette méthode réduit toutes les lois du mouvement des corps à celle de leur équilibre, et ramène ainsi la dynamique à la statique. Le principe employé par Jacques Bernoulli dans la recherche du centre d'oscillation, avoit l'avantage de faire dépendre cette recherche des conditions de l'équilibre du levier; mais il étoit réservé à d'Alembert d'envisager ce principe d'une manière générale, et de lui donner toute la simplicité et la fécondité dont il pouvoit être susceptible: nous en parlerons en détail dans l'article IV.

Ce principe ne fournit pas immédiatement les équations nécessaires pour la solution des différens problèmes de dynamique; il apprend à les déduire des conditions de l'équilibre. Ainsi, en combinant ce principe avec les principes ordinaires de l'équilibre du levier, ou de la composition des forces, on peut toujours trouver les équations de chaque problème, à l'aide de quelques constructions plus ou moins compliquées.

C'est de cette manière qu'on en a usé jusqu'ici dans l'application du principe dont il s'agit; mais la difficulté de déterminer les forces qui doivent être détruites, ainsi que les lois de l'équilibre entre ces forces, rend souvent cette application embarrassante et pénible, et les solutions qui en résultent sont presque toujours plus longues que si elles étoient déduites de principes moins simples et moins directs.

La Grange, dans la première partie de son traité, se sert du principe des vitesses virtuelles, comme nous l'avons dit, pour trouver un moyen analytique très-simple de résoudre toutes les questions de statique. Ce même principe, combiné avec celui

celui que nous venons d'exposer, lui fournit aussi une méthode semblable pour les problèmes de dynamique, et qui a les mêmes avantages.

Pour se former d'abord une idée de cette méthode, on se rappellera que le principe général des vitesses virtuelles consiste en ce que, lorsqu'un système de corps réduits à des points, et animés de forces quelconques, est en équilibre, si on donne à ce système un petit mouvement quelconque, en vertu duquel chaque corps parcourt un espace infiniment petit, la somme des forces ou puissances multipliées chacune par l'espace que le point où elle est appliquée parcourt suivant la direction de cette puissance, est toujours égale à zéro.

Si maintenant on suppose le système en mouvement et qu'on regarde le mouvement que chaque corps a dans un instant comme composé de deux, dont l'un soit celui que le corps aura dans l'instant suivant, il faudra que l'autre soit détruit par l'action réciproque des corps et par celle des forces motrices, dont ils sont actuellement animés. Ainsi, il devra y avoir équilibre entre ces forces et les pressions ou résistances qui résultent des mouvemens qu'on peut regarder comme perdus par les corps d'un instant à l'autre : d'où il suit que pour étendre au mouvement du système la formule de son équilibre, il suffira d'y ajouter les termes dûs à ces dernières forces.

Or, si on considère les vitesses que chaque corps a, suivant trois directions fixes et perpendiculaires entre elles, les décroissemens de ces vitesses présenteront les mouvemens perdus suivant les mêmes directions; et leurs accroissemens seront par conséquent les mouvemens perdus dans des directions opposées : donc les pressions résultantes de ces mouvemens perdus seront exprimées en général par la masse multipliée par l'élément de la vitesse, et divisée par l'élément du temps, et auront des directions directement contraires à celles des vitesses. De cette manière, on exprime analytiquement les termes dont il s'agit, et l'on a une formule générale pour le mouvement des corps, laquelle renferme la solution de tous les problèmes de dynamique, et dont le simple développement donne les équations nécessaires pour chaque problème, comme on le voit dans l'ouvrage de la Grange.

Mais un des plus grands avantages de cette formule, est d'offrir immédiatement les équations générales qui renferment les principes ou théorèmes connus sous les noms de *conservation des forces vives*, de *conservation du mouvement du centre de gravité*, de *conservation du moment du mouvement de rotation*, ou de *principe des aires*, et de *principe de la moindre quantité*

d'action. Ces principes doivent être regardés plutôt comme des résultats généraux des lois de la dynamique, que comme des principes primitifs de cette science ; mais étant souvent employés comme tels dans la solution des problèmes, il est naturel d'indiquer en quoi ils consistent et à quels auteurs ils sont dus, pour ne rien laisser à désirer dans cette exposition préliminaire des principes de la dynamique. (La Grange, p. 182).

Le premier des quatre principes dont nous venons de parler, celui de la conservation des forces vives a été trouvé par Huygens, mais sous une forme un peu différente de celle qu'on lui donne présentement, et nous en avons déjà parlé à l'occasion du problème des centres d'oscillation. Ce principe, tel qu'il a été employé dans la solution de ce problème, consiste dans l'égalité entre la descente et la montée du centre de gravité de plusieurs corps qui descendent conjointement, et qui remontent ensuite séparément, étant réfléchis en haut chacun avec la vitesse qu'il avoit acquise. Or, par les propriétés connues du centre de gravité, le chemin parcouru par ce centre dans une direction quelconque, est exprimé par la somme des produits de la masse de chaque corps et du chemin qu'il a parcouru suivant la même direction divisée par la somme des masses. D'un autre côté : par les théorèmes de Galilée, le chemin vertical parcouru par un corps grave, est proportionnel au carré de la vitesse qu'il a acquise en descendant librement, et avec laquelle il pourroit remonter à la même hauteur. Ainsi, le principe de Huygens se réduit à ce que, dans le mouvement des corps pesans, la somme des produits des masses par les carrés des vitesses à chaque instant, est la même, soit que les corps se meuvent conjointement d'une manière quelconque, ou qu'ils parcourent librement les mêmes hauteurs verticales. C'est aussi ce que Huygens lui-même remarqua en peu de mots dans un petit écrit relatif aux méthodes de Jacques Bernoulli et du marquis de l'Hôpital, pour les centres d'oscillation.

Jean et Daniel Bernoulli l'étendirent davantage et en formèrent le principe de la conservation des forces vives dont nous parlerons plus au long dans l'article suivant.

Le second principe est dû à Newton, qui au commencement de ses principes mathématiques, démontre que l'état de repos ou de mouvement du centre de gravité de plusieurs corps, n'est point altéré par l'action réciproque de ces corps, quelle qu'elle soit, de sorte que le centre de gravité des corps qui agissent les uns sur les autres d'une manière quelconque, soit par des fils ou des leviers, ou des lois d'attractions, sans qu'il y ait aucune action ni aucun obstacle extérieur, est toujours en repos, ou se meut uniformément en ligne droite.

D'Alembert lui a donné depuis, dans son *Traité de Dynamique*, une plus grande étendue, en faisant voir que si chaque corps est sollicité par une force accélératrice, et qui agisse par des lignes parallèles, ou qui soit dirigée vers un point fixe, qui agisse en raison de la distance, le centre de gravité doit décrire la même courbe que si les corps étoient libres : à quoi l'on peut ajouter que le mouvement de ce centre est en général le même que si toutes les forces des corps, quelles qu'elles soient, y étoient appliquées chacune suivant sa propre direction : il est visible que ce principe sert à déterminer le mouvement du centre de gravité, indépendamment des mouvemens respectifs des corps, et qu'ainsi il peut toujours fournir trois équations finies entre les coordonnées des corps et le temps, lesquelles seront des intégrales, des équations différentielles du problème.

Le troisième principe est beaucoup moins ancien que les deux précédens, et paroît avoir été découvert en même temps par Euler, Daniel Bernoulli et le chevalier d'Arcy, mais sous des formes différentes. Selon les deux premiers, ce principe consiste en ce que, dans le mouvement de plusieurs corps autour d'un centre fixe, la somme des produits de la masse de chaque corps, par sa vitesse de circulation autour du centre et par sa distance au par sa distance au même centre, est toujours indépendante de l'action mutuelle que les corps peuvent exercer les uns sur les autres, et se conserve la même tant qu'il n'y a aucune action ni aucun obstacle extérieur.

Daniel Bernoulli exposa ce principe dans le premier volume des *Mémoires de l'Académie* de Berlin en 1746, et Euler le donna la même année dans le premier tome de ses *Opuscules*, et c'est aussi le même problème qui les y a conduits ; savoir, la recherche du mouvement de plusieurs corps mobiles dans un tube de figure donnée, et qui ne peut que tourner autour d'un point ou centre fixe.

Le principe que d'Arcy donna à l'Académie des sciences de Paris, dans un mémoire qui porte la date de 1746, mais qui n'a paru qu'en 1752, dans les *Mémoires* de 1747, est que la somme des produits de la masse de chaque corps par l'aire que son rayon vecteur décrit autour d'un centre fixe, est toujours proportionnelle au temps. On voit que ce principe est une généralisation du beau théorème de Newton, sur les aires décrites en vertu de forces centripètes quelconques ; et pour en apercevoir l'analogie, ou plutôt l'identité avec celui d'Euler et Daniel Bernoulli, il n'y a qu'à considérer que la vitesse de circulation est exprimée par l'élément de l'arc circulaire divisé par l'élément du temps, et que le premier de ces élémens multiplié par la distance au centre, donne l'élément de l'aire décrite autour de ce

centre; d'où l'on voit que ce dernier principe n'est autre chose que l'expression différentielle de celui de d'Arcy.

Cet auteur a présenté ensuite son principe sous une autre forme, qui le rapproche davantage du précédent, et qui consiste en ce que la somme des produits des masses, par les vitesses et par les perpendiculaires tirées du centre sur les directions du corps, est une quantité constante.

Sous ce point de vue, il en a fait même une espèce de principe métaphysique, qu'il appelle la conservation de l'action, pour l'opposer, ou plutôt pour le substituer à celui de la moindre quantité d'action, comme si des dénominations vagues et arbitraires faisoient l'essence des lois de la nature, et pouvoient, par quelque vertu secrète, ériger en causes finales de simples résultats des lois connues de la mécanique.

Quoi qu'il en soit, le principe dont il s'agit a lieu généralement pour tout système de corps qui agissent les uns sur les autres, d'une façon quelconque, soit par des fils, des lignes inflexibles; des lois d'attractions, et qui sont de plus sollicités par des forces quelconques dirigées à un centre fixe, soit que le système soit d'ailleurs entièrement libre, ou qu'il soit assujéti à se mouvoir autour de ce même centre. La somme des produits des masses, par les aires décrites autour de ce centre et projetées sur un plan quelconque, est toujours proportionnelle au temps; de sorte qu'en rapportant ces aires à trois plans perpendiculaires entre eux, on a trois équations différentielles du premier ordre entre le temps et les coordonnées des courbes décrites par les corps, et c'est proprement dans ces équations que consiste la nature du principe dont nous venons de parler.

Le quatrième principe est celui que la Grange appelle de la moindre action, par analogie avec celui que Maupertuis avoit donné sous cette dénomination, que les écrits de plusieurs auteurs illustres ont rendu ensuite si fameux, et dont nous parlerons plus au long dans l'article V. Ce principe, envisagé analytiquement, consiste en ce que, dans le mouvement des corps qui agissent les uns sur les autres, la somme des produits des masses par les vitesses et par les espaces parcourus, est un *minimum*. L'auteur en a déduit les lois de la réflexion et de la réfraction de la lumière, ainsi que celle du choc des corps dans deux mémoires, l'un à l'Académie des sciences de Paris en 1744, et l'autre deux ans après à celle de Berlin; mais il faut avouer que ces applications sont trop particulières pour servir à établir la vérité d'un principe général; elles ont d'ailleurs quelque chose de vague et d'arbitraire, qui ne peut que rendre incertaines les conséquences qu'on en pourroit tirer pour l'exactitude même du principe. Aussi l'on auroit tort de mettre ce principe présenté

ainsi sur la même ligne que ceux que nous venons d'exposer ; mais il y a une autre manière de l'envisager plus générale et plus rigoureuse, et qui mérite seule l'attention des géomètres. Euler en a donné la première idée à la fin de son *Traité des Isopérimètres*, imprimé à Lausanne en 1744, en y faisant voir que dans les trajectoires décrites par des forces centrales, l'intégrale de la vitesse, multipliée par l'élément de la courbe, fait toujours un *maximum* ou un *minimum*.

Cette propriété, que Euler n'avoit reconnue que dans le mouvement des corps isolés, a été étendue depuis par la Grange au mouvement des corps qui agissent les uns sur les autres d'une manière quelconque, et il en a résulté ce nouveau principe général que la somme des produits des masses, par les intégrales des vitesses multipliées par les élémens des espaces parcourus, est constamment un *maximum* ou un *minimum*.

Tel est le prince auquel la Grange donne, quoiqu'improprement, le nom de moindre action, et qu'il regarde, non comme un principe métaphysique, mais comme un résultat simple et général des lois de la mécanique. On peut voir, dans le tom. II des *Mémoires* de Turin, l'usage que la Grange en a fait pour résoudre plusieurs problèmes difficiles de dynamique. Ce principe, combiné avec celui de la conservation des forces vives, et développé suivant les règles du calcul des variations, donne directement toutes les équations nécessaires pour la solution de chaque problème, et de-là naît une méthode également simple et générale pour traiter les questions qui concernent le mouvement des corps ; mais cette méthode n'est elle-même qu'un corollaire de celle qui fait l'objet de la seconde partie de la mécanique analytique, et qui a en même-temps l'avantage d'être tirée des premiers principes de la mécanique. (La Grange, p. 189).

La mécanique philosophique du cit. Prony (1799) contient toutes les formules, tous les théorèmes et tous les problèmes que la géométrie transcendante et les découvertes modernes ont fournies à la mécanique, et à l'hydrodynamique, les usages qu'on a faits des principes précédens, et l'application de la théorie au mouvement des machines dont nous parlerons dans le livre suivant. On trouve, dans cet ouvrage de Prony, un tableau méthodique des résultats, dégagé de la partie des démonstrations et des calculs intermédiaires, qui n'est d'une nécessité absolue que pour les premières études ; il s'est borné à faire connoître l'esprit des méthodes, à indiquer les principaux anneaux ou la trace de la chaîne qui lie les propositions entr'elles, en facilitant les moyens de bien saisir l'ensemble et la correspondance des diverses parties de la science, sans fatiguer l'attention et sans charger sa mémoire de ce qui n'est pas rigoureusement nécessaire pour parvenir à ce but.

Du principe de la conservation des forces vives.

Nous avons donné ci-devant (pag. 618) d'après la Grange, une idée du principe de la conservation des forces vives ; mais il ne sera pas inutile d'entrer à ce sujet dans quelque détail. La mécanique offre souvent des problèmes qui, analysés directement et d'après les principes ordinaires, jetteroient dans des difficultés insurmontables. Le génie a su quelquefois s'ouvrir des routes particulières. Le principe dont nous parlons en est un exemple. Il consiste en ce que dans toute action des corps les uns sur les autres, soit qu'ils se choquent, pourvu que dans ce cas ils soient parfaitement élastiques, soit qu'ils soient liés entre eux par des verges inflexibles ou par des fils, au moyen desquels ils se communiquent le mouvement, la somme des masses multipliées par les quarrés des vîtesses absolues, reste toujours invariable.

Nous avons vu que la découverte de ce principe, qui est appliqué avec succès à diverses recherches, qui seroient, sans lui, extrêmement épineuses, est proprement due à Huygens, qui entreprit de démontrer que si plusieurs poids liés ensemble tombent d'une certaine hauteur, et qu'arrivés au plus bas de leur chute, ils soient libres de remonter chacun à la hauteur déterminée par sa vîtesse acquise, le centre de gravité de ces corps remontera à la même hauteur que celle dont il étoit descendu, tandis que tous ces corps étoient liés ensemble. Or, les quarrés des vîtesses avec lesquelles ces corps remontent sont comme les hauteurs auxquelles ils doivent s'élever. Ainsi, le produit des masses, par ces hauteurs, étant constamment le même, puisque le centre de gravité commun remonte à la même hauteur, il s'ensuit que celui des masses, par les quarrés des vîtesses, qui sont les *forces vives*, suivant le langage léibnitzien, reste invariable. De-là, le nom de ce principe adopté par ceux même qui n'admettent point la distinction léibnitzienne entre les forces vives et les forces mortes.

La démonstration d'Huygens prouve bien, quoique d'une manière indirecte, que le centre de gravité du corps ne sauroit remonter plus haut qu'il n'est descendu ; mais l'autre partie de cette démonstration, dont l'objet est de faire voir qu'il ne montera pas moins haut, ne porte pas également la conviction avec elle. Aussi ce principe fut-il contredit dans le temps, mais cependant à tort ; car son application à tous les phénomènes mécaniques, est démontrée d'une manière directe, et donne constam-

ment les mêmes solutions. On ne peut donc refuser de le regarder comme un des principes fondamentaux de la nature et une des clefs de la dynamique. Cette loi enfin est, comme le fait voir Bernoulli dans son *Discours sur la communic. du mouvement*, chap. 10, une suite nécessaire de deux autres déjà admises par les mécaniciens ; savoir, 1°. que dans tout choc de corps élastiques, la vitesse respective reste la même avant et après le choc ; 2°. que la quantité d'action, c'est-à-dire, le produit de la masse des corps choquans et choqués, multipliée par la vitesse de leur centre de gravité, est encore la même avant et après le choc ; car si l'on suppose deux corps A et B portés l'un contre l'autre avec des vitesses a et b , qui, après le choc, seront changées en x et y , la première loi donnera $a - b = y - x$, et la seconde $aA + bB = Ax + By$. En effet, la quantité $Aa + Bb$ est le produit de chaque masse par sa vitesse propre, lequel est égal au produit des masses réunies, par la vitesse de leur centre de gravité : car la première équation donne $y + b = a + x$, et la seconde $By - Bb = Aa - Ax$. Ainsi, en multipliant le premier membre de l'une par le premier de l'autre, et le second par le second, on aura $Byy - Bbb = Aaa - Axx$, ou $Aaa + Bbb = Axx + Byy$, ce qui est le produit de chaque masse par le carré de sa vitesse avant le choc et après le choc,

Cette preuve de la vérité de cette loi me paroît plus forte que celle que Bernoulli employa dans son écrit et qu'il déduisit de la notion de la force vive. Tout le monde admet, dit-il, comme un axiome incontestable, que toute cause efficiente ne sauroit périr ni en tout ni en partie, qu'elle ne produise un effet égal à sa perte. L'idée de la force vive, en tant qu'elle existe dans un corps qui se meut, est quelque chose d'absolu, d'indépendant et de si positif, qu'elle resteroit dans ce corps quand même l'univers seroit anéanti. Il est donc clair que la force vive d'un corps diminuant ou augmentant à la rencontre d'un autre corps, la force vive de cet autre doit, en échange, augmenter ou diminuer de la même quantité. Ce qui emporte nécessairement la conservation de la quantité totale des forces vives. Aussi cette quantité est-elle absolument inaltérable par le choc des corps. Ne pourroit-on pas dire que ce raisonnement est analogue à celui d'après lequel Descartes croyoit prouver que la quantité de mouvement devoit être constamment la même dans l'univers : ce qui n'est cependant pas vrai ?

Nous avons remarqué, pag. 618 que le principe d'Huygens avoit été étendu par les Bernoulli ; mais jusques-là il n'avoit été regardé que comme un simple théorème de mécanique : lorsque Jean Bernoulli eut adopté la distinction établie par Leibnitz, entre les forces mortes, ou pressions qui agissent sans mouvement,

actuel, et les forces vives accompagnées de ce mouvement, dont nous parlerons art. IV, ainsi que la mesure de ces derniers par les produits des masses et des quarrés des vîtesses, il ne vit plus, dans le principe en question, qu'une conséquence de la théorie des forces vives, et une loi générale de la nature, suivant laquelle la somme des forces vives de plusieurs corps se conserve la même pendant que ces corps agissent les uns sur les autres par de simples pressions, et est constamment égale à la simple force vive qui résulte de l'action des forces actuelles qui meuvent les corps. Il lui donna ainsi le nom de conservation des forces, et il s'en servit avec succès pour résoudre quelques problèmes qui n'avoient pas encore été résolus, et dont il paroissoit difficile de venir à bout par des méthodes directes.

Daniel Bernoulli, son fils, a déduit ensuite de ce principe les lois du mouvement des fluides dans les vases, matière qui n'avoit été traitée avant lui que d'une manière vague et arbitraire. Enfin, il a rendu ce même principe très-général dans les *Mémoires* de Berlin pour l'année 1748, en faisant voir comment on peut l'appliquer au mouvement des corps animés par des attractions mutuelles quelconques, ou attirés vers des centres fixes par des forces proportionnelles à quelques fonctions des distances que ce soit. Le grand avantage de ce principe est de fournir immédiatement une équation finie entre les vîtesses des corps, et les variables qui déterminent leur position dans l'espace; de sorte que lorsque par la nature du problème toutes ces variables se réduisent à une seule, cette équation suffit pour le résoudre complètement, et c'est le cas de celui des centres d'oscillation. En général, la conservation des forces vives donne toujours une intégrale première des différentes équations différentielles de chaque problème, ce qui est d'une grande utilité dans plusieurs occasions.

On se tromperoit si l'on pensoit qu'il fallût nécessairement recourir à cette méthode indirecte pour résoudre ces problèmes. Bouguer, avant que d'être de l'Académie, envoya une solution d'un problème assez difficile, au *Journal des Savans*, avril 1728; cette solution est uniquement fondée sur les lois connues de la communication du mouvement entre les corps élastiques dans le choc, et elle s'accorde entièrement avec celle de Bernoulli. On peut voir aussi, dans la *Dynamique* de d'Alembert, la solution de plusieurs problèmes difficiles sur le choc des corps élastiques entre eux, ainsi que dans les *Mémoires* de Fontaine, publiés en 1769, où il donne des *principes sur l'art de résoudre les problèmes sur le mouvement des corps*. Nous remarquons cette identité, parce qu'il est agréable à l'esprit mathématique de voir des méthodes si différentes, conspirer à donner les mêmes résultats, et que pour ceux à qui les mathématiques sont étrangères,

gères, rien n'est plus propre à leur donner une idée de la certitude de ces sciences, que de voir arriver au même point par des voies si différentes.

Bernoulli ne se contenta pas de résoudre, d'après le principe ci-dessus, les problèmes que nous venons de voir; il s'en proposa un grand nombre d'autres qu'il résolut et publia en forme de théorèmes, sans en donner l'analyse, dans les *Mém. de Pétersbourg*, t. II: en voici quelques-uns.

Le corps P, (*fig. 27*) attaché à un fil passant sur une poulie A, et tirant après lui un corps moins pesant p , roule sur une courbe donnée AB, on demande le mouvement du corps P, dans les différents points de la courbe.

Un tube ABCD, (*fig. 28*) recourbé à angles inégaux en B et C, est rempli d'eau, ou d'un autre fluide; on demande les oscillations de ce fluide lorsqu'on l'aura mis en mouvement.

Un triangle ABC, (*fig. 29*) reposant par la base infiniment polie sur un plan horizontal, également poli, est chargé d'un poids P, qui roule sur le plan, et tend à le faire reculer dans le sens CB, on demande, tant le mouvement de ce plan, que la courbe que décrira ce globe.

Plusieurs autres géomètres se sont aidés du même principe dans la solution de problèmes de dynamique de grande difficulté. Je citerai pour exemple Montigny, qui dans les *Mémoires de l'Académie* pour 1741, s'en proposa un singulier et fort difficile, que voici.

On suppose sur un plan horizontal une verge inflexible, chargée de deux, ou d'un plus grand nombre de poids, qui peuvent librement couler sur cette verge; elle passe elle-même dans un anneau fixé sur un plan horizontal, et dans lequel elle peut couler sans résistance, suivant qu'elle sera plus ou moins tirée par le poids dont elle est chargée. Cet anneau, au reste, peut tourner librement sur lui-même. La verge ci-dessus recevant une impulsion ou choc quelconque, on demande quelle sera la courbe que décrira chacun des corps, et la vitesse qui leur sera imprimée.

Montigny appliquant à la solution de ce problème le principe de la conservation des forces vives, le résoud d'une manière fort satisfaisante. Nous remarquerons cependant encore que le problème n'est pas inaccessible à une méthode directe; et en effet, d'Alembert le résoud dans sa dynamique d'une manière directe, en se servant lui-même du principe lumineux dont il est l'inventeur, et dont nous allons parler dans l'article suivant.

Je n'étendrai pas davantage cet article; c'est surtout dans la détermination du mouvement des fluides qu'on tira parti du principe dont il s'agit; Daniel Bernoulli s'en servit dans son

hydrodynamique, en 1738, mais sans le démontrer : et d'Alembert, à la fin de son *Traité de Dynamique*, en 1743, entreprit d'en donner, sinon une démonstration générale, au moins les principes suffisans pour trouver la démonstration dans chaque cas particulier.

Il en résulte qu'en général la conservation des forces vives dépend de ce principe, que quand des puissances se font équilibre, les vitesses des points où elles sont appliquées, estimées suivant la direction de ces mêmes puissances, sont en raison inverse de ces mêmes puissances. Ce principe est reconnu depuis long-temps par les géomètres pour le principe fondamental de l'équilibre ; mais on n'avoit pas encore démontré, en général, ni fait voir que celui de la conservation des forces vives en résulte nécessairement.

I V.

Du principe de d'Alembert pour la Dynamique.

Nous avons parlé ; dans l'article II, pag. 616 du principe que d'Alembert donna en 1743, dans son *Traité de Dynamique*. On ne sauroit, dans les mathématiques transcendantes, multiplier trop les instrumens de recherches, et il est rare que lorsque ces instrumens nouveaux sont maniés par d'habiles mains, il n'en jaillisse de nouvelles lumières, et souvent des solutions inespérées de difficultés qui avoient arrêté jusques-là. Il en résulte d'ailleurs, à l'avantage de la science, un nouveau degré de certitude très-satisfaisant. Car, quoi de plus agréable pour un esprit mathématique, ou qui a du goût pour la vérité, que de voir plusieurs notions primordiales isolées et différentes, conduire toutes au même but ? C'est un avantage, il faut le remarquer en passant, à l'honneur des mathématiques, qui leur est propre, à l'exclusion de toute autre science.

On doit à d'Alembert la découverte d'un principe mécanique de ce genre, qui est d'une application très-féconde aux questions les plus difficiles de la mécanique. Il fait la base de son excellent *Traité de Dynamique*, dans lequel on trouve la solution de quantité de problèmes qui avoient échappé aux recherches de ses prédécesseurs. C'est même ce principe qui lui a frayé la route à la solution d'un des problèmes les plus intéressans et les plus épineux de ce genre, celui du mouvement de la terre, qui produit la précession des équinoxes ; problème traité par Newton d'une manière qui n'étoit pas assez convaincante, et que d'Alembert a le premier complètement résolu en 1749, comme on le verra dans le volume suivant.

Ce principe est celui-ci : *Soyent plusieurs corps dont les mouvemens, c'est-à-dire, les vitesses A, B, C, D, &c. ainsi que les directions sont données, et qui se choquent, se tirent ou se poussent d'une manière quelconque.* Ces mouvemens A, B, C, D, &c. sont respectivement décomposés en deux autres, tels que a et α , b et β , c et γ , d et δ , &c. qui soient tels que si ces corps n'eussent eu que les mouvemens a, b, c, d , &c. ils eussent pu conserver leur mouvement sans se nuire mutuellement, et que s'ils n'eussent eu que ceux $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c. ils eussent restés en équilibre, les mouvemens a, b, c, d , seront ceux qu'ils prendront en conséquence de leur action mutuelle. On suppose les corps sans ressort; mais on passe facilement de ce cas à celui des corps élastiques.

On se démontrera ce principe en l'examinant attentivement; car on verra facilement qu'il est une conséquence évidente des lois du mouvement et de l'équilibre; et en second lieu qu'il a l'avantage de réduire tous les problèmes de la dynamique à la géométrie pure, et à la statique, car il est toujours possible, (non cependant sans beaucoup de sagacité en bien des cas), de décomposer chacun des mouvemens opposés de plusieurs corps en deux autres, tels que si ces corps n'eussent eu chacun que l'un des composans, ils fussent restés en équilibre, ou le mouvement eût été zéro. On aura donc alors pour les mouvemens restans à chacun de ces corps, le second des composans, ainsi l'on connoîtra le mouvement du système de ces corps.

Ou si le mouvement de ces corps est donné après le choc; ou l'instant après leur action mutuelle, et qu'on décompose celui de chacun en deux, tels que s'ils n'eussent eu que le premier, ils fussent restés en repos, le second sera celui que chacun auroit du avoir avant le choc, pour produire le mouvement donné.

Fontaine, dans les premières pages de ses mémoires nous apprend qu'il avoit eu cette idée. On lit dans la table de ces mémoires, page 3, à l'article des principes de l'art de résoudre les problèmes sur le mouvement des corps, le passage suivant : « Ceux qui écriront l'histoire des sciences doivent regarder ces » principes-ci comme aussi connus depuis 1739 que s'ils avoient » été imprimés cette année-là, celui-ci surtout : *Dans le conflit » de plusieurs corps, quelle qu'en soit la cause, les changemens qui arriveront aux états de ces corps dans l'espace » seront tels, que les forces qu'ils avoient pour s'y refuser se » seront vaincues mutuellement, ou auront été en équilibre.* » Et tous ceux que je propose furent donnés à l'Académie en 1739, et communiqués depuis à tous les géomètres que j'ai rencontrés. Il est aisé de voir l'analogie ou l'identité de ce principe

avec celui de d'Alembert. Cependant tout en accordant à Fontaine, dont la sagacité étoit extrême, l'honneur de la découverte de ce principe, nous ne croyons point que cela doive diminuer la gloire de d'Alembert; il n'étoit point encore de l'Académie quand Fontaine l'entretint des principes dont il parle. Celui-ci ne publia rien qui pût mettre d'Alembert sur la voie; et le grand usage que d'Alembert fit de son principe lui en assure la propriété.

Nous ne quitterons pas cette matière sans dire quelque chose de plus de l'ouvrage où d'Alembert ouvrit cette nouvelle voie. Car indépendamment de l'exposition et de l'application du principe ci-dessus, ce traité contient beaucoup d'autres choses remarquables. Telles sont en particulier des réflexions sur les principes de la mécanique, qu'il réduit à trois, la force d'inertie, le mouvement composé, et l'équilibre, comme nous l'avons expliqué, (art. II). Et d'abord dans un discours préliminaire, écrit comme celui de l'Encyclopédie, et où règne une métaphysique profonde et lumineuse; il expose ses vues sur ce sujet d'une manière à être entendue de tout le monde; mais dans la première partie de son ouvrage, il reprend cette matière et la traite *more geometrarum*, en établissant géométriquement ces principes d'après les notions métaphysiques les plus claires. En effet, quoique admis et pris pour bases de leurs raisonnemens par tous les mécaniciens, on pouvoit encore désirer que ces principes d'expérience fussent fondés sur une certitude métaphysique. C'est ce que fit d'Alembert dans cette première partie de son ouvrage; et d'après ses démonstrations on peut et on doit regarder ces principes comme d'une nécessité aussi rigoureuse que les premières vérités élémentaires de la géométrie. Remarquons toutefois ici qu'avant d'Alembert, Daniel Bernoulli avoit eu un objet semblable au moins relativement à la composition du mouvement qu'il démontre aussi *more geometrarum* dans les Mémoires de Pétersbourg; mais la démonstration de d'Alembert nous paroît avoir quelques degrés de plus de concision et de clarté. Daviet de Foncenex s'est aussi proposé ce sujet, qu'il traite d'une manière savante et lumineuse dans un mémoire qu'on lit dans le second volume des *Mémoires de Turin*, en 1761.

Il en étoit encore du principe de la conservation des forces vives comme de ceux de l'équilibre, et de la décomposition des forces. Quoique employé sans cesse par les mécaniciens, il étoit ce semble, plus démontré par l'accord, jamais démenti de ses conséquences avec l'observation des phénomènes mécaniques, ou avec celles tirées d'autres principes démontrés, qu'il ne l'étoit *à priori*, et métaphysiquement. Il falloit en quelque sorte con-

solider cette base, et c'est ce que fit d'Alembert comme nous l'avons remarqué page 626. On peut dire enfin que par là et par diverses observations qu'on lit dans cet ouvrage et divers autres de d'Alembert, il a jeté une grande lumière sur cette branche de nos connoissances, et dissipé les légers nuages qui en couvroient encore quelques parties.

D'Alembert traite encore dans l'édition de 1796 une question qui a beaucoup occupé les métaphysiciens allemands, et qui fut proposée pour sujet de prix, par l'Académie de Berlin, savoir : *Si les lois de la mécanique et de la statique sont des vérités nécessaires ou contingentes.* La meilleure pièce sur ce sujet nous a paru être celle du savant physicien et profond métaphysicien Bulfinger. Il n'hésite pas à les regarder comme des vérités nécessaires, c'est à-dire pour fixer l'état de la question, que la nature des corps étant telle qu'elle a été établie par l'auteur de l'univers, c'est-à-dire, douée d'impénétrabilité, les loix de la statique et de la mécanique en sont une suite nécessaire, comme des propriétés de l'étendue suivent nécessairement toutes les vérités géométriques. Tel est aussi le sentiment de d'Alembert, qu'il établit sur une suite de réflexions métaphysiques lumineuses et profondes.

La question des forces vives devoit nécessairement fixer l'attention d'un auteur qui écrivoit sur la *Dynamique*, ou la *Science des forces*. D'Alembert ne pouvoit se dispenser d'en parler; mais il ne prend pas le change; entrer dans cette discussion où chaque adversaire puise dans une métaphysique plus ou moins déliée de nouvelles raisons; ç'eût été s'écarter inutilement de son objet, quelle que soit la manière d'estimer les forces des corps en mouvement, les principes de solution établis par d'Alembert sont indépendans de cette question. Les problèmes qu'il analyse et qu'il résoud, se réduisent uniquement à déterminer des vitesses et des directions de masses données; chacun des tenans, dans ce grand combat, estimera ensuite comme il le voudra la force des corps dont il connoîtra la vitesse; aussi trouva-t-il que c'étoit une question de mots, comme nous l'expliquerons dans l'article suivant.

