

www.e-rara.ch

Kleine Beyträge zur Mathematik und Physik und deren Lehrmethode

Busse, Friedrich Gottlieb von

Leipzig, 1786

Zentralbibliothek Zürich

Shelf Mark: NE 1760

Persistent Link: <https://doi.org/10.3931/e-rara-48065>

[VII. Stück. Einige Anmerkungen über des Hrn. Prof. Büsch Mechanik - XV. Stück. Erinnerung über einige Vorstellungen bey den unendlichen Reihen.]

www.e-rara.ch

Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien – von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material – from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d'imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L'éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes – des débuts de l'imprimerie jusqu'au 20e siècle.

e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

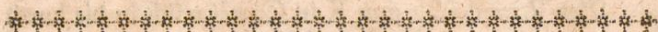
Nutzungsbedingungen Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titelinformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

Terms of Use This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

Conditions d'utilisation Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

Condizioni di utilizzo Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]

Der Körper läuft also in eben der Zeit, worin er sich ohne Widerstand in C durch C F bewegt haben würde, durch denjenigen Cosinus von F C D fort, welcher in der Ebene liegt, die durch seine Richtung C F, und auf die in C widerstehende Ebene normal gelegt wird: welches der im IV. Stücke angeführte Cosinualsatz des Hrn. Prof. Basedow ist.



VII. Stück.

Einige Anmerkungen über des Hrn. Prof.
Büsch Mechanik.

In der Mechanik des Hrn. Prof. Büsch, dem zweyten Theile seiner Mathematik zum Nutzen und Vergnügen des bürgerlichen Lebens, findet sich eine kleine, auch einem gründlichen Mathematiker sehr verzeihliche Uebersetzung, die aber einen großen Widerspruch mit der Erfahrung veranlaßt, dessen Entdeckung auch solche Leser beruhigen muß, für welche der größte Theil dieses Lehrbuches geschrieben ist. Ich hatte Kästners höherer Mechanik zunächst die Begriffe zu verdanken, die mir so gleich darüber Aufschluß geben konnten. Ohne sie, wäre ich wahrscheinlich mehrere für Anfänger geschriebene Anweisungen durchgegangen, hätte in einigen gerade das nämliche, in andern freylich andere Schlüsse und andere Resultate gefunden, aber gewiß nicht den Grund der Unrichtigkeit, den ich suchte, und hätte bey dem allen in dem nächsten Verufe meines Amtes mehr Zeit und Kräfte verbraucht, als mich jene tieferen Gründe jemahls mögen gekostet haben. Ohne Zweifel giebt es mehrere Lehrer,
die

die in der theoretischen und practischen Mechanik Unterricht ertheilen, und doch den Aufschluß über diese Missheiligeit zwischen einem sehr deutlichen Lehrsatze und einer so wichtigen als ausgemachten Erfahrung nicht völlig fassen werden; weil sie von der Verhältniß der unendlichen Größen und ihren höhern Ordnungen noch keine hinlänglichen Begriffe haben, die mehrentheils nur eine Folge von einem ziemlich anhaltenden Studium der höhern Methoden sind. Mögten doch solche Fälle lehren, daß man auch in den ersten Gründen der practischen Mathematik nicht mit frohem Muth unterrichten könne, wenn man nicht ungleich mehr Theorie im Kopfe hat, als man jemahls lehren will — auch dann nicht, wenn man das leichteste und faßlichste Lehrbuch verfolgt, worin ein Büsch mit Verläugnung seiner vollständign Kenntnisse nur solche practische Sätze und leichte Theorien vorträgt, die jedermann ohne gründliche Vorkenntnisse begreifen soll. Dieses Wunsches wegen verzeihe mir der Leser diese große Vorrede zu der folgenden kleinen Bemerkung.

*

*

*

Das angeführte Lehrbuch enthält auf Seite 440 und 441. der zwoten verbesserten Auflage von 1776. einen Lehrsatz, einen Schluß und eine Folgerung, die ich der Kürze wegen durch L, S, F bezeichnen will.

L) „Die Erfahrung so wohl, als geometrische Weise, machen diese mechanische Eigenschaft des Eirkels klar, daß die Zeit, in welcher ein Körper längst der Sehne des Eirkels herabfällt, derjenigen gleich sey, in welcher ein Körper den Diameter mit freiem Falle durchlaufen kann.“ (Die hieher gehörige Figur zeigt es übrigens schon an, daß man hier nur solche Sehnen verstehen

stehen solle, die den einen ihrer Endpuncte mit dem loth-
rechten Durchmesser des Kreises gemein haben).

S) „Wenn es möglich zu machen wäre, daß die
„Schläge eines Pendels in den Sehnen eines Cirkuls hin
„und wieder gingen, so würden sie immer gleiche Zeit
„brauchen, sie mögten nun in größern oder kleinern Seh-
„nen hin und her gehen. Dies ist nun zwar nicht möglich
„zu machen. Der natürliche Schlag eines Penduls bleibt
„immer in dem Bogen eines Cirkels, der zum Radius
„die Länge des Pendels hat. Indessen ist es leicht einzus-
„sehen, daß es in Ansehung der Schläge in kleinen Bo-
„gen keinen erheblichen Unterschied mehr machen könne,
„weil die kleinen Bogen sich von ihren Sehnen nicht mehr
„merklich unterscheiden. „



F) Man kann sich daher darauf verlassen, daß
wenn ein Pendel keinen größern Schlag als in dem klei-
nen Winkel ACP thut, es eben die Zeit dazu brauche, in
welcher es den Diameter $2AC$ durchfallen würde, wenn
es von P oder auch nur von π herabschlägt.

§. 1.

Der Satz L) ist leicht bewiesen, und eben so unlängbar a priori wahr, als die Folgerung F) a posteriori falsch befunden wird. Denn gesetzt, man wollte danach die Länge x eines Pendels berechnen, das Secunden schlägt *), also den kleinen Bogen PA in einer halben Secunde durchfällt; so wäre $2x =$ der Höhe die in einer halben Secunde lothrecht durchfallen wird. Also

$$\text{hätte man } 2x = \frac{15,625}{4} = 3,90625 \text{ u. } x = 1,953125.$$

Da doch aus Erfahrung und richtigen Berechnungen bekannt ist, daß die Länge eines solchen Secundenpendels $= 3,166$ u. ist, an solchen Orten, wo der freye Fall in der ersten Secunde an 15,625 Schuh beträgt.

§. 2.

*) Ich sage mit Fleiß, eines Pendels, das Secunden schlägt nicht schwingt. Auch gute und genaue Physiker weichen in dem Gebrauche des Wortes Schwingung von einander ab. Nach Kraftii Praelect. in Physic. theor. part. II. §. 159. ist es am gewöhnlichsten, so wohl den Hingang als den Hergang des Pendels (et itum et reditum penduli) einen Schwung zu nennen. Wenn ich indessen auf den einmahl eingeführten und bequemen Sprachgebrauch bey den Schwingungen der musikalischen Saiten sehe; so scheint es mir dennoch besser, und im Ganzen genommen auch gewöhnlicher, mit Hrn. Hofr. Kästner und dem Hrn. Prof. Büsch dabey zu bleiben, daß ein Schwung (oscillatio) eines Pendels aus dem Hin- und Hergange des Gewichtes bestehe. Ein Pendel, das Secunden schwingt, würde also ein solches seyn, das diesen Hin- und Hergang in einer Secunde vollbrächte, und müßte demnach viermahl kürzer seyn als dasjenige, was man allgemein ein Secundenpendel nennt. Jeden Hingang und jeden Hergang kann man ganz gut einen Schlag nennen, weil er bey einer Uhr durch einen Schlag hörbar wird.

§. 2.

Der Fehler liegt im Schlusse S und zwar darin, daß man die kleine Sehne statt des kleinen Bogens betrachtet.

Freylich hat ein unendlich kleiner Bogen mit seiner Sehne einerley Länge, und im ganzen genommen auch einerley Richtung; oder der Fehler ist in beyder Hinsicht unendlich klein, wenn man eines statt des andern gebraucht. Aber man will hier weder für die Richtung, noch für die Länge beyder Elemente, im ganzen genommen, etwas schließen; sondern es ist von der Zeit die Rede, in welcher beyde Elemente durchfallen werden. Da nun selbst nach den Sätzen L und F eine noch so kleine, unendlich kleine Sehne PA in einer endlichen Zeit (deren Verhältniß zu einer andern endlichen Zeit durch $\sqrt{2} \cdot AC : 1$ gemessen wird), der unendlich kleine Bogen PA also wohl ebenfalls nur in einer endlichen Zeit durchlaufen wird: so kann ein unendlich kleiner Unterschied zwischen dem Bogen AP und seiner Sehne allerdings einen endlichen Unterschied der Zeiten verursachen, worin beyde durchlaufen werden, und erst die zwoten Differentiale, oder die Elemente des unendlich kleinen Bogens und seiner Sehne können etwa in unendlich kleinen Zeittheilen durchfallen werden.

§. 3.

Die Uebereilung liegt also in einer Schlußart die gerade dem geübtesten Mathematiker am geläufigsten ist, und worin er deshalb eben so späte den Grund seines Fehlers aufsucht, als ein geübter Rechenmeister in der Anwendung seiner pythagorischen Tafel. Mehrere große Mathematiker sind dadurch die ähnliche Irrthümer gefallen, die sie bisweilen ganz ausdaurend behaupteten, und durch andere nicht treffende Beispiele zu bestätigen suchten.

suchten. So legt der berühmte Keill in seiner *introductio ad veram physicam* in dem Beweise des XLI. Theores denselben Fehlschluß zum Grunde, und bemerkt seine Uebereilung auch in der Folge nicht, wo er doch selbst andere richtige und gründliche Lehren über den Fall in der Cycloide vorträgt, die damit in einem offenbaren Widerspruche stehen. Parent soll den Widerspruch, der aus der Verwechslung des Bogens und der Sehne entsteht, zuerst bemerkt, den Grund des Fehlers aber nicht entdeckt, sondern sogar in den richtigen Hungenischen Lehren gesucht haben.

Nachher ist vor dieser Verwechslung, in den folgenden Schriften ausdrücklich gewarnt: *Maclaurin's treatise of fluxions*. Vol. II. §. 498. womit man des Hrn. Hofr. Kästners Programm, *de cautione in quantitatum infinite paruarum neglectu observanda* Lipsiae 1746. Exempl. IX. zu verbinden hat. Ferner in *Maclaurin's account of Newton's philosophical discoveries*. 1775. Chap. 5. propos. IX. Cor. 3. *Kraftii praelect. in Physicam theoret.* P. II. §. 164. *Pemberton's Elemens de la philosophie Newtonienne* Livre. I. Chap. II. §. 60. Saurin, in dem Pariser Memoires für das Jahr 1722. woraus in Steinwehrs physischen Abhandlungen derselben Akademie im VI. Bande, Seite 604. etwas angeführt wird. Kästners höhere Mechanik, zweyter Abschnitt, §. 35.

§. 4.

Warum der fallende Körper in dem unendlich kleinen Bogen MA (Fig. 7.) eine endliche Zeit zubringen müsse, erhellet aus folgender Betrachtung.

Es sey MG die Höhe, durch welche ein Körper, der in M ruhete, in dem ersten unendlich kleinen Zeittheilchen

chen seines freyen Falles getrieben würde; so stellt $M G$ zugleich die absolute (lothrechte) hier constante Beschleunigung der Schwerkraft vor, und giebt nur die respective Beschleunigung $H G$ in der Richtung der Tangente durch M ; indem die andere ihre normale Seitenkraft $M H$, durch den Widerstand der Pendelstange, nach der gerade entgegengesetzten Richtung $M C$ völlig aufgehoben wird. Nun verhält sich, weil die lothrechten Linien $C A$ und $M G$ parallel, und deshalb die Winkel $A C H$ und $G M H$ einander gleich sind, in den rechtwinkligen Dreiecken $C M f$ und $M G H$

$$\text{die } C M : M f = M G : G H.$$

Ist nun $M A$ ein unendlich kleiner Bogen der ersten Ordnung; so ist auch $M f$ ein unendlich Kleines der ersten Ordnung, also $1 : \frac{1}{\infty} = M G : G H$.

Da ferner $M G$, als die absolute Beschleunigung unserer Schwerkraft, als der Weg, durch den ein Körper in einem unendlich kleinen Zeittheilchen der ersten Ordnung von der Schwere getrieben wird, selbst schon ein unendlich Kleines der ersten Ordnung ist; so haben wir

$$1 : \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty} : G H, \text{ daher } G H = \frac{1}{\infty \cdot \infty} \text{ oder die res}$$

spective Beschleunigung $H G$, welche nach der Richtung des nächsten Elementes in den Körper wirkt, ist vom ersten Anfang des Falles an, ein unendlich Kleines der zweiten Ordnung. Da nun diese Beschleunigung $H G$ nicht wächst, sondern vielmehr abnimmt, je näher der Körper, z. B. in M' , nach A kommt; so muß der Körper, durch solche Beschleunigungen getrieben, eine endliche Zeit gebrauchen, um den Bogen $M A$ zu durchfallen.

Denn,

Denn z. B. im freyen lothrechten Falle, wo die Beschleunigung ein unendlich Kleines der ersten Ordnung ist, wird ein endlicher Raum in einer endlichen Zeit durchfallen. Wo nun die Beschleunigungen noch unendliche Mähl kleiner werden, da kann nur ein unendlich kleiner Raum in einer endlichen Zeit durchfallen werden.

§. 5.

Bedenkt man nun, daß nach den Betrachtungen der folgenden beyden §§. fast alle Elemente eines unendlich kleinen Bogens PA (Fig. 7.) nicht nur der Größe, sondern auch der Richtung nach, von den Elementen seiner Sehne verschieden sind; so übersieht man wohl, daß man die unendlich kleine Sehnen PA nicht gerade zu Statt ihres Bogens PMA betrachten dürfe, wo es darauf ankommt, die Zeiten zu finden, in welchen beyde durchfallen werden. Die eben erwähnte Verschiedenheit ihrer Richtungen verursacht nämlich auch eine Verschiedenheit in den respectiven Beschleunigungen, die den jedesmahl zu durchfallenden Elementen parallel wirken. Und diese Verschiedenheit allein genommen, könnte schon einen endlichen Unterschied der Zeiten für den Bogen und seine Sehne verursachen, da beyde Zeiten endlich sind und durch die angeführten verschiedenen Beschleunigungen bestimmt werden.

§. 6. Fig. 7.

Es drücke wiederum MG die lothrechte Schwerkraft aus, welche jeden Augenblick auf den fallenden Körper wirkt, er mag nun im Bogen oder in der Sehne niedergehen; und man zertheile diese Kraft MG allenthalben in die rechtwinkligen Seitenkräfte MH und HG , wovon MH bey dem Falle im Bogen durch den Widerstand der Pendelstange nach der Richtung des Halbmessers MC ,
bey

bei dem Falle in der Sehne aber durch den Widerstand der schiefen Ebene PA völlig aufgehoben wird, und nur HG nach der Richtung des nächsten Elementes wirkt, also die Kraft bestimmt, wodurch das Gewicht im nächsten Elemente beschleunigt wird.

§. 7.

Macht man nun $AF = \frac{AB}{4}$, so ist die Beschleunigung

HG in Bogen Pp größer, als die Beschleunigung HG auf der Sehne. Hingegen ist die Beschleunigung HG in dem Bogen unter p bis in A kleiner, als die Beschleunigung HG in der Sehne, welche allenthalben gleich groß bleibt.

Denn man kann erweisen, daß sich das Element des unendlich kleinen Bogens PpA zum Elemente seiner Sehne PA, Mm zu Nn, verhält $= \sqrt{b} : 2\sqrt{x}$, indem AB durch b, und jede Abscisse wie Af durch x bezeichnet wird *). Daraus folgt, daß $Mm < Nn$ ist für

$x > \frac{b}{4}$; daß nur einmahl $Mm = Nn$ wird, nämlich

für

*) Es sey noch $CA = a$, so ist für den Kreis überhaupt $Mm = a dx : \sqrt{(2ax - xx)}$, also hier wo x unendlich klein ist, $Mm = a dx : \sqrt{2ax} = dx \cdot \sqrt{a} : \sqrt{2x}$. Nun ist die Sehne PA $= \sqrt{2ab}$ und $AB : Af = AP : AN$, also $AN = x \cdot \sqrt{2ab} : b = x \sqrt{(2a:b)}$, und $Nn = dx \cdot \sqrt{(2a:b)}$. Demnach $Mm : Nn = \sqrt{b} : 2\sqrt{x}$ (aus Hrn. Hofr. Kästners angeführter Schrift, de cautione in quant. infinit. neglectu etc. pag. II.)

für $x = \frac{b}{4}$, und daß ferner $Mm > Nn$ seyn muß so

bald man $x < \frac{b}{4}$ nimmt.

Wo nun $Mm < Nn$ seyn soll, da muß Mm weniger schief als Nn durch die beyden parallelen und horizontalen rechtwinkligen Ordinaten fM und $f'm$ hindurchlaufen, durch welche beyde Elemente begränzt werden. Im Gegentheil muß, wo $Mm > Nn$ seyn soll, Mm schiefer durch die horizontalen Ordinaten laufen als Nn .

Daraus ergibt sich die angeführte Verschiedenheit zwischen den respectiven Beschleunigungen in den Elementen des Bogens und der Sehne, wenn man nur noch dazu nimmt, daß in dem Orte p , der durch die Abscisse $AF = \frac{1}{4} AB$ bestimmt wird, diese Beschleunigung eben so groß als in der Sehne ist; weil hier die Elemente des Bogens und der Sehne gleich sind, folglich zwischen den parallelen sie begränzenden Ordinaten auch parallel liegen müssen.

§. 8.

Aus diesem allen erhellet indessen nur soviel, daß zwischen den Zeiten durch den unendlich kleinen Bogen und seiner Sehne ein endlicher Unterschied Statt finden könnte; ob er wirklich vorhanden sey, und welche von beyden Zeiten die größere sey, ist aus dem bisher gesagten noch nicht zu erkennen.

Bedenkt man, daß der Körper, welcher durch den Bogen PpA fällt, gerade in der ersten Hälfte seines Weges,

Weges, Pp , *) größere Beschleunigungen, und nur in der letzten Hälfte seines Weges, pA , kleinere Beschleunigungen als auf der Sehne erhält, so wird es freylich auch ohne genauere Untersuchung schon ziemlich wahrscheinlich, daß das Gewicht den Bogen in kürzerer Zeit durchfallen mögte, als die Sehne. Denn die gleich Anfangs erhaltenen größeren Beschleunigungen wirken, vermöge der Trägheit, durch die folgende Zeit des Falles fort, und verkürzen sie dadurch gar sehr. Etwas mehr befriedigt indessen, wo es darauf ankömmt, eine ganz faßliche, und so zu sagen, augenscheinliche Ueberzeugung von dieser Wahrheit zu geben, die folgende Vorstellung aus Maclaurin's Account of Newton's discoveries. Lond. 1774. pag. 231.

