L. Euleri opuscula varii argumenti

L. Euleri opusculorum tomus III. continens novam theoriam magnetis ab illustr. Academia Regia Scient. Parisina praemio condecorata A. 1744. Una cum nonnullis allis dissertationibus analytico-mechanicis

Euler, Leonhard

Berolini, 1751

Persistent Link: https://doi.org/10.3931/e-rara-4468

L. EULERI
OPUSCULORUM
TOMUS III.
CONTINENS
NOVAM THEORIAM MAGNETIS
AB ILLUSTR. ACADEMIA REGIA SCIENT: PARISINA PRÆMIO CONDECORATAM A. 1744.

UNA CUM NONNULLIS ALIIS DISSERTATIONIBUS ANALTTICO-MECHANICIS.

BEROLINI,
SUMTIBUS AMBR. HAUDE ET JOH. CAROL. SPENERI,
BIBLIPOL. REG. ET ACAD. SCIENT. PRIVIL.
1751.

DISSERTATIO DE MAGNETE
ab Illustr. Academia Regia Paris. Scient. præmio condecorata.
A. 1744.

Tab. I. & II

§. I.

Virtutis magneticæ causa physica datur.

Credo ego Illustrissimam Academiam Regiam illorum opinioni minime assentiri, qui causam virtutis magneticæ quærendo defatigati non dubitant ullam horum phænomenorum causam intelligibilem dari, pertinaciter negare. Hoc certe mihi quidem clarissime confirmare videtur repetita hujus ejusdem quæstionis propositio, qua Academia Regia satis luculenter publice declarat, quærendi defatigationem esse turpissimam, cum id, quod quæritur, ſit pulcerrimum. Cum enim Illuſtr. Academia ante biennium hanc de magnete quæſtionem cum lauti præmii promiſſione propoſuiſſet, neque tamen quicquam inveniſſet, in quo acquieſcere poſſet, graviſſimam ſane cauſam hanc quæſtionem deferendi habuiſſe videatur. Verum tantum abeſt, ut iſtam inveſtigationem propterea relinquendam cenſeat, ut potius præmium duplicare, hocque magis animos ad iſtud negotium ſuſcipiendum inflammare decreverit.

Hæc cauſa eſt vehementer abſcondita.

§. II. Quanquam equidem nunquam dubitavi, quin omnes naturæ effectus a cauſis mechanicis proficiſcantur, ac ſemper malui ignorantiam meam palam profiteri, quam quicquam ſine cauſa fieri, dicere; tamen natura magnetis perpetuo mihi tam ardua ac tantopere abſcondita eſt viſa, ut omne ſtudium atque operam in ejus indagatione fruſtra a me impendi ſim arbitratus: quæ cauſa me etiam abſterruit, ut, cum primum hæc quæſtio proponeretur, in ea enodanda nequidem elaborare ſim auſus. Non quo mihi dignitas quæſtionis minus eſſet perſpecta, ſed quoniam vidi, tot præſtantiſſimorum virorum, qui hoc opus ſunt aggreſſi, conatus irritos fuiſſe omnes. Imprimis vero me detinuit Celeb. Muſchenbrockii provocatio, qui conquiſitis atque examinatis ſummo ſtudio experimentis id tandem ſe eviciſſe jactat, virtutum magneticarum cauſam prorſus non eſſe mechanicam, neque ulli ſubſtantiæ materiali adſcribi poſſe. Quod etſi mihi quidem minime perſuaſit, tamen ſpem ademit omnem in hoc ſublimi negotio quicquam proficiendi.

Non tam fons quam explicatio virtutis magneticæ deſideratur.

§. III. Si hoc conſilium protinus ſequi voluiſſem, nunc certe maxime ab hoc onere me abſtinere oporteret, poſtquam tot egregia ſummoque ſtudio elaborata tentamina ipſius Academiæ aequiſſimo judicio ſint repudiata. Quæ cum apud me diligentius evolviſſem, fieri profecto non poſ-

ſe

ſe mihi viſum eſt, ut omnes conjecturæ, quæ ad phænomena magnetis explicanda adhuc ſunt excogitatæ, a veritate aequaliter abhorreant; propterea quod nullum fontem, unde ejusmodi vires promanare queant, prætermiſſum eſſe videbam. Quamobrem non tam in novum fontem, ex quo vires magneticæ deriventur, inquirendum eſſe intellexi, quam in ipſum derivationis modum. Neque idcirco primam originem adhuc latere exiſtimo, ſed ſolum rationem, qua ex jam cognita origine ſingula magnetis phænomena dilucide deduci atque explicari queant. Quod negotium cum ſit difficillimæ indaginis propter plurimas quæſtiones maxime intricatas ante evolvendas, non amplius tantopere miror, evidentem horum phænomenorum explicationem etiamnunc deſiderari.

Recentiores Phyſici parum in hac explicatione profecerunt.

§. IV. Omnino autem Carteſius mihi videtur, qui iſtam explicationem primus fere cum ratione eſt aggreſſus, non adeo a ſcopo aberraſſe, ut ejus idea penitus rejici debeat. Quamvis enim totum negotium neutiquam confecerit, tamen naturam ſecutus neque in prima cauſa aſſignanda neque in ipſa explicationis ratione tantum a veritate receſſiſſe videtur, quantum factum eſſe comperio a pluribus Philoſophis recentioribus, qui dum ejus ideas reformare atque emendare voluerunt, in craſſiſſimos errores inciderunt. Atque omnino noviſſimi Philoſophi mihi quidem videntur eo longius a veritate digreſſi, quo majus ſtudium attulerunt ad anteceſſorum ſententias evertendas, et explodendas: ſicque novitatis ſtudium cognitioni veritatis vehementer impedimento fuiſſe exiſtimo. Hoc pacto enim factum eſt, ut profligatis omnibus rationalibus modis naturam magnetis explicandi, nil aliud relinqueretur, niſi ut cauſa incorporea in medium produceretur.

Caufa virtutis magneticæ partim intra partim extra magnetem quæri debet.

§. V. Quoniam igitur dubium eſt nullum, quin omnes magnetis effectus a cauſa corporea ſive mechanica proficiscantur, hanc cauſam partim in interna magnetis ſtructura, partim in materia extra magnetem ſubſiſtente quæri oportebit. Cum enim hæc virtus, cujus cauſam inveſtigamus, non in omnibus corporibus, ſed in certa tantum ſpecie, ad quam ſcilicet magnetem ac ferrum magnetica virtute imbutum referimus, reperiatur, neceſſe eſt ut interna horum corporum indoles ſit prorſus peculiaris, atque a natura reliquorum corporum, in quæ talis vis non cadit, penitus diverſa. Quomodocunque autem hæc interna corporum magneticorum conſtitutio ſit comparata, tamen ab ea ſola oriri non poſſunt illa phænomena, quibus videmus duos magnetes ſe mutuo non contingentes in ſe invicem cum attrahendo, tum repellendo, tum etiam dirigendo agere, et vires exercere. Ex quo perſpicuum eſt præter internam corporum magneticorum ſtructuram adeſſe materiam quandam hæc corpora ambientem, atque extra illa ſubſiſtentem, quæ cum ipſa ſtructura cuncta phænomena producere valeat.

Cauſæ externæ exiſtentia a Philoſophis pluribus in dubium vocari ſolet.

§. VI. Quod ad priorem cauſæ partem attinet, neminem fore arbitror, qui internum magnetis ſtatum a reliquis corporibus diſcrepare neget. Etiamſi enim magnes præ reliquis corporibus non præditus eſſet tam eximiis virtutibus, tamen propter hoc ipſum, quod differat a reliquis corporibus, nemo dubitaret in ipſo ſtructuram peculiarem, qua diſtinguatur, ſtatuere. Longe aliter autem de materia illa externa, in qua alteram cauſæ partem poſitam eſſe dico, nonnullos Philoſophos hoc præſertim tempore ſentire video, qui pertinaciter negant ullam materiam ſubtilem ad naturæ phænomena explicanda adhiberi oportere, cujus

exi-

existentia per clarissima experimenta ad oculum demonstrari non possit. Quæ lex, etsi primum ad compescendam libidinem pro arbitrio ac sine causa urgente materias quasvis subtiles fingendi, merito est sancita, tamen nunc quidem a plerisque ita extenditur, ut pæne omnis causarum cognitio funditus tollatur.

§. VII. Hoc loco autem isti circumspecti naturæ scrutatores primum declarent, an plane negent ullam in mundo existere materiam tam subtilem, quæ neque sensus perceptibili modo afficiat, neque per experimenta eo reduci queat, ut quasi manibus palpari possit. Quæ opinio, uti per gravissimas rationes ostendi posset absurdissima, ita vix quenquam fore credo, qui eam aperte ac serio tueri velit. Ita igitur sententiam suam mitigabunt, ut non licere dicant in explicatione cujusquam phænomeni naturæ, ad ullam materiam confugere, quæ sensibus percipi nequeat; hocque non quasi ejusmodi materia subtilis non detur, sed quod ejus existentia sensibus probari non possit. Quod si ergo cujuspiam phænomeni causa in ejusmodi materia imperceptibili lateat, quod sane fieri posse, nisi in prius absurdum recidere velint, negare non poterunt, quomodo se Physicum gerere oportebit? Num causam ibi, ubi non est quærere, an forte omnino ne quærere quidem velle debebit; quorum illud homine, hoc vero Physico ita est indignum ut quod maxime. Quid igitur his cautis Philosophis, quod respondeant, relinquatur non video, nisi vel ejusmodi phænomena sine ulla causa fieri dicere, vel ad qualitates occultas revocare velint, quorum utrum Physico sit turpius, tam facile non dixerim. Sin autem substantiæ cuidam immateriali et quasi spiritui causam adscribendam esse putent, sibi ipsi minime constant, qui dum ideo omnem materiam subtilem

Existentia materiæ subtilis invisibilis asseritur.

 tilem

tilem ex Phyſica profligant, quod ſenſus non titillet: propter hoc ipſum ſpiritus introducendos eſſe arbitrantur, quod ſenſus noſtros prorſus effugiant. Ita fit ut, dum nihil, niſi cujus exiſtentia ſenſibus probari poſſit, in Phyſica admittere volunt, iidem ipſi innumerabilia ſpirituum genera introducant, quorum exiſtentia neque per experimenta nec per rationem unquam evinci queat: qua certe philoſophandi ratione, nihil, quod magis eſſet ridiculum, excogitari poteſt.

In ſtatuenda materia ſubtili phyſicum circumſpectum eſſe oportet.

§. VIII. His ſummis incommodis perpenſis, univerſa tandem iſta ſevera præceptio eo reducetur, ut in ſtatuendis ejusmodi materiis ſubtilibus, per quas phænomena naturæ explicentur, Phyſicum admodum cautum eſſe oporteat: quo ſenſu ſi accipiatur, equidem ita aſſentior, ut in hoc præcepto firmiſſimum totius Philoſophiæ præſidium poſitum eſſe exiſtimem. Non quod putem majorem hypotheſes atque materias ſubtiles fingendi libertatem cognitioni veritatis eſſe pernicioſam; mihi enim omnino perſuaſum eſt, nonniſi poſt plurima tentamina, quæ hypotheſibus excogitandis inſtituantur, ad veritatem nobis pertingere licere: ſed ſumma circumſpectio in hoc verſari debet, ut nullam ejusmodi materiam ſubtilem, qualem animo concepimus, in mundo actu exiſtere credamus, antequam certiſſime habeamus exploratum, ejusmodi materiam non ſolum eſſe poſſibilem, ſed etiam cunctis phænomenis mechanice explicandis eſſe aptam. Quamdiu autem nobis ad hunc certitudinis gradum pervenire non datur, ejusmodi hypotheſes ita tolerari conveniet, ut ad res tantum probabiles referantur.

Virtutem magneticam a materia

§. IX. Si jam hac adhibita cautela ad magnetem revertamur, ejus effectus ſtatim luculenter oſtendunt, ſubſiſtere

ſtere quoque extra magnetem materiam quandam ſubtilem, quæ phænomenorum cauſam in ſe complectatur. Neque vero, dum hoc aſſumo, hypotheſin mihi fingere videor: cum enim eæ res, quæ in ſenſus incurrunt, his phænomenis producendis non ſufficiant, neceſſe eſt, ut a materia quadam ſubtili ſenſus noſtros effugiente efficiantur: quod cum a nemine in dubium vocari poſſit, concedi omnino debebit, ejus modi materiam ſubtilem certiſſime actu exiſtere. Et quanquam plurimi, qui hanc de magnetis quæſtionem ſunt aggreſſi, voti non facti ſunt compotes, tamen nullum in hoc deceptum eſſe arbitror, quod materiam ſubtilem ſtatuerit: ſed potius, quod quisque ſuo arbitratu naturam atque indolem hujus ipſius materiæ conſtituerit; cum nihil aliud admittere debuiſſent, niſi quod ipſa phænomena hincque legitime illatæ concluſiones ineſſe manifeſto oſtendiſſent. Quam regulam ſi omnes naturæ ſcrutatores diligentius obſervaſſent, ſcientia certe naturalis non tantopere erroribus ac tenebris ſcateret, ut quid verum ſit quidve falſum, vix diſcernere liceat.

quadam ſubtili oriri oſtenditur.

§. X. Quo autem clarius ſententiam meam de cauſa virtutis magneticæ exponam, primum aperiam, quemadmodum equidem cum ſtructuram magnetis ac ferri internam, tum indolem materiæ illius ſubtilis, cujus exiſtentia jam eſt demonſtrata, comparatam eſſe ſtatuam. Deinde vero ſimul rationes afferam, cur hoc potius modo utriusque ſtatum concipi debere credam quam ullo alio; ſicque ſententiam, quæ initio, me non repugnante, inſtar hypotheſis ac meræ fictionis ſpectari poteſt, ita confirmabo, ut non ſolum posſibilis, ſed etiam veriſimilis videri incipiat. Tertio autem fuſius explanabo, quomodo ex his poſitis principiis omnia atque ſingula magnetis phænomena ſecundum leges naturæ

Principia præſentis theoriæ breviter ob oculos ponuntur ac ratio inſtituti declaratur.

turæ tam dilucide consequantur, ut etiamsi adhuc essent incognita, tamen per solam theoriam a priori prædici ac definiri possent. Quod si præstitero, hypothesis, quæ modo probabilis erat facta, summum probabilitatis gradum, hoc est certitudinem plenam nanciscetur, atque adeo hypothesis esse cessabit, in numerum rerum actu existentium transitura: hocque pacto nullum amplius supererit dubium, quin veram omnium magnetis proprietatum assignavero causam. Quocirca Judices ab Illustr. Academia Regia constitutos rogo, ut has meas meditationes debita cum attentione legere atque examinare velint.

Magnetem ratione pororum a reliquis corporibus potissimum discrepare.

§. XI. Quodnam sit illud discrimen, quod magnetem a reliquis corporibus distinguit, atque aptum reddit ad tam insignes & mirabiles proprietates recipiendas, quæ in reliqua corpora solo ferro excepto, nullo modo cadere queant; id quidem mihi per exclusionem certissime definiri posse videtur. Cum enim ad hæc phænomena producenda materia subtilis extra magnetem subsistens requiratur, hujus respectu in ipso magnete non nisi pororum, per quos materiæ subtili transitus vel concedatur vel denegetur, ratio haberi poterit. Quod igitur magnes tam singulari præditus sit proprietate, id a configuratione pororum ejus venit, in qua propterea positum est illud, quod quærimus, discrimen magnetem a reliquis corporibus distinguens. Quo diligentius autem omnes magnetis effectus perpendimus, eo magis in hac sententia confirmamur: maxime autem hoc elucet, si attendamus cum ferro per solum contactum virtutem magneticam communicari posse; quo contactu cum neque addatur neque auferatur quicquam, neque etiam magnes de virtute sua quicquam amittat, nihil aliud reliquum est, cui effectum tribuamus, præter pororum confor-

matio-

mationem; in qua igitur præcipuum diſcrimen magnetis a reliquis corporibus eſt poſitum. Hanc eandem veritatem Celeb. Muſſchenbroeckius adeo agnoſcit, etſi conſtanter neget effectus magneticos mechanice explicari poſſe: qui cum omnibus hypotheſibus bellum perpetuum indixiſſet, ejus teſtimonium, ſi ullo ad ſententiam corroborandam egerem, plurimum ponderis habere debebit.

§. XII. Hinc autem porro Sollertiſſimus iſte Obſervator recte concludit, a ſola pororum figura ea phænomena, quæ in magnete conſpicimus, minime oriri poſſe, quod quidem ita certum eſt, ut nulla probatione indigeat. Eatenus enim tantum a poris effectus ſenſibilis reſultare poteſt, quatenus materiæ cuipiam fluidæ per eos vel tranſire vel non transire liceat. Quamobrem præter certam pororum magnetis figuram neceſſario ſtatui debebit materia quædam fluida, quæ cum ſenſibus non percipiatur, jure merito ſubtilis vocatur, neque tamen ideo minus certe exiſtit, quam ſi ipſam manibus palpare liceret. In hoc enim negotio ſane rationis judicium plus valere debet, quam ſenſuum teſtimonium, quippe quod niſi ſimul ratione ſuffulciatur, nullam omnino vim retinet; cum contra ratio etiam ſine ſenſibus ad profundiſſimas veritates penetrare valeat. Hoc igitur loco a Muſſchenbroeckio diſſentire cogor, qui cum pororum formas phænomenis producendis impares agnoviſſet, neque tamen ad ullam materiam ſenſus non afficientem confugere auſus eſſet, ſibi viam atque aditum ad cognitionem cauſæ penitus præcluſit.

Solos poros non ſufficere ad phænomena producenda, ſed materiam ſubtilem præterea equiri.

§. XIII. Quemadmodum igitur pori reſpectu iſtius materiæ ſubtilis ſint comparati, ante omnia eſt definiendum. Ac primo quidem perſpicuum eſt, ſi pori magnetis penitus eſſent impervii materiæ ſubtili, tum præcipua magnetis

Pori magnetis materiæ ſubtili non quaqua verſus transitum concedunt.

phænomena, quæ in directione ſecundum certam plagam conſiſtunt, nullo modo produci poſſe: foret enim magnes utique ad omnes ſitus indifferens. Idem eveniret, ſi magnes quaqua verſus materiæ ſubtili tranſitum liberrime concederet; pariter enim nulla eſſet cauſa, cur magnes unum potius ſitum affectaret, quam ullum alium; cum in omni ſitu materia ſubtilis æque facile permeare poſſet. Cum itaque magnes neque prorſus impervius ſit huic materiæ ſubtili, neque liberrime tranſitum concedat, nil aliud reliquum eſt, niſi ut ſtatuamus, magnetem tranſitum quidem huic materiæ ſubtili concedere, at non liberrime, neque quaquaverſus æquali cum facilitate. Hoc modo jam conſequimur id, in quo cardo rei verſatur, quod magnes non ad omnes ſitus ſit indifferens, ſed perpetuo unum præ reliquis omnibus affectare debeat.

Materia ſubtilis ſecundum unicam directionem per magnetem fluere poteſt.

§. XIV. Pori igitur, per quos materia ſubtilis fluere poteſt, in magnete ſecundum certam quandam directionem erunt diſpoſiti, ita ut materia ſubtilis nonniſi ſecundum hanc directionem corpora magnetica permeare valeat. Talem ſtructuram clariſſime evincit conſtans illa, quam magnes affectare ſolet, directio: niſi enim in ipſo magnete pori ejusmodi conſtantem directionem ſequerentur, ratio ſane foret nulla, cur magnes unam præ reliquis poſitionem deſideraret. Hinc igitur pori in magnete ſecundum certam ac determinatam directionem meatus ſeu canales efformare videri poſſent, qui materiæ ſubtili ita tranſitum præbeant, ut ea ſecundum alias directiones permeare nequeat. Attamen hoc modo duæ remanerent directiones ſibi e diametro oppoſitæ, ad quas magnes induendas æque proclivis eſſe deberet. Concipiantur enim iſti meatus ſecundum directionem AB, efformati, atque perſpicuum erit, materiam ſubtilem æque ſecundum directionem AB atque contrariam BA per magne-

Fig. 1

tem

tem fluere posse. Quod cum experientiæ adversetur, qua constat magnetem seu acum magneticam non in duplici situ quiescere posse, necesse est, ut isti meatus non sint utrinque similes, sed ita dissimiles, ut dum materiæ subtili transitum secundum alteram directionem AB concedunt, eidem transitum secundum contrariam directionem BA denegent.

Structura meatuum magneticorum ex analogia determinatur.

§. XV. Cum igitur meatus magnetici materiæ subtili transitum quidem permittant, reditum autem in eadem directione recusent, similes propemodum erunt canalibus in corpore animali, qui in sua cavitate sanguinem aliaque fluida devehunt, regressum vero non admittunt, qui effectus valvularum ope obtinetur. Quoniam ergo natura in suis operationibus constantes observat leges, atque ad similes effectus producendos similibus perpetuo utitur causis, dubitare non licet, quin reversio materiæ subtilis in meatibus magneticis per similem machinationem impediatur. Hanc ob causam leges naturæ atque adeo veritatem studiosissime mihi quidem sequi videor, si meatus magneticos similibus valvulis instructos statuam, quibus efficiatur, ut materia subtilis in A satis libere intrare et ad B exire queat, contra vero ipsi ad B ingressio et progressio versus A per has valvula præcludatur. Qua ratione autem hæ valvulæ sint constructæ, nosse non admodum refert; dummodo regressui materiæ subtilis coercendo sint aptæ. Interim tamen verisimillimum est, eas a villis seu fibrillis tenuissimis internam meatuum cavitatem obsidentibus atque ab A versus B reclinatis efformari. Hujusmodi structura non solum ob simplicitatem veritati maxime est consentanea, sed etiam per ea experimenta, quibus virtus magnetica tam facile produci, iterumque destrui posse ostenditur plenissime confirmatur. Fig. 2.

Pororum conformatio in magnete ac ferro simulque in reliquis corporibus exponitur.

§. XVI. Præcipuum igitur diſcrimen, quo magnes ac ferrum a reliquis corporibus diſtinguitur, ita in pororum diſpoſitione eſt poſitum, ut magnetis et ferri magnetica virtute jam imbuti pori conſtituant meatus utrinque quidem apertos, at valvulis ſeu villis ita inſtructos, ut materia ſubtilis ad alteram tantum extremitatem intrare, et per totum meatum progreſſa in altera extremitate exire queat. In ferro autem virtutis magneticæ experte inſunt quidem pori illi fibrillis valvularum vices ſuſtinentibus obſiti, verum nondum ita ordinati ut meatus continuos, in quibus fibrillæ illæ ubique ſecundum eandem plagam ſint reclinatæ, conſtituant. Hac corporum magneticorum ſtructura evicta, manifeſtum eſt reliqua corpora omnia ejusmodi poris ac meatibus carere debere; quamobrem vel quaquaverſus materiam illam ſubtilem liberrime tranſire ſinunt, vel omnino ipſi erunt impervia. Experientia autem manifeſto docet, materiam iſtam ſubtilem, a qua virtus magnetica pendet, reliqua corpora omnia liberrime permeare; propterea quod effectus magnetis a corporibus quibuscunque interpoſitis prorſus non impeditur: quod fieri non poſſet, niſi materia ſubtilis liberrimum tranſitum per omnia corpora non magnetica inveniret.

Materia ſubtilis meatus magneticos permeans eſt pars aetheris.

§. XVII. Quod porro ad materiam illam ſubtilem attinet, quæ meatus magneticos percurrendo virtutem magneticam dictam producat, eam primum ab aere eſſe diverſam dubitari omnino nequit; cum quod ea reliqua corpora liberrime permeat, tum vero maxime, quod eadem magnetis phænomena in vacuo obſerventur. In aethere igitur iſta materia ſubtilis reſideat neceſſe eſt, ſi quidem univerſum fluidum maxime elaſticum undique diffuſum aetheris nomine complectamur. Non ſolum autem veriſimile

mile eſt, univerſum aetherem non ex materia homogenea eſſe conflatum; ſed mox ex ipſis magnetis phænomenis fuſius oſtendetur, duplicem ſaltem materiam, alteram craſſiorem, alteram ſubtiliorem in æthere ſtatui debere, quarum hæc tantum, quæ eſt ſubtilior, per meatus magneticos tranſire valeat, altera craſſiore penitus excluſa. Interim hoc diſcrimen non impediet, quo minus utraque materia aetheris aequali vi elaſtica ſit prædita, ita ut univerſus aether hoc non obſtante ubique eadem atque aequabilili elaſticitate gaudeat. Cum igitur hæc hypotheſis nullam contradictionem involvat, ob rationes mox allegandas ſtatuo præcipuam virtutis magneticæ cauſam in aetheris parte ſubtiliſſima eſſe poſitam, atque meatus magneticas tam eſſe arctos, ut iſtam partem ſubtiliſſimam tantum transmittant, craſſioribus autem moleculis ſint impervii. Reliqua autem corpora omnia aetheri tranſitum liberrime concedere extra dubium eſt poſitum.

Materias aetheris diverſas difficulter uniri.

§. XVIII. Eſt itaque aether fluidum heterogeneum ex particulis diverſæ molis conflatum, ſimili modo, quo aerem ex diverſis materiis compoſitum eſſe conſtat; nihilo vero minus aether perinde ac aer, ſi variæ iſtæ particulæ aequabiliter fuerint inter ſe permiſtæ, fluidum homogeneum mentietur: ſin autem iſtæ materiæ a ſe invicem fuerint ſecretæ, tum utique fluida conſtituent heterogenea, quæ etiamſi ratione elaſticitatis in æquilibrio conſiſtant, tamen non niſi difficulter rurſus inter ſe permiſceantur. Similis ſcilicet conditio in omnibus fluidis, quæ ex moleculis diverſæ magnitudinis conſtant, deprehenditur; quemadmodum in aqua et oleo, vel etiam in aere et aqua manifeſtum eſt, quæ materiæ etſi in debita ratione permiſtæ conſiſtere poſſunt, tamen a ſe invicem ſegregatæ difficulter ſe iterum permiſceri patiuntur. Hic itaque nihil aſſumo, niſi quod

 cum

cum veritati maxime ſit conſentaneum, tum vero etiam conſtanter a natura effici obſervetur. Quamobrem hanc mihi hypotheſin concedi jure equidem poſtulare poſſem, etiamſi nullas præterea rationes afferrem: cum autem clariſſime ſim oſtenſurus, omnia magnetis phænomena tam facile ac legibus naturæ convenienter hinc explicari poſſe, hanc indolem aetheris etiam demonſtraſſe jure mihi videbor.

Atheris pars tantum ſubtilior per meatus magneticos transfluit.

§. XIX. Hæc jam ſunt duo illa principia, in quibus conjunctis cauſa omnium effectuum magneticorum continetur, quorum alterum in peculiari magnetis ac ferri ſtructura eſt poſitum, alterum vero in aetheris natura. In magnete nimirum plurimi inſunt meatus filamentis quaſi valvulis obſiti, per quos ſubtilisſimæ aetheris particulæ tranſire queant, craſſiores vero penitus excludantur. Quoniam vero non totus magnes hujusmodi habet ſtructuram, ut ipſi nihil cum reliquis corporibus ſit commune, præter hos meatus magneticos aliis quoque poris amplioribus ſcatebit, qui non ſolum materiæ aetheris ſubtiliori ſed etiam craſſiori liberum tranſitum concedant. Ætheris porro indoles facilius percipietur, atque adeo mechanice explicari poterit, ſi eum ex infinitis vorticulis, in quibus materia ſubtiliſſima rapidisſime in gyrum agatur, compoſitum concipiamus, cujusmodi ſtructuram ſumma aetheris elaſticitas declarat: ſpatia autem anguloſa, quæ inter iſtos vorticulos relinquuntur, ab aliis vorticulis longe minoribus occupari veriſimillimum eſt; atque hi vorticuli minores materiam illam aetheris ſubtiliorem meatus magneticos percurrentem exhibere mihi quidem videntur. Hinc autem difficultas, qua iſti minores vorticuli, ſi a reliquo aethere ſemel ſint ſeparati, ſe iterum inſinuent, perſpicue intelligitur.

§. XX.

§. XX. Hisce duobus stabilitis principiis videamus, quid ex iis conjunctis consequi debeat. Ac primo quidem manifestum est, præter magnetem omnia corpora in aethere nullum sensibilem effectum esse productura, cum neque quieti neque motui ejus obsistant: ita ut aether in eodem fere statu sit permansurus, sive insint in ipso corpora non magnetica sive minus. At vero corporum magneticorum aethere circumdatorum longe alia erit ratio propter illos meatus, qui in altero tantum termino parti aetheris subtiliori introitum permittunt; ob quam singularem structuram fit, ut aether hæc corpora ambiens in aequilibrio esse nequeat. Propter summam enim elasticitatem aether in hiatus istorum meatuum fortissime premet, et quoniam a parte opposita hæc pressio compesci nequit, necesse est, ut particulæ aetheris subtiliores in meatus illos magneticos, qua introitus patet, ingenti vi irrumpant; quo pacto aetheris partes subtiliores a crassioribus secernentur. Tum vero hæ particulæ penetratis meatibus in alteris terminis prorumpent, ubi quia sese cum aethere ambiente subito permisceri non patiuntur, quasi a fluido heterogeneo reflectentur, motumque, qua minime resistitur, tamdiu conservabunt, quoad ab aethere ambiente sensim absorbeantur, sinibusque angularibus iterum includantur.

Effectus materiæ subtilis in magnetem generatim exponitur.

§. XXI. Quo hæc, quippe in quibus omnis cardo præsentis quæstionis versatur, diligentius evolvantur, ordiamur ab ipsa terra tanquam fonte et communi receptaculo tam magnetis quam ferri. Abundabit ergo terra propter ingentem mineræ tam magnetis quam ferri copiam in visceribus inclusam, maxime talibus meatibus, quales in unoquoque magnete inesse ostendi. Et hancobrem cum primum terra initio aethere fuerit circumfusa, necesse est, ut materia

Vortex magneticus circa terram efformari debuit.

teria

teria illius ſubtilior hos terræ meatus magneticos ſtatim ſic ingreſſa: id quod maxima cum celeritate eſt factum, quia in has cavitates quaſi in loca vacua ſumma vi irrupit. Tanta ergo celeritate emenſis ſingulis meatibus materia hæc ſubtilis in ætherem ambientem proſiluit, ab eoque tanquam ab obice firmo eſt reflexa, ſimili fere modo quo aer contra aquam fortiſſime impulſus repercutitur, atque ad latera deflectitur. Quare hæc materia qua minimam invenit reſiſtentiam, moveri perrexerit neceſſe eſt; ad latera autem defluere debuit, quoniam reverti, unde venerat, tam ob ſtructuram meatuum, quam ob materiam ſimili vi inſequentem, minime potuit. Facile igitur ad latera defluens ad orificia meatuum revertetur, in quæ initio intraverat; ubi non ſolum nullam reſiſtentiam offendet, ſed quia liberrime ingredi poteſt, eo undiquaque preſſa quaſi attrahetur. Cum igitur fuerit denuo in hos meatus ingreſſa atque ſimili modo reverti debeat, mox flumen continuum ſeu vorticem perrennem circa terram formare debuit; propterea quod materia ſubtilis ex meatibus erumpens veſtigia antecedentis continuo ſequendo quaſi ſponte ad orificia meatuum perducitur, hocque motu periodico ſine ulla intermiſſione agitatur.

Fig. 3. Formatio vorticis circa terram exiſtentis uberius explicatur.

§. XXII. Si igitur globus A B repræſentet tellurem, in qua meatus magnetici ab A ad B ſint diſpoſiti, ita ut materia ætheris ſubtilior ad A ingrediatur, in B vero exeat; tum ob rationes expoſitas materia ſubtilis ad B erumpens utrinque deflectet, atque ad C & C circumfluendo revertetur ad A, ubi denuo in meatus magneticos intrabit, ſicque vorticem permanentem circa terram conſtituet. Neque tamen perpetuo eadem materia ætheris ſubtilior ad hunc vorticem formandum impendetur, ſed in C & D continuo quædam particulæ cum æthere circumfuſo ſeſe permiſcebunt; quæ

jactura

jactura autem statim per novam similis materiæ subtilioris ab æthere secretionem ad A factam resarcietur: ita ut non obstante perpetua permixtione, quæ fit dum materia subtilis extra meatus per ætherem revolvitur, vortex tamen perennis conservetur. Erunt igitur A & B ambo terræ poli magnetici, qui cum a dispositione meatuum magneticorum AB pendeant, neque cum veris terræ polis singularem habeant connexionem, mirum non est, quod poli magnetici a polis mundi discrepent: unde declinationis magneticæ causa potissimum originem trahit; quæ autem in sequentibus accuratius perpendetur.

§. XXIII. Quoniam si terra tolleretur, æther in regione ABCD fere quiesceret, quæstio sponte se offert, unde, terra in AB constituta, tam vehemens motus in materia ætheris subtilior oriatur: constat enim motum sine dispendio virium omnino produci non posse. Cum igitur demonstraverim istum motum a vi ætheris elastica generari, necesse est ut hæc vis elastica circa terram sensibiliter diminuatur; atque satis probabile videtur, hanc diminutionem vis elasticæ reciproce proportionalem esse distantiis a centro terræ. Hoc autem concesso causa gravitatis tanto studio anquisita fit maxime obvia: sit enim corpus Pp ad distantiam OP a centro terræ O positum; cujus crassities Pp respectu distantiæ OP quasi sit nulla. Quod si jam vis ætheris elastica absoluta ponatur $= E$, erit hæc vis diminuta in

Causa gravitatis indicatur.

Fig. 4.

$P = E - \frac{A}{OP}$, & in $p = E - \frac{A}{Op}$. At illa vi corpus deorsum, hac vero sursum urgetur; unde vis, prævalens, quæ corpus deorsum urgebit, erit $= \frac{A}{Op} - \frac{A}{OP}$

$= A.$

$= \frac{A.\,Pp}{Op.\,OP}$, ideoque proportionalis reciproce quadrato diſtantiæ corporis a centro O. Hic autem locus non eſt hæc fuſius perſequendi, ac pro rei dignitate confirmandi: interim tamen hæc tranſitio plurimum valere debebit ad theoriæ præſentis veritatem evincendam; propterea quod ſolius veritatis hoc eſt proprium, ut cum omnibus phænomenis perfectiſſime conveniat.

Gravitas univerſalis corporum mundanorum explicatur.

§. XXIV. Cum igitur gravitas inde oriatur, quod in vicinia terræ vis ætheris elaſtica debilitetur ob vorticem magneticum circa terram formatum; perquam veriſimile eſt ſolem atque planetas pariter ejusmodi meatibus magneticis abundare, hincque circa corpus cujusque ſimilem vorticem materiæ ætheris ſubtilioris exiſtere, quo vis elaſtica ætheris in vicinia horum corporum pro inverſa diſtantiarum ratione diminuatur, ſicque gravitas univerſalis rationem diſtantiarum inverſam duplicatam ſequens efficiatur. Hæc certe gravitatis explicatio, ſicuti quaſi ſponte ſe obtulit, ita ſtatim omnibus reliquis explicationibus, quæ adhuc ſunt excogitatæ, facile palmam præripit, quia non ſolum non tantis difficultatibus quam reliquæ premitur, ſed etiam tam facile atque naturæ convenienter omnia phænomena feliciſſime explanat. Non dubitarem quoque ex hoc eodem principio cauſam virtutis electricæ dilucide explicare: verum quoad hæc mihi fuſius evolvere liceat, in eum tantum finem hæc annotare viſum eſt, quo veritas ſyſtematis, in quo corroborando ſum occupatus, eo magis eluceret, atque adverſus omnes objectiones, quas equidem non admodum pertimuerim, firmius conſiſtat.

Vorticis magnetici motus curatius definitur.

§. XXV. Quod igitur ad vorticem illum materiæ ſubtilis circa terram formatum attinet, ſtatim manifeſtum eſt

eſt celeritatem materiæ ſubtilis in meatibus AB, ubi a reliquo æthere omnino eſt ſeparata, eſſe maximam, ideo quod a ſumma vi elaſtica ſollicitata in his meatibus fere nullam ſentit reſiſtentiam. Quando vero ad B ex his meatibus prorumpit, ab æthere circumfuſo quaſi reflectitur, & directionem ſuam ad latera C & D inflectere cogitur, tum ejus celeritatem vehementer diminui oportet. Hanc ob cauſam flumen hujus materiæ ſubtilis extra terram plurimum amplificabitur, perinde ac fluvius ubi minori celeritate progreditur, in majus ſpatium ſe ſimul expandit, ita ut in quovis loco celeritas ſit amplitudini ſpatii, quod occupat, reciproce proportionalis. Huc autem accedit, quod cum hac materia ſubtiliori extra meatus magneticos mota non exigua ætheris naturalis portio permiſceatur; quo fit, ut volumen vorticis extra terram eo magis augeri, contra vero celeritas diminui debeat. Fig. 5.

§. XXVI. Rationes igitur hæ ſatis dare evincunt motum materiæ ſubtilis cum reliquo aethere jam permixtæ admodum lentum eſſe debere, quocirca ab hoc vortice quamvis motus ſit curvilineus, tamen nulla ſenſibilis vis centrifuga, qua effectus gravitatis turbari queat, ſe manifeſtare poterit. Hoc igitur maxime mea explicatio tam virtutis magneticæ quam gravitatis atque adeo attractionis univerſalis a reliquis ſe diſtinguit, quod dum alii omnes vires in vi centrifuga poſitas ſtatuant, ego huic vi nullas vices tribuam; ſed hæc omnia phænomena a ſola vi elaſtica aetheris derivem: unde ſimul corporum cohæſionem ac duritiem pendere, omnino dubitari nequit, quo ipſo theoriæ meæ maximum firmamentum accedere nemo inficiabitur. Appellabo autem in poſterum materiam illam aetheris ſubtiliorem meatus magneticos pervagantem, diſtinctionis cauſa materiam

Status aetheris terram ambientis exponitur.

riam magneticam, quæ cum in aethere naturali ſatis raro ſit diſperſa, tamen in vicinia terræ in majori portione cum aethere erit permixta, eo quod continuo per meatus magneticos a reliqua aetheris maſſa ſecernitur. Hanc obrem univerſa terra circumfuſa erit fluxu perpetuo aetheris multo majori copia materiæ magneticæ imprægnati, quam quidem in aliis regionibus a terra aliisque corporibus mundanis multum remotis in ſe complecti ſolet.

Origo meatuum magneticorum traditur.

§. XXVII. Si jam originem meatuum magneticorum in terra formatorum ſpectemus, perinde erit ſive dicam eos ſimul cum terra eſſe creatos, ſive ſucceſſu temporis demum ab ipſa materia magnetica effectos: verum tamen poſterius veritati magis videtur conſentaneum. Cum enim iſti meatus conſtent poris magneticis ſecundum certam directionem diſpoſitis atque valvulis inſtructis, etiamſi ſi pori initio nondum ita fuiſſent ordinati, tamen quia ſunt mobiles, a materia magnetica, cum ſimel fuerit ingreſſa, facile ſecundum certam directionem diſponi, ſicque in meatus continuos efformari potuerunt. Magna namque debet eſſe vis materiæ magneticæ, cum ſemel poros corporum magneticorum intrare coeperit, ob ſummam celeritatem, qua tum movetur. Hacque vi, ſi percurſo quopiam ſpatio poros minus congrue diſpoſitos offenderit, eos facile ad ordinem dirigere, atque filamenta tenuiſſima, quibus pori ſunt obſiti, ita inflectere valuit, ut meatus continuos conſtituerent. Statuendum igitur eſt, id quod veriſimillimum aliunde conſtat, per totam terram corpora magnetica continuo tractu et extitiſſe et etiamnunc exiſtere; neque tamen hinc ſequitur meatus magneticos ubique ſecundum lineas rectas progredi, ſed ſufficit dummodo ab uno termino ad alterum ſint continui. Multo minus ex his colligi poteſt,

polos

polos magneticos terræ ſibi ediametro eſſe oppoſitos, quin potius fieri poteſt, ut in terra plures duobus polis magneticis exiſtant, de quo infra videbo. Interea hinc ſatis tuto concludere licet, quoniam meatus magnetici per terræ viſcera continuo tractu extenduntur, terram intus non eſſe excavatam, uti nonnullis philoſophis eſt viſum.

§. XXVIII. Meatus iſti magnetici in terra ſemel efformati perpetuo in eodem ſtatu permanere deberent, ſi quidem terra quieſceret, neque in viſceribus ejus ulla ſive deſtructio ſive generatio corporum magneticorum eveniret. Cum autem terra ingentibus mutationibus etiam in imis viſceribus ſit obnoxia, meatus magneticos hinc quoque aliquam alterationem perpeti debere, maxime probabile eſt. Imprimus vero motus terræ diurnus non exiguam mutationem in meatibus magneticis producere debebit. Quia enim terra intervallo unius diei circa axem ſuum ab occaſu in ortum rotatur, effectus aetheris idem erit, ac ſi terra quieſceret, aether autem aequali celeritate ab ortu in occaſum circumferretur. Ob hunc motum aether in meatus magneticos oblique incurrens vim exercebit ad meatuum directionem immutandam, hincque polos terræ magneticos ab ortu ad occaſum promovendos. Quoniam vero pori magnetici facile ſe mutari patiuntur, uti ex ferri phænomenis concludere licet, ejusmodi polorum magneticorum variatio ſucceſſu temporis actu animadverti debebit, eritque iſte effectus eo ſenſibilior, quo longius poli magnetici a polis mundi fuerint remoti. Ex his itaque cauſa vera mutabilitatis polorum magneticorum terræ, hincque oriundæ mutabilitatis declinationis magneticæ clariſſime explicatur.