V.

De la question des Forces vives.

Il est rare de voir les mathématiciens disputer sur les principes; c'est cependant ce qu'on vit, avec une sorte de scandale, vers le commencement du dix-huitième siècle, et pendant qua-

rante ans. L'objet de cette dispute étoit la manière dont on doit estimer la force des corps en mouvement que Leibnitz appelle *force vive*, tandis qu'il donne le nom de *force morte* à celle des corps qui sont seulement dans une tendance à se mouvoir, et n'agissant que par leur pression. On vit alors l'Europe se partager en quelque sorte ; presque toute l'Allemagne se rangea du côté de Leibnitz et de Bernoulli ; l'Angleterre fidèle à l'ancienne estimation, combattit toutes les raisons des premiers avec tant de succès, qu'après avoir vu les réponses à des raisons qui paroissent des démonstrations, on étoit tout étonné de ne savoir plus à qui accorder l'avantage. La France fut partagée aussi entre une femme célèbre tenant pour Leibnitz, et un membre illustre de l'Académie ; la Hollande fut en général favorable au sentiment du philosophe allemand, ainsi que l'Italie. Ce qu'il y avoit de bien singulier dans cette dispute, c'est que le même problème résolu par les géomètres des deux partis avoit la même solution ; ils admettoient tous les mêmes lois du choc, ce qui pouvoit dès-lors donner l'idée que la dispute n'étoit qu'une question de métaphysique ; ces sortes de disputes sont encore une espèce de scandale en mathématiques ; mais il n'en est plus question ; l'on estime les forces comme l'on veut, ou par le carré de la vitesse, ou par la simple vitesse ; les conclusions n'en sont pas différentes.

La manière d'estimer la force des corps qui, en vertu de leur pesanteur, ou d'une pression, tendent au mouvement, n'a jamais causé de schisme : les principes de la statique démontrent que la force d'un corps est dans ce cas proportionnelle à la vitesse qu'il auroit, si son mouvement étoit effectué. Mais en est-il de même des corps qui sont dans un mouvement actuel ? Leurs forces, toutes choses d'ailleurs égales, suivent-elles le rapport simple des vitesses comme dans le cas précédent ? On n'avoit pas songé à en douter jusqu'à 1686, que Leibnitz crut appercevoir une erreur dans l'opinion commune. Il tâcha d'établir que dans ce cas la force est, non comme la vitesse, mais comme le carré de la vitesse. Ce nouveau sentiment fut annoncé dans les Actes de Leipzig, par un écrit intitulé : *Demonstratio erroris memorabilis, cartesiani et aliorum in aestimandis viribus motricibus corporum*. Voici le raisonnement de Leibnitz.

Lorsqu'un corps tombe d'une hauteur de quatre pieds, il acquiert à la fin de sa chute une vitesse double de celle qu'il eût acquise en tombant d'une hauteur d'un pied ; et en même-temps il acquiert la force de s'élever à la hauteur de laquelle il est tombé ; avec une vitesse double il a donc acquis la force de s'élever à une hauteur quadruple de celle à laquelle il s'élèveroit au moyen de

la vitesse acquise en tombant d'une hauteur d'un pied. Il est aisé de voir qu'une vitesse triple l'élèveroit à une hauteur neuf fois plus grande, et ainsi des autres. Or, les forces sont comme les hauteurs auxquelles le même poids est élevé. Ainsi concluoit Leibnitz, un corps mu d'une vitesse double est doué d'une force quadruple ; d'où il suit que les forces sont en raison des quarrés des vitesses.

Le sentiment de Leibnitz avoit trop d'analogie avec le fameux principe de la conservation des forces ascensionnelles de Huygens pour ne pas lui plaire. On ne sait cependant point précisément ce qu'Huygens pensa sur cela, mais Leibnitz dit qu'il ne lui étoit pas contraire ; *Huygenius quoque à sententia mea non alienus*. Mais il n'en fut pas de même des autres mathématiciens. Leibnitz ne rencontra d'abord par tout que des contradicteurs. Son opinion naissoit à peine qu'elle fut attaquée par l'abbé de Catelan, cartésien zélé jusqu'à l'adoration. Il entreprit de répondre à Leibnitz. Il prétendit que son raisonnement étoit vicieux en ce qu'on n'y faisoit aucune attention au temps de l'ascension du corps. Il est bien vrai, disoit-il, comme ont fait d'autres antagonistes des forces vives, qu'un corps qui a une vitesse double s'élève à une hauteur quadruple, mais il ne le fait que dans un temps double. Or, produire un effet quadruple, dans un temps double, n'est pas avoir une force quadruple, mais seulement double.

Le cit. de la Lande, dans son *Astronomie*, art. 3505, remarque aussi que l'espace parcouru qui indique la force est comme la vitesse simple, si on considère l'espace parcouru dans un temps déterminé ; il est comme le quarré de la vitesse, si l'on ne demande point en combien de temps cet espace est parcouru. Mais il lui semble qu'il est plus naturel de considérer la force dans un temps donné ; sans cela on diroit qu'une tortue a autant de force à la course qu'un lièvre, car, avec le temps, elle parcourroit le même chemin ; un enfant auroit autant de force que celui qui porte un sac de bled de 240 livres, puisqu'avec le temps et par parties, l'enfant porteroit tout le bled. D'ailleurs, le mouvement se continue à l'infini, ainsi toute force seroit infinie si l'on n'avoit pas égard au temps.

Papin si connu par sa machine à ramollir les os fut aussi un adversaire de Leibnitz ; mais le parti de celui-ci s'étant accru, tous les mathématiciens célèbres furent divisés entr'eux sur cette question.

Jean Bernoulli entra en 1694 en commerce de lettres avec Leibnitz. Celui-ci ne manqua pas de lui proposer les raisons sur lesquelles il se fondeoit pour avancer sa nouvelle doctrine.

Bernoulli résista longtemps (1) et même presque au point d'indisposer Leibnitz. Cependant il se mit à examiner plus sérieusement les raisonnemens de Leibnitz et les réponses à ses objections; cet examen le détermina enfin à adopter son opinion, dont il devient bientôt après le plus zélé partisan. Il faut cependant observer qu'il convient lui-même (2) que ce furent moins les raisonnemens de Leibnitz, dont il ne fut jamais parfaitement satisfait, que ses réflexions propres qui lui firent adopter cette nouvelle estimation de la force dépendante du mouvement.

Il paroît cependant que Leibnitz et Bernoulli, contents d'être du même avis sur cette question, et d'avoir un nombre de partisans, n'insistèrent pas beaucoup pour s'en faire de nouveaux, ensorte que la distinction des forces vives étoit en quelque sorte concentrée entre un fort petit nombre de mécaniciens géomètres lorsque l'Académie des Sciences proposa, en 1724, pour sujet d'un de ses prix, la question de la *communication du mouvement*. Cette question avoit une trop grande liaison avec celle des forces vives pour ne pas renouveler la guerre commencée. Maclaurin, jeune encore, attaqua dans sa dissertation l'opinion de Leibnitz avec force; et Bernoulli, dans la pièce qu'il envoya, tâcha de l'établir avec toute la vigueur dont il étoit capable. Le P. Mazeas, adversaire des forces vives fut couronné; on peut voir ce qui empêcha Bernoulli de l'être, dans l'éloge que d'Alembert publia de ce grand géomètre après sa mort arrivée en 1748. Mais la pièce de Bernoulli, fut aussi imprimée.

C'est proprement à cette date que la querelle des forces vives s'engagea entre les géomètres métaphysiciens de l'Europe; car, quoique la pièce de Bernoulli n'eût pas remporté le prix, ses raisons y étoient exposées avec tant de force, que malgré l'avantage du parti contraire, un grand nombre d'hommes célèbres se rangea de son côté. Si d'une part on compte les Maclaurin, Stirling, Clarke, Desaguliers et autres Anglois; de l'autre, on peut citer Bernoulli, Herman, 'sGravesande, Musschenbroek, Poléni, Wolf, Bulfinger, et une grande partie des savans du continent surtout de l'Allemagne. On a opposé, raisons à raisons; les expériences les plus décisives en apparence, ont reçu des explications qui semblent elles-mêmes ne rien laisser à désirer.

On peut réduire les preuves apportées par Leibnitz et ses partisans à deux espèces, savoir à des expériences, en conséquence desquelles il raisonne, et à des raisonnemens métaphysiques, nous allons commencer par les expériences.

La première et la plus simple de toutes est celle dont nous

(1) *Commercium Epistolicum Leibnitii et Bern.* tom. I.

(2) *Discours sur la comm. du mouvement.*

avons parlé page 630, savoir que les corps peuvent, en vertu de la vitesse acquise par une chute, remonter à la même hauteur que celle d'où ils étoient tombés. Nous avons vu la réponse.

Les anti-Leibnitzziens infirment encore le raisonnement de Leibnitz de cette manière. En admettant avec Leibnitz que la force est comme la somme des obstacles égaux qu'elle peut surmonter, ils disent que le corps qui monte à une hauteur quadruple dans un temps double, n'a à surmonter que le double du nombre d'obstacles qu'éprouve le corps montant dans un temps simple à une hauteur comme 1. En effet, il paroît que ce nombre de coups, de chocs de la gravité qui produit l'accélération de la chute est proportionnel au temps, puisque les vitesses acquises sont comme les temps, d'où l'on peut conclure qu'un corps montant en deux temps à une hauteur quadruple, ne reçoit de ces impulsions retardatrices que le double de celles qu'éprouve le corps montant en un temps à une hauteur simple; de même qu'un corps tombant en deux temps d'une hauteur quadruple, n'a reçu que le double de ces impulsions accélératrices de la gravité, comparé au corps qui, dans un temps 2, parcourt en descendant un espace 1; aussi le premier n'a-t-il en effet qu'une vitesse double.

Bernoulli lui-même, tout partisan qu'il devint dans la suite des forces vives, ne pensoit point (1) comme Leibnitz que ce fussent les hauteurs qui dussent mesurer les forces des corps qui les avoient parcourues en montant; parce que, disoit-il, ces effets ne sont qu'accidentels, et une conséquence de la loi actuelle de la gravité; que si les lois de la pesanteur étoient autres que celles qui ont lieu actuellement, les hauteurs ne seroient nullement proportionnelles aux quarrés des vitesses. La raison en est sensible. Les corps continueroient à se mouvoir à l'infini en montant si une cause extérieure ne les empêchoit; celle pour laquelle cette hauteur est finie se trouve dans l'action de la gravité, action dont le mode est encore un mystère pour nous. Il est donc impossible de déterminer la nature de l'obstacle, ou des obstacles réitérés que le corps éprouve en montant, et qui consomment, pour ainsi dire, sa vitesse ascensionnelle.

Leibnitz sentit très-bien la justesse de la réponse de Bernoulli. Aussi lui répliqua-t-il qu'il n'avoit allégué l'élévation d'un corps que comme un des effets dans la production desquels la force se consume, et qui par-là peut la mesurer. Ensuite reprenant son argument et tâchant de lui donner plus de force, il lui fit remarquer que tout l'art d'estimer une chose quelconque, ne consiste qu'à réduire le tout à une seule mesure, dont la répétition seule

(1) *Comm. Epist. Leib. et Bern.* tom. I. epist. XI,

puisse servir à en faire connoître la quantité, comme la multitude où la répétition des unités fait connoître celle des nombres; qu'ainsi, l'on pouvoit mesurer la force d'un corps en mouvement par le nombre des corps égaux auxquels il étoit capable d'imprimer un même degré de vitesse, ou au lieu de ces corps égaux, par un nombre quelconque d'effets égaux et répétés, par exemple, de certains poids élevés à la même hauteur.

Un des plus forts argumens qui aient été faits en faveur des forces vives, est celui que J. Bernoulli tire de la force et de l'action des ressorts agissant sur un corps, pour lui imprimer du mouvement. *Discours sur la communication du mouvement.* Nous allons l'expliquer après avoir présenté quelques préliminaires que tout le monde accorde.

Si plusieurs ressorts égaux se tiennent bout-à-bout les uns les autres, la même puissance qui pourra en soutenir un bandé à moitié, pourra soutenir également la suite de tous, également bandée à moitié; de sorte que trois ressorts, par exemple, n'exercent pas une action plus grande, lorsqu'ils sont débandés de la moitié de leur étendue, que douze semblablement détendus; mais ces derniers se détendront avec plus de vitesse, parce que chacun de ces douze derniers se détendra avec la même vitesse que chacun des trois premiers; d'où il suit que les douze occupant plus d'espace que les trois, en raison de 12 à 3, ou de 4 à 1, il y aura aussi même raison de la vitesse avec laquelle les douze tendront à se rétablir dans leur état naturel, à la vitesse avec laquelle les trois tendront à se rétablir de même, que de 4 à 1.

Cela étant admis, voici le raisonnement de Bernoulli. La force qu'imprimera un ressort seul à un corps P, qu'il poussera en se détendant, doit être à celle que communiqueront à un corps égal Q, quatre ressorts qu'il pousseront, comme les nombres de ressorts, ou comme 1 à 4; car on ne peut pas dire qu'il y ait aucune partie de la force qui se perde; il faudra donc que la force de chacun de ces ressorts soit employée à produire son effet, et à quel effet peut-elle être employée qu'à mouvoir ces corps; par conséquent les forces produites seront proportionnelles au nombre des ressorts employés à les produire: sans cela il y auroit quelque force de perdue.

Bernoulli démontre ensuite, ou prétend démontrer, que les vitesses imprimées à ces corps ne sont entre elles qu'en raison soudoublées de ces nombres, ou dans le cas ci-dessus, comme 1 à 2. Des vitesses comme 1 à 2, sont donc produites par des forces qui sont comme 1 à 4, et réciproquement des vitesses comme 1 et 2, produiront des forces comme 1 et 4; car si le corps P revenoit avec sa vitesse comme 1 contre le ressort qui la lui a communiquée, il le tendroit au même point, et de même le

corps Q, revenant avec sa vitesse 2 contre les 4 ressorts, les tendroit au même point qu'ils l'étoient : d'où l'on doit conclure que les forces des corps en mouvement sont comme les quarrés des vitesses.

On conclut aisément de cette démonstration, que si ces ressorts étoient infinis en longueur, l'accélération de vitesse seroit uniforme et tout-à-fait semblable à celle des corps tombans ; car, ce seroit alors une force constamment égale qui seroit employée à hâter le mouvement du corps. Or, dans ce cas les forces sont comme les quarrés des vitesses : donc il en est de même à l'égard des corps tombans, et Léibnitz a eu raison de mesurer les forces de ces corps par les hauteurs d'où ils sont tombés, ou par celles auxquelles ils pourroient atteindre en remontant.

Quelque concluante que paroisse cette démonstration, les défenseurs de l'ancienne estimation des forces ne laissent pas d'y répondre d'une manière satisfaisante. Ils prétendent que dans le raisonnement par lequel Bernoulli prétend démontrer que, dans le cas ci-dessus, les corps P et Q n'acquerront des vitesses que comme 1 à 2, il a omis un élément nécessaire de son calcul. Il est bien vrai, disent-ils, que dans l'état de repos les forces qui pressent contre les corps P et Q sont égales ; mais la suite des ressorts qui agit contre le corps Q, se développant avec une vitesse quadruple de celle avec laquelle se développe le ressort qui met en mouvement le corps P ; si l'on fait entrer dans le calcul de Bernoulli, cet élément, on trouvera que les vitesses des corps P et Q, seront comme les nombres de ressorts, ou en général comme les longueurs des suites de ressorts appliqués à les mettre en mouvement. C'est ainsi que Heraclite Manfredi (le frère des célèbres Eustache et Gabriël Manfredi) répond à l'argument de Bernoulli : et il nous semble qu'il n'y a rien à répliquer.

Bernoulli déduit du principe commun du mouvement composé (1) une nouvelle preuve du sentiment qu'il avoit embrassé, et que les partisans de ce sentiment regardent comme d'une grande force.

Si un globe A (*fig. 30*), parfaitement élastique se meut sur la diagonale AC d'un quarré, et rencontre obliquement un globe égal et élastique qu'il choque dans la direction CD, le corps C se mouvra sur CD avec une vitesse CD égale à CB ; après le choc, le corps A continuera son mouvement dans la direction CE, parallèle à AB. Or, la somme des forces, avant et après le choc, doit être la même ; ce qui n'arrive point si la force est proportion-

(1) *Discours sur la communication du mouvement*, chap. 8.

nelle à la vitesse. Car les lignes CE, CD, excèdent la ligne AC; mais cette somme est la même avant et après le choc, en faisant les forces proportionnelles aux quarrés des vitesses. Car les quarrés de CE et CD pris ensemble, sont égaux au quarré de AC. Mais Maclaurin, dans la pièce où il combat les forces vives, fait un raisonnement dont conviendront tous ceux qui admettront la force d'inertie, c'est-à-dire, qui auront une idée saine du mouvement. La force que perd un corps en agissant sur un autre, n'est égale à celle qu'il produit dans ce corps, que lorsqu'il tend à le mouvoir suivant la direction selon laquelle il se meut lui-même. Mais lorsqu'il tend à le mouvoir dans une autre direction, alors il agit et par son mouvement et par sa force d'inertie, qui s'oppose au changement de sa direction. Ainsi, le corps A choquant et tendant à mouvoir C, suivant la direction CD et non suivant AC, agit sur lui et par son mouvement et par la force par laquelle il résiste au changement de sa direction, parce qu'il ne sauroit se mouvoir dans cette direction, sans écarter C de son chemin.

En effet, le corps A se mouvant suivant AC et tendant à mouvoir C suivant la direction CD, est dans le même cas que si se mouvant suivant la ligne AC, un corps ou une force quelconque, dès qu'il seroit en C, le choquoit selon la direction DC, et tendoit à lui imprimer une vitesse CB; le corps A changeroit à l'instant de direction, et se mouvroit suivant CE. Or, on voit aisément que dans ce cas le corps C résiste à ce changement de direction, uniquement par sa force d'inertie.

J'ajouterai qu'il n'est pas surprenant qu'un corps A, en en choquant deux autres obliquement, produise dans chacun d'eux des forces qui, prises ensemble, soient plus grandes que celle qui les a produites. La même chose arrive dans le cas des pressions, et un globe A (*fig. 31*), poussé dans la direction AC avec une force morte, égale à AC, et pressant les boules D et E, suivant les directions AH, AG, exerce sur elles deux pressions particulières, qui, prises ensemble, sont capables de surmonter le corps A tout seul, pressant selon sa direction et sa force propres. On ne doit donc point s'étonner que la force de A, avant le choc, puisse être plus grande que celle de D et E après le choc.

Les partisans de la nouvelle estimation des forces vives, doivent encore à Herman un raisonnement tiré du concours de globes élastiques qu'ils ont fait valoir comme une démonstration irréfragable de leur sentiment. Qu'on suppose un corps élastique M d'une masse comme 1 et avec une vitesse comme 2, aller à la rencontre d'un autre globe élastique et immobile N, dont la masse soit 3, l'effet de ce choc sera, selon les lois du mouvement,

entre les corps élastiques, que le corps N prendra une vitesse égale à 1, et le corps M rejaillira avec une vitesse en sens contraire, aussi égale à 1 : que ce corps M rencontre ensuite directement un corps O égal à lui-même, il lui communiquera toute sa vitesse restante et restera en repos. Voilà donc deux corps, l'un de 3 de masse, l'autre de 1 de masse, mis en mouvement avec une vitesse 1, par le seul corps M de 1 de masse et de 2 de vitesse. La force d'un corps de masse 1 avec 2 de vitesse, équivaut donc à celle de deux corps dont la masse est 4 avec une vitesse 1. Or, une masse comme 4, mue avec une vitesse comme 1, à une force incontestablement quadruple de celle d'un corps de masse 1, mû avec la vitesse 1 : donc le corps M de masse 1 avec une vitesse 2, a une force quadruple de celle d'un corps de masse 1 avec une vitesse 1.

Ce raisonnement est, il faut l'avouer, le plus spécieux en faveur du sentiment des forces vives; car il n'y a ici aucun mélange, comme dans les chocs obliques de la force dilatée du corps choquant avec celle qui résulte de son inertie à changer de direction. Toutefois bien apprécié, il ne prouve pas davantage : car ce n'est qu'accidentellement, et par un effet de suppositions combinées, qu'on trouve ici la quantité du mouvement quadruplée; d'où l'on infère que la force est quadruplée, ou comme l'observe de Mairan (1), parce que $2 + 2$ est accidentellement la même chose que 2 multiplié par 2.

Faisons en effet une autre supposition de masses et de vitesses. Que le corps M, avec un de masse, au lieu d'une vitesse 2 en ait une comme 4, et qu'il aille choquer le corps N en repos ayant 3 de masse, il lui communiquera une vitesse comme 2 : ainsi voilà une force comme 6. Que ce corps M qui sera repoussé avec une vitesse comme 2, rencontre un corps égal à lui qui prendra cette vitesse 2 et la réduira au repos; ce sera, selon le raisonnement de Herman, une nouvelle force comme 2, qui, ajoutée à la première, fera une force comme 8. Mais ici les partisans des forces vives sont loin de compte; car pour que la force fût comme le carré de la vitesse, il auroit fallu trouver un produit comme 16.

Si la vitesse du corps M, tout le reste étant le même, eût été supposée 3, le résultat eût été que nous aurions eu le corps N mû avec une vitesse $1\frac{1}{2}$, et le corps O mû avec $1\frac{1}{2}$ de vitesse, ce qui eût donné pour produit 6, et non pas 9, qui auroit dû résulter d'une vitesse triple.

On pourroit aussi supposer au corps B une autre masse que 3, et tout le reste étant le même, on trouveroit qu'il y a tantôt plus,

(1) Lettre à madame *** (madame du Châtelet). Paris, 1741, in-12.

tantôt moins de force après le choc, qu'il n'en résulte du produit des masses par le quarré de la vitesse.

On pourroit encore observer, contre ce raisonnement, que le mouvement du corps M, après la réflexion du corps N, ou celui du corps O, après avoir été choqué par le corps M, se faisant en sens contraire du mouvement du corps N, on devroit plutôt soustraire le premier du second, que les ajouter pour avoir la force totale engendrée par le corps M. Mais nous n'insisterons pas sur cette observation, parce qu'on peut prétendre qu'il n'est question ici que la force absolue, de quelque côté qu'elle s'exerce.

Il n'y a au surplus ici qu'une augmentation de quantité de mouvement absolu, phénomène résultant le plus souvent du choc des corps élastiques; et cette augmentation est du reste astreinte à la loi générale, découverte par Huygens; savoir, qu'il y en a toujours la même quantité vers le même côté: c'est ce qu'il aisé de se démontrer dans tous les exemples précédens.

Voici encore un raisonnement auquel la marquise du Châtelet attribuoit une très-grande force, en ce que les adversaires des forces vives éludant la plupart des argumens qu'on leur faisoit, par le motif qu'on négligeoit la considération du temps, il n'y a dans ce raisonnement rien qui prête à ce subterfuge. Soit, dit-on, une boule A dont la masse est 1 et la vitesse 2, et qui choque avec cette vitesse, et à-la-fois, sous un angle de 60° , deux autres boules B et C, ayant chacune une masse double de la première. On convient qu'elle leur communiquera, à chacune, une vitesse égale à la moitié de la sienne, ou égale à 1. Voilà donc 4 degrés de masse mus avec une vitesse 1, ou 4 degrés de mouvement ou de force engendrés par un corps mù avec une vitesse 2. La force est donc comme le quarré de la vitesse.

Mais quelque force que les partisans des forces vives attribuent à cet argument, il n'en est pas moins, comme les précédens, susceptible d'une réponse qui l'énerve entièrement; car on peut lui opposer les mêmes considérations qu'au précédent; savoir, que ce n'est que dans cette supposition particulière de masses d'incidence et de vitesse du corps choquant, qu'on trouve la quantité de mouvement quadruple de celle d'un corps de la vitesse.

En effet, que le corps choquant, au lieu d'une vitesse double en ait une triple, tout le reste étant supposé le même, chaque corps choqué se mouvra avec une vitesse égale à $1\frac{1}{2}$. Ainsi, multipliant chaque corps dont la masse est 2 par sa vitesse acquise $1\frac{1}{2}$, nous aurons pour les deux 6 de mouvement ou de force, et non 9, comme cela devroit être, si une vitesse triple produisoit une force qui fût comme son quarré.

Sur ces divers raisonnemens on peut voir encore un écrit de Herman, dans les *Mémoires* de Pétersbourg, tom. I, an. 1726; un sur le même sujet, par Bulfinger; et un autre de Wolf, sous le titre de *Principia dynamica*, dans le même volume.

Poleni rapporta diverses expériences qui paroissent favorables au sentiment des forces vives. Voyez *le Recueil de ses Lettres*. En laissant tomber de diverses hauteurs des corps égaux de forme et de volume, mais inégaux en pesanteur, sur des matières molles, comme de l'argile, on remarqua, après avoir réitéré cent fois l'expérience, que les cavités étoient égales, lorsque les hauteurs et les pesanteurs de ces corps étoient réciproquement proportionnelles, c'est-à-dire, lorsque le produit des masses par les quarrés des vitesses, étoient égaux. Or, ces cavités sont certainement comme les forces de ces corps, puisqu'elles sont comme la quantité de matière que le corps a pu chasser en avant de lui, avant que de perdre toute sa force. Par conséquent les forces seront égales lorsque les masses multipliées par les quarrés des vitesses formeront des produits égaux.

On a fait cette expérience encore autrement : on a laissé tomber les mêmes corps de différentes hauteurs. On a mesuré les cavités qu'elles produisoient dans l'argile molle, et l'on a trouvé qu'elles étoient comme ces hauteurs même, c'est-à-dire, comme les quarrés des vitesses. Ces expériences, dit-on, prouvent donc victorieusement que les forces des corps en mouvement sont comme les quarrés des vitesses.

On a enfin laissé tomber des balles d'ivoire ou de marbre, de différentes hauteurs, sur un plan enduit légèrement d'une matière grasse, et l'on a remarqué que les impressions qu'y laissent ces boules étoient toujours à très-peu-près de diamètre proportionnées à ces hauteurs, ce qui annonçoit le déplacement ou la compression d'un segment de la sphère proportionnel à la hauteur, ou au quarré de la vitesse.

Ce fut par de pareils raisonnemens qu'on traita la question des forces vives pendant quelques années à dater de 1726. Nous avons cité page 632, les principaux auteurs qui s'en occupèrent. La discussion fut assez vive entre 'sGravesande et le docteur Clarcke. Ce dernier y mit un ton de vivacité, d'aigreur et même de mépris pour ses adversaires que 'sGravesande crut devoir repousser par des observations, où ne s'écartant point lui-même du ton d'honnêteté qui doit régner dans des discussions purement scientifiques, il fit voir combien celui de Clarcke en passoit les bornes; mais tel étoit le docteur Clarcke qui avoit aussi traité assez mal Leibnitz dans les discussions philosophico-théologiques qu'ils eurent ensemble. Nous observerons seule-

ment que 'sGravesande paroît donner à la question, dans la pratique de la mécanique, une importance qu'elle n'a pas.

Il est reconnu aujourd'hui que le calcul de l'effet d'une machine, soit par un partisan des forces vives, ou celui d'un de leurs adversaires est absolument le même.

La dissertation de Mairan, dans les *Mémoires de l'Académie*, pour 1728, fut le germe d'une nouvelle discussion assez vive entre ce savant physicien, et la marquise du Châtelet. Celle-ci dans la première édition d'une pièce sur la nature du feu, imprimée en 1740, avoit donné beaucoup d'éloges aux raisons fortes et victorieuses de Mairan contre les forces vives; mais elle changea d'avis. Le château de Cirey, où vivoit le plus souvent madame du Châtelet, séjour des sciences et des belles lettres devint peu de temps après ces éloges une école leibnitéienne, et le rendez-vous des plus célèbres partisans des forces vives. Kœnig y passa en effet quelque temps. Bientôt, continue Mairan, on y parla un autre langage, et les forces vives y furent placées sur le trône à côté des monades. Madame du Châtelet ne vit plus les choses du même œil, et ne pouvant corriger le texte de la dissertation déjà imprimée, elle crut devoir mettre dans un errata imprimé à la fin, un correctif aux éloges qu'elle avoit données à la pièce de Mairan, et même ensuite un second errata qui changeoit ce correctif en une épigramme; ce qui néanmoins n'eut lieu que sur quelques exemplaires échappés des premiers, par les soins d'un académicien célèbre (Clairaut); mais madame du Châtelet ne tarda pas à s'expliquer d'une manière plus décidée à la fin de ses *institutions de physique* qui sont toutes leibnitziennes. Elle y reprit plusieurs des preuves qu'elle jugeoit victorieuses en faveur de Leibnitz, et y réfuta les raisonnemens par lesquelles Mairan les infirmoit.

Cependant, si Kœnig étoit un leibnitzien décidé, Voltaire, Maupertuis, Clairaut, qui formoient avec lui la société littéraire et savante de Cirey étoient assez indifférens pour la doctrine de Leibnitz, et madame du Châtelet, en même-temps qu'elle écrivoit ses *Institutions leibnitziennes*, traduisoit Newton.

Quoi qu'il en soit, Mairan crut devoir défendre son ancienne dissertation, et le fit par une *lettre à Madame *** sur la question des forces vives en réponse aux objections qu'elle lui fait sur ce sujet dans ses institutions de physique*.

On s'étonnera sans doute de voir ici Voltaire jouer un rôle; et ce qui surprendra davantage ceux qui connoissent les liaisons de cet homme célèbre avec madame du Châtelet, c'est de le voir précisément d'un avis contraire. Kœnig, dont ensuite il prit si vivement la défense contre Maupertuis n'avoit pu l'entraîner. Voltaire, alors, assez mal avec Kœnig, étoit intime
ami

ami de Maupertuis pour lequel il faisoit des vers pleins d'éloges ; qui auroit cru que dix ans après, le même homme épousant la querelle de Kœnig porteroit le poignard dans le cœur de son ancien ami, par les plus sanglantes railleries, dans sa diatribe du docteur Akakia, en 1752.

Voltaire publia en 1741, et adressa à l'Académie des Sciences un mémoire intitulé : *Doutes sur la mesure des forces motrices et sur leur nature*. Il y adoptoit entièrement l'ancienne mesure des forces motrices ; on en lit le précis dans l'*Histoire de l'Académie*, de 1741, où l'on donne de justes éloges aux idées de cet homme célèbre, et à sa manière de les présenter.

D'Alembert, dans son traité de *Dynamique*, publié peu de temps après, ne pouvoit manquer de dire son avis sur une question agitée avec tant de chaleur ; il n'hésite point à déclarer qu'il la regarde comme une pure question de mots.

Quand on parle, dit-il, de la force des corps en mouvement, ou l'on n'attache point d'idée nette au mot qu'on prononce, ou l'on ne peut entendre en général, que la propriété qu'ont les corps qui se meuvent de vaincre les obstacles qu'ils rencontrent ou de leur résister. Ce n'est donc ni par l'espace qu'un corps parcourt uniformément, ni par le temps qu'il emploie à le parcourir, ni enfin par la considération simple, unique et abstraite de sa masse et de sa vitesse qu'on doit estimer immédiatement la force ; c'est uniquement par les obstacles qu'un corps rencontre, et par la résistance que lui font ces obstacles. Plus l'obstacle qu'un corps peut vaincre, ou auquel il peut résister est considérable, plus on peut dire que sa force est grande ; pourvu que sans vouloir représenter par ce mot un prétendu être qui réside dans le corps, on ne s'en serve que comme d'une manière abrégée d'exprimer un fait, à-peu-près comme on dit qu'un corps à deux fois autant de vitesse qu'un autre, au lieu de dire qu'il parcourt en temps égal deux fois autant d'espace, sans prétendre pour cela que ce mot de vitesse représente un être inhérent au corps.

Ceci bien entendu, il est clair qu'on peut opposer au mouvement d'un corps trois sortes d'obstacles, ou des obstacles invincibles anéantissant tout-à-fait son mouvement, quel qu'il puisse être ; ou des obstacles qui n'ayent précisément que la résistance nécessaire pour anéantir le mouvement du corps, et qui l'anéantissent dans un instant, c'est le cas de l'équilibre. On enfin des obstacles qui anéantissent le mouvement peu-à-peu, c'est le cas du mouvement retardé. Comme les obstacles insurmontables anéantissent également toutes sortes de mouvemens, ils ne peuvent servir à faire connoître la force : ce n'est donc que dans l'équilibre ou dans le mouvement

retardé qu'on doit en chercher la mesure. Or, tout le monde convient qu'il y a équilibre entre deux corps, quand les produits de leurs masses par leurs vîtesses virtuelles, c'est-à-dire, par les vîtesses avec lesquelles ils tendent à se mouvoir, sont égaux de part et d'autre. Donc dans l'équilibre le produit de la masse par la vîtesse, ou ce qui est la même chose, la quantité de mouvement peut représenter la force. Tout le monde convient aussi que dans le mouvement retardé, le nombre des obstacles vaincus est comme le quarré de la vîtesse; ensorte qu'un corps qui a fermé un ressort, par exemple, avec une certaine vîtesse, pourra avec une vîtesse double fermer, ou tout-à-la-fois, ou successivement, non pas deux, mais quatre ressorts semblables au premier, neuf avec une vîtesse triple, et ainsi du reste; d'où les partisans des forces vives concluent que la force des corps qui se meuvent actuellement, est en général comme le produit de la masse par le quarré de la vîtesse. Au fond, quel inconvénient pourroit-il y avoir à ce que la mesure des forces fût différente dans l'équilibre et dans le mouvement retardé, puisque si on ne veut raisonner que d'après des idées claires, on ne doit entendre par le mot de force, que l'effet produit en surmontant l'obstacle ou en lui résistant? Il faut avouer cependant que l'opinion de ceux qui estiment la force par la vîtesse, peut avoir l'eu, non-seulement dans le cas de l'équilibre, mais aussi dans celui du mouvement retardé, si dans ce dernier cas on mesure la force, non par la quantité absolue des obstacles, mais par la somme des résistances de ces mêmes obstacles: car on ne sauroit douter que cette somme de résistance ne soit proportionnelle à la quantité de mouvement, puisque de l'aveu de tout le monde, la quantité de mouvement que le corps perd à chaque instant, est proportionnelle au produit de la résistance par la durée infiniment petite de l'instant, et que la somme de ces produits est évidemment la résistance totale.

