

www.e-rara.ch

Lehrbuch der Statik

Möbius, August Ferdinand

Leipzig, 1837

ETH-Bibliothek Zürich

Shelf Mark: Rar 17393

Persistent Link: <https://doi.org/10.3931/e-rara-51094>

Sechstes Kapitel.

www.e-rara.ch

Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien – von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material – from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d'imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L'éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes – des débuts de l'imprimerie jusqu'au 20e siècle.

e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

Nutzungsbedingungen Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titelinformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

Terms of Use This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

Conditions d'utilisation Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

Condizioni di utilizzo Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]

Sechstes Kapitel.

Weitere Ausführung der Theorie der Momente.

§. 74.

Ist ein System von Kräften im Raume nicht im Gleichgewichte, so ist sein Moment, oder das Moment der zwei Kräfte, auf welche sich das System immer reduciren lässt, von einer Axe zur andern im Allgemeinen veränderlich. Die sehr merkwürdigen Gesetze, nach denen diese Aenderungen sich richten, sollen den Gegenstand unserer nächsten Untersuchungen ausmachen.

Die höchst einfachen Beziehungen, welche bei einem in einer Ebene enthaltenen und auf eine einzige Kraft reducirbaren Systeme zwischen den Momenten desselben oder seiner Resultante für verschiedene Punkte der Ebene statt finden, haben wir in §. 30. und §. 48. kennen gelernt. Die jetzt anzustellenden Untersuchungen werden daher den dortigen zwar verwandt, aber in dem Grade zusammengesetzter seyn, als es überhaupt jede geometrische Untersuchung wird, sobald man sie aus dem Gebiete von zwei Dimensionen in das von drei Dimensionen überträgt.

Relationen zwischen Momenten,
deren Axen sich in einem Punkte schneiden.

§. 75.

Alle zu einem Systeme im Raume gehörigen Kräfte kann man auf eine einfache, durch einen beliebig gewählten Punkt M (Fig. 24.) gehende Kraft v und ein Paar w , dessen Kräfte PQ und $P'Q'$ seyen, zurückführen (§. 57.). Die Ebene des Paares und die eine

Kraft $P'Q'$ desselben, nehme man gleichfalls durch M gehend an, was nach §. 50. Folger. immer möglich ist. Alsdann ist in Bezug auf eine durch M gelegte Axe MN das Moment von v sowohl, als von $P'Q'$, null, und daher in Bezug auf dieselbe Axe das Moment des Systems = dem Momente von v und w (§. 59.), = dem Momente von PQ , = dem Sechsfachen der Pyramide $MNPQ$,

$$= 2MPQ \cdot MN \cdot \sin(MPQ^\wedge MN).$$

Wenn daher, wie in diesem Kapitel immer geschehen soll, alle Axen, worauf ein System bezogen wird, von gleicher Länge angenommen werden, so hat man folgenden Satz:

Für jeden Punkt M giebt es eine durch ihn gehende Ebene MPQ von der Beschaffenheit, dass das Moment des Systems für jede den Punkt M treffende Axe dem Sinus des von der Axe mit dieser Ebene gebildeten Winkels proportional ist.

§. 76.

Um uns die Verhältnisse, die hiernach zwischen den Momenten für die durch M gehenden Axen statt finden, anschaulicher zu machen, wollen wir von M aus auf die einzelnen Axen, wie MS und MN , Abschnitte, Ms und Mn , tragen, die den Momenten, welche den Axen zukommen, proportional sind. Ist daher MS auf der Ebene MPQ normal, so verhält sich

$$Ms : Mn = 1 : \cos SMN,$$

folglich ist Mns ein rechter Winkel, d. h. der Punkt n liegt in einer um Ms als Durchmesser beschriebenen und daher die Ebene MPQ in M berührenden Kugel-
fläche; oder mit andern Worten: das Moment jeder durch

M gehenden Axe ist dem von dieser Kugelfläche abgeschnittenen Theile Mn der Axe proportional.

So wie nun unter allen durch M gehenden Sehnen der Kugel die auf der Berührungsebene in M normal stehende Sehne, als Durchmesser, die grösste ist, und alle von M ausgehende, mit ihr gleiche Winkel bildende Sehnen einander gleich sind, so hat auch unter allen durch M gelegten Axen die auf der Ebene MPQ normale Axe das grösste Moment, und allen Axen, die gegen sie unter gleichen Winkeln geneigt sind, kommen Momente von gleicher Grösse zu. So wie ferner die Sehnen, wenn sie in die Berührungsebene selbst zu liegen kommen, in Null übergehen, so ist auch von jeder in dieser Ebene enthaltenen und durch M gehenden Axe das Moment $= 0$. Sind endlich MN und MO zwei von M nach gerade entgegengesetzten Richtungen ausgehende Axen, und schneidet die Gerade, in welcher sie beide liegen, die Kugelfläche in n , so wird das Moment einer jeden von ihnen zwar durch dieselbe Gerade Mn ausgedrückt. Da aber n mit N auf einerlei und mit O auf entgegengesetzte Seiten von M fällt, so stellt Mn für die eine Axe ein positives und für die andere ein eben so grosses negatives Moment vor.

Man lege durch M eine beliebige Ebene; sie schneidet die Kugelfläche in einem Kreise, von welchem der Durchschnitt der Ebene mit der die Kugel in M berührenden Ebene eine Tangente ist. Von den Sehnen dieses Kreises gilt offenbar dasselbe, was so eben von den Sehnen der Kugel bemerkt worden. So wie daher durch jeden Punkt im Raume eine Kugel, so lässt sich durch jeden Punkt einer Ebene in ihr ein Kreis beschreiben, welcher die Eigenschaft besitzt, dass das

Moment jeder durch den Punkt gehenden und in der Ebene enthaltenen Axe der Sehne proportional ist, welche der Kreis von der Axe abschneidet. Unter allen diesen Axen hat daher die den Kreis berührende ein Moment $= 0$, die darauf normale Axe das grösste Moment, u. s. w.