Meatus magnetici in terra ſunt mutabiles.

In terra plures duobus polis magneticis inesse possunt.

§. XXIX. Quanquam hactenus duorum tantum polorum magneticorum terræ mentionem feci, tamen ex iisdem principiis facile intelligetur, structuram terræ internam ita comparatam esse posse, ut plures polos exhibeat, atque adeo Halleji systema cum hac theoria egregie consistestere possit, qui prope utrumque polum mundi binos polos magneticos statuit. Si enim terra circa centrum et axem per notabile intervallum magneticis corporibus careat, ita ut meatus magnetici A B et *a b* sensibiliter sint a se invicem sejuncti, tum poli A et *a*, itemque ex altera parte B et *b* confundi atque unum polum constituere non poterunt: sed quatuor polos diversos repræsentabunt, qui a polis mundi P et *p* vel aequaliter vel inæqualiter distabunt, prout directiones meatuum fuerint axi P*p* parallelæ vel secus: atque ipsa systemata meatuum AB et *ab* magis minusve ab axe sint remota. Cum autem hæc ab interna constitutione terræ pendeant, a priori minime determinari poterunt, sed ex ipsis phænomenis concludi debent; quod negotium observationes circa declinationem et inclinationem acus magneticæ institutæ, potissimum conficient. Sufficiat igitur possibilitatem plurium polorum magneticorum in terra ostendisse, atque ex theoria docuisse hos polos propter motum vertiginis terræ continuo ab ortu in occasum circumferri debere, quod ipsum cum experientia mirabiliter concordat.

Fig. 5.

Virtus singulorum magnetum a vortice terræ potissimum oritur.

§. XXX. Hæc in genere de universa tellure, quatenus virtute magnetica pollet, annotare visum est, antequam theoriam in specie ad magnetem ac ferrum applicarem; quoniam virtus magnetica, quæ in magnete ac ferro deprehenditur, maximam partem vortici illi materiæ magneticæ circa terram formato originem suam debet. Etsi enim in unoquoque

quoque magnete, ſi a terra remotus in æthere verſaretur, ſimilis materiæ ſubtilis motus periodicus et quaſi vortex naſci deberet; tamen is cum ob corporis parvitatem tum propter meatuum paucitatem reſpectu vorticis terreſtris maxime debilis atque adeo vix foret ſenſibilis: ſin autem magnes jam in vortice terræ ſit conſtitutus, multo majorem acquiret virtutem; propterea quod materia magnetica hoc loco valde abundat, neque demum a reliquo aethere ſecerni debet. Tum vero, in quo maximum poſitum eſt momentum, materia magnetica in vortice terræ jam motu eſt prædita, quo fit ut non ſolum in meatus magneticos majori vi irrumpat, ſed etiam hos meatus ſecundum ſuam motus directionem diſponere valeat; unde in magnete vis ſeſe verſus certas plagas convertendi naſcitur, quæ prorſus abeſſet, ſi magnes in aethere adhuc quieſcente verſaretur, quippe quo caſu magnes ad omnes ſitus foret in differens. Hunc igitur duplicem vorticis terræ effectum in ſingulos magnetes diligentius perpendere conveniet, ut intelligatur, cujusmodi phænomena in unoquoque magnete ſolitario evenire debeant: quo facto, quemadmodum plures magnetes tum inter ſe tum ratione ferri affecti eſſe debeant inveſtigabo.

§. XXXI. Cum igitur materia ſubtilis magnetica in aethere terræ circumfuſo ingenti copia abundet, in cujusque magnetis meatus magna vi irrumpet, atque ob ſummam aetheris elaſticitatem vehementi rapiditate per eos fluet. Tanta igitur celeritate ex his meatibus quoque prorumpet, quam cum ob reſiſtentiam aetheris conſervare nequeat, primum ipſa celeritas ſtatim diminuetur, tum vero directio ad latera inflectetur atque ſtatum permanentum quærendo tandem ita motus temperabitur, ut ad orificia meatuum

Circa ſingulos magnetes vortex magneticus generatur.

um revertatur. Continuo ergo tranſitu per meatus atque reditu vortex omnino ſimilis ei, quem circa terram generatum eſſe oſtendi, circa ſingulos magnetes efformabitur. In hujusmodi autem vortice minore unum magnetem ambiente materia ſubtilis magnetica multo inerit copioſior, quam in vortice terreſtri, eo quod non ſolum eadem materiæ magneticæ copia adeſt, ſed etiam per meatus magnetis continuo nova ſecretio iſtius materiæ ſubtilioris aetheris a craſſiore accedit. Quare cum virtus magnetica a copia materiæ magneticæ in quovis vortice contentæ pendeat, circa magnetes hæc virtus multo magis vigebit, quam circa terram, atque ob hanc rationem virtus magnetica terræ generalis etiam a minimo magnete facile ſuperatur, quod quamvis per experientiam ſit notiſſimum, tamen clarius perſpicietur, ſi in effectus virtutis magnetis, qui in mutua attractione et directione conſiſtunt, data opera inquiremus.

Magnes non poteſt eſſe ad omnes ſitus indifferens.

§. XXXII. Si materia ſubtilis magnetica circa terram quieſceret, tum ob ſummam elaſticitatem irrumperet quidem in cujusque magnetis meatus vorticemque formaret, verum nullam prorſus vim exereret ad magnetem ſecundum certam plagam dirigendum, cum magnes utcunque poſitus eodem modo reſpectu materiæ ſubtilis ſit affectus, neque vis aetheris elaſtica quicquam lucraretur, ſi magnetem in hanc potius quam aliam plagam dirigeret. Eſt autem hæc lucri commemoratio non vox inanis, verum in univerſa rerum natura maximum habet pondus: ubique enim obſervamus vires in mundo exiſtentes nil niſi lucri cauſa facere, atque effectum ſemper ita eſſe comparatum, ut eo conatus et quaſi appetitus virium ſollicitantium maxime expleatur; ſic funis ſuſpenſus, ſeu catena eam induit curvaturam, ut ejus

ejus centrum gravitatis infimum occupet locum, quoniam hoc modo conatus gravitatis maxime expletur. Atque ex hoc principio omnes quæſtiones naturales, etiamſi vias eas a priori reſolvendi nulla pateat, tamen per methodum maximorum ac minimorum feliciſſime reſolvi poſſunt; id quod pluribus exemplis jam luculenter a Geometris eſt oſtenſum, atque multis aliis novis oſtendi poſſet. Quamobrem ſi in determinatione effectus a materia magnetica in meatus incurrente oriundi aqua mihi ob defectum principiorum ſubinde hæreat, iſte defectus per illud principium univerſale convenientiſſime ſupplebitur, neque ullum erit periculum ob ignorantiam principiorum genuinorum in errores prolabendi. Quin etiam hoc modo plures alias tædioſi calculi evitari poſſunt.

§. XXXIII. Ex hac naturæ lege univerſali dijudicare licet, quomodo magnes in vortice terreſtri magnetico poſitus affici debeat. Ac primo quidem ſi a motu hujus materiæ ſubtilis abſtrahamus, ea, uti jam eſt oſtenſum, in meatus magnetis penetrabit, et vorticem circa magnetem efformabit, qui multo magis materia ſubtili magnetica abundabit quam vortex terreſtris, in quo continetur. Quod autem ad motum vorticis terreſtris attinet, perſpicuum eſt ſi directio meatuum magnetis ita congruat cum motu materiæ ſubtilis, ut etiam curſum non inflectendo in meatus ingredi poſſit, tum motum fore celerrimum, et penetrationem meatuum minima difficultate perfici; quoniam et vis elaſtica et motus in materia ſubtili jam inſitus ad eundem effectum producendum concurrunt. Cum igitur in hoc ſtatu maximus effectus producatur, dubium eſt nullum, quin vortex terræ magneticus vi ſit præditus magnetes quosvis in

Directio magnetis convenire debet cum motu materiæ magneticæ.

in hanc ipſam directionem, in qua effectus oriatur maximus, dirigendi. Atque hoc æque certe evenire debere ſtatuendum eſt, ac ſi ipſæ vires, quibus iſta directio efficiatur, perfectiſſime eſſent cognitæ. Quamvis autem in hac ratione acquieſcere poſſemus, tamen quia in hac magnetum converſione omnis theoriæ cardo verſatur, operam dabo, ut clarius intelligatur, quomodo iſte effectus ſecundum leges mechanicæ producatur; quo magis ex conſenſu cauſæ finalis cum cauſa efficiente veritas theoriæ perſpiciatur atque confirmetur.

Converſio magnetis verſus certam plagam mechanice explicatur.

Fig 6.

§. XXXIV. Conſideremus unicum meatum magneticum in vortice terreſtri libere poſitum: quod enim in uno meatu evenire debere oſtendetur, idem in pluribus atque ideo in integro magnete uſu venire debet. Teneat igitur meatus magneticus ſitum AB, atque materia ſubtilis vorticoſa hoc loco moveatur ſecundum directionem AC, cujus celeritas per hanc rectam AC exprimatur, ita ut directio meatus AB cum directione motus materiæ ſubtilis angulum conſtituat BAC; qui angulus ſi foret nullus, dubium non eſt, quin meatus in hoc ſtatu permanſurus eſſet. Conſideretur nunc celeritas, qua materia ſubtilis magnetica in meatum eſſet irruptura, ſi quiſceret, et a ſola elaſticitate urgeretur, et repræſentetur hæc celeritas per rectam AB. Quoniam igitur materia ſubtilis et proprium habet motum AC et ad motum AB ſuſcipiendum ſollicitatur, duplici hoc motu efficietur, ut materia ſubtilis annitatur promoveri ſecundum directionem diagonalis BD, completo parallelogrammo ABDC, cum celeritate per ipſam diagonalem AD expreſſa. Ex hoc conatu ſecundum directionem AD movendi naſcetur neceſſario vis meatum verſus hanc

hanc ipſam directionem convertendi, quæ vis cum a celeritate ipſa AD, tum ab angulo BAD pendebit. Cum igitur meatus AB in A urgeatur in directione AD, reſoluta hac vi in normalem ad AB & incidentem, illa, quæ erit ut AD. ſin BAD exhibebit vim convertentem. Quare cum ſit ex Trigonometria AD : AC = ſin BAC : ſin BAD, erit AD. ſin BAD = AC. ſin BAC: & hanc obrem vis meatum AB verſus directionem vorticis AC convertens erit ut AC. ſin BAC.

§. XXXV. Hinc ergo erit vis, qua meatus magneticus AB verſus directionem vorticis AC inflectitur in ratione compoſita ex celeritate materiæ vorticoſæ AC, & ſinu anguli BAC, quo ſitus magnetis a directione AC diſſidet. Cum igitur celeritas materiæ vorticoſæ AC maneat quaſi eadem, meatus magneticus quieſcere non poterit, niſi cum fuerit ſinus anguli BAC = o, quod quidem duobus caſibus fit altero quo angulus BAC = o; altero quo BAC = duobus rectis. Quamvis autem hoc poſteriori caſu quieſcere poſſit, tamen hic non dabitur ſtatus quietis permanens, ſed ſtatim ac meatus vel tantillum ab hoc ſitu declinatur, tum ſeſe in alterum æquilibrii ſtatum permanentem, ubi BAC = o, recipiet, ubi acquieſcere poterit. Maxime autem in hunc ſitum contendet, ſi ab eo ad angulum rectum diſtet, hoc eſt ſi angulus BAC fuerit rectus, tum enim hujus anguli ſinus fit maximus quippe ſinui toti æqualis; ſin autem angulus BAC fuerit ſive acutus ſive obtuſus vis erit minor. Præterea autem notandum eſt, quoniam non omnis materia ætheris circumfuſi per meatum tranſire poteſt, ſed tantum ejus pars ſubtilior, quam materiam magneticam voco, etiam copiam hujus materiæ in ſuperiorem expreſſionem AB. ſin BAC eſſe introducendam: ita ut ſit vis convertens proportionalis producto ex copia materiæ magneticæ circa magne-

Vis magnetem convertens determinatur.

 tem

tem exiſtentis, ejus celeritate, & ſinu anguli, quo directio meatus a directione motus vorticis diſtat.

Magnetum anomalorum ratio explicatur.

§. XXXVI. Quilibet igitur magnes, qui habet meatus ſuos inter ſe parallelos & fere in directum diſpoſitos, eum in vortice ſitum affectabit, ad quem unumquemque ſimplicem meatum urgeri oſtenſum eſt. Scilicet talis magnes, niſi ab aliena vi retineatur vel a gravitate impediatur, in eum ſitum ſe componet, in quo directio meatuum cum directione motus vorticis ita conſentiat, ut materia ſubtilis ſine ulla motus ſui inflexione in meatus intrare poſſit. Hinc autem excludendi ſunt magnetes compoſiti & quaſi anomali, vel ex pluribus magnetibus ſimplicibus conſtantes, vel in quibus meatus nec inter ſe ſunt paralleli, nec in directum formati. Hujusmodi magnetes idcirco plerumque plures duobus habent polos, ſimili modo quo terram quatuor polis præditam eſſe obſervationes declarare videntur. Quin etiam numerus polorum in eodem magnete impar eſſe poteſt, quod evenit ſi meatus, qui in altera extremitate disjuncti plures polos conſtituunt, iidem in altero termino uniuntur unicumque polum efformant. Sic magnes AB b, in quo meatus ad A uniti verſus B & b dirimuntur, tres habebit polos in A, & B ac b, quorum quisque eo erit fortior, quo plures meatus ad eum formandum concurrunt. Atque hinc etiam fieri poſſe intelligitur, ut unus tantum polus diſtinctus in magnete deprehendatur, quod eveniet, ſi meatus ad A concurrentes verſus alteram extremitatem ita divergant, ut nusquam tot coëant, quot ad polum diſtinctum repræſentandum requirantur. Cujusmodi igitur ſitum tales magnetes anomali in vortice terræ affectare debeant, facile colligere licet; cum enim ſinguli meatus ſitum

Fig. 7.

tum

tum intentum recipere nequeant, omnes conjunctim ejusmodi situm medium eligent, in quo vires dirigentes se mutuo in æquilibrio teneant.

§. XXXVII. Cum ergo magnetes anomali nullum amplius negotium facessant, si magnetum simplicium, in quibus meatus cursu parallelo ab uno termino ad alterum in directum extenduntur, duosque polos distinctos exhibent, ratio fuerit exposita; ad hujusmodi magnetes potissimum spectabo. Magnetem scilicet sum consideraturus omni fere crassitie carentem, in quo meatus arctissime uniti ab uno termino ad alterum secundum lineas rectas excurrant, atque adeo acui magneticæ perfecte similem. Quare cum acus magnetica ratione virtutis a magnete non discrepet, nihil impediet, quominus in hoc negotio pro magnete acum magneticam substituam; quoniam in ea directio multo clarius percipi potest, quam in magnete plerumque difformi. Sit igitur hujusmodi acus magnetica etiam gravitatis expers, seu ita suspensa, ut sese liberrime in eum situm, quem vortex terrestris intendit, recipere possit. Sint igitur A & B duo terræ poli magnetici sibi e diametro oppositi, in quorum altero A materia subtilis terræ meatus ingrediatur, in altero vero B iterum prorumpat. Quanquam autem difficile est determinatu, uter horum polorum boreæ vel austro respondeat, quoniam uterque eadem phænomena producit, tamen ne ambiguitas confusionem pariat, citra errorem hoc dubium tollere licebit. Assumam itaque illum terræ polum A, ubi materia magnetica in meatus irrumpit, circa austrum esse positum, alterumque B materiam subtilem evomentem in regione boreali constitui. Erit ergo B polus terræ magneticus borealis, A vero australis; neque enim hic plures

Acus magneticæ directio in vortice terrestri indagatur.

Fig. 8.

polos, etſi adſint, conſideraſſe opus eſt, cum quod de duobus demonſtrabitur, idem facile ad plures transferri queat. In figura porro interior circulus nucleum terræ, in quo vim magneticam maxime vigere probabile eſt, repræſentat, exterior vero ipſam terræ ſuperficiem, inter quam & nucleum cruſta terræ ſuperior continetur, ob plurima corpora heterogenea multo minore virtute prædita.

Acus magneticæ declinatio & inclinatio explicatur.

§. XXXVIII. Quanquam lineas illas curvas, per quas materia ſubtilis ex polo B egreſſa ad polum A revertitur, definire non auſim, tamen manifeſtum eſt motus directionem in ipſis polis A & Beſſe verticalem, in locis autem intermediis C & D horizontalem, quæ loca quaſi æquatorem magneticum exhibebunt: unde quo magis ad polos A & B accedatur, eo major proditura ſit inclinatio materiæ ſubtilis ad horizontem. Hæc autem generalis motus idea ad præſens inſtitutum ſufficiet, quoniam ſpecialis cognitio ob ſummam irregularitatem nequidem ſperari poteſt. Si igitur acus magnetica *ab*, in qua ſit *a* polus materiam magneticam deglutiens, *b* vero polus eructans, in loco quocunque vorticis terreſtris verſetur, ea ita diſponi debebit, ut ejus polus *a* materiæ ſubtili ingreſſum præbens polum terræ B naturæ contrariæ, unde materia ſubtilis advehitur, ſpectet, alter vero polus *b* ad terræ polum A vergat: eruntque adeo poli diverſæ naturæ ſibi amici, ejusdem autem naturæ inimici. Verſabitur ergo acus magnetica primum in circulo verticali per polos terræ magneticos transeunte, cujus a meridiano vero diſtantia in quovis terræ loco exhibebit declinationem magnetis. Præterea vero niſi acus verſetur in æquatore magnetico C D, ad horizontem inclinabitur, atque in hemiſphærio quidem boreali

CBD

CBD acus terminus a boream ſpectans infra horizontem deprimetur, in altero autem hemisphærio ſupra horizontem elevabitur, quæ inclinatio ad horizontem eo erit major, quo propius ad polos magneticos A vel B acus admoveatur. Quamobrem ex declinatione & inclinatione acus magneticæ in quovis loco terræ, directio curſus materiæ ſubtilis magneticæ cognoſci poterit.

§. XXXIX. Si igitur terra duos tantum haberet polos magneticos ſibi e diametro oppoſitos, tum ex factis aliquot obſervationibus non adeo difficile foret pro quovis terræ loco tam declinationem quam inclinationem acus magneticæ a priori aſſignare. Verum cum probabile ſit, terram quatuor polis magneticis gaudere, quorum bini neque ſint ſibi ediametro oppoſiti, neque a polis mundi æqualiter diſtent, tum multo magis arduum erit poſitionem acus magneticæ in quovis loco definire; quoniam comparatio virium, quibus verſus ſingulos polos urgetur, hincque reſultans media directio non niſi ſumma cum difficultate ſuſcipi poſſet. Primum enim ipſi poli magnetici ſine dubio diſſimili virtute ſunt præditi; unde ſit ut etſi acus a binis æqualiter diſtet, tamen diſparibus viribus ad utrumque dirigatur. Tum vero, quia ipſa vis, quo propius ad quemque polum accedatur, ob majorem materiæ magneticæ copiam major evadit, hoc ipſum incrementum ac decrementum ante noſſe oporteret, quam quicquam concludi poſſet. Ob hunc ergo defectum nihil adhuc certi a priori definire licet: neque vero hoc ad theoriæ confirmationem quicquam conferret, cui unice me immorari debere ipſa quæſtionis propoſitio jubet. Ex his autem, quæ hactenus dicta ſunt, abunde ratio conſtat, tam declinationis & inclinationis acus magne-

Phænomena acus magneticæ a priori difficulter definiri poſſunt.

magneticæ, quam harum ipſarum rerum mutabilitas, quæ ſucceſſu temporis ubique deprehenditur: quippe cujus cauſa in promotione ipſorum terræ polorum magneticorum apertiſſime eſt poſita.

Quomodo magnes a vortice ad motum cieri poſſit, docetur,

§. XL. Cum igitur phænomena acus magneticæ, atque adeo unius cujusque magnetis in ſe ſpectati, ſatis ſint explicata, quemadmodum duo pluresve magnetes inter ſe debeant eſſe affecti, per theoriam inveſtigabo. Præcipue itaque vorticem, qui circa quemlibet magnetem a materia ſubtili formatur, perpendere oportebit; hic autem vortex cum ad ſtatum permanentem fuerit perductus, ab æthere circumdato undique æqualiter comprimetur, hincque ipſe magnes undique æqualiter preſſus in quiete perſiſtet, ſi quidem jam eam directionem, quam affectat, ſit aſſecutus. Sit igitur magnes AB vortici in polo A ingreſſum, in B vero exitum præbens; atque materia ſubtilis erumpens circa β ad latera reflectetur, & ad α reverſa denuo in polum A ingredietur; in qua utraque reflexione materiæ ſubtilis æqualis utrinque vis impendetur, & ab hac æqualitate ſtatus æquilibrii pendebit. Quod ſi igitur eveniat, ut materia ſubtilis in β ſublatis obſtaculis directe progredi poſſit, tum ob ceſſantem hoc loco reflexionem vortex ex hac parte minori vi premetur, quam ad α, hincque ipſe magnes in A majori vi ſollicitatus quam in B, actu ſecundum directionem AB propelletur. Simili modo ſi ad α aliunde ſufficiens copia materiæ ſubtilis advehatur, ut reflexio materiæ vorticis in hac regione ſuſpendatur, tum preſſio vorticis ad β ſuperabit preſſionem ad α, ideoque ipſe magnes ad B majore vi impulſus ſecundum directionem BA promovebitur. Similiter intelligitur, ſi in β alius materiæ ſubtilis fluxus contra

Fig. 9.

incur-

incurrat, qui quasi cum vortice ad B erumpente confligetur, tum ob majorem ad β reflexionem compressionem quoque vorticis in hoc loco prævalere debere; unde magnes ab altero illo materiæ subtilis incursu repelletur in directione BA. Atque generatim, quibus in locis inflexio materiæ subtilis a causa externa vel augetur vel diminuitur, propter vim, quam inflexio postulat, vel auctam vel diminutam, compressio magnetis iisdem in locis vel major vel minor evadet; sicque sublato vorticis æquilibrio magnes ad motum sollicitabitur.

§. XLI. Ex his nunc facile omnes effectus, qui in magnetum mutua attractione ac repulsione cernuntur, determinari poterunt. Sint primo duo magnetes ita positi, ut eorum axes AB, & *ab* in directum jaceant, atque poli diversi nominis A & *b* se mutuo respiciant. Hoc casu perspicuum est materiam magneticam ad *b* erumpentem non solum non tantam resistentiam invenire, sed etiam a vi elastica ætheris ad orificia alterius magnetis A urgeri; ita ut materia magnetica ad *b* prosiliens recta in meatus A irrumpat. Hinc igitur neque omnis materia subtilis ex *b* erumpens reflectetur, neque ea quæ ex B in A esset reversura, cursum suum inflectet, sed ulterius per δ & γ ad *a* usque progredietur; ita ut per confusionem horum duorum vorticum, propemodum unicus vortex oriatur. Hanc ergo ob causam compressio utriusque vorticis inter polos A & *b* diminuetur, atque isti ambo magnetes ad se mutuo urgebuntur. Permistio autem vorticum hincque compressionis ad A*b* diminutio a magnitudine utriusque vorticis & distantia magnetum pendebit; quo enim magnetes fuerint propiores, eo major pars materiæ magneticæ ad *b* erumpentis recta in A ingredietur, hincque eo minor portio

Magnetes polis amicis se spectantes se mutuo attrahunt.

Fig. 10.

reflectendo ad a perveniet: ob eandemque rationem eo minor portio materiæ ſubtilis in B exeuntis ad A reducetur: ſed maximam partem per γ & δ ad alterius magnetis polum a propagabitur. Manifeſtum ergo eſt, quo magnetes ſibi ſint viciniores, eo majori vi eos ad ſe invicem pelli debere; donec, ſi poli A & b ad mutuum contactum perveniant, omnis materia magnetica ad b effluens immediate in alterum magnetem ingrediatur: ſimulque omnis materia ad B erumpens in a usque reflectatur, ita ut unus vortex ſimplex exiſtat, niſi ambo magnetes magnitudine multum inter ſe diſcrepent.

Magnetes polis inimicis ſe ſpectantes, ſe mutuo modo attrahere modo repellere poſſunt.
Fig. 11.

§. XLII. Sint denuo axes duorum magnetum AB & ab in directum diſpoſiti, at poli ejusdem nominis ſeu inimici A & a ſe mutuo reſpiciant. Atque hoc caſu facile intelligitur ratione vorticum contrarium præcedentis caſus uſu venire oportere: cum enim materia ſubtilis ad B & b reflexa ſibi occurrat, & conflictus mutuus naſcatur, uterque vortex inter A & a propterea magis conprimetur, ex quo magnetes ſe mutuo repellere debebunt. Interim tamen, dum utraque materia ſubtilis ex B & ex b prorumpens motum ſuum, quantum fieri queat, conſervare conatur; dubium eſt nullum, quin pars quædam materiæ ex b redeuntis viam ſibi per alterum vorticem aperiat, atque per b in A ingrediatur; ſimilique modo vorticis ex B recurrentis portio per f ad a penetrabit, ſicque permiſtio quædam vorticum modo major modo minor orietur. Ex tali ergo vorticum permiſtione ob rationem ante allegatam attractio oriri debebit; quatenus autem reliquæ vorticum portiones eo promtius in g & h inflectuntur, ex hac fortiori reflexione repulſio naſcetur, qui duo effectus prout alter alterum ſuperaverit, vel attractionem vel repulsionem generabunt. Quod si ergo duo magnetes hoc modo disponantur, fieri poterit, ut se mutuo æque attrahant, ac repellant; quin etiam accidere potest, ut variata magnetum distantia modo attractio modo repulsio prævaleat, quæ anomaliæ a figura utriusque magnetis plurimum pendebunt; ac præterea in se tam erunt inconstantes, ut repetito eodem plane casu, raro eadem phænomena observentur. Tam egregie autem hæc cum experimentis, quæ Celeb. Muschenbroeckio debemus, consentiunt, ut vel ex hoc solo consensu theoria mea maximum adipiscatur firmamentum; propterea quod ii ipsi effectus, qui isti Auctori plane inextri cabiles, atque causam quasi intelligentem arguere videbantur, tam prono alveo ex isto fonte derivantur.

Quomodo duo magnetes se fugent ostenditur.

§. XLIII. Hi ergo duo magnetes in isto statu præternaturali perseverare non poterunt, nisi vi in eo detineantur. Ponamus igitur utrumque magnetem instar versorii mobilem esse super cuspide verticali centrum gravitatis C & c sustinente. In hoc statu, si mentem a directione generali a vortice terræ orta abstrahamus, ratio utique nulla foret, cur hi magnetes se in hanc potius quam aliam plagam converterent. At propter permixtionem vorticum, quam figura repræsentat, polus A versus *g*, polus *a* vero versus *h* recedere debebit; hocque modo poli cognomines simulque inimici A & *a* se mutuo fugare videbuntur. Hic nimirum similis effectus oriri debet, quo meatum magneticum a vortice terræ dirigi est ostensum: materia namque magnetica per *e* veniens oblique in meatus magneticos AB incurrit, hosque idcirco secundum eam ipsam directionem, in qua materia subtilis fertur, disponere conatur. Hinc magnes AB circa C ver-

versus *g* & alter circa *c* versus *h* converti debebit; siquidem permistio vorticum eo fuerit facta modo, quem figura exhibet; sin autem permistio contrario modo contigerit, tum etiam magnetes in plagas contrarias a se invicem recedent. Quousque autem poli A & *a* a se invicem removeantur in sequenti §. videbimus; interim hoc loco tum ratione permistionis vorticum tum ratione conversionis plurimum referre notandum est, quomodo dispositio magnetum horum se habeat, respectu plagarum mundi; vis enim dirigens vorticis terrestris maxime permistionem horum vorticum juvabit, atque efficiet, ut magnetes versus hanc potius quam alteram plagam convertantur. Hanc autem circumstantiam situs magni esse momenti experimenta satis comprobant.

Quomodo duo magnetes suspensi in se mutuo agant.

§. XLIV. Ponamus utrumque magnetem casus praecedentis jam per angulum rectum a se invicem recessisse, seu duos magnetes AB & *ab* super cuspidibus C & *c* mobiles in eo situ esse positos, quem figura repraesentat; ubi scilicet sint axes utriusque magnetis inter se paralleli, sed ita ut poli diversi nominis A & *b*, itemque B & *a* in eandem plagam spectent. Primum quidem verticem terrestrem cogitatione tollamus, atque manifestum portionem materiae subtilis in B prosilientis ad alterius magnetis polum *a* esse transituram; similiterque portionem materiae subtilis in *b* erumpentis in alterius magnetis polum A esse ingressuram. Haec scilicet deflexio a tramite consueto ideo fiet, quia hoc modo subitanea reflexio evitatur; ex quo simul perspicitur, si hi magnetes sibi nimis esset vicini, tum hujusmodi communicationem nil lucri fore allaturam. In casu autem, quem figura repraesentat, cum utrinque omnia sint similia ratio erit nulla, cur magnetes convertantur. Quodsi vero alteruter

Fig. 12.

vel

vel tantillum declinetur, fient ex una parte poli amici ſibi propiores quam in altera parte, & hancobrem ſe mutuo attrahendo ſeſe in ſitum fig. 10 repræſentatum component; niſi inter ſe nimis ſint propinqui. Sin autem effectus vorticis terræ inſuper accedat, tum ex combinatione cauſarum effectus dijudicari debebit: ubi quidem perſpicuum eſt, quo remotiores fuerint magnetes, eo majorem eſſe futurum effectum a vortice terreſtri oriundum, in exiguis autem diſtantiis vires magnetum eſſe prævalituras.

§. XLV. Diſtincte igitur mihi expoſuiſſe videor, quemadmodum duo magnetes tam ratione attractionis & repulſionis, quam ratione directionis in ſe mutuo agant: qui effectus quo magis ſunt ſingulares & admirabiles, eo fortius cauſam hic a me aſſignatam, unde tam plane & luculenter conſequuntur, confirmant. Cum enim effectus ſimplices plerumque a pluribus cauſis oriri poſſint, atque difficile ſit ex his, quæ vera ſit, diſcernere: ſic effectus compoſiti maximeque complicati, cujusmodi ſunt phænomena magnetis, nonniſi ab unica cauſa proficiſci poſſunt, a qua, ſi vel tantillum aberremus, plerorumque phænomenorum rationem reddere haud valeamus. Quamobrem cum præcipuorum magnetis effectuum cauſa tam naturaliter in theoria hic expoſita contineatur, dubitari profecto nequit, quin hæc ſola theoria cum veritate conſentiat. In hoc autem genere nullum adhuc inveni experimentum, cujus eventum non ſolum non theoriæ meæ maxime congruum deprehenderim, ſed etiam a priori facile prædixerim. Quoniam vero ea experimenta, quæ circa actionem duorum magnetum in ſe mutuo ſunt inſtituta, non difficulter ad caſus evolutos reducuntur, iis ſingulis explicandis non immorabor; cum eorum ſolutio

Theoria ex conſenſu cum experientia magis confirmatur.

non ſolum ex jam allatis manifeſto ſequatur, ſed etiam tædioſum foret in ejusmodi rebus, in quibus ne ſcrupulus quidem ſuboriri queat, longius inhærere. Progrediar itaque ad alius generis phænomena, poſtquam hoc unicum monuero, corpora quæcunque ferro excepto inter binos magnetes interpoſita, eorum actionem mutuam nullo modo turbare; cujus circumſtantiæ, etſi ea Celeb. Muſſchenbróeckio maximam difficultatem habere viſa eſt, ratio ex ſuperioribus in promtu eſt, cum ſtatuiſſem materiam magneticam cuncta corpora, præter ferrum ac magnetem liberrime permeare: quæ aſſumtio cum ſit naturæ maxime conformis, qua conſtat omnia corpora ætheri aliisque fluidis ſubtilibus, uti calori, eſſe pervia, tum etiam ex his ipſis experimentis firmiſſime corroboratur.

Virtutis magneticæ communicatio cum ferro perpenditur.

§. XLVI. Jam præter attractionem, repulſionem ac directionem, in magnete potiſſimum notatu digna eſt ejus vis communicativa, qua cum ferro & chalybe ſimilem ſui vim ita communicat, ut de ſua vi propria nihil amittat: quæ proprietas eorum animos, qui in cauſam phænomenorum magnetis inquiſiverunt, maxime torſit. Ex cognita autem vera ſtructura, qua virtus magnetica continetur, manifeſtum eſt, ad virtutem magneticam cuiquam corpori conciliandam nil aliud requiri, niſi ut in eo meatus magnetici efformentur, qui continuo tractu ab uno corporis termino ad alterum progrediantur. Ad hoc ergo primum in corpore ineſſe debent ejusmodi pori minimi ſubtiliſſimis filamentis obſiti & quaſi valvulis inſtructi; tum autem hi pori ita disponi debent, ut canales continuos conſtituant, & valvulæ per totum tractum in eundem ſenſum ſpectent. Hujusmodi autem poris præter magnetem præditum eſt ferrum,

et

et chalybs cum aliis corporibus, in quibus hæ ipſæ materiæ abundant. Hæc corpora etiamſi ejusmodi poris ſcateant, tamen, niſi pori in meatus magneticos ſint diſpoſiti, virtutis magneticæ erunt expertia. Quamobrem ut his virtus magnetica inducatur, primum neceſſe eſt, ut pori ſint mobiles æque ac ſilamenta, quibus ſunt obſiti; tum vero ejusmodi vis accedere debebit, quæ poros in debitum ordinem redigere valeat. In poris autem non opus eſt, ut ſenſibilis mobilitas ſtatuatur, quoniam quæque corpora poris maxime ſunt plena, ac leviſſima mutatio ſufficere poteſt, ad poros in ſeriem continuam diſponendos. Filamenta vero, quæ in poris valvularum vices gerunt, ſine mobilitate concipi vix poſſunt: interim tamen per ſe perſpicuum eſt, hanc mobilitatem in aliis corporibus eſſe poſſe majorem in aliis minorem.

§, XLVII. In ferro ergo vel chalybe virtute magnetica nondum imbuto pori iſti nullo certo ordine erunt diſpoſiti; ſed ita confuſe diſperſi, ut neque meatus continuos conſtituant, neque valvulæ ex filamentis formatæ ad eandem plagam reſpiciant; quo in ſtatu quam diu hæc corpora manebunt, nulla prorſus vi magnetica pollebunt, ſed inſtar reliquorum corporum inertia jacebunt. Neque vero etiam æther quieſcens circumfuſus in his corporibus certos meatus efformare poſſet, quod undique eadem vi premeret, hincque poros, etiamſi ſint mobiles, in unam potius plagam quam aliam diſponere non valeret. At ſi æther, uti in vortice terreſtri uſu venit, jam ſit in motu, tum ſecundum motus ſui directionem majori vi in poros extimos intrabit, qua tandem poros extremos ſecundum directionem ſuam ordinabit: cum enim fluxus materiæ magneticæ integros magnetes dirigere valeat, multo magis minimas moleculas, cujusmodi ſunt fila-

Quomodo in ferro vis magnetica generetur.

filamenta, ciere valebit. Statim autem ac materia magnetica in uno loco per extremos poros penetraverit, ob ingentem quam jam acquiſivit celeritatem, facilius poros internos in debitum ordinem diſponet, dummodo hujusmodi pori reperiantur continui. Sin autem materia magnetica jam ad alterum usque terminum penetraverit, tum ibi prorumpens vorticem formabit, prorſus uti circa ſingulos magnetes exiſtere monſtravi: quo formato ferrum ſeu chalybs pari virtute magnetica pollebit, atque ipſe magnes; ſin autem pori magnetici non continuo tractu procedant, ſed ſpatia peregrinâ materiâ repleta interjaceant, uti fit in mineris ferri non admodum fœcundis, tum ejusmodi corpora vi magnetica imprægnari non poterunt.

Ferrum ſucceſſu temporis tandem virtute magnetica imprægnatur.

§. XLVIII. Ex his igitur intelligitur, a vortice magnetico terram ambiente in ferro tandem vim magneticam generari poſſe; cum iſte vortex ad hunc effectum producendum perpetuo vires ſuas exerceat. Quoniam vero in vortice terreſtri materia magnetica & admodum lente movetur, nec in ſatis magna copia cum æthere eſt permixta, ejus vis perquam erit debilis; unde quo hæc vis fuerit minor, eo plus temporis requiretur ad virtutem ſenſibilem in ferro excitandam. Ita videmus poſt longum demum temporis intervallum bacillos ferreos virtute magneticâ imprægnari. Neque vero iſte effectus quovis modo obtinetur, verum neceſſe eſt ut ejusmodi bacilli ferrei conſtanter in eodem ſitu retineantur. Niſi enim idem perpetuo ſitus conſervetur, materia magnetica ſecundum aliam directionem ageret, ideoque effectum jam ante productum rurſus deſtrueret. Præterea vero eo longiore temporis intervallo opus erit, quo minus mobiles erunt pori in ferro contenti, & quo rigidiora fuerint filamenta, ut non tam facile in ſitum convenientem

recli-

reclinari queant. Ex quo intelligitur, ſi qua cauſa internæ ferri particulæ mobiliores reddantur, eo citius ferrum virtute magnetica impraegnatum iri. Hinc ferrum calidum ſi in eodem ſitu diu reponatur, virtutem magneticam citius acquiret, quam frigidum; quoniam per calorem partes ferri rareſiunt, atque facilius inter ſe commoventur. Non parum quoque ad imprægnationem accelerandam conferre poterunt mallei ictus vel limæ attritus, quippe quibus introitus materiæ ſubtilis, atque pororum commotio non mediocriter adjuvatur. Quin etiam diſſolutione ferri lenta, cujusmodi evenit, ſi ferrum lapidi infixum injuriæ tempestatis diu fuerit expoſitum, ac ferri particulæ ſolutæ ſenſim ſe in poros lapidis inſinuent, actioni vorticis magnetici liberior aditus aperitur, atque dum ſingulæ ferri particulæ debito modo diſponuntur, lapis tandem iis repletus perfectum magnetem mentietur.

§. XLIX. Vis magnetica hoc modo in ferrum illata eo erit fortior, quo plures meatus continuos materia magnetica ſibi efformaverit: ſimul autem hæc vis in ferro eo pertinacius inhærebit, quo id fuerit durius, ſive ab initio jam tale fuerit, ſive demum poſtquam virtutem magneticam jam eſt adeptum, tale ſit factum. Quo durius ſcilicet fuerit ferrum, eo difficilius quidem virtutem magneticam adipiſcitur, at vero adeptam pertinacius conſervat; contra vero ferrum mollius promtius quidem virtute magnetica imbuitur, ſed eo facilius ac citius eam iterum amittit. Hanc ob cauſam videmus ferrum multo facilius virtutem magneticam impetrare quam chalybem; chalybem vero vim ſemel receptam fortius retinere. Ferrum autem virtute magnetica imbutum iterum privatur, ſi in ſitu contrario vortici terreſtri diu

Virtus magnetica in ferro facile iterum deſtrui poteſt.

diu exponatur; quo fit ut materia subtilis sibi secundum aliam directionem meatus formando eos, qui jam ante inerant, rursus destruat. Hæc ergo destructio iisdem mediis promoveri potest, quibus ante imprægnationem accelerari ostendimus. Inflexio nimirum, mallei ictus, atque limatio, quibus operationibus pororum ordo turbari, & meatus interrumpi possunt, virtutem magneticam afficient, eamque penitus delere valebunt. Imprimis autem calor atque ignitio plurimum virtutem magneticam turbabunt, atque etiam ob hanc rationem ipse magnes vi sua penitus exui poterit; quæ omnia cum experientia tam arcte consentiunt, ut etiam ex hac parte nullum dubium circa veritatem hujus theoriæ superesse possit.

Figura ferri plurimum confert, ad vim magneticam accipiendam.

