

www.e-rara.ch

Kleine Beyträge zur Mathematik und Physik und deren Lehrmethode

Busse, Friedrich Gottlieb von

Leipzig, 1786

Zentralbibliothek Zürich

Shelf Mark: NE 1760

Persistent Link: <https://doi.org/10.3931/e-rara-48065>

[I. Stück. Einige neue Lehrsätze über die höheren Gleichungen - VI. Stück. Rechnungen nach dem Grundsatz der sogenannten kleinsten Wirkung.]

www.e-rara.ch

Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien – von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material – from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d'imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L'éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes – des débuts de l'imprimerie jusqu'au 20e siècle.

e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

Nutzungsbedingungen Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titelinformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

Terms of Use This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

Conditions d'utilisation Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

Condizioni di utilizzo Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]



I. Stück.

Einige neue Lehrsätze über die höheren Gleichungen.

§. 1.

Erklärung.

A soll eine Menge von beliebigen Größen bezeichnen, A^I ihre Summe, A^{II} die Summe aus allen Aiben, A^{III} die Summe aus allen Ternen, und überhaupt A^R , die Summe aus allen Rnen, die man aus diesen Größen zusammensetzen kann. Durch α^I und α^{II} , α^{III} u. oder P^I und P^{II} , P^{III} u. werden die nämlichen Summen und Verbindungssummen aus den Größen der Menge α oder der Menge P angedeutet.

§. 2.

Lehrsatz.

Man stelle sich die Menge A als aus zwei Mengen α und P bestehend vor; und wir werden diese geforderte Vorstellung dadurch anzeigen, daß wir $A = (\alpha, P)$ schreiben: so wird seyn,

$$A^I = (\alpha, P)^I = \alpha^I + P^I$$

$$A^{II} = (\alpha, P)^{II} = \alpha^{II} + \alpha^I P^I + P^{II}$$

$$A^{III} = (\alpha, P)^{III} = \alpha^{III} + \alpha^{II} P^I + \alpha^I P^{II} + P^{III}$$

und überhaupt,

$$A^R = (\alpha, P)^R = \alpha^R + \alpha^{R-I} P^I + \alpha^{R-II} P^{II} \dots$$

$$\dots + \alpha^I P^{R-I} + P^R.$$

U

Die

Die Richtigkeit der ersten Gleichung leuchtet sogleich ein. Und was z. B. die Ambensumme A^{II} betrifft, so müssen alle Amben, die sich aus den Größen der Menge A , als $= (\alpha, P)$ betrachtet, zusammensetzen lassen, außer denen Amben, welche aus den Mengen α und P , jede für sich genommen, entstehen und die Ambensummen α^{II} und P^{II} geben, auch noch diejenigen Amben enthalten, so aus der Verbindung (Multiplicirung) einer jeden einzelnen Größe in α mit jeder einzelnen Größe in P entspringen, und dieser Summe ist offenbar $= \alpha^{\text{I}} P^{\text{I}}$. Aus ähnlichen Betrachtungen läßt sich die Richtigkeit der übrigen Formeln für A^{III} u. s. w. leicht übersehen.

§. 3.

Z u s a m m e n f a s s u n g.

Besteht die Menge α nur aus zwei Größen, so kann kein α^{III} , α^{IV} etc. aus ihr entspringen, sondern ihre höchste Verbindungssumme besteht aus ihrer Ambe und ist α^{II} . Alle höheren Verbindungsformeln fallen demnach aus obigen Formeln geradezu fort, und man erhält, wenn α eine Menge von zwei Größen bedeutet,

$$\begin{aligned} \text{für } A &= (\alpha, P) \\ \text{daß } A^{\text{I}} &= (\alpha, P)^{\text{I}} = \alpha^{\text{I}} + P^{\text{I}} \\ A^{\text{II}} &= (\alpha, P)^{\text{II}} = \alpha^{\text{II}} + \alpha^{\text{I}} P^{\text{I}} + P^{\text{II}} \\ A^{\text{III}} &= (\alpha, P)^{\text{III}} = \alpha^{\text{II}} P^{\text{I}} + \alpha^{\text{I}} P^{\text{II}} + P^{\text{III}} \\ &\vdots \\ A^{\text{R}} &= (\alpha, P)^{\text{R}} = \alpha^{\text{II}} P^{\text{R-II}} + \alpha^{\text{I}} P^{\text{R-I}} + P^{\text{R}}. \end{aligned}$$

§. 4.

Z u s a m m e n f a s s u n g.

Denkt man sich unter α nur eine einzelne Größe, so ist auch schon α^{II} für die eben angegebenen Verbindungssummen nicht mehr vorhanden, und man hat

für

für $A = (\alpha, P)$

daß $A^I = (\alpha, P)^I = \alpha + P^I$

$A^{II} = (\alpha, P)^{II} = \alpha P^I + P^{II}$

$A^{III} = (\alpha, P)^{III} = \alpha P^{II} + P^{III}$

:

:

$A^R = (\alpha, P)^R = \alpha P^{R-1} + P^R,$

§. 5.

Folgerung.

Des folgenden Gebrauches wegen wird in diesem P statt A , und Q statt des bisherigen P geschrieben. Wird nun die einzelne Größe φ der Menge P als $=(\varphi, Q)$ wie eine veränderliche Größe betrachtet, so erhält man für die Differentialen der Verbindungssummen aus dem vorigen §. folgende bequeme Ausdrücke:

$$d P^I = d\varphi$$

$$d P^{II} = P^I d\varphi$$

$$d P^{III} = P^{II} d\varphi \text{ und überhaupt } d P^R = P^{R-1} d\varphi.$$

§. 6.

Aufgabe.

Das Maximum der Ambensumme aus n Größen zu finden, deren Summe $= 0$ ist.

§. 7.

Vorbereitung.

A sey die gegebne Menge von n Größen, deren Summe $A^1 = 0$ seyn soll, und die Menge aus $n - 1$ ihrer Größen sey P ; so wird die nte Größe selbst $= -P^1$ und nach §. 4. indem man das dortige α als unsere hiesige

nte Größe betrachtet, $A'' = P'' + P' - P^1$, das ist, $A'' = P'' - (P^1)^2$ folglich auch, wenn man zu differenzieren hat, $d A'' = d P'' - d (P^1)^2$ seyn.

§. 8.

Auflösung.

Weil die eine so genannte nte Größe in A durch die Summe aller übrigen $n - 1$ Größen nach einer Bedingung der Aufgabe bestimmt wird; so kann man diese nte Größe selbst nicht variabel setzen. y sey daher die Function für A'' , indem man alle in P steckende $n - 1$ Größen veränderlich setzt, und φ , σ , seyen zwei beliebige von diesen Größen in P: so wird man, nur φ als variabel behandelt, aus der letzten Gleichung des vorigen §. und den Werth von $d P''$ und $d P^1$, aus §. 5. genommen, erhalten

$$d A'' = Q^1 d\varphi - 2 P^1 d\varphi = \frac{dy}{m} \text{ oder weil hier}$$

$$Q^1 = P^1 - \varphi \text{ ist}$$

$$\text{c) } P^1 - \varphi - 2 P^1 = \frac{dy}{m d\varphi}$$

und σ als variabel behandelt, wird sich eben so ergeben,

$$d A'' = Q^1 d\sigma - 2 P^1 d\sigma = \frac{dy}{n}, \text{ oder weil hier}$$

$$Q^1 = P^1 - \sigma \text{ ist}$$

$$\text{g) } P^1 - \sigma - 2 P^1 = \frac{dy}{n d\sigma}$$

Wir haben nämlich beyde Differentialen nur als gewisse (nte oder nte) Theile von dy aufgeführt, weil man das ganze dy erhält, wenn man alle in P steckende Größen

Größen nach einander einzeln variabel setzt, und jedesmal $d A''$ findet, wie es für φ und σ geschehen ist. Alle dadurch erhaltene Differentialen zusammen genommen, machen dann das Differential der Function y aus.

In Absicht auf die höhern Differentialverhältnisse ergiebt sich sogleich aus C)

$$\text{daß } -2 = \frac{d d y}{m d \varphi^2} \text{ und aus } \S), \text{ daß ebenz}$$

$$\text{falls } -2 = \frac{d d y}{n d \sigma^2} \text{ ist; woraus}$$

No. 1. erhellet, daß beyde für φ und σ gehörig bestimmten Werthe zur Beförderung eines Maximi mitwirken. Setzt man nun zur Bestimmung dieser Werthe die ersten Differentialverhältnisse $= 0$,

$$\text{so ergiebt sich } P^I - \varphi - 2 P^I = 0 \text{ aus C)}$$

$$\text{und } P^I - \sigma - 2 P^I = 0 \text{ aus } \S)$$

woraus sogleich so viel abzunehmen ist, daß

No. 2. beyde Werthe, der von φ und der von σ , einander gleich seyn müssen.

Da nun keine von denen $n - 1$ in P steckenden Größen auf eine eigenthümliche Weise bestimmt wird, sondern die einzige, allen diesen $n - 1$ Größen gemeinsame, Bestimmung diese ist, daß eine jede mit den übrigen $n - 2$ Größen zusammen genommen, das Gegentheil der n ten Größe geben solle; so muß, was aus dieser Bestimmung für ein Paar von diesen Größen φ und σ gefolgert ist, für jedes Paar von diesen $n - 1$ Größen statt finden, oder kurz: da wir φ und σ als ein paar beliebige Größen aus der Menge P behandelt haben; so muß, was für dieses

dieses Paar erwiesen ist, bey allen in P steckenden Paaren gültig seyn. Daher giebt uns der Satz No. 2. ein leichtes Mittel an die Hand, den Werth einer jeden variabel gesetzten Größe zu bestimmen. Da nämlich, nach der eben gemachten Betrachtung, daß φ , σ jede zwei beliebige von den Größen in P vorstellen können, vermöge des Satzes No. 2. alle diese Größen variabel gesetzt, alle einerley Werth erhalten müssen; so sey v ihr gemeinschaftlicher Werth, und man wird, v entweder in die erste Gleichung unter No. 1. statt φ , oder auch in die zweite Gleichung statt σ geschrieben, erhalten, $P - v - 2P = 0$, daher $-v - P = 0$, das ist, $-v - (n - 1)v = 0$, daher $v = 0$; und der Satz No. 1. versichert uns, daß dieser Werth von v das Maximum der Function y bewürke.

§. 9.

Beantwortung.

Wird nun jede von den $n - 1$ variabel gesetzten Größen der Menge P , als $v, = 0$; so muß auch die n te Größe in A als $= -P = -(n - 1)v$ allerdings $= 0$ werden. Folglich ist auch das in der Aufgabe gesuchte Maximum selbst $= 0$.

§. 10.

Anmerkung.

Die Rechnungen des §. 8. geben nach No. 1. für jede veränderliche Größe nur einen einfachen Werth. Es kan auch nicht mehrere geben, weil die Function y , als eine Ambensumme, nur bis auf zwei Dimensionen steigt, und es kan daher für diese Function nur ein Gränzwert, ich meyne entweder ein Maximum oder ein Minimum statt finden. Da nun dieser eine Gränzwert ein Maximum und $= 0$ ist; so müssen die zu dessen beyden Seiten liegenden

genden unendlich vielen möglichen Werthe der Function y stetig abnehmen, folglich alles negative, oder zwischen 0 und $-\infty$ fallende Größen seyn.

Unter solchen Umständen bestimmt dieses Maximum zugleich das absolute Maximum oder den größten Werth, welchen die Function y überhaupt erreichen kann.

§. II.

Nun giebt es freylich für jede Ambensumme aus n Größen einer Menge A , deren Summe A^1 constant ist, $(n-1)$ Klassen von Functionen, in so fern man eine, oder zwei, oder drei u. s. w. oder endlich alle $n-1$ Größen in P variabel setzt. Die erste von diesen Klassen würde wieder $n-1$ verschiedene Functionen in sich fassen, wenn alle $n-1$ in P stehende Größen so viel verschiedene Werthe haben sollten; weil man alsdann eben so viel verschiedene Functionen erhält, als viele verschiedene Größen man zuerst variabel setzen kan. Aus ähnlichen Gründen würde alsdann die zweite Klasse $(n-1) \cdot (n-2)$, die dritte Klasse $(n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)$ verschiedene Functionen enthalten u. s. w.

Daß es für jede dieser Functionen ein Maximum gebe, ist schon aus den Betrachtungen des 8. §. zu übersehen. Und es sey überhaupt R eine Function der Ambensumme in derjenigen Klasse, worin man r Größen variabel gesetzt hat; so würde man durch ähnliche Methoden, als §. 8. gebraucht sind, finden, daß man das Maximum dieser Function R erhält, wenn jede variabel gesetzte Größe $= \frac{A^1 - P^1}{r + 1}$ gemacht wird: indem A^1 die Summe der gegebenen Menge und P^1 die constante Summe aller übrigen Größen ausser der letzten n ten bedeutet, welche

welche nte dabey ebenfalls $= \frac{A^1 - P^1}{r + 1}$ wird. Ich be-

haupte aber, daß keines von allen diesen Maximis, das für die Function y gefundene Maximum übersteigen könne. Denn was für Werthe auch für die variabel gesetzten Glieder der Function R zur Beförderung ihres Maximi bestimmt werden mögen; so können es keine Werthe seyn, die man nicht denselben Gliedern in der Function y beylesen kan, weil sie darin alle als variabel betrachtet werden. Folglich kommt auch das Maximum von R schon unter den unendlich vielen Werthen der Function y vor, unter denen allen doch das Maximum dieser Function der größte ist. §. 10.

§. 12.

L e h n s a t z .

In jeder Gleichung

$$x^n + A x^{n-1} + B x^{n-2} + C x^{n-3} \dots + K x + L = 0$$

ist A die Summe, B die Ambenz C die Ternenz u. s. w. K die $(n-1)$ ten und L die nten Summe aus allen Gegentheilen der Wurzeln, die Coefficienten und Wurzeln mögen mögliche oder unmögliche Größen seyn.

Beweise dieses Satzes findet man in allen vollständigen Lehrbüchern der neuen Algebraisten. Derjenige in des Hrn. Hofrath Karsten Mathesi sublimiori. Sect. VII. §. 100. ist ausnehmend deutlich und der hiesigen Verbindung angemessen.

§. 13.

I. L e h r s a t z .

Die Wurzeln der Gleichung

$$x^n + B x^{n-2} + C x^{n-3} \dots + K x + L = 0$$

können

Können nicht alle möglich seyn, wenn nicht B negativ ist, oder wo $B = 0$ seyn sollte, auch alle folgenden Coefficienten C, D u. K und L einzeln $= 0$ sind.

§. 14.

B e w e i s .

Da in dieser Gleichung das Glied $A x^{n-1}$ fehlt, folglich A, die Summe aus den Gegentheilen aller Wurzeln $= 0$ ist; so ist auch das absolute Maximum ihrer Ambensummen $= 0$, das man nur erhält, wenn man jede Wurzel $= 0$ setzt (§. 9 und 10) und wobey denn auch die Ternenz Quaternenz und jede übrige Verbindungs-Summe aus den Gegentheilen der Wurzeln, also nach §. 12. alle folgenden Coefficienten, $= 0$ werden.

So bald man aber den Gegentheilen der Wurzeln andere mögliche Werthe giebt, indem doch ihre Summe $= 0$ bleibt; so wird die Ambensumme aus ihnen ihr absolutes Maximum nicht erreichen, folglich negativ werden.

Anmerkung.

Aus dem Harriotischen Lehrsatz kan man, nach einer bekannten scharfsinnigen Folgerung, den mehr umfassenden Satz herleiten, daß jede Gleichung unmögliche Wurzeln enthalten muß, worin irgend ein Glied fehlt, das zwischen zwey Glieder von einerley Zeichen zu ordnen ist. Davon ist der gegenwärtige nur ein Theil, der allein nur aus dem größten Werthe der Ambensummen gefolgert werden konnte. Warum er nebst der vorigen Aufgabe hier eingeschaltet ist, findet man in der Einleitung. Uebrigens wird ausser §. 12. keiner von den §§. 5—14. bey den folgenden Sätzen gebraucht.

§. 15.

II. Lehrsatz.

Wenn der Gleichung I)

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} \dots Kx + L = 0$$

eine Wurzel α ist; so enthält folgende Gleichung II)

$$x^{n-1} + A \left\{ \begin{array}{l} x^{n-2} + B \\ + \alpha \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} x^{n-3} + C \\ + \alpha P^I \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} x^{n-4} \dots + K \\ + \alpha P^{N-1} \end{array} \right\} = 0$$

die übrigen $n - 1$ Wurzeln der Gleichung I), indem man statt P^I oder P^{II} oder P^{III} u. s. w. den nächst vorhergehenden Coefficienten der Gleichung II) schreibt, so daß z. B. $P^I = A + \alpha$, $P^{II} = B + \alpha P^I = B + \alpha(A + \alpha)$ wird u. s. w.

B e w e i s .

In der Gleichung I) ist A die Summe aus den Gegentheilen ihrer n Wurzeln, und $B = A^{II}$, $C = A^{III}$ u. s. w. $K = A^{N-1}$. (§. 12.)