Toute la difficulté se réduit donc à savoir si on doit mesurer la force par la quantité absolue des obstacles, ou par la somme de leurs résistances. Il paroîtroit plus naturel de mesurer la force de cette dernière manière, car un obstacle n'est tel qu'en tant qu'il résiste, et c'est à proprement parler la somme des résistances qui est l'obstacle vaincu: d'ailleurs, en estimant ainsi la force, on a l'avantage d'avoir pour l'équilibre et pour le mouvement retardé une mesure commune: néanmoins comme nous n'avons d'idée précise et distincte du mot de force qu'en restreignant ce terme à exprimer un effet, je crois qu'on doit laisser chacun le maître de se décider comme il voudra la-dessus: et toute la question ne peut plus consister que dans une discussion

métaphysique très-futile, ou dans une dispute de mots plus indigne encore d'occuper des philosophes. Ajoutons à cette conclusion qu'on ne peut regarder autrement la question quand on observe qu'une question de mécanique transcendante résolue par un partisan ou par un adversaire du sentiment de Leibnitz donne la même solution. Mais il semble que depuis la fameuse querelle des nominaux qui alla jusqu'à ensanglanter l'université de Paris, ce furent toujours les disputes de mots qui furent les plus opiniâtres et les plus échauffées.

Cette question venoit de la différente manière dont les uns et les autres entendoient le mot de force. La nature de la force est une chose obscure et métaphysique ; tout ce que des savans allemands en ont dit dans des dissertations profondes, n'est qu'un épais brouillard de métaphysique dont l'obscurité semble se renforcer à mesure qu'on l'agite davantage. Mais on a vu ci-dessus, page 631 qu'il est plus naturel d'appeler force l'effet produit dans un temps déterminé ; ainsi nous finirons cet article en disant que Leibnitz auroit dû laisser l'ancienne estimation des forces proportionnelles aux vîteses.

V 1.

Du principe de la moindre action.

Nous avons parlé page 611 de divers principes que les mécaniciens ont reconnus avoir lieu dans tous les mouvemens des corps ; mais l'historien doit en distinguer un qui a été le sujet d'une querelle d'autant plus célèbre, qu'on y vit paroître le plus bel esprit de l'Europe, et un de ses plus grands monarques. Ce principe est celui que Maupertuis mit en avant vers 1744, et qu'on nomme *de la moindre action*. Voici en quoi il consiste.

Lorsque plusieurs corps agissans les uns sur les autres éprouvent un changement dans leur mouvement, ce changement est toujours tel que la quantité d'action employée par la nature pour le produire, est la moindre qu'il est possible ; et cette action a pour mesure, suivant Maupertuis, le produit de la masse par l'espace et la vîtesse.

Maupertuis proposa pour la première fois ce principe à l'Académie des Sciences en 1744, et dans le mémoire qu'il y lut, il y développa les considérations qui l'y avoient conduit. Elles n'étoient à ce qu'il paroît que le résultat de ses efforts pour concilier les explications contradictoires en quelque sorte que Leibnitz et Fermat donnoient de la loi de la réfraction, en y employant les causes finales. Mais dans les *Mémoires de la*

Nouvelle Académie des Sciences de Berlin, pour 1746, il étendit ces applications aux lois du mouvement, et même du repos; et généralisant ce principe, il en fit un principe universel dont ceux de la loi de l'équilibre, de la marche uniforme du centre de gravité dans le choc des corps, de la conservation des forces vives &c. ne sont que des branches.

Les lois du mouvement qui ont lieu dans le choc des corps durs, ou dans celui des corps élastiques sont totalement différentes; quoi qu'il y en ait de communes, comme celle-ci, que le centre de gravité après le choc, continue de se mouvoir dans le même sens et avec la même vitesse qu'avant le choc. Mais il y a un autre principe qui a lieu seulement dans le choc des corps élastiques, savoir celui de la conservation des forces vives, qui consiste en ce que le produit des masses par les quarrés des vitesses avec lesquelles ils se meuvent reste constamment le même avant et après le choc, ce qui n'a pas lieu à l'égard des corps ou durs ou mous. Il est cependant très-probable, et il est conforme aux autres procédés de la nature qu'elle agisse à l'égard des uns et des autres par une même loi. Aussi quelques philosophes, afin de se délivrer pour ainsi dire de cette incohérence apparente, ont-ils avancé qu'il n'y avoit et ne pouvoit y avoir de corps absolument durs.

La loi de la réfraction étoit en quelque sorte une autre pierre d'achoppement pour ceux qui tentoient de l'expliquer au moyen des causes finales, comme avoient fait Fermat et Leibnitz. L'un et l'autre prenoient pour principe que la nature agit toujours par les lois les plus simples. Un ancien géomètre, Héron le mécanicien, expliquoit par-là, comment et pourquoi la lumière se réfléchit de dessus une surface plane, en faisant un angle de réflexion égal à celui d'incidence. Cette loi la plus simple étoit pour lui que le chemin du point rayonnant au point éclairé fût le plus court. Et effectivement, on trouve que tout autre chemin seroit plus long que celui qui est déterminé par l'égalité de ces angles. La foiblesse néanmoins de ce raisonnement quoiqu'ingénieux se fait voir en l'appliquant à un miroir concave; car lorsque le point rayonnant et l'œil se trouvent dans la concavité d'une sphère, la réflexion se fait de l'un à l'autre par deux chemins, l'un le plus court, l'autre le plus long. Il y a ici un *minimum* et un *maximum* à-la-fois.

En tâchant d'appliquer ce genre de démonstrations à la cause et à la loi de la réfraction, il est aisé de voir que le chemin entre le point rayonnant placé dans un milieu, et l'œil placé dans un autre milieu, n'est pas le chemin le plus court; car ce seroit la ligne droite. Fermat imagina donc de faire consister cette loi la plus simple de la nature en ce que le rayon allant

d'un point à l'autre, en passant d'un milieu plus rare, par exemple, dans un plus dense, devoit prendre un chemin tel qu'il mît moins de temps dans son trajet que par tout autre qu'il auroit pu tenir. Il supposoit d'ailleurs, ce qu'il étoit assez naturel de penser, que la lumière se mouvoit avec moins de vitesse dans un milieu dense que dans un milieu rare. D'après ces principes, il étoit déjà facile de voir que pour satisfaire à cette condition du *minimum*, il falloit que le mobile ou la lumière fût dans un certain rapport moins de chemin dans le milieu le plus difficile à traverser, que s'il se mouvoit en ligne droite d'un point à l'autre. Fermat enfin appliquoit le calcul au problème, et au moyen de sa règle de *maximis et minimis*, que Descartes lui contestoit mal-à-propos; il trouvoit précisément que pour satisfaire à ce *minimum* de temps, il falloit que le chemin de la lumière dans le premier milieu, et celui qu'elle prenoit dans le second fussent tels que le sinus d'inclinaison fût au sinus de l'angle rompu dans la raison des facilités des milieux à se laisser traverser par la lumière, ou des vitesses avec lesquelles la lumière peut les traverser; et conséquemment que ces sinus sous toutes les inclinaisons devoient être dans un rapport constant.

Leibnitz, entreprenant aussi d'appliquer à l'explication de ce phénomène les causes finales, partoît d'un principe différent de celui de Fermat. Ce n'est suivant lui ni par la route la plus courte, ni par celle qui exigeroit le moins de temps, que le rayon doit aller d'un point à l'autre, mais par le plus facile. Et cette facilité doit être estimée par le plus ou le moins de résistance que présentent les milieux dans lesquels la lumière se meut. Il pensoit d'ailleurs que la résistance étoit plus grande dans l'eau et le verre que dans l'air, et estimant la facilité du chemin total par la somme des produits du chemin fait dans chaque milieu, et la résistance de ce milieu, il y appliquoit sa règle de *maximis et minimis*, et trouvoit que les sinus d'incidence et de l'angle rompu devoient être dans le rapport constant et inverse des résistances dans les deux milieux. Ainsi Leibnitz pensoit comme Fermat, en supposant plus de résistance dans le milieu dense, mais il s'en écartoit, en ce que, par un raisonnement qui paroîtroit sûrement aujourd'hui plus spécieux que solide, il prétendoit prouver que la lumière se mouvoit avec plus de rapidité dans le milieu dense que dans le milieu rare. C'est aussi le sentiment de Newton, et il est établi sur les lois de l'attraction comme on l'a vu page 534. Mais si l'on entreprenoit de chercher d'après ce principe le chemin de la lumière à travers deux milieux de différente densité, et qu'on prît pour ce chemin celui qui seroit le plus prompt, on trouveroit précisément le contraire de ce qui a lieu dans la nature; le rayon

devroît s'approcher de la perpendiculaire dans le milieu le plus rare, et s'en éloigner dans le plus dense.

Telles étoient les contradictions qu'on éprouvoit dans l'explication de la loi de la réfraction, en y faisant entrer les causes finales. Mais la loi de la moindre action les concilie, et fait voir comment en supposant que la vitesse est la plus grande dans le milieu le plus dense, la réfraction doit s'y faire en s'approchant de la perpendiculaire. La quantité d'action, la dépense en quelque sorte que fait la nature dans le mouvement d'un corps est le produit de la masse par la vitesse avec laquelle il se meut, et par l'espace qu'il parcourt dans un temps déterminé. Car lorsqu'un corps est transporté d'un lieu dans un autre, l'action employée à ce transport est d'autant plus grande que la masse est plus grosse, que la vitesse est plus grande, et que l'espace est plus long. Nous ne dissimulerons pas ailleurs quelques difficultés que présente cette évaluation; mais ce n'est pas ici lieu de les examiner.

Pour faire voir la généralité de ce principe dans le choc des corps, supposons d'abord deux corps absolument durs ou sans ressort A, et B, dont les masses soient exprimées par les mêmes lettres. Que A qui suit B ait la vitesse a , et B la vitesse b qui doit être moindre que a , puisque A est supposé atteindre et choquer B. On demande quelle sera leur vitesse commune après le choc. Pour cela, que ce soit x , et puisque A doit être retardé et B accéléré, il s'ensuit que le corps A aura perdu de sa vitesse une quantité $a - x$, et B y aura acquis une portion égale à $x - b$. Le changement opéré par le choc dans le mouvement de ces deux corps consiste donc en ce que dans le corps A, il a été produit une vitesse en sens contraire de son mouvement égale à $a - x$, et dans le corps B une vitesse dans le même sens que le sien égale à $x - b$. Ce qui est la même chose à l'égard du corps A, que si se mouvant sur un plan immatériel avec la vitesse a , ce plan eût été porté en arrière avec une vitesse égale à $a - x$; car alors en vertu de ce double mouvement, il se mouvroit dans l'espace absolu avec la vitesse

x ; puisque $a - a - x = x$. La vitesse engendrée dans le corps étant donc $a - x$, et l'espace étant aussi $a - x$, puisque dans le mouvement uniforme les espaces sont comme les vitesses, il s'ensuit que la quantité d'action employée à produire ce mouvement dans le corps A sera exprimée par $A \times \overline{a - x}^2$, et pour une semblable raison l'action employée à produire le nouveau mouvement du corps B sera $B \times \overline{x - b}^2$, et la somme de ces actions $A \times \overline{a - x}^2 + B \times \overline{x - b}^2$, sera un *minimum*, d'où

résulte en y appliquant la règle de *minimis et maximis*, que $x = \frac{Aa + Bb}{A + B}$, comme on le trouve par la voie directe et d'après d'autres principes

Si les deux corps eussent eu des directions opposées, l'un venant au devant de l'autre, on trouveroit par une semblable analyse $x = \frac{Aa - Bb}{A + B}$.

Le mouvement des corps élastiques, après le choc, se déduit facilement aussi du même principe; car les mêmes suppositions que ci-dessus étant faites, que x et y soient les deux vitesses respectives des corps A et B après le choc; on aura pour la vitesse perdue par le corps A, dans le choc, $a - x$, et pour celle que B aura acquise, $y - b$. Ainsi, la quantité d'action employée à ce changement sera $A + a - x^2 + A \times y - b^2$. Cette expression, différenciée en faisant x et y variables, et égalée à zéro, donnera $-Aa dx + A x dx + Bb dy$. Mais on sait de plus que dans le choc des corps élastiques, la vitesse respective après le choc reste la même qu'avant le choc. Ainsi, $a - b = y - x$; d'où il suit que $dy = dx$. Ainsi, au lieu de dy subsistant sa valeur dx , ou au lieu de dx , sa valeur dy dans l'expression précédente, on trouve $x = \frac{Aa - Bb + 2Bb}{A + B}$ et $y = \frac{Bb - Ab + 2Aa}{A + B}$. C'est le même résultat que donne la considération directe de ce qui se passe dans le choc de deux corps élastiques, et l'application du principe des forces vives.

Appliquons enfin ce même principe à la recherche de la loi de la réfraction, en supposant que la vitesse, dans le milieu le plus dense, est plus grande que dans le milieu rare. Pour cela que A, (*fig. 32*) soit le point d'où part le rayon de lumière, et B celui où il doit arriver pour que la quantité d'action employée pour opérer ce trajet soit la moindre possible; m exprimera la vitesse avec laquelle la lumière se meut dans le premier milieu et n celle avec laquelle elle peut se mouvoir dans le second. AF, BE sont les perpendiculaires à la surface ou à la ligne qui sépare les deux milieux. On aura donc $m \times AD + n \times DB$ égal à la quantité d'action, ou $m \times \sqrt{AF^2 + FD^2} + n \times \sqrt{BE^2 + ED^2}$ égal à un *minimum*; ce qui donne $\frac{m \times FD \times dFD}{\sqrt{AF^2 + FD^2}} + \frac{n \times ED \times dED}{\sqrt{BE^2 + ED^2}} = 0$. Or FE étant constant, on a $dFD = -dED$, ce qui donne cette équation $\frac{mFD}{AD} = \frac{nED}{DB}$ ou $\frac{FD}{AD} : \frac{ED}{DB} :: n : m$. Or $\frac{FD}{AD}$ est le sinus de l'angle d'inclinaison $\angle DAF$, et $\frac{ED}{DB}$ celui de l'angle rompu $\angle EDB$; ainsi

l'on voit que ces sinus doivent être en raison inverse des vitesses avec lesquelles la lumière se meut dans l'un et l'autre milieu.

Maupertuis entre dans d'autres détails relatifs à cette loi, et dit que si quelque chose prouve l'existence d'un être souverainement puissant et intelligent, c'est surtout la considération des lois de la nature.

Il y a une autre loi générale découverte par Maupertuis, et qui est relative au repos ou à l'équilibre, elle entra dans la querelle dont nous avons à parler, et Maupertuis l'avoit donnée dans les *Mémoires de l'Académie* de 1740.

Maupertuis étoit tranquillement en possession d'avoir découvert un principe plus général que les autres, et qui les lioit tous, pour ainsi dire, lorsqu'il y fut troublé par Kœnig, professeur de mathématiques à la Haye, ancien ami et commensal de Maupertuis, qui inséra dans les actes de Léipzig, de 1751, un écrit dans lequel il attaquoit le principe, et prétendoit en montrer la fausseté. Il y disoit de plus qu'il avoit été connu de Leibnitz, et citoit à l'appui de son assertion un fragment de lettre écrite à Herman en 1707, où il étoit dit : « La force est donc » comme le produit de la masse par le quarré de la vitesse, et » le temps n'y fait rien, comme la démonstration dont vous » voulez faire usage, le montre clairement; mais l'action n'est » point ce que vous pensez, la considération du temps y entre, » comme le produit de la masse par l'espace et la vitesse, ou » du temps par la force vive. J'ai remarqué que dans les modifications de mouvemens, elle devient ordinairement un *maximum* ou *minimum*. On en peut déduire plusieurs propositions » de grande conséquence; elle pourroit servir à déterminer les » courbes que décrivent les corps attirés à un ou plusieurs centres. » Je voulois traiter de ces choses dans la seconde partie de ma » Dynamique, que j'ai supprimée, le mauvais accueil que le » préjugé a fait à la première m'ayant dégoûté, etc ».

Il étoit difficile que Maupertuis demeurât insensible à une pareille imputation, plus odieuse à certains égards que celle qui lui étoit faite en même-temps, savoir de s'être trompé. C'est pourquoi il invita Kœnig à déclarer s'il possédoit l'original de cette lettre, ou bien à faire connoître où il étoit. Kœnig répondit qu'il n'en avoit qu'un copie, ainsi que de quelques autres qu'il tenoit de M. Henzy, homme studieux, et qui avoit ramassé beaucoup de papiers et d'anecdotes de Leibnitz; ce Henzy, de Berne, avoit tenté d'y changer le gouvernement, et avoit eu la tête tranchée quelques années auparavant. Comme les papiers d'un criminel d'état sont toujours gardés avec soin, Maupertuis fit demander par le roi de Prusse aux magistrats de Berne de faire,

faire, dans les papiers d'Henzy, les recherches nécessaires pour y trouver les originaux de ces lettres de Leibnitz, s'il en existoit. On fit en même-temps des recherches auprès des héritiers d'Herman qui pouvoient les avoir conservées ; mais on ne trouva rien ni dans un endroit ni dans l'autre. Je remarquerai ici que, dans le cours de la querelle, qui eut lieu sur ce sujet, M. Kœnig communiqua les copies de quatre lettres qui paroissent bien du style de Leibnitz, dans l'une desquelles est le passage cité plus haut.

Il est, dans cette trop fameuse querelle, deux points qui méritent d'être présentés à part. L'un est, en quelque sorte, la question de fait : Kœnig doit-il être censé en avoir voulu imposer, en attribuant à Leibnitz ce principe de la moindre action ? L'autre la question de droit : ce principe est-il faux ou de nulle valeur, comme Kœnig tenta de le montrer dans l'écrit qu'il publia d'abord dans les actes de Léipzig, et dans divers écrits postérieurs, où, quel qu'il soit, il l'attribue à d'autres ?

Quant au premier point, il paroît que trop de sensibilité entraîna Maupertuis à mettre dans cette affaire autant de chaleur, et à demander à l'Académie de Berlin de s'ériger en une sorte de tribunal pour juger de l'authenticité du fragment en question et de la lettre alléguée par Kœnig, en les déclarant supposées. Kœnig a d'ailleurs justifié depuis qu'il étoit en commerce de lettres avec Henzy, par des pièces reconnues comme étant de sa main. D'ailleurs, il semble que loin de vouloir ravir à Maupertuis la gloire de la découverte en question, pour en revêtir Leibnitz, il la combattoit au contraire. La lettre enfin dont il s'agit avoit toujours resté cachée ; c'en étoit assez, ce semble, pour laisser au public le soin de juger quelle croyance méritoit l'allégation de Kœnig, et pour se borner à dire que, de ce qu'un homme a eu l'aperçu d'une vérité qui n'a jamais été publiée, ce n'est point une raison de priver celui qui la découvre de son côté, et qui l'établit, de la gloire qu'il mérite.

Les découvertes de Copernic et de Newton avoient été entrevues ; personne cependant ne leur refuse l'honneur de la découverte de ces grandes vérités. Je ne sais même s'il en est quelqu'une un peu capitale dont quelque homme n'ait saisi quelqu'étincelle, jusqu'à qu'un esprit supérieur les rassemblant, en ait tiré une découverte complète.

Kœnig blessé par le jugement de l'Académie, ne garda plus de mesures ; il renvoya son diplôme d'académicien, et publia un écrit sous le titre d'*Appel au public du jugement de l'Académie royale de Berlin, sur un fragment de lettre de Leibnitz* (1752), à la suite duquel on trouve les quatre lettres de Leibnitz, ou

données comme telles, dont l'une est celle à Herman, qui contient le fragment en question.

L'appel au public fut bientôt suivi d'une nouvelle pièce intitulée : *Défense de l'appel au public, ou réponse aux lettres concernant le jugement de l'Académie de Berlin, adressées à M. de Maupertuis* (1753). Je passe légèrement sur une multitude d'autres pièces, la plupart plus méchantes que solides et raisonnables, dont les ennemis de Maupertuis inondèrent les journaux d'Allemagne. Tout le monde connoît d'ailleurs la piquante diatribe du docteur Akakia ; la part que le roi de Prusse prit lui-même à la querelle par un écrit de sa main, et le départ de Voltaire, qui quitta Berlin en 1752 (1).

Il seroit à souhaiter, pour l'honneur de l'humanité, qu'on pût passer l'éponge sur ces abus de la sensibilité et de l'esprit. Au surplus, si, par quelques idées singulières, Maupertuis donnoit lieu aux cruelles plaisanteries de Voltaire ; nous pensons qu'un homme de beaucoup d'esprit eût pu rendre la pareille à Voltaire lui-même. Car, quelle ignorance de géométrie en quelques endroits de sa *Philosophie de Newton* ? Il en est un qui prouve que cet homme célèbre regardoit un angle comme d'autant plus grand que ses côtés sont prolongés. Quel tissu de mauvais raisonnemens, quelle ignorance des faits dans ses *Singularités de la Nature*, et quelle idée absurde d'attribuer les coquillages trouvés même sur les Alpes aux Pèlerins de Lorette qui les y ont déposés ? Quelle matière-là et ailleurs, à faire rire le public, pour quelqu'un qui eût eu l'art de manier les armes de la plaisanterie, même dans un degré fort inférieur à Voltaire ?

Ce n'étoit pas seulement dans le fragment cité de Léibnitz, que Kœnig trouvoit le principe de Maupertuis, il voulut aussi qu'il fût suffisamment enseigné par Malebranche, par Wolf, par s'Gravesande et par Engelhart, physicien et mathématicien de la Haye. Malebranche dont, dit-il, le président de l'Académie de Berlin a sûrement lu les écrits, puisqu'il le cite, a avancé expressément (1), que *Dieu agit toujours dans l'ordre et par les voies les plus simples*, ce qu'il explique ensuite par l'exemple du mouvement d'un corps A qui va frapper B par la ligne droite qui est la plus courte ; car, dit plus loin ce métaphysicien, il faut plus d'action pour transporter ce corps A vers B, par une ligne courbe, que par une droite, &c.

Mais qui jamais a contesté qu'avant Maupertuis plusieurs philo-

(1) La brouillerie de Voltaire et de Maupertuis vient de ce que le premier demandoit pour l'abbé Raynal des lettres d'académicien, et que l'autre ne vouloit point s'y prêter. Voltaire les obtint du roi malgré Maupertuis. (2) *Recherche de la vérité. Eclaircissemens*, p. 191, éd. de Genève, 1691.

sophes avoient senti cette vérité, que la divinité agit dans l'exécution de ses vues *par les voies les plus simples*? Mais il s'agissoit de savoir en quoi consistoit ce moyen le plus simple, ou ce *minimum* d'action que l'auteur de la nature emploie dans la production du mouvement et de ses différentes modifications; et c'est ce que Malebranche étoit bien loin de soupçonner.

Wolf, ajoute Kœnig, s'est expliqué bien plus clairement dans un mémoire de ce philosophe, inséré parmi ceux de l'Académie de Pétersbourg, tom. I; on y trouve en effet cette conséquence qui termine la proposition XIII, que les actions sont en raison composée des masses M et m , des vitesses C et c , et des espèces S et s ; d'où il conclut encore, dans le corollaire suivant, que les actions, dans le même temps où les forces sont en raison composées de masses et des quarrés de vitesses.

A ne prendre que les mots, M. de Maupertuis paroîtroit ici condamné sans appel. Mais chez Wolf, le mot d'action ne signifie point la même chose que chez M. de Maupertuis; chez le philosophe Léibnitzien, c'est l'énergie d'un corps mis en mouvement pour produire un effet quelconque, et s'il trouve cette évaluation de l'action ou de l'énergie du corps en mouvement, c'est qu'il emploie des prémices dont on peut bien lui nier quelques-unes, et en particulier, celle où voulant prouver que l'action d'un corps se mouvant librement, et sans résistance, est proportionnelle à l'espace parcouru, il la compare à celle d'un homme qui l'auroit transporté dans cet espace. Il y a, ce me semble, une grande disparité; car le corps mis en mouvement, doit, par sa nature et sans effort nouveau, se mouvoir sans cesse et uniformément; cet état est pour lui aussi naturel que celui du repos, tandis que l'homme transportant le long d'un espace un corps quelconque, le sien, par exemple, est obligé à chaque instant de renouveler son action.

Mais quoiqu'il en soit de cette dénomination de Wolf et de Léibnitz, il n'y a, dans cet écrit, aucune trace de *maximum* ou *minimum* de cette action dans les modifications du mouvement, et c'est-là ce qui caractérise le principe de Maupertuis.

Quant à sGravesande, voici ce qu'il dit dans un petit écrit imprimé en 1726, sous le titre d'*Essai sur le choc des corps*. La vitesse respective de deux corps étant donnée, la somme de leurs forces est la moindre possible, leurs directions sont contraires, et leurs vitesses absolues en raison réciproque de leurs masses; ou ce qui revient au même, lorsque deux corps dont les vitesses absolues sont réciproques à leurs masses se choquent, la somme de leurs forces est la moindre possible, ou la somme des produits de leurs masses par les quarrés de leurs vitesses, est la moindre possible, après le choc. Cela est évident pour les corps

qui ne sont point doués d'élasticité ; car s'ils ont des directions contraires, ils seront réduits au repos dans le cas énoncé par 'sGravesande, et s'ils ont même direction, l'on trouve effectivement que, dans le même cas, la somme des forces après le choc est encore la moindre possible. Quant aux corps élastiques, la somme des forces étant la même avant et après le choc, il n'y a nul lieu à la proposition ; mais on peut demander quel rapport cela a avec la proposition Maupertuis ; que, dans tous les cas, soit que les vitesses soient en raison réciproque des masses, soit que cela n'ait pas lieu, la quantité d'action employée, ou si l'on veut de force consumée à opérer le changement, est la moindre qu'il se puisse. Il est difficile de ne pas voir dans Kœnig un homme emporté par la passion.

Engelhard, dit encore Kœnig, m'a écrit qu'il a enseigné, dès 1732, la prétendue *loi de l'épargne* sous le nom de *la moindre somme de forces absolues*. Mais qu'est-ce que M. Engelhard a entendu par-là ? Il paroît seulement que c'est à-peu-près la même chose que ce qu'enseignoit 'sGravesande ; car M. Kœnig les associe dans la même idée. Or, on vient de voir qu'il n'y a nulle affinité entre cette moindre somme de forces trouvées dans certains cas par 'sGravesande et la moindre quantité d'action de Maupertuis.

Quant au fond de la question, Kœnig prétendoit démontrer que la loi étoit absolument fausse, et qu'il falloit lui en substituer une autre d'après laquelle il entreprenoit de résoudre divers problèmes épineux de dynamique.

Euler, qui par intérêt, autant que par attachement, étoit aux ordres de son illustre président (comme il l'appelle), donna, dans les *Mémoires de Berlin* pour 1751 (tom. VII, 1753), deux grands mémoires, pour prouver que la lettre de Leibnitz ne pouvoit exister, que Maupertuis étoit le premier qui eût trouvé le principe, qu'on en déduisoit toute la mécanique ; que le principe de Kœnig, par la nullité de la force vive, se réduisoit à rien ; il le persifle à toute outrance, et prouve qu'il s'étoit *honteusement* trompé.

Il parut aussi un volume in-4°. intitulé : *Mémoires pour servir à l'histoire du jugement de l'Académie* ; on y établit, par un grand nombre de raisonnemens, que le fragment de Leibnitz, allégué par Kœnig, n'existoit pas, et qu'il faudroit, pour le faire valoir, des démonstrations invincibles et des pièces dont l'authenticité ne souffrît aucune difficulté.

La loi de l'épargne de Maupertuis a eu encore deux adversaires ; l'un est le chevalier d'Arcy, de l'Académie des sciences ; l'autre M. Martens, mathématicien hollandais. Le premier l'attaqua en 1752, dans un mémoire inséré parmi ceux de l'Aca-

démie pour 1749; l'autre dans un écrit hollandois et françois intitulé: *Remarques sur la loi de l'épargne, qui fait à présent tant de bruit, &c.* Amst. 1752, in-4°.

Suivant d'Arcy, Maupertuis avoit eu tort de qualifier du nom d'action le produit de la masse par la vitesse et l'espace, et il étoit faux que cette acception admise, la quantité d'action fût un *minimum* dans les modifications du mouvement; enfin, il trouve que quelques fussent les lois de la nature, il seroit aisé de trouver une fonction des vitesses et des masses, qui étant un *minimum*, donneroit ces lois, mais que cela ne suffisoit pas pour donner le nom d'action à cette fonction. D'Arcy y substitue un principe général qui paroît n'être sujet à aucune objection.

Aussitôt que cette attaque du principe de la moindre action eut paru, Maupertuis y opposa une réponse courte et honnête (1), comme l'avoit été la critique de son adversaire. Cette critique fut réfutée plus au long par M. *Bertrand*, dans les *Mémoires* de Berlin pour 1753. Quand on a lu ces réponses, on ne peut guères s'empêcher de reconnoître de la précipitation dans l'attaque de d'Arcy. En effet, admettant pour un moment que l'action dût être proportionnelle au produit de la masse par la vitesse et l'espace, il cherchoit quelle étoit la quantité d'action de deux corps durs ou sans ressort, avant le choc, et ensuite la même quantité après le choc, il prenoit ensuite leur différence, qui, suivant lui, devoit être un *minimum*; et y appliquant la règle de *minimis et maximis*, il trouvoit un résultat absolument contraire à l'observation: donc, disoit-il, le principe de Maupertuis est erroné.

Il étoit bien facile de répondre à une pareille objection; car Maupertuis n'a jamais dit que le changement d'action des deux corps dont il s'agit fût lui-même un *minimum*: c'est la quantité d'action nécessaire pour produire ce changement, qui est la moindre possible, et cette quantité n'est point celle qui résultoit du procédé de M. d'Arcy.

Il nous paroît superflu d'examiner d'autres prétentions de M. d'Arcy, parce qu'elles nous paroissent aussi peu fondées et aussi solidement repoussées, dans les deux mémoires cités ci-dessus. Mais au sujet du principe du chevalier d'Arcy, il faut voir les *Mémoires* de l'Académie 1747, 1749, 1752, et ce que le cit. de la Grange a ajouté dans le second volume des *Mémoires* de Turin 1761, p. 213. On peut y en joindre un de Beguelin (*Mém.* 1751), qui a deux objets; l'un d'examiner si la loi de continuité est aussi nécessaire que le prétendent les léibnitziens et d'autres philosophes; et s'il peut exister dans la nature des

(1) *Mém. de Berlin*, ann. 1751.

corps absolument durs ; l'autre , de faire voir en quoi et comment le principe de Maupertuis est plus général que celui de la conservation des forces vives , appliqué soit au choc des corps , soit à la détermination des lois du repos et de l'équilibre. Quant au premier point , Beguelin ne regarde point ce fameux principe léibnitzien comme bien solidement fondé , ni sur des raisons physiques , ni sur des raisons métaphysiques. Bien loin de-là , il élève contre ce principe des difficultés qui le rendent au moins fort douteux. Au surplus , il nous semble qu'en supprimant même de la nature les corps absolument durs , le principe de Maupertuis n'en recevrait pas d'atteinte ; car il est au moins des corps sans élasticité , et tout ce que dit Maupertuis , des corps absolument durs , s'applique à ceux-là.

Quant aux *Remarques* de M. Martens , dont nous avons parlé plus haut , il m'a semblé qu'elles sont fort indifférentes au principe de M. de Maupertuis ; car ne contestant point ses calculs , il se borne presque à le chicaner sur le nom qu'il donne à sa loi de *principe* de la nature. Il est enfin difficile de voir quel est l'objet de M. Martens , et quelle est la conséquence qu'il entend tirer de son examen.

Quoi qu'il en soit , le principe de la moindre action ne méritoit pas , ce me semble , toute l'importance qu'on y a mise et tout le temps qu'on y a employé , c'étoit plus une affaire d'amour-propre , qu'une affaire de mathématiques ; mais l'*amour-propre offensé ne pardonne jamais*.

V I I.

Du problème des Tautochrones dans un milieu résistant.

Parmi le problèmes qui ont le plus occupé les géomètres , et qui ont exigé de plus grandes ressources d'analyse , est celui qu'on appelle des tautochrones , ou des courbes dont un corps parcourt les arcs dans le même temps. La cycloïde est celle qui a lieu dans le vide , comme nous l'avons , dit tom. I, p. 72 , 415 , et c'est une des découvertes d'Huygens. Mais lorsqu'on fait entrer dans le problème la considération de la résistance du milieu , cela rend le problème un des plus difficiles de la mécanique transcendante.

Il est si naturel aux géomètres de chercher à généraliser les questions , qu'il ne pouvoit leur échapper de rechercher quelle seroit la courbe tautochrone , dans le cas où les directions des graves , tendroient vers un même point ; car Huygens , de même que Galilée et Archimède ont supposé , à cause de l'éloignement

infini du centre de la terre, que ces directions sont parallèles, et que la force de la gravité est constamment la même; mais cette hypothèse n'est pas conforme au véritable état des choses. D'ailleurs le problème envisagé sous cette nouvelle condition des directions convergentes et d'une pesanteur variable, présente un nouveau degré de difficulté, et l'on voit que Newton et Herman dans sa *Phoronomia*, L. 1, c. 3, s'étoient proposés la question, en la limitant néanmoins au cas où la pesanteur seroit comme la distance au centre. Ils démontrent que, dans ce cas, la courbe tautochrone sera une épicycloïde, décrite par le roulement intérieur d'un cercle sur la circonférence d'un autre ayant pour centre le point de tendance de la gravité; épicycloïde qui se change en une cycloïde ordinaire, lorsque ce point de tendance est infiniment éloigné. Il faut remarquer encore que si, dans cette hypothèse de pesanteur, on suppose un corps placé sur un plan passant hors du centre d'attraction, et qu'on le livre à lui-même, il arrivera au point de ce plan le plus voisin du centre dans le même temps, quelque soit le point de départ. Ainsi, la ligne droite est aussi, dans ce cas, douée de la propriété du tautochronisme. Il restoit néanmoins à résoudre le problème pour le cas où les directions de la gravité étant convergentes, la gravité suivroit un rapport quelconque de la distance: mais nous passons aux tautochrones dans un milieu résistant.