Da übrigens das Sechsfache der Pyramide $MNPQ$ zunächst das Moment der Kraft PQ ausdrückt, so gilt das bisher von den Momenten eines ganzen Systems Gesagte auch von den Momenten einer einzelnen Kraft PQ , d. h. die Momente der Kraft PQ in Bezug auf Axen, die durch M gehen, sind den Theilen dieser Axen, welche in eine die Ebene MPQ in M berührende Kugel fallen, proportional.

§. 77.

Unter allen Momenten, welche einem System in Bezug auf die durch M gehenden Axen zukommen, ist das grösste $= 2MN \cdot MPQ$. Die Richtung seiner Axe und seine Grösse in Vergleich zu den Momenten für die übrigen in M sich schneidenden Axen stellt der von M ausgehende, auf MPQ normale, Durchmesser der Kugel vor. Will man daher in Bezug auf durch M gelegte Axen die Momente nicht bloss von einem, sondern von mehreren Systemen, oder auch von mehreren einzelnen Kräften, mit einander vergleichen, so hat man durch M eben so viele Kugelflächen zu beschreiben, deren von M ausgehende Durchmesser auf den Dreiecken MPQ , welche den einzelnen Systemen oder Kräften angehören, rechtwinklig stehen und den Flächen dieser Dreiecke proportional sind. Ein solcher Durchmesser, welcher, in der Axe des grössten Moments

liegend, diesem Momente proportional ist, werde die Linie des grössten Moments genannt.

Von einer einzelnen Kraft PQ ist daher, rücksichtlich des Punktes M , die Linie des grössten Moments ein in M auf der Ebene MPQ errichtetes und diesem Dreiecke proportionales Perpendikel.

§. 78.

Bei der Reduction eines Systems von Kräften $AB, CD, \dots$ auf eine einfache durch M gehende Kraft v und auf ein Paar $PQ, P'Q'$ (§. 75.) entsteht letzteres durch Zusammensetzung von Paaren, welche in den Ebenen $MAB, MCD, \dots$ liegen, und deren Momente den Doppelten dieser Dreiecke gleich sind (§. 58.). Diese Zusammensetzung kann aber nach §. 53. dadurch bewerkstelligt werden, dass man auf den Ebenen $MAB, MCD, \dots$ in M Normalen errichtet, ihre Längen diesen Dreiecken proportional macht, und von diesen Linien, als Kräfte betrachtet, die Resultante bestimmt. Denn diese ist auf der Ebene des gesuchten resultirenden Paares $PQ, P'Q'$ rechtwinklig und, wenn $P'Q'$ durch M gelegt wird, dem Dreiecke MPQ proportional.

Nach der im vorigen §. gegebenen Erklärung werden aber durch diese Normalen zugleich die Linien der grössten Momente der einzelnen Kräfte und des von ihnen gebildeten Systems rücksichtlich des Punktes M dargestellt, und wir schliessen daher:

Die in Bezug auf einen gewissen Punkt statt findende Linie des grössten Moments für ein System von Kräften ist die Resultante der durch denselben Punkt gehenden Linien der grössten Momente für die einzelnen Kräfte des Systems.

§. 79.

Aus dem eben entwickelten Satze lässt sich eine nicht uninteressante geometrische Folgerung ziehen. Seyen in Bezug auf den Punkt M die Linien M_s , M_s' , ... die Linien der grössten Momente für die Kräfte AB , CD , ...; M_{s_1} die Linie des grössten Moments für das System dieser Kräfte. Man beschreibe um M_s , M_s' , ... und M_{s_1} , als Durchmesser, Kugeln und lege durch M eine beliebige Axe MN , welche die Oberflächen dieser Kugeln, ausser in M , resp. noch in n , n' , ... und n_1 schneide, so sind die Abschnitte Mn , Mn' , ... und Mn_1 die der Axe MN zugehörigen Momente der einzelnen Kräfte AB , CD , ... und des von ihnen gebildeten Systems; folglich $Mn + Mn' + \dots = Mn_1$, welches uns folgenden Satz giebt:

Beschreibt man durch einen Punkt M mehrere Kugelflächen, legt durch M beliebig eine Gerade und bestimmt auf ihr von M aus einen Abschnitt, welcher der algebraischen Summe der Sehnen gleich ist, die von den Kugelflächen in der Geraden abgeschnitten werden, so ist dieser Abschnitt die Sehne einer neuen durch M gehenden Kugel, deren durch M gelegter Durchmesser, statisch ausgedrückt, die Resultante der durch M gelegten Durchmesser der erstern Kugeln ist.

Auf dieselbe Art, wie die Wirkungen mehrerer sich in einem Punkte schneidender Kräfte auf die Wirkung einer einzigen, denselben Punkt treffenden Kraft reducirt werden können, lassen sich daher auch mehrere sich in einem Punkte schneidende Kugelflächen zu einer einzigen zusammensetzen, und eben so wird man auch mehrere in einer Ebene enthaltene und durch

denselben Punkt gehende Kreise zu einem neuen Kreise vereinigen können.

Sind demnach DA , DB (Fig. 25.) zwei anliegende Seiten und DC die Diagonale eines Parallelogramms, und beschreibt man um diese drei Linien, als Durchmesser, Kreise, so ist der dritte Kreis, als durch Zusammensetzung der zwei erstern entstanden, zu betrachten, indem, wenn eine beliebige durch D gezogene Gerade die drei Kreise resp. in a , b , c schneidet, die Sehne Dc des dritten aus den Sehnen Da und Db der beiden ersten zusammengesetzt ist.