Es bezeichne nun P die Menge aus den Gegentheilen der übrigen $n - 1$ Wurzeln, indem $-\alpha$ das Gegentheil der n ten Wurzel α , folglich $A^I = -\alpha + P$ ist; so werden der Gleichung I) Coefficienten, nach §. 4. seyn wie folget:

$A = A^I = -\alpha + P^I$ $B = A^{II} = -\alpha P^I + P^{II}$ $C = A^{III} = -\alpha P^{II} + P^{III}$ $\vdots$ $\vdots$ $K = A^{N-1} = -\alpha P^{N-2} + P^{N-1}$	daher $P^I = A + \alpha$ $P^{II} = B + \alpha P^I$ $P^{III} = C + \alpha P^{II}$ $\vdots$ $\vdots$ $P^{N-1} = K + \alpha P^{N-2}$
---	--

Folgt

Folglich deckt sich die im Lehrsatze angegebne Gleichung II) mit folgender:

$$x^{n-1} + P^I x^{n-2} + P^{II} x^{n-3} + P^{III} x^{n-4} \dots + P^{n-1} = 0$$

die nun, vermöge des Lehrsatzes §. 12., diejenigen $n-1$ Größen zu Wurzeln hat, aus deren Gegentheilen die Menge P besteht.

§. 17.

I. Exempel. Der Gleichung

$$x^3 - 2x^2 - 4x + 3 = 0$$

zuerst aufgefundenen Wurzel sey $= 3$; so muß folgende Gleichung:

$$\begin{array}{r} x^2 - 2x - 4 \\ + 3 \end{array} \begin{array}{r} x - 4 \\ + 3 \cdot 1 \end{array} = 0, \text{ d. i. } x^2 + x - 1 = 0$$

die beyden übrigen Wurzeln enthalten.

II. Exempel. Der Gleichung

$$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$$

zuerst aufgefundenen Wurzel sey $= 1$; so muß

$$\begin{array}{r} x^3 - 10x^2 + 35x - 50 \\ + 1 \end{array} \begin{array}{r} x^2 + 35x - 50 \\ - 1 \cdot 9 \end{array} \begin{array}{r} x - 50 \\ + 1 \cdot 26 \end{array} = 0$$

das ist $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$

die übrigen drey Wurzeln enthalten. Man habe davon die eine $= 2$ gefunden; so müssen in der Gleichung

$$\begin{array}{r} x^2 - 9x + 26 \\ + 2 \end{array} \begin{array}{r} x - 7 \\ - 2 \cdot 7 \end{array} = 0, \text{ d. i. } x^2 - 7x + 12 = 0$$

die beyden übrigen stecken, welche 3 und 4 sind.

§. 18.

§. 18.

III. Lehrsatz.

Wenn der Gleichung

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} \dots + Ix^2 \dots + Lx^0 = 0$$

zwo Wurzeln a und b sind, deren Summe durch α^I und Product durch α^{II} angedeutet werde; so stecken ihre übrigen $n - 2$ Wurzeln, deren Gegentheile die Menge P ausmachen in folgender Gleichung II)

$$\left. \begin{array}{l} x^{n-2} + A \\ + \alpha^I \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x^{n-3} + B \\ + \alpha^I P^I \\ - \alpha^{II} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x^{n-4} + C \\ + \alpha^I P^{II} \\ - \alpha^{II} P^I \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x^{n-5} \dots + I \\ + \alpha^I P^{N-III} \\ - \alpha^{II} P^{N-IV} \end{array} \right\} = 0$$

§. 19.

B e w e i s.

Man bemerke nur, daß man α^{II} statt $(-\alpha)^{II}$ schreiben kann, weil $a \cdot b = -a \cdot -b$ ist; so wird man aus §. 3. übersehen, daß

$$\text{indem } A = A^I = -\alpha^I + P^I \text{ wird}$$

$$\text{auch } B = A^{II} = \alpha^{II} - \alpha^I P^I + P^{II}$$

$$C = A^{III} = \alpha^{II} P^I - \alpha^I P^{II} + P^{III}$$

$$D = A^{IV} = \alpha^{II} P^{II} - \alpha^I P^{III} + P^{IV}$$

:

$$I = A^{N-II} = \alpha^{II} P^{N-IV} - \alpha^I P^{N-III} + P^{N-II},$$

$$\text{folglich } P^I = A + \alpha^I$$

$$P^{II} = B + \alpha^I P^I - \alpha^{II}$$

$$P^{III} = C + \alpha^I P^{II} - \alpha^{II} P^I$$

$$P^{IV} = D + \alpha^I P^{III} - \alpha^{II} P^{II}$$

:

$$P^{N-II} = I + \alpha^I P^{N-III} - \alpha^{II} P^{N-IV} \text{ wird,}$$

und sich daher die Gleichung II) mit folgender deckt:

$$x^{n-2} + P^I x^{n-3} + P^{II} x^{n-4} + P^{III} x^{n-5} \dots + P^{N-II} x^0 = 0,$$

die nun nach §. 12. die $n - 2$ Wurzeln enthalten muß.

§. 20.

§. 20.

Anmerkung.

Dieser Lehrsatz verschafft viele Erleichterung, wenn die zuerst aufgefundenen Wurzel irrational oder unmöglich ist, und doch alle Coefficienten rationale Größen sind; weil in diesem Falle dergleichen irrationale oder unmögliche Wurzeln paarweise vorhanden seyn müssen.

Z. B. der Gleichung $x^4 - 16x - 12 = 0$ zuerst aufgefundenen Wurzel sey $= 1 + \sqrt{3}$; so hat sie auch die zweite Wurzel $= 1 - \sqrt{3}$, so daß beyder Wurzeln Summe $= 2 = \alpha^1$ und Product $= -2 = (-\alpha)^1 = \alpha^1$ ist. Es giebt demnach die Gleichung

$$\left. \begin{array}{r} x^2 + 0 \\ + 2 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{r} x + 0 \\ + 2.2 \\ - (-2) \end{array} \right\} = 0 \text{ d. i. } x^2 + 2x + 6 = 0$$

die beyden übrigen Wurzeln $= -1 \pm \sqrt{-5}$.

§. 20.

Lehrsatz.

— A bedeute diejenige Menge, deren Größen die Gegentheile von denen sind, welche die Menge A ausmachen; so wird $(-A)^R = A^R$, wenn R eine gerade Zahl ist, hingegen $(-A)^R = -A^R$ seyn, wenn R eine ungerade Zahl ist.

§. 21.

Beweis.

A^R besteht aus einem oder mehrern Theilen, wovon jeder ein Product aus r Größen der Menge A ist. (Die Anzahl dieser Theile ist bekanntermaßen =

$$\frac{n \cdot n - 1 \dots n - (r - 1)}{1 \cdot 2 \dots r}$$

wenn

wenn die Menge A aus n Größen besteht; kommt aber hier nicht in Betracht.) Da nun jedes Product aus einer geraden Anzahl von Factoren unverändert bleibt, wenn man jeden Factor in sein Gegentheil verwandelt; hingegen jedes Product aus einer ungeraden Anzahl Factoren durch solche Verwandlung ebenfalls in sein Gegentheil verändert wird: so muß bey einer solchen Verwandlung jeder Theil von A^R , folglich auch A^R selbst, entweder unverändert bleiben, oder in sein Gegentheil übergehen; je nachdem R entweder eine gerade, oder eine ungerade Zahl ist.

§. 22.

Folgerung. IV. Lehrsatz.

Mit Hilfe des Lehrsatzes §. 12. folget hieraus sogleich, daß der Gleichung

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} \dots \mp Kx \pm L = 0$$

Wurzeln gerade die Gegentheile von den Wurzeln der Gleichung

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} \dots + Kx + L = 0$$

seyn müssen; indem nämlich die erste Gleichung von der letzten dadurch verschieden ist, daß man statt des 2ten, 4ten, 6ten etc. Coefficienten A, C, E, etc. ihre Gegentheile geschrieben hat, es mögen übrigens diese Coefficienten positiv oder negativ seyn.

§. 23.

V. Lehrsatz.

Es sey in $x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$, $C = nm$ so muß 1) $(n + A)n + B + m = 0$ seyn, wenn + n hingegen 2) $(n + A)n + B + m = 2(n^2 + B)$ seyn, wenn - n eine Wurzel der Gleichung ist.

§. 24.

§. 24.

Beweis.

Wenn $+n$ eine Wurzel ist; so ist

$$n^3 + An^2 + Bn + m = 0,$$

folglich auch, durch $+n$ dividirt:

$$n^2 + An + B + m = 0 \text{ welches}$$

die Gleichung bey 1) giebt.

Ist hingegen $-n$ eine Wurzel;

so wird

$$-n^3 + An^2 - Bn + m = 0$$

folglich durch $+n$ dividirt, auch

$$-n^2 + An - B + m = 0, \text{ also dazu add}$$

$$\text{dirt} \quad 2n^2 + 2B = 2n^2 + 2B$$

$$\text{auch } n^2 + An + B + m = 2(n^2 + B)$$

welches die Gleichung bey 2) giebt.

§. 25.

Anmerkung.

Der erste Satz erleichtert die Rechnung, man mag nun die Wurzel n blos durch Versuche mit den Factoren des letzten Coefficienten C finden, oder auch eine aus andern Gründen schon gefundene Wurzel nur probiren wollen, wie es zur völligen Sicherheit doch allemahl zu geschehen pflegt.

Der zweite Satz erleichtert den Versuch mit dem Gegentheile von n , nachdem man mit n selbst schon versucht hat.

Im Exempel

$x^3 - 11x^2 - 241x - 805 = 0$ sey $C = +5$. — 161
also $n = +5$ und $m = -161$. Wäre nun $+5$ eine
Wurzel, so müste

nach

nach 1) $(n+A)n+B+m=0$
 seyn $(5-11) \cdot 5 - 241 - 161 = 0$ welches nicht ist.

Es ist aber

$(5-11) \cdot 5 - 241 - 161 = 2(25-241)$
 denn jede Seite giebt $= -432$; folglich ist hier
 nach 2) $(n+A)n+B+m=2(n+B)$,
 und deshalb -5 eine Wurzel.

§. 26.

Z u s a t z.

Für die biquadratische Gleichung
 $x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$ erhält man folgende
 Sätze:

Es sey $D = n \cdot m$; so ist

- 1) $((n+A)n+B)n+C+m=0$ wenn $+n$ und
- 2) $((n+A)n+B)n+C+m=2(An^2+C)$ wenn
 $-n$ eine Wurzel ist.

Der Beweis wird nach dem vorigen leicht geführt.

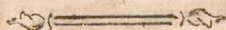
Vergleicht man nun noch mit den Formeln für die
 Gleichung des dritten Grades die folgenden für Gleichun-
 gen des 5ten Grades, so fällt das Gesetz des Fortganges
 in die Augen, wornach sich dieser Kunstgrif leicht behal-
 ten läßt.

Wenn nämlich in

$$x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$$

wiederum $E = n \cdot m$ ist, so wird

- 1) $((n+A)n+B)n+C)n+D+m=0$ wenn $+n$, und
- 2) $((n+A)n+B)n+C)n+D+m=2((n^2+B)n^2+D)$
 wenn $-n$ eine Wurzel ist.



II. Stück.

Elementarischer Beweis des allgemeinen
binomischen Lehrsatzes.

§. 1.

Erklärung.

Unter dem Ausdrucke mS verstehen wir folgende Reihe:

$$1 + \frac{m}{1}x + \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}x^4 + \dots$$

worin jede zweien Punkte, welche mehrere durch + oder — verbundene Größen einschließen, zugleich die Stelle der Klammern vertreten. Z. B. $m \cdot m-1$ bedeutet $m \cdot (m-1)$ und $m \cdot m-1 \cdot m-2$ so viel als $m \cdot (m-1) \cdot (m-2)$; um das Auge weniger zu ermüden.

§. 2.

Z u s a t z .

Aus den ersten hingeschriebenen Gliedern fällt das Gesetz der Reihe deutlich genug in die Augen, um danach den Ausdruck

$$\frac{m \cdot m-1 \cdot \dots \cdot m-(n-2) \cdot m-(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n-1 \cdot n} x^n$$

für das allgemeine nte Glied dieser Reihe zu erkennen, indem

dem $\frac{m}{1} x$ als das erste Glied gezählt, die vorstehende 1 aber das vorangehende Glied der Reihe genannt wird.

Das allgemeine nte Glied einer Reihe heißt nämlich diejenige Function von n, welche das 1te, 2te oder 3te Glied u. s. w. darstellt, je nachdem man $n=1, 2$ oder 3 setzt u. s. w.

§. 3.

Folgerung.

Die Zahlen 1, 2, 3 u. s. w. ohne Ende fortgesetzt, treffen gewiß auch auf die Zahl $n-1$, wenn n nur jede beliebige ganze Zahl bedeutet, die größer als 1 ist.

Unter dieser Bedingung kann man daher auch $n-1$ statt n in das allgemeine nte Glied schreiben und dadurch das $n-1$ te Glied der obigen Reihe mN erhalten.

Bezeichnen wir nun noch der Kürze wegen durch mN und $^mN-1$ die Coefficienten des nten und des $n-1$ ten Gliedes; so haben wir

$$^mN = \frac{m \cdot m-1 \cdot \dots \cdot m-(n-2) \cdot m-(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n-1 \cdot n}$$

$$\text{und } ^mN-1 = \frac{m \cdot m-1 \cdot \dots \cdot m-(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n-1}$$

$$\text{folglich } ^mN = ^mN-1 \cdot \frac{m-(n-1)}{n}$$

§. 4.

Z u s a ß.

Der Buchstabe m soll jede ganze und gebrochene, bejahnte und verneinte Zahl, jede rationale und irrationale, mög-

Des allgemeinen binomischen Lehrsatzes. 19

mögliche oder unmögliche Größe bedeuten. Man kann daher auch z. B. $m + 1$ oder $m + n$, statt m in die Reihe §. 1. schreiben, und erhält dadurch die durch ${}^m + 1 S$ oder ${}^m + n S$ zu bezeichnenden Reihen. Für $m = 1$ gesetzt erhält man ferner ${}^1 S = 1 + 1x$.

§. 5.

Lehrsatz.

Die Reihe, welche durch Multiplicirung der ${}^m S$ und ${}^1 S$ entsteht, deckt sich mit der Reihe ${}^{m+1} S$, das heißt: es ist nicht nur überhaupt ${}^m S \cdot {}^1 S = {}^{m+1} S$, sondern es sind auch alle gleichnamigen Glieder dieser beyden nach den Potenzen von x geordneten Reihen einander gleich.

§. 6.

Beweis.

Die Reihe

$${}^m S = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 \dots$$

durch $\dots + {}^m N - 1, x^{n-1} + {}^m N x^n \dots$

${}^1 S = 1 + x$ multiplicirt, giebt

$$\begin{array}{l} {}^m S \cdot {}^1 S = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 \dots \\ \quad \quad \quad \left. \begin{array}{l} + 1 \\ + \frac{m}{1} \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \\ + \frac{m}{1} \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \\ + \frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2} \end{array} \right\} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \dots + {}^m N \left. \begin{array}{l} x^n \\ + {}^m N - 1 \end{array} \right\} \end{array}$$

B 2

Da

Da nun (§. 4.)

$${}^{m+1}S = 1 + (m+1)x + \frac{m+1 \cdot m}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{m+1 \cdot m \cdot m-1}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 \dots + {}^{m+1}N x^n \dots$$

ist; so fällt die Wahrheit des Lehrsatzes bey den vorangehenden und ersten Gliedern der beyden Reihen mS . 1S und ${}^{m+1}S$ sogleich in die Augen, und könnte bey den zweyten Gliedern auch noch durch eine leichte Reduction bestätigt werden; indem

$$\frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} + \frac{m}{1} - m \left(\frac{m-1}{2} + 1 \right) = m \cdot \frac{m-1+2}{2} - \frac{m \cdot m+1}{2}$$

$$\text{das ist} = \frac{m+1 \cdot m}{1 \cdot 2} \text{ gefunden wird.}$$

Um sich aber mit völliger Gewissheit zu überzeugen, daß der Lehrsatz bey allen vielleicht unzähligen Gliedern der beyden Reihen wahr sey; so muß man die Coefficienten der allgemeinen nten Glieder aus beyden Reihen, also den Coefficienten ${}^mN + {}^mN - 1$ und den durch ${}^{m+1}N$ bezeichneten mit einander vergleichen.

