

www.e-rara.ch

**Darstellung der Untersuchungen und Maassregeln, welche in den Jahren
1835 bis 1838, durch die Einheit des Preussischen Längenmaasses
veranlasst worden sind**

Bessel, Friedrich Wilhelm

Berlin, 1839

ETH-Bibliothek Zürich

Shelf Mark: Rar 15045

Persistent Link: <https://doi.org/10.3931/e-rara-46217>

Dritter Abschnitt.

www.e-rara.ch

Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien – von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material – from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d'imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L'éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes – des débuts de l'imprimerie jusqu'au 20e siècle.

e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

Nutzungsbedingungen Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titinformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

Terms of Use This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

Conditions d'utilisation Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

Condizioni di utilizzo Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]

Dritter Abschnitt.

Verfertigung eines neuen Originals des Preussischen
Längenmaafses.

§. 7.

Einrichtung des neuen Original-Maafses.

Die verfolgte Absicht, sowohl die Einheit des Preussischen Längenmaafses unzweideutig festzusetzen, als auch den Nutzen dieser Festsetzung, durch möglichst leichte Zugänglichkeit seines Originals, zu vermehren, und endlich, den davon zu nehmenden Copien die größte, gegenwärtig erreichbare, Genauigkeit zu geben, verlangten die Verfertigung eines neuen Etalons derselben, welches ein *Endflächenmaafs* von der größten Unveränderlichkeit und Dauerhaftigkeit, welche man zu erreichen wufste, sein mußte. Die Gründe, woraus dieses hervorgeht, habe ich oben schon angeführt. Indem einer von ihnen ist, daß eine, auf die Oberfläche eines Stabes aufgetragene Entfernung nicht eher ihre völlige Unzweideutigkeit erhält, als bis die Art, wie der Stab auf eine Ebene, oder auf Punkte aufgelegt werden soll, fest bestimmt ist, diese Bestimmung aber bei dem vorhandenen Original des Preussischen Längenmaafses fehlt, so folgt, daß man nicht sowohl die im J. 1835 gemessene, in den Tausendeln der Linie zweideutige Länge dieses Originals, als das Gesetz, nach dessen Forderungen es verfertigt worden ist, zur Richtschnur bei der Verfertigung des neuen Maafses nehmen mußte. Daß *dieses*, in der Folge, als wahres Original des Preussischen Längenmaafses angesehen werden muß, ist wenigstens so lange nothwendig, als keine feste Bestimmung über die Auflegungsart des früher vorhandenen (übrigens nie in Anwendung gekommenen) gegeben sein wird; es würde auch keine Schwierigkeit haben, diese so zu wählen, daß das Original von 1816 genau die Länge erhielte, welche das Gesetz ihm zu geben beabsichtigt. Allein *zwei* Originale eines Maafses sind offenbar *zu viel*; so wie ein neues nothwendig wird, verliert das alte seine Bedeutung. Jenes werde ich daher, in der

Folge, ohne weitere Bezeichnung, *Original* nennen, so wie ich dieses bisher *Original von 1816* genannt habe.

Das neue Original des Preussischen Längenmaafses ist ein Stab von Huntsmanschem Gufsstahl und hat die Länge von sehr nahe drei Preussischen Fussen; seine Durchschnitte sind Quadrate von 9 Linien Seite. In seine Enden sind abgekürzte Kegel von *Sapphir* eingelassen, deren grössere Endflächen sich in dem Inneren des Stabes befinden, während die kleineren über die Endflächen des Stahls ein wenig hervorragen, und durch ihre Entfernung, in der Axe des Stabes gemessen, sein Maafs angeben. Unter der Axe des Stabes verstehe ich die gerade Linie, welche die Durchschnittspunkte der Diagonalen seiner beiden Endflächen miteinander verbindet.