Um dieses unmittelbar zu beweisen, erwäge man, dass DaA , DbB , DcC , als in Halbkreisen gelegen, rechte Winkel, und daher Da , Db , Dc die rechtwinkligen Projectionen von DA , DB , DC auf eine und dieselbe Gerade sind. Es ist aber immer die Projection von DC gleich der Summe der Projectionen von DA und AC ; und die Projection von AC gleich der Projection von DB , als von einer der AC gleichen und parallelen Linie; folglich $Dc = Da + Db$.

§. 80.

Diese aus statischen Betrachtungen hervorgegangene, jetzt aber rein geometrisch dargestellte und erwiesene Zusammensetzung von Kreisen kann nun hinwiederum zum Vortheil der Statik verwendet werden, indem sich darauf ein neuer Beweis für das Parallelogramm der Kräfte gründen lässt, ein Beweis, der sich von den meisten übrigen dadurch unterscheidet, dass sich bei ihm die Richtung und Grösse der Resultante zugleich ergeben. Folgendes sind die hierzu nöthigen Betrachtungen.

1) Schneidet eine durch D gezogene Gerade die

drei Kreise in a, b, c , und eine zweite Gerade durch D in a', b', c' , so sind die drei Bögen aa', bb', cc' einander ähnlich, indem jeder von ihnen die Hälfte des von den beiden Geraden gebildeten Winkels misst. Und umgekehrt: schneidet man von drei, mit D in einer Geraden liegenden, Punkten a, b, c der drei Kreise auf den Kreisen nach einerlei Seite hin drei einander ähnliche Bögen aa', bb', cc' ab, so sind auch a', b', c' mit D in einer Geraden.

2) Werde nun jeder der drei Kreise, die ich nach den Endpunkten ihrer Durchmesser kurz mit A, B, C bezeichnen will, in eine und dieselbe Anzahl gleicher Theile getheilt, und dieses so, dass ein gewisser Theilungspunkt des Kreises A , einer des B , einer des C und D selbst in einer Geraden liegen. Alsdann werden, dem eben Bemerkten zufolge, wenn man von diesen drei Punkten in ihren resp. Kreisen nach einerlei Seite zu weiter fortzählt, je drei gleichvielte Theilpunkte mit D wiederum in einer Geraden seyn.

3) Werde noch bei dieser Eintheilung festgesetzt, dass der den Kreisen gemeinschaftliche Punkt D in jedem von ihnen ein Theilpunkt sey. Da nun, wenn a, b, c irgend drei zusammengehörige Theilpunkte, d. h. drei solche sind, die mit D in einer Geraden liegen, man $Da + Db = Dc$ hat, so muss, wenn a in D fällt, also die Gerade den Kreis A in D berührt, $Db = Dc$ seyn, also b mit c zusammenfallen; d. h. die durch D an den Kreis A gelegte Tangente geht durch den gegenseitigen Durchschnitt E der Kreise B und C . Ist daher, wie verlangt wird, D ein Theilpunkt im Kreise A , so ist auch E ein Theilpunkt in den Kreisen B und C . Damit folglich, der Forderung gemäss, D auch in jedem der zwei letztern Kreise ein Theilpunkt seyn

könne, ist es hinreichend und nothwendig, dass von den Bögen derselben DFE und DGE ein jeder zu seinem ganzen Kreise in einem rationalen Verhältnisse stehe.

Weil aber DEB und DEC , als Winkel in Halbkreisen, rechte Winkel sind, und daher E, B, C in einer Geraden liegen, so misst der Bogen DFE den Winkel $2.DBE = 2.ADB$, und der Bogen DGE den Winkel $2.DCE = 2.ADC^*)$. Mithin ist es nur nöthig, dass in dem Parallelogramm $DACB$ jeder der beiden Winkel, welche die Diagonale DC mit den Seiten macht, zu 360° rational ist. Setzen wir daher 360° in m gleiche Theile getheilt, von denen p Theile auf den Winkel ADC , und q auf CDB gehen, so kommen, wenn auch die Peripherie jedes der drei Kreise in m gleiche Theile getheilt wird, auf den Bogen DFE $2(p+q)$ und auf DGE $2p$ solcher Theile, und es liegen, wenn in jedem der drei Kreise D zum ersten Theilpunkt genommen und nach der durch die Folge $DBCA$ bestimmten Richtung herumgezählt wird, der x te Theilpunkt des Kreises A , der $(x+2(p+q))$ te

*) Ueberhaupt ist diese Figur an merkwürdigen Beziehungen reichhaltig. Die Punkte E, H, I , in denen sich die Kreise B und C , A und C , A und B , ausser in D , noch schneiden, liegen in den Seiten BC, AC und der Diagonale AB des Parallelogramms, und die in E, H, I auf BC, AC, AB errichteten Normalen schneiden sich in D . Von diesen Normalen berührt DE den Kreis A , DH den Kreis B , und wenn DI bis nach K an den Kreis C fortgesetzt wird, so ist $DI = IK$. So wie ferner im Obigen die Bögen DFE und DGE , so lassen sich auch alle übrigen Bögen, in welche die drei Kreise einander zerschneiden, durch Winkel im Parallelogramm AB ausdrücken. So sind z. B. die Bögen HLD, DFE, HDE der Kreise A, B, C einander ähnlich und messen einen Winkel $= 2.ADB$. Die Bögen DaI, Ebi der Kreise A, B sind sich ähnlich und messen einen Winkel $= 2.DAB$; die Bögen IAH, IMD der Kreise A, B sind sich ähnlich, indem jeder von ihnen einen Winkel $= 2.DBA$ misst; u. s. w.

des Kreises *B* und der $(x+2p)$ te des Kreises *C* mit *D* immer in gerader Linie.