Nicht nur aus dem Anblicke der Multiplication, so weit sie in obigem Schema bey den drey ersten Gliedern wirklich aufgeführt ist, sondern auch aus der Betrachtung des Factors $1 + x$ überhaupt, übersieht man nun gar leicht, daß, z. B., der Coefficient des dritten Gliedes, oder um kurz zu reden, der 3te Coefficient der Reihe mS . 1S die Summe aus dem 3ten und 2ten Coefficienten der Reihe mS ist, und so überhaupt der nte Coefficient der mS . 1S die Summe aus dem nten und $n-1$ ten Coefficienten der mS seyn muß. Denn wenn man die mS durch die 1S d. i. durch $1 + x$ multiplicirt; so setzt die

Muls

Multiplikation durch 1 die Reihe mS hin, wie sie ist, und diejenige durch x kann nur das einzige $n-1$ te Glied der mS zu einer Function von x^n erheben, die dann mit dem schon vorhandenen n ten Gliede der hingesezten Reihe 1. mS zusammen genommen das n te Glied der Reihe mS ausmachen muß.

Nun ist aber

$$\begin{aligned} {}^mN + {}^mN-1 &\stackrel{\S. 3.}{=} {}^mN-1 \cdot \frac{m-(n-1)}{n} + {}^mN-1 = \\ &{}^mN-1 \cdot \left(\frac{m-(n-1)}{n} + 1 \right) = \\ &{}^mN-1 \cdot \frac{m-n+1+n}{n} = {}^mN-1 \cdot \frac{m+1}{n} \end{aligned}$$

also wenn wir den Werth von ${}^mN-1$ aus §. 3. schreiben

$$\begin{aligned} {}^mN + {}^mN-1 &= \frac{m \cdot m-1 \cdot \dots \cdot m-(n-2) \cdot m+1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n-1 \cdot n} \\ \text{oder} &= \frac{m+1 \cdot m \cdot \dots \cdot m+1-(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} \end{aligned}$$

und dieser letzte Ausdruck ist gerade ${}^{m+1}N$ oder der n te Coefficient der Reihe ${}^{m+1}S$, den man offenbar aus dem n ten Coefficienten der Reihe mS erhält, indem man darin $m+1$ statt m schreibt.

Es ist demnach allerdings das allgemeine n te Glied der Reihe mS gleich dem allgemeinen n ten Gliede der Reihe ${}^{m+1}S$ und hiermit die Deckung der beyden Reihen erwiesen.

§. 6.

Anmerkung.

Aus diesem Beweise erhellet ferner, worauf wir hier mit Vorbedacht besonders aufmerksam machen, daß
nicht

22 II. Stück. Elementarischer Beweis

nicht nur die einzelnen Glieder der beyden Reihen mS . 1S und ${}^{m+1}S$ ihrer Summe nach einander gleich sind; sondern daß sich auch jeder nte Coefficient der ersten Reihe ganz genau auf die Form des nten Coefficienten der andern Reihe reduciren lasse. Man bemerke in den Schlüssen des folgenden §, daß eben deshalb das nämliche auch zwischen den Coefficienten aller der Reihen statt finde, von denen wir sagen, daß sie einander decken müssen.

§. 7.

Z u s a ß.

Wer mich voraussetzen läßt, daß die Reihen mS . qS und ${}^{m+q}S$ einander decken, der muß, da nach dem Lehrsatze ${}^{q+1}S$ und qS . 1S einander decken, auch zugestehen, daß die beyden Reihen mS . qS . ${}^{q+1}S$ und ${}^{m+q}S$. qS . 1S ; folglich, indem man durch einerley qS dividirt, auch mS . ${}^{q+1}S$ und ${}^{m+q}S$. 1S einander decken müssen. Da sich nun die letztere Reihe mit ${}^{m+q+1}S$, nach dem Lehrsatze decken muß, worin man $m + q$ statt m schreiben kann, (§. 4.); so muß sich auch mS . ${}^{q+1}S$ decken mit ${}^{m+q+1}S$.

So fließt aus den Voraussetzung, daß mS . qS und ${}^{m+q}S$ einander decken, als eine nothwendige Folge, daß auch mS . ${}^{q+1}S$ und ${}^{m+q+1}S$ einander decken müssen.

Nun ist aber die Voraussetzung richtig für $q=1$, nach dem Lehrsatze, also auch die Folge, daß mS . 2S sich deckt mit ${}^{m+2}S$.

Dieser letzte Satz ist aber offenbar die Voraussetzung für $q=2$, woraus dann wiederum die Folge entsteht, daß auch mS . 3S und ${}^{m+3}S$ einander decken müssen: und dieses dient wieder zur Voraussetzung für $q=3$.

Daher

Daher kann man sich, durch ohne Ende wiederholte Anwendung dieses Schlusses, auch ohne Ende dem Erweise des Satzes nähern, daß die Reihen

mS , iS und ${}^{m+i}S$ einander decken müssen, was für eine ganze und positive Zahl auch i bedeuten mag.

§. 8.

L e h r s a t z .

Die Reihe mS , nS deckt sich mit der Reihe ${}^{m+n}S$, was für positive oder negative, ganze oder gebrochene, rationale oder irrationale, mögliche oder unmögliche Werthe man auch statt m oder n schreibt.

§. 9.

Erläuterung.

Fängt man an zu multipliciren die Reihe

$${}^mS = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots$$

$$\text{in } {}^nS = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n \cdot n - 1}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots$$

so er: hält man

$${}^mS \cdot {}^nS = \left\{ 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots \right\} \left\{ 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n \cdot n - 1}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots \right\}$$

und

24 II. Stück. Elementarischer Beweis

und es wird im Lehrsatz behauptet, daß die Glieder dieser Reihe denenjenigen der Reihe $m+nS=$

$$1 + \frac{m+n}{1}x + \frac{m+n.m+n-1}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{m+n.m+n-1.m+n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots$$

einzelnen genommen, gleich sind.

§. 10.

B e w e i s.

Der Lehrsatz ist nach §. 7. schon ausgemacht für jeden Fall wo $n=i$ oder eine ganze und positive Zahl ist. und wir wissen alsdann, z. B. von den zweiten Coefficienten der beyden Reihen mS . iS und $m+iS$ nicht nur, daß der eine dem andern gleich, oder

$$\frac{m.m-i}{1 \cdot 2} + m \cdot i + \frac{i.i-1}{1 \cdot 2} = \frac{m+i.m+i-1}{1 \cdot 2} \text{ ist,}$$

sondern daß sich auch der erste auf die Form des zweiten bringen läßt (§. 6.) Findet nun eine solche Reducirung zwischen diesen beyden Formen statt; so muß auch der Ausdruck

$$\frac{m.m-n}{1 \cdot 2} + m \cdot n + \frac{n.n-1}{1 \cdot 2} \text{ auf die Form}$$

$$\frac{m+n.m+n-1}{1 \cdot 2} \text{ gebracht werden können, was für}$$

eine von i verschiedene Größe auch n bedeuten mag: weil ja offenbar der Werth der Größen m , i , keinen Einfluß auf die Form des Ausdrucks hat, welche in der Anordnung der durch $+$, $-$, $\cdot$ etc. angezeigten Rechnungsverbindungen besteht. (Ich schalte für Anfänger die wirklich ausgeführte Reducirung dieser beyden Formen ein.

Nähm

$$\text{Nämlich } \frac{m \cdot m - i}{1 \cdot 2} + mi + \frac{i \cdot i - 1}{1 \cdot 2} \text{ ist } =$$

$$\frac{m^2 - mi + 2mi + i^2 - 1 \cdot i}{1 \cdot 2} = \frac{(m+i)^2 - 1 \cdot (m+i)}{1 \cdot 2}$$

und dies ist $= \frac{m+i \cdot m+i-1}{1 \cdot 2}$. Wollte man nun

n statt i schreiben, so müste offenbar dieselbe Reduction Statt finden.) Da nun alles, was hier beispieleweise bey den zweyten Coefficienten angeführt ist, auch bey allen folgenden gleichnamigen Coefficienten der Reihen ${}^mS \cdot {}^iS$ und ${}^{m+i}S$ in Beziehung auf ${}^mS \cdot {}^nS$ und ${}^{m+n}S$ behauptet werden kann; so ist hierdurch der Lehrsatz vollkommen erwiesen.

Sollte noch jemand durch die Betrachtung beunruhigt werden, daß doch die Reihe iS allemahl abbricht, (man sehe §. 21), da hingegen nS ins unendliche fortgehet, wenn n keine ganze und positive Zahl ist; so dient zur Antwort, daß auch iS desto mehr Glieder erhält, je größer die ganze und positive Zahl i gesetzt wird, und man daher für iS eine Reihe von 1000, 10000 und noch so vielen Gliedern erhalten kann, wenn man nur i immer größer setzt, (ebenfalls nach §. 19).

§. II.

Z u s a m m e n f a s s u n g.

Im Lehrsatz $n = -m$ gesetzt, giebt den Satz, daß sich ${}^mS \cdot {}^mS$ deckt mit 0S das ist mit 1, indem aus mS , §. I. die Reihe ${}^0S = 1 + 0 + 0$ etc. entsteht wenn $m = m$, das ist 0 statt des dortigen m geschrieben wird.

Wir

26 II. Stück. Elementarischer Beweis.

Wir gebrauchen indessen von dieser Folge des Lehrsatzes nur so viel, daß ${}^mS \cdot {}^mS$ als $= {}^0S$ ist $= 1$, um daraus mit Hülfe des Satzes, daß allemahl $1 = {}^mS \cdot \frac{1}{mS}$ ist, ferner zu folgern, daß auch ${}^mS \cdot {}^mS = {}^mS \cdot \frac{1}{mS}$ folglich auch ${}^{-m}S = \frac{1}{mS}$ seyn muß.

Z u s a t z. §. 12.

Setzt man des Lehrsatzes n überhaupt $= m$ und dann sein m einzeln auch $= 2m$ auch $= 3m$ u. s. w. so erhält man nach und nach folgende Gleichungen:

${}^mS \cdot {}^mS = {}^{2m}S$; auch ${}^{2m}S \cdot {}^mS = {}^{3m}S$, also aus beyden ${}^mS \cdot {}^mS \cdot {}^mS = {}^{3m}S$; auch ${}^{3m}S \cdot {}^mS = {}^{4m}S$, also aus beyden ${}^mS \cdot {}^mS \cdot {}^mS \cdot {}^mS = {}^{4m}S$ u. s. w. ohn Ende; so daß man sich ohne Ende dem Satze nähert, daß $({}^mS)^i = {}^{im}S$, indem i jede ganze positive Zahl, m aber jede beliebige Größe, wie im Lehrsätze, bedeutet.

Folgerung. §. 13.

Setzt man nun $m = \frac{1}{i}$, so hat man $\left(\frac{1}{i}S\right)^i = {}^1S$,

also auch beydes zur $\frac{r}{i}$ -ten Potenz erhoben $\left(\frac{1}{i}S\right)^r = ({}^1S)^{\frac{r}{i}}$.

Es sey r nur eine ganze positive Zahl, so ist (§. 11.)

$$\left(\frac{1}{i}S\right)^r = {}^{\frac{r}{i}}S;$$

also aus beyden letzten Gleichungen die Folge, daß
seyn muß.

$$\frac{r}{i}S = ({}^1S)^{\frac{r}{i}}$$

Da

Des allgemeinen binomischen Lehrsatzes. 27

Da nun hierin r und i jede positive ganze Zahl bedeuten kann; so läßt sich auch durch $\frac{r}{i}$ eine jede positive GröÙe, so lange sie rational ist, vollkommen genau, wenn sie aber auch irrational ist, dennoch mit einem beliebig verkleinerten Fehler darstellen. Daher drücken wir den Inbegriff der letzten Gleichung durch die folgende ${}^uS = ({}^1S)^u$ aus, indem wir unter u eine jede positive GröÙe verstehen, sie mag ganz oder gebrochen, rational oder irrational seyn.

§. 14.

Aus dieser letzten Gleichung folget auch $\frac{I}{{}^uS} = ({}^1S)^u$.

Da nun (§. 11.) $\frac{I}{{}^uS} = {}^{-u}S$ seyn muß, ferner $\frac{I}{({}^1S)^u}$ und $({}^1S)^{-u}$ gleichbedeutende Ausdrücke in der Algebra sind; so hat man auch ${}^{-u}S = ({}^1S)^{-u}$; oder, das u im vorigen § kann auch negativ seyn.

§. 15.

Wenn wir daher schreiben daß ${}^mS = ({}^1S)^m$ sey, was für eine positive oder negative, ganze, gebrochene, rationale und irrationale GröÙe auch m bedeuten mag; so thun wir nichts, als daß wir die Behauptungen der beiden letzten Gleichungen in den beiden vorhergehenden §§. zusammenfassen und durch eine Gleichung darstellen.

§. 16.

Nachdem die letzte Gleichung für jeden positiven und negativen Werth von m erwiesen ist; so können wir, nach dem Beispiele der größten Analytiker sogleich behaupten, daß sie auch für jeden unmöglichen Werth von m richtig bleibt,

bleibt, darum, weil man mit den unmöglichen Größen nicht anders als wie mit den positiven und negativen rechnet. Zur Beruhigung der Anfänger, will ich indessen diese Behauptung etwas näher auseinander setzen.

Alle unmögliche Größen, worauf die algebraischen Rechnungen führen, können unter der Form $a + b\sqrt[p]{-c}$ dargestellt werden, worin p jede gerade Zahl, $-c$ jede negative, und a und b jede mögliche Größe bedeutet. Die Unmöglichkeit des Werthes, welchen diese Form ausdrückt, steckt namentlich in dem imaginären Theile $\sqrt[p]{-c}$, und in dem Widerspruche, der aus der Verbindung des Ausdruckes $\sqrt[p]{-c}$ mit der negativen Größe $-c$ entsteht: indem jener für sich betrachtet die Vorstellung angiebt, daß einerley Größe p mal, als so viel Factoren neben einander gedacht werde, und in der Verbindung $\sqrt[p]{-c}$ verlangt, daß $-c$ das Product aus diesen p Factoren seyn soll. Hier entsteht nämlich der Widerspruch, daß eine gerade Anzahl von einerley Factoren, die also alle entweder positiv oder negativ seyn müssen, ein negatives Product geben soll; und man weiß diese Größe $\sqrt[p]{-c}$ gar nicht anzugeben, weil sie nach den nothwendigen Regeln der Multiplication mit positiven oder negativen Größen weder positiv noch negativ seyn kann.

Wenn man indessen in algebraischen Rechnungen diesen Ausdruck $\sqrt[p]{-c}$ mit andern Größen in Verbindung setzt, die als positiv oder negativ betrachtet werden; so nimmt man auf die sich selbst widersprechende Forderungen dieses Ausdruckes, auf die Schwierigkeit, daß
er

des allgemeinen binomischen Lehrsatzes. 29

er weder positiv noch negativ seyn könne, gar keine Rücksicht: sondern man achtet nur darauf, ob und wie dieser Ausdruck selbst gesetzt oder verneint werde; vergleicht nur $+\sqrt[p]{-c}$ und $-\sqrt[p]{-c}$ in Rücksicht auf das vorstehende $+$ oder $-$ unter sich selbst und mit andern Größen und behauptet mit Recht, daß $+\sqrt[p]{-c}$ und $-\sqrt[p]{-c}$ gewiß wie positiv und negativ einander entgegen gesetzt ist, was übrigens auch $\sqrt[p]{-c}$ bedeuten oder nicht bedeuten mag; und daß aus jeder Rechnungsverbindung, das eine Mal $+\sqrt[p]{-c}$ und das andere Mal $-\sqrt[p]{-c}$ darein gesetzt, zwei Resultate entspringen müssen, die gegen einander verglichen, gerade so beschaffen sind, als ob $-\sqrt[p]{-c}$ negativ sey, indem $+\sqrt[p]{-c}$ als positiv betrachtet wird.

So giebt z. B. $+\sqrt[p]{-c} - \sqrt[p]{-c} = 0$. Ferner $f. + \sqrt[p]{-c}$ giebt $f \sqrt[p]{-c}$ und dagegen $f. - \sqrt[p]{-c}$ giebt $-f \sqrt[p]{-c}$.

Ferner ist von $(+\sqrt[p]{-c})^n$ gerade das Gegentheil $(-\sqrt[p]{-c})^n$ denn jenes ist $= +1 \cdot (-c)^{\frac{n}{p}}$ dieses $= -1 \cdot (-c)^{\frac{n}{p}}$

Endlich besteht die Behauptung, daß $-\sqrt[p]{-c}$ allemahl wie das Gegentheil von $+\sqrt[p]{-c}$ wirken müsse,

30 II. Stück. Elementarischer Beweis

müsse, auch für den Fall, wo der unmögliche Ausdruck wieder in einen möglichen verändert wird, welches Statt findet wenn das eben genannte $n = q p$ ist, oder p in n dividirt, die ganze Zahl q zum Quotienten giebt.

Denn man hat alsdann

$$\left(+\sqrt[p]{-c}\right)^{qp} = +1. (-c)^{\frac{qp}{p}} = +1 (-c)^q$$

und dagegen

$$\left(-\sqrt[p]{-c}\right)^{qp} = -1. (-c)^{\frac{qp}{p}} = -1. (-c)^q.$$

Hieraus übersieht man, mit welchem guten Rechte allerdings der Ausdruck einer imaginären Größe, während der Rechnung, wie eine positive oder negative Größe behandelt wird. Da nun jede unmögliche Größe nach

der Form $a + b \sqrt[p]{-c}$ allemahl ein Aggregat aus der imaginären Größe, und aus möglichen Größen ist, die gewiß positiv oder negativ sind; so ist es klar genug, daß mit allen unmöglichen Größen, wie mit positiven oder negativen Größen gerechnet wird.