Die Einrichtung zur Befestigung der *Sapphire* wird durch Taf. II Fig. 9 und 10 in ihrer wahren Gröfse dargestellt. In jede Endfläche des Stabes ist ein cylindrisches Loch (*a*) eingebohrt, in welches ein Schraubengewinde eingeschnitten ist; etwa 5 Lin. entfernt von der Endfläche erweitert sich dieses Loch (*c*), um ein größeres Schraubengewinde aufzunehmen; noch näher an der Endfläche (*b*) erweitert es sich wieder und ist hier genau cylindrisch ausgearbeitet. In das erste Schraubengewinde paßt die Schraube von Stahl *d*, welche ihre Mutter so nahe ausfüllt, dafs sie nur mit nicht unbeträchtlicher Kraftäufserung gedreht werden kann, welches durch einen, auf ihren quadratischen Kopf (*e*) zu steckenden Schlüssel geschieht. Der Cylinder von Stahl *kk*, welcher mit einem hervorstehenden Rande (*g*) versehen ist und die cylindrische Vertiefung *b* genau ausfüllt, kann, mittelst seiner, in die Mutter *c* passenden Schraube, mit dem Stabe verbunden werden. In seiner Axe ist er kegelförmig, von Innen nach Aussen ausgearbeitet; sein kegelförmiges Loch ist aber mit reinem Golde gefüllt und wieder kegelförmig durchbohrt, so dafs nur der, sich im Durchschnitte *hh* zeigende Mantel dieses Metalls stehen geblieben ist. In das Gold paßt genau der Kegel von *Sapphir* (*i*), so dafs, wenn er von Innen in sein Lager geschoben und gehörig eingedrückt wird, seine äufsere Oberfläche sich in der Ebene der äufseren Oberfläche des Stahls befindet. Der Schraubenkopf *e* ist abgerundet und vergoldet, so dafs seine convexe Fläche, bei dem Einschrauben des Cylinders *kk*, zuerst die Grundfläche des *Sapphir*kegels berührt, dann aber, bei der Fortsetzung des Einschraubens, den Stein in das Gold eindrückt, und seine äufsere Fläche etwas über die Ebene hervortreibt, in

welcher sie sich anfänglich befand. Hierdurch erlangt man den Beweis des festen Anliegens des Sapphirs an seinen, im Inneren des Stabes befindlichen Flächen. Der hervorstehende Rand (*g*) des Cylinders wird nun auf der Drehbank abgeschnitten und die Oberfläche polirt, wodurch jede äußere Spur der Befestigungsart verschwindet. Auf diese Art ist der Sapphir gegen Unvorsichtigkeit und absichtliche Versuche ihn zu verrücken (offenbare Gewalt ausgenommen), geschützt; gegen die Erweiterung seines Lagers durch Rost schützt ihn das Gold.

Die hier gegebene Beschreibung bezieht sich auf das Ende des Stabes, welches zuerst in Ordnung gebracht wird; das andere fordert einige Änderungen der Einrichtung, denn der zweite Sapphir muß nicht allein befestigt, sondern auch in der beabsichtigten Entfernung von dem, schon in dem Stabe befindlichen, befestigt werden. Die zu diesem Zwecke zu treffenden Einrichtungen werden durch die Mittel bedingt, durch welche man die Länge des Etalons mißt. Der im 1^{sten} §. beschriebene Messungsapparat ergiebt aber die Entfernung der Oberflächen der beiden Sapphire dadurch, daß man sie mit den kugelförmig geschliffenen Endflächen der auf der Bahn liegenden Stahlcylinder in Berührung bringt, während das Etalon in der Vertiefung der Messingplatte des Apparats liegt, deren abgeschliffene Kanten die Bahn bilden. Es ist also erforderlich, dem hervorstehenden Rande des Stahlstückes, in welchem sich der Sapphir, am zweiten Ende des Etalons, befindet, eine Form zu geben, welche diese Berührung nicht hindert, dennoch aber Metall genug behält, um durch einen starken Schraubenzieher gedreht werden zu können, welcher in einen, in den Rand gemachten Einschnitt gesetzt wurde. Die 9^{te} Figur zeigt diese Form im Durchschnitte; ihre Oberfläche ist kugelförmig, mit 9 Lin. Halbmesser ausgearbeitet, wodurch sie außer Berührung mit der kleineren Kugelfläche des Cylinders, von 8,5 Lin. Halbmesser, gesetzt wird. — Als die Berichtigung des Stabes gemacht werden sollte, setzte man den Sapphir ein, schraubte das Endstück fest und maas nun, auf dem beschriebenen Apparate, die Entfernung der beiden Sapphirflächen. Fand sie sich größer oder kleiner, als sie sein sollte, so nahm man das Endstück wieder heraus und drehete die Schraube rechts oder links, worauf eine neue, nach der Zusammensetzung vorgenommene Messung den Erfolg der Verbesserung angab. Um den Versuchen dieser Art einige Regelmäßigkeit zu geben, versah Hr. *Baumann* den, zur Drehung