Ce cas du problème n'avoit pas entièrement échappé à Newton, mais il ne l'avoit considéré que sous l'aspect le plus simple, je veux dire, en supposant et les directions parallèles et la résistance en raison des vitesses, la tautochrone se trouver alors encore une cycloïde, le mouvement du corps s'y fait seulement un peu autrement que dans le cas d'un milieu non résistant; car, dans ce cas, le corps remonte aussi haut que le point d'où il étoit tombé, au lieu que dans le second il ne remonte pas aussi haut, quoique dans le même temps, et chacune de ses montées étant moindre que la chute précédente, il finit par s'arrêter.

Cette hypothèse de résistance est purement mathématique. La résistance d'un corps mû dans un fluide est bien plutôt en raison du carré de la vitesse, mais au temps de Newton, l'analyse n'avoit pas acquis des forces suffisantes pour résoudre un problème de cette nature.

Ce n'est que vers 1729 et 1730, que les géomètres s'en occupèrent; encore me semble-t-il que Jean Bernoulli et Euler furent les seuls pour qui il fût accessible. On trouve la solution d'Euler dans le 4^e vol. des anciens *Mémoires* de Pétersbourg, et celle de Bernoulli, dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* de 1730, dans le 3^e volume de ses œuvres.

L'analyse conduit Bernoulli à une équation différentielle fort compliquée, qui exprime le temps, et dont l'intégrale, par la nature du problème, doit être égale à une quantité, ou fonction de l'abscisse, qui soit toujours la même, quelle que soit l'abscisse, puisque, de quelque hauteur que tombe le corps, il faut que le temps employé jusqu'au bas de la courbe soit le même. Cela l'engagea à démontrer quelques théorèmes préliminaires sur ce qu'on appelle les fonctions semblables, et il y fit voir que toutes ces fonctions, lorsqu'elles sont ce qu'il appelle de dimensions nulles, sont égales entr'elles. Enfin, par des adresses de calcul, il arrivoit à une équation différentielle entre l'ordonnée et l'abscisse de la courbe qu'il construisoit au moyen des quadratures.

Nous remarquerons d'abord qu'il n'en est pas ici comme pour la tautochrone dans le vide ou les deux branches de la descente et de la montée sont semblables et égales; car l'on sent aisément que le corps arrivé au plus bas de la courbe avec une vitesse moindre que celle qu'il auroit eue sans la résistance du milieu, et devant de plus rencontrer, en remontant, une double cause de retardement, celle de la pesanteur et celle de la résistance du milieu dans le même temps, doit remonter à une hauteur moindre, et rouler le long d'une courbe de forme différente.

En second lieu, le point de la plus grande vitesse acquise en tombant, n'est pas le point le plus bas de la courbe. Le corps a acquis cette plus grande vitesse avant que d'arriver au plus bas: c'est ce que démontroit Bernoulli. Il fit voir enfin, que si l'on suppose la résistance nulle, la courbe en question devient la cycloïde ordinaire.

Euler suivit une route un peu différente et également digne d'un analyste tel que lui. Aussi arriva-t-il à des résultats semblables. Mais nous ne pouvons développer ici les moyens analytiques qu'il employa. Nous ne parlerons que de quelques considérations sur les tautochrones dans le vide qu'on trouve dans le même volume.

Dans l'acception ordinaire de la tautochrone, on demande que le temps de la descente du corps par une des branches de la courbe, soit égal à celui de la montée et ensuite celui de la descente subséquente égal au dernier et à celui de la montée dans la première branche, et ainsi toujours jusqu'à la fin du mouvement qui, mathématiquement parlant, devroit ne s'anéantir jamais. Euler étend cette idée du tautochronisme, en cherchant quelles courbes auroient la propriété de faire que les temps de la descente et de la montée, réunis ensemble, fussent toujours les mêmes. Une pareille courbe auroit les mêmes avantages que la cycloïde pour la juste division du temps, puisque l'oscillation
entière,

entière, composée d'une descente et d'une montée, seroit toujours de la même durée, quoique la demi-oscillation ne fût pas égale à la suivante. Une courbe même étant donnée pour celle de la descente, on peut trouver celle qu'il faudroit pour remplir cette condition. Enfin, ce qui est remarquable, cette courbe ou ces courbes, peuvent devenir, dans quelques cas, purement algébriques; tandis que toutes les autres tautochrones sont transcendantes.

Le mémoire de Bernoulli, sur ce sujet, fit sensation parmi les géomètres, et donna à ce problème une grande célébrité. Fontaine qui venoit d'entrer à l'Académie, en donna, en 1733, une solution. Voyez les *Mémoires* de 1734 et 1768. Il dit à ce sujet que ce problème avoit tourné les esprits de ce côté-là, qu'on ne parloit que du problème des tautochrones, qu'il en donna une solution, et qu'alors on n'en parla plus. (*Mémoires* publiés en 1764: p. 3).

Il est vrai que la solution de Fontaine a sur les précédentes quelques avantages, en ce que les solutions exigeant qu'on ait l'expression de la vitesse, ne sont applicables qu'aux cas où l'équation différentielle de cette vitesse est intégrable. C'est pourquoi Bernoulli et Euler ne traitèrent ce problème que dans le cas d'une résistance proportionnelle au quarré de la vitesse. Euler reconnoît lui-même, à la fin de sa solution de 1729, que l'analyse étoit, par cette raison, en défaut pour une solution plus générale du problème. Mais Fontaine sut trouver une méthode indépendante de cette intégration, à quoi il parvint au moyen d'un calcul particulier, qui consiste à faire varier les quantités de deux manières différentes; méthode qui a quelque rapport à celle par laquelle on est parvenu à résoudre divers problèmes très-difficiles sur les trajectoires. Il appliqua sa méthode à la solution du problème dans diverses hypothèses, comme celles d'une résistance proportionnelle à la vitesse, ou à son quarré, ou à une fonction formée de la vitesse et du quarré.

La solution de Fontaine parut en effet aux géomètres si satisfaisante qu'Euler en faisant l'éloge, l'étendit encore en 1764, dans le 10^e volume des nouveaux *Mémoires* de Pétersbourg.

La Grange en fit ensuite l'objet d'un mémoire lu à l'Académie de Berlin en 1767, et inséré dans le volume de ses *mémoires* pour 1765. Il y envisagea la question des tautochrones sous un point de vue un peu différent, et parvint à une formule générale et fort simple, qui donne l'expression de la force nécessaire pour produire le tautochronisme, et qui a l'avantage de renfermer tous les cas déjà résolus et une infinité d'autres où l'on doutoit que le problème pût se résoudre.

Fontaine ne voulut pas, ce semble, après ce qu'il avoit dit de

sa solution de 1734, rester, pour ainsi dire, en arrière; et donna, en 1768, à l'Académie des Sciences un nouveau mémoire sur ce sujet, où il présenta une nouvelle solution. Mais comme il parloit en termes peu favorables de celle de la Grange, celui-ci présenta, en 1770, de nouvelles considérations sur ce problème, et même traita un peu sévèrement la nouvelle méthode de Fontaine.

Il eût été difficile que d'Alembert n'eût pas pris quelque part à un problème si piquant par sa difficulté. Aussi voyons-nous qu'il donna la même année, et seulement quelques mois après le cit. de la Grange, un mémoire sur ce sujet : celui-ci ayant fait part à d'Alembert de ses nouvelles idées sur le problème, cela réveilla chez celui-ci, celles dont il s'étoit occupé il y avoit déjà du temps, et par une analyse d'une extrême profondeur, il parvint à une formule d'une très-grande généralité qui donne la solution du problème, pour le cas où il s'agiroit de faire les temps comme une fonction quelconque de l'arc ; ce qui renferme le tautochronisme même comme un simple cas du problème.

Il y a encore une espèce de tautochronisme proposé par le cit. Necker, de Genève, frère du célèbre ministre des finances. Il cherche quelle seroit la courbe tautochrone dans le cas où la résistance proviendrait seulement du frottement. On sent d'abord que ce frottement a une relation à la pression, et que cette pression est un effet de la force centrifuge, produite par le mouvement du corps dans la courbe, dont l'expression dépend de la vitesse ; en employant ces élémens et faisant le frottement en raison de la pression, le cit. Necker parvient à l'équation différentielle de la courbe, qui se trouve encore une cycloïde renversée, de dimension seulement un peu différente de celle du tautochronisme simple. Il examine ensuite et résoud le problème, en supposant indépendamment de la résistance du frottement, celle du milieu en raison doublée de la vitesse, et même selon une fonction quelconque de la vitesse, pourvu que cette résistance soit fort petite.

Enfin, il cherche la courbe où le corps se mouvroit uniformément dans l'hypothèse adoptée du frottement, et il trouve que ce seroit une ligne droite, ou un simple plan incliné.

Euler a traité le sujet du tautochronisme, dans sa mécanique, avec toute l'étendue, la profondeur et les développemens que ce grand géomètre mettoit toujours dans ses ouvrages.

VIII.

Du problème des Cordes vibrantes.

L'objet dont nous allons parler est peut-être de tous ceux que la mécanique a considérés, le plus difficile, et celui qui a exigé le plus d'efforts d'analyse, et en même-temps le plus d'adresse. Aussi a-t-il exercé les quatre plus grands géomètres de l'Europe, et a-t-il contribué à reculer considérablement les bornes de l'analyse.

Les anciens avoient bien reconnu que le son d'une corde pincée est excité par les vibrations de cette corde; mais ce n'est que vers le commencement du dix-huitième siècle que l'on a eu l'idée de scruter la nature de ce mouvement et sa vitesse, comme aussi de déterminer la nature de la courbe dans laquelle se meut une corde vibrante. Ce problème de dynamique a été proposé et résolu pour la première fois par M. Taylor, géomètre anglois, dans son livre intitulé : *Methodus incrementorum directa et inversa*, qu'il publia en 1716.

Taylor commence par établir deux vérités préliminaires, l'une que si l'on a entre deux points fixes A B, (*fig. 33.*) deux courbes infiniment peu distantes de la ligne droite, et ayant leurs ordonnées C D, C d dans une raison donnée, leur courbure en D et d sera comme les ordonnées C D, C d. L'autre, que dans une corde tendue et peu différente de la ligne droite, la force accélératrice de chaque particule ou increment de la courbe, est comme la courbure en ce point, ou réciproquement comme son rayon osculateur en ce même point.

Supposons donc la corde tendue entre les points A et B par un poids donné. Qu'on la suppose écartée de la ligne droite d'une quantité infiniment petite, et selon une courbe dont les ordonnées répondantes à une même abscisse, comme C D, C d soient en même raison; la force accélératrice en d et qui porte le point d vers l'axe, fera que tous les points de cette corde arriveront en même-temps à l'axe, le dépasseront par leur mouvement accéléré et reviendront ensuite dans le même-temps presque à la position qu'ils avoient d'abord, jusqu'à ce que ce mouvement se détruisant peu à-peu, la corde restera en repos coïncidant avec l'axe A B. Ainsi toutes ces vibrations se feront en allant et venant dans un même-temps, c'est-à-dire qu'elles seront isochrones, ce qui est le propre d'une corde tendue, qui rend le même son; car sans cet isochronisme le son des premières vibrations seroit différent de celui des der-

nières; d'où il suit que telle est la courbure d'une corde mise en vibration. Quant à la nature de cette courbe, on trouve par la méthode inverse des fluxions, et même sans cela, que c'est la courbe appelée la compagne de la cycloïde, qui ne diffère de la cycloïde que parce que dans cette dernière ce sont les prolongations des ordonnées au cercle qui sont égales aux arcs, mais la courbe de la corde vibrante n'est formée que de la partie supérieure de cette courbe, extrêmement allongée.

Cette solution laisse bien quelque chose à désirer; car lorsqu'une corde est frappée et mise en vibration, comment peut-elle prendre la figure dont nous parlons? mais l'expérience paroît répondre à cette difficulté. Car elle nous apprend qu'une corde ainsi frappée après quelques oscillations irrégulières et quelques sons ingrats, ne tarde pas à rendre le son convenable à sa longueur et à sa tension.

C'eût été sans doute dans les commencemens de la mécanique un problème qui eût paru devoir à jamais éluder toutes les forces de l'industrie humaine, que de déterminer le nombre des vibrations que fait une corde d'une grosseur et d'une longueur donnée, et tendue par un poids déterminé. Ce problème toutefois est susceptible de résolution. Taylor l'a aussi résolu, en faisant voir que si l'on nomme la longueur de la corde L , son poids N et le poids tendant P , et que p soit le rapport de la circonférence du cercle au diamètre, ou de 113 à 355; enfin un pendule de la longueur D dont la durée des vibrations est conséquemment connue, le nombre des vibrations de la corde en question

pendant que le pendule en fera une, sera $p \sqrt{\frac{D \cdot P}{L \cdot N}}$. Ainsi faisant $D=3$ pouces 8 lignes, ou 440 lignes, qui est la longueur moyenne du pendule battant les secondes; L égal à 18 pouces, ou 216 lignes, le poids P une livre, et le poids de la corde A de 6 grains, ce qui donnera le rapport de P à N de 1536 à 1. on aura le nombre des vibrations faites dans une seconde par

la corde en question, égal à $\frac{113}{355} \sqrt{\frac{440 \times 1536}{216}} = \frac{113}{355} \sqrt{3129}$, ou enfin $= \frac{113}{355} 56 = 165,9240$. Ainsi la corde dont il s'agit fera dans une seconde 166 vibrations, à très-peu près.

On pourra enfin connoître par ce moyen quel est le nombre de vibrations que fera une corde, rendant un ton quelconque, par exemple le *la-mi-la* de l'Opéra. Car, qu'on prenne une corde de 6 grains de pesanteur, qu'elle soit attachée d'un bout et tendue de l'autre par un poids qu'on augmentera jusqu'à ce qu'elle rende ce ton; l'on aura, au moyen de la formule ci-dessus, le nombre des vibrations de cette corde pendant une seconde.

Ce problème étoit digne d'exciter l'attention de Jean Bernoulli, comme on le voit dans le tome III de ses œuvres, et dans les *Mémoires de Pétersbourg*, t. III. ann. 1728; il l'envisagea d'abord d'une manière particulière. Il supposa un, ou deux, ou un plus grand nombre de petits poids suspendus à des points équidistans d'une corde dénuée de toute grosseur et pesanteur, et tendue par un poids donné, considérable à leur égard, et il rechercha la durée de leurs oscillations, en faisant usage de son principe de la conservation des forces vives; ce qui lui donna des formules pour ces cas particuliers; mais comme il n'en résulroit pas une loi, il analysa le problème d'après les principes purement statiques, et il arriva aux mêmes conclusions que Taylor.

Tel étoit l'état du problème des cordes vibrantes jusques vers 1745. On pensoit alors qu'il y entroit comme une condition nécessaire que tous les points de la corde arrivassent à-la-fois à la ligne droite, et que cette courbe fût une cycloïde comme nous l'avons dit plus haut. Mais d'Alembert examinant ce problème d'après des moyens d'analyse plus généraux et plus relevés, trouva qu'il y avoit une infinité de courbes qui pouvoient résoudre le problème; et il enseigna la manière de les déterminer et de les construire. Il annonça cette extension à la solution du problème des cordes vibrantes, dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin*, de 1747. Euler examina aussi la question, et donna dans le volume de 1748 un mémoire dans lequel il convient que sa méthode est peu différente de celle de d'Alembert, et où il parvient aux mêmes résultats à-peu-près que ce dernier.

Mais la solution d'Euler, quoique fort analogue à celle de d'Alembert y ajoutoit cela de particulier que, suivant Euler, il n'étoit pas nécessaire que les courbes à décrire au-dessus et au-dessous de l'axe prolongé de part et d'autre fussent liées par une équation algébrique continue; ainsi, en supposant que la courbe fût un arc de cercle de 60°, il n'étoit pas nécessaire suivant Euler, de considérer le reste du cercle; mais de décrire simplement des arcs semblables alternativement en-dessus et en-dessous. Ils devoient servir également à trouver par le procédé commun de d'Alembert et d'Euler, la forme de la courbe après un temps quelconque. Euler alloit plus loin, il prétendoit qu'il n'étoit pas même besoin que la courbe fût géométrique, algébrique ou transcendante; sa solution étoit suivant lui également applicable au cas où cette courbe ne seroit même pas explicable par une équation, comme seroit une courbe décrite librement à la main, pourvu qu'elle fût comprise entre les termes A et B, et ne fût pas en ces points des angles droits avec son axe.

D'Alembert attaqua cette prétention dans les *Mémoires de Berlin*, de 1750. Daniel Bernoulli entra aussi dans la lice; et en même-temps qu'il témoignoit la plus grande estime pour la profonde analyse qui avoit guidé Euler et d'Alembert, prétendit néanmoins contre l'un et l'autre que cette analyse abstraite n'avoit pu les conduire sûrement à leur but; ayant toujours pensé, dit-il, que la courbe de la corde vibrante est toujours une trochoïde allongée, ou un composé des pareilles trochoïdes, quelques figures initiales que l'on ait données à la corde.

Euler ne tarda pas de répondre à Bernoulli, et par occasion à d'Alembert. Sa réponse est à la suite des écrits dont nous venons de parler. Il y développe et met dans un nouveau jour son analyse, et persiste à prétendre contre le premier que les trochoïdes tayloriennes ne sont pas les seules admissibles dans la solution du problème en question; ce qui est chez lui une suite de son analyse; il répondoit au second que c'étoit à tort qu'il prétendoit donner l'exclusion aux courbes discontinues qu'Euler avoit introduites dans sa solution, qui n'est sujette à aucune limitation fondée sur la continuité ou discontinuité des courbes en question. Que cette introduction des fonctions discontinues dans l'analyse transcendante étoit un nouveau moyen de recherches, non-seulement admissible, mais nécessaire dans une multitude de problèmes physico-mathématiques; c'est ce dont les géomètres conviennent actuellement comme on le verra à la fin de cet article.

On ne peut s'empêcher de reconnoître dans ces observations de Daniel Bernoulli toute la sagacité qui caractérise ses autres productions, et c'est un aveu que faisoit Euler dans la réponse qu'il lui opposa, et qu'on lit immédiatement après, dans les *Mémoires de Berlin*, de 1753. Euler n'y conteste point la formation des diverses courbes que Bernoulli déduit de la théorie taylorienne; mais en les admettant, il persiste dans la prétention qu'elles ne sont pas les seules qu'on doive y admettre. Il reprend à cet effet sa solution de 1748, en la développant davantage, et s'attache surtout à faire voir qu'on peut prendre pour courbe initiale, telle courbe qu'on voudra, et à déterminer la construction de la courbe que prendra la corde livrée à elle-même et après un temps donné. Il ne me paroît pas qu'il soit possible de se refuser à cette analyse, et sans doute s'il y avoit eu quelque exception à y opposer, elle n'auroit pas échappé à Bernoulli que je ne sache pas y avoir rien opposé postérieurement, quoique dans des mémoires insérés dans la suite parmi ceux de Pétersbourg, il ne paroisse pas avoir changé de sentiment. Ne pourroit-on pas dire d'un autre côté qu'Euler s'en tenant toujours dans les termes généraux d'une analyse abs-

traite, négligea trop de descendre à des exemples propres à prouver son sentiment. Il n'établit pas sa prétention d'une manière à forcer absolument la persuasion; il eût peut-être dû développer quelques cas de sa théorie, tel que celui-ci qui est le plus commun dans la pratique des instrumens à corde; je veux dire celui, où la corde tirée de son repos par un de ses points forme deux lignes droites entre ses arrêts, et est livrée à elle-même; ce cas est celui d'une courbe algébrique, mais qui seroit discontinue avec ses adjacentes semblables tracées suivant le procédé de la solution. La corde dans ce cas et dans tous les cas semblables, où elle est brusquement frappée dans un de ses points, prend, sinon tout-à-coup, du moins fort promptement des vibrations régulières, et donne le son qui convient à sa longueur, à sa grosseur et à sa tension. Ne devoit-on pas s'attendre à voir ce cas analysé? mais il faut en convenir, on ne voit que trop souvent les plus grands géomètres dédaigner de descendre du faite de leurs spéculations à des exemples simples et sensibles.

Il y avoit bien peu d'hommes capables de juger un pareil différent. Clairaut auroit pu donner un avis et départager les contendans, s'il n'eût pas été entièrement livré à ses recherches sur la théorie de la lune. Mais il se formoit alors dans le silence un géomètre qui parut en 1759, comme un phénomène inattendu, et qui, pendant vingt-huit ans, a continué d'enrichir la géométrie. C'est le cit. Joseph-Louis de la Grange, né à Turin, le 25 janvier 1736. Il y forma avec Saluce et Cigna une académie, et en 1759, ils publièrent le premier volume de leurs *Miscellanea*, dont le premier article est un savant mémoire de la Grange sur les cordes vibrantes. Il observe d'abord que la construction d'Euler est beaucoup plus générale que celle que d'Alembert avoit imaginée, celui-ci ayant toujours supposé que la génératrice fut régulière, et quelle pût être renfermée dans une équation continue. C'est dans cette idée, dit la Grange, que d'Alembert avoit cru qu'une telle construction devenoit insuffisante toutes les fois que dans la courbe génératrice, on n'auroit pas suivi la loi de continuité, et il s'étoit contenté d'en avertir dans une addition à ses mémoires dans le volume de 1750. Euler répondit à cette objection dans le volume de 1753. Euler reprit toute l'analyse du problème, et il soutint contre d'Alembert que pour l'exactitude de la construction donnée, il n'est nullement nécessaire d'avoir égard à la loi de continuité dans la fonction qui dépend de la courbe initiale de la corde. Mais comme d'Alembert n'avoit apporté aucune raison particulière pour appuyer son objection, Euler n'en rapporta aucune, d'où il suit que la question reste encore indécise. D'Alembert

promettoit dans l'édition du *Traité de Dynamique*, de 1758, un écrit assez étendu sur cette matière, mais en attendant, la Grange donna sur cette dispute des réflexions décisives.

Il est certain, dit-il, page 21, que les principes du calcul différentiel et intégral dépendent de la considération des fonctions variables algébriques. Il ne paroît donc pas qu'on puisse donner plus d'étendue aux conclusions tirées de ces principes que n'en comporte la nature même de ces fonctions. Or, personne ne sauroit douter que dans les fonctions algébriques toutes leurs différentes valeurs ne soient liées ensemble par la loi de continuité; c'est pourquoi il semble indubitable que les conséquences qui se déduisent par les règles du calcul différentiel et intégral, seront toujours illégitimes dans tous les cas, où cette loi n'est pas supposée avoir lieu; il s'ensuit de là que puisque la construction d'Euler est déduite immédiatement de l'intégration de l'équation différentielle donnée, cette construction n'est applicable par sa propre nature, qu'aux courbes continues, et qui peuvent être exprimées par une fonction quelconque des variables. La Grange conclut donc que toutes les preuves qu'on peut apporter pour décider une telle question, en supposant d'abord que l'ordonnée de la courbe, soit une fonction telle que l'avoient fait jusqu'alors d'Alembert et Euler sont absolument insuffisantes, et que ce n'est que par un calcul tel que celui qu'il donnoit, dans lequel on considère les mouvemens des points de la corde, chacun en particulier, qu'on peut espérer de parvenir à une conclusion qui soit à l'abri de toute atteinte.

Bernoulli, dans un mémoire imprimé parmi ceux de Berlin de l'année de 1753, prétendoit avoir démontré que la solution de Taylor est seule capable de satisfaire à tous les cas possibles du problème, et il établit cette proposition générale, que quelque puisse être le mouvement d'une corde tendue, elle ne formera que des trochoïdes allongées; ou bien que sa figure sera un mélange de deux, ou plusieurs courbes de cette espèce. Ainsi le dessein de Bernoulli étoit de faire voir que les calculs de d'Alembert et Euler ne nous apprennent rien de plus que ce qu'on pouvoit déduire de ceux de Taylor, et même que ces calculs, quoique extrêmement simples, pouvoient répandre sur la nature des vibrations des cordes une lumière qu'on attendroit envain de l'analyse abstraite et épineuse de ces deux géomètres: mais Euler s'étoit hâté de répondre à ces difficultés; et il objectoit à son tour à Bernoulli, que son équation pour la courbe sonore, quoique continuée à l'infini, ne pouvoit cependant exprimer tous les mouvemens possibles d'une corde tendue, parce qu'il faudroit que l'équation renfermât toutes les figures qu'on peut donner à une corde et toutes les courbes possibles, ce qui

qui paroît n'avoir pas lieu à cause de certaines propriétés qui semblent distinguer les courbes comprises dans cette équation de toutes les autres courbes qu'on pourroit imaginer. Ces propriétés sont les mêmes que d'Alembert exige dans ses courbes génératrices, savoir qu'en augmentant, ou diminuant l'abscisse d'un multiple quelconque de l'axe, la valeur de l'ordonnée ne change point.

En effet, la Grange dit qu'on peut démontrer que toutes les courbes douées de ces propriétés pourront se réduire à l'équation qu'il a donnée; d'où il s'en suit que quoique d'Alembert ait trouvé l'analyse taylorienne insuffisante pour en tirer une résolution générale, néanmoins il paroît être d'accord avec Bernoulli pour le fond, savoir que le problème n'est soluble que dans les cas de la trochoïde, ou du mélange de plusieurs trochoïdes.

On voit par-là que les objections de Bernoulli et d'Alembert contre Euler, quoiqu'elles diffèrent beaucoup les unes des autres, tiennent néanmoins aux mêmes principes. Au reste Bernoulli et Euler n'ont pas cherché directement, si toutes les courbes que peut former une corde tendue sont comprises ou non dans l'équation. Car puisque dans cette équation chaque terme répond, pour ainsi dire, aux mouvemens de chaque point de la corde, il eût fallu pour cela donner d'abord une solution générale du problème de la corde vibrante dans l'hypothèse quelle fût chargée d'un nombre indéfini de corps; solution que Bernoulli convient n'avoir jamais été donnée. Ainsi l'analyse de la Grange étoit la seule qui pût jeter sur ces matières obscures une lumière suffisante pour éclaircir les doutes. Il la développa d'une manière entièrement neuve, puisqu'il détermina les mouvemens de tant de corps qu'on en voudra supposer; sans concevoir d'abord qu'il y ait entr'eux aucune loi de continuité par laquelle ils soient liés pour ainsi dire, et contenus dans une même formule.

Il paroît donc que d'Alembert est le premier qui ait résolu le problème en supposant la figure primitive quelconque, mais assujétie à une équation. Bernoulli limitoit la solution encore davantage. Euler l'emporta en soutenant qu'on pourroit prendre les fonctions arbitraires sans quelles fussent soumises à aucune équation, pas même à la loi de continuité. La Grange réunit les deux solutions qui paroissent très différentes; mais il trouve aujourd'hui que cela ne valoit pas la peine de disputer si longtemps. D'Alembert, dans ses *Opuscules*, est encore revenu l'adessus; mais ses objections étoient du même genre que celles qu'on fait contre le calcul différentiel, c'est une espèce de métaphysique sur laquelle on peut éternellement disputer, comme

sur les logarithmes des nombres négatifs, sur la rigueur des calculs des infiniment petits, sur les forces vives, &c.

Le citoyen la Place a donné dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences*, pour 1779, un mémoire sur les différences partielles où il ramène à une équation aux différences ordinaires du deuxième ordre, l'équation des cordes vibrantes dans un milieu résistant comme la vitesse. Cette équation supposée intégrée, donne la solution complète de l'équation des cordes vibrantes dans ce cas; laquelle dépend des intégrales définies; il restoit ce semble à intégrer cette équation aux différences ordinaires; or, le citoyen Parseval est parvenu à en donner l'intégrale complète par le moyen des intégrales définies; desorte que par ce moyen, l'équation des cordes vibrantes dans un milieu résistant comme la vitesse, est entièrement ramenée à la méthode des quadratures par le moyen des intégrales définies.

Le cit. Parseval a encore donné, en 1801, à l'Institut, un mémoire qui a ajouté quelque chose à l'analyse de ce problème. Il a pour objet l'intégration générale et complète des équations de la propagation du son, l'air étant considéré avec ses trois dimensions. Le nombre des variables de ces équations augmente avec celui des dimensions que l'on suppose à l'espace qu'occupe l'air; lorsqu'on n'a égard qu'à une seule dimension, on tombe sur l'équation différentielle partielle à laquelle conduit le problème des cordes vibrantes et qui a été intégrée, il y a plus de 50 ans par d'Alembert, mais qu'on ne doit pas prendre néanmoins comme le dit le cit. Parseval, pour l'origine du calcul des différentielles partielles: le cit. Cousin a rappelé avec raison aux géomètres qu'Euler avoit rencontré des équations de ce genre, et en avoit intégré dès 1739; qu'il devoit par conséquent être regardé comme l'inventeur du calcul des différences partielles, mais que d'Alembert en avoit fait le premier l'application aux questions de physique. Il convient d'insister sur ce point de l'histoire des mathématiques que des écrivains célèbres semblent avoir méconnu. Quand on donne deux ou trois dimensions à la masse d'air, l'équation toujours aux différentielles partielles, renferme trois ou quatre variables indépendantes; c'est-à-dire que la fonction à déterminer contient le temps et deux ou trois coordonnées, suivant qu'on suppose l'air étendu sur un plan ou dans l'espace; mais dans chacun de ces cas, elle conserve toujours la même forme. Le coefficient différentiel du second ordre de la fonction déterminée relatif au temps, est toujours dans un rapport constant avec la somme des autres coefficients différentiels de la même fonction pour le même ordre.

Cette circonstance a suggéré au cit. Parseval l'idée heureuse de faire dépendre de la fonction à deux variables celle qui en

contient trois, et de cette dernière celle qui en contient quatre. Pour cela il a considéré la première fonction dont la forme est donnée par l'intégrale due à d'Alembert, comme renfermant implicitement toutes les variables d'où dépendent les autres. Il est parvenu à exprimer chaque fonction par celle qui la précède, au moyen d'une série dont la loi est très-évidente, et dans laquelle il fait varier le coefficient constant, dépendant de l'élasticité du fluide.

Pour former cette série, il a recours à une transformation fort simple, par laquelle il introduit une nouvelle variable, qu'il considère sous deux formes différentes, la seconde donnant lieu à un développement qui s'effectue par le théorème de Taylor, et reproduit la série proposée dans les termes indépendans de la variable introduite. Il résulte de là que tout se réduit à sommer la série transformée. Elle se décompose facilement en deux parties. Le cit. Parseval fait dépendre chacune d'une équation différentielle qu'il intègre. Il détermine les fonctions relatives à ces équations par la considération de l'état initial du fluide, en supposant le temps égal à zéro, et changeant convenablement dans ce résultat, la nouvelle variable qu'il y a fait entrer; il en déduit relativement à l'état initial qu'il s'est donné, la solution de l'équation différentielle partielle proposée. Nous ne saurions entrer ici dans de plus grands détails sur les artifices de calculs dont le cit. Parseval a fait usage dans son mémoire; nous nous bornerons à dire, d'après les commissaires de l'Institut, qu'il a en effet ramené l'intégration des équations relatives à la propagation du son, dans le cas où la fonction cherchée dépend de trois variables, à ne contenir au plus qu'une intégrale définie prise par rapport à une nouvelle variable; à deux si la fonction cherchée dépend de quatre variables, aussi ont-ils regardé ce travail comme utile au progrès de l'analyse, (3 septembre 1801); et nous avons cru devoir en faire mention en finissant cet article des cordes vibrantes, auquel nous n'avons donné de l'étendue qu'à cause de la célébrité des quatre grands géomètres qui s'en sont longtemps occupés.

I X.

De la Balistique, ou des Corps projetés dans un milieu résistant.

La balistique est cette partie de la mécanique qui s'occupe du mouvement des projectiles, et en particulier de ceux qui traversent un milieu résistant, comme l'air. Elle prit naissance

entre les mains de Galilée, comme nous l'avons dit, t. II. p. 187; mais il s'en falloit bien que la mécanique fût en état de considérer le mouvement à travers un milieu résistant; et Galilée suppose, au moins tacitement, qu'un fluide tel que l'air n'oppose qu'une résistance insensible à un corps qui le traverse; mais cette science ayant fait des progrès considérables, les géomètres ont osé envisager le problème sous ce nouveau point de vue, et c'est un des problèmes les plus difficiles de la mécanique et de l'analyse, en même-temps qu'il est un des plus utiles; mais jusqu'ici les théories d'artillerie sont encore fondées sur la supposition de la courbe parabolique. Robert Anderson donna en 1674, son *Art of gunnery*; et Blondel, en 1683, son ouvrage intitulé *l'Art de jeter les bombes*, où il tâcha même de répondre aux objections qu'on avoit déjà formées sur la nature de la courbe décrite par un corps lancé dans l'air; et supposant toujours que la courbe parabolique est la véritable trajectoire d'une bombe, il calcula des tables dont il expliqua l'usage avec des règles pratiques en faveur des artilleurs.