4) Wir wollen jetzt von *D* nach allen $m - 1$ übrigen Theilpunkten des Kreises *A* gerade Linien ziehen, deren jede, ihrer Grösse und Richtung nach, eine auf *D* wirkende Kraft vorstelle. Auf gleiche Art werde durch die Theilpunkte des Kreises *B* ein zweites, und durch die Theilpunkte des Kreises *C* ein drittes System auf *D* wirkender Kräfte bestimmt. Wegen der Gleichung $Da + Db = Dc$, wenn *a*, *b*, *c* drei zusammengehörige Theilpunkte sind (nr. 3.), ist nun von den diesen Theilpunkten zugehörigen drei Kräften die Kraft in dem Kreise *C* gleichwirkend mit den beiden andern; und da die Theilpunkte aller drei Kreise zu dreien so zusammen genommen werden können, dass sie mit *D* in einer Geraden liegen, so wird die Resultante der Kräfte des Kreises *A*, verbunden mit der Resultante der Kräfte des Kreises *B*, gleichwirkend mit der Resultante der Kräfte des Kreises *C* seyn.

5) Betrachten wir aber die Kräfte eines der drei Kreise besonders, so sind je zwei, die von *D* aus nach gleichweit von *D* zu beiden Seiten liegenden Theilpunkten des Kreises gerichtet sind, einander gleich und haben daher eine Resultante, welche den durch *D* gelegten Durchmesser zur Richtung hat. Dieselbe Richtung muss folglich auch der Resultante aller Kräfte des Kreises zukommen.

Offenbar sind ferner je zwei Kreise mit ihren Sehnen, oder den dadurch vorgestellten Kräften, einander ähnliche Figuren, von denen die eine in die andere übergeht, wenn man jede Kraft des einen Kreises in dem Verhältnisse ändert, in welchem sein Durchmesser zu dem Durchmesser des andern steht. In demselben

Verhältnisse werden folglich auch die Resultanten aller Kräfte des einen und des andern Kreises zu einander seyn, so dass die Durchmesser DA , DB , DC nicht allein die Richtungen, sondern auch die Grössenverhältnisse der Resultanten der drei Systeme von Kräften angeben.

6) Zu Folge des in nr. 4. Erwiesenen ist daher von drei durch DA , DB , DC vorgestellten Kräften die letztere gleichwirkend mit den beiden erstern, und somit das Parallelogramm der Kräfte für den Fall dargethan, wenn die Diagonale DC mit den Seiten Winkel macht, deren jeder zu 360° in einem rationalen Verhältnisse steht. Die Ergänzung des Beweises für den Fall irrationaler Verhältnisse bleibe dem Leser selbst überlassen.

Von den Axen der grössten Momente.

§. 81.

Ist für einen Punkt M die Linie des grössten Moments, welche durch ihre Richtung und Länge die dem Punkte zugehörige Axe des grössten Moments und den Werth desselben angiebt (§. 77.), gegeben, so lässt sich das Moment für jede andere durch M gehende Axe sogleich finden. Wie diese Linie des grössten Moments bestimmt werden kann, ist in §. 78. gezeigt worden, und wir wollen nun untersuchen, nach welchem Gesetze die Richtung und Länge dieser Linie von einem Punkte zum andern veränderlich ist.

Sey demnach ein System von Kräften auf eine einfache, durch einen willkürlich angenommenen Punkt M gehende Kraft v und auf ein Paar w reducirt worden. Eben so habe man das System auf eine durch

einen beliebigen andern Punkt M' gehende Kraft v' und auf ein Paar w' zurückgebracht.

Da hiernach v und w gleichwirkend mit v' und w' sind, so sind es auch v , w und $-w'$ mit v' . Die Kraft v muss daher in der Ebene des aus w und $-w'$ resultirenden Paares liegen, oder doch dieser Ebene parallel seyn (§. 57.), und muss mit $-v'$ ein diesem resultirenden Paare das Gleichgewicht haltendes Paar bilden (§. 15. 1.). Die Kräfte v und v' sind folglich einander gleich und haben gleichlaufende Richtungen, und die Ebene dieser Richtungen wird von den Ebenen der Paare w und w' in parallelen Geraden geschnitten (§. 51.). — Ist M' ein Punkt in der Richtung von v selbst, so fallen v und v' zusammen, und haben daher gleiche Wirkung; mithin sind dann auch die Paare w w' einander gleichwirkend, d. i., sie liegen in parallelen Ebenen und haben gleiche Momente.

Dass die Kraft v von einem Punkte M zum andern ihre Richtung und Intensität unverändert behält, geht übrigens auch daraus hervor, dass v die Resultante der an einen Punkt M parallel mit ihren Richtungen getragenen Kräfte des Systems ist.

Weil w mit w' und v' , $-v$ gleichwirkend ist, so ist, wenn wir sämmtliche drei Paare auf eine Ebene projiciren, das Moment der Projection von w gleich dem Momente der Projectionen von w' und v' , $-v$ (§. 54. 5.). Um ein bestimmteres Bild zu haben, wollen wir uns die gemeinschaftliche Richtung von v und v' vertical aufwärts gehend denken. Lassen wir nun die Projectionsebene horizontal seyn und projiciren darauf rechtwinklig, so ist die Projection des Paares v' , $-v$ null und die Momente der Projectionen von w und w' sind einander gleich.

Das Moment der Projection des Paares w auf eine horizontale Ebene ist demnach für alle Punkte M von gleicher Grösse, und mithin das Moment von w selbst am kleinsten für diejenigen Punkte M , für welche sich die Ebene von w horizontal findet.