des Schraubenkopfes *e* dienenden Schlüssel mit einem Zeiger, welcher die Gröfse der jedesmaligen Drehung auf einer eingetheilten Scheibe (Taf. III Fig. 16) angab, und da man den Werth eines Schraubenganges kannte, auch zeigte, wieviel man drehen mußte, um eine Veränderung von beabsichtigter Gröfse hervorzubringen. Die Berichtigung der Länge des Etalons bis auf einige Tausentel einer Linie war sehr leicht; ihre weitere Fortsetzung wurde zeitraubend, da man, je näher man der beabsichtigten Länge schon gekommen war, desto sorgfältiger und öfter wiederholt messen mußte. Indessen gewährte Hrn. *Baumanns* unausgesetzte Hülfe bei diesen Versuchen ihnen den gewünschten Erfolg. — Hr. Oberbergrath *Schaffrinski* war, auf meine Bitte, von der hohen Königl. Verwaltung für Handel, Fabrication und Bauwesen, beauftragt worden, die Versuche zur Berichtigung des Etalons durch seine Gegenwart zu unterstützen. Wir überzeugten uns gemeinschaftlich von dem äußerst nahen Gelingen einer letzten Berichtigung, und veranlaßten darauf Hrn. *Baumann*, den hervorstehenden Rand auch des zweiten Endes des Etalons wegzuschneiden. Beide Enden wurden nun vollkommen gleich, und das Etalon war in dem Zustande, in welchem es bleiben sollte.

Ich darf nicht unerwähnt lassen, daß die Kegel von Sapphir von Hrn. Oberbergrath *Schaffrinski* geschliffen worden sind, welcher die Kunst und die Einrichtung besitzt, so hartes Material zu bearbeiten. Alles übrige an dem Etalon ist, so wie alle mechanischen Einrichtungen, welche das ganze Geschäft erforderte, von Hrn. *Baumann* verfertigt worden.

§. 8.

Untersuchungen über die Beschaffenheit des Originals des Preussischen Längenmaaßes.

Die Stärke eines Stabes von *Stahl*, von quadratischem, 9 Linien zur Seite habenden Durchschnitte, ist so groß, daß die Anwendung einer beträchtlichen Kraft erforderlich ist, um ihm eine, über die Grenzen seiner Elasticität hinausgehende, also nicht spurlos wieder verschwindende, Krümmung zu geben. Ich halte sie für mehr als hinreichend, allen Zufällen zu widerstehen, welche der Stab bei seinen Anwendungen erfahren mögte. Die Einwirkung der Schwere auf die Entfernung seiner Endflächen ist unbedeutend, denn die in der Beilage gegebenen Formeln zeigen, daß selbst

seine Unterstützung an den Enden, ihn, unter Voraussetzung der dem Eisen zugehörigen specifischen Schwere und Spannkraft, nur um $0,0000105$ verkürzen kann. Man mag also den Stab auflegen wie man will, so behalten seine Endflächen innerhalb der Grenzen, bis auf welche man die Genauigkeit seiner Messung zu treiben hoffen kann, eine gleiche Entfernung.

Die Messung der Länge des Etalons würde am einfachsten sein, wenn die Oberflächen der Sapphire auf seine Längsaxe senkrecht stehende Ebenen wären. Sollen sie nicht als solche angenommen werden, so ist es nöthig, ihre Entfernung genau in der Axe des Stabes zu messen. Wenn die Messung durch die Berührung der Endflächen, durch feine, als Punkte anzusehende Spitzen erlangt wird, so mißt man die wahre Länge *unmittelbar*, indem man Mittel anwendet, die Berührungspunkte in die Axe des Stabes zu verlegen; man erhält aber auch die wahre Länge, indem man das Mittel aus zwei Entfernungen dafür annimmt, an Punkten gemessen, welche in einander entgegengesetzten Richtungen von der Axe und in gleichen Entfernungen von ihr liegen. Hierbei werden zwar die Oberflächen als *eben* vorausgesetzt, allein dieses darf immer geschehen, wenn die Entfernung der beiden Punkte von der Axe nur nicht so groß ist, daß sie sich von einer, die Oberfläche, in der Axe, berührenden Ebene merklich entfernen. Das, was diese zweite Messungsart fordert, wird einfach erlangt, indem man dem, beziehungsweise auf die Mikrometer, festen Lager des Stabes die Einrichtung giebt, daß es nicht allein die Höhe desselben, sondern auch seine Lage in der horizontalen Ebene bestimmt, und indem man ihn, zwischen beiden Messungen, in diesem Lager umwendet. Die Kenntniß der Neigung des als *eben* vorausgesetzten Theils der Endflächen gegen die Axe wird dann unnöthig, und jedes zusammengehörige Paar der Messungen giebt die Länge des Stabes in der Axe. Sie wird aber *nöthig*, wenn die Berührung nicht durch Spitzen, sondern durch Kugelflächen geschieht; denn diese berühren die Endflächen nicht durch das Ende ihres mit der Axe des Stabes zusammenfallenden Halbmessers, sondern, wenn dieses noch davon entfernt ist, schon an einem anderen Punkte. Die unmittelbare Messung eines Stabes, dessen Endflächen nicht senkrecht auf seiner Axe sind, ergiebt also, falls sie durch Berührung derselben durch Kugelflächen erlangt wird, seine Länge immer *zu groß* und muß also, durch Rechnung, auf ihr wahres Resultat zurückgeführt werden. Indem die Berührungspunkte sich, mit zunehmender Größe des