Depuis Anderson et Blondel l'étude des mathématiques s'est introduite dans les écoles d'artillerie, mais la théorie de la parabole y suffisoit, car elle a cet avantage d'être susceptible d'un calcul facile. Aussi tandis que les géomètres commençoient à douter que le jet des bombes, ou le tir du canon dussent être traités d'après ce principe, Bélidor, dont on connoît d'ailleurs les travaux utiles, publia en 1734 son *Bombardier François*. Il ne doutoit pas que tous les problèmes relatifs à cet art ne pussent être résolus d'après la théorie de la parabole; il assura même que les expériences qu'il avoit faites en 1725 et 1731, s'accordoient avec la parabole. Sans doute il y eut des circonstances qui en imposèrent à Bélidor, et lui firent tirer cette conclusion; car d'autres expériences faites avec beaucoup de soin, donnent un résultat qui n'est pas à beaucoup près conforme au sien. Il étoit bien facile de se détromper de l'idée qu'un corps qui traverse l'air avec la vitesse d'un boulet de canon, n'éprouve de la part de ce fluide qu'une résistance nulle ou peu sensible; car l'expérience apprend qu'un vent médiocre faisant 15 ou 18 pieds par seconde, exerce une force très-sensible; un fluide qui se meut contre une surface plane avec des vitesses différentes exerce sur elle des impressions qui sont à-peu-près comme les quarrés des vitesses; les mathématiciens ont conclu que l'effort d'un fluide mu avec une certaine vitesse contre une surface est égal au poids de la colonne de ce fluide dont la hauteur seroit égale à celle d'où un corps devroit tomber pour acquérir cette vitesse dans une seconde; et comme un boulet de canon a une vitesse de 1500 pieds par

seconde, il en résulte une résistance très-grande, et nous verrons même que l'expérience la donne beaucoup plus considérable dans les grandes vitesses. Comment une force aussi considérable n'influeroit-elle pas sur la courbe décrite par le boulet.

Malgré un raisonnement si convainquant, il semble que c'est aux écrits de Benjamin Robins que l'on doit la destruction du préjugé qui régnoit parmi les artilleurs. Cet homme, d'un vrai génie, entreprit vers 1740 des expériences sur l'artillerie, dont on lit le résultat dans son ouvrage intitulé : à *New theory of Gunnery*, imprimé à Londres, en 1742, in-4°. et de nouveau dans le recueil de ses *Mathematical tracts*, Londres, 1761, in-8°. 2 vol. ouvrage qui eût mérité d'être traduit beaucoup plutôt dans notre langue, et qui ne l'a cependant été qu'en 1781, par Dupuy, professeur de Grenoble, par l'impulsion de de la Lande dont il étoit élève. Il y en eut une autre traduction en 1783, par Lombard, professeur d'Auxonne.

Après plusieurs propositions appartenant plus à la physique qu'à la chimie qu'aux mathématiques, sur la nature du fluide produit par l'explosion de la poudre, sur l'espace qu'il tend à occuper aussitôt qu'il est développé et sur la force qui en résulte pour chasser le boulet, Robins examine mathématiquement ce problème de balistique : étant données les dimensions d'une pièce d'artillerie, la densité du boulet et la quantité de la charge, déterminer la vitesse que le boulet acquerra par l'explosion, en supposant que l'élasticité du fluide produit est donnée au moment de l'explosion. Il y suppose aussi ces deux principes, qu'il prouve ensuite, savoir : 1°. Que l'action de la poudre cesse au moment où le boulet est hors de la pièce. 2°. Que toute la poudre est convertie en fluide élastique avant qu'il ait sensiblement changé de place.

Ce problème savamment résolu, il en fait l'application à des cas particuliers, et il fait voir qu'une balle de plomb de $\frac{1}{4}$ de pouce de diamètre, chassée d'un canon de fusil de 45 pouces de longueur, avec une charge de poudre de 2 pieds $\frac{1}{2}$ de hauteur, lui donne une vitesse de 1668 pieds par seconde, au sortir de la bouche du canon.

Mais comme de pareilles conclusions tiennent toujours à des principes physiques dont la certitude n'est pas absolument mathématique, il détermina par l'expérience quelle est la vitesse d'une balle partant d'un canon avec certaine charge de poudre. Il y employa une machine fort ingénieusement imaginée qui consiste en une espèce de pendule d'un poids donné et tournant sur un axe horizontal; ce pendule recevant l'impression de la balle en est élevé jusqu'à un certain angle qui est mesuré; ensorte que connoissant le poids du pendule, celui de la balle

et sa vitesse, on peut déterminer cet angle, et réciproquement cet angle étant donné avec le poids du pendule et celui de la balle, on peut déterminer cette vitesse, d'après ce principe de mécanique : lorsqu'un corps non élastique en choque un autre en repos, ils marchent ensuite conjointement avec une quantité de mouvement égale à celle du corps choquant avant le choc. Mais il faut voir dans le livre de Robins la manière dont il fait ce calcul, et les attentions scrupuleuses qu'il y met. Ses expériences confirment sa théorie sans autres différences que celles qu'on doit attendre dans de pareilles matières, où mille petites circonstances impossibles à prévoir font varier en plus ou en moins les résultats. Mais prenant un milieu entre plusieurs expériences, comme fait en général Robins, on est assuré d'atteindre à très-peu près le point de la vérité.

Il passe ensuite à la recherche de la résistance que l'air oppose au mouvement du projectile ; ce qui l'engage à présenter d'abord des réflexions très-judicieuses sur celle qu'éprouvent les corps en traversant des milieux différemment constitués. Il fait voir que la résistance en raison du carré des vitesses n'a lieu que dans un fluide dont les particules isolées les unes des autres peuvent être déplacées, sans qu'elles mêmes tendent à déplacer les parties voisines ; ce qui est une supposition purement mathématique, et c'est aussi dans ce seul cas qu'à lieu la proportion selon laquelle une sphère mise en mouvement éprouve une résistance, qui est la moitié de celle qu'éprouve le plan de son grand cercle ; mais il n'en est pas ainsi dans les fluides ou incompressibles comme l'eau, dont les parties semblent s'appuyer les unes sur les autres, où dans un fluide élastique comme l'air. Il n'en est pas de même non plus dans le cas où le corps se meut avec une très-grande vitesse, et dans celui où il n'a qu'une vitesse médiocre. Dans ce dernier cas le fluide tend à remplir et remplit en effet sur-le-champ la place laissée en arrière par le corps en se mouvant. Il n'y a ici qu'une résistance simple, et à dire vrai, que l'expérience seule peut déterminer. Dans le premier cas c'est toute autre chose ; le fluide, l'air par exemple, ne pouvant tout-à-coup prendre la place que venoit d'occuper le corps, il s'y fait un vide, et conséquemment, indépendamment de l'effort du corps pour pousser le fluide en avant, il a à soutenir le poids d'une colonne d'air de même base et dont la hauteur est égale à celle de l'atmosphère. Robins trouve enfin par des expériences que lorsque la vitesse est petite comme de 20 à 30 pieds par seconde, la résistance ne s'écarte pas beaucoup de la loi du carré de la vitesse ; et le cit Coulomb a fait voir en 1800, que dans un mouvement très-lent la résistance est comme la vitesse simple.

Robins trouve que lorsque la vitesse est de quelques centaines de pieds par seconde jusqu'à 11 ou 12 cent pieds, la résistance va jusqu'à 12 fois le poids du corps même, et qu'enfin lorsqu'elle est très-grande, comme de 16 à 18 cent pieds, elle va au triple ou au quadruple de cette dernière résistance. Ainsi il trouve qu'un boulet de 24, poussé avec une charge de 16 livres de poudre, partant avec une vitesse qui va jusqu'à 1900 ou 2000 pieds, éprouve une résistance qui va à 20 fois, et plus, son poids, savoir à 484 livres. On n'a pu déduire immédiatement un pareil fait de l'expérience; mais il résulte d'une combinaison d'expériences et de raisonnemens qui, s'ils ne sont pas une démonstration mathématique, en approchent beaucoup.

Ainsi il n'est pas possible que la trajectoire décrite par un projectile lancé avec une grande vitesse soit une parabole, ni même qu'elle en approche; et d'abord, quant à la distance de la portée, il fait voir combien elle est moindre dans le cas d'un milieu résistant comme l'air. Car une balle partant avec une vitesse de 16 à 17 cent pieds par seconde, sous un angle de 45° devoit en avoir 17 mille de portée, selon la théorie, tandis qu'elle a à peine un demi-mille; ce qui n'est que la 34^e. partie de la portée que donneroit le calcul fondé sur une résistance à-peu-près nulle, et dans une trajectoire parabolique. Un boulet de canon de 24 livres, poussé avec une charge de 16 livres de poudre sous un angle de 45° , ne va qu'à 2456 toises et ce n'est qu'environ le 5^e. de la portée dans la parabole et dans l'hypothèse de la non-résistance. Si dans le premier exemple nous trouvons la portée réduite à $\frac{1}{34}$, et ici seulement à $\frac{1}{5}$, cela vient de ce qu'un boulet de 24 a une bien moindre surface dans son grand cercle relativement à son poids, qu'une balle de $\frac{3}{4}$ de ponce de diamètre.

Il est même aisé d'observer dans des projectiles lancés avec des vitesses médiocres comme de quelques centaines de pieds, combien la courbe qu'ils décrivent diffère de la parabole; car on voit sensiblement que la branche décrite depuis le départ jusqu'à la plus grande élévation est bien plus étendue que celle qui va depuis ce point jusqu'à celui où le projectile atteint le plan horizontal. Et c'est aussi ce qui suit de l'analyse, quoiqu'encore imparfaite, qu'on a pu faire du problème. *

Il y a d'autres objets intéressans dans cet ouvrage, ainsi que dans des mémoires remis à la Société Royale sur le même sujet, parmi lesquels il en est un qui contient des expériences sur la résistance de l'air au mouvement des corps, suivant leur forme, et les différens angles sous lesquels ils frappent ce fluide. Ce que nous venons de dire suffira pour faire connoître le mérite de l'ouvrage de Robins. Aussi parut-il si intéressant à Euler,

que même ayant quelques raisons de se plaindre de Robins, il ne laissa pas de le traduire en allemand, et de l'éclaircir par de savantes notes, dans lesquelles cependant il contredit quelquefois son auteur. Robins se proposoit de répondre à Euler, mais les occupations qui lui survinrent l'en empêchèrent. Trembley a publié en françois, à Genève, les notes d'Euler sur Robins.

Les géomètres ont entrepris de résoudre ce problème des trajectoires dans un milieu résistant en y employant les seules considérations de l'analyse et de la mécanique spéculative. Nous pourrions rapporter à cet objet plusieurs propositions du second livre des *Principes* de Newton; mais ce fut Keil qui proposa en 1718, à Jean Bernoulli par forme de défi, la solution du problème suivant : *Trouver la courbe que décrit un projectile dans l'air, en y supposant la loi la plus simple de la gravité, (c'est-à-dire), la direction perpendiculaire à l'horizon, et la résistance en raison des quarrés des vitesses.* Il croyoit embarrasser Bernoulli, en lui proposant un problème que Newton n'avoit pas résolu. Il se trompoit; Bernoulli le résolut et offrit de publier sa solution sous la condition que Keil publieroit la sienne; mais il se lassa d'attendre, et donna sa solution dans les *Actes de Leipzig*, mai 1719. Il y envisageoit même la question d'une manière plus générale que Keil, car celui-ci ne demandoit une solution que dans la supposition d'une résistance en raison des quarrés de vitesses; mais Bernoulli supposa une loi de résistance quelconque, exprimée par une puissance de la vitesse : il ne donna pas l'analyse qui l'y avoit conduit, mais il remarqua qu'il en avoit consigné les principes dans les *Actes de Leipzig*, en parlant des courbes décrites dans des milieux résistans. Il publia ensuite cette analyse dans les *Actes de Leipzig* de 1719. Mais la solution de ce grand géomètre ne pouvoit être utile pour la pratique, parce que l'aire de la courbe ne pouvant la plupart du temps être exprimée en termes finis, il est comme impossible, au moins d'après l'analyse actuelle, d'en tirer la valeur des inconnues; si l'on y parvenoit on n'arriveroit qu'à des valeurs si compliquées qu'elles ne seroient d'aucun usage.

Il résulte seulement delà quelques vérités théoriques. Si l'on suppose la résistance comme le quarré de la vitesse, alors on a un espace hyperbolique; on pourroit même faire telle supposition qui rendroit la première courbe quarrable en termes finis; et la seconde pourroit le devenir, ou du moins n'être qu'une transcendante du premier degré. Si, par exemple, on suppose la résistance comme la vitesse, on a une courbe logarithmique ou qui peut se construire au moyen de la logarithmique, et supposant la résistance nulle, on voit renaître la parabole.

Jean

Jean Bernoulli ne fut pas le seul qui résolut le problème. il fut aussi résolu par son neveu, Nicolas Bernoulli, dont la solution nous paroît même plus traitable et plus applicable à la pratique que celle de son oncle qu'il donna à la suite de la sienne. Ce problème fut aussi résolu, ou plutôt il l'avoit été d'avance par Herman qui donna sa solution dans sa *Phoronomie*, page 354, presque la même que celle de Bernoulli. L'Angleterre enfin qui avoit proposé le problème, fournit aussi une solution de Taylor; mais outre la difficulté de développer en termes traitables l'expression de la courbe cherchée, on a l'incertitude de la loi même de la résistance. Car, à quoi serviroient des calculs immenses si faute de connoître cette loi ils ne peuvent manquer de conduire à des résultats contraires à l'expérience. Nous convenons néanmoins que si ces calculs n'étoient que médiocrement laborieux, ils auroient quelque utilité en ce qu'ils pourroient servir à reconnoître la vraie loi.

Les difficultés en géométrie bien loin de décourager sont au contraire un nouvel aiguillon pour les surmonter. Ainsi le problème dont nous parlons ne pouvoit manquer d'occuper les géomètres d'un ordre supérieur. Euler qui avoit traduit l'ouvrage de Robins, malgré les raisons données par cet auteur pour la faire regarder comme désespérée, ne laissa pas de s'en occuper. C'est l'objet d'une des notes dont il enrichit cet ouvrage. Mais ce travail étoit encore loin de le satisfaire; c'est pourquoi il y revint; et l'on trouve dans les *Mémoires de Berlin*, pour 1753, un savant mémoire sur ce sujet. Quoi qu'il y admette jusqu'à un certain point les résultats des expériences de Robins, il ne pense pas qu'ils renversent entièrement la loi de résistance communément admise relativement aux corps traversant un fluide, savoir que cette résistance est comme le quarré de la vitesse. Il admet à la vérité, et trouve même par le calcul ce que Robins avoit déduit de quelques raisonnemens, c'est-à-dire, que quand la vitesse excède une certaine mesure comme de 11 à 12 cents pieds par seconde, le corps en mouvement éprouve une résistance égale au poids de toute la colonne atmosphérique; mais mettant ce cas à part dans la solution du problème, il persiste à penser que la résistance opposée à un boulet qui a une vitesse de 1350 pieds, s'éloigne peu de la raison du quarré de la vitesse. Il se borne à y faire une correction pour le cas des vitesses moyennes, comme de 400 à 1000 pieds par seconde. D'après ces données et quelques autres qu'on ne peut lui contester, il analyse le problème à sa manière, et parvient à des expressions finies, et assez approchantes du vrai, qui donnent les valeurs de l'abscisse et de l'ordonnée de la courbe, ainsi que de la courbe même et du temps de la plus grande montée,

pour chaque angle de projection et de vitesse initiale donnée au projectile. Il fait aussi quelques remarques intéressantes sur la forme de la courbe de projection, savoir 1°. Que la branche d'ascension est beaucoup plus grande et moins courbe que celle de descente; que la courbe de descente a une asymptote perpendiculaire vers laquelle elle approche sans cesse; et la courbe de montée, une asymptote inclinée à l'horizon; que la plus grande courbure n'est pas au sommet, mais quelque peu au-delà dans la branche descendante; cette forme de la courbe qui résulte de l'analyse d'Euler donne beaucoup de poids à son travail; car ces propriétés de la branche ascendante et descendante de la trajectoire des bombes avoit déjà été observée même à la vue, par la trace apparente de l'amorce. Euler calcula sur cette hypothèse et ses formules une table, esquisse d'une plus étendue, au moyen de laquelle pour les différens angles de projection de 5 en 5°, les différens poids du boulet ou de la bombe, et la vitesse imprimée, on trouve, par un calcul facile, l'amplitude de la branche ascendante et celle de la branche descendante, ainsi que leur longueur même, et l'angle sous lequel le projectile frappe la ligne horizontale. On y voit par exemple qu'une bombe partant sous un angle de 45° et avec une vitesse de 434 pieds par seconde, s'élève en 8" 18 à sa plus grande hauteur qui est de 123 $\frac{1}{4}$ pieds, et qu'elle va frapper le plan horizontal sous un angle de 60° à une distance de 3772 pieds; que l'horizontale répondant à la branche ascendante sera de 2139 pieds, et celle qui répond à la branche descendante de 1640, enfin que la totalité de la courbe sera de 4682 pieds et la durée de la descente de 9" 50 en sorte que la durée totale de la montée, et de la descente sera de 17" $\frac{2}{3}$.

Nous avons dit que la table qui suit le mémoire de M. Euler, n'étoit que l'esquisse de tables beaucoup plus étendues, qu'il falloit avoir pour mettre à la portée de tous les artilleurs le problème dont il est question : ces autres tables ont été calculées par M. de Gravenitz.

On est porté à penser que ce travail, tout savant qu'il est, n'a pas été aussi utile à l'artillerie-pratique que le présuinoit son auteur; car on a vu postérieurement à lui, plusieurs géomètres s'en occuper. Lambert en a fait l'objet d'un mémoire qu'on lit parmi ceux de l'Académie de Berlin, pour l'année 1765. Il y reprend toute la théorie de la résistance, et finit par des considérations très-savantes sur la nature et la forme de la courbe balistique; mais l'auteur semble avoir eu pour objet les recherches géométriques, plutôt que l'application à la pratique.

Le chevalier de Borda, aussi grand géomètre qu'habile ingénieur, entreprit aussi, en 1769, de décider, à l'aide du calcul

d'une manière certaine , les principales questions de la balistique.

Le premier pas qu'il fait est de déterminer quelle est la courbe décrite par un corps qui se meut dans un milieu résistant, et, dans cette solution, il ne détermine pas la loi suivant laquelle s'exerce cette résistance : ce qui rend la solution la plus générale qu'il soit possible. Comme il étoit cependant persuadé que la résistance des fluides est à très-peu-près proportionnelle au quarré de la vitesse ; il introduit cette expression dans l'équation.

La courbe qui en résulte est très-différente de la parabole, non-seulement parce qu'on introduit un élément de plus dans le calcul, mais encore parce que cet élément est variable ; car il est évident que la vitesse du projectile allant toujours en diminuant, la résistance diminue aussi dans la raison du quarré de la diminution de la vitesse. Il s'ensuit que les deux branches de la courbe substituée à la parabole, seront inégales. On sent assez combien toutes ces variables, introduites dans le calcul, rendent le problème difficile à résoudre. Il le seroit peut-être encore plus, si l'on y faisoit entrer d'autres élémens qui géométriquement devroient y avoir lieu, mais qui ne produisent pas des effets assez sensibles pour embarrasser le calcul. Nous en allons apercevoir quelques-uns de cette espèce, en appliquant cette courbe aux effets de l'artillerie.

Puisque la résistance de l'air augmente dans la raison des quarrés des vitesses du boulet, il est clair que plus cette vitesse sera grande, plus les portées différeront en moins de celles qu'on auroit assignées en employant le mouvement dans le vide et la parabole qui en résulte. Borda a donc calculé une table dans laquelle, en supposant un canon de 24, pointé à 45° , il a marqué dans une colonne les portées dans le vide, en supposant différentes vitesses initiales depuis 100 pieds jusqu'à 3500 pieds par seconde, et les portées correspondantes, eu égard à la résistance de l'air.

La portée réelle d'une pièce de 24, pointée sous un angle de 45° , est de 2260 toises, ce qui donneroit une vitesse initiale de 2038 pieds par seconde ; mais cette même vitesse, faisant abstraction de la résistance de l'air, donneroit une portée de 22922 toises. La résistance de l'air diminue donc les portées de neuf dixièmes ; on voit combien on se trompe, en négligeant cet élément.

Mais voici quelque chose de plus fort : les angles qui répondent à différentes portées, ne sont pas constans, et l'angle de 45° qu'on supposoit donner la plus grande portée, ne la donne pas à beaucoup près.

Il n'est pas difficile de le comprendre, si l'on considère que la

courbe n'est plus une parabole, que ses deux branches même diffèrent entr'elles considérablement, parce que les vitesses allant en diminuant, les résistances diminuent aussi, même dans une raison plus forte. Il faut donc, dans le calcul des angles qui doivent répondre à une portée donnée, avoir égard aux différentes vitesses initiales, si on ne veut pas tomber dans des erreurs énormes. Borda fait voir que la même pièce de 24 qui, avec une vitesse initiale de 300 pieds par seconde, donne, pour l'angle de la plus grande portée, $42^{\circ} 10'$, ne donne plus cet angle que de $28^{\circ} 10'$, si on suppose cette vitesse initiale de 2000 pieds par seconde.

On savoit bien que le boulet perdoit de sa vitesse à mesure qu'il s'éloignoit du canon; mais il étoit nécessaire de voir comment se faisoit cette diminution. Borda l'a calculée pour les pièces de différens calibres, et a déterminé pour chacune, deux distances, l'une au bout de laquelle le boulet avoit perdu un dixième de sa vitesse, et l'autre après laquelle il en avoit perdu un cinquième; et il résulte de ce calcul que ces pertes sont dans une raison assez peu différente de celles des distances même.

Un des points les plus intéressans de toute l'artillerie, est certainement de déterminer la vraie portée des différentes pièces. Borda en donne le moyen par un théorème général qui ne laisse plus que de simples analogies, et quelques interpolations pour conclure de la première table de son mémoire, les portées de boulets de différens calibres; il donne même ce calcul, tout fait dans une table, en employant seulement deux vitesses initiales, l'une de 1500 pieds, l'autre de 1800 par seconde: ces portées se trouvent assez différentes de celles qu'on trouve dans les *Mémoires d'Artillerie* de Saint-Remy; mais cette différence prouve que les vitesses initiales pourroient n'être pas les mêmes pour tous les calibres.

Puisque la résistance de l'air offre un si grand obstacle au mouvement du boulet, il est clair que si l'air a, de son côté, un mouvement contraire, cette résistance deviendra plus grande; ce qui doit arriver nécessairement quand le vent se trouve dans une direction contraire au chemin du boulet. Borda n'a pas négligé d'apprécier cette résistance, et il fait voir qu'en supposant la vitesse initiale d'un boulet de 24, de 1800 pieds par seconde, et que le vent fasse parcourir à l'air 40 pieds dans le même temps, la portée se trouve diminuée de 90 toises. Le calcul de Borda peut de même s'appliquer aux variations causées par les différences de densité de l'atmosphère et par les différences de pesanteur dans les boulets.

Ce que nous venons de dire des boulets, s'applique de même au jet des bombes, et Borda n'a pas négligé cette application,

mais il n'a traité que deux questions qui lui ont paru plus importantes que les autres; savoir, les différentes portées des bombes de différens poids, de même diamètre, et les angles des différentes portées.

Pour comprendre la différence des bombes aux boulets dans ces deux points, il est nécessaire de considérer que les boulets sont solides, et comme il sont tous de même matière, leur pesanteur a toujours un rapport déterminé avec leur diamètre. Il n'en est pas de même des bombes, elles sont creuses, pour renfermer la poudre qui les doit faire éclater; et deux bombes, de même diamètre, seront plus ou moins pesantes, selon que ce vide sera plus ou moins grand. Il étoit donc nécessaire de voir si cette différence de poids n'en introduiroit pas une dans les portées. Voici ce qui résulte du calcul de Borda. Il a trouvé qu'en comparant ensemble deux bombes du même diamètre de 11 pouces 8 lignes, mais dont l'une peseroit 140 livres et l'autre 175, et leur donnant les vîteses initiales depuis 600 pieds jusqu'à 1200 pieds par seconde, la plus pesante a toujours une plus grande portée, et que cette différence est assez constamment d'environ un dixième: l'expérience a confirmé ce raisonnement. Il résulte donc des recherches de Borda, qu'on augmenteroit sensiblement la portée des bombes, si en leur conservant le même diamètre, on diminueoit le vide qui est au centre, pour augmenter leur pesanteur, ce qui peut, dans certaines circonstances, devenir très-important.

La recherche des angles de la plus grande portée méritoit bien d'être faite avec soin; le calcul de Borda y étant appliqué, a fait voir que, conformément à ce que nous en avons dit ci-dessus, en parlant des boulets, l'angle de la plus grande portée, n'est ni constant, ni dans aucun cas celui de 45° ; qu'il est d'autant plus petit, que les vîteses sont plus grandes, étant de $37^\circ 15'$ pour une bombe de 140 livres, partie du mortier avec une vîtesse de 600 pieds par seconde; et de $33^\circ 20'$ seulement pour la même bombe, partie du mortier avec une vîtesse de 1100 pieds; d'où il suit que les mortiers marins, qui sont fondus avec leurs semelles sous un angle de 45° , auroient une portée plus grande d'environ cent toises, si leur angle avec la semelle n'étoit que de 33 ou 34° . (*Hist. de l'Acad.* 1769, p. 121).

M. Tempelhof, géomètre et capitaine de Prusse, a donné aussi un ouvrage intéressant, intitulé: *Le Bombardier prussien, ou du mouvement des projectiles* dans l'hypothèse de la résistance de l'air proportionnelle au quarré des vîteses, (Berlin 1781, p. 8.) Enfin, il y en a un de M. d'Ehrenmalm, officier du régiment Royal-Suédois, sous le titre de *Théorie du jet des bombes*. (Paris 1788, in-8°.)

Dans le premier de ces écrits, M. Tempelhof arrive au moyen d'une analyse savante extrêmement laborieuse à des séries assez convergentes pour exprimer tant l'abscisse que l'ordonnée de la courbe du projectile sous un angle donné, ainsi que la portée tant horizontale que sur un plan incliné à l'horizon ; il examine aussi ce qui arrivera en supposant une densité d'air variable ; car il est clair qu'une bombe qui s'élève à une grande hauteur, ne se meut pas dans un air de densité uniforme. Enfin, M. Tempelhof compare les résultats de ses calculs avec des expériences qui paroissent faites avec beaucoup de soin et d'exactitude par M. d'Antoni, dans son *Traité sur la force de la poudre*, et il y trouve une conformité aussi favorable à ses calculs, qu'il est possible de l'atteindre en des matières où il y a des données dans chacune desquelles il peut y avoir quelque légère erreur. La conformité est telle enfin, que M. Tempelhof n'hésite point de prononcer que la résistance de l'air, sur des corps sphériques, est proportionnelle au quarré de la vitesse. J'ignore jusqu'à quel point les artilleurs prussiens ont accueilli la théorie de M. Tempelhof, mais on peut dire que ce mémoire le range parmi les hommes qui manient l'analyse et le calcul avec le plus de sagacité.

Le mémoire de M. Ehrenmalm est également fondé sur l'hypothèse que la résistance croît comme le quarré de la vitesse, au moins dans les cas où cette vitesse n'excède pas certaines limites. L'auteur analyse le problème avec beaucoup de sagacité, et il règne dans son mémoire une sobriété de calcul qui fera plaisir au plus grand nombre des lecteurs. Il parvient enfin à des formules finies, et où entrent seulement des quantités logarithmiques et circulaires qui, pour une vitesse initiale et un angle de projection donnés, font connoître la hauteur verticale du sommet de la courbe, ainsi que la vitesse restante lorsque le corps est arrivé à cette plus grande hauteur, la durée de la montée et de la descente, et enfin, la portée de chacune des branches de la courbe, d'où résulte la portée totale. Quelques applications à des hypothèses de pesanteur des projectiles et de vitesse de projection terminent cet écrit, ouvrage d'un géomètre âgé alors de vingt ans, et qui annonçoit de grandes dispositions.

Le chevalier d'Arcy, en 1760, publia des *Essais sur la théorie de l'artillerie*, où il y a des expériences intéressantes sur les différentes qualités de la poudre, sur les différentes vitesses, sur les portées, sur le recul, &c. Cet ouvrage est très-rare, mais on en trouve un grand extrait dans l'*Histoire de l'Académie des Sciences* 1760, p. 142.

X.

De l'Hydrodynamique.

L'hydrodynamique est une science née dans ce siècle, parce que auparavant l'analyse étoit insuffisante pour la traiter. En effet, si c'est déjà un problème presque inaccessible à la mécanique transcendante, d'assigner le mouvement qu'un certain nombre de globes élastiques choqués par un autre doivent prendre, quelle doit être la difficulté de celui où le nombre de ces corps est, pour ainsi dire, infini, sans qu'on connoisse leur forme ou leur nature, et sans qu'on sache même comment ils agissent les uns sur les autres. Il a donc fallu recourir, dans ce cas, à des principes généraux ou indirects et à des suppositions vraisemblables.

Archimède et Galilée (car l'intervalle qui sépare ces deux grands génies dispaçoit dans l'histoire de la mécanique) ne s'occupèrent que de l'équilibre des fluides; les théories nouvelles n'ont fait qu'y ajouter plus de généralité et d'élégance; ainsi, la Grange, dans sa *Mécanique analytique*, publiée en 1788, déduit les lois de l'équilibre des fluides de la nature même des fluides considérés comme des amas de molécules très-déliées, indépendantes les unes des autres, et parfaitement mobiles en tous sens; mais il n'en est pas de même du mouvement des fluides.

Galilée ayant restauré la physique, Toricelli eut l'explication des pompes, et Castelli, un des disciples de Galilée, dans un petit *Traité* publié en 1628, expliqua très-bien quelques phénomènes du mouvement des eaux courantes; mais il se trompa dans la mesure des vitesses qu'il faisoit proportionnelles aux hauteurs des réservoirs. Toricelli fut plus heureux; en voyant que l'eau d'un jet, qui sort par un petit ajutage, s'élance verticalement presque à la hauteur du réservoir, il pensa qu'elle devoit avoir la même vitesse que si elle étoit tombée, par sa gravité, de cette hauteur; d'où il conclut, conformément à la théorie de Galilée, qu'abstraction faite de la résistance des obstacles, les vitesses des écoulemens suivoient la raison sous-doublée des pressions: cette idée fut confirmée par des expériences que Raphaël Magiotti fit dans ce temps-là sur les produits de différens ajutages sous différentes charges d'eau, Toricelli publia sa découverte en 1643, à la suite d'un petit *Traité* intitulé: *De motu gravium naturaliter accelerato*. Elle fit de l'hydraulique une science toute nouvelle; néanmoins elle n'a lieu, à la rigueur,

que pour les fluides qui s'écoulent , comme cela arrive ordinairement par de petits orifices ; car , lorsque l'orifice est fort grand , le mouvement du fluide suit une autre loi beaucoup plus composée.

A la mort de Pascal , on trouva dans ses papiers un traité de l'équilibre des liqueurs , qui fut publié en 1662. Cet ouvrage , vraiment original , est le premier où les lois de l'hydrostatique aient été démontrées en détail , et d'une manière claire et simple , par la voie du raisonnement et de l'expérience , mais il n'y est point parlé du mouvement des fluides. Parmi les auteurs qui ont écrit sur ce dernier sujet , et qui ont mis le théorème de Toricelli en usage , Mariotte mérite d'être cité avec distinction ; né avec un talent rare pour imaginer et exécuter des expériences ; ayant eu occasion d'en faire un grand nombre sur le mouvement des eaux à Versailles , à Chantilly et dans plusieurs endroits , il composa , sur cette matière , un *Traité* qui ne fut imprimé qu'après sa mort , arrivée en 1684 ; il s'y est trompé en quelques endroits ; il n'a fait qu'effleurer plusieurs questions ; il n'a pas connu le déchet occasionné dans le produit d'un ajutage , par la contraction à laquelle la veine fluide est sujette , lorsque cet ajutage est percé dans une mince paroi. Malgré ces défauts , son ouvrage a été fort utile , et il a beaucoup contribué aux progrès de l'hydraulique-pratique , qui se réduit à l'art de conduire les eaux , et de les faire servir au mouvement des machines. Cet art a dû être cultivé , de tout temps , pour le besoin qu'on en a toujours eu , et les anciens y ont peut-être autant excellé que nous , à en juger par ce qu'ils nous ont laissé dans ce genre.

Mais l'hydrodynamique étoit bien plus difficile ; Newton entreprit de démontrer la règle de Toricelli , dans le second livre des *Principes mathématiques* qui parurent en 1687 ; mais il faut avouer que c'est l'endroit le moins satisfaisant de ce grand et bel ouvrage. Si l'on considère une colonne d'eau qui tombe librement dans le vide , il est aisé de se convaincre qu'elle doit prendre la figure d'un conoïde formé par la révolution d'une hyperbole du quatrième ordre autour de l'axe vertical ; car la vitesse de chaque tranche horizontale , est d'un côté comme la racine quarrée de la hauteur d'où elle est descendue , et de l'autre elle doit être , par la continuité de l'eau , en raison inverse de la largeur de cette tranche , et par conséquent en raison inverse du quarré de son rayon ; d'où il résulte que la portion de l'axe ou l'abscisse qui représente la hauteur est en raison inverse de la quatrième puissance de l'ordonnée de l'hyperbole génératrice. Si donc on se représente un vase qui ait la figure de ce conoïde , et qui soit entretenu toujours plein d'eau , et qu'on suppose le mouvement de l'eau parvenu à un état permanent , il est clair que chaque particule

particule d'eau y descendra comme si elle étoit libre, et qu'elle aura par conséquent, au sortir de l'orifice, la vitesse due à la hauteur du vase de laquelle elle est tombée.