§. 9. Fig. 7.

Damit man einsehe, heißt es ohngefähr, warum die Zeit durch den kleinen Bogen PA , mit der Zeit durch seine Sehne nicht einerley sey, ob gleich der verschwindende Bogen seiner Sehne gleich wird; so wollen wir darthun, daß, wenn PT und TA zwo den Bogen in P und A berührende Linien sind, auch alsdann, wenn diese

*) Es ist nämlich $Pp = pA$, wenn PpA unendlich klein und AF , der Quersinus von Ap gerade $\frac{1}{4}$ von AB , des Quersinus von PpA ist. Denn den Halbmesser zur Einheit genommen, ist (z. B. nach Kästners Integralsrechnung §. 289.) eines Quersinus u Bogen $a = \sqrt{2u} \left(1 + \frac{u^2}{12} + \frac{5 \cdot u^3}{16 \cdot 8 \cdot 7} + \dots \right)$ also wenn u unendlich klein gesetzt wird, $a = \sqrt{2u}$. Also der zum Quersinus $\frac{u}{4}$ gehörige Bogen $\alpha = \sqrt{\frac{u}{2}}$; daher $a:\alpha = 2:1$.

diese beyden Tangenten PT und TA der verschwindenden Sehne gleich werden, dennoch die Zeit durch die Sehne zur Zeit durch die beyden Tangenten sich verhalte wie $4 : 3$ (vorausgesetzt, daß die Bewegung in P von der Ruhe anfängt und CA lothrecht ist).

Denn die Zeit PT ist zur Zeit durch PA (aus leichtesten mechanischen Gründen) wie $PT : PA$. Nun ist aber (Geometrie, nach Karstens Auszug §. 138) $PT = TA$, folglich wenn $PT + TA = PA$ wird, auch $PT = \frac{1}{2} PA$, also die Zeit durch PT zur Zeit durch $PA = 1 : 2$. Da nun TA horizontal ist, so muß die Bewegung durch TA gleichförmig werden, und es wird diese TA in halb so viel Zeit durchlaufen werden, als worin PT durchfallen ist (wie man ebenfalls aus leichtesten mechanischen Gründen darthun kann). Wird daher diese eben gedachte Zeit, worin TA gleichförmig durchlaufen wird, t genannt; so ist die Zeit durch $PT = 2t$ und die durch $PA = 4t$; also die Zeit, worin der Körper durch die Sehne PA fällt, zu derjenigen, worin er durch die beyden Tangenten $PT + TA$ fallen würde, wie $4 : 3$.

§. 10.

Nun giebt man freylich gerne zu, daß die Zeit durch den Bogen PpA zwischen die Zeiten der Sehne PA und der beyden Tangenten $PT + TA$ fallen müsse. So wird sie durch die gründliche Berechnungen des Pendels wirk-

lich bestimmt, nähmlich $= \frac{\pi}{4}$ indem die Zeit durch die Sehne $= 1$, also $= \pi$, indem die Zeit durch die Sehne $= 4$ gesetzt wird; wobey π als die Zahl, welche die Peripherie des Eirkels aus dem Durchmesser $= 1$ ausdrückt, ohngefähr $3,14$ u. wird.

§. 11.

Will man sich auf dem hier angegebenen Wege noch genauer überzeugen, so theile man den Bogen PA nach und nach in immer mehrere gleiche Theile, und ziehe durch diese Theilungspuncte wiederum Tangenten, wovon jede zwei nächsten ebenfalls in einem Puncte, so wie die durch P und A in dem Puncte T zusammenlaufen werden. Berechnet man nun jedesmahl die Zeit, in welcher diese gebrochene Tangentenlinie durchlaufen wird, so wird man finden, daß sie der Zeit π immer näher und näher kömmt. Zugleich könnte man nun zwischen diesen Theilungspuncten des Bogens PA jedesmahl auch Sehnen ziehen, den Fall durch diese gebrochene Sehnenlinie berechnen, und so die Zeit des Bogens in immer engere Gränzen einschließen.

Leichter und kürzer ergiebt sich übrigens die wahre Zeit durch den unendlich kleinen Bogen PA aus der Betrachtung, daß er für einen Theil der Cycloide gelten kann, die an ihrem Scheitelpuncte von dem Kreise durch PpA in A geküßt wird.

* * *

Wer über die gegenwärtige Mechanik zu lehren hat, wird wohl am besten thun, wenn er gerade zu alles überschlägt, worin die Polhemischen Meinungen von der natürlichen Umlaufszeit solcher Räder vorgetragen werden, bey denen doch die Schwere gar keine pendelartige Bewegungen bewirken kann, weil sie in ihrem Schwerpuncte unterstützt sind: obgleich diese Vermuthung von der äußersten Wichtigkeit für die practische und theoretische Mechanik seyn würde, wenn sie Statt finden könnte. Urtheile darüber findet man in des Hrn. Oberbaurath Mönich Vorrede vor seiner Anleitung zur Anordnung
und

und Berechnung der Maschinen. Erste Abtheilung. Ferner in des Hrn. Landrichter Langsdorf Venträgen zur höhern Mechanik und Hydrodynamik, Seite 65: am nächsten und vollständigsten endlich, in des Hrn. Hofr. Karsten Auszug aus den Anfangsgründen der mathematischen Wissenschaften. 1781. am Ende der Maschinenlehre.

* * *

Als ich einst einer nicht ganz mathematischen Klasse in unserm Institute die ersten Begriffe der practischen Mechanik nach Anleitung dieses Lehrbuches beibrachte; so fielen mir manche Wendungen und Einleitungen auf, die meine nicht gelehrten und nicht mathematischen Zuhörer in einem der gründlichen Mathematik sehr nachtheiligem Sinne auszulegen bereit waren.

Z. B. Seite 260. §. 15. „Wenn wir genau wüßten, wie stark diese Körper (z. B. die Rammen) bey einer gewissen Geschwindigkeit wirkten; so würden wir freylich diese Maschinen besser berechnen können. Unterdessen thun sie ihre Dienste, auch ohne diese Berechnung, und es ist nicht nöthig, wenn wir 30 Mann an eine Ramme stellen, ihnen vorher die Newtonische oder leibnizische Meynung, von Berechnung der lebendigen Kräfte zu erklären. Sie werden dennoch den Rammenloß nicht anders heben und nicht anders fallen lassen, als sie ohne diese Wissenschaft thun würden.“

Die angestellten Männer brauchen überhaupt niemals zu rechnen, sondern sollen nur, wie die übrigen Theile der Maschine, über sich rechnen lassen.

Uebrigens mögte auch wohl der Wortstreit über die lebendigen und todten Kräfte keinen Einfluß auf das
Maas

92 VII. Stück. Ueber Hrn. Büsch Mechanik.

Maas der Kräfte des Stoßes haben, wenn es nach den Eulerischen Gründen berechnet wird, wie sie in des Hrn. Hofr. Karsten Lehrbegriff der gesammten Mathematik. 4 Theil, XV — XVII Abschnitt vorgetragen sind. In Beziehung auf diese berühmte Streitigkeit würde auch die Vorstellung des Hrn. d'Alembert in seinem *Traité de dynamique*, Paris, 1743. Préface, pag. 20 und 21. bey dem angeführten Falle sehr gut zu nutzen seyn.

VIII. Stück.

Gründe und Beurtheilung der gewöhnlichen
Rechnungsproben durch die Reste über
das Gleichfache.

§. 1.

Lehnsatz.

Wenn m eine ganze positive Zahl ist, so ist nach dem binomischen Lehrsatz

$$(9+1)^m = 9^m + {}^m A 9^{m-1} + {}^m B 9^{m-2} \dots + m 9^1 + 1$$

man sehe II. §. 18; und die Coefficienten ${}^m A$, ${}^m B$ &c. sind lauter ganze Zahlen. II. §. 25.

§. 2.

Folgerung.

Das Aggregat aus allen Gliedern dieser Reihe ausser dem letzten, 1, ist offenbar eine 9fache, eine durch 9 theilbare Zahl, und dergleichen wollen wir in der Folge durch 9 . F oder 9 . f oder 9 . F ausdrücken.

Da

VIII. Stück. Von den Rechnungsproben. 93

Da nun $(9 + 1)^m = 10^m$ ist; so ist $10^m = 9F + 1$; folglich $a \cdot 10^m = a \cdot 9 \cdot F + a$ oder was in dem asachen einer vollkommenen Potenz von 10, außer der a selbst steckt, ist gewiß eine neunfache Menge von Einheiten, wenn a selbst eine ganze Zahl ist.

§. 3.

Die Zahl 83025

$$\text{ist} = 80000 + 3000 + 0.100 + 20 + 5$$

$$\text{also} = 8 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$$

woraus sogleich überhaupt erhellet, daß bey einer jeden, nach dem dekadischen Systeme ausgedrückten Zahl eine jede Ziffer a, sie sey 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 oder 9, die Menge $a \cdot 10^m$ ausdrückt, indem $m = 0, = 1$ oder $= 2$ u. s. w. gesetzt wird, je nachdem die Ziffer a in der Einern- oder Zehnern- oder Hunderten Stelle u. s. w. steht.

§. 4.

Man kann sich die Menge der Einheiten 80000 als zusammengesetzt vorstellen aus 8 und der übrigen Menge von Einheiten 79992, welche nebst 8 die ganze Menge 80000 giebt. Da nun nach §. 2. alle die Einheiten, welche nebst 8 in 80000, d. i. $8 \cdot 10^4$ stecken, ein 9faches ausmachen, und eben so diejenigen Einheiten, welche nebst 3 in 3000 oder $3 \cdot 10^3$ und nebst 2 in 20 oder $2 \cdot 10^1$ stecken, ebenfalls 9fache sind; so muß die Menge von Einheiten, welche nebst der Ziffersumme $8 + 3 + 2 + 5$ in der Zahl 83025 steckt, gewiß ein 9faches seyn.

§. 5.

Da man sich nun eben so eine jede andere durch dekadische Ziffern geschriebene Menge von Einheiten als ein Aggregat aus denjenigen einzelnen Mengen vorstellen kann,
welche

welche eine jede, zur Ausdrückung der ganzen Menge hingeschriebne Ziffer, Kraft ihrer Stelle, ausdrückt; so müssen auch alle Einheiten, welche nebst der Ziffersumme die ganze Menge ausmachen, eine 9fache, durch 9 theilbare Menge seyn. Z. B. 301 ist $= 9F + 4$. Ferner ist z. B. auch die Menge $(241 + 26) = 9F + 14$; denn das hier Behauptete ist nicht etwa bloß auf solche Mengen eingeschränkt, die durch eine dekadische Reihe ausgedrückt sind.

§. 6.

Ist daher die Ziffersumme selbst eine durch 9 theilbare Menge von Einheiten, so ist auch die ganze durch diese Ziffern geschriebene Menge durch 9 theilbar. Z. B. 980541 ist eine durch 9 theilbare Menge, weil die Summe der Ziffern, wodurch sie geschrieben ist $= 9 + 8 + 5 + 4 + 1 = 3 \cdot 9$ ist. Eben so ist die Menge $(102 + 15)$ eine durch 9 theilbare Menge, weil die Summe der Ziffern, wodurch diese Menge geschrieben ist, nämlich $1 + 2 + 4 + 5 = 1 \cdot 9$, also selbst durch 9 theilbar ist.

§. 7.

Ist dagegen die Ziffersumme nicht durch 9 theilbar; so wird nicht nur die durch diese Ziffern ausgedrückte Zahl durch 9 nicht theilbar seyn; sondern der Rest, welcher von der Ziffersumme übrig bleibt, nachdem man davon so oft als möglich die Zahl 9 abgezogen hat, dieser Rest ist zugleich eben derselbe Rest, der übrig bleibt, wenn man die Zahl selbst durch 9 dividirt.

Z. B. in 91048 ist die Ziffersumme $= 2 \cdot 9 + 4$. Versucht man nun durch 9 in diese Zahl Ein und neunzig tausend und acht und vierzig zu dividiren; so findet man den Quotienten 10116 $\frac{4}{9}$.

Die

Die ganze Behauptung folgt sehr leicht aus §. 4. Weil sie aber in der Folge beständig gebraucht wird; so wollen wir ihre Gründe noch einmahl zusammenstellen.

Es sey einer ganzen Zahl N Ziffersumme $= \alpha$; so ist nach §. 5. $N = 9 \cdot F + \alpha$. Nun sey $\alpha = 9 \cdot f + a$, worin nämlich, wenn α selbst schon kleiner als 9 ist, $f = 0$, sonst aber $f = 1$ oder $= 2$ oder irgend eine andre ganze Zahl wird: so hat man, was für eine ganze Zahl auch N bedeuten mag, allemahl

$$N = 9 \cdot F + 9 \cdot f + a, \text{ daher } \frac{N}{9} = F + f + \frac{a}{9} \text{ oder}$$

wenn man durch 9 in N dividirt, so bleibt offenbar a als Rest übrig, und dieses a ist, da $\alpha = 9 \cdot f + a$ gesetzt würde, eben der Rest, den man aus der Ziffersumme erhält, wenn man von ihr die größte in ihr enthaltene 9fache Menge $9 \cdot f$ abzieht.

§. 8.

Erklärung.

Der Rest, welcher zurück bleibt, nachdem man von einer Zahl N das größte Neunfache, was in ihr steckt, abgezogen hat, heißt ihre Probezahl des Neunfachen. So ist z. B. 3 die Probezahl von 12; 5 von 14.

Ist N kleiner als 9, so ist N selbst schon ihre Probezahl des Neunfachen: also 8 die Probezahl von 8; $8 \frac{1}{2}$ die Probezahl von $8 \frac{1}{2}$.

Ist N selbst ein 9faches, wie 27, 36 u. dergl.; so erlaubt man sich zu sagen, daß 0 ihre Probezahl sey *).

§. 9.

*) Man bringt auf diese Weise, einen eigentlich verneinenden Satz, 27 hat gar keine Probezahl, unter die Form

§. 9.

L e h r s a t z .

Zwo Zahlen N und M können einander nicht gleich seyn, wenn nicht ihre Probezahlen einander gleich sind.

B e w e i s .

Es sey n die Probezahl der N , so ist $N = 9F + n$ und m die Probezahl der M , so ist $M = 9f + m$. Also kann nicht $N = M$ seyn, wo nicht $9F + n = 9f + m$ folglich auch $n - m = 9f - 9F$ ist.

Da nun $9f - 9F$ als Differenz zweier 9fachen Zahlen, entweder selbst eine 9fache Zahl, oder $= 0$ seyn muß; so muß auch $n - m$ entweder selbst eine 9fache Zahl, oder $= 0$ seyn. Das erste streitet wider die Voraussetzung, daß n und m Probezahlen, also kleiner als 9 seyn sollen. Das letztere, $n - m = 0$, erfordert, daß $m = n$ sey. W. z. B.

§. 10.

Form der bejahenden Sätze, damit einerley Regeln für beyde passen. Ein sehr gewöhnliches Verfahren in der Rechenkunst, daß man als eine Verkürzung des Vortrages wohl dulden kann. Anstößig wird es wohl darum nicht, weil alle Redensarten, die man bey der scheinbaren Rechnung mit 0 gebraucht, dieser Convention gleichförmig gebildet sind. Z. B. bey Anwendung der Regel in §. 11. wird jeder sagen: n mahl m giebt 0, wenn entweder n oder m oder beyde $= 0$ sind. Es ist hier der Ort nicht, über die innere Wahrheit dieser Redensart etwas zu sagen: ich hatte nur zu zeigen, daß man schon dazu gewöhnt sey, mit 0 wie mit einer Zahl zu rechnen.

§. 10.

Probe der Addition.

A) 89627 Die Ziffersumme der drey Reihen A, B und C
 B) 463 ist $8+9+6+2+7+4+6+3+4+2+1+1$.
 C) 4212 Zieht man davon 9 ab, so oft man kann;
 S) 94301 so bleibt 8 als die Probezahl der Menge
 übrig, welche durch diese 3 Reihen zusam-
 men genommen dargestellt wird, oder es ist diese
 Menge $= 9F + 8$ (nach §. 5.)

Soll nun S die Summe aus den 3 Reihen A, B und C seyn, so müssen die 5 Ziffern der Reihe S eben dieselbe Menge $= 9F + 8$ darstellen; und es muß daher die Probezahl von S ebenfalls 8 seyn. §. 9.

§. 10*.

So viel ist also ausgemacht: wenn die Probezahl von S mit der Probezahl von $A+B+C$ nicht einerley ist; so ist S nicht die Summe $A+B+C$, und man hat beym Addiren gefehlt. Aber umgekehrt ist es nicht gewiß, sondern nur wahrscheinlich, daß man richtig gerechnet habe, so bald die Probezahlen einerley sind. Denn wenn nur $S = 9f + a$ wäre, indem $A+B+C = 9F + a$ ist, so hätten beyde Mengen, S und $A+B+C$, einerley Probezahl, obgleich F und f um 1, 2 oder 3 u. s. w. von einander, also beyde Größen selbst um 1 . 9; 2 . 9 oder 3 . 9 u. s. w. überhaupt um irgend ein 9faches von einander abwichen.

Hätte man daher beym Addiren um irgend ein 9faches gefehlt; so würden diese Fehler durch solche Probezahlen nicht entdeckt werden. Hingegen wird der Fehler nicht unbemerkt bleiben, wenn er irgend einer von den übrigen acht, zwischen 2 neunfache 0 und 9; 9 und 18; 18 und 27 u. s. w. fallenden Zahlen gleich kommt.

G

Am

Am Ende dieses Stückes wird es genauer beurtheilt werden, wie groß die Wahrscheinlichkeit sey, daß man gar nicht gefehlt habe, wenn diese Probe zugetroffen hat.

§. 10.**

Probe der Subtraction.

Die beste und sicherste Probe der Subtraction ist ohne Zweifel, daß man die abgezogene Zahl zur gefundenen Differenz addirt, und nun darauf achtet, ob diese Summe der Zahl gleich sey, von der man abgezogen hatte. Indessen lernt man zugleich die negativen Probezahlen kennen, wenn man fragt, wie man auch vermittelst der Reste übers Neunfache die Richtigkeit der gefundenen Differenz prüfen könne.

Wenn man nun durch Subtraction der B von A die Zahl D gefunden hat; so fragt sich, ob wirklich $A - B = D$ sey. Indem also a, b und d die Probezahlen von A, B und D sind, oder

$A = 9F + a$, $B = 9f + b$ und $D = 9\mathcal{F} + d$ ist; so muß $9F + a - 9f - b = 9\mathcal{F} + d$ seyn.