Halbmessers der berührenden Kugelfläche, von der Axe weiter entfernen, kann auch die allgemeine Rechtmäßigkeit der Voraussetzung bezweifelt werden, daß sie in einen, um die Axe beschriebenen Raum fallen, der sich, wegen seiner Kleinheit, nicht merklich von einer kleinen ebenen Fläche unterscheidet.

Um hier nichts zu wünschen übrig zu lassen, ist offenbar erforderlich, daß man eine eigene Untersuchung über die Beschaffenheit der Endflächen eines Stabes vornehme, und, nachdem man diese durch Beobachtung bestimmt hat, die Theorie ihres Einflusses auf die Messungen verfolge. Man kann dieses vermeiden, wenn man die Berührungen nicht durch Kugelflächen, sondern durch feine Spitzen bewirkt; auch ist, in beiden Fällen, nur die Bestimmung der *Neigung* der Endflächen nothwendig, wenn sie nicht merklich uneben sind. Ich gab aber der Anwendung von Kugelflächen den Vorzug, weil sehr feine Spitzen der Cylinder des Messungsapparats nicht nur selbst leicht beschädigt werden könnten, sondern auch weniger harte Endflächen als die Sapphire verletzen würden. Ich hätte also eine nähere Untersuchung der Endflächen nur auf Kosten der Sicherheit der Resultate meiner Arbeiten unterlassen können.

Es scheint mir nothwendig, die Beschaffenheit dieses neuen Etalons in dem gegenwärtigen, seiner Verfertigung gewidmeten Abschnitte vollständig abzuhandeln; allein ich werde dadurch gezwungen, eines Theils des Baumannschen Apparates, den ich erst im 6^{ten} Abschnitte beschreiben kann, hier schon zu erwähnen, indem ich ihn, bei der Untersuchung der Endflächen der Sapphire, benutzt habe. Dieser besteht aus zwei Mikrometern, von den im 1^{sten} §. beschriebenen nur dadurch im Wesentlichen verschieden, daß der Cylinder, dessen eines Ende auf die zu berührende Fläche, das andere auf die Wasserwage wirkt, nicht auf einer von dem Mikrometer getrennten Bahn, sondern auf einer, auf dem Schlitten selbst befindlichen, liegt, die Drehung der Mikrometerschraube also den, die Fläche berührenden, Cylinder in dieser Bahn verschiebt und dadurch seine Wirkung auf die Wasserwage eintreten läßt. Diese höchst feinen und vortrefflichen Mikrometer habe ich von dem Apparate, wozu sie gehören, abgenommen und sie so angewandt, daß dadurch die Entfernungen verschiedener Punkte der Endflächen, von einer auf die Axe des Stabes senkrechten Ebene, bekannt werden. Diese Punkte liegen in zwei, sich in der Axe des Stabes senkrecht

durchschneidenden, den Seitenflächen des Stabes parallelen Ebenen, und zwar in Entfernungen von $\pm 0,0981$, $\pm 0,1962$, $\pm 0,2943$ von der Axe. Um Punkte der Endflächen bestimmt angeben zu können, ist das eine Ende (I) des Stabes, an seinen vier Seiten, durch $\cdot$, $\cdot\cdot$, $\cdot\cdot\cdot$, $\cdot\cdot\cdot\cdot$ bezeichnet worden; die Entfernung eines unbestimmten Punktes der Oberfläche von der Linie $\cdot\cdot - \cdot\cdot\cdot\cdot$ wird durch x , seine Entfernung von der Linie $\cdot - \cdot\cdot\cdot$ durch y angedeutet und zwar werden sie, nach der Seite der größeren Zahlen hin, positiv gezählt. Was durch Messungen erlangt werden mußte, waren die Entfernungen z , durch x und y bestimmter Punkte der Oberfläche, von einer auf die Axe des Stabes senkrechten Ebene.