§. L. Quo autem ferri frustum virtute magnetica imbuatur, plurimum interest, cujusmodi habeat figuram, & in quonam situ hæc figura respectu vorticis materiæ magneticæ reponatur. Quod ad figuram attinet, aptissima deprehenditur ea, quæ sit oblonga instar trabeculæ efformata, neque nimis tenuis neque nimis crassa. Quarum conditionum ratio ex theoria dilucide reddi potest. Primum
Fig. 13. enim patet figuram rectam AB præstare incurvatæ *ab*, eo quod materia subtilis semel in A vel *a* ingressa cursum suum facilius in directum prosequitur, quam secundum lineam curvam vel inflexam. Quoniam deinde materia subtilis magnetica per poros ferri facillime movetur, maximam autem resistentiam offendit, dum ex ferro in ætherem apertum egreditur, in trabecula recta AB parum materiæ magneticæ ad latera effluet, sed fere omnis secundum longitudinem AB penetrabit, sicque meatus rectos secundum longitudinem AB extensos & inter se parallelos formabit, quibus

bus fortissima virtus magnetica efficitur. In trabecula autem curvilinea *ab* meatus incurvati non tam facile formabuntur, sed in parte convexa non exigua materiæ subtilis portio in ætherem prorumpet, atque vim magneticam debilitabit. Quo autem meatus inter se paralleli producantur, crassities bacilli satis exigua esse debet, ne ulla divergentia, qua cursus meatuum perturbetur, locum habere queat: interim tamen nimia gracilitas nocebit impraegnationi, propterea quod meatuum numerus diminuitur, atque materia ad latera effluens plurimum de virtute auferet. Hoc idem incommodum se offeret in bacillis seu virgis nimis longis, in quibus fere omnis materia subtilis ad latera exire potest, antequam ad alteram extremitatem deferatur. Virga autem nimis brevis, etiamsi his incommodis careat, tamen hoc vitio laborat, quod in tam exiguo spatio vortex materiæ ob viam percurrendam nimis curvam formari nequeat. Dabitur ergo & longitudo & crassities bacillo ferreo tribuenda, quæ sit aptissima ad virtutem magneticam accipiendam, omnino uti experientia testatur.

Frustum ferri nimis crassum ineptum est ad magnetismum. Fig. 14.

§ LI. Quod autem figura nimis crassa inepta sit ad vim magneticam recipiendam, ex theoria facile perspicitur. In hujusmodi enim figura ferri AB, materia subtilis ad A ingressa facile a tramite recto deflectet. Quamvis enim conetur in directum progredi, tamen si ob inæqualitatem particularem ferri, hinc inde ad latera minorem resistentiam inveniat, eo deviabit uti in *e*, hocque modo non solum motus rectilineus turbabitur, sed etiam motus materiæ subtilis in *α* ingressæ ac fortasse in directum progressuræ præpedietur. Imprimis autem hoc incommodum in altero termino B cernetur, ad quem si que materia subtilis penetraverit, tamen

 potius

potius ad latera in *f* deflectet, ubi minorem invenit resisten-tiam, quam si recta erumperet. Hoc igitur modo materia subtilis sibi ipsa est obstaculo in frusto ferreo nimis crasso, atque impedit, quominus meatus regulares formari queant. Evadet quoque ingens portio materiæ subtilis per latera ferri, atque vicissim ad latera nova materia subtilis ingredietur, quibus omnibus fit, ut vortex magneticus circa hujusmodi corpora vix ac ne vix quidem formari possit. Non parum tamen in hujusmodi corporibus virtus magnetica augeri potest, si utrinque in A & B acuminentur; hoc enim modo materia subtilis, quæ ante in exitu ad *f* deflectebatur, nunc ad cuspitem delata cursum ad latera inflectere non poterit, sed recta in ætherem prorumpet, vorticemque facilius producet. Experientia autem docet, bacillos ferreos utrinque in cuspides desinentes multo majorem acquirere virtutem magneticam, quam si terminos habeant obtusos; quo certe phænomeno fluxus materiæ cujusdam subtilis per meatus ferri extra omne dubium collocatur.

Imprægnatio vis magneticæ a situ bacilli ferrei maxime pendet.

§. LII. Bacillus ergo ferreus, si in vortice terrestri ita collocetur, ut ejus longitudo cum directione materiæ subtilis congruat, eo facilius virtute magnetica imprægnabitur, quo magis apta fuerit ejus figura ad hanc virtutem recipiendam. Quodsi autem bacilli directio non multum discrepet a directione motus materiæ subtilis in vortice, virtutem magneticam quidem etiam acquiret, at cum tardius tnm debiliorem; quæ difficultas imprægnationis eo erit major, quo magis directio bacilli a directione vorticis differat; ac si bacillus ad hanc vorticis directionem normaliter constituatur, tum nullam plane unquam vim recipere poterit, quia materia subtilis æqua vi utrinque ingredi conabitur. Fig. 15. Detineatur hujusmodi bacillus AB in nostris quidem regio-

regionibus in ſitu verticali, ubi directio materiæ ſubtilis aA, Bb cum horizonte facit angulum circiter 60°, cum bacillo ergo angulum 30°. Cum igitur uti aſſumſi materia ſubtilis ex terræ polo magnetico boreali erumpat, ea in directione aA ad bacillum perveniet, tandemque in A ſibi ingreſſum aperiet: ſtatim autem directionem ſuam in bacillo inflectet ſecundum ipſius longitudinem, egreſſum ad latera evitatura; ſicque tandem formatis meatibus ſecundum longitudinem AB per bacillum transfluet, vorticemque peculiarem generabit, qui ad A in bacillum ingredietur, ad B vero egredietur. Hinc ergo bacillus in magnetem transformabitur, polos ſuos ad A & B habentem, quorum illo A, ſi ſibi relinquatur, polum terræ magneticum borealem, altero vero B auſtralem reſpiciet. Quamvis ſcilicet hic bacillus in ſitu verticali detentus virtutem magneticam ſit conſecutus, tamen ſibi relictus non amplius hanc poſitionem affectabit, ſed ſecundum curſum vorticis magnetici, quocunque terrarum transferatur, ſeſe diſponet. Sub æquatore igitur terræ magnetico idem bacillus verticaliter fixus nunquam virtutem magneticam accipiet, quia ibi fluxus materiæ ſubtilis fit ſecundum directionem horizontalem, reſpectu bacilli indifferentem.

§. LIII. Quæ ferro in vortice terræ verſanti accidere docui, eadem efficientur in ferro, quod in vortice cujusque magnetis eſt poſitum, ſimili quidem modo, at multo citius ac promtius; quoniam materia ſubtilis magnetica in vortice magnetem ambiente cum majori copia adeſt, tum etiam motu incitatiori circumfertur. Hinc fit, ut non ſolum virtus magnetica cum ferro citius communicetur, ſed etiam figura ferri minus idonea non tantopere efformatio- Magnes ferrum attrahet.

 nem

nem meatuum magneticorum impediat. Quo enim vis materiæ magneticæ eſt major, eo facilius obſtacula in ferro ſuperabit, atque vorticem magneticum conſtituet. Hinc quævis ferri fruſta in vicinia magnetis poſita ſtatim a materia magnetica permeantur, ac propterea inſtar magnetis attrahentur. Repulſio autem in ferro non tam facile locum invenit, quia vortex ſtatim ac circa ferrum generatur, ſimul ita diſponitur, ut ejus motus cum motu vorticis magnetis conſentiat, ideoque vorticum confuſio oriatur; unde poli amici ſe mutuo reſpicient, atque fortiſſima attractio gignetur. Sunt enim pori minimæque ferri particulæ admodum mobiles, & a vi magnetica ſufficiente facillime in quavis directione ad meatus magneticos formandos diſponuntur: unde fit, ut ferrum virtute magnetica jam imbutum, etiamſi in ſitum contrarium reſpectu magnetis collocetur, in quo repelli deberet, tamen mox vim priorem amittat, ejusque loco vorticem in contrariam plagam directum accipiat, qui cum vortice magnetis conſentiat, atque attractionem producat. Magnes autem multo pertinacius vorticem ſuum retinet, qui ab alio magnete vix de ſtatu ſuo turbari queat: cujus phænomeni ratio eſt, quod meatus in magnete formati minus ſint mobiles, & in ſitu ſuo multo fortius perſiſtant. Chalybs autem, qui eſt ferrum magis induratum, medium quendam locum inter magnetem ac ferrum tenet, ita ut difficilius virtutem magneticam acquirat quam ferrum, acquiſitam autem firmius retineat; unde ratio patet, cur magnes ferrum facilius attrahat, quam chalybem: contra autem chalybs vim magneticam diutius conſervet quam ferrum. Atque ob hanc rationem acus magneticas ex chalybe duriſſimo fabricari præſtat, quam ex ferro.

§. LIV.

§. LIV. Inſtitutum eſt nuper coram Academia Scient; Petropolitana experimentun,quod ob eventum prorſus ſingularem ac theoriam meam mirifice confirmantem hic prætermittere non poſſum. Fecit ibi Expertus Chymicus Cel. Gellert peculiari artificio mixturam ex ferro & ſtanno, quam magnetes generoſi ac fortes prorſus non attraxerunt, magnes vero exiguus & debilis attractam tenebat. Erant ergo in hac mixtura particulæ ferri ita cum particulis ſtanni permixtæ, ut meatus continui formari non poſſent; ſed materia ſubtilis, poſtquam per ſingulas ferri particulas tranſiiſſet, in particulis ſtanni ob reſiſtentiam ætheris, motum ſuum quaſi ſingulis momentis amitteret. Ferri autem particulæ nimis erant parvæ, quam ut circa ſingulas vortex magneticus generaretur. Hanc ob cauſam materia ſubtilis celeritate non nimis magna mixturam permeare potuit. Quo autem corpus a magnete attrahatur, neceſſe eſt ut circa id vortex materiæ magneticæ generetur; atque ad vorticem formandum requiritur, ut materia ſubtilis per viſcera corporis multo celerius promoveatur, quam extra, tantaque celeritate erumpat, ut ab æthere externo reflectatur. Cum igitur in vortice magnetis generoſi materia ſubtilis jam ingenti velocitate moveatur, fieri poteſt ut hæc celeritas non ſit minor, quam ea, qua materia ſubtilis per mixturam tranſierit: & hanc ob rem circa mixturam neque vortex generari, neque proinde mixtura a magnete generoſo attrahi potuit. Circa magnetem autem debilem materia ſubtilis multo minori celeritate gyratur, quæ adeo ſi multo minor fuerit, quam celeritas materiæ ſubtilis mixturam permeantis, motus vorticoſus oriri, hincque attractio evenire potuit. Oportet autem ad hoc experimentum ferrum cum ſtanno intime permiſceri, ut materia ſubtilis per hanc materiam heterogeneam

Singulare phænomenon magnetis explicatur.

terogeneam motu quaſi uniformi progrediatur. Singulare omnino ac novum eſt hoc experimentum, quo conſtat a magnete debiliori effectum produci poſſe, cui producendo magnes generoſus ſit impar.

Quomodo ferro per magnetem virtus magnetica inducatur.

§. LV. Quoniam vidimus cum ferro eo facilius vim magneticam communicari, quo copioſior motuque incitatior fuerit materia magnetica, manifeſtum eſt, quo propius ferrum ad magnetem admoveatur, eo citius ac fortius id virtute magnetica imbui debere. Maxime autem virtutis communicatio ac proinde attractio ſeſe exerit in polis magnetis, ubi materia ſubtilis copioſiſſime vel influit in magnetem vel ex eo prorumpit, hocque majori celeritate, quam in ullo alio vorticis loco. Quæ ut clarius perſpiciantur, ſit AB magnes, cujus polus materiæ ſubtili introitum præbens ſit A, alter ubi materia ſubtilis erumpit, B. Quodſi jam ad polum B acus ferrea vel aliud fruſtulum *ab* reponatur, mox portio materiæ ſubtilis ad B erumpentis in *a* irruet, & quia tum celerrime movetur tum in magna copia adeſt, in acu ſecundum motus ſui directionem meatus efformabit, atque in *b* iterum exiens ab æthere ambiente reflectetur; a qua reflexione acus ad magnetem urgebitur. Transmutabitur ergo acus ratione virtutis ita in magnetem, ut poli B & *a* ſibi fiant amici. Idem eveniet ſi acus *ab* ad alterum magnetis polum A ponatur, tum enim non ſolum in ejus termino remotiori *a* a vortice magnetis materia ſubtilis intrabit, ſed etiam, quia pori jam ſunt materia hac ſubtili ſummopere elaſtica repleti, ea in *b* propter reſiſtentiam ætheris ſublatam erumpet, ſicque poſt ſe per *a* continuum fluxum materiæ ſubtilis trahet; quocirca eadem plane phænomena in acu polo A admota obſervari debebunt,

Fig. 15.

quæ

quæ in acu polo B admota deprehenduntur; hincque difficulter natura polorum magnetis, uter materiam ſubtilem vel abſorbeat, vel emittat, per experientiam diſtingui poterit.

§. LVI. Ferrum ergo in vicinia magnetis virtute magnetica imbuitur, ita ut non ſolum ad magnetem attrahatur; ſed etiam ipſum in alia ferri fruſtula vim exerere valeat. Ejus quidem virtus a magnete plurimum ſuſtinetur, unde continuo materia magnetica ingenti copia advehitur: quo fit, ut etiamſi non adeo multi meatus magnetici in ferro ſint formati, tamen ob abundantiam materiæ magneticæ virtus ſit perquam conſpicua. Statim autem ac ferrum a magnete removetur, ejus vis vehementer debilitabitur; eo quod primum a vortice magnetis non amplius adjuvatur, tum vero materia magnetica in multo minori copia in meatus efformatos ingreditur. Scilicet eo debilior erit vis in ferrum translata, quo pauciores meatus fuerint formati, atque ob eandem rationem hæc ipſa vis eo citius peribit: imprimis autem plurimum refert, cujusmodi figura ferrum ſit præditum. Hinc intelligitur vim cum ferro communicatam eo fore majorem ac ſtabiliorem, quo plures meatus in eo formentur curſu parallelo in directum extenſi. Perſpicuum igitur eſt, quo propius ferrum ad magnetem admoveatur, ob majorem materiæ copiam, eo plures meatus efformari debere: quocirca in ipſo contactu impprægnatio erit maxima, quia materia magnetica non ſolum pura in ferrum ex magnete irrumpit, ſed etiam ea ipſa fere celeritate, qua in meatibus magnetis movetur. Imprægnatio porro per attritum maxime corroboratur; attritu enim partim contactus arctior efficitur, partim minimæ particulæ ferri ſuccutiuntur, quo facilius ſe in ordinem debitum diſponere queant.

Quomodo per attritum vis magneti maxime communicetur.

Virtus magnetica ad insignem distantiam extendi potest.

Fig. 17.

§. LVII. Quanquam vortex magnetem ambiens ad magnam distantiam extenditur, quoad penitus cesset, atque eo longius pertingat, quo major ac nobilior fuerit magnes; tamen ope ferri, virtus magnetis ad multo majorem distantiam expandi potest. Sit enim magnes AB, cujus vortex non ultra *ef* pertingat; si ad ejus polum B admoveatur bacillus ferreus *ab*, portio materiæ magneticæ per hunc bacillum ad *b* usque deducetur, unde ad A revertens vorticem ad *gh* usque pertingentem exhibebit, debiliorem quidem quam erat ad *ef*. Quod si porro ad *b* alius bacillus ferreus $\alpha\beta$ teneatur, per hunc portio materiæ magneticæ ad *b* erumpentis ultra β ad *ik* propagabitur, sicque vortex magnetis usque ad *i k* pertingere videbitur, cum demtis bacillis non ultra *ef* extendatur. Sic itaque ferrum in vicinia magnetis ipsum vi magnetica pollebit, eamque ulterius extendere valebit. Ob hanc rationem duo frusta ferrea in vicinia magnetis non solum se mutuo attrahent, sed etiamsi a magnete ad satis notabilem distantiam removeantur, tamen attractio mutua non cessabit; perinde ac si vorticem magnetis secum diducerent & dilatarent. Sin autem ferri massa statim ab initio in tanta a magnete distantia teneatur, nulla vis ipsi inesse deprehendetur, non tam quod ipsi nondum inducta sit virtus magnetica; sed præcipue quod vortex magnetis non ad tantam distantiam porrigatur, ad quam tamen per successivam ferri a magnete remotionem distendi posset.

Vortex magneticus ad oculum demonstrari potest.

§. LVIII. Quo minus autem existentia vorticis quemque magnetem ambientis in dubium vocari possit, non solum ipse vortex, sed etiam cursus materiæ subtilis in quovis loco circa magnetem oculis spectandus exhiberi potest.

Etsi

Etſi enim notiſſimum eſt experimentum, quo magnes limatura ferri circumfundi ſolet; tamen poſitio particularum ferri tam copiam quam directionem materiæ ſubtilis vorticem conſtituentis evidenter demonſtrat. Cum enim particulæ ferri, quibus limatura conſtat, non ſint globoſæ, ſed tenues inſtar acicularum formatæ, eæ non ſolum attrahentur, ſed etiam ſecundum longitudinem in eam ipſam directionem diſponentur, in qua materia vorticis movetur. Supra enim eſt oſtenſum acum ferream in vortice magnetis poſitam ſecundum directionem motus materiæ ſubtilis ſeſe diſponere debere. Hinc limatura ferri magneti circumfuſa primum diſtincte oſtendet polos magnetis, ubi materia magnetica vel ingreditur vel egreditur; tum vero copia ejus in quovis loco copiam materiæ ſubtilis declarabit. Quod ſi ergo per appropinquationem alius magnetis vel ferri ſtatus vorticis turbatur vel immutatur, inſpectio limaturæ ferri circumfuſæ hanc mutationem ſtatim indicabit. Atque hoc pacto confuſio atque alteratio vorticum, quam ſupra in variis circumſtantiis evenire debere docui, per experientiam oculis cerni, ſicque firmiſſime demonſtrari poterit. Jucundum ſane hoc modo ſpectaculum ſenſibus offertur, quo materiæ prorſus inviſibilis motum ac directionem tam diſtincte percipere licet: theoriæ autem meæ aliunde quidem ſatis ſuperque confirmatæ veritas per hujusmodi experimenta magna cum voluptate agnoſcetur, & comprobabitur.

Vis magnetis per armaturam intenditur.

§. LIX. Quantum armatura ad multiplicandam cujusque magnetis virtutem conferat, ex hac theoria quoque evidenter demonſtrari poteſt. Sit enim magnes AB polos habens in A & B, per quorum alterum A materia ſubtilis in- (Fig. 18.)

ingrediatur, per alterum B egrediatur: atque uti in armatura fieri solet, utrinque ad polos A & B laminæ ferreæ arctissime coaptentur, quæ in altera extremitate adjunctos habeant pedunculos *a* & *b* magneti firmissime adjacentes, ut armatura cum magnete quasi unum corpus continuum constituat. In hoc statu materia subtilis magnetica ad B exitura in lamina cursum suum versus pedunculum *b* inflectet, eo quod longe minorem invenit resistentiam in ferro, motu etiam inflexo progrediendi, quam directe in ætherem erumpendi. Maxima ergo materiæ subtilis portio ad pedunculum delata in ejus basi *b* prorumpet, huncque adeo in locum exiguum polus magnetis, qui antea per totam basin B erat diffusus, coarctabitur; ex quo vis attractiva hujus pedunculi tanto major evadet. Idem eveniet in altero polo A, in quem materia magnetica in pedunculo *a* & lamina contenta facilius irruet, sicque motus materiæ subtilis mox ita immutabitur, ut ex *b* erumpens per *c* cursum inflectendo in pedunculum *a* ingrediatur, hincque per magnetem ad *b* revertendo vorticem perennem constituat. Qui vortex, cum in unicam fere regionem per *c* cogatur, cum ante circa universum magnetem esset diffusus, nunc multo majori gaudebit vi tam attractiva quam directrice, omnino uti experientia clarissime demonstrat.

Quomodo vis amborum magnetis polorum per armaturam uniatur. Fig. 19.

§. LX. Effectus autem magnetis hoc modo armati ideo quoque erit major, quoniam ambo poli *a* & *b* in gestandis oneribus se mutuo adjuvabunt, hincque vim quasi duplicabunt, nisi forte onera ferrea ita applicentur, ut vires amborum polorum se mutuo destruant. Hoc autem modo vis unietur, si frustum ferri idoneæ figuræ EF ad bases pedunculorum *a* & *b* ita applicetur, ut contactus sit perfectus.

Tum

Tum enim materia ſubtilis ad *b* effluens per hoc ferramentum viam ſibi aperiet, atque curſu ad C *c* reflexo ad *a* in magnetem revertetur, hocque modo ferrum ad utrumque pedunculum ſimul attrahetur; quæ adeo vis longiſſime ſuperabit eam, quam idem magnes inermis exerere poteſt. Niſi igitur pondus ferri EF jam tantum fuerit, quantum magnes geſtare valet, magnes inſuper pondus ferramento in C appendendum ſuſtinere poterit. Cum autem jam ferrum EF ipſum magnetis vicem teneat, per vim attractivam onus ferreum adhuc majus ferre poterit, quam ſolus magnes valeret. Hæc autem tam plane ex theoria conſequuntur, ut ſuperfluum ſit pluribus ejusmodi explicationibus immorari, hancque ob rem plurima alia experimenta, quæ magnes naturæ ſcrutatoribus ſuppeditavit, prætermitto; cum & facillime ex theoria deriventur, & ipſa theoria nulla ulteriori confirmatione indigeat. Cum enim Illuſtr. Academia hoc ſolum propoſuiſſet, ut theoria ſeu cauſa phyſica phænomenorum magnetis in lucem protrahatur, quia huic quæſtioni ex aſſe mihi quidem ſatisfeciſſe videor, finem huic tractationi impono.

NOVA METHODUS
Inveniendi Trajectorias reciprocas Algebraicas.

1.

Tabula. III. Viginti abhinc annis & quod excurrit, hoc problema de trajectoriis reciprocis primum a Nicolao Bernoullio Johannis Filio non ſolum eſt propoſitum; ſed etiam tam variæ & elegantes ſolutiones jam eo tempore ſunt exhibitæ, ut hoc problema jam penitus exhauſtum videri poſſit. Cum enim præcipua difficultas in inveniendis curvis algebraicis huic quæſtioni ſatisfacientibus verſaretur, tradideram equidem in ſecundo Comment. Petropol. Tomo methodum ex quolibet linearum curvarum ordine unam ad minimum inveniendi, quæ præſcripta proprietate ſit affecta. Tanto præterea ſtudio hoc problema illo tempore a pluribus Geometris fuit pertractatum, ut etiamſi ad ſolam Geometriam pertineret, tamen inde univerſa Analyſis tam eximia acceperit augmenta, ut pluribus aliis quæſtionibus majoris momenti enodandis apta ſit reddita, quæ ſine his ſubſidiis intactæ eſſent relictæ.

2. Hanc igitur quæſtionem maxime famoſam denuo aggredior, non quo aliorum ſolutiones minus idoneas vel inſufficientes cenſeam: ſed quoniam tum temporis curvæ algebraicæ, quibus præcipua problematis vis continetur, non levi labore ac per operoſas integrationes ſunt erutæ, neque omnes in formulis generalibus comprehendi potuerunt; explicabo hic methodum ſingularem, cujus ope non

ſolum curvæ algebraicæ, quibus problema ſolvitur, facili negotio, & quidem quod maxime paradoxon videatur, ſine ulla integratione inveniri, ſed etiam omnes ſimul finitis formulis contentæ repræſentari queant. Quanquam autem hac methodo jam ſæpius in aliis quæſtionibus ſolvendis ſum uſus, tamen eam nusquam adhuc expoſui; ejusque applicatio ad præſens negotium peculiare requirit artificium, quod in aliis caſibus haud parum utilitatis afferre poterit.

3. Problema autem hoc ſequenti modo proponi eſt ſolitum: Fig. 1.

„*Circa datum axem* ACB *deſcribere ejusmodi lineam* „*curvam* ECF, *quæ circa axem in ſitu inverſo* eCf *conſtituta, ac* „*ſecundum directionem axis motu ſibi parallelo promota, in quovis* „*ſitu* c′e′f′ *priorem curvam* ECF *ſub dato angulo in* M *interſecet.*

Solutio vero ſequenti modo a Celeb. Joh. Bernoullio ad Analyſin eſt perducta. Cum angulus EMe′ ubique debeat eſſe datæ magnitudinis, erit is æqualis angulo ECe, ideoque duplus anguli ECA. Per M ducatur, recta MP axi AB parallela; eritque EMP + e′MP = ECe; at ob motum parallelum eſt angulus e′MP = enP; & ob ſitum inverſum ſi ducatur QN axi AB parallela, ab eoque æquidiſtans ac recta PM, erit ang: ENQ = enP. Quare requiritur, ut ductis binis quibusque rectis MP & NQ axi parallelis ab eoque æquidiſtantibus, ſumma angulorum EMP + ENQ ſit ubique eadem atque æqualis duplo anguli ECA.

4. Cum igitur natura quæſtionis ad unam lineam curvam ſit revocata, ducatur ad axem AB recta GH, quæ cum eo faciat angulum CAH æqualem duplo angulo ECA Fig. 2.

ſeu

seu ipsi angulo intersectionis proposito æqualem. In hacque recta capiantur utrinque abscissæ AP, AQ, quæ ob æquales applicatarum PM & QN ab axe AB distantias erunt æquales; eritque $EMP + ENQ = CAH$. Ductis autem utrinque applicatis infinite propinquis pm & qn, rectæque GH parallelis $M\mu$ & $n\nu$; ob angulum $M\mu m = N\nu n = GAC$ erit: $Mm\mu + mM\mu = nN\nu + Nn\nu = CAH = EMP + ENQ$. At $Mm\mu = EMP$ & $nN\nu = ENQ$, unde sequitur fore $mM\mu = nN\nu$ & $Nn\nu = Mm\mu$. Erunt ergo triangula $Mm\mu$ & $Nn\nu$ æquiangula ac propterea similia; ex quo habebitur hæc proportio $m\mu : M\mu = n\nu : N\nu$, ideoque hæc æqualitas $m\mu . N\nu = M\mu . n\nu$, qua natura problematis continetur.

5. Vocemus abscissam $AP = x$, eique respondentem applicatam $PM = y$; erit abscissa ex altera parte sumta $AQ = -x$, cui respondens applicata ponatur $QN = z$; quæ talis erit functio ipsius $-x$, qualis y est ipsius $+x$; seu ex valore ipsius y prodibit valor ipsius z, si loco x ubique scribatur $-x$. His positis erit $Pp = M\mu = dx$; $\mu m = dy$; $Qq = n\nu = -dx$, & $N\nu = -dz$; atque æquatio modo inventa $m\mu . N\nu = M\mu . n\nu$ dabit hanc formulam

$$-dydz = -dx^2 \text{ seu } \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dz}{dx} = 1.$$

Ponatur $\frac{dy}{dx} = M$, & $\frac{dz}{dx} = N$, eritque N talis functio ipsius $-x$, qualis M est ipsius $+x$, seu ex functione M proveniet functio N, si loco x ponatur $-x$. Quocirca ad problema resolvendum ejusmodi functiones pro M investigari oportet, ut fiat $MN = 1$: hocque facto erit $dy = Mdx$, quæ æquatio naturam curvæ exprimet.

6. Quæ-

6. Quæstio itaque huc est perducta, ut pro M ejusmodi investigetur functio ipsius x, quæ, si loco x ponatur $-x$, abeat in N, ita ut sit $MN = 1$. Manifestum autem est huic conditioni satisfacere hujusmodi valores $M = a^{x}$; $M = a^{x^3}$, similesque alios; sed cum curvas algebraicas requiramus, hujusmodi valores exponentiales excludi oportet. Sit igitur P functio par ipsius x, quæ scilicet eundem valorem retineat, posito $-x$ loco $+x$; deinde sit Q functio impar ipsius x, quæ abeat in $-Q$, si loco x ponatur $-x$: hincque evidens est conditionem problematis impleri, si ponatur $M = \frac{P+Q}{P-Q}$, fiet enim $N = \frac{P-Q}{P+Q}$ ideoque $MN = 1$. Ponatur $\frac{Q}{P} = u$, ut sit u functio quæcunque ipsius x impar; ex quo erit $M = \frac{1+u}{1-u}$ & $dy = \frac{1+u}{1-u} dx$, quæ æquatio solutionem problematis in latissimo sensu complectitur, dummodo sub littera u omnes functiones ipsius x comprehendantur.

7. Quamquam hæc æquatio jam est generalis omnesque solutiones includit, tamen ex ea aliæ formari possunt, quæ latius patere videntur; & quæ in inventione curvarum algebraicarum usum commodiorem præstant. Hujusmodi est ista formula $M = (\frac{1+u}{1-u})^n$; quicunque enim numerus pro exponente n assumatur, erit semper $N = (\frac{1-u}{1+u})^n$,

 ideo-

ideoque $MN = 1$. Quare si u sumatur pro functione quacunque impari ipsius x, natura curvæ trajectoriæ reciprocæ cujuscunque hac exprimetur æquatione: $dy = \left(\frac{1+u}{1-u}\right)^n dx$. Manifestum autem est, si pro n sumantur numeri fracti, facile ejusmodi curvas obtineri, quæ ex priori forma difficulter erui queant, etiamsi revera in ea contineantur.

8. Tametsi functiones irrationales ob ambiguitatem neque functionibus paribus neque imparibus proprie annumerari queant: tamen in hoc negotio hujusmodi expressiones $\sqrt{(1+uu)}$ pro functionibus paribus haberi possunt, dummodo uu sit functio par neque ex $(1+uu)$ radix quadrata actu extrahi queat. At si u sit functio ipsius x impar, erit uu ac propterea $\sqrt{(1+uu)}$ ejusdem x functio par. Quo notato facile patet, hunc valorem $M = \sqrt{(1+uu)} + u$ quæsito satisfacere debere; fiet enim inde $N = \sqrt{(1+uu)} - u$, ideoque $MN = 1$. Idem evenit, si statuatur $M = (\sqrt{(1+uu)}+u)^n$, quia fit $N = (\sqrt{(1+uu)}-u)^n$ & $MN = 1$. Hinc ergo duæ novæ æquationes generales pro trajectoriis reciprocis oriuntur:

$$dy = (\sqrt{(1+uu)}+u)\,dx \quad \&$$

$$dy = (\sqrt{(1+uu)}+u)^n\,dx$$

9. Potest etiam nova quædam variabilis t introduci, a qua x ita pendeat, ut posito $-t$ loco t, abscissa x abeat in $-x$; seu sit x functio impar ipsius t. Ponatur $dx = v\,dt$, eritque v functio par ipsius t; statuatur autem ut ante u functio

functio impar ipsius t. His positis, si fiat $M = \frac{dy}{dx} = \frac{1+u}{1-u}$, evadet denuo $N = \frac{1-u}{1+u}$, ideoque $MN = 1$. Hancobrem problemati satisfiet, si sumatur:

$$dx = vdt \ \& \ dy = \frac{1+u}{1-u} vdt$$

Simili modo problema solvetur his formulis generalibus

$$dx = vdt \quad \& \quad dy = \left(\frac{1+u}{1-u}\right)^n vdt$$

itemque his ex irrationalibus ortis:

$$dx = vdt \ \& \ dy = (\sqrt{(1+uu)}+u)\, vdt \text{ atque}$$

$$dx = vdt \ \& \ dy = (\sqrt{(1+uu)}+u)^n\, vdt.$$

Quæcunque autem formulæ ex his assumantur, necesse est ut inde solutio problematis generalis obtineatur.

10. Si jam curvæ algebraicæ desiderentur, totum negotium huc redit, ut qualitas functionis u, & in his posterioribus binarum functionum u & v determinetur, qua hæ formulæ integrabiles reddantur. Plures autem imo infinitæ hujusmodi functiones, cum a Celeb. Bernoullio, tum a me sunt notatæ, quæ curvas algebraicas præbeant; sed hic modus maxime est particularis, neque omnes curvas algebraicas satisfacientes in se complectitur. Deinde assumtis istiusmodi functionibus idoneis, integratio harum formularum demum actu institui debet; sicque pro quovis curvarum genere peculiari operatione est opus, quæ sæpe non sine molesto calculo absolvitur. Cui incommodo ita

 occur-

occurram, ut non solum formulas generales pro omnibus curvis algebraicis sim exhibiturus; sed etiam quae sine praevia integratione solutionem suppeditent. Quin etiam has ipsas formulas algebraicas ex superioribus differentialibus sine actuali integratione sum derivaturus, id quod plerisque maxime paradoxon videbitur. Methodum autem meam ad singulas formulas differentiales ante inventas seorsim accommodabo.

I. Modus inveniendi trajectorias reciprocas algebraicas ex formula

$$dy = \frac{1+u}{1-u}\,dx$$

11. Quaeritur ergo hic, non solum qualis functio ipsius x debeat esse u, ut formula $\frac{1+u}{1-u}\,dx$ integrationem admittat, sed etiam quaenam ipsa sit futura integralis forma. Cum autem u sit functio impar ipsius x, erit vicissim x functio impar ipsius u: hincque investigabo, qualis functio quantitas x esse debeat ipsius u, ut quoque y per functionem algebraicam ipsius u exprimi queat. Quam investigationem ita instituo: quia est $y = \int \frac{1+u}{1-u}\,dx$, erit per notam integralium reductionem:

$$y = \frac{1+u}{1-u}\,x - 2\int\frac{x\,du}{(1-u)^2}.$$

Superest ergo, ut formula $\int\frac{x\,du}{(1-u)^2}$ reddatur integrabilis,

lis, in quo nulla foret difficultas, nisi x deberet esse functio impar ipsius u.

12. Denotet p functionem quamcunque parem, & q functionem imparem ipsius u, statuaturque:

$$2\int\frac{x\,du}{(1-u)^2}=\frac{(p+q)(1+u)}{1-u}$$

duas scilicet novas quantitates p & q introduco, ut non solum integrabilitas procuretur, sed etiam functioni x præscripta proprietas inducatur. Sumtis ergo differentialibus, erit:

$$\frac{2\,x\,du}{(1-u)^2}=\frac{(dp+dq)(1+u)}{1-u}+\frac{2(p+q)\,du}{(1-u)^2}$$

multiplicationeque per $(1-u)^2$ instituta orietur:

$$2\,x\,du=(1-uu)\,dp+(1-uu)\,dq+2\,p\,du+2\,q\,du$$

cujus æquationis alii termini pares ipsius u continebunt dimensiones, alii impares: quamobrem necesse est ut termini tam parium quam imparium dimensionum seorsim inter se æquentur.

13. Quia vero p est functio par ipsius u, reliquæ vero quantitates q & x functiones impares, earumque differentialia eandem naturam sequuntur, erit $2\,x\,du$ functio par; $(1-uu)\,dp$ par; $(1-uu)\,dq$ impar; $2\,p\,du$ impar; & $2\,q\,du$ par. Æquatis ergo paribus & imparibus seorsim sequentes duæ orientur æquationes:

$$2\,x\,du=(1-uu)\,dp+2\,q\,du:$$

$$\&\quad 2\,p\,du+(1-uu)\,dq=0.$$

 Poste-

Posterior æquatio statim definit $p = -\frac{(1-uu)dq}{2du}$: hinc enim ob q functionem imparem ipsius u fiet p functio par. Cognito jam valore functionis p, ex priore æquatione deducitur:

$x = \frac{(1-uu)dp}{2du} + q$: cui abscissæ respondebit applicata $y = \frac{1+u}{1-u}x - \frac{(p+q)(1+u)}{1-u} = \frac{1+u}{1-u}(x-q-p)$

14. Si hic pro x valor ante inventus substituatur, invenietur:

$$y = \frac{(1+u)^2 dp}{2du} - \frac{p(1+u)}{1-u} \text{ seu ob } p = -\frac{(1-uu)dq}{2du}$$

$$y = \frac{(1+u)^2 dp + (1+u)^2 dq}{2du} = \frac{(dp+dq)(1+u)^2}{2du}$$

Quocirca hinc nanciscimur

Primam regulam generalem pro inveniendis trajectoriis reciprocis algebraicis:

Sumatur q *functio quæcunque imparium dimensionum ipsius* u: *indeque quaeratur quantitas* $p = -\frac{(1-uu)dq}{2du}$, *qua inventa erit curvae quaesitae:*

abscissa AP $= x = q + \frac{(1-uu)dp}{2du}$

appli-

applicata $PM = y = \frac{(dp + dq)(1+u)^2}{2\,du} = \frac{1+u}{1-u}(x-p-q)$

qui valores semper sunt algebraici, si quidem q *fuerit functio algebraica ipsius* u

15. Si ipsius u alia sumatur functio impar q', ex eaque capiatur $p' = -\frac{(1-uu)dq'}{2\,du}$, habebitur simili modo:

$$x = q' + \frac{(1-uu)dp'}{2\,du}, \ \& \ y = \frac{(dp' + dq')(1+u)^2}{2\,du}$$

Atque cum hinc æque fiat $\frac{dy}{dx} = \frac{1+u}{1-u}$: manifestum est si ex quapiam ipsius q hypothesi inventum fuerit:

$$x = X \ \& \ y = Y$$

ex alia autem hypothesi prodierit $x = X'$ & $y = Y'$, problemati quoque satisfieri his valoribus:

$$x = X + X' \ \& \ y = Y + Y'$$

atque generalius etiam, si ponatur:

$$x = \alpha X + \beta X' \ \& \ y = \alpha Y + \beta X'$$

sicque ex duabus curvis algebraicis jam inventis innumerabiles novæ inveniri poterunt. Sin autem præterea tertia fuerit inventa $x = X''$ & $y = Y''$, erit quoque $x = \alpha X + \beta X' + \gamma X''$ & $y = \alpha Y + \beta Y' + \gamma X''$ sicque porro.

16. Ponatur ut ad exempla descendamus $q = u^{\lambda}$ existente λ numero quocunque impari, sive integro sive fracto, cujus tam numerator quam denominator sit impar: eritque

$\frac{dq}{du} = \lambda u^{\lambda-1}$ & $p = -\frac{1}{2}\lambda u^{\lambda-1} + \frac{1}{2}\lambda u^{\lambda+1}$ hincque porro

dp

$\frac{dp}{du} = -\frac{1}{2}\lambda(\lambda-1)u^{\lambda-2} + \frac{1}{2}\lambda(\lambda+1)u^{\lambda}$. Unde habebitur:

$$x = u^{\lambda} - \tfrac{1}{4}\lambda(\lambda-1)u^{\lambda-2} + \tfrac{1}{4}\lambda(\lambda+1)u^{\lambda} + \tfrac{1}{4}\lambda(\lambda-1)u^{\lambda}$$
$$- \tfrac{1}{4}\lambda(\lambda+1)u^{\lambda+2}$$

seu $x = -\frac{1}{4}\lambda(\lambda-1)u^{\lambda-2} + \frac{1}{2}(\lambda\lambda+2)u^{\lambda} - \frac{1}{4}\lambda(\lambda+1)u^{\lambda+2}$

& $y = \frac{1}{2}\lambda(u^{\lambda-1} - \frac{1}{2}(\lambda-1)u^{\lambda-2} + \frac{1}{2}(\lambda+1)u^{\lambda})(1+u)^2$ seu

$y = \frac{1}{4}\lambda u^{\lambda-2}(1+u)^4 - \frac{1}{4}\lambda\lambda u^{\lambda-2}(1-u)(1+u)^3$ vel etiam

$$y = \tfrac{1}{4}\lambda u^{\lambda-2}(1-\lambda+u+\lambda u)(1+u)^3$$

Hinc sequitur fore:

si $\lambda = 1$: $x = \frac{3}{2}u - \frac{1}{2}u^3$; $y = \frac{1}{2}(1+u)^3$ pro parabola cubicali secunda

si $\lambda = 3$; $x = -\frac{1}{2}u(1-3uu)(3-2uu)$: &

$$y = -\tfrac{3}{2}u(1-2u)(1+u)^3$$

si $\lambda = 5$; $x = -\frac{1}{2}u^3(10-27u^2+15u^4)$: &

$$y = -\tfrac{5}{2}u^3(2-3u)(1+u)^3$$

si $\lambda = 7$; $x = -\frac{1}{2}u^5(21-51u^2+28u^4)$: &

$$y = -\tfrac{7}{2}u^5(3-4u)(1+u)^3$$

&c.

II. Se-

II. Secundus Modus Inveniendi Trajectorias reciprocas Algebraicas.

Ex formula $dy = \left(\frac{1+u}{1-u}\right)^n dx$

17. Quia ut ante ostensum est, abscissa x debet esse functio impar ipsius u, quaeratur qualis esse debeat, ut applicata y prodeat algebraice expressa. In hunc finem ponatur:

$$y = \int \left(\frac{1+u}{1-u}\right)^n dx = \left(\frac{1+u}{1-u}\right)^n x - 2n \int \frac{x\,du}{1-uu} \left(\frac{1+u}{1-u}\right)^n$$

Sumtisque p functione pari & q functione impari ipsius u statuatur:

$$\int \left(\frac{1+u}{1-u}\right)^n \frac{x\,du}{1-uu} = (p+q)\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^n$$

ex qua differentiatione instituta habebitur;

$$\frac{x\,du}{1-uu} = dp + dq + \frac{2n(p+q)\,du}{1-uu} \quad \text{seu}$$

$$x\,du = (1-uu)\,dp + (1-uu)\,dq + 2np\,du + 2nq\,du$$

18. Discerpatur haec in duas aequationes, quarum altera contineat functiones parium, altera vero imparium dimensionum, sicque fiet:

$$x\,du = (1-uu)\,dp + 2nq\,du$$

$$\& \; 0 = (1-uu)\,dq + 2np\,du$$

quarum posterior dat $p = -\frac{(1-uu)\,dq}{2n\,du}$, quo valore ipsius p invento erit ex priori:

$$x = 2nq + \frac{(1-uu)\,dp}{du}$$

Praeterea autem ex supra facta hypothesi orietur

$$y = \left(\frac{1+u}{1-u}\right)^n (x - 2np - 2nq) = \left(\frac{1+u}{1-u}\right)^n \frac{(1-uu)(dp+dq)}{du}$$

seu $y = \frac{(dp+dq)(1+u)^{n+1}}{du(1-u)^{n-1}}$. Sumta ergo pro q functione quacunque imparium dimensionum ipsius u, hae formulae praebebunt curvas algebraicas, quae erunt trajectoriae reciprocae.