Or, Newton imagine que l'eau qui remplit un vase cylindrique vertical, percé à son fond d'une ouverture par laquelle elle s'échappe, se partage naturellement en deux parties, dont l'une est seule en mouvement, et a la figure du conoïde dont nous venons de parler; c'est ce qu'il nomme la cataracte: l'autre est en repos, comme si elle étoit glacée. De cette manière, il est clair que l'eau doit s'échapper avec une vitesse égale à celle qu'elle auroit acquise en tombant de la hauteur du vase, comme Toricelli l'avoit trouvé par l'expérience. Cependant Newton ayant mesuré la quantité d'eau sortie dans un temps donné, et l'ayant comparée à la grandeur de l'orifice, en avoit conclu, dans la première édition de ses *Principes*, que la vitesse, au sortir du vase, n'étoit due qu'à la moitié de la hauteur de l'eau dans le vase. Cette erreur venoit de ce qu'il n'avoit pas d'abord fait attention à la contraction de la veine: il y eut égard dans la seconde édition qui parut en 1714, et il reconnut que la section la plus petite de la veine étoit, à l'ouverture du vase, à-peu-près comme 1 à $\sqrt{2}$; de sorte qu'en prenant cette section pour le vrai orifice, la vitesse doit être augmentée dans la même raison, et répondre par conséquent à la hauteur entière de l'eau. De cette manière, sa théorie se trouva rapprochée de l'expérience, mais elle n'en devint pour cela plus exacte; car la formation de la cataracte (1) ou vase fictif dans lequel l'eau est supposée se mouvoir, tandis que l'eau latérale demeure en repos, est évidemment contraire aux lois connues de l'équilibre des fluides, puisque l'eau qui tomberoit dans cette cataracte avec toute la force de sa pesanteur, n'exerçant aucune pression latérale, ne sauroit résister à celle du fluide stagnant qui l'environne.

Vingt ans auparavant, Varignon avoit donné à l'Académie des Sciences de Paris, une explication plus naturelle et plus plausible du phénomène dont il s'agit. Ayant remarqué que quand l'eau s'écoule d'un vase cylindrique par une petite ouverture faite au fond, elle n'a dans le vase qu'un mouvement très-petit et sensiblement uniforme pour toutes les particules, il en conclut qu'il ne s'y faisoit aucune accélération, et que la partie du fluide qui s'échappoit à chaque instant, recevoit tout son mouvement de la pression produite par le poids de la colonne de fluide dont elle étoit la base. Ainsi, ce poids qui est comme la largeur de l'orifice

(1) Sur le GURGES de Newton, voyez une dissertation de M. Giannini, *Opuscula*, in-4°.

multiplié par la hauteur de l'eau dans le vase, doit être la particule qui sort à chaque instant par le même orifice. Or, cette quantité de mouvement est proportionnelle à la vitesse et à la masse, et la masse est ici comme le produit de la largeur de l'orifice par le petit espace que la particule parcourt dans l'instant donné; espace qui est évidemment proportionnel à la vitesse même de cette particule; par conséquent la quantité du mouvement dont il s'agit, est en raison de la largeur de l'orifice multipliée par le carré de la vitesse: donc enfin la hauteur de l'eau, dans le vase est proportionnelle au carré de la vitesse avec laquelle elle s'échappe; ce qui est le théorème de Toricelli.

Ce raisonnement a néanmoins encore quelque chose de vague; car on y suppose tacitement que la petite masse qui s'échappe à chaque instant du vase, acquiert brusquement toute sa vitesse par la pression de la colonne qui répond à l'orifice. Or, on sait qu'une pression ne peut pas produire tout-à-coup une vitesse finie. Mais en supposant, ce qui est naturel, que le poids de la colonne agisse sur la particule pendant tout le temps qu'elle met à sortir du vase, il est clair que cette particule recevra un mouvement accéléré, dont la quantité, au bout d'un temps quelconque, sera proportionnelle à la pression multipliée par le temps: donc le produit du poids de la colonne, par le temps de la sortie de la particule, sera égal au produit de la masse de cette particule, par la vitesse qu'elle aura acquise; et comme la masse est le produit de la largeur de l'orifice par le petit espace que la particule décrit en sortant du vase; espace qui, par la nature du mouvement uniformément accéléré est comme le produit de la vitesse par le temps: il s'ensuit que la hauteur de la colonne sera de nouveau comme le carré de la vitesse acquise. Cette conclusion est donc rigoureuse, pourvu qu'on accorde que chaque particule, en sortant du vase, est pressée par le poids entier de toute la colonne du fluide, qui a cette particule pour base; ce qui auroit lieu en effet si le fluide contenu dans le vase y étoit stagnant; car alors sa pression, sur la partie du fond où est l'ouverture, seroit égale au poids de la colonne dont elle est la base; mais cette pression doit être différente, lorsque le fluide est en mouvement. Cependant il est clair que plus il approchera de l'état de repos, plus aussi sa pression sur le fond approchera du poids total de la colonne verticale. D'ailleurs, l'expérience fait voir que le mouvement du fluide dans le vase est d'autant moindre, que l'ouverture est plus petite. Ainsi, la théorie précédente approchera d'autant plus de la vérité, que les dimensions du vase seront plus grandes relativement à l'ouverture par laquelle le fluide s'écoule, et c'est ce que l'expérience confirme.

Par une raison contraire, la même théorie devient insuffisante

pour déterminer le mouvement des fluides qui coulent dans les tuyaux dont la largeur est assez petite et varie peu ; il faut alors considérer à-la-fois tous les mouvemens des particules du fluide et examiner comment ils doivent être changés et altérés par la figure du canal. Or, l'expérience apprend que quand le tuyau a une direction peu différente de la verticale, les différentes tranches horizontales du fluide conservent, à très-peu-près, leur parallélisme ; ensorte qu'une tranche prend toujours la place de celle qui la précède ; d'où il suit, à cause de l'incompressibilité du fluide, que la vitesse de chaque tranche horizontale, estimée, suivant le sens vertical, doit être, en raison inverse de la largeur de cette tranche, largeur qui est donnée par la figure du vase.

Il suffit donc de déterminer le mouvement d'une seule tranche, et le problème est, en quelque manière, analogue à celui du mouvement d'un pendule composé. Ainsi, comme selon la théorie de Jacques Bernoulli, les mouvemens acquis et perdus à chaque instant par les différens poids que forment le pendule, se font mutuellement équilibre dans le levier ; il doit aussi y avoir équilibre dans le tuyau entre les différentes tranches du fluide, animées chacune de la vitesse acquise ou perdue à chaque instant. Ainsi, par l'application des principes déjà connus de l'équilibre des fluides, on auroit pu d'abord déterminer celui du pendule composé. Mais ce n'est jamais par les routes les plus simples et les plus directes, que l'esprit humain parvient aux vérités, de quelque genre qu'elles soient, et la matière que nous traitons en fournit un exemple frappant.

Nous avons exposé les différens pas qu'on avoit faits pour arriver à la solution du problème du centre d'oscillation, et nous y avons vu que la véritable théorie de ce problème n'avoit été découverte par Jacques Bernoulli que long-temps après que Huygens l'eut résolu par le principe indirect de la conservation des forces vives. Il en a été de même du problème du mouvement des fluides dans des vases, où il est surprenant qu'on n'ait pas su d'abord profiter, pour celui-ci, des lumières qu'on avoit déjà acquises par l'autre.

Nous verrons bientôt que Daniel Bernoulli y parvint ; mais il faut auparavant parler de quelques autres ouvrages.

Michelotti, célèbre médecin italien, fit aussi des recherches expérimentales et théoriques dans son livre *de Separatione fluidorum in corpore animali*. Il y rejette la cataracte newtonienne, en quoi il critique ainsi que sur quelques autres points, le docteur Jurin. Sa manière d'envisager le problème est celle-ci : Il suppose un vase plein d'eau qui s'échappe par une ouverture percée à son fonds et avec une vitesse produite par la hauteur de la

surface supérieure; il imagine ensuite que ne laissant qu'une petite quantité d'eau, comme de quelques lignes, au-dessus de l'ouverture, toute la partie au-dessus est comme glacée ou réduite en un corps solide de même densité, qui presse sur cette lame d'eau restante; il montre ensuite ou entreprend de montrer que ce poids ne changera rien à l'écoulement de l'eau; que cette eau solidifiée soit ensuite de nouveau liquéfiée, il n'y a nulle difficulté à admettre que tout restera de même.

Tel est le raisonnement de Michelotti; comme au surplus le médecin et mathématicien italien critiquoit assez fortement Jurin; celui-ci lui répondit dans les *Transactions Philosophiques*, de 1722, n°. 373. On y voit qu'ils différoient entr'eux plus dans l'expression que dans les choses.

Je pourrois encore parler à ce sujet de plusieurs autres mathématiciens surtout italiens, tels que le P. Guido Grandi, qui a joué un rôle distingué parmi ceux qui se sont attachés à cultiver cette partie si intéressante de la mécanique, de M. Eustache Manfredi, aussi savant mécanicien que géomètre, qui a enrichi d'excellentes notes l'édition du livre *Della natura de' i fiumi* de Guglielmini, ce qui la rend d'un prix fort supérieur à toutes les précédentes; de Geminiano Montanari, le collègue de Guglielmini, dont on a aussi divers écrits sur le mouvement des eaux. Je m'arrêterai cependant au marquis Poléni qui s'est spécialement attaché à cette partie de la mécanique, et à fait sur ce sujet des expériences où il a mis beaucoup de soin. Elles font en partie l'objet de son livre *De castellis per quae derivantur fluviorum aquae*, &c. qu'il publia à Padoue, en 1718, in-4°. Cet ouvrage avoit été plusieurs années auparavant précédé d'un autre sous le titre *De motu aquae mixto*, (Patavii, 1697, in-4°.) où il traite principalement du mouvement des eaux entant qu'il a trait aux *Æstuaria*, aux ports et aux fleuves. On lui doit aussi une nouvelle édition de Frontin, intitulée : *S. J. FRONTINI, de aquae ductibus urbis Romae commentarius*, qu'il a enrichi d'amples notes. Mais nous nous bornerons ici à quelques expériences tirées du premier de ces ouvrages parce qu'elles ont plus directement trait à notre objet.

Une de ces expériences est celle par laquelle il a mesuré la quantité d'eau qui s'écoule par l'ouverture percée au fond d'un vase. Il a trouvé par un grand nombre d'expériences que nommant A, l'ouverture, par où l'eau s'écoule, H la hauteur de l'eau au-dessus, la quantité d'eau sortant pendant un temps déterminé étoit comme $2AH \times \frac{0.571}{1.000}$, tandis qu'elle devoit être précisément comme $2AH$, si au sortir de l'ouverture elle jaillissoit avec une vitesse acquise par une chute de la hauteur

H ; ainsi l'expérience ne lui a donné qu'un peu plus de la moitié de ce que promet la théorie, en sorte que si l'on calcule d'après ces expériences la vitesse que l'eau a dû avoir pour fournir cette quantité d'eau, l'on trouve qu'elle est à peine celle qui la feroit remonter à $\frac{1}{3}$ de sa hauteur.

Une autre observation de Poléni est celle-ci. On adapte au trou circulaire par lequel l'eau s'échappe un tuyau cylindrique de même diamètre que ce trou, et l'on trouve qu'alors l'eau qui s'écoule dans un temps donné est beaucoup plus considérable que si ce petit tube n'avoit pas été ajouté ; et cela a lieu soit à l'égard de l'eau qui s'échappe en tombant perpendiculairement, soit à l'égard de celle qui s'échappe horizontalement au moyen d'une pareille ouverture percée au flanc du réservoir ; l'on ne peut cependant pas dire que cela vienne de ce que la hauteur de l'eau au-dessus de l'ouverture soit augmentée ; car, d'abord elle ne l'est pas dans le second cas, et dans le premier l'eau ayant reçu son accélération au sortir de l'ouverture du fond, est suivie d'une eau qui en a reçu une semblable et égale ; ainsi elle ne presse ni ne retarde celle qui coule dans le petit tuyau surajouté. On ne trouveroit même pas dans la cataracte newtonienne le moyen d'expliquer une accélération de vitesse au-delà de celle acquise au sortir de l'ouverture.

La première de ces expériences doit surtout exciter notre attention, parce qu'elle paroît tout-à-fait contraire à ce que l'on est d'ailleurs fondé à croire sur la vitesse avec laquelle l'eau sort de l'ouverture d'un réservoir. Mais une observation de Newton les concilie à bien peu près. Newton a en effet observé que l'eau sortant d'une ouverture de $\frac{1}{8}$ de pouce étoit à quelques lignes de distance, contractée de manière à n'avoir plus qu'environ les $\frac{2}{3}$ du diamètre de cette ouverture. Ainsi le cylindre d'eau réellement écoulé est moindre qu'il ne devoit être en raison du carré de 21 ou 441 à celui de 25 ou 625 : augmentons le dans le rapport de 625 à 441, et nous trouverons que le cylindre d'eau de même diamètre que l'ouverture auroit été

$2 \text{ A H} \times \frac{0.85}{1.000}$, ce qui est les $\frac{4}{5}$ de l'eau qui devoit s'écouler en supposant la vitesse en raison de la racine de la hauteur. Il est vrai que nous ne trouvons pas encore ici tout-à-fait notre compte, mais un grand nombre d'obstacles ne peut-il pas s'opposer à ce que cet écoulement soit aussi considérable qu'il devoit être. Tel est celui de la résistance de l'air qui presse sur l'ouverture. D'ailleurs, nous verrons même que selon la théorie rigoureuse, la vitesse avec laquelle l'eau s'échappe de l'ouverture n'est en raison de la racine de la hauteur de l'eau au-dessus que dans le cas où cette ouverture a un rapport assez petit en comparaison de la surface du réservoir.

Après tous ces préliminaires nous en venons enfin à la méthode annoncée au commencement de cet article pour déterminer d'après les vrais principes de la dynamique le mouvement de l'eau s'échappant d'une ouverture percée au dessous de son niveau. Daniel Bernoulli, fils de Jean, la déduit de la conservation des forces vives. Ce fut l'objet d'un mémoire qu'il donna dès 1726 à l'Académie de Pétersbourg, intitulé : *Theoria nova de motu aquarum, per canales quoscumque fluentium*. Il dit que son père ayant fait voir combien le principe des forces vives est utile pour la résolution des problèmes qui seroient fort difficiles à résoudre par des voies directes, il lui est venu dans l'esprit de rechercher si ce principe ne pouvoit pas être utile pour découvrir la vraie théorie des eaux coulantes dans des tuyaux, et que l'événement a secondé ses espérances.

Il y eût aussi à ce sujet entre Daniel Bernoulli et le comte Riccati une discussion poussée assez vivement de part et d'autre. Mais la discussion physico-mathématique dégénéra en une querelle de procédés, en quoi néanmoins il me semble que le tort n'étoit pas du côté de Bernoulli. On peut voir au surplus les pièces de ce petit procès dans les *Exercitationes quaedam mathematicae*, de Daniel Bernoulli, imprimées à Padoue en 1724. C'est presque uniquement l'histoire des procès qu'il eut à soutenir contre Rizzeti, à l'occasion d'un problème sur les jeux que ce dernier, esprit faux et pointilleux, prétendoit mal résolu par Jean Bernoulli et Montmort, et avec Riccati sur la manière dont Michelotti envisageoit le problème du mouvement des eaux. En général il paroît que l'on ne voyoit en Italie que de mauvais œil l'accueil que la république de Venise avoit fait à ces géomètres allemands, élèves de Leibnitz et Bernoulli ; aussi abandonnèrent-ils bientôt la partie.

Pendant que Daniel Bernoulli s'occupoit de l'explication des phénomènes des eaux coulantes dans des canaux, son illustre père travailloit sur le même objet, mais d'après des principes différens. Il paroît même qu'il étoit en possession de la principale partie de sa théorie sur ce sujet dès 1726. Mais son ouvrage a resté jusqu'à sa mort parmi ses manuscrits ; on voit seulement par une lettre d'Euler qu'il l'avoit communiqué à ce dernier qui lui témoigne l'extrême satisfaction qu'il en avoit reçue, il n'a vû le jour par la voie de l'impression que dans le quatrième volume de ses œuvres, sous le titre de, *Joh. Bernoulli hydraulica nunc primum detecta et directe demonstrata ex principiis pure mechanicis, anno 1732*. Il y procéda en effet plus directement que n'avoit fait son fils, mais aussi d'une manière qui prêteroit peut être sujet à contradiction, si les deux théories ne se confirmoient pas l'une et l'autre aussi bien qu'elles le font,

car, il y emploie une considération qui a quelque ressemblance avec l'idée de la cataracte newtonienne quoiqu'elle en diffère cependant par un caractère essentiel, mais il vaut mieux revenir au travail de Daniel. Le mémoire dont nous avons parlé page 686, n'étoit que le germe d'un ouvrage beaucoup plus considérable, car, s'étant occupé depuis l'époque ci-dessus, et principalement à Pétersbourg, de faire des expériences propres à confirmer et éclaircir sa théorie; il fut enfin, en 1738, en état de publier son grand ouvrage intitulé: *Hydrodynamica, seu de viribus et motibus fluidorum commentarii*. (Argent. in-4°.)

Mais l'incertitude du principe qui n'avoit pas encore été démontré d'une manière générale devoit en jeter aussi sur les propositions qui en résultent, et faisoit désirer une théorie plus sûre, et appuyée uniquement sur les loix fondamentales de la mécanique. D'Alembert éleva des objections contre l'hydrodynamique de Daniel Bernoulli. Kästner y répondit dans les *Novi comm. S. R. gott.*, t. I. Maclaurin, et Jean Bernoulli entreprirent de donner une théorie, l'un dans son *Traité des fluxions*, et l'autre dans sa *Nouvelle hydraulique* dont nous avons parlé. Leurs méthodes quoique très-différentes conduisent aux mêmes résultats que le principe de la conservation des forces vives; mais il faut avouer que celle de Maclaurin n'est pas assez rigoureuse, et paroît arrangée d'avance, conformément aux résultats qu'il vouloit obtenir. Et quant à la méthode de Jean Bernoulli, sans adopter en entier les difficultés que d'Alembert lui a opposées, la Grange convient qu'elle laisse encore à désirer du côté de la clarté et de la précision.

D'Alembert, en généralisant la théorie de Jacques Bernoulli sur les pendules étoit parvenu à un principe de dynamique simple et général, qui réduit les loix du mouvement des corps à celles de leur équilibre. L'application de ce principe au mouvement des fluides se présentoit d'elle-même, et l'auteur en donna d'abord un essai à la fin de sa *Dynamique*, imprimée en 1743. Il la développa ensuite avec tout le détail convenable dans son *Traité des fluides* qui parut l'année suivante, et qui renferme des solutions aussi directes qu'élégantes des principales questions qu'on peut proposer sur les fluides qui se meuvent dans des vases; mais ces solutions, comme celles de Daniel Bernoulli étoient appuyées sur deux suppositions qui ne sont pas vraies en général. 1°. Que les différentes tranches du fluide conservent exactement leur parallélisme, ensorte qu'une tranche prend toujours la place de celle qui la précède. 2°. Que la vitesse de chaque tranche ne varie point en direction, c'est-à-dire que tous les points d'une même tranche sont supposés avoir une vitesse égale et parallèle; lorsque le fluide coule dans des vases

ou tuyaux fort étroits : ces suppositions sont très-plausibles et paroissent confirmées par l'expérience. Mais hors de ce cas elles s'éloignent de la vérité, et il n'y a plus alors d'autre moyen pour déterminer le mouvement du fluide que d'examiner celui que chaque particule doit avoir. Voyez le Mémoire de Borda sur l'écoulement des fluides par l'orifice des vases, *Mémoire de l'Académie*, de 1766.

Clairaut avoit donné dans sa *Théorie de la figure de la terre*, imprimée en 1743, les loix générales de l'équilibre des fluides, dont toutes les particules sont animées par des forces quelconques ; il ne s'agissoit donc que de passer de ces loix à celles de leur mouvement, par le moyen du principe auquel d'Alembert avoit réduit à cette même époque toute la dynamique. Ce dernier fit, quelques années après, ce pas important à l'occasion du prix que l'Académie de Berlin proposa en 1750, sur la *Théorie de la résistance des fluides*, et il donna le premier, en 1752, dans son *Essai d'une nouvelle théorie sur la résistance des fluides*, les équations rigoureuses et générales du mouvement des fluides, soit incompressibles, soit compressibles et élastiques, équations qui appartiennent à la classe de celles qu'on nomme à différences partielles, parce qu'elles sont entre les différentes parties des différences relatives à plusieurs variables. Par cette découverte toute la mécanique des fluides fut réduite à un seul point d'analyse ; et si les équations qui la renferment étoit intégrables, on pourroit dans tous les cas déterminer complètement les circonstances du mouvement et de l'action d'un fluide mû par des forces quelconques ; malheureusement on n'a pû jusqu'à présent en venir à bout que dans des cas très-limités.

C'est donc dans ces équations et dans leur intégration que consiste toute la théorie de l'hydrodynamique. D'Alembert employa d'abord pour les trouver une méthode un peu compliquée, il en donna ensuite une plus simple ; mais cette méthode étant fondée sur les loix de l'équilibre, particulières aux fluides, fait de l'hydrodynamique une science séparée de la dynamique des corps solides. La réunion que le cit. la Grange a faite dans la première partie de sa *Mécanique analytique* de toutes les lois de l'équilibre des corps tant solides que fluides dans une même formule, et l'application qu'il fait ensuite de cette formule aux loix du mouvement, l'a conduit naturellement à réunir de même la dynamique et l'hydrodynamique comme des branches d'un principe unique, et comme des résultats d'une seule formule générale. C'est ce que la Grange fait pour compléter son travail sur la mécanique analytique, où il donne les équations générales pour le mouvement des fluides incompressibles, (pag. 437).

Ses

Ses solutions sont conformes à celles que les premiers auteurs auxquels on doit des théories du mouvement des fluides, ont trouvées, d'après la supposition que les différentes tranches du fluide conservent exactement leur parallélisme en descendant dans le vase. (Voyez l'*Hydrodynamique* de Daniel Bernoulli, l'*Hydraulique* de Jean Bernoulli, et le *Traité des fluides* de d'Alembert). La Grange fait voir que cette supposition n'est exacte que lorsque la largeur du vase est infiniment petite; mais quelle peut dans tous les cas être employée pour une première approximation, et que les solutions qui en résultent sont exactes aux quantités du second ordre près, en regardant les largeurs du vase, comme des quantités du premier ordre. Mais le grand avantage de cette analyse est qu'on peut par son moyen approcher de plus en plus du vrai mouvement des fluides dans des vases de figure quelconque: car, ayant trouvé les premières valeurs des inconnues, en négligeant les secondes dimensions des largeurs du vase, il sera facile de pousser l'approximation plus loin, en ayant égard successivement aux termes négligés; ce détail n'a de difficulté que la longueur du calcul, et la Grange ne le donne pas. Mais il fait l'application des mêmes formules, au mouvement d'un fluide contenu dans un canal peu profond et presque horizontal, et en particulier au mouvement des ondes.

Le calcul intégral des équations aux différences partielles est encore bien éloignée de la perfection nécessaire pour l'intégration d'équations aussi compliquées que celle dont il s'agit. Et il ne reste d'autre ressource que de simplifier cette équation par quelque limitation.

On suppose pour cela que le fluide dans son mouvement ne s'élève, ni ne s'abaisse au-dessous ou au-dessus du niveau qu'infiniment peu, ensorte que les ordonnées de la surface supérieure soient toujours très-petites, et qu'outre cela les vitesses horizontales soient aussi infiniment petites. C'est avec ces conditions que la Grange essaye de résoudre ces problèmes. Il trouve une parfaite analogie entre les ondes formées à la surface d'une eau tranquille, par les élévations et les abaissemens successifs de l'eau, et les ondes formées dans l'air, par les condensations et raréfactions successives de l'air, analogie que plusieurs auteurs avoient déjà supposée, mais que personne n'avoit encore rigoureusement démontrée.

Ainsi, comme la vitesse de la propagation du son se trouve égale à celle qu'un corps grave acquerrait en tombant de la moitié de la hauteur de l'atmosphère supposée homogène, on en peut déduire la vitesse de la propagation des ondes comme nous le verrons dans l'article XII.

Pour les fluides élastiques, la Grange donne une formule qui

renferme deux théories importantes, celle du son de flûte, ou tuyau d'orgue, et celle de la propagation du son dans l'air libre. Il ne s'agit que de déterminer convenablement les deux fonctions arbitraires, et voici les principes qui le guident dans cette détermination.

Pour les flûtes on ne considère que la ligne sonore qui y est contenue. On suppose que l'état initial de cette ligne soit donné, cet état dépend des ébranlemens imprimés aux particules, et on cherche la loi des oscillations.

Voyez au reste sur la théorie des flûtes les deux premiers volumes de *Turin*, les *Mémoires de Paris*, pour 1762, et les *Novi commentarii* de Pétersbourg, tome XVI.

Considérant ensuite une ligne sonore d'une longueur indéfinie qui ne soit ébranlée au commencement que dans une très petite étendue, on aura le cas des agitations de l'air produites par les corps sonores.

En supposant, avec la plupart des physiciens, l'air 850 fois plus léger que l'eau, et l'eau 14 fois plus légère que le mercure, on a 1 à 11900 pour le rapport du poids spécifique de l'air à celui du mercure. Or, prenant la hauteur moyenne du baromètre de 28 pouces, il vient 333200 pouces, ou $27766\frac{2}{3}$ pieds pour la hauteur d'une colonne d'air uniformément dense et faisant équilibre à la colonne de mercure dans le baromètre. Donc la vitesse du son sera due à une hauteur de $13883\frac{1}{3}$ pieds et sera par conséquent de 915 par seconde. L'expérience donne environ 1088; ce qui fait une différence de près d'un sixième; mais cette différence ne peut être attribuée qu'à l'incertitude des résultats fournis par l'expérience. Sur quoi, voyez surtout un mémoire de Lambert, parmi ceux de l'Académie de Berlin, pour 1768.

On explique de la même manière les échos composés en supposant que la ligne sonore soit terminée des deux côtés par des obstacles immobiles qui réfléchiront successivement les fibres sonores, et leur feront faire des espèces d'oscillations continuelles. Sur quoi on peut voir les ouvrages cités, ainsi que les *Mémoires de l'Académie de Berlin*, pour 1759 et 1765.

On trouvera de plus grands détails sur les loix, le calcul et l'application de ces principes dans deux excellens ouvrages, le *Traité d'Hydrodynamique* du cit. Bossut, 1786, et dans la *Nouvelle Architecture hydraulique* du cit. Prony, 1790.

La chaire d'hydrodynamique que M. Turgot, contrôleur-général, fit établir au Louvre, en 1775, fut une digne récompense des travaux du cit. Bossut dans cette partie.

X I.

Du cours des Fleuves.

Parmi les parties de l'hydraulique et de l'hydrodynamique , il n'en est pas de plus intéressante que celle qui a pour objet le cours des rivières et des fleuves. Car, si ces courants d'eau qui doivent porter la fécondité dans les pays qu'ils arrosent, sont un bienfait de la nature, combien de fois y portent-ils le ravage et la désolation? L'art de les enchaîner, pour ainsi dire, est devenu un art nécessaire dans les pays exposés à ces dévastations; il a fallu étudier les mouvemens de ces grandes masses d'eau, connoître les effets de leurs réunions et de leurs séparations.

La partie de l'hydraulique dont nous parlons a pris surtout naissance en Italie; car cette partie de l'Europe reçoit des Apennins une foule de torrens qui, avant de se réunir dans le Pô, où ils tombent pour la plupart, traversent une multitude de principautés particulières, dont chacune tâche d'écarter de soi le fléau dont elle est menacée. Delà les démêles anciens et presque continuels entre les villes de Bologne, de Modène, Ferrare &c. sur lesquels il a été fait des volumes immenses d'écritures, pour la plupart inutiles ou nuisibles; car souvent elles ont été l'ouvrage de gens ignorans en ces matières, et d'ailleurs, il n'y a guère qu'un siècle et demi que l'on a commencé à démêler les vrais principes qui doivent guider à cet égard.

On imprima à Florence, en 1722, un recueil italien des auteurs qui ont traité du mouvement des eaux. Le P. Ximenez, à Florence, en a fait un autre dont les quatre premiers volumes ont paru à Parme, en 1766, sous le titre: *Nuova raccolta d'autori che trattano del moto dell' acque*. On cite encore les Règles de Castelli, de Guglielmini, de Grandi; ce sont des auteurs primitifs; aussi l'on commence par le traité du P. Castelli, *della misura dell' acque correnti*; on y a joint ses Lettres à Galilée, à Cavalieri; ses considérations sur les lagunes de Venise, sur les eaux du Ferrarois, sur les marais Pontins, et des remarques de Montanari, Viviani et Cassini. Vient ensuite *La misura dell' acque correnti di Domenico Guglielmini*.

Le second volume commence par son *Traité de la nature des fleuves*, et finit par les *Notes* d'Eustache Manfredi.

Le troisième volume contient le *Traité du mouvement des eaux* du P. Guido Grandi, et ses remarques sur plusieurs travaux faits ou projetés en Italie. L'ouvrage de Poléni, sur le

Mouvement des eaux mêlées; un ouvrage de Buteone, sur la *Mesure des eaux courantes*, et les remarques de Poléni.

Le quatrième renferme des lettres inédites de Galilée, de Castelli, d'Arrighetti, de Guiducci, Baliani, et plusieurs pièces relatives à la contestation ancienne de Bologne et de Ferrare sur l'introduction du Reno dans le Pô.

Le tome V contient un choix fait dans l'ouvrage de Zandrini des choses utiles à la pratique, et des rapports sur les eaux de Bologne.

Le tome VI contient des expériences de Genneté sur le cours des fleuves, et la réfutation par Bonati; des remarques d'Eustache Manfredi, sur l'élévation continuelle du fond de la mer, un discours d'Eustache Zanotti sur la disposition du lit des fleuves près de leur embouchure, un mémoire de Bolognini sur les marais Pontins.

Le tome VII, a pour objet différens torrens d'Italie, et un ouvrage de Frisi, sur la manière de régler les fleuves et les torrens, nous en parlerons ci-après.

Le principal ouvrage du recueil italien est *Traité de la nature des fleuves*. Voici la notice qu'en donne le cit. Bossut dans son *Hydrodynamique*, tome II. page 445. Ce traité qui eut dans son temps la plus grande célébrité, mérite encore aujourd'hui l'attention des savans hydrauliciens; et Eustache Manfredi en a enrichi les dernières éditions de notes instructives.

Il est évident que l'eau prendra du mouvement, pourvu quelle soit plus élevée que l'endroit vers lequel elle est supposée avoir la liberté de s'étendre. Ainsi un fleuve dont la surface est horizontale, ne laissera pas de s'écouler s'il a une décharge placée un peu plus bas que sa surface: dans l'état physique et actuel des choses, les lits des rivières sont inclinés, du moins dans la plus grande partie de leur étendue. Leurs différentes inclinaisons et leur sinuosités dépendent de la résistance du fond et des obstacles que l'eau rencontre.

L'eau d'une rivière, en frottant contre le fond et les bords du lit, en détache nécessairement de la terre qui est emportée par le courant; ainsi la rivière doit s'approfondir et s'élargir, tant que la force de l'eau n'éprouvera pas une résistance égale qui la détruise. Mais comme le lit de la rivière, en s'agrandissant perd peu-à-peu de sa pente, que la vitesse primitivement acquise diminue par les coudes du lit ou par d'autres obstacles; qu'au contraire, les terres à une plus grande profondeur, ont plus de tenacité: il arrive enfin que la force des eaux, et la résistance des terres se mettent sensiblement en équilibre. Si vous placez quelqu'obstacle dans la rivière, la force

de l'eau luttera contre cet obstacle et rétablira peu-à-peu, d'une manière ou d'autre, l'état d'équilibre.

Les fleuves doivent plutôt cesser de s'approfondir que de s'élargir : car deux causes, la tenacité du fond et la diminution de la vitesse concourent à ralentir ou à empêcher tout-à-fait l'approfondissement du lit ; mais en même-temps la diminution de la pente et de la vitesse doit faire augmenter la hauteur de l'eau dans la rivière, d'où résulte une augmentation dans la pression, et par conséquent aussi dans le frottement qui tend à emporter les terres des bords, ou à les faire ébouler dans la rivière. C'est par cette raison que toutes choses d'ailleurs égales, les fleuves qui coulent dans des lits de matières homogènes et de peu de consistance, sont beaucoup plus larges que profonds : tels sont par exemple, le Pô de la Lombardie, et le Rénô.

Tous les fleuves ne forment pas leurs lits de la même manière, car il est certain, par exemple qu'un même courant creuse et emporte plus facilement un fond de sable, qu'un fond composé de craie ou de gravier. Mais supposons que la force de l'eau et la résistance du terrain soient données, et voyons l'effet précis qui doit résulter de la combinaison de ces deux forces.

Qu'on se représente pour cela, plusieurs plans de même longueur et différemment inclinés à l'horizon : supposons ensuite un corps grave qui les parcourt successivement. Il est évident que la pesanteur relative du corps en question est d'autant plus grande, que le plan sur lequel il se meut, approche plus d'être vertical. Si maintenant on imagine que les plans proposés sont hérissés de pointes qui résistent au mouvement du corps on verra que pour imprimer à ce corps une même vitesse il faudra ajouter à la pesanteur relative une force étrangère d'autant plus grande que la pesanteur relative est plus petite, ou que le plan sur lequel le corps est posé approche plus d'être horizontal. Les obstacles répandus sur les plans résistent donc, toutes choses d'ailleurs égales, avec d'autant plus d'avantage que les plans approchent plus d'être horizontaux. Il en est de même du terrain qui forme le lit d'une rivière : plus le lit approche d'être horizontal, plus il a de consistance ; et plus par conséquent, il oppose d'obstacles à la force du courant.