Um diese Punkte, wenn es anders solche giebt, zu bestimmen, wollen wir die Paare w und w' auf die Ebene des Paares v' , — v rechtwinklig projiciren. Nach obigem Satze von den Projectionen ist alsdann das Moment der Projection von w gleich der Summe der Momente des in der Projectionsebene liegenden Paares v' , — v selbst und der Projection von w' . In dem Falle nun, wenn w' horizontal, also auf der Projectionsebene rechtwinklig ist, ist das Moment seiner Projection null, folglich haben dann die Projection des Paares w und das Paar v' , — v gleiche Momente; und weil immer die Durchschnittslinien der Ebenen von w und w' mit der Ebene von $(v', -v)$ einander parallel sind, jetzt aber w' horizontal seyn soll, so sind jetzt die beiden Durchschnitte von w und w' mit der verticalen Ebene von $(v', -v)$ horizontal. Dies giebt zur Bestimmung der Punkte M , für welche w' horizontal ist, folgende Regel:

Man lege durch die irgend einem Punkte M zugehörige Kraft v eine (verticale) Ebene so, dass sie die Ebene des demselben Punkte zukommenden Paares w in einer horizontalen schneidet. Auf diese Ebene projicire man das Paar w rechtwinklig und ergänze die Kraft — v durch eine zweite v' in derselben Ebene zu einem Paare, welches mit der Projection von w einerlei Moment hat. Jedes Paar w' , das einem Punkte M in der Richtung von v' zukommt, wird alsdann eine horizontale Lage haben.

Sind umgekehrt die sich rechtwinklig schneidenden

v' und w' gegeben, und legt man durch irgend einen Punkt M eine der v' parallele und gleiche Kraft v , so ist das Paar, welches aus der Zusammensetzung der Paare w' und v' , $-v$ entspringt, das dem M zugehörige. Die Ebene desselben schneidet die Ebene von $(v', -v)$ in einer Horizontalen, sein Moment aber und sein Winkel mit dem horizontalen w' ist um so grösser, je grösser das Moment des Paares $v', -v$ ist, je weiter also M von v' entfernt liegt.

§. 82.

Dieses vorausgeschickt ist nun die Bestimmung der jedem Punkte M zugehörigen Linie des grössten Moments ganz leicht. Diese Linie steht nach §. 77. auf dem w des Punktes rechtwinklig und ist dem Momente dieses Paares proportional; sie ist daher dasselbe, was wir in §. 53. die Axe des Paares nannten. Da nun die Resultante der Axen zweier zusammenzusetzenden Paare die Axe des resultirenden Paares ist (ebendas.), und da jetzt das Paar w aus der Zusammensetzung der Paare w' und $v', -v$ hervorgeht, so ist die Linie des grössten Moments für den Punkt M die Resultante der Linie des grössten Moments für einen in v' liegenden Punkt M' und der nach demselben Massstabe bestimmten Axe des Paares $v', -v$. Die hierzu nöthige Construction ist folgende.

Sey, wie im Vorigen, v' auf w' rechtwinklig; AB (Fig. 26.) stelle die Richtung von v' vor; wir wollen sie die Hauptlinie des Systems nennen und sie uns wiederum vertical denken. Für jeden ihrer Punkte M ist die Linie des grössten Moments eine von M' aus auf sie getragene, dem Momente von w' proportionale, Länge $M's'$.

Ist nun M irgend ein anderer Punkt des Raums, und M' der Punkt der Hauptlinie, welcher mit M in einer Horizontalen liegt, so ist MAB die Ebene des Paares $v', -v$; $M'M$ seine Breite, also $M'M \cdot v$ sein Moment und ein auf der Ebene MAB errichtetes, diesem Momente proportionales Perpendikel MO die Axe des Paares. Die Linie des grössten Moments für M wird hiernach gefunden als die Resultante Ms von MO und einer an M der $M's'$ gleich und parallel getragenen MQ , oder, was dasselbe ist, als die Hypotenuse Ms des bei O rechtwinkligen Dreiecks MOs , in welchem Os gleich und parallel der $M's'$ ist; sie ist daher rechtwinklig auf dem von M auf die Hauptlinie gefällten Perpendikel $M'M$, und ihre Grösse, so wie ihr Winkel mit der Hauptlinie, sind bei einem und demselben Systeme bloss von der Grösse dieses Perpendikels abhängig.

Weil MO proportional mit $M'M \cdot v$ ist, so ist das Verhältniss $MO : M'M$, oder die Tangente des Winkels $MM'O$ proportional mit v , also constant, weil v von einem Punkte M zum andern seine Grösse nicht ändert. Für alle Punkte, welche in einer und derselben durch M' gehenden Horizontalen $M'C$ enthalten sind, liegen daher die zugehörigen O in einer gleichfalls durch M' gehenden Horizontalen $M'D$. Vertical über O in einer Höhe $= M's'$, also in einer durch s' mit $M'D$ gezogenen Parallele $s'E$ liegt der Punkt s . Lässt man daher die Punkte M und s in $M'C$ und $s'E$ sich so fortbewegen, dass die Gerade Ms auf $M'C$ immer normal steht, so ist Ms jederzeit die Linie des grössten Moments für M , und man sieht hieraus deutlich, wie bei wachsender Entfernung des M von M' die Grösse dieser Linie und ihr Winkel mit der Hauptlinie immer zunehmen.

Setzt man den Winkel OsM , oder den Winkel von Ms mit der Hauptlinie, $= \omega$ und den constanten Winkel $CM'D = \alpha$, so ist

$$Ms = \sqrt{(M's'^2 + MM^2 \tan^2 \alpha)} \text{ und } \tan \omega = \frac{M'M}{M's'} \tan \alpha,$$

woraus dasselbe erkannt wird.

Zum Schlusse wollen wir die erhaltenen Resultate in folgenden Sätzen zusammenstellen.