19. Hinc ergo adepti sumus:

Secundam regulam generalem pro inveniendis trajectoriis reciprocis algebraicis.

Sumatur q *functio quaecunque imparium dimensionum ipsius* u, *denotanteque* n *numerum quemcunque, quaeratur inde quantitas* $p = -\frac{(1-uu)\,dq}{2n\,du}$; *hinc erit curvae quaesitae;*

Abscissa $AP = x = 2nq + \frac{(1-uu)\,dp}{du}$

Appli-

Applicata PM $= y = \dfrac{(dp + dq)(1+u)^{n+1}}{du(1-u)^{n-1}}$

Ubi iterum notandum eſt, ſi pro x & y jam aliquot inventi fuerint valores X & Y, X′ & Y′, X″ & Y″, &c. problemati quoque ſatisfieri, ſi capiatur

$$x = \alpha X + \beta X' + \gamma X'' \&c. \quad \& \; y = \alpha Y + \beta Y' + \gamma Y'' \&c.$$

20. Sit λ numerus quicunque impar ac ſtatuatur: $q = 2nu^{\lambda}$, erit $\dfrac{dq}{du} = 2n\lambda u^{\lambda-1}$ ideoque $p = -\lambda u^{\lambda-1} + \lambda u^{\lambda+1}$; unde fit porro $\dfrac{dp}{du} = -\lambda(\lambda-1)u^{\lambda-2} + \lambda(\lambda+1)u^{\lambda}$. Ex his valoribus colligitur:

$$x = 4nn\,u^{\lambda} - \lambda(\lambda-1)u^{\lambda-2} + 2\lambda\lambda u^{\lambda} - \lambda(\lambda+1)u^{\lambda+2} \;\&$$

$$y = -(\lambda(\lambda-1)u^{\lambda-2} - 2n\lambda u^{\lambda-1} - \lambda(\lambda+1)u^{\lambda})\,\frac{(1+u)^{n+1}}{(1-u)^{n-1}}$$

ſeu mutatis ſignis, ſumtisque ſemiſſibus erit

$$x = u^{\lambda-2}\left(\frac{\lambda(\lambda-1)}{2} - (\lambda\lambda + 2nn)u^2 + \frac{\lambda(\lambda+1)}{2}u^4\right)$$

$$y = \lambda u^{\lambda-2}\left(\frac{\lambda-1}{2} - nu - \frac{(\lambda+1)uu}{2}\right)\frac{(1+u)^{n+1}}{(1-u)^{n-1}}$$

Hinc ergo erit:

$$\text{si } \lambda = 1:\ x = u^3 - (1+2nn)u;\ y = -(n+u)\frac{(1+u)^{n+1}}{(1-u)^{n-1}}$$

$$\text{si } \lambda = 3:\ x = u(3-(9+2nn)u^2+6u^4);\ \&$$

$$y = 3u(1-nu-2uu)\frac{(1+u)^{n+1}}{(1-u)^{n-1}}$$

$$\text{si } \lambda = 5;\ x = u^3(10-(15+2nn)u^2+15u^4);\ \&$$

$$y = 5u^3(2-nu-3uu)\frac{(1+u)^{n+1}}{(1-u)^{n-1}}$$

&c.

21. Sit porro m numerus quicunque, ac ponatur $q = 2nu^\lambda(1-uu)^m$, erit $\frac{dq}{du} = 2n\lambda u^{\lambda-1}(1-uu)^m$ $-4mnu^{\lambda+1}(1-uu)^{m-1}$ ac propterea $p = -\lambda u^{\lambda-1}(1-uu)^{m+1} + 2mu^{\lambda+1}(1-uu)^m$. Fiet itaque

$$\frac{dp}{du} = -\lambda(\lambda-1)u^{\lambda-2}(1-uu)^{m+1} + 2\lambda(m+1)u^\lambda(1-uu)^m$$
$$+2m(\lambda+1)u^\lambda(1-uu)^m$$
$$-4mmu^{\lambda+2}(1-uu)^{m-1}$$

ex quibus colligitur:

$x =$

$$x = 4nnu^{\lambda}(1-uu)^{m} - \lambda(\lambda-1)u^{\lambda-2}(1-uu)^{m+2}$$
$$+2(2m\lambda+m+\lambda)u^{\lambda}(1-uu)^{m+1}$$
$$-4mmu^{\lambda+2}(1-uu)^{m}$$

feu

$$x = u^{\lambda-2}(1-uu)^{m}(-\lambda(\lambda-1)+2(2nn+\lambda\lambda+2m\lambda+m)u^{2}$$
$$-(4mm+4m\lambda+\lambda\lambda+2m+\lambda)u^{4})$$

five hoc modo brevius:

$$x = -u^{\lambda-2}(1-uu)^{m}(\lambda(\lambda-1)-2(2nn+\lambda\lambda+2m\lambda+m)u^{2}$$
$$+(2m+\lambda)(2m+\lambda+1)u^{4})$$

Deinde erit:

$$y = \frac{(1+u)^{n+1}}{(1-u)^{n-1}}(2n\lambda u(1-uu)-4mnu^{3}-\lambda(\lambda-1)(1-uu)^{2}$$
$$-4mmu^{4}+2(2m\lambda+m+\lambda)u^{2}(1-uu))u^{\lambda-2}(1-uu)^{m-1}$$

$$\text{feu } y = -\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^{n}u^{\lambda-2}(1-uu)^{m}(\lambda(\lambda-1)-2(\lambda\lambda+$$
$$2m\lambda+m)u^{2}+(2m+\lambda)(2m+\lambda+1)u^{4}$$
$$-2n\lambda u+2n(2m+\lambda)u^{3})$$

mutatis ergo fignis erit:

$$x = u^{\lambda-2}(1-uu)^m(\lambda(\lambda-1)-2(2nn+\lambda\lambda+2m\lambda+m)u^2 + (2m+\lambda)(2m+\lambda+1)u^4)$$

$$y = u^{\lambda-2}(1-uu)^m \left.\begin{matrix}(\lambda(\lambda-1)-2(\lambda\lambda+2m\lambda+m)u^2 \\ +(2m+\lambda)(2m+\lambda+1)u^4 \\ -2n\lambda u+2n(2m+\lambda)u^3\end{matrix}\right\}\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^n$$

22. Hinc duæ prodeunt ſolutiones præ ceteris ſimpliciores, quarum altera prodit, ſi $\lambda = 1$ & $m = -1$: tum enim fiet:

$$x = -\frac{4(nn-1)u}{1-uu} \;\&\; y = -\frac{2(n-2u+nuu)}{1-uu}\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^n$$

ſeu ſi utrinque per conſtantem $\frac{-a}{2(nn-1)}$ multiplicetur erit

$$x = \frac{2au}{1-uu} \;\&\; y = \frac{a(n-2u+nuu)}{(nn-1)(2-uu)}\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^n$$

unde non difficulter eliminatur variabilis u; eſt enim ex priori $u = \frac{-a+\sqrt{(aa+xx)}}{x}$: quo valore in altera ſubſtituto, irrationalibusque ex denominatore ſublatis pervenietur tandem ad hanc æquationem:

$$(nn-1)a^n y = (n\sqrt{(aa+xx)}-x)(\sqrt{(aa+xx)}+x)^n$$

Ad

Ad quam reducendam notetur esse: $(\sqrt{(aa+xx)}+x)^n =$

$$a^n + \frac{nn}{1.2} a^{n-4} xx + \frac{nn(nn-4)}{1.2.3.4} a^{n-4} x^4 + \frac{nn(nn-4)(nn-16)}{1.2.3.4.5.6} a^{n-6} x^6 + \&c.$$

$$+ \left(na^{n-2} x + \frac{n(nn-4)}{1.2.3.} a^{n-4} x^3 + \frac{n(nn-4)(nn-16)}{1.2.3.4.5} a^{n-6} x^5 + \&c.\right) \sqrt{(aa+xx)}$$

unde reperietur fore:

$$(nn-1)a^n y = \left\{ \begin{aligned} &\Big(na^n + \frac{n(nn-2)}{1.2} a^{n-2} x^2 + \frac{n(nn-4)(nn-4)}{1.2.3.4} a^{n-4} x^4 + \frac{n(nn-6)(nn-4)(nn-16)}{1.2.3.4.5.6} \\ &\quad a^{n\,6} x^6 + \&c.\Big) \sqrt{(aa+xx)} \\ &+ (nn-1)a^n x + \frac{nn(nn-1)}{1.2.3} a^{n-2} x^3 + \\ &\quad \frac{nn(nn-1)(nn-4)}{1.2.3.4.5} a^{n-4} x^5 + \\ &\quad \frac{nn(nn-1)(nn-4)(nn-16)}{1.2.3.4.5.6.7} a^{n-6} x^7 \; \&c. \end{aligned} \right.$$

quæ abrumpitur, quoties est n numerus par. Ponatur $a = 1$ sitque exempli gr.

$n = 1$ erit $y = x$

$n = 2;\ 3y = (2+2xx)\sqrt{(1+xx)} + 3x + 2x^3$

$n =$

$$n = 4;\ 15y = (4 + 28xx + 24x^4)\sqrt{(1+xx)} + 15x + 40x^3$$
$$+ 24x^5$$

$$n = 6;\ 35y = (6 + 102xx + 256x^4 + 160x^6)\sqrt{(1+xx)}$$
$$+ 35x + 210x^3 + 336x^5 + 160x^7$$

&c.

23. Sin autem n sit numerus impar, erit $(\sqrt{(aa+xx)}$

$$+ x)^n = na^{n-1}x + \frac{n(nn-1)}{1.2.3}a^{n-3}x^3 + \frac{n(nn-1)(nn-9)}{1.2.3.4.5}$$
$$a^{n-5}x^5 + \&c. +$$
$$(a^{n-1} + \frac{(nn-1)}{1.2.}a^{n-3}x^2 + \frac{(nn-1)(nn-9)}{1.2.3.4}a^{n-5}x^4 +$$
$$\frac{(nn-1)(nn-9)(nn-25)}{1.2.3.4.5.6}a^{n-7}x^6 + \&c.)\sqrt{(aa+xx)}$$

unde sequitur fore:

$$(nn-1)a^n y =$$
$$na^{n+1} + \frac{n(nn-1)}{1.2}a^{n-1}x^2 + \frac{n(nn-1)(nn-1)}{1.2.3.4}a^{n-3}x^4 +$$
$$\frac{n(nn-1)(nn-1)(nn-9)}{1.2.3.4.5.6}a^{n-5}x^6 + \&c.$$
$$+ ((nn-1)a^{n-1}x + \frac{(nn-3)(nn-1)}{1.2.3}a^{n-3}x^3 +$$
$$\frac{(nn-5)(nn-1)(nn-9)}{1.2.3.4.5}a^{n-5}x^5 + \&c.)\sqrt{(aa+xx)}$$

sit

Sit $a = 1$, ac ponatur successive $n = 1, 3, 5$, &c.

$$n = 1;\quad 0y = 1$$

$$n = 3;\quad 8y = 3 + 12xx + 8x^4 + (8x + 8x^3)\sqrt{(1+xx)}$$

$$n = 5;\quad 24y = 5 + 60x^2 + 120x^4 + 64x^6 + (24x + 88x^3 + 64x^5)\sqrt{(1+xx)}$$

Generaliter autem posito $a = 1$ erit: $(nn - 1)y =$

$$(n-1)2^{n-1}x^{n+1} + \frac{(n+1)n}{1}2^{n-3}x^{n-1} + \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2}2^{n-5}x^{n-3} + \frac{(n+1)n(n-1)(n-4)}{1.\ 2.\ 3}2^{n-7}x^{n-5} +$$

$$\frac{n(nn-1)(n-5)(n-6)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}2^{n-9}x^{n-7} + \frac{n(nn-1)(n-6)(n-7)(n-8)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}2^{n-11}x^{n-9} + \&c. +$$

$$\Big((n-1)2^{n-1}x^{n} + \frac{nn-n+2}{1}2^{n-3}x^{n-2} + \frac{(nn-n+4)(n-3)}{1.\ 2}2^{n-5}x^{n-4} + \frac{(nn-n+6)(n-4)(n-5)}{1.\ 2.\ 3}2^{n-7}x^{n-6}$$

$$+ \frac{(nn-n+8)(n-5)(n-6)(n-7)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}2^{n-9}x^{n-8} + \&c.\Big)\sqrt{(1+xx)}$$

24. Si n fuerit numerus fractus puta $= \frac{n}{m}$, habebitur pro trajectoria reciproca hæc æquatio:

$$(nn-mm)y = m(n\sqrt{(1+xx)}-mx)(\sqrt{(1+xx)}+x)^{n:m}$$

seu

$$\left(\frac{nn-mm}{m}\right)^{m} y^{m} = (n\sqrt{(1+xx)}-mx)^{m}(\sqrt{(1+xx)}+x)^{n}$$

quæ maxime fœcunda est in curvis simplicioribus suppeditandis: exceptis enim ordinibus 2 & 3, ex quovis ordine adminimum unam largitur trajectoriam reciprocam. Convenit autem hæc æquatio cum ea, quam in Tomo Comment. II. exhibueram. Scilicet si $m = 1$, curva erit ordinis $n + 2$: æquatio enim ab irrationalitate liberata non plures dimensiones obtinet quam $n + 2$: sin autem denominator m fuerit numerus quicunque, æquatio ad rationalitatem reducta assurget ad $n + 2m$ dimensiones. Desideratur autem adhuc methodus has æquationes rationales sine operosa elevatione ad potestates ex traditis formulis statim eliciendi; cujusmodi methodus sine dubio in Analysi datur, cum in sublatione surditatis plurimi termini se mutuo destruant. Æquatio vero rationalis ita erit comparata, ut sit

$y^{2m} + Py^{m} + Q = 0$, ubi sint P & Q functiones rationales ipsius x.

25. Per inductionem autem ex pluribus casibus collegi, si sit $m = 1$, fore

(nn-

$$(nn-1)^2 y^2 - 2(nn-1)y \left\{ \begin{array}{l} (n-1)2^{n-1} x^{n+1} + \frac{(n+1)n}{1} 2^{n-3} x^{n-1} \\ + \frac{n(nn-1)}{1.2} 2^{n-5} x^{n-3} + \\ \frac{n(nn-1)(n-4)}{1.2.3} 2^{n-7} x^{n-5} + \\ \frac{n(nn-1)(n-5)(n-6)}{1.2.3.4} 2^{n-9} x^{n-7} + \\ \&c. \end{array} \right\}$$

$$= \pm nn \pm (nn-1)xx$$

ubi ſignorum ambiguorum valet ſuperius, ſi n ſit numerus par, inferius ſi ſit impar. Hinc ergo ſequentes orientur æquationes ſimpliciores pro trajectoriis reciprocis;

$$9y^2 = 6y(2x^3 + 3x) + 3xx + 4$$

$$64y^2 = 16y(8x^4 + 12xx + 3) - 8xx - 9$$

$$225y^2 = 30y(24x^5 + 40x^3 + 15x) + 15xx + 16$$

$$576y^2 = 48y(64x^6 + 120x^4 + 60x^2 + 5) - 24xx - 25$$

$$1225y^2 = 70y(16x^7 + 336x^5 + 210x^3 + 35x) + 35xx + 36$$

$$2304y^2 = 96y(384x^8 + 896x^6 + 672x^4 + 168x^2 + 7) - 48xx - 49$$

$$3969y^2 = 126y(896x^9 + 2304x^7 + 2016x^5 + 672x^3 + 63x) + 63xx + 64$$

quæ ergo æquationum ſeries, quousque libuerit facile continuabitur.

26. Supra duarum ſolutionum ſimpliciorum, quæ ex formulis (21) ſequuntur, mentionem fecimus, alteramque hic fuſius ſumus proſecuti. Altera igitur ſolutio expendenda eſt, in qua $\lambda = 1$ & $m = -\frac{1}{2}$. Hinc ergo oritur:

$$x = \frac{1}{u\sqrt{(1-uu)}}(-(4nn-1)uu) = -\frac{(4nn-1)u}{\sqrt{(1-uu)}}$$

$$y = \frac{1}{u\sqrt{(1-uu)}}(uu-2nu)\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^n = \frac{u-2n}{\sqrt{(1-uu)}}\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^n$$

Multiplicentur hæ formulæ per $\frac{-a}{4nn-1}$, habebiturque

$$x = \frac{au}{\sqrt{(1-uu)}}; \ \& \ y = \frac{a(2n-u)}{(4nn-1)\sqrt{(1-uu)}}\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^n$$

unde fit $\frac{(4nn-1)y}{x} = \frac{2n-u}{u}\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^n$. Ex priore autem valore oritur $u = \frac{x}{\sqrt{(aa+xx)}}$, qui in hac ſubſtitutus dat:

$$(4nn-1)y = (2n\sqrt{(aa+xx)}-x)\left(\frac{\sqrt{(aa+xx)}+x}{\sqrt{(aa+xx)}-x}\right)^n$$

ſive:

$$(4nn-1)a^{2n}y = (2n\sqrt{(aa+xx)}-x)(\sqrt{(aa+xx)}+x)^{2n},$$

quæ æquatio non differt ab ea, quam § 22. nacti ſumus, niſi quod hic ſit $2n$, quod ibi erat n

III.

III. Tertius Modus Inveniendi Trajectorias reciprocas Algebraicas ex formula

$$dy = (\sqrt{(1+uu)}+u)^n dx.$$

27. Ob d. $(\sqrt{(1+uu)} + u)^n =$
$$\frac{ndu}{\sqrt{(1+uu)}}(\sqrt{(1+uu)} + u)^n$$ erit:

$$y = x(\sqrt{(1+uu)}+u)^n - n\int\frac{xdu}{\sqrt{(1+uu)}}(\sqrt{(1+uu)}+u)^n$$

ubi notandum eſt, ut ante, eſſe oportere x functionem imparem ipſius u. Sit p functio quæcunque par ipſius u & q functio impar, ſtatuaturque

$$\int\frac{xdu}{\sqrt{(1+uu)}}(\sqrt{(1+uu)}+u)^n = (p+q)(\sqrt{(1+uu)}+u)^n$$

erit ſumtis differentialibus, diviſioneque per $(\sqrt{(1+uu)}+u)^n$ peracta,

$$\frac{xdu}{\sqrt{(1+uu)}} = dp + dq + \frac{npdu+nqdu}{\sqrt{(1+uu)}}$$

Jam hinc formentur duæ æquationes, quarum altera functiones pares, altera impares complectatur:

$$\frac{xdu}{\sqrt{(1+uu)}} = dp + \frac{nqdu}{\sqrt{(1+uu)}} \ \&\ dq + \frac{npdu}{\sqrt{(1+uu)}} = 0$$

quarum poſterior ſponte dat: $p = -\dfrac{dq\sqrt{(1+uu)}}{ndu}$

Inventa autem functione p æquatio prior præbet:

$x = nq + \frac{dp\sqrt{(1+uu)}}{du}$ & ex substitutione habebimus

$$y = (x - np - nq)(\sqrt{(1+uu)} + u)^n =$$
$$\frac{(dp+dq)\sqrt{(1+uu)}}{du}(\sqrt{(1+uu)}+u)^n$$

28. Hinc itaque adipiscimur

Tertiam regulam pro inveniendis trajectoriis reciprocis algebraicis.

Sumatur q *functio quæcunque imparium dimensionum ipsius* u, *indeque formetur functio* $p = -\frac{dq\sqrt{(1+uu)}}{ndu}$, *qua inventa erit curvæ quaesitae*

Abscissa $AP = x = nq + \frac{dp\sqrt{(1+uu)}}{du}$

Applicata $PM = y = \frac{(dp+dq)(1+uu)}{du}(\sqrt{(1+uu)}+u)^n$

Vel cum sumto elemento du constante sit $dp = -\frac{ddq\sqrt{(1+uu)}}{ndu} - \frac{udq}{n\sqrt{(1+uu)}}$, erit curvæ quæsitæ:

Abscissa $AP = x = nq - \frac{udq}{ndu} - \frac{ddq(1+uu)}{ndu^2}$

Applicata $PM = y = \left(\frac{dq\sqrt{(1+uu)}}{du} - \frac{udq}{ndu} - \frac{ddq(1+uu)}{ndu^2}\right)$
$(\sqrt{(1+uu)}+u)^n$

Ubi

Ubi iterum notandum est, si ex aliquot hypothesibus pro q factis, pro x & y jam inventi fuerint valores X & Y; X' & Y'; X'' & Y'', &c. quaestioni quoque satisfieri his valoribus

$$x = \alpha X + \beta X' + \gamma X'' + \delta X''' \text{ \&c.}$$
$$y = \alpha Y + \beta Y' + \gamma Y'' + \delta Y''' \text{ \&c.}$$

quo pacto numerus curvarum inventarum facile in infinitum augetur.

29. Ponamus pro q potestatem quamcunque ipsius u, cujus exponens λ sit numerus impar: sit scilicet $q = u^{\lambda}$ erit $\frac{dq}{du} = \lambda u^{\lambda-1}$ & $\frac{ddq}{du^2} = \lambda(\lambda-1)u^{\lambda-2}$; hinc ergo fiet

$$x = nu^{\lambda} - \frac{\lambda u^{\lambda}}{n} - \frac{\lambda(\lambda-1)}{n}(u^{\lambda-2} + u^{\lambda}) = \frac{(nn-\lambda\lambda)}{n}u^{\lambda} - \frac{\lambda(\lambda-1)}{n}u^{\lambda-2}$$

$$y = \frac{\left(\lambda u^{\lambda-1}\sqrt{(1+uu)} - \frac{\lambda\lambda}{n}u^{\lambda} - \frac{\lambda(\lambda-1)}{n}u^{\lambda-2}\right)}{(\sqrt{(1+uu)}+u)^{n}}$$

$$\text{seu } y = -\frac{\lambda u^{\lambda-2}}{n}\,\frac{(\lambda-1-nu\sqrt{(1+uu)}+\lambda u^{2})}{(\sqrt{(1+uu)}+u)^{n}}$$

Unde exponenti λ variis valoribus tribuendis reperietur, postquam hi valores per n fuerint multiplicati,

$\lambda =$

$$\lambda = 1;\quad \begin{cases} x = (nn - 1)u \\ y = (n\sqrt{(1+uu)} - u)(\sqrt{(1+uu)} + u)^n \end{cases}$$

$$\lambda = 3;\quad \begin{cases} x = (nn - 9)u^3 - 6u \\ y = 3u(nu\sqrt{(1+uu)} - 2 - 3uu)(\sqrt{(1+uu)} + u)^n \end{cases}$$

$$\lambda = 5;\quad \begin{cases} x = (nn - 25)u^5 - 20u^3 \\ y = 5u^3(nu\sqrt{(1+uu)} - 4 - 5uu)(\sqrt{(1+uu)} + u)^n \end{cases}$$

$$\lambda = 7;\quad \begin{cases} x = (nn - 49)u^7 - 42u^5 \\ y = 7u^5(nu\sqrt{(1+uu)} - 6 - 7uu)(\sqrt{(1+uu)} + u)^n \end{cases}$$

&c.

30. Dividantur formulæ primi caſus per $nn - 1$, atque prodibunt iſti valores:

$$x = u \quad \& \quad (nn - 1)y = (n\sqrt{(1+uu)} - u)(\sqrt{(1+uu)} + u)^n$$

unde ob $u = x$ variabilis u facillime eliminatur; orieturque ſequens æquatio inter x & y

$$(nn - 1)\, y = (n\sqrt{(1+xx)} - x)(\sqrt{(1+xx)} + x)^n$$

quæ eſt eadem æquatio, quam jam ſupra bis elicuimus, & quam maxime fœcundam eſſe linearum algebraicarum ſimpliciorum, fuſius oſtendi. Hæc enim æquatio ad rationalitatem reducta, ſi fuerit n numerus integer, aſcendet ad $n + 2$ dimenſiones, ſin autem n ſit numerus fractus, puta $= \frac{n}{m}$ numerus dimenſionum erit $= n + 2m$. Cum autem poſi-

positio $n = 1$ sit inanis, curva simplicissima hinc oriunda erit linea quarti ordinis.

31. Jam conjunctim sumantur formulæ casuum: $\lambda = 1$ & $\lambda = 3$, ex iisque reperietur:

$$x = (nn-1)\alpha u + (nn-9)\beta u^3 - 6\beta u$$

$$y = \left\{ \begin{matrix} \alpha(n\sqrt{(1+uu)} - u \\ 2\beta u(nu\sqrt{(1+uu)} - 2 - 3uu) \end{matrix} \right\} (\sqrt{(1+uu)}+u)^n$$

Quo hinc facilius variabilis u eliminari possit, ponatur $\beta = \frac{1}{nn-9}$ & $(nn-1)\alpha = 6\beta = \frac{6}{nn-9}$; ut sit $\alpha = \frac{6}{(nn-1)(nn-9)}$, & $x = u^3$, ideoque $u = \sqrt[3]{x}$.

Quare ob $(\sqrt{(1+uu)}+u)^n = (\sqrt{(1+uu)}-u)^{-n}$ erit:

$$y(\sqrt{(1+uu)}-u)^n = \frac{6n\sqrt{(1+uu)} - 6u}{(nn-1)(nn-9)} +$$

$$\frac{3nuu\sqrt{(1+uu)} - 6u - 9u^3}{nn-9} = \frac{3n(2+(nn-1)uu)\sqrt{(1+uu)}}{(nn-1)(nn-9)}$$

$$- \frac{3u(2nn+3(nn-1)uu)}{(nn-1)(nn-9)}.$$ Hancobrem habebimus:

$$\frac{(nn-1)(nn-9)}{3} y(\sqrt{(1+uu)}-u)^n = \begin{matrix} +n(2+(nn-1)uu)\sqrt{(1+uu)} \\ -u(2nn+3(nn-1)uu) \end{matrix}$$

existente $u = \sqrt[3]{x}$.

32. Conjungamus cum his formulas casus $\lambda = 5$ eritque

$$x = \alpha u^3 + (nn-25)\beta u^5 - 20\beta u^3$$

$$\frac{(nn-1)(nn-9)}{3} y \left(\sqrt{(1+uu)}-u\right)^n =$$

$$+n\alpha(2+(nn-1)uu)\sqrt{(1+uu)}$$
$$-\alpha u(2nn+3(nn-1)uu)$$

$$+\tfrac{5}{3}\beta(nn-1)(nn-9)u^3(nu\sqrt{(1+uu)}-4-5uu)$$

Sit $\beta = \frac{1}{nn-25}$ & $\alpha = 20\beta = \frac{20}{nn-25}$, erit $x = u^5$ &

$$\frac{(nn-1)(nn-9)(nn-25)}{5} y\left(\sqrt{(1+uu)}-u\right)^n =$$

$$+n(24+12(nn-1)uu+(nn-1)(nn-9)u^4)\sqrt{(1+uu)}$$
$$-u(24nn+4nn(nn-1)uu+5(nn-1)(nn-9)u^4)$$

Simili autem modo ulterius pergere licet, his formulis cum casu $\lambda = 7$ conjungendis: prodibit autem

$x = u^7$ atque

$$\frac{(nn-1)(nn-9)(nn-25)(nn-49)}{7} y\left(\sqrt{(1+uu)}-u\right)^n =$$

$$n(720+360(nn-1)u^2+30(nn-1)(nn-9)u^4+(nn-1)(nn-9)$$
$$(nn-25)u^6)\sqrt{(1+uu)}$$

— u

$$-u(720nn+120nn(nn-1)u^2+6nn(nn-1)(nn-9)u^4+$$
$$7(nn-1)(nn-9)(nn-25)u^6)$$

unde non difficulter lex sequentium formularum colligi potest.

33. Præter hos vero casus, quibus variabilis u facile eliminatur, ex formulis ante §. 29 inventis, alii eadem prærogativa gaudentes derivari possunt. Cum enim sit:

$$x=-(nn-\lambda\lambda)u^{\lambda}+\lambda(\lambda-1)u^{\lambda-2}$$
$$y=\lambda u^{\lambda-2}(\lambda-1-nu\sqrt{(1+uu)}+\lambda uu)(\sqrt{(1+uu)}+u)^{n}$$

quoties exponens n est numerus impar sive integer sive fractus, statuere licebit $\lambda=n$. Sit igitur n numerus impar, ac fiat $\lambda=n$ erit:

$$x=n(n-1)u^{n-2} \quad \&$$

$$y=nu^{n-2}(n-1-nu\sqrt{(1+uu)}+nuu)(\sqrt{(1+uu)}+u)^{n}$$

seu per $n(n-1)$, dividendo habebitur:

$$x=u^{n-2} \quad \&$$

$$(n-1), y=u^{n-2}(n-1-nu\sqrt{(1+uu)}+nuu)(\sqrt{(1+uu)}+u)^{n}$$

34. Si $n=1$ ex his formulis nihil oritur; fiat ergo, ut exemplum afferamus, $n=3$, eritque $x=u$ & $y=3x(2-3x\sqrt{(1+xx)}+3xx)(\sqrt{(1+xx)}+x)^{3}$.

 Cum

Cum igitur sit:

$$(\sqrt{(1+xx)}+x)^3 = 3x+4x^3+(1+4xx)\sqrt{(1+xx)}, \text{ erit}$$

$$y = 3x(3x+2x^3+2(1+xx)\sqrt{(1+xx)}) \text{ ideoque}$$

$$y - 9xx - 6x^4 = 6x(1+xx)\sqrt{(1+xx)}$$

Quæ æquatio ad rationalitatem perducta fit:

$$yy - 18xxy - 12x^4y = 36xx + 27x^4$$

quæ est nova linea quinti ordinis in numerum trajectoriarum reciprocarum referenda. Innumerabiles autem aliæ æquationes rationales inter x & y hinc erui possunt; ponendis pro n aliis numeris imparibus, quæ autem ad multo altiores dimensiones assurgent.

35. Simpliciores provenient, si in prima æquatione ponatur $\lambda = n - 2$, unde fit:

$$x = (n-2)(n-3)u^{n-4} - 4(n-1)u^{n-2} \quad \&$$

$$y = (n-2)u^{n-4}(n-3+(n-2)uu-(n-2)u\sqrt{(1+uu)})\,(\sqrt{(1+uu)}+u)^n$$

Si enim hæ formulæ cum prius inventis conjungantur, fiatque

$$x = \alpha u^{n-2} + (n-2)(n-3)\beta u^{n-4} - 4(n-1(\beta u^{n-2}$$

$$\left.\begin{array}{l} (n-1)y = \alpha u^{n-2}(n-1+nuu-nu\sqrt{(1+uu)}) \\ +(n-1)(n-2)\beta u^{n-4}(n-3+(n-2)uu- \\ \quad (n-2)u\sqrt{(1+uu)}) \end{array}\right\}(\sqrt{(1+uu)}+u)^n$$

po-

ponamus $\beta = \frac{1}{(n-2)(n-3)}$ & $\alpha = \frac{4(n-1)}{(n-2)(n-3)}$, ut sit $x = u^{n-4}$ erit:

$$(n-2)(n-3)y = u^{n-2}((n-2)(n-3) + nnuu + 4nu^4 - u((n-2)^2 + 4nuu)\sqrt{(1+uu)})(\sqrt{(1+uu)}+u)^n$$

Quod si jam ponatur $n = 5$, fiet $x = u$ ideoque

$$6y = x(6 + 25xx + 20x^4 - (9x + 20x^3)\sqrt{(1+xx)})(\sqrt{(1+xx)} + x)^5$$

Simili autem modo hic ita adjungi potest casus $\lambda = n - 4$, ut posito $n = 7$ fiat $x = u$, atque pari modo, quousque libuerit, progredi licet.

35. Ex reliquis formulis §. 9 exhibitis, in quibus tam x quam y per tertiam variabilem t, cujus u est functio impar, v vero functio par, exprimitur, in genere formulæ algebraicæ commode erui non possunt: sin autem in his formulis $dx = vdt$ & $dy = \left(\frac{1+u}{1-u}\right)^n vdt$ ponatur $v = 1 - uu$, & $n = 1$, ut fiat $dx = (1 - uu)dt$ & $dy\,(1 + u)^2\,dt$, quæ formulæ non obstante hac determinatione sunt maxime generales. Cum igitur hinc sit:

$$x = t - \int uudt \;\&\; y = t + 2\int udt + \int uudt$$

perspicuum est curvas algebraicas prodire, si tam $\int udt$ quam $\int uudt$ fuerit integrabile. Ad hoc utrumque præstandum

in formula:	ponatur
$\int u\,dt = tu - \int t\,du$	$\int t\,du = p$; ut sit $t = \frac{dp}{du}$

ubi, quia t est functio impar ipsius u, necesse est ut sit p functio par. Jam hic valor ipsius t in altera formula substituatur, eritque

$$\int uu\,dt = tuu - 2\int tu\,du = \frac{uu\,dp}{du} - 2\int u\,dp = \frac{uu\,dp}{du} - 2pu + 2\int p\,du$$

ponatur $\int p\,du = q$, ut sit $p = \frac{dq}{du}$, eritque q functio impar ipsius u; & sumto du constante fiet $dp = \frac{ddq}{du}$ atque substitutionibus retro factis erit $t = \frac{ddq}{du^2}$ &

$$\int uu\,dt = \frac{uu\,ddq}{du^2} - \frac{2u\,dq}{du} + 2q \;\&\; \int u\,dt = \frac{u\,ddq}{du^2} - \frac{dq}{du}$$

37. His valoribus substitutis habebimus

Quartam Regulam pro inveniendis trajectoriis reciprocis algebraicis:

Sumatur q *functio quaecunque impar ipsius* u, *positoque elemento* du *constante erit curvae quaesitae*

Abscissa AP $= x = \frac{ddq(1 - uu)}{du^2} + \frac{2u\,dq}{du} - 2q$

Applicata PM $= y = \frac{ddq(1 + u)^2}{du^2} - \frac{2dq(1 + u)}{du} + 2q$.

Ponamus $q = u^\lambda$, existente λ numero impari, erit

$x =$

$$x = \lambda(\lambda-1)u^{\lambda-2}(1-uu) + 2\lambda u^{\lambda} - 2u^{\lambda}$$

$$y = \lambda(\lambda-1)u^{\lambda-2}(1+u)^{2} - 2\lambda u^{\lambda-1}(1+u) + 2u^{\lambda}$$

five

$$x = \lambda(\lambda-1)u^{\lambda-2} - (\lambda-1)(\lambda-2)u^{\lambda}$$

$$y = \lambda(\lambda-1)u^{\lambda-2} + 2\lambda(\lambda-2)u^{\lambda-2} + (\lambda-1)(\lambda-2)u^{\lambda}$$

38. Ex his formulis variabilis u non difficulter eliminatur, fi enim altera per alteram dividatur, erit

$$\lambda(\lambda-1)(x-y) + 2\lambda(\lambda-2)xu + (\lambda-1)(\lambda-2)uu(x+y) = 0$$

hincque $uu = \dfrac{-2\lambda(\lambda-2)xu - \lambda(\lambda-1)(x-y)}{(\lambda-1)(\lambda-2)(x+y)}$;

inveniturque

$$u = \frac{-\lambda(\lambda-2)x \pm \sqrt{\lambda(\lambda-2)((\lambda-1)^{2}yy - xx)}}{(\lambda-1)(\lambda-2)(x+y)}$$

qui valor fi in altera æquatione, vel in fumma amborum $x+y = 2\lambda u^{\lambda-2}(\lambda-1+(\lambda-2)u)$ fubftituatur, orietur æquatio inter x & y, quæ femel tantum quadratis fumendis ad rationalitatem reducetur. Quatuor autem hifce regulis pro inventione trajectoriarum reciprocarum algebraicarum traditis, quicquid in folutione hujus problematis adhuc defiderari poterat, hic abunde præftitiffe mihi videor.

DE

DE MOTU
Corporum Flexibilium.

I.

Tabb. ~~III. &~~ IV. V

Si duo copora rigida ita inter ſe conjungantur, ut utrumque circa juncturam libere moveri poſſit, ea invicem flexura connecti dicuntur. Axis autem flexuræ vocatur linea recta, circa quam ambo corpora libere gyrari queant. Si in extremitate alterius corporis tertium ſimili flexura coaptetur, tria habebuntur corpora duabus flexuris inter ſe connexa, quatuor autem corpora tribus flexuris connectentur, & ita porro. Hujusmodi corpus flexibile pluribus flexuris inſtructum catena repræſentat, cujus ſinguli articuli flexuris inter ſe ſunt connexi, numerusque flexurarum unitate deficiet a numero articulorum catenam conſtituentium. Funis autem & filum, ſi ſint perfecte flexibilia, conſiderari poſſunt, tanquam conſtarent ex pluribus minimis articulis flexuris inter ſe connexis. Hinc ope fili plurima corpora rigida ita invicem colligari poſſunt, ut corpus flexibile conſtituant. Hocque caſu cum partes quaquaverſus inter ſe flecti queant, quævis linea recta per flexuram ad fili connectentis directionem normalis locum axis flexuræ tenere poterit: ejus vero tantum ratio erit habenda, circa quem motus actu abſolvitur.

2. Ad motum ergo hujusmodi corporum flexibilium definiendum, ſingulorum primo articulorum motus inveſtigari debet. Deinde cum flexuræ impediant, quo minus partes a ſe invicem disjungantur, manifeſtum eſt hos

ſingu-

ſingularum partium motus quodammodo a ſe invicem pendere. Binorum enim quorumque articulorum extremitates, quæ flexuris inter ſe ſunt connexæ, perpetuo motum communem habere debent; ipſi vero articuli circa hanc flexuram motu angulari movebuntur. Hic igitur primum ipſarum ſingularum flexurarum motus ſunt conſiderandi, qui etſi in infinitum variare poſſunt, tamen hac lege inter ſe conſtringuntur, ut binæ contiguæ perpetuo æquali intervallo a ſe invicem diſtent. Hæc igitur motuum multiplicitas problema ſolutu difficillimum reddere videtur; interim tamen operam dabo, ut quantum fieri licet, hujus problematis tantopere complicati ſolutionem planam ac facilem exhibeam; quod commodiſſime fieri poterit, ſi a caſibus ſimpliciſſimis inveſtigationem ordiamur. Primum ergo unius articuli ſolitarii, qui cum aliis omnino non ſit connexus, motum determinabo.

Problema. I.

3. *Determinare motum virgae rigidae* AB *ſuper plano horizontali utcunque projectae.* *Fig.* 1.

Solutio.

Pervenerit hæc virga tempore quocunque t elapſo in ſitum AB, ad quem definiendum pro lubitu aſſumatur in eodem plano horizontali linea recta fixa OP pro axe, ad quem ex virgæ terminis A & B demittantur perpendicula Aa, Bb. Sit G centrum gravitatis virgæ AB, unde pariter ad axem normalis ducatur GP, ponaturque $OP = p$; $PG = x$, & angulus $AGP = \zeta$. Quod ſi ergo ad quodvis tempus determinare noverimus valores litterarum p, x, & ζ, habebimus non ſolum locum & poſitionem virgæ AB, ſed etiam ejus motum verum. Quodſi enim motus puncti G reſolvatur in binos laterales, quorum alterius directio ſit parallela lineæ OP, alterius vero incidat in ipſam rectam PG, erit celeritas illius $= \frac{dp}{dt}$; hujus vero $= \frac{dx}{dt}$, denotante dt tempuſculum, quo variabiles p & x augmenta accipiunt dp & dx. Cognito autem motu centri gravitatis G, motus virgæ angularis circa punctum G celeritas erit $= \frac{d\zeta}{dt}$; ſi quidem angulum AGP $= \zeta$ motu angulari augeri ponamus; ſcilicet $\frac{d\zeta}{dt}$ definiet celeritatem, qua virgæ punctum, quod a centro gravitatis G intervallo $= 1$ circa G gyratur. Quoniam hanc virgam a nullis viribus ſollicitari ponimus, atque planum horizontale, ſuper quo ſit motus, omni aſperitate deſtitutam aſſumimus, tam motus centri gravitatis, quam motus angularis virgæ circa centrum gravitatis erit uniformis, uti ex mechanicis conſtat. Erit ergo $\frac{dp}{dt} = \mathfrak{A}$, $\frac{dx}{dt} = \mathfrak{B}$ & $\frac{d\zeta}{dt} = \mathfrak{G}$; unde fit $p = \mathfrak{A}t + a$, $x = \mathfrak{B}t + b$ & $\zeta = \mathfrak{G}t + g$. Ex quibus æquationibus locus & poſitio virgæ ad quodvis tempus definietur, hincque ſimul ejus motus innoteſcit. Q. E. I.

Coroll. 1.