§. 17.

Man kann daher allerdings behaupten, daß die Gleichung aus §. 15. ${}^mS = ({}^1S)^m$ allemahl richtig sey, was für eine positive oder negative, ganze oder gebrochene, rationale oder irrationale, mögliche oder unmögliche Größe man auch statt m schreibt.

§. 18.

Binomischer Lehrsatz.

Um nun endlich zum binomischen Lehrsatz zu gelangen, so setze man $m=1$ in §. 1. und schreibe $\frac{b}{a}$ Statt

des dortigen x . Dadurch erhält man $1^S = 1 + \frac{b}{a}$.

Also ist auch $(a+b) = a \cdot 1^S$, auch $(a+b)^m = a^m (1^S)^m$ und daher nach §. 17. $(a+b)^m = a^m \cdot m^S$, das ist $(a+b)^m =$

$$a^m \left(1 + \frac{m}{1} \cdot \frac{b}{a} + \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} \frac{b^2}{a^2} + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 2} \frac{b^3}{a^3} \dots \right) =$$

$$a^m + \frac{m}{1} \cdot a^{m-1} b + \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} a^{m-2} b^2 + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-3} b^3 \dots$$

was für eine mögliche oder unmögliche GröÙe auch m bedeuten mag.

Z u s a ß.

Ist m eine ganze und positive Zahl, so sind die im Zähler der Coefficienten vorkommenden Factoren m ; $m-1$; $m-2$; $m-3$ u. s. w. lauter ganze und zwar der Ordnung nach um 1 abnehmende Zahlen. Setzt man nun die Reihe immerhin fort, so kommen in den Zählern der Coefficienten, auÙer den eben hergeschriebenen Factoren, auch folgende $m-3$; $m-4$; $m-5$ u. s. w. vor, worunter endlich auch $m-m$ ist, nämlich in dem $m+1$ ten Coefficienten zum ersten Male, und nachher in allen folgenden.

Da

32 II. Stück. Elementarischer Beweis

Da nun $m - m = 0$ ist, so muß wegen dieses Factors das ganze $m + 1$ te Glied und jedes folgende verschwinden.

§. 20.

Z u s a ß.

Im m ten Coefficienten ist der letzte Factor des Zählers noch nicht $m - m$, sondern $m - (m - 1)$, also $= 1$; der vorletzte Factor $m - (m - 2)$ also $= 2$ u. s. w., kurz, der ganze m te Coefficient ist offenbar

$$\frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2 \dots 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m - 1 \cdot m}$$

also $= 1$.

§. 21.

Z u s a ß.

Ist aber m keine ganze positive Zahl, so wird unter den Factoren $m - 1 \cdot m - 2$ u. s. w. überhaupt $m - i$, indem i jede ganze Zahl bedeutet, nicht einer $= 0$, und die Reihe geht demnach ins Unendliche fort. Doch kann man die hier angegebne binomische Reihe in eine andere verwandeln, die für jede ganze negative Zahl statt m gesetzt, abbricht; wie es in allen vollständigen Lehrbüchern gezeigt wird.

§. 22.

E r k l ä r u n g.

In den folgenden Abhandlungen werden die binomischen Coefficienten

$$1; \frac{m}{1}; \frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2}; \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}; \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2 \cdot m - 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \text{ u.}$$

sehr

sehr oft gebraucht und deshalb der Kürze wegen durch

$$1; {}^m A; {}^m B; {}^m C; {}^m D \text{ etc.}$$

angedeutet; indem schon der Hr. Prof. Hindenburg die großen Versalbuchstaben zu diesem Gebrauche bestimmt hat, und wir nur noch den Exponenten m davor setzen, wo es nöthig ist, zugleich den Grad der Dignität anzuzeigen, wozu die Coefficienten gehören.

${}^m N$ bedeutet uns daher, wie schon in §. 3, das n te allgemeine Glied in der Coefficientenreihe für die binomische Potenz vom m ten Grade; und ${}^m N - 1$ soll ferner das $n-1$ te; ${}^m N + 1, {}^m N + 2$ etc. das $n+1$ te, $n+2$ te etc. ${}^m N + S$ das $n+S$ te Glied dieser Reihe bedeuten.

Eben so wird auch wo es bequem ist, ${}^m M, {}^m P$ das allgemeine m te, p te Glied bedeuten; da es gewiß zu jedem Gebrauche hinreicht, wenn man nur die Bedeutung der ersten Buchstaben vor M , also A, B, C, D etc. darauf einschränkt, daß sie allemahl der Ordnung nach bestimmt das 1te, 2te, 3te, 4te etc. Glied bedeuten.

§. 23.

L e h r s a t z .

Die Summen der über einander stehenden Größen
in $1; {}^m A; {}^m B \dots {}^m N; {}^m N + 1 \dots$
und $1; {}^m A \dots {}^m N - 1; {}^m N \dots$

sind $1; {}^{m+1} A; {}^{m+1} B \dots {}^{m+1} N; {}^{m+1} N + 1 \dots$
Der Satz wird im folgenden gebraucht.

§. 24.

B e w e i s .

In §. 6. ist schon gleichsam das allgemeine Glied dieser Behauptungen erwiesen, nämlich daß

$${}^mN + {}^mN - 1 = {}^{m+1}N \text{ ist.}$$

Ich nenne diese Gleichung gleichsam das allgemeine Glied der Behauptungen im Lehrsatze. Denn sie umfaßt die Behauptung für alle Summen des Lehrsatzes bis auf die erste: diese erste nicht, weil man in ${}^mN - 1$ nicht $N = 1$ setzen darf. (§. 3.). Daß aber auch die erste Summe im Lehrsatze richtig, nämlich ${}^mN + 1 = {}^{m+1}N$ sey, ist

$$\text{für sich schon klar, da } {}^mN = \frac{m}{1} \text{ und } {}^{m+1}N = \frac{m+1}{1}$$

bedeutet. W. z. B.

Anmerkung.

Wenn man bemerkt, daß die Größen ${}^{m+1}N$, ${}^{m+1}B$ u. c. nichts anders als die Coefficienten der Reihe ${}^{m+1}S$ in §. 6. sind, und jede zwei in unserm Lehrsatze unter einander stehende Größen einen Coefficienten der dortigen Reihe mS ausmachen; so sieht man wohl, daß unser Lehrsatz gerade der Satz ist, welcher fast den ganzen Beweisgrund in §. 6. ausmacht.

§. 24.

Z u s a t z .

Man schreibe die Coefficienten des m ten und des $m+1$ ten Grades, wie folget,

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & {}^mN & {}^mB & {}^mC & {}^mD & \text{u. c.} \\ 1 & {}^{m+1}N & {}^{m+1}B & {}^{m+1}C & {}^{m+1}D & \text{u. c.} \end{array}$$

und

und bemerke, wie nun vermöge des Lehrsatzes ieder Coefficient des $m+1$ ten Gliedes aus den überstehenden Coefficienten des m ten Grades zusammengesetzt werden kann, nämlich $m+1A$ als $= 1 + mA$; $m+1B$ als $= mA + mB$ u. s. w.; so übersieht man sogleich, warum durch die nämliche Zusammensetzung nach und nach die Coefficienten der binomischen Potenzen vom 2ten, 3ten, 4ten Grade u. s. w. in folgendem Schema entstehen müssen:

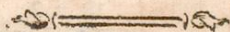
I
 I 2 I
 I 3 3 I
 I 4 6 4 I
 I 5 10 10 5 I
 I 10

Indem 1, 1 . die Coefficienten des 1ten Grades in $(a+b)^1 = 1a + 1b$, ferner 1, 2, diejenigen des 2ten Grades in $(a+b)^2 = 1 \cdot a^2 + 2 \cdot ab + 1 \cdot b^2$ sind u. s. w.

§. 25.

З у с а ж.

Die Coefficienten aller binomischen Potenzen, deren Exponenten ganze positive Zahlen sind, sind ganze Zahlen. Denn nach der Entstehungsart im vorigen §. kann in dem Coefficiente der $m + 1$ ten Potenz kein Bruch vorkommen, wenn in dem Coefficienten der m ten Potenz keiner vorhanden ist. Das ist nun der Fall bey den Coefficienten der 1ten Potenz, folglich auch bey denen der 2ten, folglich auch bey denen der 3ten, u. s. w. ohne Ende.





III. Stück.

System der allgemeinen Differenzen.

§. 1.

I. Lehnfatz.

$$\begin{aligned} \text{Es ist } & {}^m\mathcal{A}.1 + {}^m\mathcal{B}.2 - {}^m\mathcal{C}.3 \dots + {}^m\mathcal{N}.n \dots \\ & = -m. (1 - {}^{m-1}\mathcal{A} + {}^{m-1}\mathcal{B} \dots + {}^{m-1}\mathcal{N}-1..) \end{aligned}$$

§. 2.

Beweis.

Nach der Bezeichnung II. §. 22. ist des Lehnfatzes erste Reihe

$$\begin{aligned} & = -\frac{m}{1}.1 + \frac{m.m-1}{1.2}.2 - \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}.3 \dots \\ & \dots + \frac{m.m-1. \dots m-(n-1)}{1.2. \dots n-1.n}.n \dots \text{ also} \\ & = -m. \left(1 - \frac{m-1}{1} + \frac{m-1.m-2}{1.2} \dots \dots \dots \right. \\ & \quad \left. \dots + \frac{m-1. \dots m-(n-1)}{1.2. \dots n-1} \dots \dots \dots \right) \end{aligned}$$

und diese letzte Reihe ist gleich der zweiten Reihe im Lehnfatz. Denn es ist

$$\frac{m-1}{1} = {}^{m-1}\mathcal{A}; \quad \frac{m-1.m-2}{1.2} = {}^{m-1}\mathcal{B} \text{ u. f. w.}$$

übers

überhaupt das *n*te Glied dieser Reihe, wofür wir hier zählen

$$\frac{m-1. \dots m-(n-1)}{1. 2. \dots n-1} \text{ ist } = \frac{m-1. \dots m-1-(n-2)}{1. 2. \dots n-1}.$$

also $= {}^{m-1}N-1$ nach II. §. 22.

§. 3.

Z u s a h.

Aus dem Beweise selbst erhellet, daß nicht nur die Summen aus den beyden Reihen des Lehrsatzes, sondern auch die ersten, zweiten, dritten u. s. w. überhaupt die *n*ten Glieder aus beyden Reihen, einzeln genommen einander gleich sind. Daher bleibt auch

$$\begin{aligned} & - {}^m A. 1. A + {}^m B. 2. B - {}^m C. 3. C + \dots \\ & = -m. (1. A - {}^{m-1} A. B + {}^{m-1} B. C - \dots) \end{aligned}$$

was für Größen auch *A*, *B*, *C* *ic.* bedeuten mögen.

§. 4.

II. L e h r s a t z.

Es sey $\alpha = 1 - {}^m A + {}^m B - {}^m C \dots + {}^m N \dots$

so ist $\alpha = 0$ nur für $m > 0$

und $\alpha = 1$ nur für $m = 0$.

B e w e i s.

m mag seyn, was für eine Größe es will, so ist nach dem binomischen Theorem die durch α genannte Reihe $= (1 - 1)^m$ folglich $= 0^m$, demnach $= 0$ nur für $m > 0$, hingegen $= 1$ nur für $m = 0$.

§. 5.

Z u s a h.

Da die Gründe, worauf der Beweis beruhet, so allgemein sind, daß man jede Größe, folglich auch $m-1$
 Statt

Statt m schreiben kann; so umfaßt der Lehrsatz zugleich den folgenden Satz:

wenn $\beta = 1 - m^{-1}A + m^{-1}B - m^{-1}C \dots + m^{-1}N$

so ist $\beta = 0$ nur für $m - 1 > 0$ d. i. für $m > 1$

und $\beta = 1$ nur für $m - 1 = 0$ d. i. für $m = 1$.

§. 6.

III. Lehrsatz.

Es sey $\gamma =$

$1 \cdot q - m A (q - a) + m B (q - 2a) \dots + m N (q - na) \dots$

so ist $\gamma = 0$ nur für $m > 1$

und $\gamma = ma$ nur für $m = 1$

wenn m , q und a jede Größen, nur nichts unendlich Großes bedeuten.

§. 7.

Beweis.

Wenn man von der Reihe $\alpha \cdot q$, diejenige so d genannt wird, abziehet; so erhält man die Reihe γ des Lehrsatzes, wie folget: von

$$1 \cdot q - m A q + m B q \dots + m N q \dots \stackrel{\S. 4.}{=} \alpha \cdot q$$

$$ab - m A \cdot 1a + m B \cdot 2a \dots + m N \cdot na \dots = \delta$$

$$1 q - m A (q - a) + m B (q - 2a) \dots + m N (q - na) \stackrel{\S. 6.}{=} \gamma$$

Nun ist (§. 1.) $\delta = -ma \cdot (1 - m^{-1}A + m^{-1}B \dots)$

folglich muß (§. 5) seyn $\delta = -ma$ o nur für $m > 1$

und $\delta = -ma \cdot 1$ nur für $m = 1$

ferner ist (§. 4.) $\alpha = 0$ nur für $m > 0$.

Da

Da nun $\gamma = \alpha \cdot q - \delta$ befunden ist;

so wird $\gamma = 0 \cdot q + m \alpha \cdot 0$ nur für $m > 1$

und $\gamma = 0 \cdot q + m \alpha \cdot 1$ nur für $m = 1$.

und diese beyden Gleichungen geben den Lehrsatz mit seiner Einschränkung, daß m, q, a, α eigentlich nur im ersten Satze, nichts unendlich Großes bedeuten.

§. 8.

IV. L e h n s a t z.

Wenn m, a und q , wie vorhin, nichts unendlich Großes bedeuten, π aber eine ganze und positive Zahl ist, die übrigens auch ins Unendliche wachsen kann: so ist die Reihe

$$1 \cdot q^{\pi-m} \mathcal{A}(q-a)^{\pi} + m \mathcal{B}(q-2a)^{\pi} \dots + m \mathcal{N}(q-na)^{\pi} \dots$$

welche ε heißen soll, $= 0$ nur für $m > \pi$

und dagegen $= a^{\pi} \cdot m \cdot m - 1 \dots \dots 2 \cdot 1$ nur für $m = \pi$.

Beweis.

Die folgende 1te Reihe ist $= \varepsilon \cdot q$. Davon die 2te, so ζ heißen soll, abgezogen, giebt die 3te Reihe, die wir η nennen wollen.

$$\begin{array}{l} 1 q^{\pi} \cdot q^{-m} \mathcal{A}(q-a)^{\pi} \cdot q + m \mathcal{B}(q-2a)^{\pi} \cdot q \dots + m \mathcal{N}(q-na)^{\pi} \cdot q \\ ab - m \mathcal{A}(q-a)^{\pi} \cdot a + m \mathcal{B}(q-2a)^{\pi} \cdot 2a \dots + m \mathcal{N}(q-na)^{\pi} \cdot na \\ \hline 1 \cdot q^{\pi+1-m} \mathcal{A}(q-a)^{\pi+1} + m \mathcal{B}(q-2a)^{\pi+1} \dots + m \mathcal{N}(q-na)^{\pi+1} \end{array}$$

Nach §. 3. ist die abgezogene mittlere Reihe $\zeta =$
 $-ma \cdot (1 \cdot (q-a)^{\pi-m-1} \mathcal{A}(q-2a)^{\pi} \dots + m-1 \mathcal{N}(q-(n+1)a)^{\pi})$

Vor:

Vorausgesetzt also, der Lehrsatz gelte wirklich für irgend einen bestimmten Werth von π , so hätte man, weil q und m im Lehrsatz jede Größe, folglich auch $q - a$ und $m - 1$ bedeuten können, daß

$$\begin{aligned} \zeta &= -ma. o \text{ nur für } m - 1 > \pi \text{ d. i. nur für } m > \pi + 1 \\ \text{und } &= -ma. a^{\pi. m-1. m-2 \dots 2. 1}, \text{ nur für } m - 1 = \pi \\ &\text{d. i. nur für } m = \pi + 1. \end{aligned}$$

Da nun im Anfange dieses Beweises $\eta = \varepsilon. q - \zeta$ gefunden worden, so wäre unter der gemachten Voraussetzung

$$\begin{aligned} \eta &= o. q + ma. o, \text{ nur für } m > \pi + 1 \\ \text{und } &= o. q + ma. a^{\pi. m-1. m-2 \dots 2. 1}, \text{ nur für } m = \pi + 1 \\ &\text{oder} \\ \eta &= o, \text{ nur für } m > \pi + 1 \\ \text{und } &= a^{\pi+1. m. m-1. \dots 2. 1}, \text{ nur für } m = \pi + 1 \end{aligned}$$

Betrachtet man die gleich Anfangs durch η benannte Reihe, so sieht man, daß diese beiden letzten Gleichungen nichts anders als den Lehrsatz selbst darstellen, indem man $\pi + 1$ statt π darein schreibt. Es ist also erwiesen: wenn der Lehrsatz für irgend einen bestimmten Werth von π gelten sollte, der b heißen mag; so würde er auch für $\pi = b + 1$ gelten. Da nun der Lehrsatz, nach §. 6. für $b = 1$ wahr ist; so gilt er nach diesem Beweise auch für $\pi = 1 + 1 = 2$. Also kann man $b = 2$ voraussetzen, und es folgt daraus durch wiederholte Anwendung des Beweises, daß er auch für $\pi = 2 + 1 = 3$ gelte u. s. w. für jede ganze positive Zahl statt π gesetzt. W. 3. E.