Um diese Entfernungen zu messen, bin ich folgendermaßen verfahren. Ich habe den Stab auf ein festes Lager gelegt, auf welchem er, ohne Veränderung der Lage seiner Axe, umgewandt werden konnte; dann habe ich beide Mikrometer vor dem Stabe aufeinandergelegt, das untere in senkrechter Richtung auf seine Axe, das obere in paralleler mit derselben, so daß ich, durch die Schraubenbewegung des ersteren, das letztere in gerader Linie vor der Endfläche des Stabes vorüberbewegen, also, durch seine Schraube, die Werthe von z an verschiedenen Punkten der Oberfläche messen konnte. Die Voraussetzung, daß die Bewegung dieses Mikrometers der Axe des Stabes parallel vor sich gehe, wurde zwar durch das Auflegen der Mikrometer selbst, in gehöriger Lage, näherungsweise erfüllt; sie wurde aber, durch Wiederholung der Beobachtungen nach der Umlegung des Stabes in seinem festen Lager, ganz aus dem Resultate geschafft. Daß das obere Mikrometer, bei seiner Bewegung durch die Schraube des unteren, eine durch die Axe des Stabes gehende Linie, und nicht etwa eine ihr parallele beschrieb, erlangte ich durch eine Vorrichtung zum Centriren des Stabes, welche ich im 6^{ten} Abschnitte beschreiben werde. Da es weit einfacher und sicherer war, die Berührungen der Sapphire nicht durch die kugelförmige Endfläche des Mikrometer-Cylinders, sondern durch eine feine Spitze zu bewirken, so ersuchte ich Hrn. *Baumann* um die Verfertigung einer, mit einer Spitze versehenen Hülse, welche, genau passend, auf das vordere Ende des Cylinders geschoben werden konnte.

Die Beobachtungen selbst habe ich viermal wiederholt, nämlich zweimal in beiden Lagen des Stabes auf seinem Lager. Für die Endfläche, an welcher die Punkte verzeichnet worden sind (I), habe ich die Werthe von z ,

von der auf die Axe des Stabes, in ihrem Durchschnittspunkte mit der Endfläche senkrecht gelegten Ebene an gezählt, gefunden:

a. in der Linie . — . . . , oder für $y = 0$

x	1 ^{ste} Reihe	2 ^{te} Reihe	Mittel	Paris. Lin.
— 0 ^L ,2943	— 0 ^R ,0308	— 0 ^R ,0311	— 0 ^R ,0310	— 0 ^L ,00379
— 0,1962	— 0,0203	— 0,0201	— 0,0202	— 0,00248
— 0,0981	— 0,0100	— 0,0101	— 0,0101	— 0,00124
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,00000
+ 0,0981	+ 0,0092	+ 0,0098	+ 0,0095	+ 0,00117
+ 0,1962	+ 0,0189	+ 0,0197	+ 0,0193	+ 0,00237
+ 0,2943	+ 0,0280	+ 0,0294	+ 0,0287	+ 0,00352

b. in der Linie .. — , oder für $x = 0$

y	1 ^{ste} Reihe	2 ^{te} Reihe	Mittel	Paris. Lin.
— 0 ^L ,2943	+ 0 ^R ,0056	+ 0 ^R ,0051	+ 0 ^R ,0054	+ 0 ^L ,00066
— 0,1962	+ 0,0040	+ 0,0046	+ 0,0043	+ 0,00053
— 0,0981	+ 0,0012	+ 0,0025	+ 0,0018	+ 0,00023
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,00000
+ 0,0981	— 0,0022	— 0,0009	— 0,0016	— 0,00019
+ 0,1962	— 0,0049	— 0,0035	— 0,0042	— 0,00052
+ 0,2943	— 0,0065	— 0,0053	— 0,0059	— 0,00073