4. Ponamus motus initio, cum eſſet $t = 0$, centrum gravitatis G in O eſſe verſatum, directionemque virgæ AB ad rectam OP fuiſſe normalem, ita ut tum angulus ζ fuerit

fuerit $=0$, erit $a=0$, $b=0$, $g=0$, ideoque hoc casu erit $p=\mathfrak{A}t$; $x=\mathfrak{B}t$; & $\zeta=\mathfrak{G}t$.

Coroll. 2.

7. Si præterea assumamus initio motus celeritatem centri gravitatis fuisse debitam altitudini $=a$, ejusque directionem incidisse in axem OP, erit $\mathfrak{A}=\sqrt{a}$ & $\mathfrak{B}=0$. fiet ergo $p=t\sqrt{a}$ & $x=0$, unde constat centrum gravitatis G perpetuo in axe OP motu uniformi esse progressurum, & celeritatem rotatoriam fore constantem.

Scholion.

6. Planissima hæc sunt ex principiis mechanicæ, quibus constat, omne corpus rigidum, quod a nullis viribus sollicitatur constanter ita moveri, ut ejus centrum gravitatis motu æquabili lineam rectam describat, singulæque ejus partes circa centrum gravitatis motu uniformi rotentur. Interim tamen hoc problema præmittere visum est, ut ex modo solutionis via ad sequentia resolvenda planior redderetur. Ceterum hinc jam motus definiri potest duorum corpusculorum minimorum filo connexorum; si enim corpuscula sint minima, eorum motus, quo forteutrumque circa suum centrum gravitatis rotatur, negligi potest: movebunturque ambo, quamdiu filum tensum manet, instar virgæ rigidæ, quemadmodum ex solutione sequentis problematis perspicietur.

Problema. II.

7. *Duorum corpusculorum A et B filo inertiae experte AB inter se colligatorum motum super plano horizontali determinare, postquam utcunque fuerint projecta.* Fig. 2.

Solutio.

Sumta recta Oab pro axe, pervenerint corpuscula hæc elapso tempore t in situm AB, ex quibus ad axem perpendicula ducantur Aa & Bb. Sit longitudo fili AB $= a$, quæ perpetuo eadem manet; & vocetur corpusculi A massa $=$ A, corpusculi B massa $=$ B; sintque O$a = p$; A$a = x$; O$b = q$ & B$b = y$; angulus vero ABb ponatur $= \zeta$; eritque

$$ab = q - p = a \sin \zeta \ \& \ y - x = a \cos \zeta$$

Tum vero erit celeritas corpusculi A secundum directionem O$a = \frac{dp}{dt}$, & secundum directionem aA $= -\frac{dx}{dt}$: similique modo corpusculi B celeritas secundum directionem Ob erit $= \frac{dq}{dt}$ & secundum directionem bB $= \frac{dy}{dt}$. Exprimat jam P tensionem fili AB, qua vi corpus A versus B, at corpus B versus A trahitur. Corporis ergo A

motus $\frac{dp}{dt}$ accelerabitur vi $= P \sin \zeta$;

motus $\frac{dx}{dt}$ accelerabitur vi $= P \cos \zeta$; Corporis vero B

motus $\frac{dq}{dt}$ retardabitur vi $= P \sin \zeta$;

motus $\frac{dy}{dt}$ retardabitur vi $= P \cos \zeta$. Hinc erit ex natura sollicitationum, posito elemento dt constante:

$$2\,A\,ddp = P\,dt^2 \sin \zeta; \quad 2\,A\,ddx = P\,dt^2 \cos \zeta$$

$$2\,B\,ddq = -P\,dt^2 \sin \zeta; \quad 2\,B\,ddy = -P\,dt^2 \cos \zeta.$$

Ex

Ex his erit $A ddp + B ddq = 0$; & bis integrando $Ap + Bq = \mathfrak{A}t + \mathfrak{a}$, similique modo erit $A ddx + B ddy = 0$ unde $Ax + By = \mathfrak{B}t + \mathfrak{b}$. Cum ergo $q - p = a \sin \zeta$ erit $p = \frac{\mathfrak{A}t + \mathfrak{a} - B a \sin \zeta}{A + B}$ & $q = \frac{\mathfrak{A}t + \mathfrak{a} + A a \sin \zeta}{A + B}$. Atque ob $y - x = a \cos \zeta$, erit $x = \frac{\mathfrak{B}t + \mathfrak{b} - B a \cos \zeta}{A + B}$ & $y = \frac{\mathfrak{B}t + \mathfrak{b} + A a \cos \zeta}{A + B}$.

Deinde vero cum sit $\frac{ddp}{ddx} = \frac{\sin \zeta}{\cos \zeta}$, ob $ddp = - \frac{B a dd. \sin \zeta}{A + B}$ & $ddx = - \frac{B a dd. \cos \zeta}{A + B}$, erit $\frac{dd. \sin \zeta}{dd. \cos \zeta} = \frac{\sin \zeta}{\cos \zeta}$, seu $\sin \zeta . dd. \cos \zeta - \cos \zeta . dd \sin \zeta = 0$ cujus integrale est $- \sin \zeta . d \cos . \zeta + \cos \zeta . d \sin \zeta = \mathfrak{G} dt$ seu $+ d\zeta . \sin \zeta^2 + d\zeta . \cos \zeta^2 = + d\zeta = \mathfrak{G} dt$; unde fit $\zeta = \mathfrak{G} t + \mathfrak{g}$. Quocirca ad quodvis tempus t definietur angulus $ABb = \zeta$, hincque valores litterarum p, x, q & y sicque positio corpusculorum A & B filo inter se connexorum perpetuo assignari poterit. Q. E. J.

Coroll. 1.

8. Quia est $A dp + B dq = \mathfrak{A} dt$ seu $\frac{A dp + B dy}{(A + B) dt} = \frac{\mathfrak{A}}{A + B}$, centrum commune gravitatis amborum corporum secundum directionem axis Oab uniformiter progreditur;

tur; simili vero modo ob $\frac{A dx + B dy}{(A+B) dt} = \frac{\mathfrak{B}}{A+B}$, quoque ab hoc axe motu uniformi recedet, ideoque conjunctim motu uniformi lineam rectam describet.

Coroll. 2.

9. Quoniam est $\frac{d\zeta}{dt} = \mathfrak{G}$ ac propterea constans, sequitur angulum ABb uniformiter increscere, ideoque filum AB uniformiter in gyrum agi; atque adeo hæc duo corpuscula A & B filo AB connexa perinde movebuntur, ac si virga rigida in ipsorum locum substitueretur.

Coroll. 3.

10. Cum sit $\zeta = \mathfrak{G}t + \mathfrak{g}$ & $d\zeta = \mathfrak{G}dt$, erit $d.\,\text{sin}\,\zeta = \mathfrak{G}dt\,\text{cos}\,\zeta$, & $dd.\,\text{sin}\,\zeta = -\mathfrak{G}^2 dt^2\,\text{sin}\,\zeta$: unde $ddp = + \frac{Ba\mathfrak{G}^2 dt^2\,\text{sin}\,\zeta}{A+B}$. Quare cum sit $2Addp = Pdt^2\,\text{sin}\,\zeta$, fiet $\frac{2ABa\mathfrak{G}^2}{A+B} = P$, quæ est vis qua filum tenditur: ubi notandum est, $\mathfrak{G} = \frac{d\zeta}{dt}$ definire celeritatem rotatoriam fili AB ad distantiam $= 1$ relatam. Hinc si f sit altitudo debita celeritati, qua A circa B & vicissim B circa A revolvitur, erit $\mathfrak{G} = \frac{\sqrt{f}}{a}$; fietque tensio fili $P = \frac{2AB}{A+B} \cdot \frac{f}{a}$.

Scho-

Scholion.

11. Etsi solutio hujus problematis facillime ex mechanicæ principiis deduci potuisset, tamen hæc solutio, quamvis sit prolixior, quam natura rei postulat, hunc nobis præstabit usum, ut eadem methodo casus, si tria & plura corpuscula filo fuerint colligata, evolvi queant, quod fieri non posset, si solutionem maxime naturalem & concinnam adhibere voluissemus. Progrediar ergo ad casum trium corporum examinandum, quem Vir Celeb. Daniel Bernoulli mihi proposuit, & in quo fundamentum universæ theoriæ de motu corporum flexibilium est positum. Hoc enim casu expedito non difficile erit, eandem methodum ad plura corpuscula atque ad omnia corpora flexibilia extendere.

Problema. III.

12. *Si tria corpuscula A, B, C filo inertiae experte fuerint connexa, eaque super plano horizontali utcunque projiciantur, eorum motum determinare.* Fig. 3.

Solutio.

Sumta pro lubitu recta Oo pro axe fixo, pervenerint corpuscula elapso tempore t in situm ABC; ductisque ad axem perpendiculis sit $Oa = p$, $Aa = x$; $Ob = q$; $Bb = y$; $Oc = r$, $Cc = z$; tum vero ponatur $AB = a$, $BC = b$, ang. $ABb = \zeta$; ang. $BCc = \eta$, eritque.

$$q - p = a \sin \zeta; \quad r - q = b \sin \eta$$
$$y - x = a \cos \zeta; \quad z - y = b \cos \eta$$

Ex his motus singulorum corpusculorum ita definientur, ut posito elemento temporis $= dt$, sit

Cele-

Celeritas in directione $O o$	Celeritas in directione $O \omega$
Corpusculi A $= \frac{dp}{dt}$	Corpusculi A $= \frac{dx}{dt}$
Corpusculi B $= \frac{dq}{dt}$	Corpusculi B $= \frac{dy}{dt}$
Corpusculi C $= \frac{dr}{dt}$	Corpusculi C $= \frac{dz}{dt}$

Denotent jam litteræ A, B, C massas corpusculorum A, B, & C, sitque P tensio fili AB, Q tensio fili BC; unde sequentes orientur singulorum corpusculorum sollicitationes.

Sollicitabitur	in directione $O o$	in directione $O \omega$
Corpusculum A	vi $= P \sin \zeta$	vi $= P \cos \zeta$
Corpusculum B	vi $= - P \sin \zeta + Q \sin \eta$	vi $= - P \cos \zeta + Q \cos \eta$
Corpusculum C	vi $= - Q \sin \eta$	vi $= - Q \cos \eta$

Ad incrementa velocitatum definienda ponamus corpusculi A celeritatem in directione $O o$ debitam esse altitudini v, & cum sollicitetur a vi $= P \sin \zeta$, dum spatiolum dp absolvit, fiet $dv = \frac{P\,dp \sin \zeta}{A}$, uti ex principiis mechanicæ constat. Quia autem celeritas est $= \frac{dp}{dt}$ faciamus $\frac{dp}{dt} = \sqrt{v}$, erit $v = \frac{dp^2}{dt^2}$, & posito elemento temporis dt constante erit $dv = \frac{2\,dp\,ddp}{dt^2}$, quo valore substituto habebimus $\frac{2\,dp\,ddp}{dt^2} = \frac{P\,dp \sin \zeta}{A}$ seu $2\,A\,ddp = P\,dt^2 \sin \zeta$.

Hoc

Hoc igitur modo ſingulorum corpuſculorum accelerationes definiendo obtinebimus ſequentes æquationes.

$$2A\,ddp = P\,dt^2 \sin\zeta; \qquad 2A\,ddx = P\,dt^2 \cos\zeta$$

$$2B\,ddq = -P\,dt^2 \sin\zeta + Q\,dt^2 \sin\eta \qquad 2B\,ddy = -P\,dt^2 \cos\zeta + Q\,dt^2 \cos\eta$$

$$2C\,ddr = -Q\,dt^2 \sin\eta; \qquad 2C\,ddz = -Q\,dt^2 \cos\eta$$

Ex his æquationibus additis naſcuntur duæ ſequentes;

$$2A\,ddp + 2B\,ddq + 2C\,ddr = 0$$
$$2A\,ddx + 2B\,ddy + 2C\,ddz = 0$$

quæ bis integratæ dant:

$$2Ap + Bq + Cr = \mathfrak{A}t + \mathfrak{a}$$
$$2Ax + By + Cz = \mathfrak{B}t + \mathfrak{b}$$

Cum vero ſit $q = p + a\sin\zeta$; $y = x + a\cos\zeta$; atque porro $r = p + a\sin\zeta + b\sin\eta$ & $z = x + a\cos\zeta + b\cos\eta$, erit his valoribus ſubſtitutis:

$$(A+B+C)p + (B+C)a\sin\zeta + Cb\sin\eta = \mathfrak{A}t + \mathfrak{a} \quad \&$$
$$(A+B+C)x + (B+C)a\cos\zeta + Cb\cos\eta = \mathfrak{B}t + \mathfrak{b}$$

ex quibus orientur ſequentes determinationes:

$$p = \frac{\mathfrak{A}t + \mathfrak{a} - (B+C)a\sin\zeta - Cb\sin\eta}{A+B+C}$$

$$q = \frac{\mathfrak{A}t + \mathfrak{a} + Aa\sin\zeta - Cb - \sin\eta}{A+B+C}$$

$$r = \frac{\mathfrak{A}t + \mathfrak{a} + Aa\sin\zeta + (A+B)b\sin\eta}{A+B+C}$$

 ſimi-

similique modo reperietur:

$$x = \frac{\mathfrak{B}t + \mathfrak{b} - (B + C)\,a\cos\zeta - Cb\cos\eta}{A + B + C}$$

$$y = \frac{\mathfrak{B}t + \mathfrak{b} + Aa\cos\zeta - Cb\cos\eta}{A + B + C}$$

$$z = \frac{\mathfrak{B}t + \mathfrak{b} + Aa\cos\zeta + (A + B)\,b\cos\eta}{A + B + C}$$

Inventis litteris $p, q, r,$ & $x, y, z,$ tensiones P & Q duplici modo exprimentur. Erit enim

$$P\,dt^2 = \frac{2A\,ddp}{\sin\zeta} \quad \& \quad P\,dt^2 = \frac{2A\,ddx}{\cos\zeta}$$

$$Q\,dt^2 = \frac{-2C\,ddr}{\sin\eta} \quad \& \quad Q\,dt^2 = \frac{-2C\,ddz}{\cos\eta}$$

unde fit:

$$ddp\cos\zeta = ddx\sin\zeta \quad \& \quad ddr\cos\eta = ddz\sin\eta$$

substitutis autem valoribus ante inventis erit

$$(B + C)\,a\cos\zeta\,dd.\sin\zeta + Cb\cos\zeta\,dd.\sin\eta = (B + C)\,a\sin\zeta\,dd.\cos\zeta + Cb\sin\zeta\,dd.\cos\eta$$

seu $(B + C)\,a(\cos\zeta\,dd.\sin\zeta - \sin\zeta\,dd.\cos\zeta) + Cb(\cos\zeta\,dd.\sin\eta - \sin\zeta\,dd.\cos\eta) = 0$

& $Aa(\cos\eta\,dd.\sin\zeta - \sin\eta\,dd.\cos.\zeta) + (A + B)\,b(\cos\eta\,dd.\sin\eta - \sin\eta\,dd.\cos\eta) = 0$

At vero generatim est $\cos m\,dd.\sin n - \sin m\,dd.\cos n = \cos m(ddn\cos n - dn^2\sin n) + \sin m(ddn\sin n + dn^2\cos n)$, ideoque cum sit $\cos m\cos n + \sin m\sin n = \cos(m - n)$ & $\sin m\cos n - \cos m\sin n = \sin(m - n)$ erit

cof

$\cos m\, dd. \sin n - \sin m . dd \cos n = ddn \cos(m-n) + dn^2 \sin(m-n)$

Cujus reductionis ratione habita fiet

$$(B+C)\, add\zeta + C\, bdd\eta \cos(\zeta - \eta) + C\, b\, d\eta^2 \sin(\zeta - \eta) = 0$$

$$(A+B)\, bddy + A\, add\zeta \cos(\eta - \zeta) + A\, a\, d\zeta^2 \sin(\eta - \zeta) = 0$$

Integretur utraque quoad fieri poteſt, erit

$$(B+C)\, ad\zeta + C\, bd\eta \cos(\zeta - \eta) + C\, b \int d\zeta d\eta \sin(\zeta - \eta) = \text{Conſt.}$$

$$(A+B)\, bdy + A\, ad\zeta \cos(\eta - \zeta) + A\, a \int d\zeta d\eta \sin(\eta - \zeta) = \text{Conſt.}$$

Unde partibus integralibus eliminatis fiet:

$$\frac{(B+C)\, ad\zeta}{Cb} + d\eta \cos(\zeta - \eta) + \frac{(A+B)\, bdy}{Aa} + d\zeta \cos(\eta - \zeta)$$
$$= \text{Conſt.}$$

ſeu $\dfrac{(B+C)ad\zeta}{Cb} + \dfrac{(A+B)\, bd\eta}{Aa} + (d\zeta + d\eta)\cos(\zeta - \eta) = \dfrac{dt}{\sqrt{f}}$

Per ſubtractionem vero ex duabus illis æquationibus differentialibus oritur:

$$\frac{(B+C)\, add\zeta}{C\, b} - \frac{(A+B)\, bdd\eta}{Aa} - (dd\zeta - dd\eta)\cos(\zeta - \eta) +$$
$$(d\zeta^2 + d\eta^2) \sin(\zeta - \eta) = 0$$

Ponatur $\zeta + \eta = v$ & $\zeta - \eta = u$, ut ſit $\zeta = \dfrac{v+u}{2}$

& $\eta = \dfrac{v-u}{2}$

abibitque prior æquatio integrata in hanc:

$$\frac{(B+C)adv}{2Cb}+\frac{(B+C)adu}{2Cb}+\frac{(A+B)bdv}{2Aa}-\frac{(A+B)bdu}{2Aa}$$

$$+dv\cos u=\frac{dt}{\sqrt{f}}$$

Posterior vero æquatio differentio differentialis in hanc:

$$\frac{(B+C)addv}{2Cb}+\frac{(B+C)addu}{2Cb}-\frac{(A+C)bddv}{2Aa}+$$

$$\frac{(A+B)bddu}{2Aa}-ddu\cos u+\tfrac{1}{2}(dv^2+du^2)\sin u=0$$

Ponatur brevitatis gratia:

$$\frac{(B+C)a}{C}+\frac{(A+B)b}{Aa}=m$$

$$\frac{(B+C)a}{Cb}-\frac{(A+B)b}{Aa}=n$$

orienturque istæ duæ æquationes:

$$\tfrac{1}{2}mdv+\tfrac{1}{2}ndu+dv\cos u=\frac{dt}{\sqrt{f}}$$

$$\tfrac{1}{2}nddv+\tfrac{1}{2}mddu-ddu\cos u+\tfrac{1}{2}(dv^2+du^2)\sin u=0$$

Ex priori fit $dv=\dfrac{2dt:\sqrt{f}-ndu}{m+2\cos u}$, qui in altera

$$nddv+mddu-2ddu\cos u+(dv^2+du^2)\sin u=0$$

substitutus ob $ddv=\dfrac{-nddu}{m+2\cos u}+\dfrac{4dtdu\sin u:\sqrt{f}-2ndu^2\sin u}{(m+2\cos u)^2}$

dabit:

—nn

$$\frac{-nnddu}{m+2\cos u}=\frac{4ndtdu\sin u:\sqrt{f}-2nndu^2\sin u}{(m+2\cos u)^2}+mddu$$

$$-2ddu\cos u+du^2\sin u+$$

$$\frac{4dt\sin u:f-4ndtdu\sin u:\sqrt{f}+nndu^2\sin u}{(m+2\cos u)^2}=0$$

seu $(mm-nn)\,ddu-4ddu\cos u^2+\dfrac{4dt^2\sin u:f+(mm-nn)du^2\sin u}{m+2\cos u}$

$$+\frac{4m\,du^2\sin u\cos u+4du^2\sin u\cos u^2}{m+2\cos u}=0$$

Ponatur $dt=\dfrac{du}{\sqrt{\omega}}$ erit $ddt=0=\dfrac{ddu}{\sqrt{\omega}}-\dfrac{du\,d\omega}{2\omega\sqrt{\omega}}$ ideoque $ddu=\dfrac{du\,d\omega}{2\omega}$, quibus valoribus pro dt & ddu substitutis erit:

$$\frac{(mm-nn)d\omega}{2\omega}-\frac{2d\omega\cos u^2}{\omega}+\frac{4du\sin u:f\omega+(mm-nn)du\sin u}{m+2\cos u}$$

$$+\frac{4m\,du\sin u\cos u+4du\sin u\cos u^2}{m+2\cos u}=0 \text{ seu}$$

$$\tfrac{1}{2}(m^2-n^2)\,d\omega-2d\omega\cos u^2-\frac{nn\omega\,du\sin u}{m+2\cos u}$$

$$+(m+2\cos u)\,\omega\,du\sin u+\frac{4du\sin u}{f(m+2\cos u)}=0$$

Sit $\cos u = s$ atque ob $du \sin u = -ds$ erit:

$$(m^2 - n^2) d\omega - 4 ss d\omega + \frac{2 nn\omega ds}{m+2s} - 2(m+2s)\omega ds = \frac{8 ds}{f(m+2s)}$$

$$\text{seu } d\omega + \frac{2\omega ds(nn - (m+2s)^2)}{(m+2s)(mm - nn - 4ss} = \frac{8 ds}{f(m+2s)(m^2 - n^2 - 4ss)}$$

quæ æquatio multiplicata per $\dfrac{mm - nn - 4ss}{m+2s}$ fit integrabilis, eritque integrale.

$$\frac{(mm - nn - 4ss)\omega}{m+2s} = \int \frac{8 ds}{f(m+2s)^2} = \frac{4}{g} - \frac{4}{f(m+2s)}$$

hinc erit $\omega = \dfrac{4f(m+2s) - 4g}{fg(mm - nn - 4ss)} = \dfrac{du^2}{dt^2}$ & ob du

$$= \frac{-ds}{\sqrt{(1-ss)}} \text{ fiet } dt = \frac{-ds\sqrt{fg(mm - nn - 4ss)}}{2\sqrt{(1-ss)(mf - g + 2fs)}} \text{ seu}$$

$$t = \int \frac{ds\sqrt{fg(mm - nn - 4ss)}}{2\sqrt{(mf - g + 2fs)(1-ss)}} \text{ vel etiam}$$

$$t = \int \frac{du\sqrt{fg(mm - nn - 4\cos u^2)}}{2\sqrt{(mf - g + 2f\cos u)}}. \text{ Hancobrem erit}$$

$$\frac{2\,dt}{\sqrt{f}} = \frac{du\sqrt{g(mm - nn - 4\cos u^2)}}{\sqrt{(mf - g + 2f\cos u)}} \text{ atque adeo}$$

$v = 2\int \dfrac{dt}{m + 2\,h\cos u)\sqrt{f}} - \int \dfrac{ndu}{m + 2\cos u}$. Ex unica ergo variabili u, definiuntur t & v, ex hisque porro anguli ζ & η, quibus inventis facile assignantur coordinatæ p, q, r & x, y, z sicque

ſicque ad datum tempus poſitio corpuſculorum A, B, C determinari poterit. Q. E. I.

Coroll. 1.

13. Celeritas centri communis gravitatis ſecundum directionem axis O o eſt $= \frac{A\,dp + B\,dq + C\,dr}{(A+B+C)\,dt} = \frac{\mathfrak{A}}{A+B+C}$; ideoque uniformis; ſimili modo ejus celeritas ſecundum directionem rectæ O ω normalis ad O o eſt $= \frac{A\,dp + B\,dy + C\,dz}{(A+B+C)\,dt}$ $= \frac{\mathfrak{B}}{A+B+C}$, ideoque pariter uniformis, unde colligitur centrum commune gravitatis trium corpuſculorum A, B, & C uniformiter in directum progredi. Quod quidem a priori colligi potuiſſet ex natura omnium motuum ſibi relictorum.

Coroll. 2.

14. Si igitur fuerit & $\mathfrak{A}$ & $\mathfrak{B} = 0$, tum commune centrum gravitatis quieſcet. Quodſi ergo toti ſyſtemati imprimatur motus æqualis & contrarius motui centri gravitis tum id revera quieſcet, fietque propterea $\mathfrak{A} = 0$, & $\mathfrak{B} = 0$.

Coroll. 3.

15. Quoniam hoc caſu, quo centrum gravitatis quieſcit & proinde fit $\mathfrak{A} = 0$, $\mathfrak{B} = 0$, ejus diſtantia in recta O o a puncto O eſt $= \frac{Ap + Bq + Cr}{A+B+C} = \frac{\mathfrak{a}}{A+B+C}$, &

diſtan-

distantia secundum $O\omega$ a puncto O est $= \frac{Ax+By+Cz}{A+B+C} = \frac{\mathfrak{b}}{A+B+C}$, si fuerit $\mathfrak{a}=o$ & $\mathfrak{b}=o$, tum centrum gravitatis in puncto O quiescet.

Coroll. 4.

16. Cum ergo ob rectam Oo cum puncto O arbitrariam motus semper ad hunc casum reduci possit, ut centrum gravitatis in puncto O quiescat, nullam vim amplitudini solutionis inferendo semper licebit constantes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ & $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ evanescentes assumere: eritque propterea:

$$p = -\frac{(B+C)a\sin\zeta - Cb\sin\eta}{A+B+C};\quad x = -\frac{(B+C)a\cos\zeta - Cb\cos\eta}{A+B+C}$$

$$q = \frac{Aa\sin\zeta - Cb\sin\eta}{A+B+C};\quad y = \frac{Aa\cos\zeta - Cb\cos\eta}{A+B+C}$$

$$r = \frac{Aa\sin\zeta + (A+B)b\sin\eta}{A+B+C};\quad z = \frac{Aa\cos\zeta + (A+B)b\cos\eta}{A+B+C}$$

Coroll. 5.

17. Hinc porro celeritates corporum secundum utramque directionem Oo & $O\omega$ definiri poterunt:

Secun-

Secundum directionem $O o$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{-(B+C)ad\zeta\cos\zeta - Cbd\eta\cos\eta}{(A+B+C)dt}$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{Aad\zeta\cos\zeta - Cbd\eta\cos\eta}{(A+B+C)dt}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{Aad\zeta\cos\zeta + (A+B)bd\eta\cos\eta}{(A+B+C)dt}$$

Secundum directionem $O\omega$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{(B+C)ad\zeta\sin\zeta + Cbd\eta\sin\eta}{(A+B+C)dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-Aad\zeta\sin\zeta + Cbd\eta\sin\eta}{(A+B+C)dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{-Aad\zeta\sin\zeta - (A+B)bd\eta\sin\eta}{(A+B+C)dt}$$

Coroll. 6.

18. Conservatio virium vivarum ex sollicitationibus momentaneis facile colligitur. Cum enim summa virium vivarum sit $= \frac{Adp^2 + Adx^2 + Bdq^2 + Bdy^2 + Cdr^2 + Cdz^2}{dt^2}$ erit ejus differentiale $\frac{2Adpddp}{dt^2} + \frac{2Adxddx}{dt^2} + \frac{2Bdqddq}{dt^2}$ $+ \frac{2Bdyddy}{dt^2} + \frac{2Cdrddr}{dt^2} + \frac{2Cdzddz}{dt^2}$

$$= \left\{ \begin{array}{l} P(dp\sin\zeta + dx\cos\zeta - dq\sin\zeta - dy\cos\zeta) \\ Q(dq\sin\eta + dy\cos\eta - dr\sin\eta - dz\cos\eta) \end{array} \right\} = 0.$$

Cum enim sit $q - p = a\sin\zeta$, erit $dq - dp = ad.\sin\zeta$

et $(dp - dq)\sin\zeta = -\frac{1}{2}ad.\ \sin\zeta^2$. Simili modo erit $(dx - dy)\cos\zeta = -\frac{1}{2}ad.\ \cos\zeta^2 = +\frac{1}{2}ad.\ \sin\zeta^2$ ob $\cos\zeta^2, = 1 - \sin\zeta^2$: ideoque coëfficiens ipsius P est $= 0$, pariterque ipsius Q. Unde differentiale virium vivarum est $= 0$, ideoque summa virium vivarum constans.

Coroll. 7.

19. Ex iisdem æquationibus solutiones momentaneas exprimentibus concluditur fore:

$$\frac{2\,A\,x\,ddp + 2B\,y\,ddq + 2\,C\,z\,ddr}{dt^2} = P(x-y)\sin\zeta + Q(y-z)\sin\eta =$$

$- Pa\sin\zeta\cos\zeta - Qb\sin\eta\cos\eta$, similique modo:

$$\frac{2\,A\,p\,ddx + 2B\,q\,ddy + 2\,C\,r\,ddz}{dt^2} = P(p-q)\cos\zeta + Q(q-r)\cos\eta =$$

$- Pa\sin\zeta\cos\zeta - Qb\sin\eta\cos\eta$, ex quibus sequitur fore:

$A(x\,ddp - p\,ddx) + B(y\,ddp - q\,ddy) + C(z\,ddr - r\,ddz) = 0$

cujus integrale est:

$$A(x\,dp - p\,dx) + B(y\,dq - q\,dy) + C(z\,dr - r\,dz) = 0.$$

Coroll. 8.

20. Reliquæ constantes, quæ integratione in solu-
Fig. 4. tionem introducuntur, ex statu corpusculorum initiali determinari debent. Si igitur assumamus centrum gravitatis in O perpetuo quiescere, atque copuscula initio omnia in recta O*o* sita fuisse, anguli ζ & η ita definiri debent, ut posito $t = 0$ fiant recti. Tum igitur celeritates corporum secundum axem O*o* evanescent, at vero secundum Oω erunt, ut sequitur

$$\frac{dx}{dt} = \frac{(B+C)ad\zeta + Cbd\eta}{(A+B+C)dt};\quad \frac{dy}{dt} = \frac{-Aad\zeta + Cbd\eta}{(A+B+C)dt};$$

atque $$\frac{dz}{dt} = \frac{-Aad\zeta - (A+B)bd\eta}{(A+B+C)dt}.$$

Scholion.

21. Solutio ergo hujus problematis ab integratione formulæ $t = \int \frac{du\sqrt{fg(mm - nn - 4\,\text{cof}\,u^2)}}{2\sqrt{(mf - g + 2f\,\text{cof}\,u)}}$, & propterea per quadraturam curvæ cujuspiam conſtrui poteſt, ita ut ad quemvis valorem ipſius t valor anguli u aſſignetur: quo autem invento nova opus eſt quadratura ad angulum v determinandum; quamobrem ſolutio practica hujus problematis maxime eſt operoſa. Dantur tamen nonnulli caſus, quibus ſolutio multo ſit ſimplicior ac tractabilior, quos hic ſeorſim evolvamus.

Caſus. I.

22. Quoniam invenimus inter t & u hanc æquationem

$$2dt\sqrt{(mf - g + 2f\,\text{cof}\,u)} = du\sqrt{fg(m^2 - n^2 - 4\,\text{cof}\,u^2)}$$

manifeſtum eſt huic æquationi ſatisfieri, ſi fuerit:

$mf - g + 2f\,\text{cof}\,u = 0$ ſeu $\text{cof}\,u = \frac{g - mf}{2f}$; fiet enim u conſtans, & $du = 0$, unde utrumque membrum evaneſcit: Sit igitur $u = 2\alpha$, ut ſit $\text{cof}\,2\alpha = \frac{g - mf}{2f}$, eritque $m + 2\,\text{cof}\,u = \frac{g}{f}$; ideoque $v = 2\int \frac{dt\sqrt{f}}{g}$, ac propterea $v =$

$\frac{2t\sqrt{f}}{g} + 2\beta$. Hinc fit $\zeta = \frac{t\sqrt{f}}{g} + \beta + \alpha$ & $\eta = \frac{t\sqrt{f}}{g} + \beta - \alpha$. Cum igitur differentia angulorum ζ & η ſit conſtans, angulus ABC perpetuo idem manebit, corpuſculaque A, B, C perinde movebuntur, ac ſi corpus inflexile conſtituerent. Si igitur ponamus centrum gravitatis perpetuo in puncto O quieſcere, caſus iſte locum habebit, ſi initio quo $t = 0$, corpuſcula ita fuerint collocata, ut eſſet:

$$p = \frac{-(B+C)a\,\text{ſin}(\beta+\alpha) - Cb\,\text{ſin}(\beta-\alpha)}{A+B+C}$$

$$q = \frac{+Aa\,\text{ſin}(\beta+\alpha) - Cb\,\text{ſin}(\beta-\alpha)}{A+B+C}$$

$$r = \frac{+Aa\,\text{ſin}(\beta+\alpha) + (A+B)b\,\text{ſin}(\beta-\alpha)}{A+B+C}$$

Atque $x = \frac{-(B+C)a\,\text{coſ}(\beta+\alpha) - Cb\,\text{coſ}(\beta-\alpha)}{A+B+C}$

$$y = \frac{Aa\,\text{coſ}(\beta+\alpha) - Cb\,\text{coſ}(\beta-\alpha)}{A+B+C}$$

$$z = \frac{Aa\,\text{coſ}(\beta+\alpha) + (A+b)\,\text{coſ}(\beta-\alpha)}{A+B+C}$$

Perpetuo vero celeritates corpuſculorum ob $d\zeta = d\eta = \frac{dt\sqrt{f}}{g}$ ita ſe habebunt, ut ſit

$$\frac{dp}{dt} = \frac{x\sqrt{f}}{g};\ \frac{dq}{dt} = \frac{y\sqrt{f}}{g};\ \frac{dr}{dt} = \frac{z\sqrt{f}}{g}$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{p\sqrt{f}}{g}; \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{q\sqrt{f}}{g}; \quad \frac{dz}{dt} = -\frac{r\sqrt{f}}{g}$$

unde colliguntur distantiæ singulorum corpusculorum tam inter se quam a puncto O constantes. Atque cum anguli ζ & η æqualiter & uniformiter crescant, singula corpora circa centrum gravitatis O æquali motu rotatorio uniformiter gyrabuntur.

Ponamus initio motus omnia corpuscula in linea recta Oo posita fuisse, atque ob $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, erit $\beta + \alpha = 90^\circ$ & $\beta - \alpha = 90^\circ$, unde $\alpha = 0$, & $\beta = 90^\circ$. Iste ergo casus locum habebit si fuerit: Fig. 4.

$$OA = \frac{(B+C)a + Cb}{A+B+C} = -p$$

$$OB = \frac{-Aa + Cb}{A+B+C} = -q$$

$$OC = \frac{Aa + (A+B)b}{A+B+C} = r$$

atque si singulis corpusculis secundum directionem $O\omega$ impressæ fuerint celeritates, quæ sint inter se uti OA, OB, & OC, tum filum ABC circa punctum O instar virgæ rigidæ rotabitur motu uniformi.

Casus. II.

23. Ponatur $f = \infty$ & $n = 0$ seu $\frac{(B+C)a}{Cb} = \frac{(A+B)b}{Aa}$, eritque v quantitas constans, sit ea $v = 2\alpha$, tum

vero erit $t = \int \frac{du\sqrt{g(m-2\cos u)}}{2}$, ex qua æquatione facilius ad datum tempus angulus u definiri poteſt. Cum igitur ſit $\zeta = \alpha + \frac{1}{2}u$ & $\eta = \alpha - \frac{1}{2}u$, quantum alter augetur, tantum alter diminuitur: hincque anguli ABb & CBb æqualiter perpetuo vel creſcent decreſcent. Si recta AB producatur in γ, erit angulus $CB\gamma = \zeta - \eta = u$, hicque perpetuo a tempore jam elapſo t ita pendebit, ut ſit $t = \frac{1}{2}\int du\sqrt{g(m-2\cos u)}$. Facilius autem hinc ex angulo $CB\gamma$ tempus jam elapſum t determinari poterit. Ut vero ex angulo u poſitio omnium corpuſculorum definiri queat, notandum eſt, quia $\frac{(B+C)a}{Ca} = \frac{(A+B)b}{Aa}$ fore

$$(B+C)a = \tfrac{1}{2}mCb \;\&\; (A+B)b = \tfrac{1}{2}mAa,$$

$$\& \; m = 2\sqrt{\frac{(A+B)(B+C)}{AC}}.$$ Hincque obtinebitur

$\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{(A+B)C}{(B+C)A}}$; quod eſt requiſitum, ut præſens caſus locum habere poſſit. Erit ergo elapſo tempore t, quo angulus $CB\gamma = u$ eſt ortus:

$$p = \frac{-(A+C)a\sin(\alpha+\frac{1}{2}u) - Cb\sin(\alpha-\frac{1}{2}u)}{A+B+C}$$

$$q = \frac{Aa\sin(\alpha+\frac{1}{2}u) - Cb\sin(\alpha-\frac{1}{2}u)}{A+B+C}$$

$$r = \frac{Aa\sin(\alpha+\frac{1}{2}u) + (A+B)b\sin(\alpha-\frac{1}{2}u)}{A+B+C}$$

$x =$

$$x = \frac{-(B+C)a\cos(\alpha+\frac{1}{2}u) - Cb\cos(\alpha-\frac{1}{2}u)}{A+B+C}$$

$$y = \frac{Aa\cos(\alpha+\frac{1}{2}u) - Cb\cos(\alpha-\frac{1}{2}u)}{A+B+C}$$

$$z = \frac{Aa\cos(\alpha+\frac{1}{2}u) + (A+B)b\cos(\alpha-\frac{1}{2}u)}{A+B+C}$$

Præterea vero corpufculorum celeritates ita fe habebunt;

Secundum directionem Oo

$$\text{Cel. corp. A} = -\frac{(B+C)a\cos(\alpha+\frac{1}{2}u) + Cb\cos(\alpha-\frac{1}{2}u)}{(A+B+C)\sqrt{g(m-2\cos u)}}$$

$$\text{Cel. corp. B} = \frac{Aa\cos(\alpha+\frac{1}{2}u) + Cb\cos(\alpha-\frac{1}{2}u)}{(A+B+C)\sqrt{g(m-2\cos u)}}$$

$$\text{Cel. corp. C} = \frac{Aa\cos(\alpha+\frac{1}{2}u) - (A+C)b\cos.(\alpha-\frac{1}{2}u)}{(A+B+C)\sqrt{g(m-2\cos u)}}$$

At vero fecundum directionem $O\omega$ erit

$$\text{Cel. Corp. A} = \frac{(B+C)a\sin(\alpha+\frac{1}{2}u) - Cb\sin(\alpha-\frac{1}{2}u)}{(A+B+C)\sqrt{g(m-2\cos u)}}$$

$$\text{Cel. Corp. B} = -\frac{Aa\sin(\alpha+\frac{1}{2}u) - Cb\sin(\alpha-\frac{1}{2}u)}{(A+B+C)\sqrt{g(m-2\cos u)}}$$

$$\text{Cel. Corp. C} = -\frac{Aa\sin(\alpha+\frac{1}{2}u) + (A+B)b\sin(\alpha-\frac{1}{2}u)}{(A+B+C)\sqrt{g(m-2\cos u)}}$$

fiquidem ponamus centrum gravitatis in puncto O quiefcere.

Exemplum.

24. Ponamus corpora extrema A & C inter fe effe æqualia, & æqualiter a medio B remota, ita ut fit Fig. 5.

ſit $C = A$ & $b = a$, eritque $m = \frac{2(A+B)}{A}$. Ponamus inſuper hæc tria corpora initio in directum fuiſſe poſita, ita ut ſumto $t = 0$ fiat quoque $u = 0$, atque ob x, y & $z = 0$ oportebit eſſe $\alpha = 90^{\circ}$. Ut igitur motus ad caſum II. componatur, celeritates corporum ſecundum directionem Oo evaneſcent, celeritates vero in directionibus ad axem normalibus ita erunt.

Corpus A habebit celeritatem $= \frac{a\sqrt{AB}}{(2A+B)\sqrt{2g}}$ in directione $A\alpha$.

Corpus B habebit celeritatem $= \frac{2Aa\sqrt{A:B}}{(2A+B)\sqrt{2g}}$ in directione $B\beta$

Corpus C habebit celeritatem $= \frac{a\sqrt{AB}}{(2A+B)\sqrt{2g}}$ in directione $C\gamma$

Cum igitur celeritates extremorum A & C ſint æquales, ponantur debitæ altitudini $= k$; erit $\frac{a\sqrt{AB}}{(2A+B)\sqrt{2g}} = \sqrt{k}$ & $\sqrt{2g} = \frac{a\sqrt{AB}}{(2A+B)\sqrt{k}}$; & celeritas medii in directione $B\beta$ erit $= \frac{2A\sqrt{k}}{B}$, & altitudo huic celeritati debita $= \frac{4A^2k}{BB}$.

Nunc quæramus ſtatum horum corporum elapſo tempore t, quo

quo generatur angulus u, ut fit $t = \int \frac{du \sqrt{g(m - 2\,\mathrm{cof}\,u)}}{2}$

$$= \int \frac{dt \sqrt{2g\left(\frac{-A+B}{A} - \mathrm{cof}\,u\right)}}{2} =$$

$$\frac{a\sqrt{B}}{2(2A+B)\sqrt{k}} \int du \sqrt{(B + A - A\,\mathrm{cof}\,u)}$$ Fig. 6.