Ist nun 1) $b < a$, so giebt offenbar $a - b$ an, wie viel $A - B$ übers Neunfache enthält. Es giebt also $a - b$ die Probezahl des $A - B$, und es muß $a - b = d$ seyn, wenn $A - B = D$ seyn soll, nach §. 9.

Ist aber 2) $b > a$, folglich $a - b$ eine negative Zahl $= -n$; so fehlt dem $A - B$, als $= 9F - 9f - n$, gerade n, um eine ganz neunfache Menge zu seyn. Es hält daher $A - B$ gerade $9 - n$ über sein größtes Neunfache $9F - 9f - 9$. Also ist $9 - n$ seine Probezahl,
und

und es muß nunmehr $9 - n = d$ seyn; wenn $A - B = D$ seyn soll.

$$\begin{array}{r} 3. \text{ B. von } A = 2000 \\ \text{abgezogen } B = 817 \\ \hline \text{giebt } D = 1183. \end{array}$$

Hier ist $a = 2$, $b = 7$; also auch $a - b = -5$ und die Probezahl von $A - B$ deshalb $= 9 - 5 = 4$. Nun ist übrigens d ebenfalls $= 4$.

Wir werden indessen die negativen Probezahlen in der Folge vermeiden. Das hätte auch hier geschehen können, indem man statt $A - B = D$ nur die Gleichung $A = B + D$ probiren kann, woben man fragt, ob a der Probezahl von $(b + d)$ gleich sey; nach §. 10.

§. 11.

Indem n und m kleiner als 9 sind; sey eine Zahl $N = 9F + n$, eine andere Zahl $M = 9f + m$; so ist in ihrem

$$\text{Producte } NM = 9 \cdot 9 F f + 9 f n + 9 F m + n m$$

diejenige Menge von Einheiten, so nebst $n m$ das Product $N M$ ausmacht, ganz gewiß ein 9faches, indem sie, nach der eben ausgeführten algebraischen Multiplication, durch 3 neunfache Theile kann ausgedrückt werden.

Die Probezahl des Productes $N \cdot M$ muß daher mit der Probezahl der Größe $n m$, d. i. des Productes aus den Probezahlen der beyden Factoren, einerley seyn.

Hieraus ergibt sich sogleich die folgende

§. 12.

Probe der Multiplication.

Ein Factor sey	3405671	dessen Probezahl 8
der andere Factor sey	457	 7; so
	23839697	ist $7 \cdot 8 = 56$ und davon
	17028355	die Probezahl 2; und des
	13622684	
Productes	1556391647	Probezahl ist ebenfalls 2.

Nachdem man nämlich des ersten Factors Probezahl $n = 8$ durch des andern Factors Probezahl $m = 7$ multiplicirt hat; so erhält man $n \cdot m = 56$, dessen Probezahl $= 2$ gefunden wird, weil die Ziffersumme $5 + 6 = 9 + 2$ ist. Da nun das im Exempel gefundene Product dieselbe Probezahl 2 gibt; so ist man versichert, daß man beim Rechnen entweder gar nicht, oder gerade um 9 oder 2 . 9 oder 3 . 9 u. s. w. gefehlt habe.

§. 13.

Probe der Division.

Wenn D in A dividirt den Quotienten Q gibt; so muß $D \cdot Q = A$, folglich (§. 11.) $P(dq) = a$ seyn, indem d, q und a die Probezahlen von D, Q und A sind, und der Buchstab P so viel als Probezahl, also $P(d \cdot q)$ die Probezahl von $d \cdot q$ bedeutet.

§. 14.

Es enthalte aber der Quotient auch einen Bruch, und sey also $Q = G + \frac{Z}{N}$ indem G die ganze im Quotienten

ten

ten steckende Zahl, Z den Zähler und N den Nenner des Bruches bedeutet; so muß

$$D \cdot \left(G + \frac{Z}{N}\right) = A, \text{ folglich } D \cdot (GN + Z) = AN;$$

Also (§. 9.) $P(D \cdot (GN + Z)) = P(AN)$ seyn.

Nun ist, wenn wiederum d, n, g, z , die Probezahlen von D, N, G, Z bedeuten, nach §. 11 und 10. dieser Gleichung linke Seite $= P(d \cdot P(GN + Z)) = P(d \cdot (P(gn + z)))$ und ihre rechte Seite $= P(an)$. Also ist $P(d \cdot P(gn + z)) = P(an)$. (q)

§. 15.

Anmerkung.

Die gewöhnliche Regel der Rechenmeister verschafft gerade die beyden Seiten der Gleichung (q. Denn wenn D in A dividirt, gegeben hat $G + \frac{Z}{N}$; so lehren ihre Regeln folgendes Verfahren.

Aus $G + \frac{Z}{N}$ nehmet die (so genannte) Probezahl $g + \frac{z}{n}$; machet daraus die ihr gleiche Größe $\frac{ng + z}{n}$ und nehmet $\frac{P(ng + z)}{n}$ welches nun wiederum die Probezahl des Quotienten genannt wird. Machet ferner $d \cdot \frac{P(ng + z)}{n}$ und nehmet $\frac{P(d \cdot P(ng + z))}{n}$ des

des Dividendi Probezahl sey a ; so sehet nun zu, ob
 $P(d \cdot P(n g + z)) = P n a$ sey.

Auf solche Weise hat man allerdings am Ende die
 beyden Probezahlen erhalten, welche nach 2) einander
 gleich seyn müssen.

Ich muß aber gegen diesen Proceß folgende Anmer-
 kungen machen,

1) Scheint er sich auf die Vorstellung zu gründen,
 daß man eines Bruches Probezahl erhalte, wenn man
 die Probezahlen des Zählers und Nenners wiederum in
 Form eines Bruches schreibt; und diese Vorstellung
 wäre falsch.

Ein Bruch, so lange sein Werth unter 2 bleibt,
 ist allemahl selbst seine Probezahl, wie es sogleich aus der
 Erklärung §. 8. erhellet, die doch dem ganzen Gebrauche
 und den wahren Gründen der Probezahlen unmittelbar
 angemessen ist. Daher ist nun auch, z. B. von $28 \frac{101}{102}$
 die Probezahl $= 1 + \frac{101}{102}$, denn so viel enthält jene
 Zahl über 27 , das größte 9 fache, was in ihr steckt, und
 nicht $= 1 + \frac{2}{5}$, wie die Rechenmeister zu behaupten
 scheinen.

In so fern gleichwohl das $\frac{z}{n}$ für $\frac{Z}{N}$ nach der eben
 gezeigten Operation eben das zu leisten scheint, was man
 von der Probezahl des Bruches $\frac{Z}{N}$ analogisch mit den
 Probezahlen der ganzen Zahlen zu erwarten hätte, in so
 fern könnte man es etwa die Scheinprobezahl des Bruches
 nennen; fast eben so, wie man den Zerstreungspunct
 der

der Hohlgläser einen Scheinfocus (focum virtuale) zu nennen pflegt, aber nicht mit eben so gutem Erfolge. Denn

2) trifft man bey diesem Verfahren nicht selten auf sonderbare Ausdrücke. Wenn z. B. N eine g -fache Zahl ist, so erhält man $\frac{P(ng+z)}{n}$ unter der Form $\frac{z}{0}$. Sollte

diese unendlich große Größe denjenigen nicht stutzig machen, der sie für die Probezahl eines endlichen Bruches gebraucht? Oder schlüpft man auch über dies Wunder der Arithmetik ohne Anstoß fort? Manche arithmetische Schriftsteller machen sich freilich, trotz den dunkelvollsten Theosophen einen großen Ruhm daraus, noch weit bekanntere Erscheinungen der Arithmetik als heilige, unzugängliche Geheimnisse zu verehren, die doch ganz offenbare, nothwendige Folgen des willkührlichen von Menschen geschaffenen dekadischen Systemes sind.

3) Ist die ganze Regel sehr mühsam anzuwenden. Ich schlage statt dessen, also auch zugleich statt 2), in §. 14. vor, die folgende

Erleichterte Probe der Division.

§. 16.

Ist der Nenner des Bruches im Quotienten mit dem Divisor einerley, welches doch vor angestellter Verkleinerung des Bruches allemahl der Fall ist; so hat man

$$\text{aus } \frac{A}{D} = G + \frac{Z}{D} \text{ die Gleichung } A = GD + Z$$

$$\text{folglich } a = P(gd + z)$$

welches eine leichte Probe giebt. Z. B.

wenn

wenn 32 in 94818 dividirt, giebt $2963 + \frac{2}{32}$

so ist $d = 5$; $a = 3$; $g = 2$; $z = 2$.

Nun ist $P(2 \cdot 5 + 2) = P_{10+2} = 3$, also $= a$;
und man hat entweder gar nicht oder gerade um ein 9fa-
ches gefehlt.

§. 17.

Probe der verkleinerten Brüche.

Es sey aus $\frac{Z}{N}$ durch Aufhebung der verkleinerte

Bruch $\frac{3}{N}$ entstanden, so muß $\frac{Z}{N} = \frac{3}{N}$ folglich $Z N =$
 $3 N$, folglich nach §. 9 und 11, $P(z n) = P(3 n)$
seyn, indem n und 3 die Probezahlen von N und 3 be-
deuten, so wie z und n von Z und N .

§. 18.

Probe der vierten Proportionalzahl.

Wenn nach der Proportion $D : B = C : G + \frac{N}{D}$

das Facit der Regel de tri $G + \frac{N}{D}$ richtig gefunden ist;

so muß

$$D \cdot \left(G + \frac{N}{D} \right) = B C \text{ oder } D G + N = B C \text{ seyn.}$$

Die Probezahl der linken Seite in dieser Gleichung
ist $P(d g + n)$, die der rechten Seite aber $P(b c)$.
Da nun die Probezahlen zweier gleichen Größen einan-
der gleich seyn müssen (§. 9.); so muß $P(d g + n) =$
 $P(b c)$ seyn.

Wenn

Wenn das Facit keinen Bruch enthält, also $N = 0$ ist; so hat man $P(dg) = P(bc)$.

Eine Anwendung davon auf die Regel de tri und ähnliche Rechnungen soll §. 22. gegeben werden; nachdem wir zuvor das Nöthigste gesagt haben von den

Probegrößen der benannten Zahlen.

§. 19.

Wenn ein Rechenmeister behauptet, daß 1 Rthlr. in der Probe nur 6 gr., ein gr. aber nur 3 pf. gelte; so hat das folgenden Verstand. Wenn ich den Thaler als 24 Groschen betrachte, so ist seine Probezahl 6, weil in 24 gr. außer der darin enthaltenen 9fachen Menge noch 6 gr. stecken. Und wenn ich den gr. als 12 pf. betrachten muß, wie denn das sehr ofte nöthig ist; so ist seine Probezahl $= 3$, weil gerade 3 übers 9fache in 12 steckt.

Ein Thaler hatte also 6 Probegroschen. Um nun ferner die Probepfennige dieser 6 gr. zu finden, schließt man auf folgende Weise.

Da die Menge von Pfennigen 9fach ist, welche nebst 3 pf. in einem gr. steckt; so muß auch die Menge von Pfennigen 9fach seyn, welche nebst 6. 3 pf. in 6 gr. steckt. Da nun 6. 3 oder 18 selbst ein 9faches ist; so müssen auch 6 gr. ganz und gar eine 9fache Menge von Pfennigen enthalten, und 6 gr. haben demnach 0 Probepfennige.

Also hat auch jeder Thaler ebenfalls 0 Probepfennige, folglich auch jede beliebige Anzahl von Thalern ebenfalls 0 Probepfennige.

§. 19.

1 Rthlr. hatte 6 Probegroschen. Von 68 Rthlr. findet man darnach die Probegroschen durch folgende Schlüsse, worin 9 F wie immer eine jede 9fache Menge bedeutet.

Es ist $68 \text{ Rthlr.} = 9 \text{ F Rthlr.} + 5 \text{ Rthlr.}$ Da nun $5 \text{ Rthlr.} = 9 \text{ F gr.} + 5 \cdot 6 \text{ gr.} = 9 \text{ F gr.} + 30 \text{ gr.} = 9 \text{ F gr.} + 3 \text{ gr.}$ sind; so müssen auch $68 \text{ Rthlr.} = 9 \text{ F Rthlr.} + 9 \text{ F gr.} + 3 \text{ gr.}$ seyn, also (da die 9fache Menge von Thalern auch eine 9fache Menge von Groschen seyn muß) 3 Probegroschen haben.

Um etwa von 68 Rthlrn. 17 gr. die Probegroschen zu erfahren, schließt man:

68 Rthlr. haben 3 Probegroschen,

17 gr. haben 8 Probegroschen.

Folglich ist 9fach die Menge von gr. welche nebst $8 + 3$ oder 11 gr. in 68 Rthlr. 17 gr. steckt; oder es ist $68 \text{ Rthlr. 17 gr.} = 9 \text{ F} + 11 \text{ gr.} = 9 \text{ F} + 9 + 2 \text{ gr.}$ und daher 2 gr. die gesuchte Zahl der Probegroschen.

§. 20.

Nach denselben Schlüssen ist 9fach die Anzahl von Pfennigen, so in $142 \text{ Rthlr.} + 14 \text{ gr.} + 8 \text{ pf.}$

nebst $0 \text{ pf.} + 6 \text{ pf.} + 8 \text{ pf.} = 14 \text{ pf.}$

steckt. Da nun $14 = 9 \text{ F} + 5$ ist; so stecken auch in der genannten Summe 5 pf. über ihr größtes 9fache.

Macht man die genannte Summe zu lauter Pfennigen; so erhält man 41072 pf. Die Probegröße daraus ist nun ebenfalls $= 5 \text{ pf.}$: und diese Uebereinstimmung mit den vorhin gefundenen Probepfennigen dient zu einiger Bestätigung, daß man die richtige Anzahl der Pfennige gefunden habe.

Dies

Dieselbe Bestätigung leisten offenbar diese beyden Probegrößen, wenn man umgekehrt aus den gegebenen 41072 pf. die in ihnen steckenden Rthlr. und Groschen durch Division gefunden hätte.

§. 21.

In eben den §. 19. erklärten Verstande muß 1 Pf., als 32 Loth betrachtet, 5 Probeloth, und so wie diese 5 Lothe, oder 20 Quentchen, auch 2 Probequentchen enthalten. Es wird keine Schwierigkeit haben, auch bey andern benannten Zahlen solche Probegrößen zu finden. Ich will nur noch die in §. 15. versprochene Anwendung zeigen.

§. 22.

Man habe berechnet:

wenn 1 Pf. kostet 3 Rthlr. 8 gr.; so müssen 6 Quentchen kosten 3 gr. 6 pf.

Man mag nun das Facit durch die Kunstgriffe der Kettenregel oder der welschen Pratik, oder ohne solche Verkürzung durch die gemeine Regel de tri gefunden haben; in jedem Falle muß das Facit die 4te Proportionalgröße zu den drey gegebenen Sätzen seyn.

Daher kann man die Probe nach der Formel §. 18. anstellen, wenn man den 1sten Satz (1 Pf.) wie den dritten (6 Quentchen) als Quentchen, und den zweyten Satz (3 Rthlr. 8 gr.) wie den vierten (3 gr. 9 pf.) als lauter Pfennige betrachtet; weil in jeder Proportion nur 2 verschiedene Namen oder Einheiten Statt finden können. Diesem nach findet man

für

für 1 Pf. : 3 Rthlr. 8 gr. = 6 Qt. : 3 gr. 9 pf. die Pro-
 begrößen 2 Qt., 6 pf. 6 Qt. 0 pf. welches
 b c g sind in §. 18.

Nun fragt sich nach der letzten Formel in §. 18. ob
 $P(2. 0) = P(6. 6)$? d. i. ob $P 0 = P 36$ sey.
 Und dies ist zu bejahen, da beyde = 0 sind.

§. 23.

Probe der Kettenregel.

Wenn das vorige Exempel auch nach der Kettenregel berechnet wäre, so könnte dessen Probe doch eben so angestellt werden, als ob es nach der Regel de tri wäre berechnet worden. Denn man könnte die Probegrößen 2 Quentchen, 6 pf., 6 Quentchen, 0 pf. ohne Mühe schaffen; wovon zween und zween völlig einerley Namen führen; konnte sich also denken, daß die beyden im Exempel gegebenen Gewichte so wohl, als das gegebne und gesuchte Geld in einerley Namen ausgedrückt und demnach die Zahl des gesuchten Geldes als die vierte Proportionalzahl gefunden wäre. Kommen aber in einem Exempel Münzsorten von verschiedener Valute, oder auch Gewichte und Ellenmaße von verschiedener Würde, als Eöllnische und Lübeckische Pfunde, Hamburger und Berliner Ellen u. d. vor; so würde es öfters sehr viele Mühe und Aufmerksamkeit erfordern, die 4 Probezahlen dergestalt zu finden, daß die erste und dritte, die zweite und vierte wiederum gleiche Namen von einerley Würde führten, und daher als die Probezahlen von vier solchen Größen könnten betrachtet werden, wovon man die vierte, nach der Proportionalregel, aus den 3 ersten hätte finden können. Will man dennoch auch bey solchen Aufgaben der Kettenregel, die Probezahlen gebrauchen; so

so mögte noch dasjenige Verfahren das leichteste und rathsamste seyn, was sich aus folgenden Betrachtungen ergiebt.

Wenn A die Factoren in der
B Divisorencolumne
C ne, und fer
2c.
ner H die Factoren in der
I Multiplicatoren
K columnne sind, und
2c.

nach geschehener Aufhebung zurückbleiben, in der ersten

etwa die Factoren $\frac{A}{B}$ in der zwoten diese, $\frac{H}{I}$, so ist

richtig aufgehoben, wenn $\frac{HIK}{ABC} = \frac{H}{I}$ bleibt; und

dann muß nach §. 17. seyn $P(hikabc) = P(hiab c)$; indem die kleinen Buchstaben die Proben bezahlen der gleichnamigen größern bedeuten.

Nachdem diese Probe zugetroffen, und uns mit ziemlicher Wahrscheinlichkeit versichert hat, daß wir im Aufheben keinen Fehler begangen haben; so ist nun noch die Frage, ob das Facit, das man nunmehr durch die Division der $\frac{A}{B}$ in $\frac{H}{I}$ findet, wirklich der richtige

Quotient sey. Das Facit heiße $G + \frac{Z}{AB}$, worin also

$\frac{A}{B}$ den Divisor D in §. 16. und $\frac{H}{I}$ den dortigen Dividendus A vorstellt; so ist nach der Formel in §. 16. die Probefrage,

ob $P(hi) = P(g. P(ab + z))$ sey.