Für die andere Endfläche (II) habe ich diese Werthe gefunden:

a. in der Linie . — . . . , oder für $y = 0$

x	1 ^{ste} Reihe	2 ^{te} Reihe	Mittel	Paris. Lin.
— 0 ^L ,2943	+ 0 ^R ,0110	+ 0 ^R ,0126	+ 0 ^R ,0118	+ 0 ^L ,00145
— 0,1962	+ 0,0072	+ 0,0092	+ 0,0082	+ 0,00101
— 0,0981	+ 0,0037	+ 0,0047	+ 0,0042	+ 0,00051
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,00000
+ 0,0981	— 0,0047	— 0,0025	— 0,0036	— 0,00045
+ 0,1962	— 0,0085	— 0,0076	— 0,0080	— 0,00099
+ 0,2943	— 0,0129	— 0,0117	— 0,0123	— 0,00150

b. in der Linie .. —, oder für $x = 0$

y	1ste Reihe	2te Reihe	Mittel	Paris. Lin.
— 0,2943	+ 0,0045	+ 0,0069	+ 0,0057	+ 0,00070
— 0,1962	+ 0,0035	+ 0,0050	+ 0,0043	+ 0,00053
— 0,0981	+ 0,0023	+ 0,0031	+ 0,0027	+ 0,00033
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,00000
+ 0,0981	— 0,0039	— 0,0030	— 0,0034	— 0,00042
+ 0,1962	— 0,0078	— 0,0075	— 0,0077	— 0,00094
+ 0,2943	— 0,0134	— 0,0135	— 0,0134	— 0,00164

In diesen Messungen zeigen sich deutliche, wenn auch kleine Spuren der Krümmung der Oberflächen der Saphire; wenn man die kleineren derselben auch nicht beachten will, so kann man doch nicht zweifeln, daß die Linie .. — der Endfläche II nicht gerade ist, denn man kann die Zahlen der letzten Columnne des diese Linie betreffenden Verzeichnisses, mit dieser Annahme, nicht näher als bis auf 0,0004 vereinigen, welche Gröfse die Unsicherheit der Angaben selbst weit überschreitet. Wenn man von den Sapphirflächen Licht reflectiren läßt, so wird gleichfalls eine Krümmung derselben sichtbar, welche sich der cylindrischen nähert und vermuthlich, in dieser Art, aus der Operation des Schleifens entstanden ist. Aus den Messungen geht hervor, daß der ganze Raum, über welchen sie sich erstrecken, nämlich der Raum eines mit dem Halbmesser 0,2943 um die Axe beschriebenen Kreises, nicht mehr als *eben* angenommen werden darf, wenn in der gemessenen Länge des Etalons nicht Fehler von 0,0004 möglich werden sollen.

Um die Figur der Endflächen und ihre Lage gegen die Axe des Stabes näher kennen zu lernen, habe ich die Messungen mit der Annahme:

$$z = ax + by - (cx - dy)^2$$

verglichen, welches die Annahme einer cylindrischen Figur der Endflächen ist. Die wahrscheinlichsten, aus den Messungen folgenden Werthe der Coefficienten dieser Formel sind:

für die Endfläche	I	II
a	+ 0,01239	— 0,00503
b	— 0,00244	— 0,00390
c	± 0,03948	± 0,01282
d	± 0,01708	± 0,07350

Diese Werthe stellen sämtliche Messungen bis auf Kleinigkeiten dar, bis auf welche sie nicht verbürgt werden können; nämlich bis auf

x und y	I		II	
— 0,2943	+ 0,00001	+ 0,00003	+ 0,00001	— 0,00002
— 0,1962	— 0,00001	— 0,00006	— 0,00003	+ 0,00008
— 0,0981	+ 0,00001	+ 0,00001	— 0,00002	— 0,00001
+ 0,0981	+ 0,00004	— 0,00005	+ 0,00004	— 0,00001
+ 0,1962	0,00000	+ 0,00003	0,00000	+ 0,00002
+ 0,2943	— 0,00001	— 0,00001	0,00000	+ 0,00002

Nachdem hierdurch die Oberflächen der Sapphire, unter der Annahme der Form des Ausdruckes von z , bestimmt worden sind, muß die Entfernung μ des in der Axe des Mikrometer-Cylinders liegenden Punktes seiner kugelförmigen Endfläche von der Ebene der z aufgesucht werden: sie ist die Gröfse, um welche das Mikrometer noch vorgeschoben werden müßte, wenn sein Cylinder die Ebene der z berühren, oder die Messung die wahre Länge des Stabes ergeben sollte. Die Axe dieses Cylinders ist der Axe des Stabes parallel, aber sie soll nicht mit ihr zusammenfallend angenommen werden, sondern durch Punkte gehen, deren auf die Axen der x und y bezogene Coordinaten ich durch α und β bezeichnen werde. Bezeichnet man ferner die auf die Axe der z bezogene Coordinate des Mittelpunkts der kugelförmigen Endfläche des Mikrometer-Cylinders durch γ , ihren Halbmesser durch r , so hat man, durch die Bedingung, daß ein Punkt dieser Endfläche einen Punkt der Endfläche des Stabes *berühre*, die Gleichungen

$$rr = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2$$

$$0 = x - \alpha + (z - \gamma) \frac{dz}{dx} = x - \alpha + (z - \gamma) \{a - 2c(cx - dy)\}$$

$$0 = y - \beta + (z - \gamma) \frac{dz}{dy} = y - \beta + (z - \gamma) \{b + 2d(cx - dy)\}.$$