Uebersicht des folgenden.

Der folgende erste Lehrsatz enthält die Formeln, wonach jedes beliebige t te Glied der m ten Differenzenreihe aus

aus den Gliedern der Hauptreihe ausgedrückt wird. Dieses t te Glied der m ten Differenzenreihe ist zugleich die m te Differenz des Gliedes y^T , des t ten Gliedes in der Hauptreihe, und wird deshalb durch $\Delta^m y^T$ bezeichnet.

In Euleri institutio calc. differentialis, pag. 9. wird die Induction für diese Formel nur bis auf $\Delta^5 y$ fortgeführt, indem y das vorangehende, dem als erstes gezählten Gliede y^I vorstehende, Glied in der Hauptreihe bedeutet.

§. 10.

In folgendem Schema, worüber der Kürze wegen 1te Differenz, 2te Differenz u. statt Reihe der ersten Differenzen, Reihe der zweiten Differenzen u. s. w. gedruckt ist.

	Hauptreihe.	1te Differenz.	2te Differenz.	3te Differenz.
x	y			
$x+w$	y^I	$\Delta^I y = y^I - y$		
$x+2w$	y^{II}	$\Delta^I y^I = y^{II} - y^I$	$\Delta^2 y = y^{II} - 2y^I + y$	
$x+3w$	y^{III}	$\Delta^I y^{II} = y^{III} - y^{II}$	$\Delta^2 y^I = y^{III} - 2y^{II} + y^I$	$\Delta^3 y = y^{III} - 3y^{II} + 3y^I - y$
$\vdots$	$\vdots$			
$\vdots$	$\vdots$			
$x+tw$	y^T	$\Delta^I y^T = y^{T+I} - y^T$		
$x+(t+I)w$	y^{T+I}			

bedeutet y eine beliebige Function von x , welches beständig um einerley GröÙe wächst; so, daß die Wachsthummer w ; $2w$; $3w$ u. eine arithmetische Reihe ausmachen, übrigens aber jede beliebige endliche und unendliche GröÙe statt w gedacht werden kann.

y^I bedeutet die Function von x , welche man aus y erhält, wenn man darin $x+w$ statt eines jeden x schreibt.

y^{II}

y^{II} bedeutet diejenige Function, welche eben so aus y^{I} entsteht, indem man wiederum $x + w$ statt eines jeden x in y^{I} schreibt. Eben so entstehen y^{III} , y^{IV} u. s. w.

Hieraus erhellet sogleich, daß die Function y^{II} auch unmittelbar aus y entstehen muß, wenn man sogleich $x + 2w$ statt eines jeden x in y schreibt. Und so entsteht nun überhaupt $y^{\text{T+I}}$, das $t + 1$ te Glied der Hauptreihe, entweder aus dem t ten Gliede y^{T} , indem man darein $x + w$ statt x schreibt, oder unmittelbar aus dem vorangehenden Gliede y , indem man darein sogleich $x + (t + 1)w$, statt eines jeden x schreibt.

§. II.

Zur Erklärung der Differenzen-Säulen in diesem Schema gehören noch folgende Sätze.

1) Die Gleichung $\Delta^1 y^{\text{T}} = y^{\text{T+I}} - y^{\text{T}}$ in der Säule der ersten Differenzen stellt im allgemeinen das Gesetz dar, wonach ein jedes Glied der ersten Differenzenreihe aus zwey Gliedern der Hauptreihe entsteht, welches schon bey den ersten drey Gliedern ganz deutlich in die Augen fällt.

2) Die Gleichung $\Delta^{m+1} y^{\text{T}} = \Delta^m y^{\text{T+I}} - \Delta^m y^{\text{T}}$ worin $\Delta^m y^{\text{T}}$ das t te Glied der m ten Differenzenreihe bezeichnet, bedeutet demnach in Vergleichung mit 1) nichts anders, als daß das nämliche Gesetz für das ganze Schema gelte, oder daß die $m + 1$ ten Differenzen aus den nächst vorhergehenden m ten Differenzen eben so entstehen sollen, wie die 1ten Differenzen aus der nächst vorhergehenden Hauptreihe. Daher ist im Schema z. B.

$$\Delta^2 y, \text{ als } \Delta y^{\text{I}} - \Delta y, = y^{\text{II}} - 2y^{\text{I}} + y$$

$$\Delta^3 y, \text{ als } \Delta^2 y^{\text{I}} - \Delta^2 y, = y^{\text{III}} - 3y^{\text{II}} + 3y^{\text{I}} - y$$

geschrieben.

Anmer:

Anmerkung.

Uebrigens wird in den Differenzenreihen das Glied, worin y vorkommt ebenfalls als ein vorangehendes, und erst das Glied mit y^1 , als das erste betrachtet und gezählt. Es muß daher in obigen Gleichungen $T=0$ gesetzt, oder welches einerley ist, gänzlich weggelassen werden, wenn y^T oder $\Delta^m y^T$ ein vorangehendes Glied werden soll.

Wenn man sich ferner auch $m=0$ zu setzen erlaubt, so umfaßt die Gleichung unter 2) zugleich auch die Gleichung unter 1); indem Δ^0 gänzlich wegzulassen ist.

§. 12.

Daß m und T , nach dem eben erklärten Entstehungsgesetze des Schematis, keine negative oder gebrochene Zahlen, sondern nur die ganzen Ordnungszahlen bedeuten könne, ist daraus klar, weil die angegebne Entstehungsart nur auf 1te, 2te, 3te u. s. w. mte Differenzenreihen, und deren 1te, 2te, 3te u. s. w. tte Glieder führen kann.

Sollte der Werth von m oder T auf negative Zahlen ausgedehnt werden, oder verlangt man für gebrochene Zahlen zu interpoliren; so muß dies erst besonders gerechtfertigt werden. Wir verstehen hier unter m und T alle ganze positive Zahlen und, wie eben angemerkt ist, auch 0.

§. 13.

Im Schema sind die Werthe einiger Differenzen durch Glieder der Hauptreihe ausgedrückt. Trägt man nun, wie man den Werth eines beliebigen t ten Gliedes in einer beliebigen m ten Differenzenreihe durch Glieder der Hauptreihe ausdrücken könne; so hat man dafür den folgenden Lehrsatz.

§. 14.

§. 14.

Es ist $\Delta^m y^T = 1 \cdot y^{M+T} - m \mathcal{A} y^{M-I+T} \dots$
 worin das nte der nachfolgenden Glieder positiv oder nega-

§. 15.

Vorausgesetzt, es gelte der Lehrsatz für irgend ein
 T im Lehrsatz jede positive Zahl, also auch $T + 1$ bez

$$\text{auch } \Delta^m y^{T+1} = 1 \cdot y^{M+T+1} - m \mathcal{A} y^{M+T} \dots$$

$$\text{dirt } - \Delta^m y^T = \dots - 1 \cdot y^{M+T} + m \mathcal{A} y^{M-I+T}$$

$$\text{gibt } \Delta^{m+1} y^T = 1 \cdot y^{M+T+1} - m+1 \mathcal{A} y^{M+T} \dots$$

Die zweite Gleichung ist nämlich nichts anders als
 Lehrsatz mit gerade entgegengesetzten Zeichen geschrieben;
 Seite aus §. 11. No. 2., bey der rechten Seite aus

Betrachtet man nun die letzte Gleichung, so sieht
 man für den bestimmten Werth von m entstehen würde,
 der Lehrsatz für $m = a + 1$, wenn er für $m = a$ kann
 geschehen kann für $a = 1$; so gilt er für $m = 1 + 1 = 2$.
 u. s. w., daß m jede ganze positive Zahl bedeuten kann.

Uebersicht des

y, welches im vorigen Schema und Lehrsatz eine
 Potenz von x, also $x^n = y$ und $(x + w)^n = y^1$;
 lehrt die Formel im nächsten §. das Tte Glied der mten
 Wachsthum des x, bestimmen. Im Eulerischen Werke
 $y = x^2$, $y = x^3$ und $y = x^4$, und zuletzt Seit 13 bis 17,
 bis auf $\Delta^4 y$ fortgesetzten Induction wird das allgemeine
 17ten Seite in einer allgemeinen Formel ausgedrückt.
 für $\Delta^m y$ aus der im nächsten §. für $\Delta^m y$ erwiesenen

der allgemeinen Differenzen.

Lehrsatz. I.

$$\dots + {}^mN - 1 \cdot y^{M - (N-1) + T} + {}^mN y^{M - N + T} \dots$$

tiv wird, je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist.

Beweis.

nen bestimmten Werth von m; so wird hiedurch, weil
deuter, zugleich vorausgesetzt, daß

$$\dots + {}^mN \cdot y^{M - N + T + 1} \dots \text{ sey. Dazu add}$$

$$\dots + {}^mN - 1 \cdot y^{M - (N-1) + T} \dots$$

$$\dots + {}^{m+1}N \cdot y^{M - N + T + 1} \dots$$

der für einen bestimmten Werth von m vorausgesetzte
und die Richtigkeit der Addition erhellet bey der linken
II. Stück, §. 23.

man, daß sie gerade zu aus der vorausgesetzten Gleichung
wenn man darein $m + 1$ statt m schriebe. Folglich gilt
vorausgesetzt werden. Da nun dies nach §. II. No. I.
Dies voraus gesetzt gilt er demnach für $m = 2 + 1 = 3$

folgenden.

jede Function von x bedeutet, sey nun eine beliebige nte
 $(x + 2w)^n = y^{II}$ und überhaupt $(x + tw)^n = y^T$: so
Differenzenreihe aus Potenzen von x und aus w, dem
wird dies Seite 11. und 12. durch Induction bis für
auch für $y = x^n$ bis auf $\Delta^4 y$ gezeigt. Aus dieser letzten
Gesetz für $\Delta^m y$ bey $y = x^n$ geschlossen und am Ende der
Diese trifft aber mit derjenigen nicht überein, die nach §. 18.
folgt; welche übrigens auch für alle Werthe von n gelten
muß

muß, wofür der Binomialsatz erwiesen ist, ohne daß man then von n zu zeigen, solche einzelne Beispiele nöthig hat, werden.

§. 16.

Es sey im Schema §. 10, $y = x^n$, woben $\Delta^m y^T =$ Größe bedeuten soll; so wird $\Delta^m y^T$, als =

$$\begin{array}{rcl} + I. ((m+t)^m \cdot {}^mM \cdot x^{n-m} \cdot w^m + (m+t)^{m+1} {}^{m+1}M + I. \\ - {}^mU. ((m-1+t)^m \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot + (m-1+t)^{m+1} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ + {}^mB. ((m-2+t)^m \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot + (m-2+t)^{m+1} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \text{ic.} \qquad \text{ic.} \qquad \qquad \qquad \text{ic.} \end{array}$$

indem mM und ${}^{m+1}M$ den m ten und $m+1$ ten und mU den m ten Potenz andeutet, und Statt eines jeden $\cdot$

§. 17.

Nach §. 14. ist

$$\Delta^m y^T = I \cdot y^{m+T} - {}^mU y^{m-1+T} \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\text{auch } \Delta^m (x+tw)^n = I \cdot (x+(m+t)w)^n - {}^mU \cdot (x+(m-1+t)w)^n \cdot \cdot \cdot$$

$$\text{für } y = x^n, \text{ woben } y^T = (x+tw)^n; y^{m+T} =$$

Werden nun der letzten Reihe, einzelne Glieder als

$$\begin{array}{rcl} \Delta^m (x+tw)^n = + I. (x+(m+t)w)^n = + I. (x^n \\ - {}^mU. (x+(m-1+t)w)^n = - {}^mU. (\cdot \\ + {}^mB. (x+(m-2+t)w)^n = + {}^mB. (\cdot \\ \vdots \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \vdots \end{array}$$

In dieser Reihe heiße das Aggregat aller derjenigen $= (I \cdot (m+t)^\pi - {}^mU \cdot (m-1+t)^\pi + {}^mB \cdot (m-2+t)^\pi \cdot \cdot \cdot \cdot)$ π te Theil, wegen seines ersten in Parenthese stehenden π so lange $m > \pi$ folglich $\pi < m$ ist. Also ver dem m ten vorhergehen, und können deshalb auf die Ver

Einfluß haben; so wenig wie der vorangehende Theil $(1 - {}^m A + {}^m B \dots) \cdot x^n$, der nach §. 4. ebenfalls $= 0$ wird. Daher der Werth im Lehrsatze, welches eben diese jetzt entwickelte Reihe ist, vom mten Theile angefangen. Denn man erhält den ersten Theil der Reihe im Lehrsatze, wenn man $\pi = m$ setzt.

§. 18.

Z u s a t z. I.

Setzt man im Lehrsatze $T = 0$ (man sehe §. 11. Anmerkung) so erhält man $\Delta^m y = \Delta^m x^n =$

$$\begin{aligned} & 1. ({}^m m \cdot {}^m M \cdot x^{n-m} \cdot w + {}^{m+1} m \cdot {}^n M + 1 \cdot x^{n-(m+1)} \cdot w^{m+1} \dots) \\ & - {}^m A ((m-1)^m \dots + (m-1)^{m+1} \dots) \\ & + {}^m B ((m-2)^m \dots + (m-2)^{m+1} \dots) \end{aligned}$$

Anmerkung.

Vergleicht man diese Reihe mit derjenigen, so im Eulerischen Werke, Seite 17. gegeben wird

$$\alpha \cdot 1 \cdot x^{n-m} \cdot w^m + \beta \cdot K \cdot x^{n-(m+1)} \cdot w^{m+1} \dots$$

wo I und K die binomischen Coefficienten ${}^n M$ und ${}^{n+1} M$ vorstellen; so sieht man leicht, was für Werthe den Größsen α und β zukommen müßten. Diese sind aber dort anders und gerade so bestimmt, als sie sich aus dem hier erwiesenen Lehrsatze §. 16. für $\Delta^m y^1$ ergeben würden.

Die richtigen Werthe von α , β u. s. w. wie sie unsere Formel giebt, sind es übrigens, welche bis für $\Delta^7 y$ berechnet, die im Eulerischen Werke, Seite 16. abgedruckte Tafel geben.

§. 19.

§. 19.

Z u s a t z . 2.

Man setze, um doch einige besondere Anwendung von der Formel zu machen, in §. 18 ferner $m = 3$ und $n = 4$ also $y = x^4$; so erhält man

$$\Delta^3 x^4 =$$

$$\begin{array}{rcl} 1.3^3. \frac{4.3.2}{1.2.3} . x^1 . w^3 + 1.3^4. \frac{4.3.2.1}{1.2.3.4} x^0 w^4 + 0 \\ - 3.2^3 & & - 3.2^4 \\ + 3.1^3 & & + 3.1^4 \\ - 1.0^3 & & - 1.0^4 \\ \hline = 6 . 4 . x^1 . w^3 + 36 . 1 . x^0 . w^4 + 0 \end{array}$$

§. 20.

Z u s a t z . 3.

Setzt man in §. 18. $m = 1$; so wird ${}^n M = {}^n A$, ${}^n M + 1 = {}^n B$ u. s. w. Man hat daher $\Delta^1 y$, als $= \Delta^1 x^n$, $= 1 . {}^n A x^{n-1} . w + {}^n B x^{n-2} . w^2 + {}^n C . x^{n-3} w^3 + \text{u.}$

§. 21.

Z u s a t z . 4.

Es kommt hierbei die wichtige Frage vor, unter welchen Umständen irgend ein ster Theil der Reihe im Lehrsatze §. 16. ein letzter, die Reihe abbrechender Theil sey, und unter welchen Umständen hingegen diese Reihe ins Unendliche fortgehe.

Der dort ausgedrückte ste Theil stellt den allgemeinen Theil der Reihe, worin der mit w^{m+1} für den ersten gezählt wird, dergestalt dar, daß er auch den vorangehenden Theil angiebt, wenn man $s = 0$ setzt. Soll er

D

vers

verschwinden, so muß wenigstens einer von seinen vier Factoren $= 0$ werden. Diese wollen wir deshalb in dieser Hinsicht einzeln betrachten.

§. 22.