Hieben

Hiebei wird voraus gesetzt, daß sich die Zahlen des Facit nur auf einerley Einheit beziehen, und zwar auf eben dieselbe, welche in dem Fragegliede vorkommt. Z. B. wenn gefragt ist, wie viel Groschen kostet? zc. so giebt G die Anzahl der ganzen Groschen und $\frac{Z}{AB}$ einen Bruch von Groschen an.

Enthielte das Facit schon verschiedene Namen, z. B. Groschen und Pfennige, so müßte man die Probegröße dieser benannten Zahlen nach ihrem kleinsten Namen, also ihre Probepfennige suchen, und wenn dann im Fragegliede, z. B. Groschen vorkämen, so müßte man darin statt wie viel Groschen schreiben: wie vielmahl 12 Pfennige; so daß zu den Probegrößen der Divisorenkolumne noch die Probezahl 3 hinzu käme. Dies ist langweilig, und überhaupt ist dergleichen Probe bey der Kettenregel viel zu mühsam. Abhandela mußte ich sie hier, weil die gewöhnlichen Vorschriften der Rechenbücher auch hierin sehr undeutlich sind.

Statt der bisher abgehandelten Proben, die sich auf das 9fache einer Zahl beziehen, pflegt man auch den Ueberschuß über das 11fache, was in einer Zahl steckt, als ihre Probegröße zu gebrauchen. Ich will die Regeln und ihre Gründe kürzlich vorstellen.

§. 25.

Erklärung.

Wenn eine Zahl $N = 11F + n$ ist, so daß n den Ueberschuß über das 11fache der Zahl N bedeutet, und daher kleiner als 11 ist: so heißt nunmehr n die Probezahl von N , in Beziehung auf das 11fache. Ich will sie daher

daher kurz die Probezahl des 11fachen nennen, so wie die §. 8. erklärte, die Probezahl des 9fachen genannt wurde.

§. 26.

Diese 11fache Probezahl wird nach folgenden Regeln gefunden:

No. 1. 3. B. bey der Zahl 381069.

Man addirt die Ziffern der ungeraden Stellen

$$9 + 0 + 8, \text{ giebt } 17$$

davon die Ziffersumme der geraden $6 + 1 + 3$ oder 10

abgezogen, läßt den Rest 7

und dieser Rest ist die Probezahl, oder es ist $381069 = 11 F + 7$.

No. 2. Wäre dieser erste Rest selbst noch größer als 11, so hätte man sein 11faches wiederum durch Wiederholung der Regel No. 1. davon abzusondern. 3. B. von 7281809 ist die Ziffersumme der ungeraden Stellen $= 32$, der geraden $= 3$, also der Rest $32 - 3 = 29$. Mit 29. nach No. 1. verfahren giebt nun $9 - 2 = 7$. und dies ist die gesuchte Probezahl. (s. folg. S. Anm.)

No. 3. 3. B. In 34260 ist die Ziffersumme aus den ungeraden Stellen $= 5$, aus den geraden aber $= 10$, und es läßt sich daher diese von jener nicht abziehen. In solchen Fällen setzt man zu jener so viel 11faches hinzu, bis sich diese davon abziehen läßt. Hier, 3. B., ist es genug 1. 11 hinzuzusetzen. Dann hat man $11 + 5$ oder 16; davon abgezogen die 7 läßt 9, als die gesuchte Probezahl.

Man

Anm. Man schließt nämlich in No. 2. fürs erste, daß $7281809 = \text{ein } 11\text{faches} + 29$ sey, und findet ferner, daß $29 = \text{ein } 11\text{faches} + 7$ sey; woraus man allerdings schließen kan, daß auch $7281809 = 11 F + 7$ sey.

Sollte der Rest abermahls größer als 11 seyn, so müßte man die 1ste Regel abermahls auf ihn anwenden.

§. 27.

Lehn s a t z.

Da man 10^m als $(11 - 1)^m$ betrachten kann, so hat man, wenn m eine ganze positive Zahl ist, nach dem binomischen Lehrsatz $10^m =$

$11^m - {}^m A. 11^{m-1} + {}^m B. 11^{m-2} - {}^m C. 11^{m-3} \dots \mp m. 11^n \mp 1$,
so daß dieser Reihe letztes Glied $= 1$, und jeder ihrer Coefficienten eine ganze Zahl ist, nach II. §. 20. und §. 25.

Das Gesetz, wonach die Zeichen der Glieder abwechseln, erhellet sehr leicht aus der allgemeinen binomischen Formel II. §. 18., indem man statt dessen a hier $- 1$ zu setzen hat; und es ergiebt sich daraus, daß das letzte Glied entweder $+ 1$ oder $- 1$ wird, je nachdem m entweder eine gerade oder eine ungerade Zahl bedeutet.

§. 28.

Z u s a t z.

Die Summe aus allen Gliedern der Reihe, ohne das letzte, besteht aus lauter 11fachen Theilen, und ist daher selbst ein 11faches. Es muß ferner $10^m = 11 F + 1$ seyn, wenn m eine gerade, und $10^m = 11 F - 1$ seyn, wenn m eine ungerade Zahl ist.

§. 29.

§. 29.

Folgerung.

Also ist auch $a \cdot 10^m = 11F + a$, wenn m eine gerade Zahl, u. dagegen $a \cdot 10^m = 11F - a$, wenn m eine ungerade Zahl ist.

§. 30.

Anwendung.

Es seyen H, Z, t, h, z, e die Ziffern, welche in rückwärts gelesener Ordnung nach und nach an der Einer: Zehner: Hunderter: Tausender: Zehntausender: Hunderttausender: Stelle *ic.* in einer beliebigen, durch des kadiſche Ziffern geschriebenen, Zahl N vorkommen;

ſo iſt $N = H \cdot 10^5 + Z \cdot 10^4 + t \cdot 10^3 + h \cdot 10^2 + z \cdot 10^1 + e$,

also nach §. 29. $N = 11F + Z + 11F + h + e$

$+ 11F - H + 11F - t + 11F - z$.

Da nun mehrere 11fache, zusammen addirt, wiederum ein 11faches geben; ſo wird

$N = 11F + v - g$ ſeyn, indem $v = e + h + Z$, und $g = z + t + H$, also v die Zifferſumme aus den ungeraden, und g die Zifferſumme aus den geraden Stellen bedeutet.

§. 31.

11fach iſt also die Menge von Einheiten, welche auſſer $v - g$ in N ſteckt. Hieraus ergibt ſich ſogleich, daß jede Zahl N ganz und gar aus einem 11fachen beſtehet, durch 11 theilbar iſt; wenn $v - g = 0$ oder ſelbſt ein 11faches gibt.

§

§. 32.

Gibt aber $v - g$ eine positive Zahl, und ist diese Zahl

1) kleiner als 11; so ist $v - g$ sogleich selbst die §. 25. erklärte Probezahl. Daher die Regel No. 1. in §. 26.

2) Ist diese Zahl $v - g$ selbst noch größer als 11; so muß man von $v - g$ selbst wiederum ihre Probezahl suchen, und diese wird dann zugleich die Probezahl von N seyn. Denn es sey $v - g = 11 \cdot f + n$, so hat man $N = 11F + v - g = 11F + 11f + n$. Daher die Regel No. 2. §. 26.

3) Ist endlich $v - g$ eine negative Zahl, also v kleiner als g ; so setze man das kleinste 11fache $11f$ zu v hinzu, woben noch $11f + v - g = d$ gibt, so daß d positiv und doch kleiner als 11 wird. Dann ist auch $v - g = d - 11f$; also da $N = 11F + v - g$ war, auch $N = 11F - 11f + d$, und demnach d die verlangte Probezahl von N . Daher die Regel No. 3. §. 26.

Wenn man die Gründe überdenkt, woraus im vorigen die Proberegeln für die Addition, Multiplication, Division u. s. w. hergeleitet sind; so wird man leicht einsehen, daß wir darin auch überhaupt ein unbestimmtes 11fache statt des 9fachen hätten nennen können. Daher gelten dieselben Regeln auch für die Probe mit den 11fachen, und nur die Art, wie man nunmehr für beliebige Zahlen A, B, C u. s. w. die 11fachen Probezahlen a, b, c u. s. w., nach §. 26. findet, ist von dem Verfahren verschieden, wodurch vorher die 9fachen Probezahlen gefunden

den wurden. Die Probegrößen des 11fachen für benannte Zahlen, findet man z. B. auf folgende Weise:

1 Rthlr. hat 24 gr., also nach §. 26. No. 1. hat er $4 - 2$, d. i. 2 Probegroschen.

1 gr. gilt 12 pf., und hat demnach $2 - 1$, d. i. 1 Probepfennig.

Für 1 Pf. von 32 Loth findet man, nach §. 26. No. 3., folgende $11 + 2 - 3$, d. i. $13 - 3$ oder 10 Probeloth. Diese 10 Loth halten 40 Quentchen, also $11 + 0 - 4 = 7$ Probequentchen.

Im Exempel des §. 22. nämlich:

1 Pf. : 3 Rthlr. 8 gr. = 6 Quentchen : 3 gr. 9 pf.

würde man folgende 11fache Probegrößen finden:

7 Quentch.	3 Pfennige	6 Quentch.	1 Pfennig als
die d	b	c	g in §. 18.

Nun muß nach der dortigen Regel $P(dg) = P(bc)$ seyn; also hier $P7 = P18$, d. i. $7 = 7$.

§. 34.

Allgemeine Anmerkung für die Probe der
Decimalbrüche.

Man mag aus den gegebenen Zahlen A, B, C u. die gesuchte Zahl N hervorbringen, durch was für Rechnungsarten man will; es mag nämlich $A + B = N$ oder

$AB + C = N$ oder $\frac{AB}{C} + D = N$ seyn sollen u. dergl.

§ 2

in

in jedem Falle gibt es zwischen den Zahlen A, B, C etc. und N eine Gleichung, die es darstellt, was N in Beziehung auf die gegebenen oder andere durch sie bestimmte Zahlen eigentlich seyn soll, ihr Product oder ihre Summe u. dergl. Kommen nun in dieser Gleichung, die wir überhaupt σ) nennen wollen, Decimalbrüche vor; so läßt sich doch aus ihr allemahl eine andere Gleichung ξ) machen, worin nur ganze Zahlen vorhanden sind. Nun kann man die Gleichung ξ) mittelst der Probezahlen prüfen, und dann rückwärts schließen, daß σ) richtig seyn müsse, wenn es ξ) ist, hier eigentlich, daß man σ) mit eben der Wahrscheinlichkeit für richtig halten müsse, womit man aus dem Zutreffen der Probezahlen die Richtigkeit der ξ) glaubt. Z. B. um zu prüfen, ob die aus 3, 4 und 2, 5 gefundene Zahl 8, 5 das richtige Product sey, fragt sich eigentlich, ob $(3, 4) \cdot (2, 5) = 8, 5$ sey, dies ist die Gleichung σ). Nun multiplicire man beyde Seiten durch 10, so hat man zu fragen, ob $34 \cdot (2, 5) = 85$ sey. Wiederum durch 10 multiplicirt, gibt die Frage, ob $34 \cdot 25 = 850$? Dies ist nun die verlangte Gleichung ξ), und man prüfet diese ξ) statt der σ). Denn wenn ich mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit behaupten kann, daß $34 \cdot 25 = 850$ sey; so muß ich mit eben der Wahrscheinlichkeit auch glauben, daß $(3, 4) \cdot (2, 5) = 8, 5$ sey.

§. 35.

Prüfet man durch die Probezahlen des Neunfachen: so braucht man die Gleichung ξ) nicht erst wirklich zu machen; sondern man erhält dafür sogleich die Probezahlen, wenn man sie für die in σ) vorkommenden Zahlen so nimmt, als ob in diesen Zahlen gar kein Einheitscomma vorkäme, gar kein Decimalbruch abgeschnitten wäre. Denn wenn M eine Zahl mit einem Decimalbruch von x Stellen

Stellen ist, also $10^x M = \mu$ wird, indem μ die ganze Zahl ist, welche die Ziffern in M ohne ihr Einheitskomma ausdrücken würden; so ist nun die Probezahl des Neunfachen von μ auch zugleich die Probezahl des Neunfachen von 10μ , von 100μ und überhaupt von $10^x \mu$, und man braucht daher nicht erst zu wissen, ob in der Gleichung $\S$) eigentlich μ oder 10μ oder 100μ u. dergl. vorkommen würde. Das im vorigen $\S$. gegebne Exempel dient sogleich zur Erläuterung. Wenn ich in den Zahlen der $\S$) gerade zu das Einheitskomma wegstriche; so erhielte ich freylich statt 8, 5 nur 85, da es doch eigentlich in $\S$) zu 850 wird. Allein die Probezahl des Neunfachen ist für 85 und 850 einerley. Die Probezahl des 11fachen hingegen würde $= 8$ für 85 und $= 3$ für 850 seyn. Es ist für diesen kurzen Gebrauch der Probezahlen des Neunfachen noch ein Beispiel ausgeführt, bey der folgenden

Probe der Wurzelrechnung.

$\S$. 36.

Wenn die Zahl W die Quadratwurzel von Q seyn soll; so muß $W W = Q$, folglich $P(w. w) = q$ seyn, indem w und q die Probezahlen von W und Q sind.

Darnach kann man also die für die Quadratwurzel gefundene Zahl prüfen; wenn beym Ausziehen derselben kein Rest von Q übrig bleibt, W also die vollkommene Quadratwurzel seyn sollte.

Bleibt aber ein Rest R und die Wurzel, so weit sie gefunden ist, heißt wiederum W ; so soll $W. W = Q - R$, also auch $W. W + R = Q$, und demnach $P(P(w. w) + r) = q$ seyn, indem r die Probezahl von R ist.

Soll

Soll w die Kubikwurzel von Q seyn; so muß $W.W.W = Q$, folglich $P(w.w.w) = q$ seyn. Ist W nur eine unvollkommene Kubikwurzel, bey deren Ausziehung noch der Rest R von Q zurück blieb; so hat man $W.W.W + R = Q$, folgl. $P(P(w.w.w) + r) = q$.

§. 37.

Sollten in den Zahlen W , R und Q , in einigen oder in allen, Decimalbrüche vorkommen; so könnte man dens noch bey der Probe des Neunfachen die Probezahlen gerade so nehmen und behandeln, als ob die Ziffern in W , R , Q lauter ganze Zahlen bedeuteten, als ob das Einheitscomma gar keine Decimalbrüche abschneitte.

Denn gesetzt, es wäre 3,46 als der Anfang der Quadratwurzel von 12 gefunden, woben der Rest 0,0284 von der Grundzahl 12 geblieben wäre,

also $(3,46) \cdot (3,46) = 12 - 0,0284$ seyn sollte,

folglich auch $\delta) (3,46) \cdot (3,46) + 0,0284 = 12$
so würde daraus folgen $\S) 346.346 + 284 = 120000$;

und rückwärts geschlossen, müssen die beyden ersten Gleichungen richtig seyn, wenn es die letzte ist. In dieser letzten aber hätte man lauter ganze Zahlen, und dabey zu fragen: ob

$$P(P(4.4) + 5) = P 120000$$

$$\text{d. i. } P(7 + 5) = 3$$

$$\text{d. i. } P 12 = 3 \text{ sey.}$$

Nun erhält man aber offenbar die eben gebrauchten Probezahlen für die Gleichung $\S)$ sogleich aus der $\delta)$; wenn man auf das Einheitscomma in den Zahlen der $\delta)$ gar nicht achtet. Wenn man daher diese so erhaltenen
Pro:

Probezahlen geradezu gebraucht; so prüft man eigentlich die Gleichung x): das thut aber offenbar die verlangten Dienste.

§. 38.

Die Probezahl einer vollkommenen Potenz

wird sogleich nach §. 11. gefunden, da eine Potenz A^n nichts anders als ein Product aus lauter gleichen Factoren $A \cdot A \cdot A$ u. an der Zahl n ist. Es muß nämlich $PA^n = P a^n$ seyn, indem a die Probezahl von A ist.

Hauptsächlich aber wird man sich bey etwas hohen Potenzen die Auffindung dieser Probezahl dadurch erleichtern, daß man A^n in mehrere Factoren zertheilt, die ebenfalls Potenzen von A sind; dann nur die Probezahlen aus diesen Factoren nach und nach in einander multiplicirt, und aus jedem entstandenen Producte sogleich einige 9fache absondert.

Aus der entwickelten binomischen Potenzengreihe für $(9F + b)^m$ erhellet sogleich, eben so wie der Satz in §. 1, daß $(9F + b)^m = 9F + b^m$ seyn. Wer diesen Satz, nebst §. 11. wohl inne hat, wird sogleich die Gründe des folgenden Verfahrens übersehen.

Im neuesten Stücke des Mercure de France wird erzählt, daß ein listiger Schlächter in Paris ein Kalb vom 47 Pfund ungemein vorthellhaft verhandelt habe. Er hatte sich eine Stecknadel für das erste Pfund, 2 Stecknadeln für das zweyte, ferner 4, 8, 16 Stecknadeln für das dritte, vierte, fünfte, und so weiter immer noch einmahl so viel für jedes folgende Pfund bedungen. Nach bekannter Summirung der geometrischen Reihe 1, 2, 4, 8, 16 u. wäre die Zahl der Stecknadeln $= 2^{47} - 1$. In jenem
Wochens

Wochenblatte soll diese Zahl $= 140607387875327$ angegeben seyn: es fragt sich, ob sie richtig berechnet sey?

Man schließe: es ist $2^{47} = (2^4)^{11} \cdot 2^3$, also weil $P 2^4 = 7$ und $P 2^3 = 8$ ist, auch $2^{47} = (9F + 7)^{11} \cdot 8 = 9F + 7^{11} \cdot 8$. Es wird daher gerade ein 9faches aus der Acht gelassen, wenn man Statt 2^{47} nur noch $7^{11} \cdot 8$ betrachtet.

Nun ist $7^{11} \cdot 8 = (7^2)^5 \cdot 7 \cdot 8 = (9F + 4)^5 \cdot 56 = 9F + 4^5 \cdot 2$. Wiederum das 9fache aus der Acht gelassen, hat man also nur noch $4^5 \cdot 2 = 4^2 \cdot 4^2 \cdot 4 \cdot 2 = (9F + 7) \cdot (9F + 7) \cdot 8 = (9F + 4) \cdot 8 = 9F + 5$.

Also ist $P 2^{47} = 5$, daher $P (2^{47} - 1) = 4$, und die oben angegebne Zahl ist falsch; weil ihre Probezahl nicht ebenfalls 4, sondern 5 ist.

Eine neue Berechnung gab dagegen die Zahl

140737488355327

und deren Probezahl ist wirklich 4.

Beurtheilung dieser Proben.

§. 39.