Inventoque hoc angulo $CB\gamma = u$, habebitur:

$p = -a\,\mathrm{cof}\tfrac{1}{2}u$; $q = 0$; $r = a\,\mathrm{cof}\tfrac{1}{2}u$

$$p = \frac{B\,a\,\mathrm{fin}\tfrac{1}{2}u}{2A+B};\ y = -\frac{2A\,a\,\mathrm{fin}\tfrac{1}{2}u}{2A+B};\quad z = \frac{B\,a\,\mathrm{fin}\tfrac{1}{2}u}{2A+B}$$

Celeritates vero corpufculorum ita fe habebunt, ob

$$(A+B+C)\sqrt{g(m-2\,\mathrm{cof}\,u)} = \frac{a\sqrt{B(B+A-A\,\mathrm{cof}\,u)}}{\sqrt{k}}$$

Secundum directionem Oo

$$\text{Corp. A} = \frac{(2A+B)\,\mathrm{fin}\tfrac{1}{2}u}{\sqrt{B(B+A-A\,\mathrm{cof}\,u)}}\sqrt{k}$$

$$\text{Corp. B} = 0$$

$$\text{Corp. C} = \frac{-(2A+B)\,\mathrm{fin}\tfrac{1}{2}u}{\sqrt{B(B+A-A\,\mathrm{cof}\,u)}}\sqrt{k}$$

Secundum directionem $O\omega$

$$\text{Corp. A} = \frac{B\,\mathrm{cof}\tfrac{1}{2}u}{\sqrt{B(B+A-A\,\mathrm{cof}\,u)}}\sqrt{k}$$

$$\text{Corp. B} = \frac{2A\,\mathrm{cof}\tfrac{1}{2}u}{\sqrt{B(B+A-A\,\mathrm{cof}\,u)}}\sqrt{k}$$

$$\text{Corp. C} = \frac{B\,\mathrm{cof}\tfrac{1}{2}u}{\sqrt{B(B+A-A\,\mathrm{cof}\,u)}}\sqrt{k}$$

Occupabunt ergo corpuſcula A B C elapſo tempore t, quo fila A B & C B ad angulum $CB\gamma = u$ inflectuntur, ejusmodi ſitum, quem figura indicat; eruntque ipſi anguli ad e & f, quibus fila ad axem Oo inclinantur, $BeO = BfO = \frac{1}{2}u$. Si ergo ponatur angulus $\frac{1}{2}u = \varphi$, ob $1 - \operatorname{cof} 2\varphi = 2 \operatorname{fin} \varphi^2$

erit $t = \dfrac{a\sqrt{B}}{(2A+B)\sqrt{k}} \int d\varphi \sqrt{(B + 2A \operatorname{fin} \varphi^2)}$, hincque ſimul celeritates ob $\sqrt{B(B+A-A\operatorname{cof} u)} = \sqrt{B(B+2A\operatorname{fin}\varphi^2)}$ ſimplicius exprimentur.

Scholion.

25. Poteſt hoc exemplum, quod Celeb. Daniel Bernoulli ad methodi meæ bonitatem explorandam mihi evolvendum propoſuit, etiam ſine ſubſidio ſolutionis generalis hic traditæ ex cognitis mechanicæ principiis reſolvi. Fig. 6. Cum enim utrinque omnia ſint æqualia, perſpicuum eſt corpuſculum medium B alium motum habere non poſſe niſi ſecundum rectam $O\omega$, corpuſcula vero extrema A & C æqualiter ad rectam $O\omega$ vel accedere vel ab ea recedere oportere. Ex qua circumſtantia per principium conſervationis virium vivarum ſingulorum corpuſculorum motus ſequenti modo determinari poterunt. Poſitis ut ante corpuſculorum A & C maſſis $= A$, corpuſculi B maſſa $= B$, & longitudine fili $AB = BC = a$, atque angulo $BeO = BfO = \varphi$, ſit celeritas corpuſculi B in directione $B\beta$ debita altitudini v; utriusque corpuſculi A & C ſit celeritas rotatoria circa B debita altitudini u; erit utriusque celeritas ſecundum directionem $O\omega$ debita altitudine $= u \operatorname{cof} \varphi^2$, & celeritas, qua utrumque directe ad $O\omega$ accedit debita altitudini

dini $u \sin\varphi^2$. Hinc erit celeritas, qua utrumque ab axe $O\omega$ recedit $= \cos\varphi\sqrt{u} - \sqrt{v}$, et quia centrum gravitatis in quiete manere ponitur, erit $B\sqrt{v} = 2A(\cos\varphi\sqrt{u} - \sqrt{v})$, ideoque $\sqrt{u} = \frac{(2A+B)\sqrt{v}}{2A\cos\varphi}$ seu $\sqrt{v} = \frac{2A\cos\varphi.\sqrt{u}}{2A+B.}$. Fig. 5.

Deinde cum initio utriusque corpusculi A & C celeritas secundum directionem $O\omega$ posita sit $= \sqrt{k}$, celeritas corpusculi B in directione $B\beta = \frac{2A\sqrt{k}}{B}$, summa virium vivarum erat $= 2Ak + \frac{4AAk}{B} = \frac{2Ak}{B}(2A+B)$, quae perpetuo eadem manere debebit. Praesenti autem casu est corporis B vis viva $= Bv$, & corpus A, quia habet duplicem celeritatem alteram $= \cos\varphi\sqrt{u} - \sqrt{v}$, alteram vero $= \sin\varphi\sqrt{u}$, erit ejus vis viva $= A(\cos\varphi\sqrt{u} - \sqrt{v})^2 + Au\sin\varphi^2$ Fig. 6
$= A\left(\frac{B\cos\varphi\sqrt{u}}{2A+B}\right)^2 + Au\sin\varphi^2 = Au\left(\sin\varphi^2 + \frac{BB\cos\varphi^2}{(2A+B)^2}\right)$, cui cum vis viva corporis C sit aequalis, erit summa virum vivarum $= Bv + \frac{2Au}{(2A+B)^2}((2A+B)^2\sin\varphi^2 + B^2\cos\varphi^2)$

At est $Bv = \frac{4AAB\cos\varphi^2}{(2A+B)^2} = \frac{2Au}{(2A+B)^2} . 2AB\cos\varphi^2$;
unde tota vis viva erit $= \frac{2Au}{(2A+B)^2}((2A+B)^2\sin\varphi^2 +$
$(2A+B)B\cos\varphi^2) = \frac{2Au}{2A+B}(2A\sin\varphi^2 + B)$, quae cum aequalis esse debeat summae virium vivarum initiali, erit

 2A

$\frac{2Au}{2A+B}(2A\sin_{\varphi}^{2}+B) = \frac{2Ak}{B}(2A+B)$, atque $u(2A\sin\varphi^{2}+B)$
$= \frac{k}{B}(2A+B)^{2}$, hincque $\sqrt{u} = \frac{(2A+B)\sqrt{k}}{\sqrt{B(B+2A\sin\varphi^{2})}}$

Quoniam nunc celeritas rotatoria corpuſculi A eſt $\sqrt{u}$, hac tempuſculo infinite parvo dt arculum radio AB $= a$ deſcribet $= ad\varphi$, eritque idcirco $\frac{ad\varphi}{\sqrt{u}} = dt$, unde habebitur $dt =$
$\frac{ad\varphi\sqrt{B(B+2A\sin\varphi^{2})}}{(2A+B)\sqrt{k}}$ & $t = \frac{a\sqrt{B}}{(2A+B)\sqrt{k}}\int d\varphi\sqrt{(B+2A\sin\varphi^{2})}$
quæ eſt ea ipſa æquatio, quam ante invenimus; hocque adeo conſenſu methodi bonitas atque ſolutionis generalis veritas comprobatur.

Problema. IV.

Fig. 7. 26. *Sint nunc corpuſcula quotcunque* A, B, C, D, E, *&c. filo colligata, quæ ſi ſuper plano horizontali utcunque projiciantur, eorum motum inveſtigare.*

Solutio.

Ductis ex ſingulis corpuſculis ad axem fixum Oo perpendiculis vocentur:

	$Oa = p$;	$Ob = q$;	$Oc = r$;	$Od = s$	&c.
	$Aa = x$;	$Bb = y$;	$Cc = z$;	$Dd = v$	&c.
Filum	AB $= a$;	BC $= b$;	CD $= c$;	DE $= d$;	&c.
Ang.	AB$b = \zeta$;	BC$c = \eta$;	CD$d = \theta$;	DE$e = \iota$;	&c.

Ex

Ex quibus denominationibus deducuntur sequentes æquationes.

$$q-p=a\sin\zeta;\quad r-q=b\sin\eta;\quad s-r=c\sin\theta;\quad \&c.$$
$$y-x=a\cos\zeta;\quad z-y=b\cos\eta;\quad v-z=c\cos\theta;\quad \&c.$$

Cum nunc spatiola hinc exprimi queant, quæ a singulis corpusculis tempusculo infinite parvo, quod sit $=dt$, describuntur, celeritates eorum tam secundum directionem axi Oo parallelam, quam ad Oo normalem sequenti modo definientur.

Corpusculi	celeritas in directione Oo erit	celeritas in directione $O\omega$ erit
A	$\frac{dp}{dt}$	$\frac{dx}{dt}$
B	$\frac{dq}{dt}$	$\frac{dy}{dt}$
C	$\frac{dr}{dt}$	$\frac{dz}{dt}$
D	$\frac{ds}{dt}$	$\frac{dv}{dt}$
	&c.	&c.

Denotent jam litteræ A, B, C, D, &c. respective massas corpusculorum, & quia eorum motus a tensione filorum alteratur, sit tensio fili $AB=P$; tensio fili $BC=Q$; tensio fili $CD=R$, &c. quibus positis.

Corpusculum	sollicitabitur in directione Oo vi	sollicitabitur in directione $O\omega$ vi
A	$P\sin\zeta$	$P\cos\zeta$
B	$Q\sin\eta-P\sin\zeta$	$Q\cos\eta-P\cos\zeta$
C	$R\sin\theta-Q\sin\eta$	$R\cos\theta-Q\cos\eta$
D	$S\sin\iota-R\sin\theta$	$S\cos\iota-R\cos\theta$
	&c.	&c.

 Ex

Ex his sollicitationibus sequentes orientur accelerationes

$\frac{2Addp}{dt^2} = P \sin \zeta$	$\frac{2A\,ddx}{dt^2} = P \cos \zeta$
$\frac{2Bddq}{dt^2} = Q \sin \eta - P \sin \zeta$	$\frac{2Bddy}{dt^2} = Q \cos \eta - P \cos \zeta$
$\frac{2Cddr}{dt^2} = R \sin \theta - Q \sin \eta$	$\frac{2C\,ddz}{dt^2} = R \cos \theta - Q \cos \eta$
$\frac{2Ddds}{dt^2} = S \sin \iota - R \sin \theta$	$\frac{2D\,ddv}{dt^2} = S \cos \iota - R \cos \theta$
&c.	&c.

Ex his æquationibus additis orientur istæ duæ æquationes

$$2A\,ddp + 2B\,ddq + 2Cddr + 2D\,dds + \&c. = 0$$
$$2A\,ddx + 2B\,ddy + 2Cddz + 2D\,ddv + \&c. = 0$$

quæ integratæ dant, divisione per 2 instituta:

$$A\,dp + B\,dq + C\,dr + D\,ds + \&c. = \mathfrak{A}\,dt$$
$$A\,dx + B\,dy + C\,dz + D\,dv + \&c. = \mathfrak{B}\,dt$$

& integralibus denuo sumtis;

$$Ap + Bq + Cr + Ds + \&c. = \mathfrak{A}t + \mathfrak{a}$$
$$Ax + By + Cz + Dv + \&c. = \mathfrak{B}t + \mathfrak{b}$$

quibus motus uniformis in directum centri gravitatis indicatur. Cum igitur sit:

$$q = p + a \sin \zeta$$
$$r = p + a \sin \zeta + b \sin \eta$$
$$s = p + a \sin \zeta + b \sin \eta + c \sin \theta$$
&c.

y =

$$y = x + a \cos \zeta$$
$$z = x + a \cos \zeta + b \cos \eta$$
$$v = x + a \cos \zeta + b \cos \eta + c \cos \theta \quad \&c.$$

Obtinebitur:

$$p = \frac{\mathfrak{A}t + \mathfrak{a} - (B+C+D+\&c.)\, a \sin \zeta - (C+D+E+\&c.)\, b \sin \eta}{A+B+C+D+\&c}$$
$$\frac{-(D+E+\&c.)\, c \sin \theta - \&c.}{A+B+C+D+\&c.}$$

$$x = \frac{\mathfrak{B}t + \mathfrak{b} - (B+C+D+\&c.)\, a \cos \zeta - (C+D+E+\&c.)\, b \cos \eta}{A+B+C+D+\&c.}$$
$$\frac{-(D+E+\&c.)\, c \cos \theta - \&c.}{A+B+C+D+\&c.}$$

quæ formulæ in ſequentes transmutabuntur:

$$p = \frac{\mathfrak{A}t + \mathfrak{a} + A a \sin \zeta + (A+B) b \sin \eta + (A+B+C) c \sin \theta + \&c.}{A+B+C+E+\&c.}$$
$$- a \sin \zeta - b \sin \eta - c \sin \theta - \&c.$$

$$x = \frac{\mathfrak{B}t + \mathfrak{b} + A a \cos \zeta + (A+B) b \cos \eta + (A+B+C) c \cos \iota + \&c.}{A+B+C+D+E+\&c.}$$
$$- a \cos \zeta - b \cos \eta - c \cos \iota - \&c.$$

quibus inventis ſimul litterarum q, r, s, &c. & y, z, v, &c. valores innoteſcent. Perducta eſt ergo quæſtio ad determinationem angulorum $\zeta, \eta, \theta, \iota$, &c. qui ex duplicibus expreſſionibus tenſionum P, Q, R, &c. elicientur:

$$\tfrac{1}{2} P dt^2 = \frac{A\, ddp}{\sin \zeta} = \frac{A\, ddx}{\cos \zeta}$$

$$\tfrac{1}{2} Q dt^2 = \frac{A\, ddp + B\, ddq}{\sin \eta} = \frac{B\, ddx + B\, ddy}{\cos}$$

$$\tfrac{1}{2} R\, dt^2 = \frac{Addp + Bddq + Cddr}{\sin\theta} = \frac{Addx + Bddy + Cddz}{\cos\theta}$$
&c.

ex his enim erit:

$$\frac{\sin\zeta}{\cos\zeta} = \frac{Addp}{Addx}$$

$$\frac{\sin\eta}{\cos\eta} = \frac{Addp + Bddq}{Addx + Bddy}$$

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{Addp + Bddq + Cddr}{Addx + Bddy + Cddz}$$

&c.

Ponatur summa omnium corpusculorum $A + B + D + \&c. = H$, & cum sit:

$$p = \frac{\mathfrak{A}t + \mathfrak{a} - (H-A)a\sin\zeta - (H-A-B)b\sin\eta - (H-A-B-C)c\sin\theta - \&c.}{H}$$

$$x = \frac{\mathfrak{B}t + \mathfrak{b} - (H-A)a\cos\zeta - (H-A-B)b\cos\eta - (H-A-B-C)c\cos\theta - \&c.}{H}$$

ob:

$$Ap + Bq = (A + B)p + Ba\sin\zeta$$

$$Ap + Bq + Cr = (A + B + C)p + (B + C)a\sin\zeta + Cb\sin\eta$$

$$Ax + Bq + Cr + Ds = (A+B+C+D)p + (B+C+D)a\sin\zeta + (C+D)b\sin\theta \quad \&c.$$

$$Ax + By = (A + B)x + Ba\cos\zeta$$

$$Ax + By + Cz = (A+B+C)x + (B+C)a\cos\zeta + Cb\cos\eta$$

$$Ax + By + Cz + Dv = (A+B+C+D)x + (B+C+D)a\cos\zeta + (C+D)b\cos\eta + Dc\cos\theta \quad \&c.$$

His

His igitur valoribus ſubſtitutis habebitur:

$$\frac{\text{ſin}\,\zeta}{\text{coſ}\,\zeta} = \frac{A(H-A)add\,\text{ſin}\,\zeta + A(H-A-B)bdd\,\text{ſin}\,\eta + A(H-A-B-C)cdd.\,\text{ſin}\,\theta + \&c.}{A(H-A)\,add.\,\text{coſ}\,\zeta + A(H-A-B)bdd\,\text{coſ}\,\eta + A(H-A-B-C)cdd\,\text{coſ}\,\theta + \&c.}$$

$$\frac{\text{ſin}\,\eta}{\text{coſ}\,\eta} = \frac{A(H-A-B)add.\,\text{ſin}\,\zeta + (A+B)(H-A-B)bdd.\,\text{ſin}\,\eta + (A+B)(H-A-B-C)cdd.\,\text{ſin}\,\theta + \&c.}{A(H-A-B)add.\,\text{coſ}\,\zeta + (A+B)(H-A-B)bdd.\,\text{coſ}\,\eta + (A+B)(H-A-B-C)cdd.\,\text{coſ}\,\theta + \&c.}$$

$$\frac{\text{ſin}\,\theta}{\text{coſ}\,\theta} = \frac{A(H-A-B-C)add.\,\text{ſin}\,\zeta + (A+B)(H-A-B-C)bdd.\,\text{ſin}\,\eta + (A+B+C)(H-A-B-C)cdd.\,\text{ſin}\,\theta + \&c.}{A(H-A-B-C)cdd.\,\text{coſ}\,\zeta + (A+B)(H-A-B-C)bdd.\,\text{coſ}\,\eta + (A+B+C)(H-A-B-C)cdd.\,\text{coſ}\,\theta + \&c.}$$

&c.

Sicque prodibunt tot æquationes, quot habentur anguli ζ, η, θ, &c. ex quibus adeo ſinguli determinabuntur. Præterea vero ex formulis pro ſollicitationibus momentaneis inventis eruentur ſimili modo, quo ſupra fuimus uſi:

$$2A(dpddp + dxddx) + 2B(dqddq + dyddy) + 2C(drddr + dzddz) + \&c. = 0$$

quæ integrata dabit:

$$A(dp^2 + dx^2) + B(dq^2 + dy^2) + C(dr^2 + dz^2) + \&c. = \mathfrak{H}\,dt^2$$

qua conſervatio virium vivarum continetur. Solutionem ergo illæ æquationes differentio-differentiales complectentur, quæ ſi integrationem admitterent, uti caſu trium corpuſculorum uſu venit, problema perfecte eſſet ſolutum. Sufficiet

ficiet ergo hujus problematis ſolutionem ad reſolutionem æquationum analyticarum perduxiſſe. Q. E. J.

Coroll. I.

27. Ex æquationibus, quibus anguli ζ, η, θ, &c. definiuntur, ſi fractiones tollantur, atque lemma hoc in ſubſidium vocetur $\cos m\, dd.\sin n - \sin m\, dd.\cos n = ddn \cos(m - n) + dn^2 \sin(m - n)$, orientur ſequentes:

$$0 = A(H-A)\,add\zeta + A(H-A-B)\,b(dd\eta\cos(\zeta-\eta) + d\eta^2\sin(\zeta-\eta)) + A(H-A-B-C)\,c(dd\theta\cos(\zeta-\theta) + d\theta^2\sin(\zeta-\theta)) + A(H-A-B-C-D)\,d(dd\iota\cos(\zeta-\iota) + d\iota^2\sin(\zeta-\iota)) + \&c.$$

$$0 = A(H-A-B)\,a(dd\zeta\cos(\zeta-\eta) + d\zeta^2\sin(\zeta-\eta)) + (A+B)(H-A-B)\,bdd\eta + (A+B)(H-A-B-C)\,c(dd\theta\cos(\eta-\theta) + d\theta^2\sin(\eta-\theta)) + (A+B)(H-A-B-C-D)\,d(dd\iota\cos(\eta-\iota) + d\iota^2\sin(\eta-\iota)) + \&c.$$

$$0 = A(H-A-B-C)\,a(dd\zeta\cos(\zeta-\theta) - d\zeta^2\sin(\zeta-\theta)) + (A+B)(H-A-B-C)\,b(dd\eta\cos(\eta-\theta) - d\eta^2\sin(\eta-\theta)) + (A+B+C)(H-A-B-C)\,cdd\theta + (A+B+C)(H-A-B-C-D)\,d(dd\iota\cos(\theta-\iota) + d\iota^2\sin(\theta-\iota)) + \&c.$$

$$0 = A(H-A-C-D)\,a\,(dd\zeta \cos(\zeta-\iota) - d\zeta^2 \sin(\zeta-\iota)) + (A+B)$$
$$(H-A-B-C-D)\,b\,(dd\eta \cos(\eta-\iota) - d\eta^2 \sin(\eta-\iota))$$
$$+ (A+B+C)(H-A-B-C-D)\,c\,(dd\theta \cos(\theta-\iota) - d\theta^2 \sin$$
$$(\theta-\iota)) + (A+B+C+D)(H-A-B-C-D)\,d\,dd\iota + \&c.$$
&c.

Coroll. 2.

28. Cum deinde sit $\int(ddn \cos(m-n) + dn^2 \sin(m-n)) = dn \cos(m-n) + \int dmdn \sin(m-n)$, erit æquationibus illis hoc modo integratis:

$$0 = A(H-A)\,ad\zeta$$
$$+ A(H-A-B)\,bd\eta \cos(\zeta-\eta) + A(H-A-B)\,b\int d\zeta d\eta \sin(\zeta-\eta)$$
$$+ A(H-A-B-C)\,cd\theta \cos(\zeta-\theta) + A(H-A-B-C)\,c\int d\zeta d\theta \sin(\zeta-\theta)$$
$$+ A(H-A-B-C-D)\,dd\iota \cos(\zeta-\iota) + A(H-A-B-C-D)\,d\int d\zeta d\iota \sin$$
$$(\zeta-\iota) \qquad \&c.$$

$$0 = A(H-A-B)\,ad\zeta \cos(\zeta-\eta) - A(H-A-B)\,a\int d\zeta d\eta \sin(\zeta-\eta)$$
$$+ (A+B)(H-A-B)\,bd\eta$$
$$+ (A+B)(H-A-B-C)\,cd\theta \cos(\eta-\theta) + (A+B)(H-A-B-C)$$
$$c\int d\eta d\theta \sin(\eta-\theta)$$
$$+ (A+B)(H-A-B-C-D)\,dd\iota \cos(\eta-\iota) + (A+B)$$
$$(H-A-B-C-D)\,c\int d\eta d\iota \sin(\eta-\iota) \qquad \&c.$$

$$0 = A(H-A-B-C)\,ad\zeta \cos(\zeta-\theta) - A(H-A-B-C)\,a\int d\eta d\theta \sin(\zeta-\theta)$$
$$+ (A+B)(H-A-B-C)\,bd\eta \cos(\eta-\theta) - (A+B)(H-A-B-C)$$
$$b\int d\eta d\theta \sin(\zeta-\theta)$$
$$+ (A+B+C)(H-A-B-C)\,cd\theta$$
$$+ (A+B+C)(H-A-B-C-D)\,dd\iota \cos(\eta-\iota) + (A+B+C)$$
$$(H-A-B-C-D)\,d\int d\theta d\iota \sin(\theta-\iota) \qquad \&c.$$

0 =

$$0 = A(H-A-B-C-D)ad\zeta\cos(\zeta-\iota) - A(H-A-B-C-D) a\int d\zeta d\iota \sin(\zeta-\iota)$$
$$+ (A+B)(H-A-B-C-D)bd\zeta\cos(\eta-\iota) - (A+B)(H-A-B-C-D)b\int d\eta d\iota\sin(\eta-\iota)$$
$$+ (A+B+C)(H-A-B-D)cd\theta\cos(\theta-\iota) - (A+B+C)(H-A-B-C-D c\int d\theta d\iota\sin(\theta-\iota)$$
$$+ (A+B+C+D)(H-A-B-D)dd\iota$$
&c.

Coroll. 3.

29. Si harum æquationum prima mutiplicetur per a secundum per b, tertia per c, quarta per d, &c. omnesque invicem addantur termini integrales destruentur, prodibitque sequens æquatio integralis.

$$\mathfrak{F}d\iota = A(H-A)aad\zeta + (A+B)(H-A-B)bbd\eta + (A+B+C)(H-A-B-C)\,ccd\theta + \&c.$$
$$+ A(H-A-B)ab(d\zeta + d\eta)\cos(\zeta-\eta)$$
$$+ A(H-A-B-C)ac(d\zeta + d\theta)\cos(\zeta-\theta)$$
$$+ A(H-A-B-C-D)ad(d\zeta + d\iota)\cos(\zeta-\iota) \ \&c.$$
$$+ (A+B)(H-A-B-C)bc(d\eta + d\theta)\cos(\eta-\theta)$$
$$+ (A+B)(H-A-B-C-D)bd(d\eta + d\iota)\cos(\eta-\iota) \ \&c.$$
$$+ (A+B)(H-A-B-C-D)bd(d\theta + d\iota)\cos(\theta-\iota) \ \&c.$$

Eadem vero æquatio jam continetur in ea, qua conservationem virium vivarum sumus complexi.

Scholion.

30. Quo igitur positio corpusculorum horum A, B, C, D, &c. ad quodvis tempus definiri, atque adeo eorum motus

motus perfecte cognoſci poſſit, æquationes has differentio-differentiales inventas reſolvi atque integrari oportet, quemadmodum in caſu trium corporum fieri licuit. At vero hic multitudo variabilium ſimilem tractationem impedit, neque quemadmodum hinc commoda conſtructio obtineri poſſit, perſpicitur. Quæ difficultas, quo clarius ob oculos ponatur, quatuor tantum corpora contemplemur.

Exemplum.

31. Sint quatuor corpuſcula filis inter ſe connexa, ſintque tam ipſa corpuſcula A, B, C, D, quam fila a, b, c, inter ſe æqualia, erit $H = 4A$, atque anguli ζ, η, θ ex tribus ſequentibus æquationibus inveſtigari debebunt.

$$0 = 3\,dd\zeta + 2\,dd\eta \cos(\zeta - \eta) + 2\,d\eta^2 \sin(\zeta - \eta) + dd\theta \cos(\zeta - \theta) + d\theta^2 \sin(\zeta - \theta)$$

$$0 = 2\,dd\zeta \cos(\zeta - \eta) - 2\,d\zeta^2 \sin(\zeta - \eta) + 4\,dd\eta + 2\,dd\theta \cos(\eta - \theta) + 2\,d\theta^2 \sin(\eta - \theta)$$

$$0 = dd\zeta \cos(\zeta - \theta) - d\zeta^2 \sin(\zeta - \theta) + 2\,dd\eta \cos(\eta - \theta) - 2\,d\eta^2 \sin(\eta - \theta) + 3\,dd\theta$$

ex quibus ſequens æquatio integralis (29) elicitur

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}dt = 3\,d\zeta + 4\,d\eta + 3\,d\theta &+ 2(d\zeta + d\eta)\cos(\zeta - \eta) \\ &+ (d\zeta + d\theta)\cos(\zeta - \theta) \\ &+ 2(d\eta + d\theta)\cos(\eta - \theta) \end{aligned}$$

Unde ſi valores angulorum ζ, η, & θ per t exprimi poſſent, foret:

$$p = \frac{\mathfrak{A}t + \mathfrak{a}}{4A} - \frac{3a}{4}\sin\zeta - \frac{2a}{4}\sin\eta - \frac{a}{4}\sin\theta$$

$$p = \frac{\mathfrak{A}t + \mathfrak{a}}{4A} + \tfrac{1}{4}a\sin\zeta - \tfrac{2}{4}a\sin\eta - \tfrac{1}{4}a\sin\theta$$

$$r = \frac{\mathfrak{A}t + \mathfrak{a}}{4A} + \tfrac{1}{4}a\sin\zeta + \tfrac{2}{4}a\sin\eta - \tfrac{1}{4}a\sin\theta$$

$$s = \frac{\mathfrak{A}t + \mathfrak{a}}{4A} + \tfrac{1}{4}a\sin\zeta + \tfrac{2}{4}a\sin\eta + \tfrac{3}{4}a\sin\theta$$

atque

$$x = \frac{\mathfrak{B}t + \mathfrak{b}}{4A} - \tfrac{3}{4}a\cos\zeta - \tfrac{2}{4}a\cos\eta - \tfrac{1}{4}a\cos\theta$$

$$y = \frac{\mathfrak{B}t + \mathfrak{b}}{4A} + \tfrac{1}{4}a\cos\zeta - \tfrac{2}{4}a\cos\eta - a\cos\theta$$

$$z = \frac{\mathfrak{B}t + \mathfrak{b}}{4A} + \tfrac{1}{4}a\cos\zeta + \tfrac{2}{4}a\cos\eta - \tfrac{1}{4}a\cos\theta$$

$$v = \frac{\mathfrak{B}t + \mathfrak{b}}{4A} + \tfrac{1}{4}a\cos\zeta + \tfrac{2}{4}a\cos\eta + \tfrac{3}{4}a\cos\theta$$

Problema. V.

Fig. 8. 32. *Augeatur nunc numerus corpusculorum in infinitum, filorum autem longitudines evanescant, ita ut hoc modo funis perfecte flexibilis formetur, cujus, si super plano horizontali utcunque projiciatur, motus & situs ad quodvis tempus assignari debet.*

Solutio.

Pervenerit iste funis elapso tempore t in situm AMG, ex cujus singulis punctis M perpendicula ad axem Oo demissa con-

concipiantur. Vocetur abcissa quæcunque $OP = X$, applicata $PM = Y$, & longitudo portionis funis $AM = S$, ejus vero massa exprimatur per functionem quamcunque Σ ipsius S, sitque præterea angulus $AMP = \Phi$, ita ut sit $dX = dS \sin \Phi$ & $dY = dS \cos \Phi$. Ponatur ut ante $Oa = p$ & $Aa = x$, quia invenimus

$$p = \frac{\mathfrak{A}t + \mathfrak{a} + Aa \sin \zeta + (A+B) b \sin \eta + (A+B+C) c \sin \theta + \&c.}{A+B+C+E+\&c.}$$

$$x = \frac{\mathfrak{B}t + \mathfrak{b} + Aa \cos \zeta + (A+B) b \cos \eta + (A+B+C) c \cos \theta + \&c.}{A+B+C+D+\&c.}$$

si massam totius funis ponamus $= H$, his formulis ad casum præsentem translatis habebimus

$$Oa = \frac{\mathfrak{A}t + \mathfrak{a} + \int \Sigma dS \sin \Phi}{H} - \int dS \sin \Phi$$

$$Aa = \frac{\mathfrak{B}t + \mathfrak{b} + \int \Sigma dS \cos \Phi}{H} - \int dS \cos \Phi$$

his integralibus per totam funis longitudinem AMG extensis. Erit autem $\int dS \sin \Phi = ag$ & $\int dS \cos \Phi = Gg - Aa$. Deinde cum supra invenerimus: $Av + Bq + Cr + Ds + \&c. = (A+B+C+D \mp \&c.)(p + a \sin \zeta + b \sin \eta + c \sin \theta + \&c.) - Aa \sin \zeta - (A+B) b \sin \eta - (A+B+C) c \sin \theta - \&c.$ erit hæc expressio ad præsentem casum translata pro arcu $AM = \Sigma(Oa + \int dS \sin \Phi) - \int \Sigma dS \sin \Phi = Oa . \Sigma + \int d\Sigma \int dS \sin \Phi$. Simili modo & altera expressio $Ax + By + Cz + Dv + \&c.$ nostro casu transit in hanc $Aa . \Sigma + \int d\Sigma \int dS \cos \Phi$; unde erit

$$\frac{\sin \Phi}{\cos \Phi} = \frac{dd.(Oa . \Sigma + \int d\Sigma \int dS \sin \Phi)}{dd.(Aa . \Sigma + \int d\Sigma \int dS \cos \Phi)},$$ quæ differentialia

secun-

secundi gradus ex variabilitate temporis sola sunt desumenda, ita ut S & Σ tanquam constantia tractentur.

Quoniam ergo angulus Φ cum tempore t variatur, etiamsi arcus S idem maneat, quantitas Φ erit functio duarum variabilium S & t. Ponatur propterea $d\Phi = M dS + N dt$ eritque posito S constante & solo t variabilis.

$$d.Oa = \frac{\mathfrak{A} dt + dt \int \Sigma N dS \cos\Phi}{H} - dt \int N dS \cos\varphi$$

$$d.Aa = \frac{\mathfrak{B} dt + dt \int \Sigma N dS \sin\varphi}{H} + dt \int N dS \sin\varphi$$

Quia vero N est porro functio ipsarum S & t ponatur $dN = P dS + Q dt$, eritque posito solo t variabili, & dt constante

$$dd.Oa = -\frac{dt^2 \int \Sigma N^2 dS \sin\varphi + dt^2 \int \Sigma Q dS \cos\varphi}{H}$$
$$+ dt^2 \int N^2 dS \sin\varphi - dt^2 \int Q dS \cos\varphi$$

$$dd.Aa = -\frac{dt^2 \int \Sigma N^2 dS \cos\varphi - dt^2 \int \Sigma Q dS \sin\varphi}{H}$$
$$+ dt^2 \int N^2 dS \cos\varphi + dt^2 \int Q dS \sin\varphi$$

quae singula integralia ad totam curvam erunt extendenda; ita ut ea abeant in functiones ipsius t tantum; hancobrem sit $dd.Oa = E dt^2$ & $dd\,Aa = F dt^2$, erunt E & F functiones ipsius t tantum. Deinde quae pertinent ad solum arcum indefinitum A M, erunt differentialia, quae ex sola variabilitate ipsius t oriuntur:

d. $\int$d

$$d.\int d\Sigma \int d S \sin\phi = dt \int d\Sigma \int N \, dS \cos\phi$$

$$dd.\int d\Sigma \int dS \sin\phi = -dt^2 \int d\Sigma \int N^2 dS \sin\phi + dt^2 \int d\Sigma \int Q \, dS \cos\phi$$

$$d.\int d\Sigma \int dS \cos\phi = -dt \int d\Sigma \int N \, dS \sin\phi$$

$$dd.\int d\Sigma \int dS \cos\phi = -dt^2 \int d\Sigma \int N^2 dS \cos\phi - dt^2 \int d\Sigma \int Q \, dS \sin\phi$$

Ex his ergo obtinebitur ſequens æquatio;

$$\frac{\sin\phi}{\cos\phi} = \frac{E\Sigma - \int d\Sigma \int N^2 dS \sin\phi + \int d\Sigma \int Q \, dS \cos\phi}{F\Sigma - \int d\Sigma \int N^2 dS \cos\phi - \int d\Sigma \int Q \, dS \sin\phi}$$

Quo autem naturam hujus curvæ ejusque motus commodius exprimamus, ponamus:

$$Oa.\Sigma + \int d\Sigma \int d S \sin\phi = T$$

$$Aa.\Sigma + \int d\Sigma \int d S \cos\phi = V$$

ſitque nobis δ characder differentialium, quæ ex variabilitate ipſius t naſcuntur, manente d charactere differentialium tantum, quæ ex ſola variabilitate ipſius S ſeu Σ ortum trahunt.

Erit ergo $\frac{\sin\phi}{\cos\phi} = \frac{\delta\delta T}{\delta\delta V}$: tum vero differentiando formulas antecedentes ponendo tantum Σ vel S variabili, ob Oa & Aa conſtantes erit

$$Oa.d\Sigma + d\Sigma \int dS \sin\phi = dT$$

$$Aa.d\Sigma + d\Sigma \int d S \cos\phi = dV$$

& ſtatuendo $d\Sigma$ conſtante, ita ut S tanquam functio ipſius Σ ſpectetur, ſi denuo differentialia ſumantur, erit

$$d\Sigma \, d S \sin\phi = dd T$$

$$d\Sigma \, d S \cos\phi = dd V.$$

 ideo-

ideoque $\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{ddT}{ddV}$, unde obtinetur ista æquatio

$$\frac{\delta\delta T}{\delta\delta V} = \frac{ddT}{ddV}$$

Præterea vero cum sit $\sin\varphi = \frac{dd\,T}{d\Sigma dS}$, & $\cos\varphi = \frac{dd\,V}{d\Sigma dS}$

debebit esse $ddT^2 + ddV^2 = d\Sigma^2 dS^2$. Quæstio ergo huc redit ut investigentur duæ hujusmodi functiones ipsarum Σ & t quæ sint T & V, ita ut earum differentialia secunda posito solo Σ variabili eandem inter se teneant rationem, quam earundem functionum differentialia secunda, si solum t ponatur variabile: præterea vero debet esse $ddT^2 + ddV^2 = dS^2 d\Sigma^2$: quibus inventis erit

$$\sin\varphi = \frac{dd\,T}{dSd\Sigma} \quad \& \cos\varphi = \frac{dd\,V}{dS\,d\Sigma}.$$

Hincque porro coordinatæ X & Y reperientur. Vel cum sit $dX = dS\sin\varphi$ & $dY = dS\cos\varphi$, erit $ddT = d\Sigma dX$ & $ddV = d\Sigma dY$, unde fit $T = \int X d\Sigma$ & $V = \int Y d\Sigma$. Quare X & Y ita comparatæ esse debent, ut sit $\frac{\delta\delta T}{\delta\delta V} = \frac{d\,X}{d\,Y}$ vel $\frac{\int d\Sigma\delta\delta X}{\int d\Sigma\delta\delta Y} = \frac{dX}{d\,Y}$. Reducta ergo est solutio hujus problematis mechanici ad problema analyticum; in quo acquiescere oportet. Q. E. J.

Scholion. I.

33. Quo hæc clarius explicentur, ponamus funem ubique esse æque crassum, ita ut sit massa Σ proportionalis longi-

longitudini S. Sit portio AM $= S$, angulus AMP $= \varphi$, & longitudo tota AMG $= h$, eritque elapso tempore t

$$Oa = \mathfrak{A}t + \mathfrak{a} + \frac{\int s\,ds \sin\varphi - h\int ds \sin\varphi}{h}$$

ubi integralia $\int ds \sin\varphi$ ita debent capi, ut evanescant posito $s = 0$, tum vero statui oportet $s = h$, sicque Oa exprimetur per functionem ipsius t. Simili modo erit

$$Aa = \mathfrak{B}t + \mathfrak{b} + \frac{\int s\,ds \cos\varphi - h\int ds \cos\varphi}{h}$$

ubi integralia $\int ds \cos\varphi$ & $\int s\,ds \cos\varphi$ pariter ita accipi debent ut evanescant posito $s = 0$, quo facto ubique faciendum est $s = h$.

Statuatur brevitatis ergo:	fiatque casu $s = h$
$\int ds \sin\varphi = P$	$P = A$
$\int ds \cos\varphi = Q$	$Q = B$
$\int s\,ds \sin\varphi = R$	$R = C$
$\int s\,ds \cos\varphi = S$	$S = D$

erit $Oa = \mathfrak{A}t + \mathfrak{a} + \dfrac{C - Ah}{h}$;

$$Aa = \mathfrak{B}t + \mathfrak{b} + \frac{D - Bh}{h}$$

Deinde superior expressio generalis $\int d\Sigma \int dS \sin\phi$ abit hic in Ps —, & $\int d\Sigma \int dS \cos\varphi$ in $Qs - S$; ideoque si δ sumatur pro charactere differentiationis, si t tantum variabile spectetur, erit

$$\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\delta\delta(Cs - Ahs + Phs - Rh)}{\delta\delta(Ds - Bhs + Qhs - Sh)}$$

ubi omisimus $\mathfrak{A}t + \mathfrak{a}$ & $\mathfrak{B}t + \mathfrak{b}$, quia horum differentialia secunda evanescunt. Quanquam autem hinc idoneæ functiones ipsarum t & s pro angulo ϕ adhibendæ inveniri vix possunt, tamen ope harum valores, quos quis forte pro ϕ exhibuerit, facile explorari possunt, utrum problemati satisfaciant necne.

Scholion. 2.

34. Quamvis autem hoc problema sit difficillimum, si in genere consideretur, tamen unus extat casus specialis, quo solutu sit facillimum. Hic locum habet, si angulus ϕ exprimatur per functionem ipsius s tantum, ita ut in eam tempus t non ingrediatur. Quia enim tum formulæ $Cs - Ahs + Phs - Rh$ & $Ds - Bhs + Qhs - Sh$ a sola variabili s pendent, earum differentialia, quæ prodeunt, si solum t variabile ponatur, evanescent, sicque æquationi ultimæ satisfit. Hoc igitur casu funis instar corporis rigidi motu sibi parallelo feretur, ita ut singulæ ejus partes perpetuo ad axem Oo eandem inclinationem conservent, & singulorum punctorum M celeritates, tam secundum directionem axis Oo, quam axis ad eum normalis $O\omega$ inter se erunt æquales. Quare si funi initio hujusmodi motus fuerit impressus, ut primo saltem momento singula elementa ad axem Oo eandem inclinationem retineant, tum eodem motu perpetuo promoveri perget.

Coroll. 1.

35. Si ponatur $Cs - Ahs + Phs - Rh = T$ & $Ds - Bhs + Qhs - Sh = \Theta$, erunt T & Θ ejusmodi functiones, quæ evanescunt tam si ponatur $s = 0$, quam si

fiat

fiat $s = h$. Ita autem præterea iſtæ functiones T & Θ debent eſſe comparatæ, ut ſit

$$ddT = hds^2 \sin\phi \quad dd\Theta = hds^2 \cos\phi.$$

in quibus differentiationibus ſolum s poſitum eſt variabile & ds conſtans. Sin autem ſolum t variabile ſtatuatur, debet eſſe

$$\delta\delta T = Vdt^2 \sin\phi \quad \& \quad \delta\delta\Theta = Vdt^2 \cos\phi$$

exiſtente V functione quacunque.