Der erste Factor besteht aus der Reihe $(m+t)^{m+s} - m A (m-1+t)^{m+s} + m B (m-2+t)^{m+s}$ etc. also aus der Reihe s in §. 8., wenn man dort

$q = m+t$, $a = 1$ und $\pi = m+s$ setzt; kann also nur $= 0$ werden, für $m > m+s$. Dies findet nun nicht Statt; sondern es kann s aufs kleinste nur $= 0$ gesetzt werden, indem dies schon den vorangehenden Theil der Reihe giebt. Wollte man nämlich s auch negativ setzen, so erhielte man solche Theile, die vor den vorangehenden Theil hingehörten. Diese Theile müssen freylich alle verschwinden, aber eben deshalb ist von ihnen im Lehrsatze nicht mehr die Rede, man sehe den Beweis §. 17.

Weder der Dritte Factor $x^{n-(m+s)}$, noch der vierte w^{m+s} , kann jemahls $= 0$ werden; da natürlich weder x noch w selbst $= 0$ gesetzt werden soll. Und wenn man übrigens auch z. B. w unendlich klein annimmt; so kann doch w^{m+s} nur in Vergleichung mit niedrigeren Potenzen von w verschwinden.

§. 23.

Es bleibt also nur noch der zweyte Factor " $M+S$ " zu betrachten übrig. Dieser kann nun nach II. §. 21. niemahls $= 0$ werden, wenn n keine ganze und positive Zahl ist.

§. 24.

Ist daher n keine ganze und positive Zahl, so läuft die nach den Potenzen von w geordnete Reihe des Lehrsatzes

satzes ins Unendliche fort, und enthält nach und nach alle Potenzen w^m , w^{m+1} , w^{m+2} u. s. w. ohn Ende.

§. 25.

Ist aber n eine ganze und positive Zahl; so wird die Reihe im Lehrsatz niemahls unendlich werden, es mag
1) $m > n$ 2) $m = n$ oder 3) $m < n$ werden.

§. 26.

1. Im ersten Falle, für $m > n$, wird schon der erste Theil und eben so jeder folgende Theil $= 0$, weil jeder der Factoren mM ; ${}^mM+1$; ... ${}^mM+6$... $= 0$ wird
II. §. 19. Daher ist $\Delta^m (x+tw)^n = 0$ für $m > n$.

§. 27.

2. sey $m = n$. Wenn das ist, so muß $m+1 > n$ seyn, also nach II. §. 19. sogleich der Coefficient ${}^mM+1$ und jeder folgende ${}^mM+2$; ${}^mM+3$ u. verschwinden, und die Reihe bis auf das einzige vorangehende Glied verschwinden, worin dann mM als $= {}^nN$ vorkommt: ist also

$\Delta^n (x+tw)^n =$
 $((n+t)^n - {}^nA(n-1+t)^n + {}^nB(n-2+t)^n + \dots) {}^nN. x^0. w^n$
also nach §. 8, indem dort $q = n+t$, $a = 1$, $m = n$, $\pi = n$ gesetzt wird und übrigens ${}^nN = 1$ ist (II. §. 20.),

$$\Delta^n (x+tw)^n = n. n-1. n-2. \dots 2. 1. w^n.$$

§. 29.

Daß dieser Werth constant, für alle Glieder in der nten Differenzenreihe einerley sey, erhellet schon daraus, daß t in diesem Werthe gar nicht vorkommt, und man doch das vorangehende 1te, 2te, 3te u. s. w. Glied erhält, je nachdem man $t = 0$, $= 1$, $= 2$, $= 3$ u. s. w. setzt.

Ueber dies aber weiß man aus §. 26. daß $\Delta^{n+1} (x+tw)^n = 0$; oder jedes Glied der auf der

nten zunächst folgenden $n + 1$ ten Differenzenreihe $= 0$ werde. Nun giebt aber diese $n + 1$ te Differenzenreihe, nach dem Schema §. 10. die Unterschiede zwischen jeden zwey nächsten Gliedern der nten Differenzenreihe an: und Größen, deren Unterschiede $= 0$ sind, müssen ohne Zweifel gleich groß seyn.

§. 30.

Anmerkung.

Hingegen übersieht man auch hieraus, daß man etwas übereilt schließt, wenn man behauptet, daß alle Glieder der nten Differenzenreihe einerley Werth haben, so bald man nur erwiesen hat, daß das vorangehende Glied der $n + 1$ ten Differenzenreihe, $\Delta^{n+1} x^n = 0$ sey. Da dieses vorangehende Glied nur den Unterschied zwischen dem vorangehenden und ersten Gliede der nächstvorhergehenden nten Differenzenreihe angebt; so folgt aus seiner Verschwindung nur so viel, daß die beyden genannten Glieder, das vorangehende und erste der nten Differenzenreihe constant sind.

§. 31.

3) Ist endlich $m < n$;

so wird etwa $m + 1$ oder $m + 2$ oder überhaupt $m + s = n$ folglich $m + s + i > n$ werden, indem i irgend eine ganze positive Zahl bedeutet. Der Theil der Reihe, worin nun w^{m+s+i} vorkommt, hat auch den Factor $M + S + i$ und wird deshalb $= 0$. (II §. 19). Dieser Theil ist für den kleinsten Werth von i , nämlich $i = 1$, der $s + 1$ te unter den nachfolgenden Theilen, und dies ist demnach der erste verschwindende Theil der Reihe.

Der letzte von den nicht verschwindenden Theilen ist daher der ste der nachfolgenden für $m + s = n$, folglich $s = n - m$: oder es besteht die Reihe für $\Delta^m (x + tw)^n$ außer

auffer dem vorangehenden Theile aus $n - m$, den vorangehenden mit gerechnet also aus $n - m + 1$ Theilen, worin nach und nach die Factoren $x^{n-m} \cdot w^m$; $x^{n-(m+1)} \cdot w^{m+1}$ u. s. w. bis auf $x^0 w^n$ vorkommen, also die Potenzen des w von w^m bis w^n wachsen, diejenigen des x aber von x^{n-m} bis auf x^0 abnehmen.

§. 32.

Anwendung auf die Differentialen.

Keiner der bisherigen Schlüsse ist auf einen besondern Werth von w eingeschränkt, sondern es kann dabey w jeden möglichen oder unmöglichen, endlichen oder unendlichen Werth haben. Will man nun z. B. den Lehrsatz mit seinen Zusätzen auf den besondern Werth $d x$ für w anwenden; so hat man nur noch auf den Vortheil zu achten, daß jede Potenz $d x^\pi$ gegen die Potenz $d x^\nu$ verschwindet, so bald $\pi > \nu$ ist.

Diesem nach gibt der Lehrsatz mit allen seinen Zusätzen die folgenden Formeln, welche in den Vten Kapitel der Eulerischen Differentialrechnung, theils aufs neue erwiesen, theils aber wiederum nur aus unvollständigen Inductionen hergeleitet werden; die aber dennoch, wie jede Eulerische Rechnung, sehr lehrreich und wichtig bleiben.

§. 33.

Setzt man im Lehrsatz $w = d x$ und $T = 0$ so erhält daraus $d^m (x^n) =$

$$+ 1 \cdot (m^{m-1} n x^{n-m} d x^m + m^{m+1} n^{m+1} x^{n-(m+1)} d x^{m+1} \dots) \\ -^m A ((m-1)^m \dots \dots + (m-1)^{m+1} \dots \dots \dots) \\ +^m B ((m-2)^m \dots \dots + (m-2)^{m+1} \dots \dots \dots)$$

n mag seyn was für eine GröÙe es will, wie im Binomialfatz.

1) In so fern nun jede höhere Potenz $d x^{m+1}$; $d x^{m+2}$ u. s. w. gegen die niedere Potenz $d x^m$ verschwindet, in so fern besteht jedes mte Differential der Potenz x^n , n mag seyn was es will, nur aus einem Theile, dessen Factor $d x^m$ ist, und dessen übrige Factoren alle endlich sind.

Der erste Factor, nämlich die Reihe

$$1 \cdot m^m - {}^m A (m-1)^m + {}^m B (m-2)^m + \dots {}^m M (m-m)^m.$$

bricht wegen des Factors $(m-m)^m$ noch um ein Glied eher ab, als es wegen der binomischen Coefficienten geschehen würde, wodurch erst die Glieder mit ${}^m M + 1$, ${}^m M + 2$ u. s. w. verschwinden; und der Werth dieses ersten Factors ist $= m \cdot m - 1 \dots 2 - 1$ nach §. 8; daher

$$d^m(x^n) = m \cdot m - 1 \dots 2 \cdot 1 {}^m M \cdot x^{n-m} d x^m$$

$$\text{also auch} \quad = n \cdot n - 1 \dots n - (m-1) \cdot x^{n-m} d x^m$$

2) Wofern man aber auf die Glieder mit den höhern Potenzen von $d x$ Rücksicht nimmt; so ist es ausgemacht, daß die angegebne Reihe für $d^m(x^n)$ ins Unendliche fortgeht, wenn n keine ganze und positive Zahl ist. §. 24.

3) Ist aber n eine ganze und positive Zahl, so ist

1) wenn $m > n$ ist, jedes $d^m(x^n) = 0$. §. 26. folglich
z. B. $d^{n+1}(x^n) = 0$; $d^{m+2}(x^n) = 0$. u. s. w.

2) Wenn $m = n$ ist, so hat man nach §. 27.

$$d^n(x^n) = n \cdot n - 1 \dots 2 \cdot 1 \cdot d x^n$$

und dieser Werth ist constant, man sehe §. 29. und §. 30.

3) Ist endlich $m < n$, so besteht die Reihe für $d^m(x^n)$, den vorangehenden Theil mit eingerechnet, aus $n - m + 1$ Theilen, und diese enthalten nach und nach $d x^m$; $d x^{m+1}$ u. s. w. endlich $d x^n$. §. 31.

§. 35.

Das allgemeine Gesetz in dem folgenden Schema

y	$\Delta^1 y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^m y$	$\Delta^{m+1} y$
y ^I	$\Delta^1 y^I$	$\Delta^2 y^I$	.	$\Delta^m y^I$	.
y ^{II}	$\Delta^1 y^{II}$	.	.	.	.
y ^{III}	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	$\Delta^m y^T$	.
.	.	.	.	$\Delta^m y^{T+1}$	$\Delta^{m+1} y^T$
y ^T	$\Delta^1 y^T$	$\Delta^2 y^T$	.	.	.
y ^{T+1}	$\Delta^1 y^{T+1}$	.	.	.	.
y ^{T+II}	.	.	.	.	.

wonach jedes beliebige tte Glied einer jeden m + 1ten Differenzenreihe aus dem t + 1ten und tten Gliede der nächst vorhergehenden mten Differenzenreihe entsteht, wird durch die Gleichung

$$\Delta^{m+1} y^T = \Delta^m y^{T+1} - \Delta^m y^T$$

dargestellt. Dies Gesetz umfaßt auch die nähmliche Entstehung der ersten Differenzenreihe aus der Hauptreihe, wenn man sich erlaubt, Statt m und T auch 0 zu schreiben, d. i. beide Größen ganz wegzulassen. Man sehe §. 11. Anmerkung.

§. 36.

Anmerkung.

Aus diesem Entstehungsgesetze folgt sogleich, daß

$$\begin{aligned} \text{z. B. } \S) \quad \Delta^m y^I &= \Delta^m y + \Delta^{m+1} y \\ \S) \quad \Delta^m y^{II} &= \Delta^m y^I + \Delta^{m+1} y^I \\ \text{überhaupt } \S) \quad \Delta^m y^{T+I} &= \Delta^m y^T + \Delta^{m+1} y^T \text{ ist.} \end{aligned}$$

§. 37.

Betrachtet man die Gleichung §); so ist darin der Werth von $\Delta^m y^I$ durch lauter vorangehende Glieder der Differenzenreihen ausgedrückt, denn es kommt in ihm nur y und kein y^I , y^{II} u. s. w. vor.

Der Werth von $\Delta^m y^{II}$ hingegen besteht aus zwey Theilen, wovon jeder schon y^I enthält. Indessen ist der Werth des ersten Theiles schon bey §) durch lauter vorangehende Glieder ausgedrückt; und da man in dieser nähmlichen Gleichung statt m auch $m+1$ schreiben darf, indem ihr m jede positive Zahl bedeuten soll; so giebt sie zugleich $\Delta^{m+1} y^I = \Delta^{m+1} y + \Delta^{m+2} y$, welches auch den zweyten Theil in §) durch lauter vorangehende Glieder ausdrücken lehrt; so daß man schreiben kann

$$\Delta^m y^{II} = \Delta^m y + \Delta^{m+1} y + \Delta^{m+1} y + \Delta^{m+2} y$$

oder §) $\Delta^m y^{II} = 1. \Delta^m y + 2. \Delta^{m+1} y + 1. \Delta^{m+2} y.$

§. 38.

L e h r s a t z .

Ueberhaupt ist

$$\Delta^m y^T = 1. \Delta^m y + {}^tA. \Delta^{m+1} y + {}^tB. \Delta^{m+2} y + \dots + {}^tN. \Delta^{m+n} y + \dots + {}^tT. \Delta^{m+t} y.$$

worin m und T jede positive ganze Zahl, und (nach §. 11. Anmerkung) auch $= 0$ seyn kann.

§ 39.

§. 39.

B e w e i s .

Angenommen, es sey für irgend einen bestimmten Werth von t , welcher a heißen mag, der Lehrsatz wahr, also

$$\Delta^m y^a = 1 \cdot \Delta^m y + {}^a A \Delta^{m+1} y + {}^a B \Delta^{m+2} y + \dots$$

so wird damit zugleich auch angenommen, daß auch

$$\Delta^{m+1} y^a = 1 \cdot \Delta^{m+1} y + {}^a A \cdot \Delta^{m+2} y + \dots$$

sey; weil m im Lehrsatz jede positive Zahl, also auch $m+1$ bedeuten soll.

Diese beyden Gleichungen zu einander addirt, ihre linken Seiten, nach §. 36., ihre rechten, nach II. §. 23. geben die Gleichung

$$\Delta^m y^{a+1} = 1 \cdot \Delta^m y + {}^{a+1} A \Delta^{m+1} y + {}^{a+1} B \Delta^{m+2} y + \dots$$

welche mit dem Lehrsatz verglichen darthut, daß der Lehrsatz auch für $t = a+1$ gelten müsse, so bald er für $t = a$ als gültig angenommen werden kann.

Nun gilt aber der Lehrsatz für $t = 1$, nach 2) §. 36. auch schon für $t = 2$, nach 7) §. 37. Folglich gilt er nach den eben geführten Schlüssen auch für $t = 2+1 = 3$; folglich durch wiederholte Anwendung dieser Schlüsse auch für $t = 3+1 = 4$ u. s. w. für jede positive ganze Zahl.

§. 40.

Z u s a m m e n f a s s u n g .

Setzt man im Lehrsatz $T = 0$, so wird y^T zu y oder deutet das vorangehende Glied an, und da für $t = 0$ alle folgende Binomialcoefficienten ${}^t A, {}^t B$ etc. $= 0$ werden;

den; so giebt der Lehrsatz bey diesem Werthe von T daß $\Delta^m y = 1. \Delta^m y + 0$, welches freylich schon von selbst klar ist und nicht anders seyn kann. Der Lehrsatz bestimmt nämlich $\Delta^m y^T$ aus den vorangehenden Gliedern der Reihe der Δ^m und der folgenden Reihen der Δ^{m+1} , Δ^{m+2} u. s. w. Wählt man nun zu $\Delta^m y^T$ selbst das vorangehende Glied der Reihe der Δ^m , so kann der Lehrsatz nichts anders angeben, als daß dies Glied durch sich selbst allein bestimmt werde.

§. 41.

Z u s a ß . 2.

Man setze im Lehrsätze $m = 2$ so hat man

$$\Delta^2 y^T = 1. \Delta^2 y + {}^tA \Delta^3 y + {}^tB \Delta^4 y \dots + {}^tT. \Delta^{2+t} y.$$

Man setze $m = 1$; so hat man

$$\Delta^1 y^T = 1. \Delta y + {}^tA \Delta^2 y + {}^tB \Delta^3 y \dots + {}^tT. \Delta^{1+t} y$$

und in dem Sinne des §. 11. $m = 0$ gesetzt, giebt

$$y^T = 1. y + {}^tA \Delta y + {}^tB \Delta^2 y \dots + {}^tT. \Delta^t y.$$

§. 42.

E r k l ä r u n g .

Jede Function von t , die das 1te, 2te, 3te u. Glied einer Reihe angiebt, je nachdem man in ihr $t = 1$, oder $t = 2$, oder $t = 3$ setzt u. heißt das allgemeine t te Glied der Reihe. Demnach ist der in §. 41. entwickelte Werth für y^T eigentlich das allgemeine t te Glied

nicht der Reihe y, y^I, y^{II}, y^{III} u. sondern

nur der Reihe y^I, y^{II}, y^{III} u. ob er gleich

auch den Werth des vorangehenden Gliedes y mit umfaßt, weil man $t = 0$ setzen durfte.