Wenn man unter den 9 Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 um eine jede beliebige, eben so leicht als um jede andere, unter den 9 Zahlen 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, wiederum um die eine so leicht als um jede andere von ihnen fehlen kann u. s. w.; so werden durch die Probe des Neunfachen 8 Fehler unter 9 gleich wahrscheinlichen ausgeschlossen, und nur der eine 9te Fehler bleibt noch möglich. Daher kann der Rechner 8 gegen 1 für seine Richtigkeit wetzen, so bald die Probe des 9fachen zugetroffen hat, und eben

eben so kann er 10 gegen 1 setzen, wenn die Probe mit dem 11fachen keinen Fehler zeigt. Beyde Wahrscheinlichkeiten $\frac{8}{9}$ und $\frac{10}{11}$ wären nicht sehr groß. Die letzte ist ferner nur um 2 Grade größer als die erste. Dagegen ist die Ausführung der Probe des 11fachen weit beschwerlicher als diejenige des 9fachen, und eben dadurch an sich selbst schon wieder mehreren möglichen Fehlern ausgesetzt. Man halte indessen sein Urtheil über die Beruhigung der beyden Proben und ihre Vergleichung zurück, bis auf §. 42 und 43.

§. 40.

Wollte man beyde Proben mit einander verbinden; so könnte man wegen der einen nur um ein 9faches, wegen der andern nur um ein 11faches, also wenn beyde zutreffen, nur um ein 99faches gefehlt haben, und dann 98 gegen 1 für die Richtigkeit seiner Rechnung werten.

§. 41.

Weil indessen diese beyden Proben zusammen genommen gar zu viele Arbeit machen, so mögte man darauf fallen, ob man nicht eine andere Probe mit jener des 9fachen verbinden, und dadurch die Beruhigung erhöhen könnte. So kann man sich, z. B., bey jeder Multiplication zweyer Zahlen sehr leicht überzeugen, daß man die erste Ziffer, an der Einerstelle, gewiß richtig habe. Wenn aber das ausgemacht ist; so kann man bey der ganzen Rechnung um keine ungerade Zahl, sondern nur etwa noch um ein Zwiefaches gefehlt haben. Denn nur bey der Multiplication der Einersziffern aus beyden Factoren ist ein Fehler möglich, der irgend eine ungerade Zahl ausmacht. So bald ich Zehner, Hunderte, Tausende u. durch Zehner, Hunderte u. oder auch nur durch Einer multiplicire; so kann ich nicht um etwas nicht Zwiefaches

ches fehlen, weil alsdann der eine Factor selbst schon ein Zwiefaches ist. Durch eine solche Probe des Zwiefachen würden also von denen, nach der Probe des Neunfachen noch möglichen, Fehlern die folgenden 1. 9, 3. 9, 5. 9 u. aufs neue ausgeschlossen, und man könnte nur noch um 2. 9 oder 4. 9 oder 6. 9 u. kurz, nur noch um irgend ein 18faches gefehlt haben.

Allein daraus folgt keines weges, daß die Verurtheilung aus den Proben des Zwiefachen und Neunfachen zusammen genommen, nun $\frac{17}{1}$ sey. Darum nicht, weil man bey dem Rechnen mit Decimalzahlen um die zwiefachen Zahlen, z. B. 10, 100, 1000 u. oder 30, 300, 3000 u. eben so leicht fehlen kann, als um die ungeraden 1, oder 3.

Eben so würden auch die Probezahlen des 4fachen allemahl zutreffen, man mögte in den Stellen der Hunderte, Tausende u. gefehlt haben, um welche Ziffer man wollte. Und die Probe des 8fachen würde nur für die 3 niedrigsten Decimalstellen die Fehler, welche kein 8faches sind, entdecken können.

Aus ähnlichen Gründen würden auch die Probezahlen der übrigen Vielfachen, so man auf eine leichte Weise finden könnte, ohne Nutzen seyn, und andere, wie des 7fachen, des 13fachen u. dergl. wären dagegen viel zu mühsam aufzusuchen.

§. 42.

Es ist aber nicht anzunehmen, daß man um 9 oder gar um 11 eben so leicht fehle, als um die kleineren Zahlen 1 oder 2 oder 3 u. wie wir in §. 38. der Kürze wegen vorausgesetzt haben. Daraus erhellet schon, daß die Verurtheilung,

higung, welche diese Proben leisten, wirklich größer sey, als wir sie angerechnet haben. Besonders aber erhöht sie sich aus folgender Betrachtung.

§. 43.

Die Neunerprobe gibt auch, selbst nach den in §. 34. nur geforderten Voraussetzungen, nur in dem Falle die geringe Beruhigung 8, ich meine den Glauben an die geringe Wahrscheinlichkeit $\frac{8}{9}$, wenn der Rechner ohne alle Probe nur 1 gegen 1 für die Richtigkeit seines Facit wagen dürfte. Gesezt aber, er wage dann schon 10 gegen 1 zu wetten; so kann er nach vollbrachter Neunerprobe schon 98 gegen 1, oder nach der 11ferprobe schon 120 gegen 1 wetten, (man sehe §. 45). Dagegen vermindert sich die Beruhigung gar sehr für einen schlechten Rechner, der ohne Probe nicht einmahl 1 gegen 1 wetten dürfte. Es wundert mich daher nicht, daß gerade sehr fertige Rechenmeister noch viel auf diese Proben halten, und sie thun bey einigen Rechnungsarten recht daran.

§. 44.

Vorzüglich mögte ich dergleichen Proben zur Prüfung großer Producte, nach §. 12. und der Wurzeln, nach §. 36. empfehlen. Nächstdem sind sie ohne große Mühe nützlich bey der Division, nach §. 16, bey den verkleinerten Brüchen, §. 17, und der 4ten Proportionalzahl, nach §. 18.

Was die Probegrößen der benannten Zahlen betrifft; so würde man sich dabey fast nur an die Probegahlen des 11fachen zu gewöhnen haben; weil die Probegrößen des 9fachen im niedrigern Nahmen bisweilen 0 werden. So ist für eine jede Menge von Thalern die Anzahl der Probepfennige des Neunfachen = 0, und diese Probepfennige werden also allemahl zutreffen, um was für eine Menge

Menge von Thalern man auch gefehlt hätte; können daher z. B. bey der Reduction in §. 20. für das dortige Facit der Thaler nicht die geringste Beruhigung geben. Dagegen würden sich die Probezahlen des 11fachen, auch in Pfennigen genommen, noch auf die Thaler erstrecken, und unter den Nahmen der Münzen, Gewichte und anderer Maße, mögte wohl nur höchst selten der höhere Name gerade ein 11faches des niedrigeren enthalten, und deshalb die Probezahl 0 geben, die in solchem Falle ohne Nutzen ist.

§. 45.

Der in §. 43. angeführte Rechner behauptet die Richtigkeit seiner Arbeit aus zween wahrscheinlichen Beweisgründen. Der eine beruht auf ein gewisses Selbstvertrauen zu seiner Fertigkeit. Er glaubt unter 11 Rechnungen nur 1mahl zu fehlen, und dann ist die Wahrscheinlichkeit seines Selbstvertrauens $= \frac{10}{11}$. Was also, wiederum mit Gravesand zu reden, noch ungewiß bleibt, ist nur $= \frac{1}{11}$. Von dieser Ungewißheit schafft der zwote Beweis, das Zutreffen der Neunerprobe, noch $\frac{8}{9}$ fort, also $\frac{8}{9}$. Dies ist daher auch der Zusatz, welcher der Wahrscheinlichkeit des Beweises aus dem Selbstvertrauen durch die Wahrscheinlichkeit des zweiten Beweises aus der Neunerprobe noch zuwächst, und die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit für die Richtigkeit jeder einzelnen Rechnung ist daher $\frac{10}{11} + \frac{8}{9}$ d. i. $\frac{28}{9}$. So würde man diese zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit, nach Gravesands Einleitung in die Weltweisheit, Halle 1755. §. 646. zu beurtheilen haben, in diesem Falle ohne Schwierigkeit. Was hier Wahrscheinlichkeit genannt ist, würde nach Hrn. Prof. Bafedow, Vermuthlichkeit heißen. Man sehe das Ende der Einleitung in dieses VIIIte Stück.



IX. Stück.

Bedenken gegen einen bekannten Schluß
über die Stärke des Schalles.

Daß die Stärke des Schalles von der Menge der bewegten Luft abhänge, wird in den physicalischen Lehrbüchern, welche dessen erwähnen, sehr zuversichtlich behauptet, und von dem Hrn. Prof. Eberhard sogar unter die ausgemachten Wahrheiten der Naturlehre (Halle, 1755.) aufgenommen. Der vollständige Schluß, wodurch man diesen Satz außer allem Zweifel zu stellen glaubt, ist folgender.

Die Stärke in der Empfindung des Schalles hänge von der Größe der Bewegung ab, womit die Luft auf unser Ohr stößt. Die Größe der Bewegung aber wird durch Masse und Geschwindigkeit bestimmt. Da nun aus Versuchen bekannt ist, daß die Geschwindigkeit, womit der Schall fortgepflanzt wird, bey einem Kanonenschusse, oder einem sehr starken Schalle, nicht größer ist, als bey dem weit schwächern Schalle eines Hammerschlages; so muß die Stärke des Schalles durch die Masse, durch die Menge der bewegten Lufttheile, modificirt werden.

Es wird nicht schwer fallen, sich den beyden Hörnern dieses Schlusses zu entziehen, der sich in dem Falle des bekannten Parasylllogismi befindet, wodurch dem Fuchs Herodes vier Füße angehängt werden.

Man mag sich die Lufttheilchen wie elastische Kugeln, oder etwas schicklicher wie aufgerollte Schnellfedern, oder
unter

unter dem allgemeineren Bilde von zerstreuten Punkten vorstellen, die von den aneinandergrenzenden Wirkungsräumen ihrer zurücktreibenden Kräfte umgeben sind; so übersieht man allemahl, daß der Stoß, womit ein in seinen vorigen Zustand sich zurückschnellendes Lufttheilchen auf unser Trommelfell wirkt, daß dieser Stoß, sage ich, durch Geschwindigkeit größer oder kleiner sey, je nachdem das Lufttheilchen mehr oder weniger zusammengedrückt war. Von dieser größern oder geringern Zusammendrückung der Lufttheilchen ist nun ganz unabhängig die Geschwindigkeit, mit welcher die Fortpflanzung der Wallungen (pulsuum) vor sich gehet, ich meine das Wachsthum der Entfernung von dem schallenden Körper, in welcher sich nach und nach die verdichtete Luftstrecke (pulsus) befindet. Wenigstens hat dieses Newton in seinen principiis, Tom. II. propos. XLVII. oder vielmehr einer seiner Ausleger, le Seur und Jacquier, pag. 367. u., und mit größerer Deutlichkeit Euler, in seiner theoria noua lucis et colorum. Cap. II. zu erweisen gesucht. *)

Beide nehmen fürs erste mit größter Wahrscheinlichkeit an, daß sich die Geschwindigkeit in Fortsetzung der Wallungen beständig gleich bleibe; wie es auch, so weit unsere Sinne reichen, aus Derhams Versuchen erkannt wird. Der Schall durchlief die 6te englische Meile noch
eben

*) Euler urtheilt daher auch selbst, nach vollendeter Rechnung in seiner noua theoria lucis et colorum, in seinen Opusculis varii argumenti, Tom. I. pag. 193: Vnde intelligitur, quomodo cumque initio fluidum chorda alioque corpore fuerit percussus, siue fortius siue debilius, pulsus tamen nihilominus eadem celeritate propagari; quippe quae a sola elasticitate medii ad densitatem applicata pendet. Hoc ipsum quoque experientia constanter testatur, qua soni fortissimi, vti tormentorum, eadem celeritate propagari observantur, ac soni maxime debiles.

eben so geschwinde, als die schon zurückgelegte 5te oder 1ste Meile.

Ferner wird von Newton und Euler angenommen, was die angeführten Ausleger des erstern ebenfalls, aber nicht ohne sehr große Weitläufigkeit, zu erweisen suchen, daß die Erschütterung (*agitatio*) eines jeden einzelnen Lufttheiles in der Wallung der Bewegung eines Pendels ähnlich sey. Ein Lufttheilchen geht nämlich mit beschleunigter Bewegung etwas vorwärts, wie ein Pendel in seiner ersten Schlaghälfte (man vergleiche die Note auf S. 81) beschleunigt fällt; und dann wieder zurück mit eben so verminderter Bewegung, als womit das Pendel in seiner zweiten Schlaghälfte steigt. Auch sollen diese Schläge der Lufttheilchen, wenigstens ziemlich bald, ganz gleichzeitig werden, wie die Schläge eines Pendels, wenn es in der Cycloide oder in unendlich kleinen Cirkelbogen schwingt.

Aus diesen Voraussetzungen glauben nun Newton und Euler die Geschwindigkeit, womit sich die Wallungen fortpflanzen, berechnet zu haben. Die Formel für diese Geschwindigkeit ergibt sich am Ende als eine bloße Function der Elasticität und Schwere der Luft, so daß alle diejenigen Zahlen, welche die Art und Größe der Erschütterung in den einzelnen Lufttheilchen bestimmen sollten, gänzlich aus der Rechnung weggefallen sind. Und dieses ist nach Eulers Meinung ein hinlänglicher Beweis, daß die Stärke des Stoßes, wovon die einzelnen Lufttheilchen erschüttert werden, auf die Geschwindigkeit, womit sich die Wallungen fortpflanzen, gar keinen Einfluß habe.

Wird nun der anfangs angeführte Schluß mit dieser Theorie verglichen, so liegt seine Unrichtigkeit deutlich vor Augen. Wenn man den wahren Satz voranschickt,
daß

daß die Größe einer jeden Bewegung entweder durch die Masse, oder durch die Geschwindigkeit vermehrt wird; so denkt man sich die Geschwindigkeit, mit welcher die Masse der Lufttheilchen gegen unser Ohr stößt. In dem zweiten wahren Satze aber hat man eine andere Geschwindigkeit zu verstehen, diejenige nämlich, womit sich die Wellungen fortpflanzen, welche nicht gerade so groß als jene seyn muß, und überhaupt durch jene gar nicht bestimmt wird.

Freylieh hat man wider die Newtonische Theorie, auch nachdem sie von Euler mit größerer Deutlichkeit vortragen war, sehr wichtige Einwendungen gemacht, und die größten Mathematiker klagen darüber, daß ihnen diese Lehre unverständlicher sey, als irgend eine andere in den Newtonischen Schriften *). Cramer hat besonders gezeigt, daß die Hypothese, wornach sich die einzelnen Lufttheilchen hin und wieder, mit zunehmender und abnehmender Geschwindigkeit, wie ein gleichzeitig schlagendes Pendel bewegen sollen, durch den Erfolg der Rechnung, welche darauf gegründet seyn soll, keinesweges erhärtet werde. Schon darum nicht, weil dieser Erfolg eben derselbe seyn würde, wenn man statt jener Hypothese auch manche andere zum Grunde legte, z. B. die ganz unschickliche, daß die Lufttheilchen anfangs mit abnehmender Bewegung vor, und dann mit beschleunigter Bewegung zurück liefen, wie Körper, welche in die Höhe steigen und dann wieder zurückfallen **). Und wenn gleich Newtons würdige Ausleger ihren Lehrer sorgfältigst zu ver-

*) Man sehe d'Alemberts traité de l'équilibre et du mouvement des fluides, à Paris, 1744. pag. 181.

**) Newtoni principia studio le Seur et Jacquier, Genevae, 1740. Tom. II. pag. 365.

vertheidigen suchen *); so scheint mir doch wiederum die Erinnerung des Hrn. Prof. Wünsch gegründet, daß ihre erste Hypothese sich selbst widerspreche **).

Allein zu der Zeit, wo die ausgemachten Wahrheiten der Naturlehre gesammelt wurden und besonders nach dem Maasstabe, welchen der Hr. Prof. Eberhard selbst zu ihrer Schätzung angibt, war der angeführte Satz nach der Newtonisch = Eulerischen Theorie zu beurtheilen, und darnach ist er nichts weniger als ausgemacht wahr.

Nach der neuern Theorie, womit uns der Hr. Prof. Wünsch beschenkt hat, und wornach ich so manchen wichtigen Umstand mit größerer Deutlichkeit zu erkennen glaube, wird die Stärke des Schalles durch die größere Dichtigkeit der Wallungen (densitate pulsuum) vermehrt. Mit der Dichtigkeit einer Luftstrecke wächst aber nicht allemahl die Masse der Luft, welche als ein Theil der Wallung ins Ohr strömet. Denn bey einerley, durch die Oefnung des Ohres bestimmte, Durchschnittsfläche dieses Theiles, hängt seine Größe von der Länge der Wallung ab. Mit der Länge der Wallung aber soll, nach dieser Theorie, die Tiefe des Tones zunehmen und nicht seine Stärke.

Eine Wallung von der Länge $\beta \delta = \frac{1}{2} B D$ gibt (pag. 17. der angeführten Dissertation) einen noch einmal so hohen Ton, als die Wallung von der Länge $B D$, aber einen Ton von derselben Stärke, wenn die Dichtigkeit in $\beta \delta$ eben so groß ist als in $B D$. Die mit der Dichtigkeit vermehrte Elasticität der Luft ist es also wiederum,

*) Ebendasselbst, pag. 367.

**) In des Hrn. Prof. Wünsch Dissertation, *initia novae doctrinae de natura soni*, Lipsiae, 1776. pag. 8.

derum, wodurch die Empfindung des Schalles verstärkt wird, und der anfangs angeführte Satz besteht demnach auch mit dieser Theorie nicht.

Der Schluß aber, wodurch man ihn zu erweisen glaubte, ist auch nach dieser Theorie betrachtet fehlerhaft. Denn die Geschwindigkeit, womit sich nach des Hrn. Wunsch Theorie die Wallungen fortpflanzen, ist der bestimmten Geschwindigkeit gleich, womit die vorhandene Luft von einer gewissen Dichtigkeit ausweichen kann. Diese Geschwindigkeit sey c ; so verhält sich die Dichtigkeit der Wallung zu der zum Grunde gelegten Dichtigkeit der Luft wie $m + c$ zu c , wenn $m + c$ die Geschwindigkeit ist, womit die Luft von der vibrirenden Saite aus ihrem Schwingungsraume getrieben wird. Dieses $m + c$ gibt auch die Geschwindigkeit an, womit die Luft auf unser Ohr wirkt, und diese ist daher wiederum unabhängig von der Geschwindigkeit c , womit sich die Wallungen fortpflanzen.