1) Für alle Punkte, welche in der Fläche eines um die Hauptlinie, als Axe, beschriebenen Cylinders liegen, sind die Linien der grössten Momente einander gleich, berühren insgesamt diesen Cylinder und machen mit der Hauptlinie gleiche Winkel. Für alle Punkte, die in einer und derselben Seitenlinie des Cylinders liegen, sind daher diese Linien einander parallel und in einer Ebene enthalten, die den Cylinder in der Seitenlinie berührt. Für alle Punkte dagegen, welche in dem Durchschnitte der Cylinderfläche mit einer auf der Hauptlinie normalen Ebene, also in einem Kreise, liegen, bilden die zugehörigen Linien die Fläche eines durch Umdrehung um die Hauptlinie erzeugten hyperbolischen Hyperboloids.

2) Je weiter ein Punkt von der Hauptlinie absteht, je grösser also der Durchmesser des Cylinders ist, desto grösser ist die zugehörige Linie des grössten Moments und desto mehr nähert sich der Winkel dieser Linie mit der Hauptlinie einem rechten, indem die Tangente desselben dem Abstände des Punktes von der Hauptlinie proportional ist. Für Punkte, die in einer auf der Hauptlinie normalen Geraden liegen, bilden die zugehörigen Linien die Fläche eines hyperbolischen Paraboloids. Denn indem M in

$M'C$ fortbewegt wird, bleibt M_s einer auf $M'C$ normalen Fläche parallel und trifft fortwährend die zwei Geraden $M'C$ und $s'E$.

3) Für jeden Punkt in der Hauptlinie füllt die Linie des grössten Moments in die Hauptlinie selbst und ist kleiner, als für jeden andern Punkt, also ein Minimum Maximorum.

§. 83.

Yen
Aufgabe. Die Gleichung für die Hauptlinie und den Werth des kleinsten unter den grössten Momenten zu finden.

Auflösung. Das Coordinatensystem sey ein rechtwinkliges. Beziehen wir nun das System der Kräfte zuerst auf eine Axe t , welche durch den Punkt (f, g, h) geht, eine Länge $= 1$ hat und mit den Axen der x, y, z die Winkel φ, χ, ψ macht, so sind die Projectionen der Axe auf die Coordinatenachsen, $= \cos \varphi, \cos \chi, \cos \psi$, und es ergiebt sich das Moment für diese Axe, wenn wir in dem in §. 65. erhaltenen Ausdrucke des Moments, für F, G, H diese Cosinus substituiren. Bezeichnen wir daher dieses Moment mit T und setzen zur Abkürzung:

$$(1) \dots L - gC + hB = L, \quad M - hA + fC = M, \\ N - fB + gA = N,$$

so wird

$$(2) \dots T = L \cos \varphi + M \cos \chi + N \cos \psi.$$

Setzen wir ferner

$$\sqrt{(L^2 + M^2 + N^2)} = T', \text{ und}$$

$$(3) \dots \frac{L}{T'} = \cos \varphi', \quad \frac{M}{T'} = \cos \chi', \quad \frac{N}{T'} = \cos \psi',$$

so ist (4) $\dots \cos \varphi'^2 + \cos \chi'^2 + \cos \psi'^2 = 1$ und

$$T = T' (\cos \varphi \cos \varphi' + \cos \chi \cos \chi' + \cos \psi \cos \psi').$$

Wegen (4) lassen sich aber φ' , χ' , ψ' als drei Winkel betrachten, die eine Gerade — sie heisse t' und werde gleichfalls durch (f, g, h) gelegt — mit den Axen der x, y, z bildet; und es ist mithin

$$\cos \varphi \cos \varphi' + \cos \chi \cos \chi' + \cos \psi \cos \psi' = \cos t \cdot t',$$

folglich ... $T = T' \cos t \cdot t'$.

Nehmen wir daher bloss φ, χ, ψ veränderlich, so ist der grösste Werth von $T, = T'$ und dafür der Winkel $t \cdot t = 0$, d. h. unter allen durch den Punkt (f, g, h) gehenden Axen t ist t' diejenige, welcher das grösste Moment zukommt; die Winkel dieser Axe mit den Coordinatenaxen sind $= \varphi', \chi', \psi'$, und das grösste Moment selbst $= T'$.

Unter den verschiedenen grössten Momenten, welche den verschiedenen Punkten (f, g, h) zugehören, fallen aber die Axen t' aller derjenigen Momente in die Hauptlinie, deren Axen mit v , d. i. mit der Resultante von A, B, C , parallel sind, für welche sich also

$$\cos \varphi' : \cos \chi' : \cos \psi' = A : B : C$$

verhalten. Hiermit folgt aus (3) und (1):

$$\frac{L - gC + hB}{A} = \frac{M - hA + fC}{B} = \frac{N - fB + gA}{C},$$

welches daher zwei Gleichungen zwischen den Coordinaten f, g, h aller derjenigen Punkte sind, welche nebst ihren Axen in die Hauptlinie fallen; es sind folglich die zwei Gleichungen der Hauptlinie selbst.

Setzen wir zuletzt noch in dem allgemeinen Ausdrucke des Moments (2) die durch φ, χ, ψ bestimmte Richtung der Axe parallel mit der Hauptlinie, also mit der Resultante von A, B, C , so werden

$$\cos \varphi = \frac{A}{D}, \quad \cos \chi = \frac{B}{D}, \quad \cos \psi = \frac{C}{D},$$

wo $D = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, und damit

$$T = \frac{AL + BM + CN}{D} \\ = \frac{AL + BM + CN}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \text{ wegen (1),}$$

also unabhängig von f, g, h . Alle mit der Hauptlinie parallele Axen haben daher gleiche Momente, deren gemeinschaftlicher Werth der eben gefundene ist. Dieser Werth kommt daher auch dem Momente einer in die Hauptlinie selbst fallenden Axe zu, d. i. dem kleinsten unter den grössten Momenten.

Zusatz. Dass alle mit der Hauptlinie parallele Axen gleiche Momente haben, wird auch leicht aus Fig. 26. erkannt. Denn da Ms die Linie des grössten Moments für den Punkt M , und MQS ein rechter Winkel ist, so ist die der $M's'$ gleiche und parallele Linie MQ dem Momente der in sie fallenden Axe proportional (§. 76.).