Zäh:

Zählen wir aber von nun an mit Hrn. Euler y als das erste Glied der Hauptreihe; so ist nun nicht ferner y^T sondern y^{T-1} das t te Glied dieser Reihe, und daher der Werth von y^{T-1} eine solche Function von t , welche das 1te, 2te, 3te u. Glied dieser Reihe angiebt, wenn man in ihr $t=1$, $t=2$ oder $t=3$ u. setzt.

Wenn man die folgenden Formeln mit denen in des Hrn. Eulers Differentialrechnung, Kap. II. vergleichen will, so hat man nur noch zu merken, daß Hr. Euler x geschrieben hat, wo hier t steht.

§. 43.

Erklärung.

Eine Reihe der n ten Ordnung heißt jede Reihe, deren n te Differenzen constant, also ihre letzten sind.

§. 44.

A u f g a b e.

Das allgemeine t te Glied in einer Reihe der n ten Ordnung, das wir durch N , y^{T-1} bezeichnen werden, aus den ersten Gliedern der Hauptreihe und der Differenzenreihen auszudrücken.

§. 45.

Auflösung.

Es ist

$N, y^{T-1} = 1. y + {}^{t-1}A \Delta^1 y + {}^{t-1}B \Delta^2 y \dots + {}^{t-1}M \Delta^n y.$
Denn man hat in der allgemeinen Formel für y^T §. 41. nur $t-1$ Statt t zu schreiben, und dann die Reihe mit demjenigen Gliede abzubrechen, worin die n ten Differenzen

ferenzen vorkommen, weil diese, nach der Erklärung §. 43. die letzten sind, für eine Reihe der n ten Ordnung.

§. 46.

Z u s a s s.

Aus denselben Gründen hat man daher auch
 $N+I, y^{T-1} = I \cdot y + {}^{t-1}A \cdot \Delta^1 y + \dots + {}^{t-1}N \cdot \Delta^n y + {}^{t-1}N+I \cdot \Delta^{n+1} y$
 indem der Ausdruck $N+I, y^{T-1}$ das allgemeine t te Glied
 in einer Reihe der $n+1$ ten Ordnung bedeutet.

§. 47.

A u f g a b e.

Das allgemeine t te Glied einer Reihe der ersten
 Ordnung, I, Y^{T-1} aus lauter Gliedern der Hauptreihe
 auszudrücken.

§. 48.

A u f l ö s u n g.

Nach §. 45. ist $I, y^{T-1} = I \cdot y + {}^{t-1}A \Delta^1 y$, also
 weil ${}^{t-1}A = t-1$, und nach §. 35. ferner $\Delta^1 y = y^1 - y$ ist,
 auch $I, y^{T-1} = I \cdot y + {}^{t-1}A y^1 - (t-1) y$
 oder $I, y^{T-1} = {}^{t-1}A y^1 - (t-2) y$.

Diese Gleichung, welche übrigens der Aufgabe schon
 Genüge leistet, kann offenbar auch folgender maßen ge-
 schrieben werden:

$$I, y^{T-1} = {}^{t-1}A \cdot (t-2) \cdot \left(\frac{y^1}{t-2} - \frac{y}{t-1} \right)$$

§. 49.

§. 49.

Wie das allgemeine t te Glied für eine Reihe der n ten Ordnung, aus lauter Gliedern der Hauptreihe auszudrücken sey, giebt der folgende Lehrsatz an.

§. 50.

Lehrsatz.

Es ist $N, y^{T-1} =$

$${}^{t-1}N. (t-1-n). \left\{ \frac{y^N}{t-1-n} - \frac{{}^nA. y^{N-1}}{t-n} + \frac{{}^nB. y^{N-2}}{t-n+1} \dots \dots \dots \right. \\ \left. \dots \dots + \frac{{}^nM. y^{N-M}}{t-1-n+m} \dots + \frac{{}^nNy}{t-1} \right\} = E$$

§. 51.

Beweis.

Nach §. 45. ist

$$N, y^{T-1} = y + {}^{t-1}A. \Delta^1 y + {}^{t-1}B. \Delta^2 y \dots + {}^{t-1}N. \Delta^n y = F \\ \text{und } N+1, y^{T-1} \underline{\underline{\text{§. 46.}}} F + {}^{t-1}N+1. \Delta^{n+1} y = F+G.$$

Die Buchstaben E, F, G, sollen nämlich nur dazu dienen, einige der hergeschriebnen Größen ganz kurz zu bezeichnen.

Schreibt man den Werth, wie ihn §. 14. für $\Delta^{n+1} y$ bestimmt, in G; so hat man

$$G = \\ {}^{t-1}N+1. (y^{N+1-n+1} A y^N \dots + {}^{n+1}M+1. y^{N+1-(M+1)} \dots + {}^{n+1}N+1. y.)$$

Ange

Angenommen nun, es sey für irgend einen bestimmten Werth A von N die $F=E$; so hat man wegen der vorletzten Gleichung, wonach überhaupt

$N+I, y^{T-I}=F+G$ ist, daß für $N=A$ sey $N+I, y^{T-I}=E+G$ und es kommt darauf an, die Summe der beyden Reihen E und G zu finden.

Weil $y^{N-M}=y^{N+I}-(M+I)$ ist; so schmilzt bey ihrer Summirung zusammen jedes mte der nachfolgenden Glieder von E, so e heißen soll, mit jedem $m+1$ ten der nachfolgenden Glieder von G, welches g heißen mag.

Wenn man nun das Glied e durch

$$(t-n-2) \cdot (m+1) \cdot (n+1),$$

das Glied g aber durch $(t-n-2) \cdot (t-1-n+m)$ so wohl multiplicirt, als auch dividirt; so hat man

$$e = {}^{t-1}N \cdot \frac{t-1-n}{n+1} \cdot (t-n-2) \cdot \frac{m+1}{t-n-2} \cdot \frac{{}^nM \cdot n+I}{m+1} \cdot \frac{y^{N-M}}{t-1-n+m}$$

$$g = {}^{t-n}N+I \cdot (t-n-2) \cdot \frac{t-1-n+m}{t-n-2} \cdot \frac{{}^{n+I}M+I}{t-1-n+m} \cdot \frac{y^{N-M}}{t-1-n+m},$$

daher

$$e+g = {}^{t-1}N+I \cdot (t-n-2) \cdot \left\{ \begin{array}{c} \frac{m+1}{t-n-2} \\ + \frac{t-1-n+m}{t-n-2} \end{array} \right\} \cdot {}^{n+I}M+I \cdot \frac{y^{N-M}}{t-1-n+m}$$

$$\text{und da } \frac{{}^{\bar{t}}m \bar{t} I \bar{t} t \bar{t} I \bar{t} n \bar{t} m}{t-n-2} = \frac{{}^{\bar{t}}t \bar{t} n \bar{t} 2}{t-n-2} = \bar{t} I \text{ ist,}$$

$$e+g = {}^{t-1}N+I \cdot (t-n-2) \cdot \left\{ \bar{t} {}^{n+I}M+I \cdot \frac{y^{N-M}}{t-1-n+m} \right\}$$

Dieser

Dieser Werth von $e+g$ giebt nun grade das $m+i$ te Glied an, so man in der Reihe des Lehrsatzes erhalten würde, wenn man darin $N+I$ Statt N schriebe.

Für $m=0$ wird in e , der Coefficient $\frac{1}{t}{}^n M = +1$ und in g , der Coefficient $\frac{1}{t}{}^{n+1} M + I = -{}^{n+1} A$; und es schmilzt alsdann, nach der eben ausgeführten allgemeinen Reduction das vorangehende Glied der E mit dem i ten der nachfolgenden Glieder der G dergestalt zusammen, daß

$$t^{-1} M + I . (t - n - 2) . \left(-{}^{n+1} A . \frac{y^N}{t - 1 - n} \right)$$

daraus entsteht. Dies wäre aber ebenfalls das i te der nachfolgenden Glieder in der Reihe des Lehrsatzes, wenn man darin $N+I$ statt N schriebe. Denn $t-1-(n+1)$ ist $= t-n-2$ u. s. w.

Was nun noch das vorangehende Glied der Reihe G betrifft, so ist dies $t^{-1} M + I . y^{N+1}$ folglich auch $= t^{-1} M + I . (t-n-2) . \left(\frac{y^{N+1}}{t-n-2} \right)$, welches ebenfalls das vorangehende Glied in der Reihe des Lehrsatzes ist, wenn man in demselben $N+I$ Statt N schreibt.

Bedenkt man endlich noch, daß die Reihe G nach II. §. 19. gerade mit dem $n+1$ ten und E mit den n ten der nachfolgenden Glieder abbricht; so ist man völlig überzeugt, daß $E+G$ gerade diejenige Reihe giebt, so man im Lehrsatze erhalten würde, wenn man darin $N+I$ Statt N schriebe; der Lehrsatz also für $N=A+1$ gelten müßte, wenn er für $N=A$ als richtig dürfte angenommen werden. Das darf aber nach §. 18. geschehen für $A=1$. Also gilt der Lehrsatz auch für $N=1+1=2$; also auch für $N=2+1=3$.

u. s. w.

u. s. w. für jede Reihe der Nten Ordnung, wenn N nur die positiven Ordnungszahlen bedeutet.

§. 52.

Uebergang zu der summatorischen Reihe.

Vor die Hauptreihe im Schema §. 35. kann man noch eine neue Reihe S ; S^I , S^{II} u. s. w. setzen, deren erste Differenzenreihe die Hauptreihe selbst angiebt, indem man nämlich den Gliedern dieser neuen Reihe diejenigen Werthe zuschreibt, die wir ihnen im nachstehenden Schema vorgesetzt haben.

$0 = S$	y		
$y = S^I$	y^I	$\Delta^I y$	
$y^I + y = S^{II}$	y^{II}	$\Delta^I y^I$	$\Delta^2 y$
$y^{II} + y^I + y = S^{III}$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$y^{T-II} + \dots y^{II} + y^I + y = S^{T-I}$	y^{T-I}		
$y^{T-I} + y^{T-II} + \dots y^{II} + y^I + y = S^T$			

Ist nun die Hauptreihe, als dieser neuen Reihe erste Differenzenreihe zu betrachten; so muß offenbar die 1te, 2te, 3te u. s. w. Differenzenreihe der Hauptreihe als die 2te, 3te, 4te u. s. w. Differenzenreihe der neuen Reihe betrachtet werden, woraus sogleich offenbar ist, daß $S^T = 1 \cdot S + {}^I A y + {}^I B \Delta^I y + {}^I C \Delta^2 y + \dots$ seyn muß, da $y^T = 1 \cdot y + {}^I A \Delta^I y + {}^I B \Delta^2 y + {}^I C \Delta^3 y + \dots$ ist, nach §. 41.

§. 63.

§. 53.

Aus den Werthen, die wir im obigen Schema den Gliedern der neuen Reihe vorgesezt haben, ist klar, daß S^T die Summe aus den t ersten Gliedern der Hauptreihe sey, y als das erste Glied gerechnet. Daher wird jede Function von t , die den Werth dieses Gliedes S^T in der neuen Reihe angiebt, in Beziehung auf die Hauptreihe, das summatorische Glied (terminus summatorius) und zwar das allgemeine t te summatorische Glied genannt, weil eine solche Function die Summe aus den ersten 2, 3, 4 u. Gliedern der Hauptreihe angiebt, je nachdem man ihr $t = 2, = 3, = 4$ sezt u. s. w. Die ganze Reihe, deren $t + 1$ tes Glied dieses S^T ist, heißt eben deshalb die summatorische Reihe (series summatrix), ebenfalls in Beziehung auf die Hauptreihe.

§. 54.

Gehört die Hauptreihe zur n ten Ordnung, so sind ihre n ten Differenzen die letzten. Da nun eben diese n ten Differenzen die $n + 1$ ten der summatorischen Reihe sind, so gehört die summatorische Reihe zur $n + 1$ ten Ordnung. Dennoch bezeichnet man z. B. das $t + 1$ te Glied einer solchen Reihe ganz gut durch N, S^T ; denn 1) trägt es doch das Zeichen S der summatorischen Reihe in Beziehung auf eine Reihe der n ten Ordnung, und 2) sind auch die letzten $n + 1$ ten Differenzen dieser Reihe, die durch Δ^n bezeichneten, die n ten der Hauptreihe.

§. 55.

Man lasse also die am Ende des 52. §. für S^T gegebne Reihe mit dem Gliede $'N + 1. \Delta^n y$ abbrechen, so hat man, da das erste Glied S nach dem Schema $= 0$ ist,

$$N, S^T = 'A y + 'B \Delta^1 y + 'C \Delta^2 y \dots + 'N + 1. \Delta^n y$$

$\mathcal{E}$ als

als den terminum summatorium der Hauptreihe, wonach man aus den ersten Gliedern der ersten n Differenzenreihen sogleich die Summe aus den beliebigen t ersten Gliedern der Hauptreihe von der n ten Ordnung ansetzen kann.

§. 56.

Wenn wir hier wiederum mit Herrn Euler das Glied S in der summatorischen Reihe als das 1 te zählen, so ist S^T nicht das t te, sondern schon das $t+1$ te Glied dieser Reihe, und giebt also dessen Werth nicht das 1 te, 2 te, 3 te u. s. w., sondern schon das 2 te, 3 te oder 4 te Glied der Reihe an, wenn man $T=1, =2$ oder $=3$ setzt u. s. w. Daher ist hier wiederum S^{T-1} das allgemeine t te Glied dieser summatorischen Reihe.

Dies allgemeine Glied wird aus den ersten, zweyten, dritten u. s. w. Differenzenreihen seiner Reihe offenbar eben so bestimmt, wie das allgemeine Glied der Hauptreihe aus den ersten, zweyten, dritten u. s. w. Differenzenreihen dieser Hauptreihe: oder man erhält aus dem Werthe für y^{T-1} in §. 41, dort $t-1$ statt t gesetzt sogleich den Werth für S^{T-1} wenn man $S; y; \Delta y; \Delta^2 y$ 2c.

in jenen Werth Statt $y; \Delta y; \Delta^2 y; \Delta^3 y$ 2c. schreibt; nämlich $S^{T-1} = 1.S + {}^{t-1}A y + {}^{t-2}B \Delta^1 y + \dots + {}^{t-1}I - 1. \Delta^{t-2} y.$

Aus diesem allgemeinen t ten Gliede der summatorischen Reihe erhält man nun ebenfalls, wenn man darin t Statt $t-1$ schreibt, den Werth von S^T oder das obige allgemeine t te summatorische Glied: nämlich

$S^T = {}^tA y + {}^{t-1}B \Delta^1 y + {}^{t-2}C \Delta^2 y + \dots + {}^tI. \Delta^{t-1} y.$
Für N , S^T kann diese Reihe, nach §. 54. nicht über $N+1. \Delta^n y$ hinausgehen; früher aber kann sie allerdings abbrechen, nämlich wenn $t < n+1$ ist, nach II. §. 19.



IV. Stück.

(Man sehe die Einleitung.)

Quaedam de motus legibus.

§. 1. Fig. 1.

Corpus non elasticum, in motu a regione A ad F constitutum si in puncto C obstaculum offendit insuperabile (scilicet planum H I); ita de via praeclusa deflectit in C D, vt quouis temporis puncto a destinato spatii puncto, hoc est a puncto F quam proxime absit in puncto D. Hoc est, deflectit per angulum D C F celeritate minore, quae ad maiorem se habet vt cosinus anguli F C D ad radium. Breuissime licet barbare loquar: *celeritas per obstaculum cosinuatur.*

§. 2. Fig. 2.

Quodsi igitur corpus C, a puncto C diuersis viribus, quarum viae angulum c faciunt, impellatur simul versus M et versus N, celeritatibus per C M et C N expressis: fiat necesse est deflectio ab vtraque via in viam aliquam C Q inter C M et C N interiectam; nec non fiat celeritas C Q composita ex celeritatibus C M et C N cosinuatis (§. 1.). Porro, ne praeter necessitatem illatam ab obstaculo (cuius loco hic virium motricium diuersa destinatio est) vis aliqua, seu celeritas intereat; vtique oportet, vt celeritas noua C Q sit *summa maxima* cosinuatorum (§. 1.) virium

E 2

C M

CM et CN. Talis igitur expectanda est corporis via et celeritas CQ.

§. 3.

Videamur per calculum infinitesimalem, quae illa via CQ, quae illa *summa maxima* CQ sit, hoc est, quae linea CQ angulum totum c diuidens, constituenda sit, et quanta sit celeritas CQ, qua eodem tempore perueniatur a puncto C ad Q, quo perueniretur tum a puncto C ad N, tum a puncto C ad M, si singuli et non impediti fuissent impulsus seu vires CN et CM.