Il suit delà, que si l'inclinaison du fond du lit est suffisante pour empêcher la corrosion que la force du courant tend à produire, et que cette dernière force vienne à augmenter, elle tendra, par cette augmentation, à creuser le lit et à l'élargir. Or, lorsqu'une section transversale et perpendiculaire au fleuve augmente, la vitesse diminue nécessairement, ou répond à une moindre pente. Ainsi, à mesure qu'un fleuve s'éloigne de sa source ou s'approche de la mer, et que sa quantité d'eau ou

sa force vient à augmenter, il doit nécessairement perdre de plus en plus de sa pente, comme l'expérience le fait voir. Delà vient principalement que si plusieurs fleuves se réunissent, le lit commun a moins de pente que n'en avoient les lits particuliers des mêmes fleuves avant leur réunion.

Lorsqu'un fleuve contient par tout la même quantité d'eau, le fond peut être considéré comme rectiligne sur une étendue peu considérable; mais sur un long espace, ce fond forme réellement une courbe que l'on peut regarder comme une spirale dont les tangentes font par tout des angles égaux avec les perpendiculaires correspondantes, tirées du centre de la terre, qui est en même temps le centre de la spirale. Si deux fleuves inégaux en masse, ont des vitesses égales, le plus considérable aura une moindre pente, toutes choses d'ailleurs égales; puisqu'alors la plus grande force du courant doit être contrebalancée par une plus grande résistance, qui provient d'une moindre inclinaison du lit.

Lorsqu'une rivière à la force primitivement acquise de corroder le fond subséquent; ce fond finira par devenir horizontal; car, si l'on prétendoit qu'il pût conserver quelque pente un peu sensible, il en résulteroit une augmentation de vitesse, et par conséquent aussi de force. Or, dans son premier état le courant pouvoit corroder le fond. Donc sa force ayant augmenté, il n'en sera que plus capable de produire le même effet, et par conséquent de rendre le fond horizontal.

Delà il suit que si la force de l'eau vient à augmenter, la grandeur du lit augmentera: mais sa situation horizontale ne sera point changée, pourvu que la résistance du terrain soit la même, et que les autres circonstances soient aussi les mêmes.

Si le lit d'un fleuve, étant devenu horizontal dans une partie, vient à se rétrécir dans la partie suivante, il se formera d'une partie à l'autre une contre-pente dont l'angle sera continuellement rongé; et le lit dans la seconde partie tendra vers la position horizontale. Mais il pourra se faire que la force de l'eau ne soit pas capable de l'y amener entièrement, et qu'il conserve de la pente. Il peut arriver d'ailleurs une multitude de variétés, soit par l'accroissement des eaux, soit par le transport des matières quelles entraînent et quelles déposent successivement.

L'auteur ayant établi que la résistance du terrain étant donnée, plus le courant a de force, moins la rivière a de pente, il conclut réciproquement que la force du courant étant donnée, plus la tenacité du courant est grande, plus la rivière aura de pente. Delà vient que les fleuves dont le fond est composé de craie

ou de tuf, ont plus de pente que ceux dont le fond est de sable ou de limon.

Lorsque le fond sera composé de pierres, de gravier et autres matières que l'eau peut entraîner, la pente sera d'autant moindre que les parties dont il s'agit auront moins de pesanteur spécifique; car moins ces parties sont pesantes, moins elles résistent à l'eau, et plus la rivière a de force pour creuser le lit et le rendre horizontal. De plus, la figure des mêmes parties peut présenter plus ou moins d'obstacle au choc de l'eau: ce qui doit produire encore des variétés dans la vitesse et dans la pente. Les fleuves qui coulent entre des montagnes, où dont le fond est de roc, doivent avoir, et ont en effet, plus de pente que les fleuves qui coulent dans les plaines, parce que le fond de ceux-ci est extraordinairement composé de sables.

Comme la plupart des fleuves, dans la partie supérieure de leurs cours ont leur lit rempli de grosses pierres, et que ces pierres vont en diminuant de grosseur à mesure qu'on s'éloigne de la source; on voit que dans les fleuves qui roulent ainsi sur un fond pierreux, ce fond doit former une courbe concave, qui, en s'éloignant de la source fait des angles de plus en plus petits avec l'horizon. Si un fleuve se meut entre des montagnes, sur un fond composé de pierrailles, et qu'ensuite dans la plaine le fond soit composé d'un sable peu uniforme le fond entier sera composé de deux courbes, l'une concave, l'autre convexe, et qui se raccordent.

Si un fleuve court sur un fond qui résiste à l'excavation, et que cette excavation, pour être portée au point requis par la force du courant combinée avec la résistance du terrain demande un certain temps; qu'ensuite on suppose qu'avant qu'elle soit achevée, le fleuve reçoive de la nouvelle matière, de même espèce que le fond; le fleuve tendra à emporter cette matière, ou à creuser de nouveau le fond: de sorte qu'on pourra regarder le fond comme établi entre deux termes, dont l'un répond à la plus grande hauteur que la nouvelle matière peut occasionner, l'autre à la plus grande profondeur ou l'excavation est réellement portée. On sent assez que l'élévation et l'abaissement de l'eau produisent des variétés dans la force du courant. Mais dans toutes ces choses, il faut prendre des résultats moyens.

Un torrent qui vient se jeter dans un fleuve y apporte non-seulement de l'eau, mais encore des matières étrangères, d'où résultent des changemens dans le lit du fleuve: il est clair, par ce qui précède, que plus la durée des crues du torrent sera petite, et plus les crues seront petites, ou plus l'un et l'autre auront lieu à-la fois, et moins le fleuve aura de pente.

Lorsque les matières étrangères à l'eau, apportées par le torrent

viendront à tomber au fond du fleuve, elles l'exhausseront nécessairement : quand le cours du torrent cessera, ces matières seront corrodées et emportées par le courant du fleuve. Si pour produire cet effet il faut plus de temps qu'il ne s'en écoule entre deux affluences consécutives du torrent, le fond ne pourra pas être réduit à la moindre pente que demandent la force de l'eau et la résistance du terrain ; mais ce fond s'établira entre deux termes ; dont l'un est celui qui répond à la plus grande corrosion que peut faire l'eau de la rivière ; l'autre est celui qui répond à la plus grande élévation que peut produire la matière apportée par le torrent.

Le cit. Bossut donne également une notice des autres ouvrages contenus dans le *Recueil italien* ; il faut voir sur tout le jugement qu'il porte sur l'ouvrage du P. Frisi.

Mais l'Italie n'a pas fourni d'ouvrage plus complet que celui du P. Lecchi, ingénieur célèbre du Milanez. *Idrostatica esaminata ne' suoi principi, e stabilita nelle sue regole della miniera delle acque correnti. Dal P. Antonio Lecchi, della comp. di G. Milano, 1765, in-4°. 460 pages.* Cependant il convient que son principal but a été de déterminer les savans à faire des recherches sur une matière encore très-neuve, et de soumettre lui-même à un examen plus rigoureux ce que les physiciens et les géomètres en ont pensé et écrit depuis près de deux siècles ; de reconnoître la vérité ou l'incertitude des premiers principes de l'hydraulique adoptés jusqu'ici, de séparer les véritables de ceux qui ne sont que douteux, et dont on n'a fait usage que trop souvent. Il traite d'abord des vîtesses et de la quantité, soit absolue, soit relative de l'eau qui sort par les ouvertures des vases et des réservoirs, suivant les différentes hauteurs. Il cherche ensuite avec soin si cette loi peut s'appliquer aux grands volumes d'eau qui coulent dans les canaux et dans les fleuves. Enfin, il démontre les règles de pratique les plus sûres pour la division et la mesure des eaux courantes. Nous allons reprendre ces trois grands objets, et donner une idée de la manière dont l'auteur les a remplis. Avant de traiter de la loi des vîtesses, le P. Lecchi examine les différens moyens que les auteurs ont employés pour connoître les lois du mouvement des fluides, les uns, *à priori*, ont cherché par les principes généraux de la mécanique, la vîtesse que doit avoir chaque particule d'eau en sortant d'une ouverture quelconque suivant les circonstances. Mais cette méthode est extrêmement incertaine et arbitraire, comme l'on en peut juger par les différences qui se trouvent entre les auteurs qui l'ont employée.

Les autres ont cru pouvoir rapporter la vîtesse, avec laquelle l'eau s'écoule d'une ouverture, à la seule pression du fluide supérieur :

périeur : de ce principe on a conclu que la vitesse étoit proportionnée à la hauteur de l'eau contenue dans le vase ; tel est le sentiment de Castelli. D'autres en ont conclu que les vitesses étoient seulement comme les racines de ces hauteurs. Enfin , il y en a qui se sont figuré que cette vitesse étoit l'effet d'une chute naturelle , semblable à celle de tous les corps graves , et sujette aux mêmes degrés d'accélération. Mais il y a eu des auteurs plus sages qui prenant la question à *posteriori* , et partant de l'expérience actuelle y ont cherché quelque loi générale qui , par la nature des fluides pût être supposée avoir lieu toujours dans leurs mouvemens. L'auteur s'occupe donc à réfuter les théories de tous ceux qui n'ont pas employé l'expérience pour les appuyer , tels que Castelli , Varignon , Newton , Maclaurin , 'sGravesande , Euler , Bernoulli et d'Alembert. Il fait voir quelles sont appuyées ou sur des principes indirects , ou sur diverses hypothèses arbitraires. Mais ce qu'il y a de fâcheux , c'est qu'il conclut , ainsi que d'Alembert , qu'on ne peut espérer aucune théorie générale du mouvement des fluides.

Le paralogisme de Castelli et de ceux qui ont suivi son sentiment est prouvé par le P. Lecchi , d'une manière assez satisfaisante : il est bien vrai que la gravité est la même dans les solides et dans les fluides : elle est la cause en vertu de laquelle les corps étant arrêtés par un plan , le pressent , et étant libres descendent par un mouvement accéléré. Mais il faut bien distinguer l'effet de la pression d'un fluide ou d'un solide soutenu en repos d'avec l'effet de la pesanteur. Dans le premier cas , la pression du fluide est bien proportionnelle à sa hauteur et à sa gravité spécifique , parce qu'il est employé tout entier à presser , mais dans le second cas , la vitesse n'est point proportionnelle à la hauteur et à la gravité spécifique du fluide , parce que la hauteur va toujours en diminuant tandis que le mouvement s'accélère toujours par la chute ; delà naît une progression de gravité et une de pression ; la première dont les accroissemens sont égaux , la seconde dont les accroissemens sont toujours de plus en plus petits. Ainsi , dans l'un et l'autre cas les vitesses sont proportionnelles à la somme des actions successives , lesquelles ne proviennent pas de la pression la plus forte , qu'il y avoit au commencement , mais de toutes les actions successives. Ainsi , quoique la première pression ait été proportionnelle à la hauteur du fluide , on ne doit pas conclure avec Castelli que la vitesse produite doive être proportionnelle à cette hauteur. Lecchi examine si du même principe de la pression des fluides on peut tirer une doctrine toute opposée à la précédente , comme Varignon l'a fait , en supposant que la vitesse des eaux qui s'écoulent des vases suive la proportion des racines des hau-

teurs. Sa démonstration conduit à une conséquence différente de celle de Castelli, mais qui est fondée sur le même principe : que les pressions sont comme les hauteurs des colonnes qui pressent. Il y a dans Varignon une équivoque semblable à celle de Castelli : il ne distingue pas le passage du fluide de l'état de repos à celui du mouvement, qui fait diminuer la pression, et l'on peut démontrer que les pressions pendant le premier instant de ce passage sont diminuées proportionnellement à la hauteur primordiale qui avoit lieu dans l'état de repos. La cataracte dont Newton se servit, le bouillon d'eau employé par Jean Bernoulli et la démonstration prétendue de Herman, renfermoient de nouvelles incertitudes.

Il s'agit ensuite de l'hypothèse adoptée par Newton, et par d'autres écrivains qui considèrent toutes les circonstances du mouvement de l'eau qui sort d'un vase, comme si elle étoit tombée réellement depuis la superficie jusqu'à l'ouverture avec un mouvement accéléré. C'est de cette considération que Newton déduit sa cataracte, hypothèse qu'il applique ensuite au mouvement de l'eau ; mais ces suppositions et leurs conséquences sont détruites par les expériences de Guglielmini, et Manfredi, et ne peuvent se concilier avec la multitude des forces qui se combinent dans l'écoulement d'un fluide et qui, l'éloignant de l'état d'un solide, rendent très-différente la loi de son mouvement. Quoique la figure de la cataracte de Newton se réduise suivant ses commentateurs, à une hyperbole du cinquième degré, on en démontre l'insuffisance par plusieurs raisons, par les expériences de Bernoulli, et par celles de l'auteur.

Quant à l'hypothèse de Jean Bernoulli, Lecchi fait voir qu'elle est contraire aux loix de l'hydrostatique. Le mouvement de plusieurs corps qui agissent mutuellement les uns sur les autres, à quelques distances, est trop au-dessus des forces de la géométrie pour qu'on puisse jamais espérer une théorie du mouvement des eaux, déduite des principes de la mécanique. Aussi d'Alembert, nous dit-il, page 95, de son *Traité des fluides*, qu'il seroit difficile de démontrer ses suppositions d'une manière rigoureuse, mais qu'il faudroit renoncer à toute théorie sur le mouvement des fluides si on refusoit de les admettre. Le P. Lecchi examine les différentes théories *à priori*, fondées sur des principes indirects, ou sur des suppositions secondaires, comme celles de Jean, et Daniel Bernoulli, de Maclaurin, de d'Alembert. Telles sont encore la conservation des forces vives, appliquée par Bernoulli au mouvement des fluides, les nouvelles suppositions que Daniel Bernoulli et d'Alembert ont ajoutées à ce principe. Parmi les dernières, il met le parallélisme des couches, qui ne sauroit avoir lieu que quand le trou est extrêmement petit, et la hauteur très-grande.

Ainsi l'auteur a épuisé la célèbre question de la force de l'eau qui sort par l'ouverture d'un vase. Newton dans la trente-sixième proposition du second livre de sa *Philosophie Naturelle*, édition de 1713, trouva par son calcul une force double de celle qu'il avoit trouvée dans sa première édition. Depuis ce temps-là on n'a guère été plus d'accord. L'auteur examine la décision de Daniel Bernoulli, la distinction entre l'état de repos et celui de mouvement, les méthodes différentes employées par les commentateurs de Newton et par Manfredi. Il établit l'état de la question, la doctrine des forces, leur application à la mesure de la force de l'eau qui sort des vases suivant Newton, Manfredi et Bernoulli; les exceptions que chacun admet, la mesure du solide hyperbolique, formé par le cataracte de Newton, qui est le double de celle d'une simple colonne d'eau qui sort.

Il traite ensuite de la pression qu'un fluide en mouvement exerce contre un corps solide. Après différentes comparaisons de résistances et de pression, le P. Lecchi déduit la loi fondamentale de la résistance des fluides, d'un principe qui lui paroît plus simple que celui de d'Alembert; il expose les principes de chaque théorie, leur application quoique sans calcul, et le défaut général de ces différentes hypothèses. Il donne une idée des nouveaux calculs de Newton, de Bernoulli, de d'Alembert, des différences de leurs résultats, des abus de l'analyse fondée sur des suppositions arbitraires, et de l'esprit de système trop dominant dans les écrits des modernes. Il compare les formules analytiques de d'Alembert avec les expériences de Kraft; enfin, il conclut qu'on ne sauroit espérer une théorie certaine, et qu'il faut s'en tenir à l'expérience en distinguant les différens cas où elle a lieu. A cette occasion il parle de celles qui ont été faites par Mariotte, par l'Académie des Sciences de Paris, et par celle de Pétersbourg, et de la manière de perfectionner en général ces sortes d'expériences.

L'usage des expériences, pour trouver la loi du mouvement d'un fluide qui sort d'un vase, fait la matière d'un chapitre. Le P. Lecchi réfute ce que disoit Poléni, que l'expérience est insuffisante sans le secours de la théorie, et il examine quelle sorte d'analogie a la force de preuve. On y trouve ensuite une comparaison des expériences de Toricelli et de Mariotte dans les jets d'eaux, les variations de hauteurs et leurs règles. Le P. Lecchi résout aussi la difficulté de Manfredi qui prétendoit trouver une différence sur le temps de la chute des solides et des fluides. Il donne la manière de trouver la vitesse respective et absolue des jets horizontaux. Il rapporte les observations de sGravesande, de Newton, du P. Boscovich, le résultat de leurs

calculs, les exceptions qu'il y faut faire, les défauts qu'il trouve dans quelques expériences de Bernoulli et de Kraft, et les attentions qu'il faut avoir pour tirer quelque chose des observations.

Dans un autre chapitre, le P. Lecchi explique la façon de déterminer par expérience si la quantité d'eau qui sort par l'ouverture d'un vase, est proportionnelle à la vitesse et à la surface de l'ouverture; les expériences de Guglielmini et de la plupart des auteurs se bornent au seul cas des ouvertures qui sont très-petites, semblables, et semblablement situées. Il fait voir le danger de se tromper quand l'ouverture est grande et voisine de la surface; le changement dans le centre de la vitesse moyenne, la grande difficulté entre Grandi et Manfredi, au sujet de la vitesse de l'eau sortant des vases, la moitié moindre que celle des corps solides qui tombent d'une hauteur égale à celle de la surface de l'eau; la solution de Newton, la limitation de sa doctrine, reconnue par ses commentateurs, par Bernoulli et par Poléni: cette première partie du livre du P. Lecchi finit par des détails sur l'effet que produisent les tubes ajustés aux ouvertures suivant leur position ou leur longueur, et par de nouvelles expériences sur les différentes quantités d'eau qui, avec une parabole de même amplitude, sortent par des tuyaux dont on fait varier la position, la figure et la longueur.

Lecchi, après avoir donné tout ce qu'il pouvoit de théorie passe aux expériences; il examine d'abord si l'on peut faire usage pour la vitesse des fleuves, de la règle qu'il a établie dans sa première partie pour les eaux qui sortent par les ouvertures des vases, savoir que ces vitesses sont comme les racines des hauteurs; il cherche si cette règle peut servir dans les fleuves, du moins en substituant à la hauteur réelle de la source une certaine hauteur équivalente. A cet égard l'expérience montre une très-grande différence entre les loix des vitesses dans les eaux qui coulent librement par des ouvertures et celles qui sortent des lacs ou étangs par des canaux rétrécis. Il y a à ce sujet des expériences remarquables de Poléni, par lesquelles on sait que la seule apposition d'un canal à l'ouverture d'un vase, augmente la quantité d'eau qui en sort, quoique le diamètre de l'ouverture n'ait pas changé. L'auteur ajoute à cela divers changemens qui arrivent suivant la différente longueur des tubes; il indique plusieurs expériences qu'on pourroit faire, il donne une démonstration du théorème fondamental de Guglielmini et de Grandi. Il montre l'incertitude de la table de Guglielmini, la différence des vitesses entre celles qui tombent librement et celles qui coulent dans les canaux. Il y a une action et une réaction dans le total du corps d'un fleuve, qui rend son cours bien différent de celui d'une eau abandonnée à sa seule pesanteur.

Dans un autre mémoire, le P. Lecchi parle de l'altération que la résistance cause à la vitesse de l'eau d'un canal, et de l'origine équivalente admise par Grandi pour en calculer la vitesse. Il attaque l'hypothèse de Grandi sur la résistance du fond d'un canal; il se sert ici d'un calcul du P. Boscowich sur la chute d'un fleuve qui fait cascade près de Rimini, et qui perd en peu de temps une partie considérable de sa vitesse: on avoit soutenu à grand frais les eaux du fleuve à une hauteur fort grande, espérant que, par la vitesse de sa chute, il viendrait nettoyer le port et en entraîner le gravier que le métauro y avoit amoncelé: mais toute cette dépense fut inutile, car à un demi mille de la cascade, la vitesse étoit réduite à deux pieds par seconde; vitesse trop petite pour produire l'effet qu'on en avoit attendu. La pente de la Loire est plus grande que celle de la Seine, et cependant la vitesse est plus petite, ce n'est donc pas la pente qui règle la vitesse. Le P. Grandi se replioit pour sauver cette difficulté, conserver l'hypothèse de la Table parabolique, et déterminer la hauteur équivalente de la chute des eaux. Mais le P. Lecchi prouve que de toute façons l'hypothèse est défectueuse. Les différentes vitesses sont exprimées par des courbes très-différentes entr'elles.

Dans un autre mémoire on voit que les observations immédiates donnent des phénomènes absolument contraires à l'expression parabolique des vitesses croissantes comme les racines des hauteurs. Mariotte trouva que dans un canal de trois pieds d'eau la vitesse étoit toujours plus grande à la surface, et il en donna la raison, mais sa théorie se borne aux seuls canaux qui ont peu de profondeur. Le P. Lecchi a fait diverses expériences avec une boule suspendue à un fil dont les écarts, par rapport à la verticale, indiquent la vitesse de l'eau à différentes profondeurs. Il a trouvé que les vitesses dans différentes parties d'une même section verticale étoient très-irrégulières, et que le total ne pouvoit être représenté par un solide parabolique.

Il examine la méthode proposée par Pitot pour mesurer la vitesse des eaux courantes, et les observations de cet académicien. Il donne la description de sa machine, les raisons hydrostatiques des effets quelle produit. Il fait voir l'incertitude de la table qui en résulte, les corrections qu'on pourroit y faire. Il entre dans l'examen des observations de Zendrini et de Mariotte, contraires au résultat de Pitot; la difficulté consiste principalement à savoir si dans le cas du fluide en mouvement la pression se fait de la même manière que quand le fluide est immobile, ce qui exigeroit encore de nouvelles observations.

L'instrument le plus propre à mesurer les vitesses de l'eau

est une boule suspendue à un fil qui marque sur les divisions d'un quart de cercle la déviation par rapport à la perpendiculaire. Mais il y a eu sur le calcul qu'on tire de ces observations des difficultés entre les auteurs ; Guglielmini a fait une supposition qui a été contredite par Zendrini, Herman, Manfredi, et qui est véritablement fausse. Aussi le P. Lecchi donne des moyens de rectifier cet instrument. Il en borne l'usage aux vîtesses respectives, et à celles qui ne sont pas trop petites. Il donne la manière qui lui a paru la plus sûre pour déterminer avec cette machine la loi des vîtesses absolues. En conséquence, il corrige les expériences de Zendrini sur la même matière.

La réputation de Zendrini exigeoit qu'on discutât ses travaux avec une extrême attention ; on voit que les principes de son calcul analytique et la construction de sa table sont également suspects ; les loix qu'on en déduit pour la vîtesse des eaux courantes ne s'accordent point entr'elles. Sa formule pour trouver le *punto di sublimata*, ou l'origine équivalente de la chute d'un fleuve conduit à des conséquences absurdes. Le P. Lecchi a donc été obligé d'opposer de nouvelles expériences à celles de Zendrini ; il démontre par leur moyen que la table de Zendrini pour les vîtesses peut se combiner avec toute sorte de paraboles, mais non pas avec une seule parabole déterminée qui donne des vîtesses absolument égales à celles qui résulteroient de la hauteur équivalente. Il n'est donc pas possible d'assigner une loi déterminée pour les vîtesses des fleuves. Parmi les raisons qui s'y opposent, il en est une qui fait la matière d'un chapitre, et qui est extrêmement considérable, c'est le regorgement des eaux qui sont retenues ou gênées par quelques obstacles. Il est encore plus difficile d'assujettir ce phénomène à une loi, qu'il ne l'étoit pour le cours ordinaire d'un fleuve. Les causes en sont trop diversifiées et trop irrégulières. Le P. Lecchi réfute ce qu'ont écrit là-dessus Grandi, Guglielmini, Manfredi, Poléni. Il n'entreprend pas cependant d'y substituer aucune espèce de théorie ; les conditions du problème sont en trop grand nombre, et les observations en trop petit nombre.

Ainsi la seconde partie de cet ouvrage a été employé à traiter des instrumens et des méthodes que l'on doit employer ou rejeter dans la mesure des vîtesses. Dans la troisième, l'auteur recueille le fruit des deux premières, au moyen des règles de pratique qu'on y trouve pour la mesure des eaux, soient quelles sortent par des ouvertures, soit qu'elles coulent dans des canaux. Il s'étend de préférence sur les méthodes qu'il a eu occasion lui-même d'employer, et qui lui ont paru les plus commodes dans la pratique. Le premier article est rempli par une lettre du P. Boscovich en réponse à la demande que l'auteur lui avoit

faite de son avis sur les principes que l'on peut établir dans les Règles pratiques de la mesure des eaux. On y trouve la manière de calculer la quantité d'eau qui doit sortir par une ouverture de figure quelconque : il trouve par exemple, que de trois ouvertures égales en surface, l'une triangulaire avec la base à la surface supérieure de l'eau, la seconde rectangulaire, la troisième en triangle, dont la pointe soit en haut, il doit sortir des quantités d'eau qui sont comme les nombres 4, 5 et 6.

Par le second article, le P. Lecchi passe à une manière de calculer la quantité des eaux courantes dans des canaux ; il en donne une plus simple et plus à la portée des ingénieurs que les méthodes connues ; il explique différentes attentions de pratique sur l'usage de la boule qui sert à trouver les vitesses moyennes. Il fait voir le danger qu'il y a de faire la boule, ou trop légère, ou trop pesante ; il donne des règles pour la quantité où elle doit être plongée, pour sa tension et pour son éloignement de la perpendiculaire. Il fait la comparaison de différentes méthodes pour mesurer la vitesse à distance égale de la surface ; il montre les difficultés d'y employer les formules de Côtes ; il donne la méthode facile et commode pour déterminer la vitesse qui tient le milieu entre les autres vitesses moyennes de chaque ligne verticale d'une section de canal. Enfin, il fait voir qu'on trouve la quantité respective d'eau qu'il y a dans deux fleuves, au moyen de ce théorème, que leurs masses d'eau sont en raison composées de la surface des sections et de leur vitesse moyenne, et il rassemble, dans un seul exemple du fleuve Chièse, plusieurs règles-pratiques pour la division et la mesure des eaux. On y voit la méthode que le P. Lecchi a souvent employée dans les canaux de dérivation et les règles qu'on y observe. Par exemple, on doit tenir compte non-seulement de la grandeur de l'ouverture, mais de la différente vitesse qu'elle produit, et de la situation du centre de l'ouverture par rapport à la surface de l'eau ; les canaux dans lesquels les eaux sont reçues, doivent avoir une pente uniforme sur un assez long espace.

Pour tirer des eaux d'un fleuve, on doit placer l'embouchure du canal de manière que le courant du fleuve ne l'enfile pas directement, mais lui soit parallèle du côté de la source sur une certaine distance ; il faut aussi conserver la hauteur d'eau qui a été réglée, quand même les eaux du fleuve s'élèvent ou s'abaissent. Quand on veut partager les eaux d'un canal, on doit s'assurer d'une vitesse uniforme, soit à l'entrée, soit à la sortie de la division ; enfin, quand on a formé les séparations avec les règles les plus sûres, il faut vérifier la quantité d'eau qui en résulte et corriger les erreurs inséparables de ces grandes opérations de pratique. Le P. Lecchi indique à cette occasion l'usage

d'un pendule simple, nageant dans l'eau, dont la vitesse peut représenter la vitesse moyenne de l'eau dans laquelle il est plongé. Le P. Cabeo en avoit donné une idée dans son livre des *Météores*; mais le P. Lecchi en perfectionne l'usage et indique les attentions nécessaires que l'expérience lui a indiquées pour tirer parti de cet instrument.

Le livre du P. Lecchi est terminé par un appendix fait postérieurement au corps de l'ouvrage, et destiné à en éclaircir et détailler quelques parties; il y donne l'usage d'un régulateur ou espèce d'empellement qui barre un canal, et qui peut se rétrécir ou s'agrandir pour faire diverses expériences sur les quantités d'eau qui y coulent; une méthode plus simple que celle de Castelli, pour calculer la quantité d'eau par l'hypothèse parabolique; l'effet que produit la différente forme des ouvertures que l'on peut faire à un canal pour en détourner une partie. C'est l'objet d'un ouvrage entier de Poleni, intitulé *de Castellis*, où il y a beaucoup de bonnes observations; cependant le P. Lecchi ne croit pas, avec lui, que l'eau sorte avec la même vitesse quand elle est reçue à la sortie du canal entre deux murs parallèles, ou entre deux murs convergents, surtout si la figure de ces deux murs est un peu différente dans les deux cas.

La petite notice que nous avons donnée de ce livre, suffit pour faire voir qu'on n'en a guère d'autres où la pratique de l'hydraulique soit traitée d'une manière si détaillée et aussi utile aux ingénieurs chargés de la conduite, de la mesure et de la distribution des eaux: on n'en devoit pas moins attendre d'un mathématicien occupé depuis long-temps, par état, de ces sortes de travaux, et associé, pour ainsi dire, avec un des plus grands géomètres de l'Europe, le P. Boscovich qui examina cet ouvrage et contribua à sa perfection. Le P. Lecchi lui-même avoit toujours joint la théorie à la pratique du génie, ce qui lui procura les plus grands succès dans tous les travaux qu'il exécuta en Italie.

Le P. Frisi avoit aussi été consulté souvent sur les rivières d'Italie, et son livre mérite attention: il approfondit une question intéressante, souvent agitée, et que personne n'avoit encore éclaircie comme il le fait.

Elle consiste à savoir si les sables que les rivières transportent, viennent de la pulvérisation des pierres, ou si ce sont des corps originaux répandus çà et là comme les pierres. Guglielmini observa qu'en descendant une rivière, on rencontre d'abord de grosses pierres d'une forme irrégulière; ensuite des pierres rondes, successivement plus petites; puis du gravier gros et menu; enfin, des sables et de la terre pure: il en conclut que les sables n'étoient autre chose que de petits morceaux de pierres décomposées;

décomposée; ce qui, à son avis, est d'autant plus vraisemblable, que plusieurs pierres sont composées de gravier. Il pensa que le poli des graviers des rivières étoit une preuve évidente de la brisure de leurs angles; que le bruit que font les graviers des rivières est plutôt produit par le choc de ces graviers, que par celui de l'eau et de l'air; que les pierres, en se choquant et en se froissant les unes les autres, s'arrondissoient, diminuoient de grosseur, se résolvoient peu-à-peu en gravier; et qu'enfin une partie de ces graviers se réduisoit en sable. Le P. Frisi combat toute cette doctrine, il soutient que les graviers et les sables sont des corps originaires répandus par tout le globe terrestre; que les pierres, en roulant dans le lit d'une rivière, peuvent bien s'arrondir et se polir; que semblablement les graviers peuvent s'atténuer; mais que tout cela a des limites, et que jamais les pierres et les graviers ne peuvent, par le froissement mutuel, se résoudre en sable. Ainsi, selon lui, la raison pour laquelle on trouve dans le lit des rivières, les pierres, les graviers, les sables, dans l'ordre observé par Guglielmini, se tire de la diminution de la chute et de la vitesse des eaux courantes qui, abandonnant dans les parties supérieures, les pierres les plus grosses et les plus irrégulières, ne peuvent transporter à de plus grandes distances que les pierres rondes et les graviers, par degrés, toujours plus petits. Le P. Frisi établit son opinion, 1°. sur ce que l'on trouve par tout dans les montagnes et dans les plaines des sables entièrement semblables à ceux des rivières; d'où il résulte que tous ont une même origine, indépendante du frottement des pierres; 2°. sur ce que le frottement mutuel des pierres, dans une rivière, quelque violent qu'il puisse être, n'est pas capable de produire du sable: assertion que l'auteur prouve par des expériences, où un frottement plus fort que celui qui a lieu dans les rivières les plus rapides, n'a jamais pu donner un véritable sable.

Guglielmini, en partant de son système, et supposant de plus que la brisure des pierres pouvoit s'opérer dans l'espace compris entre l'origine de la rivière et la dernière limite des graviers, s'étoit persuadé que lorsqu'il survenoit de nouveaux graviers, ils ne devoient point faire hausser le lit de la rivière, et que la quantité de ceux qu'on retiroit de la rivière, pour divers usages, absorboit à-peu-près cette augmentation. Au contraire, dit le P. Frisi, si les pierres et les graviers ne se résolvent point en sable, et n'arrivent point jusqu'à la mer, mais restent dans le lit des rivières, comme ils y ont été transportés dans les crues d'eau, ce sera une conséquence nécessaire que le fond des rivières doit se rehausser continuellement dans les lieux où elles coulent sur le gravier, et c'est ce qui est conforme aux observations.

Nous avons vu que les Italiens font un grand usage de la table

parabolique ; elle avoit été donnée par le P. Grandi, dans son excellent ouvrage sur le *Cours des eaux*, et elle a été publiée encore et étendue par le P. de Regi, à Milan en 1764. Cette table est fondée sur deux principes : le premier, que quand l'eau sort d'une ouverture par la seule pression de l'eau dont elle est chargée, elle reçoit une vitesse proportionnelle à la racine quarrée de la hauteur de l'eau au-dessus de l'ouverture : le second est que quand l'eau qui passe par une ouverture, a non-seulement la pression de l'eau dont elle est chargée, mais encore une certaine vitesse à sa superficie, on doit trouver une hauteur équivalente, que l'on considérera comme la cause de cette vitesse à la surface de l'eau, et l'on aura la vitesse avec laquelle l'eau passe par l'ouverture.

Pour trouver cette hauteur équivalente, on suppose que les lois de l'accélération des solides s'observent aussi dans l'accélération des fluides : ce qui est à-peu-près conforme à l'expérience. Après avoir établi ces principes, on observe la vitesse actuelle de la surface de l'eau avec quelque corps léger qu'on abandonne au courant, ou avec un pendule dont on mesure la déviation, et l'on calcule ensuite la quantité d'eau que donnent les ouvertures du ponce de Milan ou du *quadretto* de Mantoue ; 1°. en supposant que l'eau passe en vertu d'une simple pression ; 2°. en supposant qu'elle soit encore affectée à sa surface d'une certaine vitesse ; 3°. dans l'hypothèse qu'il y ait encore quelque engorgement de l'eau aux approches de l'ouverture. A l'occasion de cette troisième hypothèse, notre auteur enseigne comment on peut, en changeant la hauteur ou la largeur de ces ouvertures où il y a engorgement, faire passer la même quantité d'eau que dans une ouverture libre.