Von den Axen, deren Momente null sind.

§. 84.

Noch eine besondere Aufmerksamkeit verdienen diejenigen Axen, in Bezug auf welche das Moment des Systems null ist. Sie ergeben sich unmittelbar aus dem Vorigen, da es unter allen durch einen Punkt M gehenden Axen alle diejenigen und keine andern sind, welche auf der dem Punkte zukommenden Linie des grössten Moments rechtwinklig sind, also in der Ebene des dem M zugehörigen und durch ihn selbst gelegten Paares w liegen. In dieser Beziehung wollen wir die

durch M gelegte Ebene von w die Nullebene des Punktes M nennen.

So wie es nun für jeden Punkt eine Nullebene giebt, so lässt sich auch umgekehrt in jeder Ebene ein Punkt angeben, in Bezug auf welchen sie die Nullebene ist, also ein Punkt, den man den Nullpunkt der Ebene nenne, und welcher die Eigenschaft besitzt, dass von allen in der Ebene enthaltenen Axen bloss für diejenigen, welche den Punkt selbst treffen, das Moment des Systems null ist.

Denn werde die Ebene von der vertikalen Hauptlinie AB (Fig. 26.) im Punkte M' geschnitten und sey $M'C$ eine in der Ebene durch M' gelegte Horizontale, so liegt darin der Nullpunkt M der Ebene und ist von

M' um einen Abstand $M'M = M's' \frac{\tan \omega}{\tan \alpha}$ entfernt,

wo $M's'$ und α constant sind, und ω den Winkel der Ebene mit dem Horizonte bezeichnet (§. 82.). Ist aber die Ebene mit der Hauptlinie parallel und von ihr um einen Abstand $= x$ entfernt, berührt sie also einen um die Hauptlinie mit einem Halbmesser $= x$ beschriebenen Cylinder, so liegen in der Ebene die Axen, deren Momente null sind, einander parallel und machen mit der Ebene des Horizonts einen Winkel, dessen Tangente

$= \frac{x \tan \alpha}{M's'}$. Vergl. §. 82. In diesem Falle ist also der

Nullpunkt der Ebene als unendlich entfernt zu betrachten.

Hat man somit den Nullpunkt M einer Ebene gefunden, so kann für eine andere durch M nicht gehende Axe t der Ebene das Moment nicht $= 0$ seyn. Denn ist erstens die Ebene nicht parallel mit der Hauptlinie, so lässt sich unter der hier allein geltenden Voraussetzung, dass die zwei Kräfte, worauf das System re-

ducirbar ist, nicht in einer Ebene liegen, das System auf ein in der Ebene enthaltenes Paar w und auf eine durch M gehende mit der Hauptlinie parallele Kraft v reduciren, und für die Axe t sind nur die Momente der zwei Kräfte, welche das Paar ausmachen, nicht aber das Moment von v , also auch nicht das Moment des Systems, null.

Ist zweitens die Ebene mit der Hauptlinie parallel, und ist p eine der in ihr liegenden parallelen Axen, für welche das Moment des Systems null ist, t irgend eine andere in der Ebene enthaltene Axe, welche p im Punkte N schneidet, so ziehe man durch N (in der Ebene) eine Parallele v mit der Hauptlinie und beschreibe in der Ebene einen Kreis, welcher p in N berühre. Alsdann verhalten sich die Momente in Bezug auf die Axen v und t , wie die in den Kreis fallenden Theile von v und t (§. 76.). Da nun das Moment für v gleich dem kleinsten unter den grössten Momenten ist (§. 83. Zus.), und dieses unter der gemachten Voraussetzung nicht null seyn kann, so kann es auch nicht das Moment für die Axe t seyn.

§. 85.

Die Eigenschaften von Nullebenen und Nullpunkten lassen sich auch ganz leicht aus den oben (§. 69.) analytisch bewiesenen Sätzen herleiten, dass von der einen der beiden Kräfte, worauf ein System reducirbar ist, die Richtung im Allgemeinen nach Willkühr genommen werden kann, und dass, wenn die eine der beiden Kräfte durch einen gegebenen Punkt geht, die andere in einer damit gegebenen, den Punkt enthaltenden Ebene liegt, und umgekehrt. Von diesen Sätzen will

ich jetzt noch einen andern auf ganz einfache Betrachtungen sich gründenden Beweis mittheilen, und hierauf den Zusammenhang zwischen ihnen und den Eigenschaften der Nullebenen und Nullpunkte kürzlich angeben.

1) Hat man zwei Kräfte P und P_1 (Fig. 27.), deren Richtungen nicht in einer Ebene liegen, und eine Richtung q , welche mit der einen P der beiden erstern in einer Ebene a liegt, und daher, im Allgemeinen wenigstens, mit P einen Punkt A gemein hat, so ist es im Allgemeinen immer möglich, die zwei Kräfte in zwei mit ihnen gleichwirkende Q und Q_1 zu verwandeln, von denen die eine Q die Richtung q hat.