Meine Bedenken über den erwähnten Satz, wonach die Höhe und Tiefe der Töne von der Länge ihrer Wallungen abhängen soll, gehören nicht hieher. Da sie überdies so nahe liegen, daß sie dem scharfsinnigen Erfinder schwerlich entgangen sind; so vermuthe ich, daß sie mich nur aufhalten, weil gemeiniglich eine gewisse Zeit verlaufen muß, bis man sich ganz in eine neue Theorie hineinfindet. Sie würden auf jeden Fall zu voreilig angebracht seyn, da der Hr. Verfasser selbst noch eine weitere Erörterung über einige hieher gehörige Lehren erwarten läßt.



X. Stück.

Ueber die Harmonie im reinsten Klange.

Sollte man beständig Harmonie, nie einen einfachen Ton hören?

In Erlebens Naturlehre heißt es §. 291. „Ein in der „Musik vorzüglich geübtes Ohr, empfindet es deutlich, daß kein Klang so einfach ist, als es einem weniger geübten scheinen könnte, sondern daß in jedem „Klange vielmehr alle Töne gewissermaßen mitklingen: „vorzüglich aber hört man ausser dem Grundtone allemahl noch die Octave desselben, die Octave der Quinte, „und die doppelte Octave der großen Terze. Die Reiz- „nigkeit eines Klanges, und sein Unterschied von einem „andern Schalle oder Geräusche, scheint also nicht sowohl „darin zu bestehen, daß er ganz einfach und ungemischt „ist, oder daß die Luft bloß Schwingungen von einerley „Geschwindigkeit dabey bekömmt; sondern daß vielmehr der „eigentliche Grundton, und nach ihm die Consonanzen alle „übrigen unangenehmen Töne überwiegen; so wie auch „unstreitig die Theilchen der Seite bey der Erschütterung „desselben mit ganz verschiedenen Geschwindigkeiten zittern „müssen, ungeachtet die Saite im Ganzen nur einerley „Schwingung hat.“

So erzeugt die vorausgesetzte Bemerkung eines vorzüglich geübten Ohres den künstlichen Begriff von der Reiznigkeit eines Klanges, und führt auf die Ruthmaßung, daß der Ton wohl nicht unmittelbar von den pendelartigen Schwingungen der Saiten herrühren mögte, sondern von einem gewissen Zittern der feinsten Theilchen in der

Masse der Saite. Die nähmliche Folgerung macht de la Hire in seiner Abhandlung vom Klange, Seite 103. des 5ten Theils der physischen Abhandlungen der Pariser Akademie, nach Steinwehrs Ausgabe. Der Hauptversuch mit der Feuerzange, wodurch de la Hire zuerst auf diese Hypothese gebracht wurde, ist schon von dem Hrn. Prof. Funk in der lesenswürdigen Abhandlung vom Schalle (Leipziger Magazin zur Naturkunde, Mathematik und Oekonomie, von 1781) nach einfachern und bekanntern Gründen betrachtet worden. Mögte man doch allenfalls vom Klange der Feuerzangen, der Glocken und der cylindrischen Stäbe des de Carree dergleichen lehren, da man doch, meines Wissens, von den Gesetzen, wornach sich die einzelnen Lagen solcher Körper in Schwingungen setzen und höhere oder tiefere Töne hervorbringen, noch keine deutliche Vorstellung geben kann. Aber bey den musikalischen Saiten, deren Dicke in keine Betrachtung kommt, wenn man nur auf ihr Gewicht und ihre Länge sieht, und deren Elasticität durch die Spannung der Saite gemessen wird, ist es mathematisch gezeigt, daß die Menge ihrer Schwingungen in einerley Zeit durch ihr Gewicht, ihre Länge und Spannungskraft bestimmt wird. Das Gehör harmonirt mit den Folgen dieser Bestimmungen auf die vortreflichste Weise, und läßt uns jedesmahl höhere Töne und Consonanzen empfinden, wo die Rechnung aus jenen Gründen eine geschwindere Folge der Schwingungen und ein leichtes Verhältniß zwischen mehreren Schwingungen angibt. Wenn man dessen ungeachtet von großen Physikern die deutliche Theorie verlassen, und am Ende der mathematischen Musik behauptet sieht, daß der Ton doch wohl nicht durch diese Schwingungen, die wir so vortreflich kennen, sondern durch gewisse Zitterungen in der Masse der Saite hervorgebracht werde, deren Entstehungsart und Verbindung mit jenen Schwingungen uns ganz unbekannt sind; so ist das äußerst unangenehm,

nehmt, und die Erscheinungen oder Behauptungen, welche dazu Gelegenheit geben, verdienen wohl einige Erörterung. Dahin gehört nun die Meinung von der beständigen Verbindung der harmonischen Töne, die ich in der angeführten Stelle der Erlebenschen Naturlehre am kürzesten und besten vorgetragen fand.

Wir nehmen einen goldenen Ring — er muß aber von einem Blutsverwandten geerbt seyn, dessen innigste Liebe wir nach der strengsten Prüfung unsers Gewissens verdient haben — und halten ihn an einem blauen seidnen Faden in ein Bierglas. Wenn wir, außer den schon beygebrachten moralischen Eigenschaften, auch ein so feines Nervensystem besitzen, daß der thierische Magnetismus durch uns wirken kann; so muß sich der Ring eben so ofte bis zum Glase bewegen, als der Stundenhammer des nächsten Thurmes vor einer halben Stunde angeschlagen hat, oder binnen der nächsten halben Stunde angeschlagen wird. Wenn alle Erfordernisse gehörig aus einander gesetzt sind; so gelingt der Versuch bey den meisten Personen einer auserlesenen Gesellschaft — — — Ohne Zweifel wissen sich mehrere im Verborgenen schleichende Adepten der Eitelkeit ihrer Eingeweihten mit eben so gutem Erfolge zu bedienen, und — — es wäre auf eine ähnliche Weise gar wohl möglich, daß man wegen des postulirten feinen Gehöres oftmahls Octaven, höhere Quinten und Tertian zu hören glaubte, wo vielleicht Aeolus selbst nur die einzigen Schwingungen des Grundtones in seinem Luftgebiete wahrnehmen mögte. —

Man beurtheile die eben gebrauchte Wendung nach ihrer wahren Absicht. Nur zu oft hat man dergleichen nöthig, um der Eitelkeit der Befragten vorzubeugen, ehe man auf ihre Aussage fußen kann. Schon vor mehr als 10 Jahren hab ich es mit Verdruß erfahren, daß
man

mancher die angeführten Töne zu hören vorgab, der doch, nach andern darauf erfolgenden Fragen und Prüfungen, gewiß kein vorzüglich feines Gehör besitzen konnte. Sollten aber competente Richter, etwa ein so gründlicher und gelehrter Mann, wie der Verfasser einiger musikalischen Artikel in der Sulzerischen Theorie der schönen Künste, auch nach wiederholter Betrachtung das Daseyn dieser harmonischen Töne allgemeiner, als ich es vermute, und auch unter solchen Umständen vorfinden, wo es sich aus demjenigen, was ich sogleich anführen werde, nicht erklären ließe; so bin ich der erste, der der Erfahrung eines solchen Mannes seinen Glauben nicht versagt. Auf jeden Fall wird die Wahrheit der Sache dabey gewinnen, wenn ich es hiermit offenherzig gestehe, daß ich nicht nur bey den Tönen reiner Blasinstrumente nur einen einzelnen einfachen Ton zu hören im Stande bin, sondern daß mir eben dasselbe auch bey dem Anschlagen einzelner Harfensaiten gelingt. Nur muß man

- 1) alle übrige Saiten der Harfe, durch aufgelegte wollene Zeuge gehörig dämpfen: weil man nur den Ton der einen Saite und nicht die resonirenden Consonanzen der übrigen Saiten hören will.
- 2) Muß die Saite ganz rein, das heißt, allenthalben gleichartig und von gleicher Dicke seyn. Findet sich etwa in d (Fig. 8.) ein Knötchen oder eine andere Vermehrung des Gewichtes in dieser Stelle; so nimmt freylich der Theil a d die besondere seiner Länge zugehörige Schwingung an, die sich auch den übrigen gleich langen Theilen der Saite mittheilt, und fortwährend neben der Hauptschwingung der ganzen Saite erhält, wenn die Länge a d ein leichtes Verhältniß zur Länge der ganzen Saite hat, und auf diese Weise einen höhern harmonischen Ton neben

ben dem Grundton hervorbringt. Bey sehr langen Saiten können sich leicht mehrere vorzüglich schwere Stellen finden, die solche Theile von einem leichten Verhältnisse begränzen, und dadurch die harmonischen Töne veranlassen. Diese würden dann also doch ebenfalls von pendelartigen Schwingungen und nicht von gewissen Zitterungen der Saitenmasse entstehen. Hat die Länge a d kein leichtes Verhältniß zur ganzen Saite, so wird ihr Ton freylich nicht so anhaltend und stark gehört, als wenn sich die ganze Saite in solche Längen und ihre Schwingungen zertheilen läßt, ist aber dennoch nicht selten als eine Dissonanz ganz deutlich zu hören. Am leichtesten können sich übrigens alle solche besondere Schwingungen in und mit der Hauptschwingung erhalten, wenn die Saite nur wenig gespannt ist. Daher klingen auch manche Saiten weniger unrein, wenn sie stärker angezogen werden.

- 3) Lasse man die Saite nicht eher zurückschnellen, als bis man sie eine Zeitlang in der bauchichten Lage $a b c$ zur Ruhe gebracht hat. Allerdings gibt jede Saite, so bald sie mit dem Finger in b berührt und verschoben wird, die beyden Töne an welche der Länge $a b$ und $b c$ zugehören, und besonders den letztern, wenn bey c der Resonanzboden ist. Diese durch die Berührungsstelle erzeugten Nebenschwingungen dauern nun ebenfalls etwas fort, wenn $b c$ gerade ein leichtes Verhältniß zur ganzen Saite hat, und können ebenfalls harmonische Töne neben dem Grundtone eine Zeitlang hören lassen *).

Die

*) Eben diese besonders gleich bey der Berührung flirrenden und knisternden Töne machen wohl die Hauptursache aus, warum die mehrsten Harfenspieler in der Nähe so sehr widrig anzuhören sind.

Die langen Saiten auf einem Flügel sind zu ähnlichen Versuchen geschikt, besonders wenn man nur eine Tangente anschlagen läßt. Versucht man alsdann bey mehreren Tönen nach der Reihe, so wird man bald einen und den andern finden, der besonders eine höhere Consonanz sehr deutlich hören läßt. Man drücke nun die Feder des Tangenten an die Saite und erforsche den Ton, der dem kurzen Ende zwischen der Feder und dem Manualstege zugehört; so findet man, daß gerade dieser Ton die obschwebende Consonanz sey. Bey andern Saiten hört man eine solche vorzüglich stark klingende Consonanz nicht eher, als bis das Dämpfungs läppchen niedergefallen ist: und dann wird man finden, daß dieser consonirende Ton gerade der Länge zwischen dem Dämpfungs läppchen und dem Manualstege zugehört. Befreyt man endlich solche Saiten ganz von ihrer Tangente, und berührt sie in andern Stellen; so hört man statt der vorigen Consonanzen ganz andere Nebentöne, wovon dann wiederum die zuerst entstandenen und stärksten denen beyden Längen zukommen, worein die Saite durch die Berührungsstelle zertheilt wird. Endlich hört man nichts weiteres als die höhere Octave neben dem Grundtone, wenn man die Saite gerade in ihrer Mitte berührt.

Ausser solchen Nebentönen, die ganz offenbar von den pendelartigen Schwingungen herrühren, welche denen durch die Berührungsstelle abgetheilten Längen eigen sind,

Ist die Haut an den Fingern sehr weich, so lassen sie sich durch eine gewisse Verührungsart ziemlich vermeiden. Sie läßt sich freylich eher selbst finden, als durch Beschreibung erlernen, scheint indessen hauptsächlich in einem etwas beharrlichen sanften Drucke auf die Saite zu bestehen. Beym Piano aber ist es öfters ganz nothwendig, die Saiten gerade in solchen Stellen zu berühren, wodurch sie in harmonisch tönende Längen zertheilt werden.

sind, hört man nun allerdings bisweilen noch andere und hauptsächlich nur harmonirende Töne, die keiner von jenen Längen zugehören und auch zu tief sind, als daß sie von einer Länge entstehen könnten, die das gemeinschaftliche Maß eines dieser Theile und der ganzen Saite ausmachte. Das wiederfährt mir nämlich nur dann, wenn der Berührungsort beträchtlich von der Mitte der Saite entfernt ist. Wenn man aber auf solche Weise einen andern als den Schwerpunct der Saite in die stärkste Vibration setzt, so kann sich gar wohl durch beyde irgendwo ein neuer Schwingungsknoten erzeugen *).

Endlich, wenn auch alle übrige Saiten des Instrumentes gehörig bedeckt sind, wer steht dafür, daß nicht irgend einige Fibern des Resonanzbodens in einer gewissen Consonanz ganz vorzüglich stark resoniren? Die Resonanz

*) Wer Muße und Beruf hat, alle diese schwierigen Bewegungen gründlicher zu untersuchen, als ich es mir erlauben kann, wird vielleicht folgende Erscheinung seiner Beobachtung werth finden, die ohne Zweifel in dem eben gesagten gegründet ist. Der Raum, durch welchen sich die Saite schwingt, erscheint uns wie eine Fläche, deren äußere krummlinige Grenzen vorzüglich stark ins Auge fallen. Weil sich nämlich die schwingende Saite an den beyden Gränzen länger als in der Mitte der Fläche aufhält; so hat man ohngefähr das Bild, als ob an den Gränzen zwei Saiten gespannt wären, und die dazwischen fallende Fläche aus einem dünnern Spinnengewebe bestände. Berührt man nun die Saite weit von ihrem Mittelpuncte, so scheint sich, zwischen den beyden Saitenbildern an den Gränzen der Fläche, ein drittes Saitenbild langsam hin und her zu bewegen. Hat man die Saite in d nach f zu angezogen also in der entgegengesetzten Richtung nach e hin zurück schnellen lassen; so bewegt sich in dieser Gegend dieses dritte Saitenbild zuerst von e nach f und dann wieder von f nach e ohngefähr dreymahl, so lange man die Schwingung überhaupt sehen kann. Jenseit der Mitte bewegt sich das dritte Saitenbild entgegengesetzt und in andern Stellen scheinen sich zwei solche Saitenbilder gegeneinander zu bewegen u. s. w.

nanz der umliegenden Körper ist auch beträchtlicher als man glauben sollte. Sogar ein Filzhuth stimmt aus einem gewissen Tone. So bald dieser, oder irgend einer seiner harmonischen Töne, in einem Concerte stark angestrichen wird, so erzittert der ganze Huth, wenn man ihn sanft zwischen den Fingern hält.

Umstände genug die uns abhalten müssen, zu den unbekannten Zitterungen unsre Zuflucht zu nehmen, wenn eine Saite harmonische Töne hören läßt, wovon man auf den ersten Blick nur einen einfachen Ton vermuthen sollte.

Nach diesem allen also glaube ich für jetzt, daß die harmonischen Töne nicht allemahl bey jeder tiefen Saite gehört, sondern

I. nur durch die Berührungsstelle veranlaßt werden, wodurch die Saite in solche Schwingungen zerfällt, deren Länge irgend einen ihrer aliquoten Theile ausmacht. Es sey nun 1) daß die Berührungsstelle selbst nebst dem einen Ende der Saite einen solchen Theil begrenzt, der selbst aliquot ist oder doch in wenige gleiche Theile zertheilt, bald aliquote Theile der ganzen Saite darstellt; oder es werden 2) durch den Abstand der Berührungsstelle von dem Schwerpunkte der Saite einige harmonische Schwingungen veranlaßt; oder 3) die Saite ist unrein, hat an einigen Stellen mehrwichtige Theile als an andern.

II. Mögen die harmonischen Töne am gewöhnlichsten nur auf den nebenliegenden resonirenden Saiten erzeugt werden. In dieser Hinsicht hätte man die Abtheilungen der Saiten selbst, welche durch die Stege, durch den Anschlageort der Tangente u. dergl. entstehen,

stehen, mit Fleiß so einzurichten, daß für jeden Ton möglichst viele und gleich viele dergleichen Längen vorhanden wären, die in harmonischen Tönen resoniren und dadurch dem Instrumente allenthalben einen gleich vollen Ton verschaffen könnten. Ein Flügel, zum Beispiel, dessen Bezug in dieser Rücksicht eingerichtet wäre, würde den Mahmen eines harmonischen Flügels verdienen.

Endlich füge ich zum Beschlusse nur noch hinzu, daß ich Taylors Arbeit in diesem Fache, die in der Eulerischen Theorie der schönen Künste unter dem Artikel Klang sehr gerühmt wird, noch nicht habe vergleichen können. Sollte dieser etwa aus mechanischen Gründen dargethan haben, daß sich jede ganze Schwingung einer Saite allemahl in einige harmonische einzelne Schwingungen zertheilen müsse; so wäre freylich die Allgemeinheit der harmonischen Töne schon a priori erwiesen. Aber gerade Taylors Vorstellung, so weit ich sie aus dem angeführten Orte kennen lerne, würde dann die Behauptung unterstützen, daß auch diese harmonischen Töne aus bloßen Schwingungen, ohne innere Zitterung der Masse, erklärt werden können. Und so würden dann die harmonischen Töne, auch wenn sie allgemein vorhanden seyn sollten, nicht auf den Schluß des de la Hire führen, nicht einen motum tremulum in der Masse der klingenden Körper als die nächste Ursach des Klanges herbeyschaffen müssen. Dies zu zeigen war aber die Hauptabsicht und die erste Veranlassung dieses Aufsatzes.





XI. Stück.

Ein elektrischer Versuch und eine Cur.

Man lege mehrere Eyer auf eben so viel umgekehrte Weingläser in so kleinen Entfernungen nach einer Reihe fort, daß der verstärkte Schlag von einem zum andern überspringen kann; so findet man bey einem mäßigen Schlage, von etwa einem Quadratschuh Belege, gewöhnlich nur an demjenigen Ende der Eyer ein Loch eingeschlagen, wo nach Fränkllins Theorie der Strom eingedrungen ist. Bey einem stärkern Schlage ist das Loch an diesem Ende wenigstens größer oder gewaltsamer geschlagen, als an dem entgegengesetzten, wo der Strom ausfährt und — — allenfalls von der Oberfläche des nächsten Eyes auf dasselbe zurückgeworfen wird.

Diese Erscheinung wurde schon vor mehreren Jahren in meiner Lehrstunde von mir bemerkt, und sie frappirte mich, weil ich mich schon damals, ehe noch meines Wissens der mit Recht berühmte Hr. Prof. Lichtenberg den Ton dazu angegeben hatte, mehr für die Theorie von zween Strömen erklärt hatte. Entscheidend ist freylich auch dieser Versuch für keine von beyden Theorien. Denn man wird bey der letztern gerne annehmen, daß der eine Strom in mancher Hinsicht eine stärkere Wirkung zeigt, als der andere. Indessen glaube ich, daß man dieses Versuches an manchen nachgeschlagenen Orten würde erwähnen haben, wenn er schon bekannt wäre.