Da $\gamma = r + \mu$ ist und in den beiden letzten Gleichungen $-r$ für $z - \gamma$ gesetzt, auch das Quadrat von μ vernachlässigt werden kann, so kann man diese Gleichungen in:

$$2r(z-\mu) = (x-a)^2 + (y-\beta)^2$$

$$0 = x-a-r\{a-2c(cx-dy)\}$$

$$0 = y-\beta-r\{b+2d(cx-dy)\}$$

verwandeln, und durch Elimination von x und y ,

$$\mu = \frac{1}{2}r\{aa+bb\} + aa + b\beta + \frac{\{ca-d\beta+r(ca-db)^2\}}{1+2r(cc+dd)}$$

daraus ableiten. Da aber die Umwendung des Etalons auf seinem festen Lager bei jeder vollständigen Messung nothwendig ist, und sich, durch dieselbe, a und β in $-a$ und $-\beta$ verwandeln, so ist immer das Mittel aus dem vorigen Ausdrucke und dem folgenden:

$$\frac{1}{2}r\{aa+bb\} - aa - b\beta + \frac{\{ca-d\beta-r(ca-db)^2\}}{1+2r(cc+dd)}$$

oder

$$\mu = \frac{1}{2}r\{aa+bb\} + \frac{rr(ca-db)^2}{1+2r(cc+dd)} + \frac{(ca-d\beta)^2}{1+2r(cc+dd)}$$

zur Verbesserung vollständiger Messungen anzuwenden. Setzt man, um die Rechnung zu erleichtern,

$$a = f \cos F \quad c = g \cos G \quad a = h \cos H$$

$$b = f \sin F \quad d = g \sin G \quad \beta = h \sin H$$

so wird

$$\mu = \frac{1}{2}r \cdot f^2 + \frac{\{rfg \cos(F+G)^2\}}{1+2rfg} + \frac{\{gh \cos(G+H)^2\}}{1+2rfg}.$$

In dem Werthe von G ist noch die Zweideutigkeit, welche aus der Willkür in der Annahme des Zeichens von $\frac{d}{c}$ entsteht; sie ist die nothwendige Folge davon, daß die Werthe von z nur in zwei, sich senkrecht durchschneidenden Ebenen gemessen worden sind; die Axe eines Cylinders kann sich nämlich nach der einen oder der anderen Seite einer Ebene gleichviel neigen, ohne daß dadurch sein Schnitt durch die Ebene geändert würde. Um sie zu beseitigen, muß man den Quadranten, in welchen G fällt, anderweitig bestimmen, entweder durch Messung von Werthen von z in einer dritten Ebene, oder nach dem bloßen Augenscheine, falls dieser hinreicht

zu zeigen, nach welcher Richtung die *geraden* Schnitte der Endfläche stattfinden. In dem Falle des Originalmaafses läßt die Betrachtung der von den Sapphiren reflectirten Bilder einer geraden Linie keinen Zweifel darüber, daß diese Schnitte, auf der Endfläche I, mehr gegen die Linie $\bullet - \dots$, als gegen die Linie $\bullet \bullet - \dots$ geneigt sind und, wenn man ihre Richtungen von (a) zählt, vom 1^{ten} Quadranten zum 3^{ten} gehen; auf der Endfläche II sind sie gegen die Linie $\bullet - \dots$ wenig geneigt und gehen vom 2^{ten} zum 4^{ten} Quadranten. Da, für Punkte in diesen Schnitten, $cx - dy = 0$, oder $\frac{y}{x} = \frac{c}{d}$ ist, so geht hieraus hervor, daß für die Endfläche I, c und d gleiches, für die Endfläche II verschiedenes Zeichen haben; das Zeichen des einen von beiden bleibt aber nothwendig willkürlich und ist auch gleichgültig.