Breuitatis causa sit $CM = L$, $CN = K$, $CQ = D$.
Ergo

$$L \cdot \cos x + K \cdot \cos (c - x) = \text{maximum},$$

$$L \cdot \sqrt{(r^2 - (\sin x)^2)} + K \sqrt{(r^2 - (\sin c - x)^2)} = \text{maximum}$$

$$\frac{L \cdot \frac{1}{2} \cdot (-2 \sin x \cdot d(\sin x))}{\sqrt{(r^2 - (\sin x)^2)}} - \frac{K \cdot \frac{1}{2} \cdot (-2 \sin(c-x) \cdot d(\sin c-x))}{\cos(c-x)} = 0$$

$$\frac{-L \cdot \sin x \cdot d(\sin x)}{\cos x} - \frac{K \cdot \sin(c-x) \cdot d(\sin c-x)}{\cos c-x} = 0$$

$$\frac{-L \cdot \sin x \cdot dx}{r} + \frac{K \cdot \sin(c-x) \cdot dx}{r} = 0$$

$$L \sin x = K \sin(c-x). \text{ Ergo } Mp = NP.$$

Ergo CD est parallelogrammi linea diagonalis.

§. 4.

§. 4. Fig. 3.

Idem probari potest constructione geometrica. Videlicet si diuidi debet quantitas angularis $c = x + (c - x)$ ita, vt linea $CM \cdot \cos x + CN \cdot \cos (c - x)$ maxima linea sit: finge tibi, ad punctum fixum C angulum a , crura fixa CN et CM coniungentem, ita posse circumagi, vt modo x modo $c - x$ augeatur, summa C manente eadem. Tum $CM \cdot \cos x + CN \cdot \cos (c - x)$ non potest esse maior, quam si intervallum NM ratione PQ est parallelum, hoc est, si $Mr = Nr$; hoc est, si $CM \cdot \sin x = CN \cdot \sin (c - x)$. Quare si (Fig. 2. et §. 3.) angulus c ita diuidendus sit, vt $L \cos x + K \cos (c - x)$ sit summa maxima; vtique linea diagonalis parallelogrammi angulum c diuidat, necesse est.

V. Stück.

(Man sehe die Einleitung.)

V e r s a ß. Fig. 4 und 5.

I.

Der Winkel α CA wird durch die Diagonale CE des zu seinen bestimmten Schenkeln beschriebenen Parallelogrammes in zwey solche Winkel zertheilt, deren Cosinus $C\phi$ und CF zusammen genommen, eine größere Summe geben, als $Cd + CD$, oder als die Summe der beyden Cosinuum ist, die für die beyden durch eine andere Theilungslinie CH erzeugten Winkel gehören, indem $C\alpha$ und CA die bestimmten Halbmesser sind, und

2. Diese

2. Diese größte Summe ist der Diagonale CE gleich.

B e w e i s .

Wegen des rechten Winkels bey D ist $CD < CB$, folglich $CF - CD > CF - CB$ oder $CF - CD > FB$. (♂.

Da ferner, wegen des rechten Winkels bey δ die $C\delta < C\beta$ ist; so muß auch $C\delta - C\varphi < C\beta - C\varphi$ d. i. $C\delta - C\varphi < \varphi\beta$ seyn.. (♀

Wegen $\alpha E = AC$ und $\alpha EF = ACF$ decken sich die rechtwinkligen Dreyecke $\alpha E\varphi$ und ACF ; folglich ist $\alpha\varphi = AF$. Da nun ferner die beyden Winkel $\varphi\alpha\beta$ und FAB als $= ECH$ einander gleich sind, so müssen auch die beyden rechtwinkligen Dreyecke $\alpha\varphi\beta$ und AFB einander decken. Also ist $\varphi\beta = FB$; folglich muß wegen (♂ und (♀

$CF - CD > C\delta - C\varphi$ folglich $CF + C\varphi > C\delta + CD$ seyn, welches das 1te war.

Da nun aus der eben erwiesenen Deckung der Dreyecke $\alpha E\varphi$ und ACF folgt $CF = E\varphi$ so muß auch $CE - CF = CE - E\varphi$ d. i. $FE = C\varphi$, folglich $CF + C\varphi = CF + FE$ d. i. $CF + C\varphi = CE$ seyn, welches das 2te war.

§. I.

A u f g a b e .

Fig. 6.

Zu drey gegebenen Puncten A , B und D einen vierten C in derselben Ebne zu finden, so daß 1) ACH eine

eine gerade Linie, und 2) $CH=AC$, ferner 3) BCK eine gerade Linie, und 4) $CK=CB$, und 5) $CKDH$ ein Parallelogramm wird.

§. 2.

A n a l y s i s.

Man denke sich die DH verlängert, bis sie in G die verlängerte AB berührt, so muß, weil BCK eine gerade Linie, und $KC \parallel DH$ seyn soll, auch $CB \parallel HS$ seyn. Da nun auch ACH eine gerade Linie seyn soll, so muß $AB:BS=AC:CH$, folglich, weil $CH=AC$ seyn soll, auch $BS=AB$ seyn.

Wegen des nöthigen Parallelismi zwischen BC und HS muß ferner auch $BC:SH=AC:AC+CH$, folglich, da $AC+CH=2AC$ seyn soll, auch $SH=2BC$ seyn. Da nun im Parallelogramme $CKDH$ die $HD=CK$ seyn muß, und $CK=CB$ seyn soll; so muß auch $DH=CB$ und $DS=DH+HS=3BC$, folglich $BC=\frac{1}{3}DS$ seyn.

§. 3.

C o n s t r u c t i o n.

Man mache I. $BS=AB$, ziehe die SD und II. durch B die $BL \parallel SD$. Auf der BL nehme man III. $BC=\frac{1}{3}SD$, so ist C der gesuchte Punct.

§. 4.

B e w e i s.

Man verlängere AC bis H in DS , so ist der Aufgabe Ite Forderung erfüllt, und es ist alsdann wegen II. $AB:BS=AC:CH$.

Nach

Nach I. ist $AB = BS$, folglich $AC = CH$, also der Aufgabe 2te Forderung erfüllt.

Wegen II. und der schon erfüllten 1ten Forderung ist ferner $AB : AS = BC : SH$, wegen I aber $AS = 2 AB$ folglich $SH = 2 BC$. Da nun nach III. die $BC = \frac{DS}{3}$ gemacht ist, so ist $SH = 2 \frac{DS}{3}$ folglich $DH = DS - SH = DS - \frac{2DS}{3} = \frac{DS}{3}$, also $DH = BC$.

Auf der geraden Linie BL mache man $CK = BC$, wodurch der Aufgabe 3te und 4te Forderung erfüllt wird; so ist $CK = DH$, und wegen II. wird $CKDH$ ein Parallelogramm; welches der Aufgabe 5te und letzte Forderung war.

VI. Stück.

Rechnungen nach dem Grundsatz der sogenannten kleinsten Wirkung.

A u f g a b e. Fig. 7.

Zwo körperliche Massen von gleicher Größe $= M$, nach dem sie in sich in einerley Zeit t , die eine durch AC , die andere durch BC gleichförmig bewegt haben, stoßen in C auf einander, und wirken, indem keine von beyden elastisch seyn soll, so in einander, daß sie nach dem Stöße mit einerley Richtung und Geschwindigkeit fort gehen.

CL

CL sey der Weg durch welchen sich nunmehr der Körper $= 2 M$ in der nächsten Zeit $= t$ bewegt; so würde $2 CL = CD$ der Raum seyn, wodurch sich ein Körper $= M$ in der nämlichen Zeit t bewegen würde, wenn er in C dieselben Stöße erhalten hätte, welche $2 M$ darin bekam.

Es seyen nun die drey Puncte A, B und D gegeben, und man sucht die Verhältnisse der Geschwindigkeiten AC, BC und CD aus dem Grundsatz der kleinsten Wirkung.

Auflösung.

Da nach Voraussetzung die Bewegung durch AC und BC und die zusammengesetzte durch CD in gleicher Zeit vollbracht werden; so verhalten sich bey gleichförmiger Bewegung die Geschwindigkeiten wie die durchlaufenen Räume. Es wäre demnach die Größe der Wirkung $= M (AC^2 + BC^2 + CD^2)$, wenn C in der Ebene ABD liegen sollte. Um aber dem Grundsatz den ganzen Spielraum zu überlassen, welchen er seiner Natur nach fordern kann; so muß durch ihn selbst bestimmt werden, ob der gesuchte Punct C in der Ebene ABD liege oder nicht. Es sey also I der gesuchte Punct, und dessen Entfernung von der ABD, oder die auf ABD normale Linie IC sey $= z$; so wird die Größe der Wirkung $= m (AI^2 + BI^2 + DI^2) = m (AC^2 + z^2 + BC^2 + z^2 + CD^2 + z^2)$ welche ein Kleinstes wird, wenn es die Function $AC^2 + BC^2 + CD^2 + 3 z^2$ ist, so V heißen mag.

Es sey nun $AB = a$, auf die Verlängerung von AB lasse man die DE normal fallen, und es sey $BE = b$ und $DE = c$; so sind durch a und die rechtwinkligen Coordinaten $a + b$ und c die gegebenen Entfernungen der drey Puncte A, B und D bestimmt.

Es sey, wenn $CF \parallel DE$ gezogen wird, $CF = y$
und $BF = x$; so hat man

$$(a+x)^2 + y^2 + x^2 + y^2 + (b-x)^2 + (c-y)^2 + 3z^2 = V$$

oder

$$a^2 + 2ax + x^2 + y^2 + x^2 + y^2 + b^2 - 2bx + x^2 + c^2 - 2cy + y^2 + 3z^2 = V$$

oder

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2(a-b)x + 3x^2 - 2cy + 3y^2 + 3z^2 = V.$$

Also wenn $dV = P dx + Q dy + R dz$ gesetzt
wird, ist

$$1) \quad 2(a-b) dx + 6x dx = P dx$$

$$2) \quad -2c dy + 6y dy = Q dy$$

$$3) \quad 6z dz = R dz$$

und wenn V ein Kleinstes seyn soll; so muß so wohl P ,
als Q und $R = 0$ werden.

$$\text{Aus 1) wird } P = 0 \text{ für } x = \frac{b-a}{3}$$

$$\text{Aus 2) wird } Q = 0 \text{ für } y = \frac{c}{3}$$

$$\text{Aus 3) wird } R = 0 \text{ für } z = 0$$

Da nun ferner, mit Hülfe der höhern Differentialen
gefunden wird

$$\frac{dP dx}{dx^2} = 6 \text{ aus 1); } \frac{dQ dy}{dy^2} = 6 \text{ aus 2); u. } \frac{dR dz}{dz^2} = 6 \text{ aus 3);}$$

also die zweiten Differentialen der unverwickelten Functionen P , Q und R alle positiv sind: so sind wir gewiß, daß
die

die Function V bey den angegebenen einfachen Werthen von x , y und z wirklich ein Kleinstes werde.

Man ziehe durch D die $DS \parallel CB$, so wird, weil schon $CF \parallel DE$ ist, das $\triangle BCF \sim \triangle SDE$, folglich

$$FC : FB = ED : ES$$

$$\text{d. ist } y : x = c : ES$$

$$\text{also } \frac{c}{3} : \frac{b-a}{3} = c : ES$$

folglich $ES = b - a$ und daher $BS = a$.

In den ähnlichen Dreiecken SDE und BCF ist nun ferner $ES : FB = SD : BC$ folglich auch $BC = \frac{SD}{3}$.

Da nun wegen $z = 0$ der Punkt I in die Ebene ABD fällt; so ist bey $BS = a = BA$ und $BC = \frac{SD}{3}$

nach Seite 71. §. 3. die Linie CD die Diagonale eines Parallelogrammes, dessen Seiten CH und CK die Verlängerungen von AC und BC und $= AC$ und BC sind.

Z u s a f s.

Ein Körper der in C zwey Stöße erhält, wodurch er sich in der Zeit t so wohl durch CK als CH bewegen sollte, erhält eben die beyden Kräfte, die ihn in dem verfloßenen Zeitraume t , einzeln genommen, die eine durch BC , die andere durch AC würden bewegt haben. Also wird die Diagonale im Parallelogramme der Kräfte nach dem Grundsätze der kleinsten Wirkung durchlaufen.

Auf

Aufgabe. Fig. I.

Der Punct A liegt auſſerhalb, der Punct D aber in der Ebene HI. Von A bis D ſoll ſich ein Körper $= m$ dergeltalt bewegen, daß er ſich eben ſo lange auſſerhalb der Ebene als in der Ebene befindet: wie verhalten ſich die Geſchwindigkeiten beyder gleichförmigen Bewegungen nach dem Grundſatze der kleinſten Wirkung?

Auflöſung.

AS ſey normal auf die Ebene HI gezogen und durch die normalen Coordinaten $AS = b$ und $SD = a$ die Lage und Entfernung der beyden Puncte A, D beſtimmt. Die geſuchten Bewegungen ſeyen durch AK und KD, wovon KD ganz in der Ebene HI liegt; ſo iſt, da beyde Bewegungen in gleichen Zeiten vollbracht werden ſollen, die Verhältniß ihrer Geſchwindigkeiten eiz nerley mit dem Verhältniß ihrer Räume; alſo die Größe der Wirkung $= m (AK^2 + KD^2)$.

Aus K laſſe man auf die Ebene ASD die Normale KC—Z fallen, ſo wird $AK^2 = Z^2 + AC^2$ und $KD^2 = Z^2 + CD^2$.

Es ſey nun $SC = x$, und $CD = a - x$, ſo iſt $AC^2 = b^2 + x^2$ und $CD = (a - x)^2$, die angegebne Größe der Wirkung alſo $= m (Z^2 + b^2 + x^2 + Z^2 + (a - x)^2)$, welche nach dem Grundſatze ein Kleinſtes ſeyn muß.

Dieſe Function heiſſe mV und es ſey $P dZ + Q dx = dV$; ſo hat man $4Z dZ = P dZ$ und $2x dx - 2(a - x) dx = Q dx$, und wenn V ein Kleinſtes werden ſoll, ſo muß ſo wohl P, als $Q = 0$, alſo $Z = 0$ und $x = \frac{a}{2}$ werden.

Da

Da nun ferner $\frac{dP dZ}{dZ^2} = 4$ und $\frac{dQ dx}{dx^2} = 4$ ge-

funden wird, also die Verhältnisse der zweiten Differenzialen positiv sind; so ist es gewiß, daß unter den angegebenen Werthen von Z und x das gesuchte Kleinste entsteht.

Bey $Z=0$ fällt nun K in C , nämlich in die durch $A S D$ bestimmte Ebene. Da ferner bey $x = \frac{a}{2}$ die $CD=CS$ wird; so hat man $AC:CD=r:\cos ACS$, folglich auch die gesuchte Verhältniß der gleichzeitigen Bewegungen durch AC und CD , wie $r:\cos ACS$.

Z u s a t z.

Ein Körper, der sich in der Zeit t durch die gerade Linie AC gleichförmig bewegt hat, würde ohne neue Einwirkung auch in der folgenden Zeit t die Verlängerung der AC die $CF=AC$ durchlaufen.

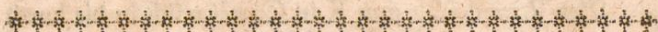
Es sey aber dieser Körper unelastisch, und er sey durch die harte Ebene HI in C gezwungen, die Richtung seiner ersten Bewegung AC abzuändern; so muß nach den eben gefundenen Bestimmungen aus dem Satze der kleinsten Wirkung diese geänderte Bewegung CD

1) in der Ebene liegen, welche durch AS und C , folglich auch durch die Verlängerung von AC , durch CF geht, und wie die AS der Ebene HI normal ist, und

2) muß der Bewegung durch CD Geschwindigkeit $= AC \cdot \cos ACS$, folglich auch $= FC \cdot \cos FCD$ seyn.

Der

Der Körper läuft also in eben der Zeit, worin er sich ohne Widerstand in C durch C F bewegt haben würde, durch denjenigen Cosinus von F C D fort, welcher in der Ebene liegt, die durch seine Richtung C F, und auf die in C widerstehende Ebene normal gelegt wird: welches der im IV. Stücke angeführte Cosinualsatz des Hrn. Prof. Basedow ist.



VII. Stück.

Einige Anmerkungen über des Hrn. Prof.
Büsch Mechanik.

In der Mechanik des Hrn. Prof. Büsch, dem zweyten Theile seiner Mathematik zum Nutzen und Vergnügen des bürgerlichen Lebens, findet sich eine kleine, auch einem gründlichen Mathematiker sehr verzeihliche Uebersetzung, die aber einen großen Widerspruch mit der Erfahrung veranlaßt, dessen Entdeckung auch solche Leser beruhigen muß, für welche der größte Theil dieses Lehrbuches geschrieben ist. Ich hatte Kästners höherer Mechanik zunächst die Begriffe zu verdanken, die mir so gleich darüber Aufschluß geben konnten. Ohne sie, wäre ich wahrscheinlich mehrere für Anfänger geschriebene Anweisungen durchgegangen, hätte in einigen gerade das nähmliche, in andern freylich andere Schlüsse und andere Resultate gefunden, aber gewiß nicht den Grund der Unrichtigkeit, den ich suchte, und hätte bey dem allen in dem nächsten Verufe meines Amtes mehr Zeit und Kräfte verbraucht, als mich jene tieferen Gründe jemahls mögen gekostet haben. Ohne Zweifel giebt es mehrere Lehrer,
die