Lorsque l'eau coule par une ouverture d'une certaine hauteur, la vitesse de l'eau, à la partie supérieure de l'ouverture, n'est pas la même que la vitesse à la partie inférieure. Tout le monde en convient : mais de quelle manière change-t-elle ? C'est ce qui est difficile à déterminer.

Castelli, Cassini et quelques autres, fondés sur quelques expériences, ont cru que les vitesses étoient en proportion des hauteurs de l'eau : Toricelli, Mariotte, Guglielmini et d'autres auteurs, fondés sur l'analogie qu'il y a entre l'eau qui sort d'une ouverture latérale, faite à un vase d'une certaine hauteur et celle qui coule par une bouche libre et de niveau à la surface de l'eau, ont cru que les vitesses étoient comme les racines des hauteurs. Zandrini, fondé sur des observations qu'il avoit faites de la vitesse du Pô à différentes profondeurs, assure que le rapport des vitesses est extrêmement différent, suivant les différentes circonstances ; mais il convient que dans des fleuves qui

coulent lentement, on peut calculer les vitesses, suivant la racine des hauteurs. En conséquence le P. de Regi se sert de cette hypothèse dans tout le cours de son ouvrage.

Quand on connoît la vitesse de l'eau en une seconde, on en conclut facilement la hauteur de laquelle il faudroit que l'eau tombât pour acquérir cette vitesse, en prenant la soixantième partie du quarré de l'espace parcouru en une seconde : cette hauteur s'ajoute à celle de la surface de l'eau au-dessus de l'ouverture, et l'on opère avec cette hauteur composée, comme l'on faisoit auparavant avec la hauteur seule de l'eau.

Lorsqu'on emploie le pendule pour observer la vitesse de l'eau, on se sert de cette règle démontrée par Zandrini dans son traité *dell'acque correnti* : la force absolue de l'eau est égale au produit du poids relatif de la boule dont on se sert, par le sinus de l'angle de déviation divisé par le cosinus, et cette force absolue, divisée par la surface du grand cercle de la boule, donnera la hauteur équivalente qui produiroit la vitesse observée : cette méthode est plus commode dans la pratique. Le P. de Regi suppose une boule dont le diamètre soit d'un ponce de Milan, dont le poids, dans l'eau, soit de 1080 grains, et qui soit écartée de 28° de la perpendiculaire par l'impulsion de l'eau coulante; le poids multiplié par le sinus 469, divisé par le cosinus 883, donne 575 pour la force absolue de l'eau; et celle-ci divisée par la surface du grand cercle de la boule qui est de 113 points quarrés, donne la hauteur équivalente de 5 points; ajoutant cette hauteur équivalente à la hauteur réelle de l'eau au-dessus du fond de l'ouverture qu'on suppose de 4 ponces, ou de 48 points, on a 53. On retranche de la parabole qui répond à la hauteur 53, celle qui répond à la hauteur 5; le reste se multiplie par la largeur de l'ouverture, et l'on trouve au produit la quantité d'eau qu'elle donne.

Le P. de Regi fait divers calculs sur les quantités d'eau dont les différens terrains ont besoin; partout il donne des exemples si clairs et si détaillés que les praticiens pourront s'en servir avec la plus grande facilité pour l'administration des eaux dans la campagne. Cet objet, dans la Lombardie, est d'une extrême importance; les eaux s'y paient fort cher, et s'amènent de fort loin; on voit souvent dans un même endroit quatre conduites ou *ruggies* qui passent les unes sur les autres et portent les eaux dans différentes directions à des campagnes plus ou moins éloignées. L'administration de ces différens canaux, est une branche essentielle de la police et de la jurisprudence des biens ruraux. (*Jour. des Sav.* 1766 p. 364).

Nous devons aussi faire connoître un ouvrage important: ce sont les *Principes d'hydraulique*, publiés en 1786 par le chevalier

du Buat ; on y trouve des expériences intéressantes sur lesquelles il fonda une théorie aussi satisfaisante qu'il étoit possible.

Personne ne peut nier que si deux fleuves ont même profondeur, même largeur et même pente, et qu'ils coulent sur un fond homogène, leurs vitesses ne diffèrent en rien ; mais si on vient à changer une seule de ces circonstances, la vitesse croîtra ou diminuera, sans cesser néanmoins d'être uniforme. Jusqu'à présent aucune théorie n'apprend à calculer la vitesse d'après ces données. Or, la vitesse étant inconnue, la dépense l'est aussi, et par une suite nécessaire, on ne peut prévoir le succès d'aucune opération sur le lit des fleuves, ni résoudre un seul problème qui y ait rapport.

Frappé de l'ignorance où nous laissent nos meilleurs auteurs sur une matière aussi importante, il eut recours à la partie de l'hydrodynamique du cit. Bossut qui traite du mouvement des eaux, aussitôt que cet ouvrage devint public, et il y chercha la solution du problème qui paroîsoit devoir être la clef de l'hydraulique, c'est-à-dire, de déterminer quelle est la vitesse d'un courant dont la pente et le lit sont donnés ; mais les expériences n'étoient point encore décisives ni assez variées pour atteindre jusque-là. L'auteur considéra que si l'eau étoit parfaitement fluide, et qu'elle coulât dans un lit infiniment poli, de la part duquel elle n'éprouvât aucune résistance, elle accéléreroit son mouvement à la manière des corps qui glissent sur des plans inclinés ; car il est évident que la pente à la surface est la seule cause efficace qui engendre son mouvement, puisque sans elle le mouvement n'a pas lieu. Or, la vitesse d'un fleuve n'accélère pas à l'infini ; au contraire, elle persévère dans un degré assez borné, quand elle a atteint l'uniformité, et elle n'augmente plus ensuite sans cause ; d'où il suit qu'il existe quelqu'obstacle qui détruit la force accélératrice, et l'empêche d'imprimer à l'eau de nouveaux degrés de vitesse. Or, en quoi peut consister cet obstacle, sinon dans le frottement que l'eau essuie de la part des parois du lit et dans la viscosité du fluide ? La viscosité seule peut donner lieu à deux espèces de résistances, l'une qui vient d'un mouvement intestin des parties du fluide, dont la mobilité est imparfaite, et l'autre de l'adhésion naturelle que les parties ont avec le lit dans lequel elles se meuvent.

Ces causes agissant ensemble, et venant à égaler la force accélératrice de l'eau courante, c'est-à-dire, la force relative pour descendre le long du plan incliné de son lit, la vitesse ne peut plus augmenter, et elle devient uniforme. C'est donc un principe certain que quand l'eau coule uniformément dans un lit quelconque, la force accélératrice qui l'oblige à couler est égale à la somme des résistances qu'elle essuie, soit par sa propre viscosité,

soit par le frottement du lit. Cette loi devoit être la clef de l'hydraulique.

Par la fécondité de ce principe dans les différentes applications qu'on en peut faire à la pratique et à la solution de quantité de problèmes, du Buat se persuada que le mouvement de l'eau dans un tuyau de conduite avoit une grande analogie avec le cours uniforme d'un lit de rivière; puisque, de part et d'autre, la pesanteur étoit le moteur, et la résistance du lit le modérateur. Il se servit donc, pour faire une formule du mouvement uniforme, des expériences du cit. Bossut, sur les tuyaux de conduite, et même de celles qu'il avoit faites sur des canaux factices, quoiqu'il y manquât une donnée, qui étoit la profondeur du courant. C'est ainsi qu'il composa l'ouvrage qu'il donna au public sous le titre de principes d'hydraulique, en l'année 1779, pour la première fois.

Il sentoit bien néanmoins qu'une théorie aussi nouvelle, et qui conduisoit à des résultats tout-à-fait différens de la théorie ordinaire, avoit besoin d'être appuyée sur de nouvelles expériences plus directes que les anciennes, ou d'un genre tout-à-fait différent; car il avoit été obligé de supposer que le frottement de l'eau ne dépendoit point de sa pression, mais uniquement de la surface frottée et du quarré de la vitesse.

En conséquence, il s'occupa de ces nouvelles expériences de 1780 à 1783: elles devoient être le complément de celles qu'on avoit faites jusqu'alors, sur-tout par rapport au mouvement uniforme. Or, on en manquoit principalement pour les cas extrêmes des lits très-petits et des lits d'une grandeur approchante de ceux des rivières.

Le cit. Bossut n'avoit donné, dans son *Hydraulique*, que des pentes médiocres à ses tuyaux de conduite; on manquoit d'observations sur les plus grandes pentes et sur les très-petites: du Buat s'appliqua à suppléer, autant qu'il étoit possible, à ce qu'on n'avoit pas fait, sans négliger néanmoins de répéter plusieurs expériences qui avoient une relation plus rapprochée avec celles qui étoient déjà faites, afin de varier par-là l'exactitude des unes et des autres, et surtout la précision de ses procédés. Ainsi, il employa des pentes depuis la plus grande de toutes, qui est la verticale, jusqu'à un quarante millième, et il soumit à l'expérience des lits, depuis une ligne et demie de diamètre, jusqu'à sept ou huit toises quarrées de surface.

Les expériences qui lui ont donné plus de peine sont celles où il a employé un canal factice, qui avoit la forme d'un trapèze ou d'un rectangle, selon la manière dont on assembloit les madriers qui le composoient. Il éprouva de grandes difficultés à rendre uniforme le cours de l'eau dans ce canal, dont la longueur étoit

bornée; mais il en fut bien dédommagé par les expériences qu'il eut occasion d'y faire sur la diminution des vîtesses d'un courant uniforme, à compter du milieu de la surface jusqu'au fond; par la recherche du rapport qui existe entre la vîtesse moyenne et celle de la surface du fond: par des observations très-curieuses sur la manière dont l'eau travaille le fond de son lit; par la connoissance du degré de résistance qu'opposent à l'eau des natures de terrains différentes, comme les galets, le gravier, le sable et l'argile.

L'auteur entre aussi dans le développement du principe fondamental du mouvement uniforme; c'est l'équilibre entre une puissance et une résistance. La puissance est la pesanteur relative de la colonne fluide qui tend à se mouvoir sur le plan incliné de son lit; la résistance est le frottement de ce lit; la viscosité du fluide et son adhésion aux parois. Il suppose d'abord la résistance entière proportionnelle au quarré des vîtesses, et de-là suit la formule primitive du mouvement uniforme de l'eau dans un lit quelconque.

Il consulte ensuite l'expérience et lui confronte cette théorie. Mais, pour corriger la dernière, il faut dépouiller l'un après l'autre les élémens variables qui sont la grandeur du lit, son périmètre et sa pente, et examiner comment la vîtesse varie, selon que l'un de ces élémens est variable, tous les autres étant constans. Cette analyse découvre pour quelle part le frottement, la viscosité du fluide et son adhésion aux parois entrent chacun dans la résistance totale: chaque effet se trouve représenté par une expression analytique convenable; la loi du mouvement se développe depuis des vîtesses infinies jusqu'à l'anéantissement même: une seule formule la représente et embrasse tous les cas, et la parfaite conformité du calcul avec ceux de l'expérience assure et démontre la vérité des principes et la justesse de leur application.

Cette base posée, il jette un coup-d'œil sur la variété des lits où l'eau coule, soit naturellement, soit par l'effet de l'art; sur les différentes vîtesses d'un même courant; sur l'intensité de la résistance produite par l'inertie du lit; sur la force que l'eau a pour creuser et élargir sa section.

Il examine l'effet des crues formées par la réunion permanente de plusieurs rivières dans un même lit, ou d'une crue extraordinaire, qui gonfle les eaux d'un fleuve; l'effet des redressemens, qui deviennent quelquefois nécessaires pour prévenir les débordemens; la dépense d'un réservoir; la hauteur du remoux qu'occasionne une retenue ou un pont; la distance où l'effet du remoux se rend sensible au-dessus des écluses par le refoulement des eaux; la manière de calculer la hauteur de ce remoux à une

distance quelconque d'une écluse ; les moyens de rendre navigable une rivière à laquelle trop peu d'eau , ou trop de pente ne permettent pas de porter bateau ou d'être flottable ; l'effet des saignées ; l'établissement des canaux de dessèchement ; il donne des règles pour opérer un dessèchement complet , avec le moins de dépense possible : il montre comment et dans quel cas on peut doubler, tripler la dépense d'eau d'un canal de dérivation ; quelle est la forme qui convient le mieux aux entrées des canaux , aux piles des ponts , aux bajoyers des écluses. Enfin , après avoir traité des obstacles qui retardent l'écoulement de l'eau comme les roseaux , le vent , la glace , il examine pourquoi un corps qui flotte librement à la surface d'un courant y acquiert une plus grande vitesse que celle du fluide qui le porte , et dans quel cas la surface d'un courant est quelquefois convexe et quelquefois concave.

Après avoir donné la principale attention aux rivières et aux canaux dont les services sont plus importants , ou les désordres plus à craindre , du Buat s'occupe des aqueducs , des conduites et des jets-d'eau qui ont plutôt pour objet la salubrité , la propreté ou l'agrément. On y trouve cette matière traitée avec la précision qui dérive de la netteté de la théorie. Son ouvrage est terminé par la théorie du mouvement de l'eau dans les pompes ; et , par occasion , il parle de l'effet des machines à feu , de la force qu'il faut pour les mouvoir , et des effets des fluides élastiques. Mais nous verrons dans le livre suivant , que Prony a épuisé cette matière.

Nous terminerons cette histoire de l'hydraulique en indiquant les ouvrages les plus complets où elle ait été traitée ; et d'abord , l'*architecture hydraulique* de Belidor (1737-1751) , qui est un ouvrage immense , un trésor de recherches et de machines , que le cit. Coulomb vouloit compléter , et que le cit. de Prony a commencé de refaire , mais que l'histoire de l'hydraulique doit toujours annoncer et célébrer.

Le premier volume contient les principes de la mécanique , les machines simples , les lois du mouvement , les calculs des frottemens , l'action de l'eau contre les surfaces , sa vitesse dans l'écoulement , la dépense d'eau dans tous les cas , la description des moulins à blé de différentes formes , de différens pays , et les perfections dont ils sont susceptibles. Les moulins à scies , les moulins à poudre , les machines d'épuisement , à chapelets , à auges , à godets , à tympan ; la vis d'Archimède.

Le second volume (1739) , contient le détail de toutes les pompes anciennes et nouvelles , les machines mues par le vent , les machines à eau , les machines à bras ; la description , les détails , l'analyse et les calculs de la machine de Marly , de celle

du Pont-Neuf, de celle du pont Notre-Dame, et de plusieurs autres machines imaginées et proposées du temps de Belidor par Francini, Denisard, la Ducille, &c. les expériences et les calculs des tuyaux de conduite; les machines à feu; les fontaines, les puits, la bague de Jacques Aimar, la distribution des eaux, l'aqueduc d'Arcueil, celui de Roquancourt, les janges, les dimensions des murs de soutènement; et les tables relatives aux dépenses des jets-d'eau et des tuyaux de conduite.

Le troisième volume (1751), contient la description des travaux qu'on exécute dans l'eau, les jetées, les écluses, les batardeaux, les quais; les canaux, les travaux de Dunkerque, de Mardick, de Gravelines, de la Moëre, de Cherbourg, de Bergues, du Havre, de Mnyden; les machines à enfoncer les pilotis, les cabestans, la résistance des bois et des fers.

Enfin, le quatrième volume traite des travaux sur la mer et dans les ports; on y voit les phénomènes de la marée, l'histoire des ports anciens et modernes, leurs inconvénients, les jetées, les ponts, entr'autres celui de Westminster; les formes, les cales, les machines à curer les ports, les moyens de dessèchemens.

Les travaux faits et à faire à Dunkerque, à Toulon, &c. les travaux même pour l'attaque et la défense des places, la nature des fleuves, leurs actions, la manière de la diriger, les écluses qu'on y fait, les canaux d'arrosage; enfin, l'histoire du canal de Languedoc et sa description; à laquelle on doit ajouter le grand ouvrage que j'ai donné sur les canaux en 1778 *in-folio*.

Il faut aussi y ajouter deux améliorations contenues dans les ouvrages suivans: *Recherches sur la construction des digues*, par Bossut et Vialet, 1764.

Théorie des Fleuves, avec l'art de bâtir dans leurs eaux et de prévenir leurs ravages, par Jean-Isaïe Silberschlag, 1769, ouvrage traduit de l'Allemand, *in-4°*. avec figures.

Ces deux ouvrages, du même format que l'*Architecture hydraulique*, peuvent être joints à cet ouvrage en forme de supplément.

Le cit. Bernard a donné, en 1787, de *nouveaux Principes d'hydraulique* appliqués à tous les objets d'utilité, et particulièrement aux rivières, précédés d'un *Discours historique et critique sur les principaux ouvrages qui ont été publiés à ce sujet*.

Cet habile ingénieur fait une analyse très-étendue de tous les ouvrages qu'on a sur cette matière, et surtout de celui de Guglielmini dont il relève les erreurs; puis il ajoute:

« J'entre dans la carrière avec de meilleures observations;
» l'étude des rivières a été mon objet principal: j'ai montré que
» des

» des ouvrages célèbres, sur cette matière, ne méritoient ni leur
 » réputation, ni la confiance du public : en suivant attentive-
 » ment les phénomènes, je crois être parvenu à les distinguer
 » tous, et à indiquer les véritables causes qui les produisent :
 » aussi je suis persuadé que mes recherches ne seront pas inutiles
 » à ceux qui, doués d'un génie distingué, voudront s'occuper du
 » même sujet, un des plus beaux que la philosophie naturelle
 » présente, et le traiter avec l'étendue qu'il mérite ».

Comme le cit. Bernard ne pouvoit pas adopter les principes de Guglielmini sur les vîteses des eaux courantes, il est revenu sur les premiers principes de l'hydraulique ; il a cherché d'abord les lois du mouvement de l'eau lorsqu'elle sort d'un vase prismatique droit, en supposant le fluide entretenu à la même hauteur et ayant sa surface toujours horizontale ; il a ainsi considéré toutes ces parties comme animées d'une même vîtesse, comme formant une masse unique. Cette vîtesse est produite par la pesanteur ; mais il falloit déterminer la manière dont cette force est modifiée. Il étoit aisé de voir que son effet dépendoit essentiellement du rapport de l'orifice au fond du vase, et que les mouvemens de l'eau dans un vase entrenu plein pouvoit être assimilé à celui qui se fait librement le long d'un plan incliné. Le fond contient-il, par exemple, la cinquième partie du poids de l'eau, il imagine un pareil nombre de tranches égales à celles qui sont contenues dans le vase, disposées sur un plan incliné, de manière que ce plan supporte la cinquième partie de leur poids. Dans les deux cas, la pesanteur est semblablement modifiée, et par conséquent le mouvement de l'eau doit être le même.

L'action de la pesanteur modifiée doit être évaluée pour le temps que les graves emploient à tomber librement de la hauteur du vase ; pendant ce temps déterminé, la hauteur dont la tranche qui étoit d'abord la plus élevée s'abaissera, détermine la dépense du vase. Pour connoître la vîtesse de l'eau qui sort par l'orifice, il faudra augmenter la hauteur dont l'eau sera abaissée dans le vase, dans le même rapport que le fond est plus grand que l'orifice.

Une formule simple embrasse tous les cas. Lorsque le fond est détruit, l'eau tombe librement par l'orifice, et lorsque l'orifice est infiniment petit, la vîtesse de l'eau qui s'échappe est égale à celle qui seroit produite par la chute libre de la hauteur du vase : ce qui est conforme au célèbre théorème de Toricelli.

Après avoir fait sur cette théorie des remarques propres à l'éclaircir et à la modifier, Bernard rapporte toutes les applications dont elle est susceptible ; il essaie d'y ramener le cas où l'écoulement a lieu par des orifices verticaux, et il a remarqué le premier que dans un canal horizontal et régulier, dans lequel

l'écoulement se feroit par des orifices percés sur une face verticale, élevée à une de ses extrémités il y avoit un cas qui répondoit à celui où le fond est détruit dans les vases verticaux, et que ce cas a lieu lorsqu'on enlève l'avance qui fermoit le canal horizontal à son extrémité : il tombe alors toute l'eau que soutenoit la vanne, et cette eau tombe librement; mais cette vanne ne soutient qu'un poids égal à un volume d'eau qui auroit la vanne pour base et pour hauteur la moitié de celle de la vanne. Ce cas est donc assimilé à celui d'un vase vertical qui auroit un fond égal à la surface de la vanne, et une hauteur égale aux $\frac{4}{9}$ de celle de la même vanne; mais alors la dépense n'est que la moitié de celle que fournit l'ancienne théorie. La différence étoit si grande et il étoit si important d'avoir quelque chose de certain sur cet objet, que l'auteur eut recours à l'expérience : elle justifia ses idées.

L'ouvrage donné par du Buat lui fournit l'occasion d'entrer dans quelques détails sur cet article important.

Guglielmini, après avoir déterminé la vitesse que doit avoir l'eau qui tombe librement à l'extrémité d'un canal horizontal, fut obligé de supposer que la vitesse du fluide étoit exactement la même dans toutes les autres parties du même canal; car, autrement la dépense se trouveroit plus grande à l'extrémité que par les autres sections supérieures, ce qui étoit visiblement absurde : mais la supposition de Guglielmini étoit évidemment contraire à la raison et à l'expérience. Dans les canaux réguliers la vitesse diminue toujours depuis la surface jusqu'au fond; et ce n'est que dans le cas où il se rencontre des obstacles qu'on a remarqué que la vitesse étoit plus grande dans les parties les plus éloignées de la surface. Donc la vitesse moyenne observée dans les canaux horizontaux est considérablement moindre que la vitesse moyenne à l'orifice, déduite de la théorie de Guglielmini; donc la dépense déterminée par cet auteur à l'orifice est de beaucoup trop grande.

Dans cet ouvrage utile, le cit. Bernard a exclu de ses recherches tous les objets qui n'avoient pas quelque utilité; et parmi ceux dont il s'est occupé, il s'en trouve qui n'avoient pas été approfondis autant qu'ils le méritoient.

Un ingénieur célèbre de la république de Venise, le chevalier Lorgna, a encore donné un ouvrage important à ce sujet : *Memorie intorno all' acque correnti, in verona 1777, in-4°*.

Le P. Ximenes, également célèbre en Italie, a donné un grand ouvrage intitulé : *Nuove sperienze idrauliche fatte ne' canali e ne' fiumi per verificare le principali leggi e fenomeni delle acque correnti; in Siena, 1780, in-4°*. Et comme il a été employé jusqu'à sa mort arrivée en 1786, à des travaux hy-

drauliques, cet ouvrage contient ce qu'il y a de meilleur sur ce sujet.

Le P. Grégoire Fontana, habile géomètre de Pavie, a donné un savant mémoire sur la résistance de l'air dans les jets d'eau, *Dissertazione idrodinamica. Mantova, 1775, in-4°.*

Les ravages de Pô en Italie ont occasionné beaucoup de travaux et beaucoup de livres, et j'en ai parlé assez au long dans mon *Voyage en Italie*, 1786, tome VIII.

De Bologne il y a seize lieues vers l'orient jusqu'à Ravenne, et dix lieues vers le nord jusqu'à Ferrare. Cette surface de seize lieues quarrées est presque toute désolée par les eaux. Mais les intérêts divers des pays voisins ont été cause que l'on a disputé pendant un siècle sur la manière d'y remédier, tandis que la dépense et les difficultés de l'entreprise contribuoient à éloigner l'exécution.

Le Pô qui, de tous les temps, a été redoutable par ses débordemens et ses ravages, passoit avant le douzième siècle près de Ferrare, du côté du Midi: il se forma, vers 1155, un nouveau lit au Nord de Ferrare; dès-lors la branche droite s'appauvrit peu à peu, et devint continuellement plus petite. Les habitans de Ferrare craignoient vers l'an 1600 que le Panaro et le Reno continuant de couler par l'ancien lit appelé Pô-di-primaro, et d'y former des atterrissements, il n'en résultât des inondations dans le polesino de Saint-Georges, et dans les vallées de Commachio: on parla de détourner le Reno, de creuser l'ancien lit du Pô; mais on n'a jamais pu s'accorder: c'est ce qui occasionna tant de visites et de dissertations de Castelli, Guglielmini, Cassini, Ximènes, Lecchi, Jacquier, le Seur, Siviéri, Fantoni &c. Ce dernier a publié un ouvrage intitulé: *Della inalveazione de' fiumi del Bolognese e della Romagna, in riposta alla memoria idrometrica del P. Leonardo Ximenes ed a molti passi esaminati dell' altre cinque memorie.* C'est dans ces divers ouvrages que l'on peut trouver le plus de détails sur les fleuves, sur leur nature, sur leurs réunions, sur leurs débordemens, et sur les travaux qu'ils exigent. L'auteur de cet ouvrage est M. Pio Fantoni; il le dédie au P. Ximenes lui-même, quoiqu'il s'agisse dans cet ouvrage d'établir un sentiment différent de celui de ce grand mathématicien sur l'écoulement des eaux qui inondent les plaines du Bolognois et du Ferrarois; on a projeté plusieurs lignes qu'on pourroit suivre pour la conduite de ces eaux, et celle qu'on appelle la ligne supérieure est préférable, suivant l'avis de beaucoup de personnes qui ont écrit là-dessus; c'est l'avis de M. F., et c'est cependant contre cette ligne supérieure que le P. Ximenes s'est élevé avec cette vivacité et cette force qu'on admire dans ses écrits.

L'*Hydrotechnique* de M. Wieland contient d'excellentes choses sur toutes ces matières. Le troisième volume a paru en 1801, mais il est en allemand, et je n'ai pu me procurer la notice qu'il auroit fallu mettre ici.

XII.

Des ondes et des oscillations des fluides.

On verra dans l'*Histoire de la Navigation* les effets des vagues et des ondes sur les mouvemens des vaisseaux; mais nous devons donner ici une idée de la manière de les calculer.

Newton est le premier qui ait ouvert cette carrière par un problème curieux qu'il se propose, (Liv. II. prop. 44.) et qui lui sert à calculer la vitesse des ondes de la mer par le temps qu'elles mettent à s'élever et à s'abaisser. Il suppose un syphon à deux branches verticales, communiquant ensemble par une branche horizontale. Si ces deux branches verticales sont remplies d'un fluide d'une densité donnée, comme d'eau, ces deux colonnes d'eau, laissées en repos, resteront en équilibre et de niveau. Mais si l'une est élevée au-dessus du niveau de l'autre, et livrée à elle-même, elle s'abaissera au-dessous de ce niveau en poussant la colonne opposée au-dessus; et après quelques oscillations elles resteront en repos. Newton se demandoit qu'elle étoit la durée de ces oscillations, c'est-à-dire, quelle est la longueur du pendule isochrone à cette durée, car c'est toujours là à quoi se réduit la détermination du problème, puisque de la longueur de ce pendule dépend la durée de ses oscillations.

Or, Newton trouvoit par un raisonnement assez simple, qu'en faisant abstraction de la petite résistance apportée par le frottement de l'eau dans le tuyau, si l'on prend la moitié de sa longueur, c'est-à-dire de deux branches verticales et de l'horizontale du syphon, entre les points d'équilibre des colonnes du fluide, la moitié de cette longueur sera celle du pendule synchrone, d'où il conclut d'abord que ces oscillations seront isochrones. Si donc par exemple, cette longueur est de 6 pi. $\frac{1}{2}$; les oscillations des deux colonnes d'eau seront de la durée juste d'une seconde, la longueur du pendule qui bat les secondes étant de 3 p. $\frac{1}{16}$, il est plus exactement de 3 p. $8\frac{1}{2}$.

Delà Newton déduit le mouvement des ondes excitées par le vent sur une mer ou un lac, lorsqu'il cesse de les accélérer, ou de celles qu'une pierre jetée dans l'eau y produit, et il fait voir que leur vitesse est dans la raison soudoublée de leur largeur; si donc on mesure leur vitesse, ce qui est facile de plusieurs manières, on aura leur largeur, en prenant un pendule

qui fasse une oscillation pendant le temps que l'onde employe à s'abaisser et à s'élever. Cela explique pourquoi dans les mers où la lame est courte, c'est-à-dire où l'intervalle entre les sommets des ondes est court, les vaisseaux sont beaucoup plus fatigués par un gros temps ; car ils sont frappés plus fréquemment que dans celles où la lame est plus longue, la vitesse du développement ayant toujours un rapport déterminé avec cette longueur.

Newton observe néanmoins que ce calcul n'est pas mathématiquement exact, parce que l'eau qui, en montant forme les ondes, ne s'élève et ne descend pas perpendiculairement.

Les géomètres mécaniciens se sont depuis proposés ensuite plusieurs problèmes analogues : un corps spécifiquement plus léger que l'eau y étant plongé en partie, et étant tiré obliquement de l'état de repos, qu'elle sera la durée de ses oscillations.

Le même corps étant soulevé verticalement soit dans un vase ou bassin de dimension finie, soit dans un fluide d'une dimension infinie relativement à ce corps, quelle sera la durée de ses oscillations verticales.

L'eau qui étoit tranquille dans un vase étant mise en oscillation, par un mouvement de ce vase, ensuite laissée en repos, trouver la durée des oscillations réciproques de l'eau contre ses parois.

Un corps tel qu'un sphéroïde elliptique, un segment de sphère ou de sphéroïde qui étoit en repos sur un plan, ayant été un peu incliné obliquement, on demande la durée de ses balancements alternatifs avant de s'être remis dans son état de repos. Mais il seroit trop long d'expliquer les principes d'après lesquels on a résolu ces problèmes.

Dans un mémoire sur le mouvement et la figure des ondes qui est par extrait dans le *Journal des Savans*, octobre 1789, le cit. Flaugergues rapporte des expériences pour détruire le sentiment de Newton et de d'Alembert, (dans l'article *Onde* de l'Encyclopédie). Il en conclut qu'une onde n'est pas l'effet d'un mouvement dans les particules de l'eau, par lesquelles ces particules monteroient et descendroient alternativement en suivant une ligne serpentante, et en s'éloignant ainsi de l'endroit de la surface de l'eau où s'est fait le choc ; mais que c'est une intumescence que ce choc fait naître tout autour de cet endroit par la dépression qu'il y a causée, et qui se propage ensuite circulairement en s'éloignant ainsi de l'endroit de la surface de l'eau où s'est fait le choc même de cette portion d'eau élevée au-dessus du niveau de l'eau stagnante ; et comme une partie de cette eau afflue de toute part dans le creux formé à l'endroit du choc, ce creux en est presque comblé, et l'eau se trouve

élevée de manière à produire tout autour une intumescence ; ou une nouvelle onde qui se propage ensuite circulairement comme la première ; et cet effet se répétant ainsi plusieurs fois, la surface de l'eau se trouve divisée en un grand nombre de cercles concentriques successivement élevés et abaissés, qui ont pu donner l'idée du mouvement ondulatoire telle qu'on l'a eue, idée qu'on a cru confirmée par l'observation de certaines ondes qui, dans les rivières rapides, ont réellement un mouvement de translation en montant et en descendant alternativement : mais ces ondes n'ont lieu que dans les endroits où le fond de la rivière est inégal et couvert de creux et d'éminences, et alors ces prétendues ondes ne sont qu'une suite du mouvement que prend l'eau en coulant sur ces inégalités.

Il étoit aisé, d'après ce que nous venons de dire, de déterminer la figure d'une onde. Le cit. Flaugergues en donne l'équation, ainsi que celle de la courbe que décrit le centre de gravité d'un vaisseau par le mouvement des ondes.

L'égalité de vitesse des ondes grandes ou petites qu'on déduit de la théorie précédente, a été confirmée par l'expérience suivante. Il a mesuré sur le bord d'une branche du Rhône, dont l'embouchure étoit fermée, de sorte que l'eau y étoit dormante, une longueur de trente pieds. Il a fait jeter ensuite, dans cette eau, par un temps calme, de petites pierres vis-à-vis d'une des extrémités de cette longueur. Il a observé que les ondes grandes et petites, que le choc de ces pierres faisoit naître sur la surface de l'eau, employoient toutes les mêmes temps, c'est-à-dire, à-peu-près vingt-une secondes pour parvenir à l'autre extrémité de la longueur mesurée.

La Grange, dans sa *Mécanique analytique*, a essayé de déterminer la vitesse des ondes dans un canal, et il trouve qu'elle est la même que celle qu'un corps grave auroit en descendant d'une hauteur égale à la moitié de la profondeur de l'eau dans le canal.

Par conséquent, si cette profondeur est d'un pied, la vitesse des ondes sera de 5,495 pieds par seconde ; et si la profondeur est plus ou moins grande, la vitesse des ondes variera en raison sousdoublée des profondeurs, pourvu qu'elles ne soient pas très-considérables. Au reste, quelle que puisse être la profondeur de l'eau et la figure du fond, on pourra toujours employer la théorie qu'il indique, si l'on suppose que dans la formation des ondes l'eau n'est ébranlée et remuée qu'à une profondeur très-petite, supposition qui est très-plausible en elle-même, à cause de la tenacité et de l'adhérence mutuelle des particules de l'eau, et que l'on trouve d'ailleurs confirmée par l'expérience, même à l'égard des grandes ondes de la mer, comme on le verra

dans l'*Histoire de la Navigation*. De cette manière donc, la vitesse des ondes déterminera elle-même la profondeur à laquelle l'eau est agitée dans leur formation.

LA RÉSISTANCE des fluides est un article important qui devoit trouver place ici, mais comme il faudra parler des expériences qui ont été faites pour déterminer la résistance qu'éprouvent les vaisseaux, (t. IV. p. 438), nous renverrons cet article à l'*Histoire de la Navigation*.

Fin du troisième Livre de la quatrième Partie.