Coroll. 2.

36. Si igitur hujusmodi functiones T & Θ inveniri poſſent, haberetur ſolutio particularis problematis; ſin autem omnes omnino functiones his proprietatibus gaudentes in formulis generalibus comprehendi poſſent, tum haberetur ſolutio problematis generalis abſoluta, qualis deſideratur.

Coroll. 3.

37. Sint M & N & ϕ functiones ipſarum s & t, & ponatur:

$$T = M\sin\phi + N\cos\phi; \quad \Theta = M\cos\phi - N\sin\phi$$

atque problemati ſatisfiet, ſi primum T & Θ evaneſcant tam caſu $s = 0$ quam caſu $s = h$; quod fit, ſi his caſibus & M & N fiant $= 0$. Deinde vero requiritur ut ſit

$$hds^2 = ddM - Md\phi^2 - 2dNd\phi - Ndd\phi$$

Præterea vero debet eſſe

$$ddN - Nd\phi^2 + Mdd\phi + 2dMd\phi = 0$$

$$\delta\delta N - N\delta\phi^2 + M\delta\delta\phi + 2\delta M\delta\phi = 0$$

 in

in quarum æquationum prima & ſecunda t & ds ſunt conſtantia, in tertia vero s & dt conſtantia ſunt poſita.

Coroll. 4.

38. Ex æquationibus prima & ſecunda eliminando terminos continentes $d\varphi^2$ obtinebitur hæc:

$$(M^2+N^2)dd\varphi+2d\varphi(MdM+NdN)=NddM$$
$$-MddN-Nhds^2$$

ex cujus integratione eruitur

$$(M^2+N^2)d\varphi=NdM-MdM-hds\int Nds$$

hincque porro $\varphi = A \text{ tag } \frac{M}{N} - h\int\frac{ds\int Nds}{M^2+N^2}$. Qui valor ſi in alterutra æquatione ſubſtituatur ponendo $\int Nds=K$ prodibit

$$MddM+NddN=hMds^2+\frac{hhK^2ds}{M^2+N^2}-\frac{(NdM-MdN)^2}{M^2+N^2}$$

Addatur utrinque dM^2+dN^2 & ponatur $M^2+N^2=v^2$ erit

$$vddv=\frac{hhK^2ds^2}{v^2}+hMds^2=\frac{hhK^2ds^2}{v^2}+$$
$$hds^2\sqrt{(v^2-N^2)}$$

ex qua ſi definiatur v, ob K datum, per N, invenietur valor idoneus pro M ſubſtituendus. Tum vero N ex tertia æquatione determinari debet.

Co-

Coroll. 5.

39. Si sit $N = 0$, æquatio secunda statim dat $M^2 d\varphi = E ds$ & $d\varphi = \frac{E ds}{M^2}$, qui valor in prima $h ds^2 = dd M - M ds^2$ substitutus dabit, $h ds^2 = dd M - \frac{E^2 ds^2}{M^3}$. Statuatur $ds = v dM$, ut, ob ds constans sit $ddM = \frac{-dv dM}{v}$, erit substitutione facta;

$$h v^2 dM = \frac{-dv}{v} - \frac{E^2 v^2 dM}{M^3} \text{ seu}$$

$$h dM = \frac{-dv}{v^3} - \frac{E^2 dM}{M^3}$$

cujus integrale est:

$$hM = \frac{1}{2v^2} + \frac{E^2}{2M^2} - F \text{ seu}$$

$$2hv^2 M^3 = M^2 + E^2 v^2 - 2Fv^2 M^2 \text{ unde}$$

$$v = \frac{\pm M}{\sqrt{(2hM^3 + 2FM^2 - E^2)}}$$

$$\& \quad s = \int \frac{\pm M\, dM}{\sqrt{(2hM^3 + 2FM^2 - E^2)}}$$

Quoniam vero M debet evanescere posito tam $s = 0$ quam $s = h$, fiat $\int \frac{\pm M dM}{\sqrt{(2hM^3 + 2FM^2 - E^2)}} = \pm G$ posito $M = 0$, atque G determinabitur per E, F & constantes.

ſtantes. Fiat ergo $G = \frac{1}{2} h$, & conditiones requiſitæ implebuntur, ſi ponatur

$$s = \tfrac{1}{2} h \pm \int \frac{M dM}{\sqrt{(2hM^3 + 2FM^2 - E^2)}}$$

unde erit $d\varphi = \dfrac{\pm E dM}{M\sqrt{(2hM^3 + 2FM^2 - E^2)}}$

ubi E & F erunt quantitates tum ex conſtantibus tum ex t compoſitæ. Præterea vero ſi fieri poteſt, ita debent eſſe comparatæ, ut etiam tertiæ æquationi $M\partial\partial\varphi + 2\partial M d\varphi = 0$ ſeu $MM\partial\varphi = H dt$ ſatisfiat, quod fiet ſi $d\varphi + \partial\varphi = \dfrac{E ds + H dt}{MM}$ fuerit integrabile: ejus enim integrale verum dabit angulum φ. Ubi notandum eſt, H deſignare functionem quamcunque ipſius s non involventem t, uti E eſt functio ipſius t non continens s. Hancobrem $\dfrac{E ds + H dt}{MM}$ erit integrabile ſi fuerit $MM = EH$ in functionem quampiam quantitatis $\int \frac{ds}{H} + \int \frac{dt}{E}$, ſeu ſi ſit $\frac{MM}{EH}$ functio hujus quantitatis $\int \frac{ds}{H} + \int \frac{dt}{E}$.

Problema. VI.

Fig. 9. 40. *Conſtet corpus ABC duobus articulis AB & BC in B flexura invicem conjunctis, ita ut ambo circa B liberrime circumagi queant; quæriturque motus, quo hoc corpus ſuper plano, horizontali politiſſimo ſit progreſſurum, poſtquam ipſi ſemel motus quicunque fuerit impreſſus.*

So-

Solutio.

Sumtis pro lubitu in plano horizontali duobus axibus orthogonalibus Oo & $O\omega$ sese decussantibus, ad quos quovis momento positio corporis referatur, pervenerit elapso tempore quocunque t, corpus in situm ABC, ex cujus punctis A, B, C ad axem Oo demittantur perpendicula Aa, Bb, Cc. Sit porro K centrum gravitatis articuli AB, & L centrum gravitatis articuli BG, ex quibus pariter ad axem Oo normales ducantur KP & LQ, vocenturque:

$$AK = \alpha;\ BK = b;\ BL = \beta;\ LC = c:$$
$$OP = p;\ PK = x;\ OQ = q;\ QL = y:$$
$$\text{Ang. } AKP = \zeta;\ \&\ \text{ang. } BLQ = \eta.$$

ex quibus erit

$$q - p = b \sin\zeta + \beta \sin\eta \quad \& \quad y - x = b\cos\zeta + \beta\cos\eta.$$

Motus autem utriusque articuli, constat ex motu centri gravitatis, quem resolvamus secundum directiones amborum axium Oo & $O\omega$, & ex motu rotatorio, quo uterque articulus circa suum gravitatis centrum gyrabitur. Erit ergo

Celeritas puncti	secundum directionem Oo	secundum directionem $O\omega$
K	$= \frac{dp}{dt}$	$= \frac{dx}{dt}$
L	$= \frac{dq}{dt}$	$= \frac{dy}{dt}$

Celeritas rotatoria articuli AB circa centrum gravitatis K

erit $= \frac{d\zeta}{dt}$ in distantia $= 1$.

Celeritas rotatoria articuli BC circa centrum gravitatis L erit $= \frac{d\eta}{dt}$ in diſtantia $= 1$.

Nunc ad motum determinandum ſit:

maſſa articuli AB $= K$: articuli BC $= L$

momentum inertiæ articuli AB $= Kk^2$; articuli BC $= Ll^2$

Momenta hæc inertiæ reſpectu utriusque articuli centri gravitatis ſumi ponuntur, eſtque momentum inertiæ aggregatum omnium corporis particularum per quadrata diſtantiarum ſuarum ab axe, circa quem corpus mobile concipitur, multiplicatarum. His poſitis ſi ambo articuli a ſe invicem eſſent diſſoluti, uterque eundem motum tam progreſſivum centri gravitatis quam rotatorium circa axem verticalem per centrum gravitatis transeuntem perpetuo conſervaret. Quoniam autem junctura in B ſunt colligati, ambo iſti motus ſe mutuo continuo perturbabunt, hæque perturbationes provenient a vi, quam junctura in B ſuſtinet. Quæ vis cum ſit incognita, ponamus ab ea articulum AB urgeri duabus viribus, altera in directione Bk quæ ſit $= B$, altera in directione $B\varkappa$ quæ ſit $= \mathfrak{B}$; atque alter articulus BC iisdem viribus, at in directionibus oppoſitis urgebitur, ſcilicet in directione Bl vi $= B$ & in directione $B\lambda$ vi $= \mathfrak{B}$. His ergo viribus primum motus centri gravitatis afficietur, ac primo quidem vis $B\varkappa = \mathfrak{B}$ accelerabit motum centri gravitatis K ſecundum Oo, & vis $Bk = B$ motum in directione $O\omega$; contra vero vis $B\lambda = \mathfrak{B}$ retardabit motum centri gravitatis L ſecundum Oo, & vis $Bl = B$ motum in directione $O\omega$. Hinc ex legibus ſollicitationum erit:

$$2K\,ddp = \mathfrak{B}dt^2 \; ; \qquad 2K\,ddx = B\,dt^2$$

$$2\,L\,ddq = -\mathfrak{B}dt^2\,; \quad 2\,L\,ddy = -B\,dt^2$$

Porro momentum vis $B\varkappa = \mathfrak{B}$ respectu centri gravitatis K est $= \mathfrak{B}\,b\cos\zeta$, eoque motus rotatorius articuli AB accelerabitur, quoniam id tendit ad augendum augulum AKP $= \zeta$: momentum autem vis $Bk = B$ erit $= Bb\sin\zeta$, eoque motus rotatorius articuli AB retardabitur, quoniam id tendit ad angulum AKP $= \zeta$ minuendum. Unde ex legibus sollicitationum erit:

$$2\,Kkkdd\zeta = \mathfrak{B}bdt^2\cos\zeta - Bbdt^2\sin\zeta$$

Deinde momentum vis $B\lambda = \mathfrak{B}$ respectu centri gravitatis L est $= \mathfrak{B}\beta\cos\eta$, tenditque ad motum rotatorium articuli BC accelerandum, momentum autem vis $Bl = B$, quod est $= B\beta\sin\eta$, retardabit eundem motum rotatorium, unde erit;

$$2\,Llldd\eta = \mathfrak{B}\beta dt^2\cos\eta - B\beta dt^2\sin\eta.$$

His sollicitationibus ad calculum revocatis, priores æquationes pro motu progressivo utriusque centri gravitatis inventæ dabunt,

$$Kddp + L\,ddq = 0 \quad \& \quad K\,ddx + L\,ddy = 0$$

unde integrando elicitur

$$Kp + Lq = \mathfrak{F}t + \mathfrak{f}$$

$$Kx + Ly = \mathfrak{G}t + \mathfrak{g}$$

Cum igitur sit $q = p + b\sin\zeta + \beta\sin\eta$ & $y = x + b\cos\zeta + \beta\cos\eta$ erit:

$$(K+L)\,p = \mathfrak{F}t + \mathfrak{f} - Lb\sin\zeta - L\beta\sin\eta$$

$$(K+L)\,x = \mathfrak{G}t + \mathfrak{g} - Lb\cos\zeta - L\beta\cos\eta$$

S 2 seu

$$\text{seu} \quad p = \frac{\mathfrak{F}t + \mathfrak{f} - Lb \sin\zeta - L\beta \sin\eta}{K + L}$$

$$x = \frac{\mathfrak{G}t + \mathfrak{g} - Lb \cos\zeta - L\beta \cos\eta}{K + L}$$

$$\text{ideoque} \quad ddp = -\frac{Lb\,dd.\sin\zeta - L\beta\,dd.\sin\eta}{K + L}$$

$$ddq = \frac{Kb\,dd.\sin\zeta + K\beta\,dd.\sin\eta}{K + L}$$

$$ddx = -\frac{Lb\,dd.\cos\zeta - L\beta\,dd.\cos\eta}{K + L}$$

$$ddy = \frac{Kb\,dd.\cos\zeta + K\beta\,dd.\cos\eta}{K + L}$$

Ergo hinc vires $\mathfrak{B}$ & B ita definientur ut sit:

$$\mathfrak{B}dt^2 = -\frac{2KL}{K+L}\,(b\,dd.\sin\zeta + \beta\,dd.\sin\eta)$$

$$B\,dt^2 = -\frac{2KL}{K+L}\,(b\,dd.\cos\zeta + \beta\,dd.\cos\eta)$$

Qui valores si in æquationibus ex sollicitationibus motus rotatorii utriusque articuli ortis substituantur, prodibit:

$$Kkk\,dd\zeta = -\frac{KL}{K+L}\left(\begin{array}{l} +bb\cos\zeta.\,dd\sin\zeta + b\beta\cos\zeta.\,dd.\sin\eta \\ -bb\sin\zeta.\,dd\cos\zeta - b\beta\sin\zeta.\,dd\cos\eta \end{array}\right)$$

$$Ll\,dd\eta = -\frac{KL}{K+L}\left(\begin{array}{l} +b\beta\cos\eta.\,dd.\sin\zeta + \beta\beta\cos\eta.\,dd.\sin\eta \\ -b\beta\sin\eta.\,dd.\cos\zeta - \beta\beta\sin\eta.\,dd.\cos\eta \end{array}\right)$$

Cum ergo sit $\cos m\,dd.\sin n - \sin m\,dd.\cos n = ddn\cos(m-n) + dn^2\sin(m-n)$ habebuntur istæ æquationes.

—(K

$$-\frac{(K+L)kkdd\zeta}{Lb} = bdd\zeta + \beta dd\eta \cos(\zeta-\eta) + \beta d\eta^2 \sin(\zeta-\eta)$$

$$-\frac{(K+L)lldd\eta}{K\beta} = \beta dd\eta + bdd\zeta \cos(\zeta-\eta) - bd\zeta^2 \sin(\zeta-\eta)$$

ex quibus per integrationem elicitur:

$$-\frac{(K+L)kkd\zeta}{Lb} = bd\zeta + \beta d\eta \cos(\zeta-\eta) + \beta\int d\zeta d\eta \sin(\zeta-\eta)$$

$$-\frac{(K+L)lld\eta}{K\beta} = \beta d\eta + bd\zeta \cos(\zeta-\eta) - b\int d\zeta d\eta \sin(\zeta-\eta)$$

Multiplicetur prior per b posterior per β & addantur, atque prodibit:

$$-\frac{(K+L)kkd\zeta}{L} - \frac{(K+L)lld\eta}{K} = bbd\zeta + \beta\beta d\eta + b\beta (d\zeta + d\eta)\cos(\zeta-\eta) = \pm f dt \sqrt{f}$$

seu $\pm f dt \sqrt{f} = \frac{(K+L)(Kkkd\zeta + Llld\eta)}{KL} + bbd\zeta + \beta\beta d\eta + b\beta(d\zeta + d\eta)\cos(\zeta-\eta)$

Sit $\zeta + \eta = v$ & $\zeta - \eta = u$, ut sit $\zeta = \frac{v+u}{2}$ & $\eta = \frac{v-u}{2}$

erit:

$$\pm f dt \sqrt{f} = \frac{(K+L)kkdv}{2L} + \frac{(K+L)kkdu}{2L} + b\beta dv \cos u + \frac{(K+L)lldv}{2K} - \frac{(K+L)lldu}{2K}$$

 +

$$+\frac{bbdv}{2}+\frac{bbdu}{2}$$

$$+\frac{\beta\beta dv}{2}-\frac{\beta\beta du}{2}$$

Ponatur porro $\frac{fdt\sqrt{f}}{b\beta}=\frac{dt}{\sqrt{f}}$ atque

$$\frac{(K+L)kk}{2Lb\beta}+\frac{(K+L)ll}{2Kb\beta}+\frac{b}{2\beta}+\frac{\beta}{2b}=m$$

$$\frac{(K+L)kk}{2Lb\epsilon}-\frac{(K+L)ll}{2Kb\epsilon}+\frac{b}{2\epsilon}-\frac{\epsilon}{2b}=n \quad \text{erit.}$$

$$\frac{dt}{\sqrt{f}}=mdv+ndu+dv\cos u$$

ſuperiores vero æquationes differentio-differentiales in has formas transmutentur.

$$0=\frac{(K+L)kkdd\zeta}{Lb\epsilon}+\frac{b}{\epsilon}dd\zeta+dd\eta\cos(\zeta-\eta)+d\eta^2\sin(\zeta-\eta)$$

$$0=\frac{(K+L)lldd\eta}{Kb\epsilon}+\frac{\epsilon}{b}dd\eta+dd\zeta\cos(\zeta-\eta)-d\zeta^2\sin(\zeta-\eta)$$

quæ invicem ſubtractæ dabunt:

$$0=nddv+mddu-ddu\cos u+\tfrac{1}{2}(dv^2+du^2)\sin u$$

Prior vero $\frac{dt}{\sqrt{f}}=mdv+ndu+dv\cos u$ ſuppeditat

$$dv=\frac{dt:\sqrt{f}-ndv}{m+\cos u}\ \&\ ddv=\frac{-nddu}{m+\cos u}+\frac{dtdu\sin u:\sqrt{f}-ndu^2\sin u}{(m+\cos u)^2}$$

atque

atque $\frac{1}{2}dv^2 \sin u = \dfrac{\frac{1}{2}dt^2 \sin u : f - ndtdu \sin u : \sqrt{f} + \frac{1}{2}n^2 du^2 \sin u}{(m + \cos u)^2}$

quibus valoribus substitutis obtinebitur:

$$0 = \frac{-nnddu}{m + \cos u} + \frac{ndtdu \sin u : \sqrt{f} - nndu^2 \sin u -}{(m + \cos u)^2}$$

$$\frac{+\, mddu \atop -\, dducos u}{} + \frac{\frac{1}{2}dt^2 \sin u : f - ndtdu \sin u : \sqrt{f} + \frac{1}{2}n^2 du^2 \sin u}{(m + \cos u)^2}$$

$$+ \tfrac{1}{2}du^2 \sin u$$

quae reducitur ad hanc:

$$0 = (mm - nn)ddu - dducos u^2 + \frac{\frac{1}{2}dt^2 \sin u : f - \frac{1}{2}n^2 du^2 \sin u}{m + \cos u}$$

$$+ \tfrac{1}{2}mdu^2 \sin u + \tfrac{1}{2}du^2 \sin u \cos u$$

seu $0 = 2(mm - nu)ddu - 2ddu \cos u^2 + du^2 \sin u \cos u$

$$+ \frac{dt^2 \sin u : f + (m^2 - n^2)du^2 \sin u + mdu^2 \sin u \cos u}{m + \cos u}$$

Sit $dt = \dfrac{du}{\sqrt{\omega}}$ erit $ddt = 0 = \dfrac{ddu}{\sqrt{\omega}} - \dfrac{dud\omega}{2\omega\sqrt{\omega}}$, ideoque $ddu = \dfrac{dud\omega}{2\omega}$, quibus valoribus pro ddu & dt substitutis fiet

$$0 = (mm - nn)\frac{d\omega}{\omega} - \frac{d\omega \cos u}{\omega} + du \sin u \cos u +$$

$$\frac{du \sin u : f\omega + (m^2 - n^2)du \sin u + mdu \sin u \cos u}{m + \cos u}$$

sive

ſive

$$\frac{(mm-nn)\,d\omega - d\omega\,\text{cof}\,u^2 + \omega du\,\text{ſin}\,u\,\text{coſ}\,u}{m+\text{coſ}\,u} +$$

$$\frac{du\,\text{ſin}\,u : f + (m^2-n^2)\,\omega du\,\text{ſin}\,u + m\omega du\,\text{ſin}\,u\,\text{coſ}\,u}{(m+\text{coſ}\,u)^2} = 0$$

cujus integrale eſt

$$\frac{(mm-nn)\,\omega}{m+\text{coſ}\,u} - \frac{\omega\,\text{coſ}\,u^2}{m+\text{coſ}\,u} + \frac{1}{f(m+\text{coſ}\,u)} = \frac{1}{g}.$$

hinc fit $\omega = \frac{f(m+\text{coſ}\,u)-g}{fg(mm-nn-\text{coſ}\,u^2)}$ atque

$dt = \frac{du\sqrt{fg(mm-nn-\text{coſ}\,u^2)}}{\sqrt{(mf-g+f\,\text{coſ}\,u)}}$ quo invento habebitur

$dv = \frac{dt : \sqrt{f} - ndu}{m+\text{coſ}\,u}$ ſicque per unicam variabilem u determinabuntur t, v, porroque anguli ζ & η, quibus inventis reliquæ quantitates p, q, x, & y innoteſcent, ex quibus non ſolum poſitio corporis, ſed etiam ejus motus definitur. Q. E. J.

Coroll. I.

41. Ex æquationibus Kddp + Lddq = o & Kddx + Lddy = o intelligitur corporis ABC centrum gravitatis uniformiter in directum progredi.

Coroll. 2.

42. Eandem vero quoque vivarum quantitatem conſervari, hoc modo patebit:

$$\frac{2\,\mathrm{K}\,dp\,ddp}{dt^2} = \mathfrak{B}\,dp\,; \quad \frac{2\,\mathrm{K}\,dx\,ddx}{dt^2} = \mathrm{B}\,dx$$

$$\frac{2\,\mathrm{L}\,dq\,ddq}{dt^2} = -\mathfrak{B}\,dq\,; \quad \frac{2\,\mathrm{K}\,dy\,ddy}{dt^2} = -\mathrm{B}\,dy$$

Est vero $dp - dq = -bd.\sin\zeta - \mathfrak{c}d.\sin\eta$

$dx - dy = -bd.\cos\zeta - \mathfrak{c}d\cos\eta$

Ergo $\dfrac{\mathrm{K}(dp^2 + dx^2) + \mathrm{L}(dq^2 + dy^2)}{dt^2} = -\int\mathfrak{B}(bd.\sin\zeta +$

$bd.\sin\eta) - \int\mathrm{B}(bd.\cos\zeta + \mathfrak{c}d.\cos\eta)$

Porro vero est $\dfrac{\mathrm{K}kkd\zeta^2}{dt^2} = \int\mathfrak{B}\,bd.\sin\zeta + \int\mathrm{B}\,bd.\cos\zeta$ atque

$\dfrac{\mathrm{L}lld\eta^2}{dt^2} = \int\mathfrak{B}\,\mathfrak{c}d.\sin\eta + \int\mathrm{B}\,\mathfrak{c}d.\cos\eta$; quibus in unam summam collectis erit.

$$\frac{\mathrm{K}(dp^2 + dx^2 + kkd\zeta^2) + \mathrm{L}(dq^2 + dy^2 + lld\eta^2)}{dt^2} = \text{Constanti}$$

At vero ista expressio exhibet vim vivam totius corporis,

nam $\dfrac{\mathrm{K}(dp^2 + dx^2 + kkd\zeta^2)}{dt^2}$ est vis viva articuli A B; atque

$\dfrac{\mathrm{L}(dq^2 + dy^2 + lld\eta^2)}{dt^2}$ est vis viva articuli BC.

Scholion.

43. Cum generaliter æquatio ultimo inventa $dt = \dfrac{du\sqrt{fg(mm - nn - \cos u^2)}}{\sqrt{(mf - g + f\cos u)}}$ integrationem non admittat,

casus sunt perpendendi, quibus integratio succedit, atque ideo motus commodius definiri queat. Sic enim obtinebimus, ut quoties exemplum proponitur ad unum horum casuum pertinens. solutionem facilius exhibere queamus. Occurrunt autem potissimum tres casus sequentes.

Casus. I.

44. Aequationi scilicet $dt = \frac{du\sqrt{fg(mm-nn-\cos u^2)}}{\sqrt{(mf-g+f\cos u)}}$ primum satisfit, si $mf-g+f\cos u = 0$, unde erit $\cos u = \frac{g-mf}{f}$. Hic ergo casus locum habet, si angulus $u = \zeta - \eta$ maneat constans, seu si corpus ABC initio ita fuerit projectum, ut angulus ABC non varietur. Tum igitur, quasi nullam in B haberet juncturam, instar corporis rigidi uniformiter in directum feretur. Erit autem $dv = \frac{dt : \sqrt{f}}{m+\cos u} = \frac{dt\sqrt{f}}{g}$, & $v = \frac{t\sqrt{f}}{g}$; unde si ponatur $u = 2i$ fiet $\zeta = \alpha t + i$ & $\eta = \alpha t - i$ posito $\frac{\sqrt{f}}{g} = 2\alpha$. Ex his elicitur:

$$p = \frac{\mathfrak{F}t + \mathfrak{f} - Lb\sin(\alpha t + i) - Lc\sin(\alpha t - i)}{K+L}$$

$$q = \frac{\mathfrak{F}t + \mathfrak{f} + Kb\sin(\alpha t + i) + Kc\sin(\alpha t - i)}{K+L}$$

$$x = \frac{\mathfrak{G}t + \mathfrak{g} - Lb\cos(\alpha t + i) - Lc\cos(\alpha t - i)}{K+L}$$

$y =$

$$y = \frac{\mathfrak{G}t + \mathfrak{g} + Kb\cos(\mathfrak{a}t+i) + K\mathfrak{c}\cos(\mathfrak{a}t-i)}{K+L}$$

Hinc ergo erunt celeritates punctorum K & L secundum directiones axium Oo & $O\omega$.

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\mathfrak{F} - L\mathfrak{a}b\cos(\mathfrak{a}t+i) - L\mathfrak{a}\mathfrak{c}\cos(\mathfrak{a}t-i)}{K+L}$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\mathfrak{F} + K\mathfrak{a}b\cos(\mathfrak{a}t+i) + K\mathfrak{a}\mathfrak{c}\cos(\mathfrak{a}t-i)}{K+L}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\mathfrak{G} + L\mathfrak{a}b\sin(\mathfrak{a}t+i) + L\mathfrak{a}\mathfrak{c}\sin(\mathfrak{a}t-i)}{K+L}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\mathfrak{G} - K\mathfrak{a}b\sin(\mathfrak{a}t+i) - K\mathfrak{a}\mathfrak{c}\sin(\mathfrak{a}t-i)}{K+L}$$

At vero celeritas rotatoria utriusque articuli erit

articuli AB $= \mathfrak{a}$

articuli BC $= \mathfrak{a}$.

Si ergo ambobus articulis initio æquales motus rotatorii imprimantur, insuperque celeritates progressivæ punctorum K & L ejusmodi fuerint, ut in expressionibus inventis contineantur, tum corpus quasi nullam haberet flexuram promovebitur. Si centrum gravitatis totius corporis quiescere assumatur, erunt $\mathfrak{F} = 0$ & $\mathfrak{G} = 0$, atque si id in puncto O existat, fiet simul $\mathfrak{f} = 0$ & $\mathfrak{g} = 0$. Quod si ergo ponamus corpus ABC initio super linea Oo in directum jacuisse, quia tum erat $t = 0$, debebit esse $i = 90°$, & celeritates secundum directionem Oo evanescent, reliquæ vero in directione $O\omega$ erunt

$$\frac{dx}{dt} = \frac{L\mathfrak{a}b - L\mathfrak{a}\mathfrak{c}}{K+L} \quad \& \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{K\mathfrak{a}b + K\mathfrak{a}\mathfrak{c}}{K+L}$$

Casus. II.

45. Hic casus secundus locum habet si fuerit $f = S$ & $n = 0$, hoc est si fuerit

$$(K+L)(Kkk - Lll) = KL(\epsilon\epsilon - bb)$$

tum autem fiet $dv = 0$, ideoque $v =$ constanti. Sit ergo $v = 2i$, fietque $dt = \frac{du\sqrt{g(mm - \operatorname{cos}u^2)}}{\sqrt{(m + \operatorname{cos}u)}} = du\sqrt{g}$

Fig. 10. $(m - \operatorname{cos}u)$. Quoniam v est constans, recta angulum KBL bisecans, quae sit MBN, cum axe Oo angulum constantem ONB perpetuo constituet: cum enim sit $KBL = 180^{\circ} - \zeta + \eta$, erit $KBM = 90^{\circ} - \frac{1}{2}\zeta + \frac{1}{2}\eta$ & $MBb = 90^{\circ} + \frac{1}{2}v$, ergo $OMB = \frac{1}{2}v = i$.

Quoties ergo hujusmodi corpus, in quo est

$$K(Kkk + Lkk + Lbb) = L(Kll + Lll + K\epsilon\epsilon)$$

initio ita projiciatur, ut positio rectae angulum KBL bisecantis non varietur, tum motus ad hunc casum secundum pertinebit, atque linea MN perpetuo eandem inclinationem ad axem conservabit. Cum deinde sit angulus $KBL = 180 - \zeta + \eta = 180 - u$, ex quovis angulo KBL, quem inter motum induit, definiri poterit tempus ab initio elapsum $t = \int du\sqrt{g(m - \operatorname{cos}u)}$. Quia ergo est $\zeta = \frac{v+u}{2}$ & $\eta = \frac{v-u}{2}$ erit $\frac{d\zeta}{dt} = \frac{du}{2dt} = \frac{1}{2\sqrt{g(m - \operatorname{cos}u)}}$ & $\frac{d\eta}{dt} = \frac{-1}{2\sqrt{g(m - \operatorname{cos}u)}}$, quarum illa exprimit celeritatem rotatoriam articuli AB, haec vero articuli BC. Praeterea

terea vero ſi ponamus centrum gravitatis in puncto O quieſcens, erit

$$p = -\frac{L(b\sin\zeta + \varepsilon\sin\eta)}{K+L};\quad x = -\frac{L(b\cos\zeta + \varepsilon\cos\eta)}{K+L}$$

$$q = \frac{K(b\sin\zeta - \varepsilon\sin\eta)}{K+L};\quad y = \frac{K(b\cos\zeta - \varepsilon\cos\eta)}{K+L}$$

Celeritates vero punctorum K & L erunt

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{L(b\cos\zeta - \varepsilon\cos\eta)}{2(K+L)\sqrt{g(m-\cos u)}};\quad \frac{dx}{dt} = \frac{L(b\sin\zeta - \varepsilon\sin\eta)}{2(K+L)\sqrt{g(m-\cos u)}}$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{K(b\cos\zeta - \varepsilon\cos\eta)}{2(K+L)\sqrt{g(m-\cos u)}};\quad \frac{dy}{dt} = -\frac{K(b\sin\zeta - \varepsilon\sin\eta)}{2(K+L)\sqrt{g(m-\cos u)}}$$

Si initio corpus ABC ſuper axe Oo in directum jacuerit, ita ita ut fuerit $\zeta = 90^\circ$ & $\eta = 90^\circ$, ideoque $v = 180^\circ$, & $u = 0$ celeritates ſecundum axem Oo evaneſcent; at ſecundum axem $O\omega$ erit

$$\text{celeritas puncti K} = \frac{L(b-\varepsilon)}{2(K+L)\sqrt{gm}}$$

$$\text{celeritas puncti L} = -\frac{K(b-\varepsilon)}{2(K+L)\sqrt{gm}}$$

$$\text{\& celeritas rotatoria articuli AB} = \frac{1}{2\sqrt{gm}}$$

$$\text{celeritas rotatoria articuli BC} = \frac{-1}{2\sqrt{gm}}$$

Caſus. III.

46. Sit utriusque articuli univerſa materia in ejus

centro gravitatis concentrata, erit $k = 0$ & $l = 0$; unde fit $m = \frac{b}{2c} + \frac{c}{2b}$; $n = \frac{b}{2c} - \frac{c}{2b}$ & $m^2 - n^2 = 1$.

Habebimus ergo $dt = \frac{du \sin u.\ \sqrt{fg}}{\sqrt{(mf - g + f\cos u)}}$; cujus integrale est

$$t = \sqrt{h} - \frac{2\sqrt{g}}{\sqrt{f}} \sqrt{(mf - g + f\cos u)}$$

unde fit $2\sqrt{g(mf - g + f\cos u)} = \sqrt{fh} - t\sqrt{f}$ & $4g(mf - g + f\cos u) = fh - 2ft\sqrt{h} + ftt$ ideoque

$$\cos u = \frac{4gg - mfg + fh - ft\sqrt{h} + ftt}{4fg}.$$ Deinde vero erit

$$dv = \frac{4g\,dt\sqrt{f}}{4gg + (\sqrt{fh} - t\sqrt{f})^2} - \frac{ndu}{m + \cos u}.$$

Partis prioris integrale est $= - 2$ Atang. $\frac{\sqrt{fg} - t\sqrt{f}}{2g}$, ad posterius integrale inveniendum ponatur $\cos u = s$, erit $du = \frac{-ds}{\sqrt{(1 - ss)}}$ & $\frac{-ndu}{m + \cos u} = \frac{nds}{(m+s)\sqrt{(1 - ss)}}$; sit $s = \frac{2r}{1 + rr}$, erit $\sqrt{(1 - ss)} = \frac{1 - rr}{1 + rr}$ & $ds = \frac{2dr(1 - rr)}{(1 + rr)^2}$ atque $\frac{ds}{\sqrt{(1 - ss)}} = \frac{2\,dr}{1 + rr}$; unde fit $\frac{nds}{(m+s)\sqrt{(1 - ss)}} = \frac{2ndr}{m + 2r + mrr}$; cujus integrale est 2 A tag $\frac{nr}{m + r}$ ob $n = \sqrt{(mm - 1)}$. Ergo ob $rr = \frac{1 - \sqrt{(1 - ss)}}{1 + \sqrt{(1 - ss)}} = \frac{(1 - \sqrt{(1 - ss)})^2}{ss}$,

erit

erit $r = \frac{1 - \sqrt{(1-ss)}}{s} = \frac{1 - \sin u}{\cos u}$, atque $\int \frac{-n\,du}{m + \cos u}$

$$= 2\,\mathrm{A\,tag}\,\frac{n - n \sin u}{m \cos u + 1 - \sin u} = 2\,\mathrm{A\,tag.}\,\frac{n}{1 + m \,\mathrm{tag}(45^\circ + \frac{1}{2}u)}.$$

Quapropter erit

$$v = -2\,\mathrm{A\,tag}\sqrt{\frac{mf - g + f\cos u}{g}} + \mathrm{A\,tag.}\,\frac{n(1 - \sin u)}{m\cos u + 1 - \sin u} \text{ vel}$$

$$v = -2\,\mathrm{A\,tag}\sqrt{\frac{mf - g + f\cos u}{g}} + \mathrm{A\,tag}\,\frac{n(1 - \sin u + m\cos u)}{1 + nn \sin u + m \cos u}$$

Ceterum cum ſit $\cos u = \frac{4gg - 4mfg + f(\sqrt{h} - t)^2}{4fg}$; patet t non ultra certum limitem augeri poſſe: Cumprimum enim iſta fractio unitatem ſuperat, angulus u fit imaginarius ſicque motus continuatio ceſſare debebit, qui caſus maxime eſt notabilis.

Ponamus initio quo $t = 0$, ambos articulos AB & BC in directum jacuiſſe, ſeu fuiſſe $\eta = \zeta$, ideoque $u = 0$, & $\cos u = 1$: erit ergo $\sqrt{h} = \frac{2\sqrt{g}}{\sqrt{f}}\sqrt{(mf - g + f)}$ ideoque

$$t = \frac{2\sqrt{g}}{\sqrt{f}}\sqrt{(mf - g + f)} - \sqrt{(mf - g + f\cos u)})$$

creſcente ergo tempore creſcet angulus u, neque vero ultra duos rectos augeri poteſt, quia tum t iterum decreſceret: motus ergo eousque tantum continuabitur, quoad fiat $u = 180$ & $\cos u = -1$, tantumque tempus, quo motus durabit, erit

$$t = \frac{2\sqrt{g}}{\sqrt{f}}(\sqrt{(mf - g + f)} - \sqrt{(mf - g - f)})$$

Quod

Quod paradoxon resolvetur, si ad celeritatem rotatoriam attendatur: cum enim sit celeritas rotatoria articuli $AB = \frac{d\zeta}{dt} = \frac{dv + du}{2dt}$ ob $\frac{du}{dt} = \frac{\sqrt{(mf - g + f\cos u}}{\sin u . \sqrt{fg}}$ fiet ea, si $\sin u = 0$, infinita, ex quo intelligitur hoc casu in expressione $mm - nn$ terminos continentes kk & ll, etiamsi minimi statuantur, negligi non posse. Quocirca motus tantum definiri poterit, quamdiu $\sin u$ non est $= 0$. Si igitur initio motus statuatur $u = 0$, tum neque ipsum motus initium recte definitur, neque per hunc calculum motum eousque prosequi licet, quoad fiat $u = 180°$. [Quamdiu autem u non sit $= 180$, motus recte assignatur eritque

$$\sqrt{(mf - g + f\cos u)} = \sqrt{(mf - g + f)} - \frac{t\sqrt{f}}{2\sqrt{g}} \text{ seu}$$

$$f\cos u = f - \frac{t\sqrt{f(mf - g + f)}}{\sqrt{g}} + \frac{ftt}{4g} \text{ ideoque}$$

$$\cos u = 1 - \frac{t\sqrt{(mf - g + f)}}{\sqrt{fg}} + \frac{tt}{4g}.$$

Cum deinde sit $\frac{du}{dt} = \frac{\sqrt{(mf - g + f\cos u)}}{\sin u . \sqrt{fg}}$ & $\frac{dv}{dt} =$

$\frac{1}{(m + \cos u)\sqrt{f}} - \frac{n\,du}{(m + \cos u)dt} = \frac{1}{(m + \cos u)\sqrt{f}} -$

$\frac{n\sqrt{(mf - g + f\cos u)}}{\sin u\,(m + \cos u)\sqrt{fg}}$, hinc ad quodvis tempus motus rotatorius utriusque articuli assignabitur. Hincque porro per solutionem generalem celeritates veras utriusque centri gravitatis K & L definire licet.

Scho-

Scholion.