Einige andere kleine Versuche, die mir, als ich diese Beiträge vorläufig ankündigen mußte, ziemlich merkwürdig

XI. Stück. Elektrischer Versuch. 141

dig und neu schienen, halte ich billig zurück; theils, weil es mir noch nicht möglich gewesen ist, die vielen elektrischen Schriften, so seit einigen Jahren erschienen sind, ihrentwegen zu vergleichen; theils auch, weil mir der letzte Winter verstrichen ist, ohne daß ich zu ihrer Wiederholung gelangen konnte.

Nur will ich es kürzlich noch anführen, daß ein hiesiger Bürger durch sehr wenig elektrisiren sein Gehör wieder erhalten hat. Weil er nicht viele Zeit daran wenden wollte, so wurde er nur viermahl binnen 14 Tagen elektrisirt. Jedes mahl brachte ich ihm zuvörderst, indem er bald positiv bald negativ auf dem Isolirbrette vor der Maschine elektrisirt wurde, eine ableitende Metallspitze, die gegen ihrer Spitze zu mit einer kleinen gläsernen Röhre umgeben war, tief in die Gehörgänge, und ließ dann, weil er überhaupt nicht sehr empfindlich gegen die elektrischen Schläge schien, ziemlich viele, und nach und nach verstärkte, pulsirende Schläge quer durch den Kopf, bey den weichen Theilen unter dem Ohrläppchen gehen. Binnen den nächsten 14 Tagen hatte sich am Nacken eine große Beule zusammengezogen, und nachdem sie aufgebrochen, war sein Gehör völlig wieder hergestellt, nunmehr schon seit 3 Jahren. Da er zugleich über Augenschwäche klagte, so ließ ich auch auf die offenen Augen elektrische Büschel aus hölzernen Spizen strömen. Auch sein Gesicht ist seit der Zeit ganz gut geblieben; mochte aber wohl durch einerley gemeinsame Ursache mit dem Gehöre zugleich gelitten haben. Vorher war das einzige Mittel, wodurch er sich etwas Gehör zu verschaffen suchte, wenn er zu seinen Kunden gehen wollte, dieses daß er kaltes Wasser auf seinen Kopf plumpen ließ.

Necht sehr wäre es zu wünschen, daß ein Arzt und Naturkundiger eine gemeinsafliche Anweisung zum medicin-

dicinischen Gebrauche der Elektricität abfassen mögte, worin auch vor der unrichtigen und nicht selten schädlichen Anwendung gewarnt würde. (Ein achtungswürdiger Gelehrter hat mich versichert, daß ein starkes und anhaltendes Elektrisiren, während einer Diarrhee, die überhaupt dadurch befördert würde, tödtlich geworden wäre.) Es schien mir eine solche Anweisung, in Absicht auf ihren ausgebreiteten Nutzen, ein würdiger Gegenstand für eine öffentliche Preisfrage zu seyn *): dem die häufigen Elektrisirmaschinen könnten gewiß für manches große Uebel eine wohlfeile Cur leisten, wenn man sie allgemein zu gebrauchen wüßte. Freylich waren vor mehreren Jahren einige Damen aus einer sehr aufgeklärten Hauptstadt gerne bereit, die gemeinsten elektrischen Versuche anzusehen, weil die jungen Herren ihres Ortes alle Elektrisirmaschinen auf den obersten Boden gezogen hatten, und nur lauter Luft machten. Anjekt sind aber, wenn gleich nur wenige Maschinen, doch Elektrophore genug im Gange, weil man sie nöthig hat, um der Luft den gehörigen Glanz und Knall zu ertheilen.

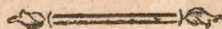
*) Indem ich dies drucken lasse, sehe ich aus dem 69ten Stücke der Gotha'schen Zeitung, daß die patriotische Gesellschaft zu Vaulence in Dauphiné, meinen Wunsch schon erfüllt und 300 Livres dafür ausgesetzt hat.

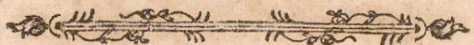
*

*

*

Nach eben geschehener Nachfrage führe ich auch noch an, daß der erwähnte Bürger sein Gehör wiederum bisweilen geschwächt findet; aber nur bisweilen, bey eintretendem Schnupfen, und bey weitem nicht so stark als ehemals.





XII. Stück.

Erscheinung bey einem nahen Blitze.

Im Julius 1781, an einem Abende zwischen 9 und 10 Uhr, kam unvermuthet eine mäßige Gewitterwolke zurück, nachdem die Luft durch mehrere Gewitter schon sehr gereinigt war. Ich bestieg meinen gewöhnlichen Standort, den höhern Thurm des Instituts, hielt es aber für rathsam einigen elektrischen Apparat bald wieder herunter zu tragen, weil sich das Gewitter ungemein geschwinde näherte. Zween von unsern Herren Lehrern, die mir entgegen kamen, veranlaßten mich, mit ihnen zurück zu kehren und das Gewitter ohne weitere Versuche zu beobachten. Nach mehrern immer näher kommenden Schlägen, hatte schon ein ziemlich naher, obgleich nicht vorzüglich starker Schlag, unsere Aufmerksamkeit auf sich gezogen, als ich nach einiger Zwischenzeit und unmittelbar nach dem Augenblicke, wo ich einen neuen vorzüglich hellen Schein bemerkte, auch ein lodern des Feuer, etwa 8 Quadratschuh im Durchschnitte, durch die mittlere Gegend des offenen hohen Schallloches auf mich zufahren sahe. Auf meinen bloßen Händen fühlte ich ohngefähr eine solche matte Wärme, als die Flamme der entzündbaren Luft verursacht, und nachdem es mich umschlungen hatte, schien es, nach Bemerkung des Hrn. B. . der dazu am bequemsten stand, in die Oefnung des Bodens hineinzuschlüpfen, welche gleich hinter mir etwas nach der Rechten zu in den Thurm hinunter führte. Als ich mich nach verschwundenem Feuer noch am Leben fühlte, und auch einen nicht sehr starken Schlag hörte, der wohl ziemlich nahe, aber doch nicht so ganz dicht bey mir zu
ents

entstehen schien: so dachte ich sogleich, daß vielleicht alles nur eine optische Täuschung gewesen seyn könnte, unterdrückte den aufsteigenden Ausruf — ich war im Blicke — den ich auch wegen Mangel an Luft nicht sogleich hervorbringen konnte, und war nur einige Schritte nach der Linken zurück getreten, mit den Worten — das war doch zu nahe — nachdem ich dazu ein wenig Luft geschöpft hatte. Die beiden Herren, welche ohngefähr einen Schritt von mir etwas vorwärts zu beiden Seiten gestanden hatten, und ebenfalls schnell zurückgetreten waren, sahen mich aufmerksam an, und Hr. B. . den ich vorzüglich im Gesichte hatte, sagte nach etwas tiefen Athemholen: sie standen ja bis ans Gesicht im Feuer.

Vielleicht war ein kleiner Seitenstrahl von dem wahren Blicke, der überhaupt nicht stark seyn mogte, nach der weniger reinen Luft im Thurme zugefahren, hatte mich auf seinem Wege mit elektrischen Feuer sogleich gesättigt, weil ich auf einem mit Pech übergossenen Boden isolirt stand, und darauf den bessern Leiter, die dünnste Luft im Thurme, verfolgt. Das Feuer war vielleicht ein sehr reines elektrisches, und konnte uns nicht zu viele Luft benehmen, weil ihre brennbaren Dünste durch die vorangehenden Gewitter schon verzehrt waren.

Oder war das Feuer, was wir zu sehen glaubten, nur ein schwebendes von den Strahlen des wahren Blickes zusammengeworfenes Bild? Die Empfindung der Wärme konnte allerdings eine bloße Täuschung seyn; so wie man sich auch im Mondenscheine erwärmt glaubt. Nur muß ich dagegen bemerken, daß die beiden gegenwärtigen, sehr gefekten Männer, das was sie sahen noch jetzt eine schreckliche und gewaltige Erscheinung nennen; daß die beschriebene Bewegung des Feuers für ein bloßes Bild sehr sonderbar nachgeahmt wäre und daß übrigens
unser

unser Standort nicht finster genug war, um eine gute camera obscura abzugeben. Die vier offenen Schalllöcher unsers Thurmes gehen bis auf den Boden nieder, und ausser ihrer schmal bekleideten Bogenstellung ist der Raum von allen Seiten frey und unbeschlossen.

In dem Augenblicke wo ich glaubte erschlagen zu werden, war ich sehr gefaßt: wie es das von Hrn. Hofr. Feder so gut eingeführte hypochondrische Temperament wohl gewöhnlich zu machen pflegt; wenn die Gefahr groß, gegenwärtig und bald vollendet ist. Mein erster Gedanke war der Vorsatz, recht genau zu beobachten, wie mir eigentlich zu Muth wäre, indem ich vom Gewitter erschlagen würde. Als ich mich schon einen Augenblick im Feuer beobachtet hatte, und doch noch am Leben fühlte, dachte ich — es müste wohl geschwinder vor sich gehen, wenn ich wirklich erschlagen würde — setzte mir aber sogleich entgegen: was ist hier Maß der Zeit, ausser der Menge der Ideen, und deren muß es wohl in einem so wichtigen Augenblicke sehr viele geben. So viel hatte ich gerade gedacht, bis ich wirklich zurückgetreten war, und mich ganz unbeschädigt wußte.

Keinen Stoß, keine Erschütterung und keine weitere Folgen habe ich bemerkt, ausser einer gewissen Unruhe, wie sie überhaupt ein heftiger Schreck auf reizbare Nerven zu wirken pflegt. Als ich mich nachher wieder ganz in die Empfindung des ersten Augenblickes zu versetzen suchte, so kam es mir freylich vor, als ob ich auch eine sanfte Wärme durch den ganzen Körper gefühlt hätte. Dies kann aber, so wie die schon erwähnte Wärme auf den bloßen Händen, wovon ich übrigens gewiß war, daß ich sie gleich in jenem Augenblicke zu bemerken glaubte, ein bloßer Betrug gewesen seyn, der dem Lichte, worin ich

mich wahrnahm, associirt war. Gewiß war die Wärme bey weiten nicht so stark gewesen, als ich sie bey ein paar heftigen Schlägen aus etwa zwey Quadratschuh Belege empfunden habe. Ich erhielt diese wider meinen Willen, und besonders das letztemahl, wo ich eben durch eine Brunnenkur sehr geschwächt war, empfand ich nichts von dem Rucke und der gewöhnlichen Erschütterung, sondern nur einen Erguß, als ob mir siedendes Wasser durch alle Glieder gepreßt würde.

Der seltene Werth der erzählten Erscheinung besteht darin, daß sie von drey unbefangenen Männern in vortheilhafter Stellung beobachtet ist. Um diesen zu erhöhen, habe ich die angeführten Herren, K** und B** da sie eben beyde gegenwärtig waren, ersucht, meine Erzählung sorgfältig durchzulesen, und nach möglichster Wiedererinnerung zu berichtigen, wo es irgend nöthig schiene. Ausser ein paar Angaben über die Tageszeit und die Person, welche den Niedergang des Feuers in den Thurm beobachtet hatte, und die ich selbst als mir ungewiß anzeigte, und nun berichtet habe, schien ihnen alles so dargestellt, als wir es gleich nach der Erfahrung geglaubt und besprochen hatten — so weit man dem Gedächtnisse, nach Verlauf mehrerer Jahre, trauen darf. Denn erst jetzt setzt mich die Betrachtung, daß man dergleichen Erfahrung nach seinem besten Wissen mitzutheilen schuldig sey, über die Besorgniß eines Argwohnes hinweg, der mir äußerst widrig seyn würde. Ich verachte die Eitelkeit, sich durch eine wahrlich ganz passive Collision mit einer Lufterrscheinung unter die Zahl der happy few versetzt zu glauben.





XIII. Stück.

Gelegentliche Gedanken über einige Versuche
und Lehren von der Attraction.

Ein neuer Schluß für das Daseyn einer anziehenden Kraft aus einem Versuche, den man in dieser Hinsicht noch nicht betrachtet hatte, schien mir nach wiederholter Durchsicht nicht so bündig und einleuchtend, daß er neben den übrigen einer Erwähnung verdiente. Daher enthält das folgende nur einige einzelne Stellen aus dem darüber geschriebenen Aufsatze.

Wenn zween Körper während ihrer Berührung gegen ihre Trennung einen stärkern Widerstand zeigen, als man dem bekannten Drucke der Luft zuschreiben kann, und doch die übrigen Merkmale und die Bedingungen der electrischen und magnetischen Kräfte nicht vorhanden sind; so sagt man, daß die Körper eine zusammenhängende Kraft äussern.

Wenn uns ferner zween von einander entfernte Körper einen Trieb zur gegenseitigen Näherung empfinden lassen, ohne daß wir diesen Trieb aus der electrischen und magnetischen Kraft, oder dem Drucke der Luft zu erklären wissen; so schreiben wir diesen Körpern eine anziehende Kraft zu.

Die Wörter Zusammenhang und Anziehung bezeichnen in diesem Verstande nichts als bloße Erscheinungen, deren Grund man Kraft nennet, ohne weiter auszumachen, ob diese Kraft in den Körpern selbst ihren Sitz habe, oder die Wirkung eines äussern Druckes von irgend einem Aether sey.

Unter den Versuchen, welche die letztere Erscheinung bestätigen sollen, führt man gewöhnlich auch zween über einander gelegte Spiegel an, in so fern sie der weitem Trennung widerstehen, und man sich gleichwohl versichert hält, daß ihre Berührung durch einige dazwischen gelegte feine Fäden eines Seidenwurmes gehindert sey. Wenn man das gegen bedenkt, daß die besten Spiegelflächen, aus mancherley bekannten Gründen, keine vollkommenen Ebenen seyn können; so findet man sich nicht völlig überzeugt, daß durch solche Zwischenlage alle Berührung der Spiegelflächen verhindert werde. Die dünnen Fäden können sich ja in die Vertiefungen beider Flächen einschieben, und diese Möglichkeit wird auch dadurch nicht weggeräumt, daß man die Fäden kreuzweis über einander legt.

* *

Unter den bekannten Versuchen, die man für diese anziehende Kraft zwischen nahen Körpern auf unserer Erde anzuführen pflegt, ist wohl keiner dazu geschickt, daß man die theoretischen Muthmaßungen über die Stärke dieser Kraft, als eine Function der Entfernung betrachtet, durch Erfahrung darnach prüfen könnte. Vorausgesetzt, daß die Abweichung der Pendel gegen große Gebirge zu diesem Behufe nicht in Betracht kommt, weil man die Massen und Dichtigkeiten der Gebirge für den kleinen Unterschied der Entfernungen, worin ihre Wirkung merklich bleibt, nicht genau genug bestimmen kann; so kenne ich wenigstens keinen Versuch, der dazu gebraucht werden könnte; es müste dann derjenige, welchen Muschenbroeck erzählt, wirklich gegründet seyn. Er würde in diesem Falle mehrere Aufmerksamkeit verdienen als er anseht genießt, und ich will ihn mit seinen eigenen Worten anführen. In seiner *introduc tio ad philosophiam natural em Lugduni Bat.* heißt es pag. 350. „ex longo infan-
tis

„tis tenui capillo pendeant lamellae tenuissimae, scissae
 „ex charta, pergameno, corio, ligno, ferro, pedem
 „longae, semilineam latae, fuspendantur in altis cam-
 „panis vitreis; ne ab aere agitentur, campanae in va-
 „riis interuallis quaelibet corpora admoueantur, tum
 „pendulae in vitro lamellae ad exteriora accedent, id
 „ope Micrometri quod est in telescopio, optime ob-
 „seruari potest: primus vniuersale hoc phaenomenon
 „esse inuenit Rev. Bertier. „

Man hänge zwey gleiche Gewichte an gleich langen Fäden in zwey langen engen und luftleeren Cylindern auf, daß beyde völlig gleichzeitige Schwingungen machen. Dann setze man nur den einen in Schwingung und bewege diesen Schwingungen gemäß, zween wichtige Körper an zwey entgegengesetzten Seiten des andern ruhenden Pendels; so daß mit jedem Pendelschlage der eine Körper genähert, der andere entfernt wird: so hat man die vortheilhaftesten Umstände, worunter die anziehende Kraft der genäherten Körper das ruhige Pendel in Bewegung bringen könnte. Die beyden genäherten Körper müßten wohl eine beträchtliche Masse haben, und daher selbst an Fäden aufgehängt seyn, damit sie leicht zu regieren wären und nur eine Person zum Versuche erforderten. Denn wer mag in solchen Versuchen auch seinem redlichsten Bruder trauen, daß er nicht durch irgend einen unwillkührlichen Druck seines Körpers die gewünschte oder gefürchtete Bewegung selbst befördert oder gehindert habe — wie beyden electrischen Schäfferschen Schwingungen so mancher wahrheitsliebende Mann sich selbst getäuscht haben mag.

*

*

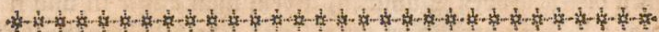
*

Johann Keill, ein berühmter Mathematiker zu Newtons Zeiten, fiel zuerst darauf, auch zwischen den Körpern auf

auf unserer Erde eine solche anziehende Kraft anzunehmen, als Newton bey den Himmelskörpern gebraucht hatte. Als er seine Gedanken an Newton mittheilte, so versicherte ihn dieser, daß er schon längst der nämlichen Meinung gewesen wäre, und führte auch drey Jahr darauf, am Ende seiner Optik mehrere, besonders chymische Erfahrungen an, die wohl durch dergleichen Kräfte müßten erklärt werden. Einige Naturlehrer unterschieden aber in der Folge sehr angelegentlich unter der Anziehung zwischen den Himmelskörpern und derjenigen zwischen den Körpern auf der Erde, und verwarfen die letztere. Besonders bemühte sich Hamberger alle zu ihrer Bestätigung bengebrachten Erscheinungen aus der Cohäsion zu erklären. Man kann sich der Neugierde nicht erwehren, selbst zu sehen, wie Hamberger aus der zugestandenen Cohäsion, die doch seiner eignen Erklärung nach mit dem Augenblicke der Berührung zu wirken anfängt und aufhört, eine solche Bewegung herleiten konnte, als z. B. bey dem Aufsteigen des Wassers in den Haarröhrchen u. dergl. vor sich geht. Ich fand endlich sein System in der unter ihm vertheidigten Streitschrift: *de cohaesione*, Jenae, 1732. von seinem Schüler, Johann Peter Süßmilch, am vollständigsten vorgetragen. Ausser einigen etwas undeutlichen, aber aus der Metaphysik bekannten Begriffen von den Strebungen (*tendentiis*) der Körper, und deren durch die Cohäsion aufgehobenem Gleichgewichte, beruhet das ganze System darauf, daß die runde Gestalt der Wassertropfen aus der Cohäsion erklärt ist. Und das geschieht in §. 83. auf folgende Weise, nach einer treuen Uebersetzung:

„Die kugelförmige Gestalt der Tropfen kann aus dem Gewichte des Tropfens nicht erkannt werden. Vielmehr ist sein Gewicht dieser Gestalt zuwider, da wegen der Schwere alle Theile des Körpers so tief
„als

„als möglich herabsinken, welches in der Kugelgestalt nicht Statt hat. Folglich muß, da keine dritte Kraft vorhanden ist, diese Gestalt von dem Zusammenhange der Theilchen abhängen.“ Durch die beständige Hülfe dieses η en wird in der Folge die anziehende Kraft verbannt, welches doch eben die strittige, hieher gehörige und vielleicht vorhandene, dritte Kraft war.