Durch die oben schon angegebenen Werthe von a, b, c, d findet man, dieser Bemerkung zufolge:

Endfläche	I		II	
f und F	0,01263	348° 53'	0,00636	217° 47'
g und G	0,04302	23 24	0,07461	99 54

und ferner den Ausdruck von μ , so wie ihn vollständige Messungen erfordern, für die Endfläche I:

$$\mu = r \cdot 0,0000798 + \frac{rr \cdot 0,00000282}{1 + r \cdot 0,003701} + \frac{0,00185 \{h \cos(23^\circ 24' + H)\}^2}{1 + r \cdot 0,003701}$$

und für die Endfläche II:

$$\mu = r \cdot 0,0000203 + \frac{rr \cdot 0,00000102}{1 + r \cdot 0,011134} + \frac{0,00557 \{h \cos(99^\circ 54' + H)\}^2}{1 + r \cdot 0,011134}$$

Die Maafseinheit, worauf diese Formeln sich beziehen, ist die Pariser Linie. Das erste Glied beider Formeln ist das, welches allein vorhanden sein würde, wenn die Endfläche mit der sie in der Axe berührenden Ebene zusammenfiel; das zweite ist der Einfluß der Krümmung derselben; das dritte entsteht aus dieser und der Entfernung der Mikrometerlinie von der Axe des Stabes und zeigt den Einfluß, welchen eine mangelhafte Centrirung auf die Messungen ausübt. Da es sehr leicht ist, hierin einen Fehler von einigen Hunderteln einer Linie zu vermeiden, indem man, falls der Messungsapparat nicht, durch seine Einrichtung selbst, ihn ausschließt, was bei dem im

1^{ten} §. beschriebenen der Fall ist, die vorher schon erwähnte, später zu beschreibende Vorrichtung anwendet, so wird das letzte Glied so klein, daß es nicht wirklich in Betracht kommt.

Die Kenntniß der Halbmesser der die Endflächen des Etalons berührenden Kugelflächen, welche die Berechnung von μ voraussetzt, kann durch eine passende Abänderung des zur Prüfung der ersteren angewandten Verfahrens, leicht und mit großer Sicherheit erlangt werden. Ich habe, durch seine einmalige Anwendung, den Werth von r für die vier Cylinder des im 1^{ten} §. beschriebenen Apparats gefunden:

Cylinder des Mikrometers I.....	$r = 8,455$
— — — II.....	$8,467$
Anschiebe-Cylinder A.....	$8,451$
— — B.....	$8,461$

Setzt man demzufolge $r = 8,46$, so erhält man den, bei den Messungen des neuen Originals des Preussischen Längenmaasses, auf dem §. 1. beschriebenen Apparate, anzuwendenden Werth von μ :

$$\begin{aligned} \text{an der Endfläche I} &= + 0,000675 + 0,000020 = 0,000695 \\ \text{— — II} &= + 0,000172 + 0,000007 = 0,000179. \end{aligned}$$

Man muß also die unmittelbaren Messungen auf diesem Apparate um die Summe beider Zahlen $= 0,000874$ verkleinern, damit sie die wahre Länge ergeben.

Man vermeidet, wie ich schon bemerkt habe, die in dem gegenwärtigen Paragraphen ausgeführte Untersuchung, wenn man die Endflächen durch feine Spitzen berührt. Sie betrifft also nicht sowohl das Original des Längenmaasses selbst, obgleich dieses Data dazu giebt, als den Apparat, womit man es mißt. Da aus ihr hervorgegangen ist, daß die Anwendung von Kugelflächen zur Berührung keine Unsicherheit, sondern nur eine kleine Rechnung zur Folge hat, so ist kein erheblicher Grund gegen diese Anwendung vorhanden. Ich bemerke übrigens, daß die sich aus dieser Untersuchung ergebende merkliche Abweichung der Sapphirflächen, von der auf die Axe senkrechten Ebene, vermuthlich aus zwei Ursachen entstanden ist, nämlich sowohl aus der Schwierigkeit, so harte Körper, welche durch die,

für weniger harte anwendbaren, mechanischen Hilfsmittel nicht bearbeitet werden können, genau senkrecht auf eine gegebene Axe abzuschneiden, als auch aus der, durch ihr nothwendiges, festes Anschrauben verursachten Zusammendrückung ihrer, aus Gold gemachten, Betten.

Der zur vollständigen Kenntniß des Originals des Preussischen Längenmaaßes noch nöthigen Untersuchung der Veränderungen, welche es durch die Wärme erleidet, werde ich den folgenden Abschnitt widmen.