47. Generaliter autem ex statu ac motu initiali constantes f & g, quæ in solutione insunt, definiri sicque solutin ad quemvis casum particularem accommodari potest. Ponamus, quo omnes casus reduci possunt, commune centrum gravitatis in puncto O quiescere, ita ut fiat $\mathfrak{F}=0$, $\mathfrak{f}=0$ $\mathfrak{G}=0$, & $\mathfrak{g}=0$. Deinde assumamus initio ambos articulos indirectum fuisse sitos, ita ut fuerit $\zeta=\eta$ & $u=0$, & quoniam positio axis Oo est arbitraria, sumamus initio lineam rectam ABC in axem $O\omega$ incidisse, ita ut fuerit $\zeta=0$, & $\eta=0$, ideoque & $v=0$. Fuit ergo initio Fig. 11.

$$OK=\frac{Lb+L\beta}{K+L} \text{ \& } OL=\frac{Kb+K\beta}{K+L}.$$

Deinde cum sit $\frac{du}{dt}=\frac{\sqrt{(mf-g+f\operatorname{cos}u)}}{\sqrt{fg(mm-nn-\operatorname{cos}u)^2}}$ & $\frac{dv}{dt}=$

$$\frac{1}{(m+\operatorname{cos}u)\sqrt{f}}-\frac{ndu}{(m+\operatorname{cos}u)dt}=\frac{1}{(m+\operatorname{cos}u)\sqrt{f}}-$$
$$\frac{n\sqrt{(mf-g+f\operatorname{cos}u)}}{(m+\operatorname{cos}u)\sqrt{fg(mm-nn-\operatorname{cos}u^2)}}$$

ob $\zeta=\frac{v+u}{2}$ & $\eta=\frac{v-u}{2}$ erit

$$\frac{d\zeta}{dt}=\frac{1}{2(m+\operatorname{cos}u)\sqrt{f}}+\frac{(m-n+\operatorname{cos}u)\sqrt{(mf-g+f\operatorname{cos}u)}}{2(m+\operatorname{cos}u)\sqrt{fg(mm-nn-\operatorname{cos}u^2)}}$$

$$\frac{d\eta}{dt}=\frac{1}{2(m+\operatorname{cos}u)\sqrt{f}}-\frac{(m+n+\operatorname{cos}u)\sqrt{(mf-g+f\operatorname{cos}u)}}{2(m+\operatorname{cos}u)\sqrt{fg(mm-nn-\operatorname{cos}u^2)}}$$

Initio igitur quo erat $u=0$, fuit

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{1}{2(m+1)\sqrt{f}} + \frac{(m-n+1)\sqrt{(mf-g+f)}}{2(m+1)\sqrt{fg(m^2-n^2-1)}}$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{1}{2(m+1)\sqrt{f}} + \frac{(m+n+1)\sqrt{(mf-g+f)}}{2(m+1)\sqrt{fg(m^2-n^2-1)}}.$$

Cum igitur punctorum K & L celeritates ſint:

	in directione Oo	in directione Oω
K;	$\frac{dp}{dt} = -\frac{\mathrm{L}b\,d\zeta\cos\zeta - \mathrm{L}\beta\,d\eta\cos\eta}{(\mathrm{K}+\mathrm{L})dt}$	$\frac{dx}{dt} = \frac{\mathrm{L}b\,d\zeta\sin\zeta + \mathrm{L}\beta\,d\eta\sin\eta}{(\mathrm{K}+\mathrm{L})dt}$
L;	$\frac{dq}{dt} = \frac{\mathrm{K}b\,d\zeta\cos\zeta + \mathrm{K}\beta\,d\eta\cos\eta}{(\mathrm{K}+\mathrm{L})dt}$	$\frac{dy}{dt} = -\frac{\mathrm{K}b\,d\zeta\sin\zeta - \mathrm{K}\beta\,d\eta\sin\eta}{(\mathrm{K}+\mathrm{L})dt}$

initio celeritates punctorum ſecundum directionem Oω evanuerunt. In directione autem Oo erant celeritates inter ſe ut L ad K & altera alterius erat negativa. Quod ſi ergo ponamus celeritatem puncti K in directione Kk fuiſſe $= \frac{\mathrm{L}\sqrt{h}}{\mathrm{K}+\mathrm{L}}$ & celeritatem puncti L in directione Ll fuiſſe $= \frac{\mathrm{K}\sqrt{h}}{\mathrm{K}+\mathrm{L}}$ erit $\sqrt{h} = \frac{b\,d\zeta}{dt} + \frac{\beta\,d\eta}{dt}$ ſeu

$$\sqrt{h} = \frac{b+\beta}{2(m+1)\sqrt{f}} + \frac{(b-\beta)\sqrt{(mf-g+f)}}{2\sqrt{fg(m^2-n^2-1)}} - \frac{n(b+\beta)\sqrt{(mf-g+f)}}{2(m+1)\sqrt{fg(m^2-n^2-1)}}$$

Pona-

Ponamus:

$$\frac{1}{2(m+1)\sqrt{f}}-\frac{n\sqrt{(mf-g+f)}}{2(m+1)\sqrt{fg(mm-nn-1)}}=\frac{\mu}{\sqrt{f}}$$

$$\& \quad \frac{\sqrt{(mf-g+f)}}{2\sqrt{fg(mm-nn-1)}}=\frac{\nu}{\sqrt{f}}.$$

eratque initio celeritas rotatoria circa centrum gravitatis

$$\text{Articuli AB} = \frac{\mu+\nu}{\sqrt{f}}$$

$$\text{articuli BC} = \frac{\mu-\nu}{\sqrt{f}}$$

& celeritas puncti K secundum $Kk = \frac{L((b+\beta)\mu+(b-\beta)\nu)}{(K+L)\sqrt{f}}$

& celeritas puncti L secundum $Ll = \frac{K((b+\beta)\mu+(b-\beta)\nu)}{(K+L)\sqrt{f}}$

Erit autem $\frac{\mu}{\sqrt{f}}+\frac{n\nu}{(m+1)\sqrt{f}}=\frac{1}{2(m+1)\sqrt{f}}$, ideoque

$2(m+1)\mu+2n\nu=1$; ergo $\nu=\frac{1}{2n}-\frac{(m+1)\mu}{n}$

seu $\mu=\frac{1-2n\nu}{2(m+1)}$.

Quia porro est $\sqrt{(mf-g+f)}=2\nu\sqrt{g(mm-nn-1)}$ erit $(m+1)f-g=4\nu^2 g(mm-nn-1)$; ideoque $g=$

$$\frac{(m+1)f}{1+4\nu^2(m^2-n^2-1)}.$$

 Cum

Cum deinde ſit $\sqrt{h} = \frac{(b+\beta)\mu+(b-\beta)\nu}{\sqrt{f}}$; fiet

$$\sqrt{f} = \frac{(b+\beta)\mu+(b-\beta)\nu}{\sqrt{h}} = \frac{b+\beta}{2(m+1)\sqrt{f}} + \frac{\nu b(m-n+1)-\nu\beta(m+n+1)}{(m+1)\sqrt{h}}$$

ſeu $\sqrt{f} = \frac{b+\beta}{2(m+1)\sqrt{h}} = \frac{\nu(K+L)(Lbll-K\beta kk)}{KLb\beta(m+1)\sqrt{h}}$

eſtque $m^2 - n^2 - 1 = \frac{K+L}{KLb^2\beta^2}((K+L)k^2ll+K\beta^2k^2 + Lbbll)$

Hinc ergo ex motu initiali definiuntur litteræ f & g, quibus cognitis deinceps ad quodvis tempus motus & ſitus corporis determinabitur.

Problema. VII.

Fig. 12. 48. *Conſtet corpus ex quotcunque articulis AB, BC, CD, DE &c. flexuris in B, C, D, &c. invicem conjunctis, quæriturque motus, quo hoc corpus ſuper plano politiſſimo horizontali ſit progreſſurum, poſtquam ipſi ſemel motus quicunque fuerit impreſſus.*

Solutio.

Sumtis pro lubitu in plano horizontali duobus axibus orthogonalibus Oo, $O\omega$, ad quos quovis momento poſitio corporis referatur, perveneritque elapſo tempore t in ſitum, quem figura repræſentat. Sint ſingulorum articulorum centra gravitatis in K, L, M, N &c. unde ad

axem

axem Oo demittantur perpendicula KP, LQ, MR, NS, &c. & vocentur:

$AK = a$; $BK = b$; $BL = \beta$; $CL = c$; $CM = \gamma$; $DM = d$; $DN = \delta$ &c.

$OP = p$; $OQ = q$; $OR = r$; $OS = s$ &c.

$PK = x$; $QL = y$; $RM = z$; $SN = v$ &c.

Anguli: $AKP = \zeta$; $BLQ = \eta$; $CMR = \theta$; $DNS = \iota$; &c.

ex quibus oriuntur ſequentes æquationes:

$q - p = b \sin\zeta + \beta \sin\eta$	$y - x = b \cos\zeta + \beta \cos\eta$
$r - q = c \sin\eta + \gamma \sin\theta$	$z - y = c \cos\eta + \gamma \cos\theta$
$s - r = d \sin\theta + \delta \sin\iota$	$v - z = d \cos\theta + \delta \cos\iota$
&c.	&c.

Deinde ſi punctorum K, L, M, N &c. motus reſolvantur in laterales ſecundum directiones axium Oo, $O\omega$, erit

Celeritas puncti	in directione Oo	in directione $O\omega$
K	$= \frac{dp}{dt}$	$= \frac{dx}{dt}$
L	$= \frac{dq}{dt}$	$= \frac{dy}{dt}$
M	$= \frac{dr}{dt}$	$= \frac{dz}{dt}$
N	$= \frac{ds}{dt}$	$= \frac{dv}{dt}$
	&c.	&c.

Celeritates vero angulares cujusque articuli circa ſuum gravitatis centrum ex incrementis angulorum ζ, η, θ, &c.

 defi-

definientur, ita ut in distantia α quovis centro gravitatis $= 1$ sit;

Celeritas rotatoria

Articuli AB circa K $= \frac{d\zeta}{dt}$

Articuli BC circa L $= \frac{d\eta}{dt}$

Articuli CD circa M $= \frac{d\theta}{dt}$

Articuli DE circa N $= \frac{d\iota}{dt}$

&c.

Si denique:	Massa	Momentum inertiæ
Articuli AB	$= K$	$= Kkk$
Articuli BC	$= L$	$= Lll$
Articuli CD	$= M$	$= Mmm$
Articuli DE	$= N$	$= Nnn$
&c.	&c.	&c.

Vires, quas juncturæ sustinent, & quibus motus articulorum alterantur, pariter secundum directiones Oo & $O\omega$ resolvantur vocenturque

Vis $Bk = Bl = B$	Vis $B\varkappa = B\lambda = \mathfrak{B}$
Vis $Cl = Cm = C$	Vis $C\lambda = C\mu = \mathfrak{C}$
Vis $Dm = Dn = D$	Vis $D\mu = D\nu = \mathfrak{D}$
&c.	&c.

His

His igitur motus punctorum K, L, M, N, &c. ita afficientur, ut sit:

$2K\,ddp = \mathfrak{B}\,dt^2$	$2K\,ddx = B\,dt^2$
$2L\,ddq = \mathfrak{C}\,dt^2 - \mathfrak{B}\,dt^2$	$2L\,ddy = C\,dt^2 - B\,dt^2$
$2M\,ddr = \mathfrak{D}\,dt^2 - \mathfrak{C}\,dt^2$	$2M\,ddz = D\,dt^2 - C\,dt^2$
$2N\,dds = \text{- - -} - \mathfrak{D}\,dt^2$	$2N\,ddv = \text{- - -} - D\,dt^2$
&c.	&c.

Tum vero singulorum articulorum motus rotatorii a momentis harum virium ita accelerabuntur; ut fiat:

$$2K\,kk\,dd\zeta = (\mathfrak{B}b\cos\zeta - Bb\sin\zeta)\,dt^2$$

$$2L\,ll\,dd\eta = (\mathfrak{C}c\cos\eta - Cc\sin\eta)\,dt^2 + (\mathfrak{B}\beta\cos\eta - B\beta\sin\eta)\,dt^2$$

$$2M\,mm\,dd\theta = (\mathfrak{D}d\cos\theta - Dd\sin\theta)\,dt^2 + (\mathfrak{C}\gamma\cos\theta - C\gamma\sin\theta)\,dt^2$$

$$2N\,nn\,dd\iota = \text{- - - - -} + (\mathfrak{D}\delta\cos\iota - D\delta\sin\iota)\,dt^2$$

&c.

Ex prioribus sollicitationibus oriuntur istæ binæ æquationes

$$K\,ddp + L\,ddq + M\,ddr + N\,dds + \&c. = 0$$

$$K\,ddx + L\,ddy + M\,ddz + N\,ddv + \&c. = 0$$

quæ bis integratæ dabunt:

$$Kp + Lq + Mr + Ns + \&c. = \mathfrak{F}t + f$$

$$Lx + Ly + Mz + Nv + \&c. = \mathfrak{G}t + \mathfrak{F}$$

quibus

quibus communi centri gravitatis totius corporis motus uniformis ſecundum lineam rectam indicatur. Cum ergo ſit

$$q = p + b \sin \zeta + \beta \sin \eta$$
$$r = p + b \sin \zeta + (c + \beta) \sin \eta + \gamma \sin \theta$$
$$s = p + b \sin \zeta + (c + \beta) \sin \eta + (d + \gamma) \sin \theta + \delta \sin \iota$$

&c.

$$y = x + b \cos \zeta + \beta \cos \eta$$
$$z = x + b \cos \zeta + (c + \beta) \cos \eta + \gamma \cos \theta$$
$$v = x + b \cos \zeta + (c + \beta) \cos \eta + (d + \gamma) \cos \theta + \delta \cos \iota$$

&c.

Ponatur maſſa totius corporis K + L + M + N + &c. = S fietque:

$$p = \mathfrak{F}t + \mathfrak{f} \frac{\begin{array}{l} -(S-L) b \sin \zeta - (S-K-L) c \sin \eta - (S-K-L-M) d \sin \theta \\ -(S-L) b \sin \eta - (S-K-L) \gamma \sin \theta - (S-K-L-M) \delta \sin \iota \end{array} \; \&c.}{S}$$

$$q = \mathfrak{F}t + \mathfrak{f} \frac{\begin{array}{l} + K b \sin \zeta - (S-K-L) c \sin \eta - (S-K-L-M) d \sin \theta \\ + K \beta \sin \eta - (S-K-L) \gamma \sin \theta - (S-K-L-M) \delta \sin \iota \end{array} \; \&c.}{S}$$

$$r = \mathfrak{F}t + \mathfrak{f} \frac{\begin{array}{l} + K b \sin \eta + (K+L) c \sin \eta - (S-K-L-M) d \sin \theta \\ + K \beta \sin \eta + (K+L) \gamma \sin \theta - (S-K-L-M) \delta \sin \iota \end{array} \; \&c.}{S}$$

$s =$

$$s = \mathfrak{F}\iota + \mathfrak{f}\,\frac{\begin{matrix} + \mathrm{K} b \sin\zeta + (\mathrm{K}+\mathrm{L}) c \sin\eta + (\mathrm{K}+\mathrm{L}+\mathrm{M}) d \sin\theta \\ + \mathrm{K} \beta \sin\eta + (\mathrm{K}+\mathrm{L}) \gamma \sin\theta + (\mathrm{K}+\mathrm{L}+\mathrm{M}) \delta \sin\iota \end{matrix}}{\mathrm{S}} \quad \&c.$$

&c.

Similique modo applicatæ x, y, z, v, &c. definientur prodibitque:

$$x = \mathfrak{G}\iota + \mathfrak{g}\,\frac{\begin{matrix} - (\mathrm{S}-\mathrm{K}) b \cos\zeta - (\mathrm{S}-\mathrm{K}-\mathrm{L}) c \cos\eta \\ - (\mathrm{S}-\mathrm{K}-\mathrm{L}-\mathrm{M}) d \cos\theta \\ - (\mathrm{S}-\mathrm{K}) \beta \cos\eta - (\mathrm{S}-\mathrm{K}-\mathrm{L}) \gamma \cos\theta \\ - (\mathrm{S}-\mathrm{K}-\mathrm{L}-\mathrm{M}) \delta \cos\iota \end{matrix}}{\mathrm{S}} \quad \&c.$$

$$y = \mathfrak{G}\iota + \mathfrak{g}\,\frac{\begin{matrix} + \mathrm{K} b \cos\zeta - (\mathrm{S}-\mathrm{K}-\mathrm{L}) c \cos\eta \\ - (\mathrm{S}-\mathrm{K}-\mathrm{L}-\mathrm{M}) d \cos\theta \\ + \mathrm{K} \beta \cos\eta - (\mathrm{S}-\mathrm{K}-\mathrm{L}) \gamma \cos\theta \\ - (\mathrm{S}-\mathrm{K}-\mathrm{L}-\mathrm{M}) \delta \cos\iota \end{matrix}}{\mathrm{S}} \quad \&c.$$

$$z = \mathfrak{G}\iota + \mathfrak{g}\,\frac{\begin{matrix} + \mathrm{K} b \cos\zeta + (\mathrm{K}+\mathrm{L}) c \cos\eta \\ - (\mathrm{S}-\mathrm{K}-\mathrm{L}-\mathrm{M}) d \cos\theta \\ + \mathrm{K} \beta \cos\eta + (\mathrm{K}+\mathrm{L}) \gamma \cos\theta \\ - (\mathrm{S}-\mathrm{K}-\mathrm{L}-\mathrm{M}) \delta \cos\iota \end{matrix}}{\mathrm{S}} \quad \&c.$$

$$v = \mathfrak{G}\iota + \mathfrak{g}\ \frac{\begin{array}{c}+Kb\cos\zeta + (K+L)c\cos\eta + (K+L+M)\\ d\cos\theta\\ +K\epsilon\cos\eta + (K+L)\gamma\cos\theta + (K+L+M)\\ \delta\cos\iota\end{array}\ \&c.}{S}$$

&c.

Deinde ex æquationibus, quas sollicitationes punctorum K, L, M, N &c. suppeditaverunt, colligitur fore.

$$\frac{2K(dpddp + dxddx) + 2L(dqddq + dyddy) + 2M(drddr + dzddz)\ \&c.}{dt^2}$$

$$= \mathfrak{B}(dp - dq) + \mathfrak{C}(dq - dr) + \mathfrak{D}(dr - ds) + \&c.$$

$$+ B(dx - dy) + C(dy - dz) + D(dz - dv) + \&c. =$$

$$-\mathfrak{B}bd\zeta\cos\zeta - \mathfrak{B}\epsilon d\eta\cos\eta - \mathfrak{C}\gamma d\theta\cos\theta - \mathfrak{D}\delta d\iota\cos\iota - \&c.$$
$$-\mathfrak{C}cd\eta\cos\eta - \mathfrak{D}dd\theta\cos\theta$$

$$+ Bbd\zeta\sin\zeta + B\epsilon d\eta\sin\eta + C\gamma d\theta\sin\theta + D\delta d\iota\sin\iota + \&c.$$
$$+ Ccd\eta\sin\eta + Ddd\theta\sin\theta$$

At sollicitationes motus rotatorii dabunt

$$\frac{2Kk^2 d\zeta dd\zeta + 2Ll^2 d\eta dd\eta + 2Mm^2 d\theta dd\theta + \&c.}{dt^2} =$$

$$\mathfrak{B}\, b\, d\zeta \cos\zeta + \mathfrak{B}\, \varepsilon\, d\eta \cos\eta + \mathfrak{C}\, \gamma\, d\theta \cos\theta + \mathfrak{D}\, \delta\, d\iota \cos\iota$$

$$+ \mathfrak{C}\, c\, d\eta \cos\eta + \mathfrak{D}\, d\, d\theta \cos\theta \quad \&c.$$

$$- B\, b\, d\zeta \sin\zeta - B\, \varepsilon\, d\eta \sin\eta - C\, \gamma\, d\theta \sin\theta - D\, \delta\, d\iota \sin\iota$$

$$- C\, c\, d\eta \sin\eta - D\, d\, d\theta \sin\theta$$

quæ expreſſio cum præcedenti ſit æqualis & contrariis ſignis affecta ſequitur fore:

$$\frac{K(dp^2 + dx^2 + k^2 d\zeta^2) + L(dq^2 + dy^2 + l^2 d\eta^2) + M(dr^2 + dz^2 + m^2 d\theta^2) + \&c.}{dt^2}$$

= Conſt. ſicque patet pepetuo eandem virium vivarum quantitatem conſervari.

Quærantur denique valores virium $\mathfrak{B}$, B, $\mathfrak{C}$, C, $\mathfrak{D}$, D, &c. quæ erunt:

$$\tfrac{1}{2}\, \mathfrak{B}\, dt^2 = K\, ddp$$

$$\tfrac{1}{2}\, \mathfrak{C}\, dt^2 = K\, ddp + L\, ddq$$

$$\tfrac{1}{2}\, \mathfrak{D}\, dt^2 = K\, ddp + L\, ddq + M\, ddr$$

&c.

$$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{B}\,dt^2 = \mathrm{K}ddx$$

$$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{C}\,dt^2 = \mathrm{K}ddx + \mathrm{L}ddy$$

$$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{D}\,dt^2 = \mathrm{K}ddx + \mathrm{L}ddy + \mathrm{M}ddz$$

&c.

Si igitur valores pro $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, &c. & B, C, D, &c. hinc oriundi in æquationibus ex motibus rotatoriis ortis ſubſtituantur; prodibit

$$\mathrm{K}kkdd\zeta = b(\mathrm{K}ddp \operatorname{cof}\zeta + \mathrm{L}ddx \operatorname{fin}\zeta)$$

$$\mathrm{L}ll\,dd\eta = \begin{cases} -\mathrm{K}cddp \operatorname{cof}\eta + \mathrm{L}cddq \operatorname{cof}\eta + \mathrm{K}\epsilon ddp \operatorname{cof}\eta \\ -\mathrm{K}cddx \operatorname{fin}\eta - \mathrm{L}cddy \operatorname{fin}\eta - \mathrm{K}\epsilon ddx \operatorname{fin}\eta \end{cases}$$

$$\mathrm{M}mm\,dd\theta = \begin{cases} -\operatorname{cof}\theta(\mathrm{K}(\gamma+d)ddp + \mathrm{L}(\gamma+d)ddq + \mathrm{M}dddr) \\ -\operatorname{fin}\theta(\mathrm{K}(\gamma+d)ddx + \mathrm{L}(\gamma+d)ddy + \mathrm{M}dddz) \end{cases}$$

$$\mathrm{N}nn\,dd\iota = \begin{cases} +\operatorname{cof}\iota(\mathrm{K}(\delta+e)ddp + \mathrm{L}(\delta+e)ddq + \mathrm{M}(\delta+e) \\ \qquad ddr + \mathrm{N}edds) \\ -\operatorname{fin}\iota(\mathrm{K}(\delta+e)ddx + \mathrm{L}(\delta+e)ddy + \mathrm{M}(\delta+e) \\ \qquad ddz + \mathrm{N}eddv) \end{cases}$$

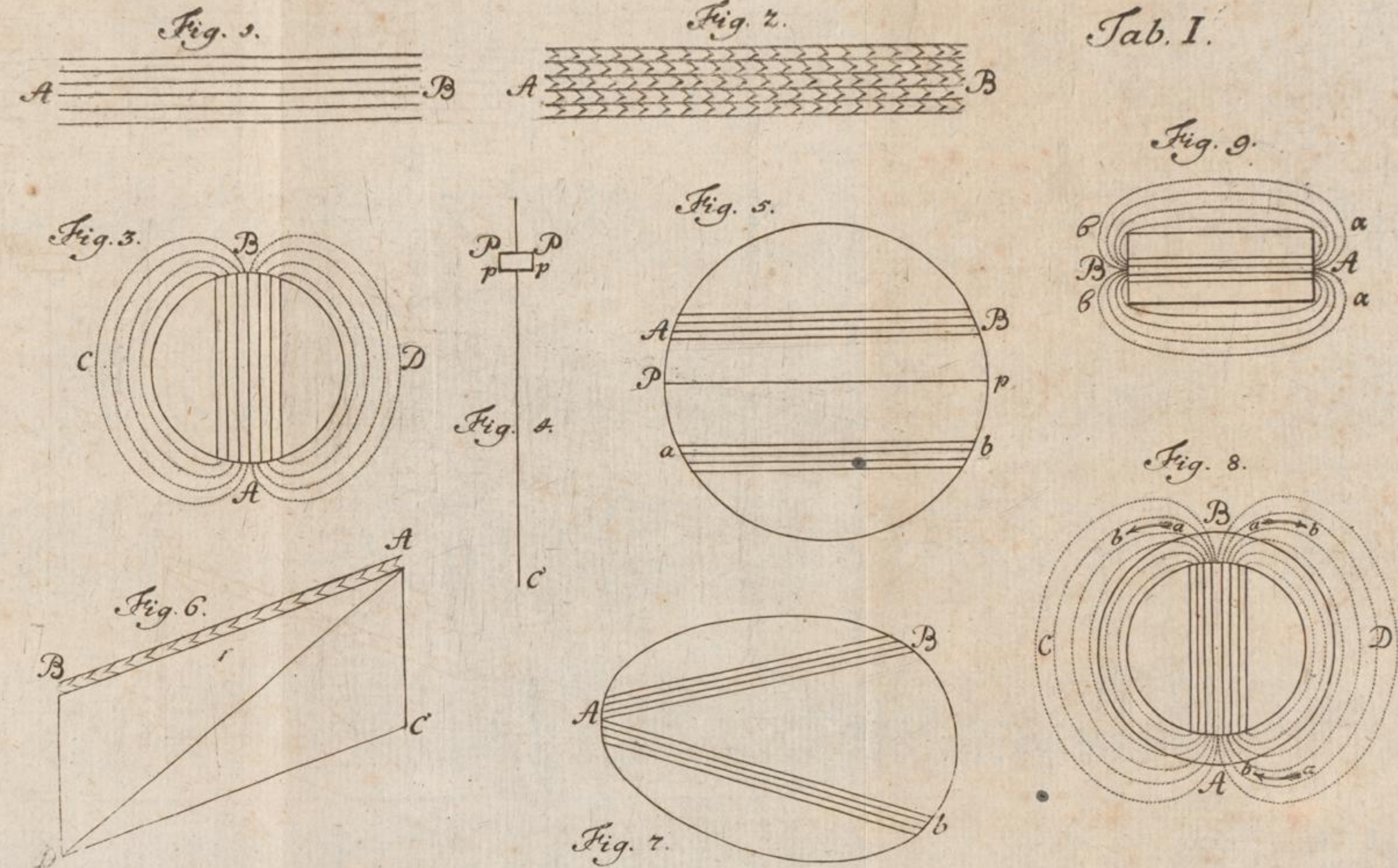
&c.

$=\tfrac{1}{2}$ X 2 Quod

Quod ſi nunc hic loco p, q, r, &c. & x, y, z, &c. valores ſupra inventi ſubſtituantur, habebuntur tot æquationes differentio-differentiales, quot ſunt anguli ζ, η, θ, &c. per easque ergo iſti anguli determinabuntur ex tempore jam elapſo $= t$, quibus inventis ſimul valores coordinatarum p, x, q, y, r, z, &c. innoteſcent, ſicque ad datum tempus poſitio totius corporis una cum motu cujusque articuli definiri poterit.

Q. E. J.

Tab. I.



Eul. Opusc. Tom. III.

F. H. Frisch. sc.

Tab. II.

Fig. 10.

Fig. 11.

Fig. 17.

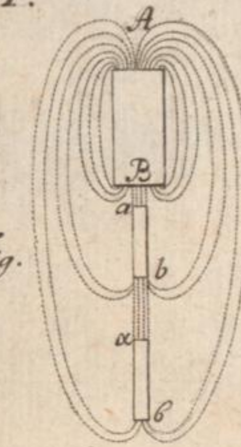


Fig. 12.

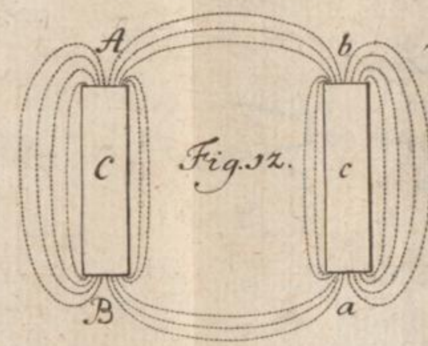


Fig. 13.

Fig. 14.

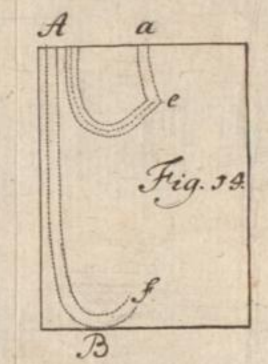


Fig. 18.

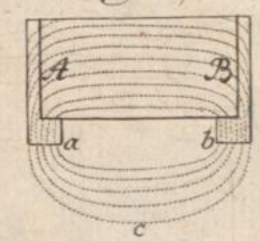


Fig. 15.

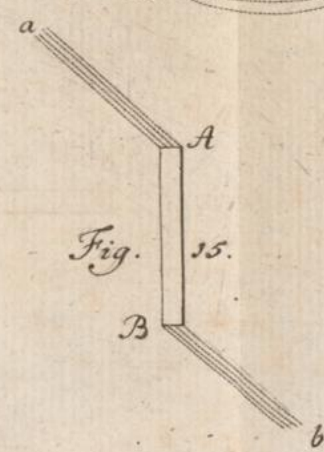


Fig. 16.

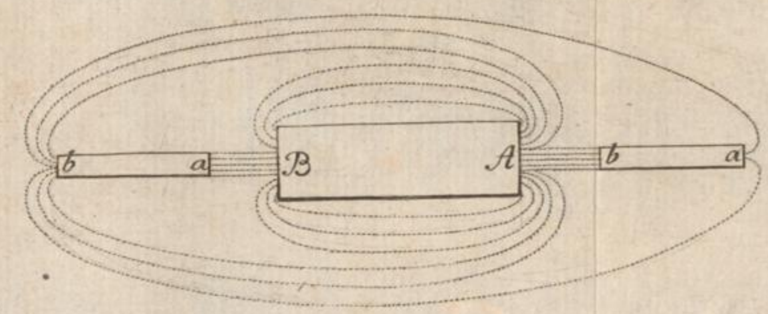
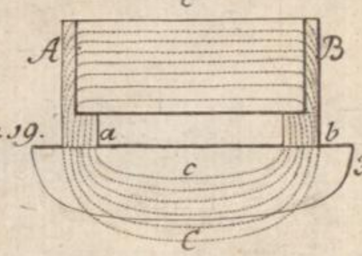


Fig. 19.



F. H. Frisch sc.

Tab. III.

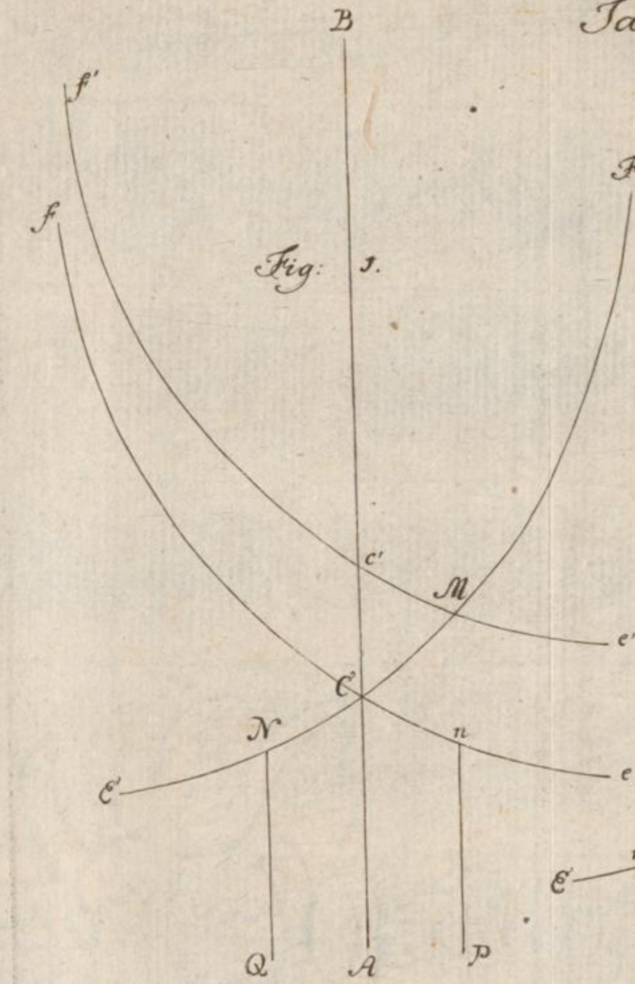


Fig: 1.

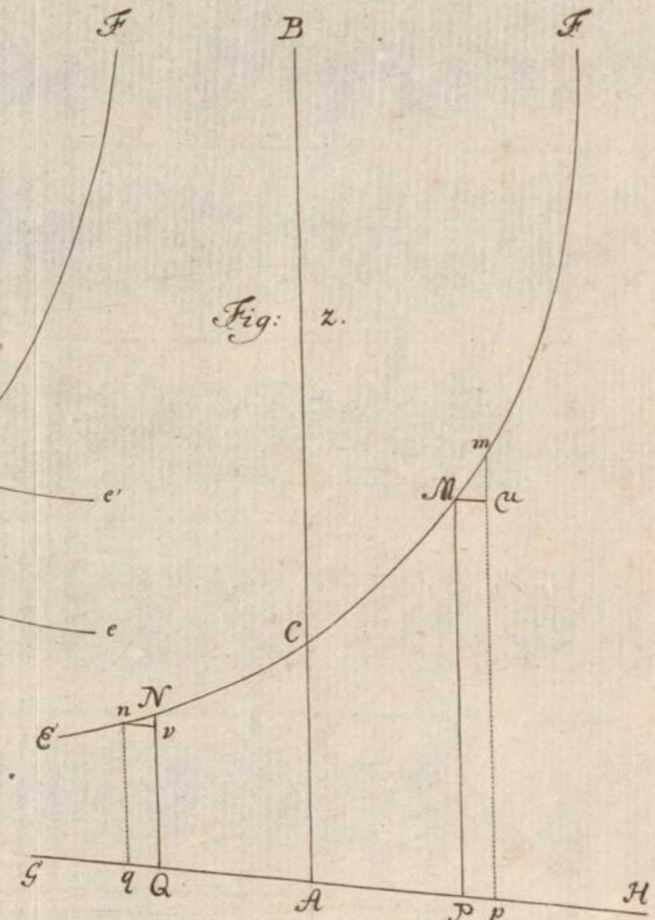


Fig: 2.

F.H.Frisch sc: Berl:

Tab. IV.

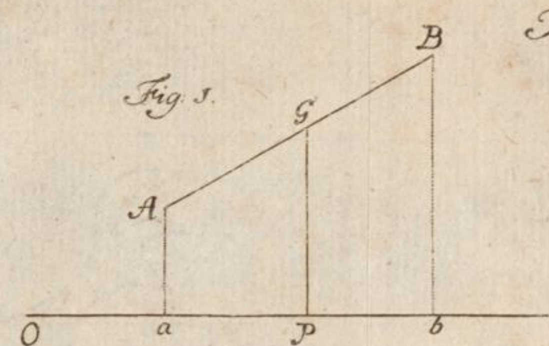


Fig. 1.

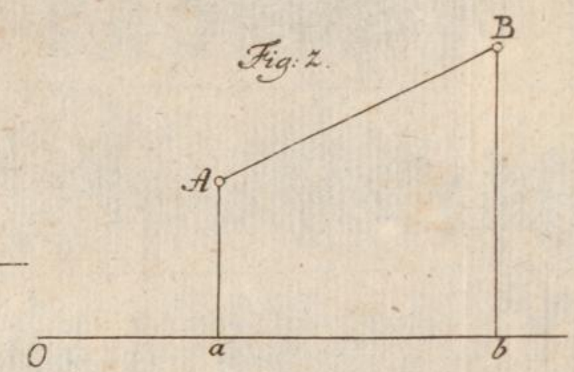


Fig. 2.

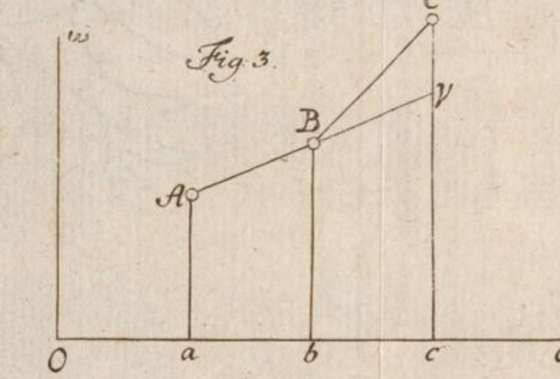


Fig. 3.

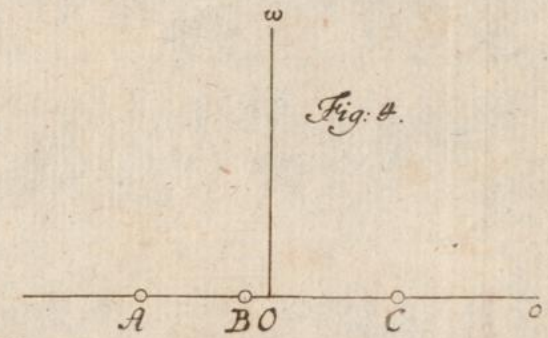


Fig. 4.

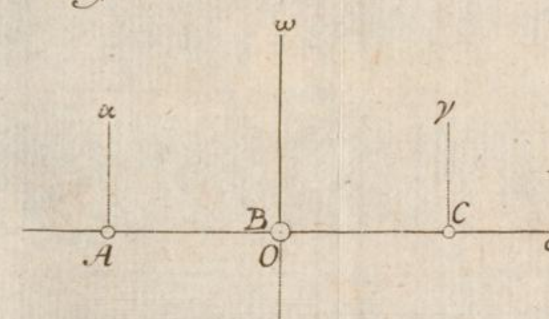


Fig. 5.

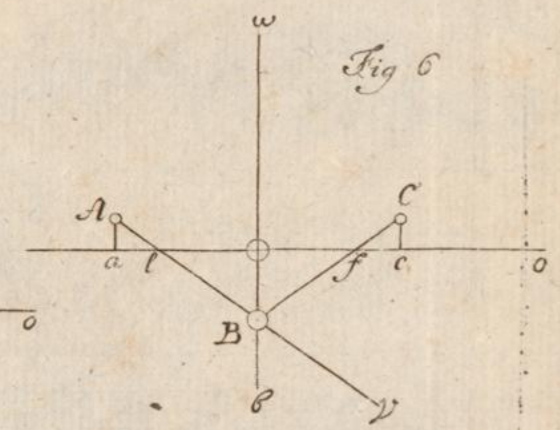
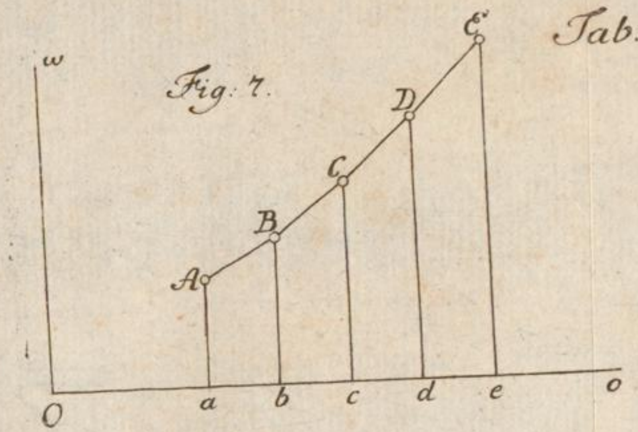
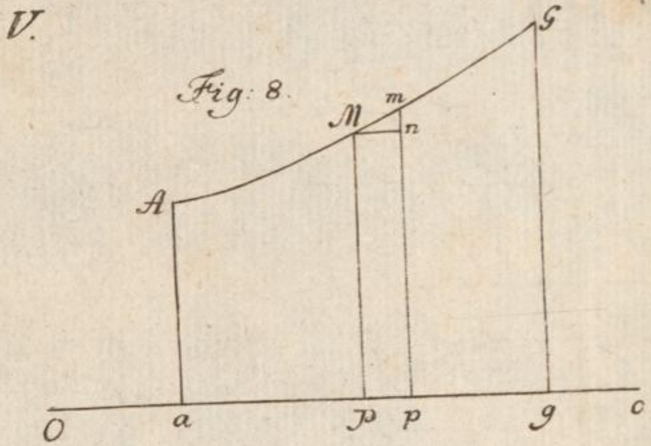


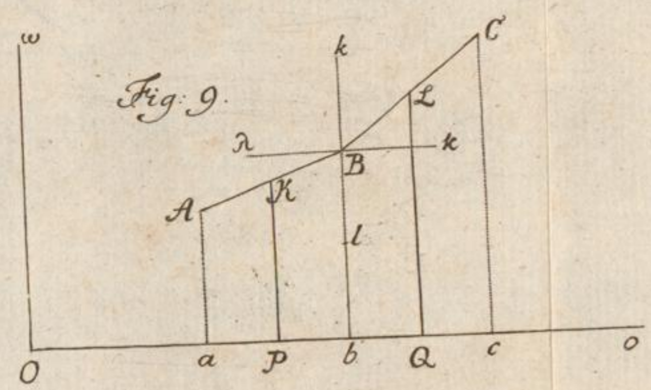
Fig. 6

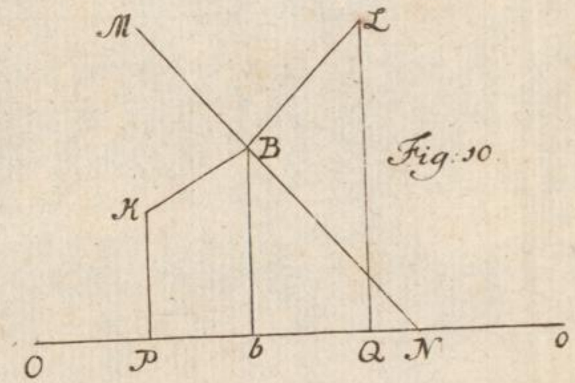
F.H. Frisch sc. Berl.

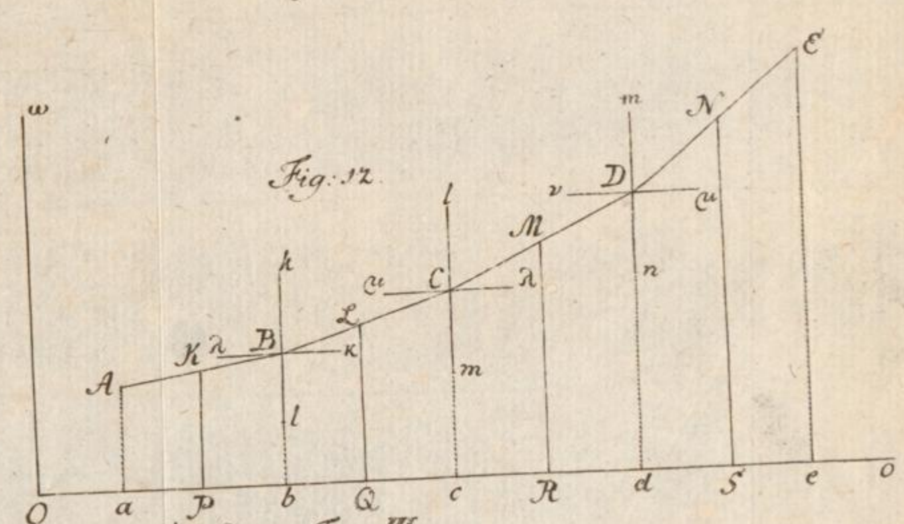
Tab: V.











F.H.Frisch Sc. Berl.

c.j.