XIV. Stück.

Nöthige Vorsicht beym Gebrauch der allgemeinen Formel für die Summe der geometrischen Reihe.

Es sey $S = a + ae + ae^2 + \dots + ae^{n-2} + ae^{n-1}$
 so ist $eS = ae + ae^2 + \dots + ae^{n-2} + ae^{n-1} + ae^n$
 folglich $eS - S = -a + ae^n$

daher $S = a \cdot \frac{e^n - 1}{e - 1}$, die bekannte Formel für die Summe einer jeden geometrischen Reihe.

Man nennt diese Formel allgemein, weil sie die Summe aus einem beliebigen ersten Gliede a , einem beliebigen Exponenten e und der beliebigen Gliederanzahl n zu bestimmen scheint. Indessen gibt sie für $e = 1$ wirklich nicht die Summe $a n$ an, sondern gibt $S = a \cdot \frac{0}{0}$ zum Beweise, daß sie für diesen Fall nichts bestimmen könne; denn das will der Ausdruck $\frac{0}{0}$ eigentlich sagen.

Derz

Vergleichen Erscheinungen sind bey algebraischen Formeln nicht selten, und der gegenwärtigen sieht man es freylich bey genauer Aufmerksamkeit bald an, daß sie für $e = 1$ nichts bestimmen könne. Denn in diesem Falle wird $e^n = e^m$, kann also die Formel für die Summe von m Gliedern nichts anders angeben, als für die Summe von n Gliedern. Da nun gleichwohl der Unterschied zwischen diesen beyden Summen, indem man außer m und n auch a beliebig verändern mag, eine jede beliebige GröÙe erhalten kann; so muß freylich die Formel für $e = 1$ so etwas angeben, was man jeder beliebigen GröÙe gleich setzen darf, das heißt, sie muß einen Ausdruck geben, der gar nichts bestimmt.

Die Kunstgriffe, wodurch die Formel herausgelockt wird, sind auch so beschaffen, daß sie für $e = 1$ schlechterdings nicht zum Zwecke führen können. Denn man setze nur in den gleich anfangs angeführten Schlüssen so gleich $e = 1$: was kann man hoffen dadurch zu finden, daß man S von $1 \cdot S$ abzieht?

Die Algebraisten pflegen sich bey solchem Ausfalle einer allgemeinen Formel durch Substitution zu helfen. Setzt man hier $e = 1 + Z$ und dann wieder zu rechter Zeit $Z = 0$, wobei denn $e = 1$ wird: so bestimmt nun die Formel in der That die verlangte Summe, wie folget.

$e = 1 + Z$ gesetzt, hat man $S = a \cdot \frac{(1+Z)^n - 1}{1+Z - 1}$. Nach

II. Stück §. 22.

$$\text{also } S = a \cdot \frac{1 + nZ + {}^nBZ^2 \dots + {}^nNZ^n - 1}{1 + Z - 1} \quad (\sigma)$$

$$\text{also auch } S = a \cdot \frac{nZ + {}^nBZ^2 \dots + {}^nNZ^n}{Z}$$

$$\text{also } S = a \cdot n + {}^nBZ \dots + {}^nNZ^{n-1} \quad (\xi)$$

Nun

Nunmehr $Z = 0$ gesetzt, gibt $S = a n$, und so ist die Summe der geometrischen Reihe für $e = 1$ ganz richtig bestimmt.

Mit Recht aber kann man nun fragen, woher kommt es, daß die Formel nach solcher Substitution den Werth bestimmen kann? Wenn ich erst $e = 1 + Z$ setze, und dann wieder $Z = 0$, wie kann das etwas anders geben, als wenn ich gleich $e = 1$ setze?

Man achte genau auf die Art und Ordnung, wie man das Z gebraucht und verschwinden läßt, so bemerkt man wohl, daß es die Stelle eines Differentials vertreten muß, und e dabey als eine veränderliche Größe betrachtet wird, die sich der 1 ohn Ende nähert. Die angegebne Formel bestimmt nämlich die Summe einer jeden geometrischen Reihe, so lange e noch um irgend eine Größe von 1 verschieden ist. Diese Größe heiße Z , und es werde nun $1 + Z$ in die Formel statt e gesetzt; so ist ihr letzter Ausdruck bey §) so beschaffen, daß man daraus das Gesetz abnehmen kann, wornach sich ihr Werth dem Werthe der Summe für $e = 1$ ohn Ende nähert, indem man Z ohn Ende kleiner und kleiner werden läßt. Wenn aber das geschieht, so nähert sich der letzte Ausdruck ohn Ende dem $= a n$, oder um kurz zu reden, die unendlich kleinen Größen $^n B Z$ ic. müssen neben der endlichen Größe $a n$ verschwinden. In dieser Hinsicht kann man nunmehr $Z = 0$ setzen, nachdem man nämlich, vermittelst des Z , den Werth der letzten Verhältniß von $\frac{e^n - 1}{e - 1}$, indem sich e der 1 ohn Ende nähert, deutlich er-

kannnt hat. Wer aber auf diesen Sinn nicht achtet, und nachdem er anfangs $e = 1 + Z$ gesetzt hatte, dann wieder, wo es ihm zuerst einfiele, $Z = 0$ setzen wollte, der würde entweder durch ein bloßes Glück zu seinem Zwecke gelang-

gelangen, oder ihn auch wohl ungeachtet dieser Substitution gänzlich versehen. Z. B. wenn man gleich in σ wieder $Z = 0$ setzen wollte, so hätte man wieder das alte $= a \cdot \frac{0}{0}$. Denn man darf Z nicht neben $1 - 1$, welches keine endliche Größe, sondern $= 0$ ist, verschwinden lassen; wenn Z nicht bloß wie 0 , sondern wie eine dem 0 sich ohn Ende nähernde Größe, wirken soll.

Durch Hülfe der allgemeinen Differenzen findet man eine andere Formel für die Summe einer jeden geometrischen Reihe, die auch für $e = 1$ sogleich den Werth bestimmt, und den Grund, warum die vorhin angeführte hiebey nichts bestimmen konnte, noch von einer andern Seite zeigt.

In §. 10. des IIIten Stückes sey $y = a e^x$ und $w = 1$; so wird die dortige Hauptreihe eine geometrische, und $x = 0$ gesetzt, erhält man für die

Hauptreihe $y, y^I, y^{II} \dots y^N$ die folgende $ae^0, ae^I, ae^2 \dots aen$, also die allgemeine Form der geometrischen Reihe, die vom ersten Gliede $ae^0 = a$ anfängt; und man findet dafür $\Delta y = a(e - 1)$; $\Delta^2 y = a(e - 1)^2$; $\Delta^3 y = a(e - 1)^3$ u. s. w. überhaupt $\Delta^n y = a(e - 1)^n$. Aus lauter solchen ersten Gliedern der Differenzenreihen wird nach §. 56. das summatorische Glied

$S^N = {}^N A y + {}^N B \Delta^I y + {}^N C \Delta^2 y \dots + {}^N N \Delta^{n-I} y$, also für die geometrische Reihe die Summe von n Gliedern $= {}^N A \cdot a + {}^N B \cdot a(e - 1)^I + {}^N C \cdot a(e - 1)^2 \dots + {}^N N \cdot a(e - 1)^{n-I} = a \cdot ({}^N A + {}^N B \cdot (e - 1) + {}^N C \cdot (e - 1)^2 \dots + {}^N N \cdot (e - 1)^{n-I})$. Dieser Ausdruck heiße φ ; so hat man nun $\varphi = a {}^N A = a n$ für $e = 1$.

Um ferner aus diesem φ) die gleich anfangs gegebne gewöhnliche Formel für die Summe der geometrischen Reihe herzuleiten, schliesse man; wenn

$$\varphi =$$

$q = a \cdot ({}^nA + {}^nB \cdot (e-1) + {}^nC \cdot (e-1)^2 \dots + {}^nN \cdot (e-1)^{n-1})$ ist, so ist es auch

$$= a \cdot \frac{{}^nA(e-1) + {}^nB(e-1)^2 + {}^nC(e-1)^3 \dots + {}^nN(e-1)^n}{e-1}$$

folglich $= a \cdot \frac{(1 + (e-1))^n - 1}{e-1}$ folglich auch $=$

$a \cdot \frac{e^n - 1}{e - 1}$, und das ist eben die vorhin gegebne Formel,

welche h heissen mag. Betrachtet man die eben vorgenommene Umbildung der q in h ; so sieht man, daß dabey durch $e-1$ multiplicirt und dividirt wurde, in dieser

Hinsicht also $h = q \cdot \frac{e-1}{e-1}$ sey. Dann muß freylich

für $e=1$ die h geben $\frac{0}{0}$, wenn gleich q einen ganz bestimmten Werth angibt.

XV. Stück.

Erinnerung über einige Vorstellungen bey den unendlichen Reihen.

Wenn man auf die im vorigen Stücke betrachtete erste Formel für die Summe der geometrischen Reihe seine vorzügliche Aufmerksamkeit richtet; so kann es freylich nicht lange unbemerkt bleiben, daß sie nichts bestimmt, sobald der Exponent $= 1$ gesetzt wird. Braucht man aber diese Formel nur als eine Nebenhülfe; so kann sich dieser Umstand leicht verstecken, und man kann dadurch in bloße Scheinbeweise verfallen. So ist es mir selbst in einer Abhandlung Seite 418 unsers pädagogischen Journals fürs Jahr 1782. ergangen, wo ich es aus jener Formel zu be-

weisen suchte, daß der Satz $1+x+x^2 \dots +x^\infty = \frac{1}{1-x}$

wahr

wahr sey für $x=1$; um mit möglichster Beybehaltung des Textes in meinem algebraischen Lehrbuche eine dort eingeschlichene Uebereilung auszubessern. Ich halte es nicht der Mühe werth, diesen Aufsatz aufs neue zu berichtigen, und wiederhole nur meinen schon dort gegebenen Rath, die Behauptungen von den unendlichen Reihen in dem zweyten Bande des genannten Lehrbuches Seite 123-139 ganz zu überschlagen, weil sie nicht richtig sind, und übrigens in der Folge nirgends gebraucht werden. Dagegen trage ich kein Bedenken, das übrige dieses Lehrbuches, den kurzen praktischen Vortrag der Zins auf Zins: Leibrenten: und Bevölkerungsrechnung und überhaupt die Uebung zur Buchstabenrechnung, welche die andern Aufgaben darbieten, den Anfängern fernerhin zu empfehlen. Denn ich bin und bleibe der Meinung, daß ein trockenes Skelett von den Kunstgriffen der Buchstabenrechnung, denjenigen die sie nicht schon inne haben, zu nichts helfen könne. Wenn die allgemeinen Zahlen das künftige Studium der angewandten Mathematik und selbst der praktischen Geometrie erleichtern sollen; so muß der Schüler in der Buchstabenrechnung ebenfalls auch mechanisch geübt werden, wie in der gemeinen Arithmetik; und sie muß zuvörderst auf solche Größen angewandt werden, die ihm aus dem gemeinen Leben ganz bekannt sind, und nicht sogleich bey den eben erst erlernten Begriffen der angewandten Mathematik und Naturlehre. Daher gehören die vielen, auf den ersten Anblick freylich nur spielenden Aufgaben in Eulers Algebra, allerdings zur guten Methode, und ich bin bemüht gewesen, auf diesem Wege fortzugehen.

*

*

*

In der Vorrede zum 2ten Bande meines schon angeführten Lehrbuches habe ich von meiner dortigen Vorstellung über die unendlichen Reihen gesagt, daß ich mir dabey keine so unrichtige Erläuterungen erlaubt habe, als in guten und sehr gebrauchten Lehrbüchern vorkämen. Hätte

te ich damahls auf ein Lehrbuch gezielt, was die Sache wirklich richtig vorträgt; ich würde es gerne gestehen, daß ich mich auch in diesem Urtheile übereilt habe. Allein ich hatte die Algebra eines grossen Meisters vor Augen, worrin eben der falsche Satz, den ich durch einen allgemeinen Beweis unterstützt zu haben glaubte, behauptet aber nicht erwiesen wird. Statt des Beweises sucht der verehrungswürdige Verfasser die Schicklichkeit seiner Behauptung durch einzelne Fälle zu erläutern. Ich will die ganze Stelle hersehen, die meinen damahligen Irrthum veranlaßte, den ich, wie schon gesagt, in unserm Journale weiter auseinander gesetzt habe. Es heist nämlich in Eulers vollständiger Anleitung zur Algebra.

§. 292.

„Man kann auch sogar immer weiter fortfahren, ohne jemahls aufzuhören, und dadurch wird der Bruch $\frac{1}{1-x}$ in eine unendliche Reihe aufgelöst, welche ist $1+x+x^2+x^3$ u. ins Unendliche. Und von dieser unendlichen Reihe kan man mit Recht behaupten, daß ihr Werth eben so viel sey, als der Bruch $\frac{1}{1-x}$

§. 293.

„Dieses scheint anfänglich sehr wunderbar; jedoch wird es durch die Betrachtung einiger Fälle begreiflich werden. Es sey erstlich $x=1$; so wird unsere Reihe $1+1+1+1$ u. bis ins Unendliche, welches dem Bruche $\frac{1}{1-1}$ das ist $\frac{1}{0}$, gleich seyn soll. Wir haben aber schon bemerkt, daß $\frac{1}{0}$ eine unendlich grosse Zahl sey, und dieses wird hier von neuem auf das schönste bestätigt.

„Wenn man aber setzt $x=2$, so wird unsere Reihe $=1+2+4+8$ u. bis ins Unendliche, deren Werth seyn soll

„soll $\frac{1}{1-2}$, das ist $\frac{1}{-1} = -1$; welches dem ersten An-
 „blicke nach ungereimt scheint.

„Es ist aber zu merken, daß, wenn man irgendwo
 „in obiger Reihe will stehen bleiben, dazu allezeit noch ein
 „Bruch gesetzt werden muß.

„Also wenn wir z. B. bey 64 still stehen, so müssen
 „wir zu $1+2+4+8+16+32+64$ noch diesen Bruch
 $\frac{128}{1-2} = -128$ hinzusetzen; woraus entstehet $127-128$
 „das ist -1 .

„Geht man aber ohne Ende fort, so fällt der Bruch
 „zwar weg, man steht aber hingegen auch niemahls still.“

Die Antwort, daß man niemals stille steht, hebt
 den Widerspruch nicht weg, der darin liegt, daß z. B.

$$\frac{1}{1-1} = 1+1^1+1^2+1^3 \text{ etc. ins Unendliche,}$$

$$\text{und } \frac{1}{1-2} = 1+2^1+2^2+2^3 \text{ etc. ins unendliche seyn soll;}$$

also die erste Reihe $= \frac{1}{0}$ und die zweite nur $= -1$; da

doch offenbahr die zweite weit mehr geben muß, als die
 erste, wann man in beyden nie stille steht.

Was nun im folgenden §. 294. von den convergirenden
 den Reihen für $x < 1$ gezeigt wird, scheint allerdings den
 Hauptsatz in §. 292. wieder zu bestätigen, ist aber eigent-
 lich nicht als eine Folge jenes Satzes sondern aus eigent-
 thümlichen Gründen wahr: darum nämlich, weil die Ergän-

zung $\frac{x^{n+1}}{1-x}$ des Quotienten $1+x+x^2+\dots+x^n$ von $\frac{1}{1-x}$
 für $x < 1$ immer kleiner und kleiner wird, je grösser n wird.

Man setze sich nun in meine damahlige Lage, wo ich
 die allgemeine Behauptung mit dem Hrn Verfasser für
 wahr

wahr hielt, aber den Zwiespalt seiner Erläuterungen bemerkte; so wird man meinen Rath sehr natürlich finden, daß man sich, um den allgemeinen Satz zu glauben an seinen allgemeinen Beweis halten müsse, und nicht an solche einzelne Anwendungen, die bald ein schickliches, bald ein unschickliches Resultat geben.

Hat man die richtige Vorstellung gegenwärtig, daß im allgemeinen nicht $\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2 \dots + x^n$, sondern $\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2 \dots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}$ ist; so können die Sätze in §. 292. noch weniger Beyfall finden.

Ueber dies kommen auch in den nachfolgenden §§. etwas undeutliche Behauptungen vor z. B. in §. 299. „daß die unendliche Reihe $1-1+1-1+1-1$ u. wohl etwas geben müsse, so zwischen 1 und 0 fällt, weil sie mit -1 abgebrochen $= 0$ mit $+1$ abgebrochen $= 1$ gibt,“ ist fast eben so undeutlich, als wenn Leibnitz sagt, daß ihr Werth darum $= \frac{1}{2}$ sey, weil $\frac{1}{2}$ das arithmetische Mittel zwischen 0 und 1 ist. (Leibnitii epistolae ad aduersos von Korthold vol. III. pag. 288.)

Es scheint mir daher nothwendig, die Anfänger vor der Lesung des 9ten Kapitels in der angeführten Algebra zu warnen. Auch der grosse Euler blieb ein Mensch und begnügte sich hier einmahl mit undeutlichen Vorstellungen über eine bekannte schwierige Sache, wobey er 15 Jahr vorher selbst schon den Hauptirrthum mit vollem Lichte übersehen hatte. (Man sehe desselben Calcul. differential. cap. III. §. 103.) Der gewissenhafteste Schriftsteller sinket bisweilen in Nachlässigkeit, wenn er sich anhaltend nur die ersten Anfänger als sein Publikum gedenkt, zu dem er sich herunter lassen muß. Ich würde davon mehrere Beispiele aus demselben Buche anführen, wenn sie eben so wichtig wären, den Anfänger eben so viele Zeit kosten könnten, als das gegenwärtige.