Denn da P und P_1 mit Q und Q_1 gleichwirkend seyn sollen, so müssen es auch P und $-Q$ mit Q_1 und $-P_1$ seyn. P und $-Q$ haben aber, als zwei Kräfte, deren Richtungen in einer Ebene a liegen und im Punkte A derselben sich schneiden, eine durch den Schnidepunkt A gehende und in der Ebene a enthaltene Resultante R . Diese Resultante R muss daher auch den Kräften Q_1 und $-P_1$ zukommen, es muss folglich auch Q_1 die Resultante von P_1 und R seyn; und da zwei nicht in einer Ebene enthaltene Kräfte nicht auf eine einzige Kraft reducirt werden können (§. 57.), so müssen P_1 und R , so wie auch Q_1 , in einer Ebene a_1 enthalten seyn und sich darin, im Allgemeinen wenigstens, in einem Punkte A_1 schneiden. Hiernach ist die Richtung von R bestimmt als der Durchschnitt der Ebene a , in welcher P und Q wirken, mit der durch P_1 und den Schnidepunkt A von P und Q zu legenden Ebene a_1 . Da also von den drei Kräften P , $-Q$, $-R$, welche im Gleichgewichte sind, die Richtungen, und von der ersten derselben, P , die

Intensität, gegeben sind, so lassen sich auch von Q und R die Intensitäten finden (§. 28. α .), und hieraus die Richtung und Intensität von Q_1 , als von einer Kraft, welche mit $-R$ und $-P_1$ im Gleichgewichte ist.

2) Wir folgern hieraus weiter: Ist von der Richtung der Kraft Q nur der Punkt A gegeben, in welchem sie die P schneiden soll, so kennt man von der Kraft Q_1 nur die Ebene α_1 , in welcher sie mit P_1 liegen muss; es ist nämlich die durch A und P_1 zu legenden α_1 . Ist aber für Q nur die Ebene α gegeben, in welcher sie mit P liegen soll, so ist von Q_1 nur der Punkt A_1 bekannt, in welchem sie die P_1 schneiden muss; es ist nämlich der Durchschnitt der Ebene α mit P_1 .

Wenn demnach von irgend zwei Kräften, die mit zwei nicht in einer Ebene liegenden Kräften P und P_1 gleiche Wirkung haben, die eine der P in einem Punkte A begegnet, so liegt die andere in der durch A und P_1 bestimmten Ebene; und wenn die eine mit P in einer Ebene α liegt, so geht die andere durch den Schnaidepunkt von α mit P_1 .

3) Auch in dem Falle, wenn die gegebene Richtung von Q nicht, wie vorhin, mit der Richtung von P in einer Ebene liegt, lassen sich im Allgemeinen die Intensität von Q und die Richtung und Intensität von Q_1 so bestimmen, dass Q und Q_1 mit P und P_1 gleichwirkend werden. Denn zieht man eine Gerade s , welche die Richtung von P und Q zugleich schneidet, so kann man nach dem Vorigen P und P_1 zuerst in zwei Kräfte S und S_1 verwandeln, von denen S die Richtung s hat, und kann sodann auf dieselbe Weise aus S und S_1 die mit ihnen, und folglich auch mit P und P_1 , gleichwirkenden Kräfte Q und Q_1 herleiten.

4) Ist daher ein System von Kräften auf zwei nicht in einer Ebene liegende Kräfte reducirbar, so kann die Richtung der einen von beiden im Allgemeinen jede beliebige seyn. Um so mehr kann folglich das noch Unbestimmtere verlangt werden, dass die eine der beiden Kräfte durch einen beliebig gegebenen Punkt gehe, oder in einer beliebig gegebenen Ebene liege. Der Punkt A und die Ebene a in dem Satze nr. 2. können daher ebenfalls ganz nach Willkühr bestimmt werden, welches uns zu dem Schlusse führt:

In Bezug auf ein System von Kräften, welches auf zwei nicht in einer Ebene liegende Kräfte P und P_1 reducirt werden kann, entspricht jedem Punkte A eine durch ihn gehende Ebene a_1 , und jeder Ebene a ein in ihr liegender Punkt A_1 , dergestalt, dass, wenn die eine der beiden Kräfte, P , dem Punkte A begegnet, oder in der Ebene a wirkt, die andere P_1 in der entsprechenden Ebene a_1 enthalten ist, oder den entsprechenden Punkt A_1 trifft.

5) Geht aber die Kraft P durch den Punkt A , und liegt folglich die Kraft P_1 in der dem A entsprechenden Ebene a_1 , so schneidet jede durch A gehende und in a_1 enthaltene Axe sowohl die Richtung von P , als die von P_1 , und es ist daher in Bezug auf jede dieser Axen das Moment von P und P_1 , folglich auch das Moment des Systems, null.

Die einem Punkte A entsprechende Ebene a_1 ist mithin die Nullebene des Punktes, und eben so der einer Ebene a entsprechende Punkt A_1 der Nullpunkt der Ebene.

Zusätzc. α . Ist a_1 die dem Punkte A entsprechende Ebene, so ist auch A der der Ebene a_1 entspre-

chende Punkt, indem, wenn die eine Kraft P_1 in a_1 wirkt, die andere P dem A begegnen muss; und eben so erhellet, dass wenn der Ebene a der Punkt A_1 entspricht, auch umgekehrt letzterer die erstere zur entsprechenden hat.

b. Ist A ein Punkt der Ebene a , und wird die willkürliche Richtung der Kraft P so genommen, dass sie zugleich durch A geht und in a liegt, so muss die Kraft P_1 wegen des erstern in der Ebene a_1 liegen und wegen des letztern durch den Punkt A_1 gehen; mithin muss A_1 ein Punkt der Ebene a_1 seyn, d. h.:

Liegt ein Punkt in einer Ebene, so geht die dem Punkte entsprechende Ebene durch den der Ebene entsprechenden Punkt.

§. 86.

Diese gegenseitigen Beziehungen zwischen Punkten und Ebenen sind eine besondere Art der sogenannten dualen oder reciproken Verhältnisse, welche in der neuern Zeit so mannigfach untersucht worden sind, und wobei zwei Systeme von Punkten und Ebenen in einer solchen Beziehung zu einander betrachtet werden, dass jedem Punkte des einen Systems eine Ebene des andern und jeder Ebene des einen ein Punkt des andern entspricht. Im Gegenwärtigen kommt noch die besondere Bedingung hinzu, dass jeder Punkt in der ihm entsprechenden Ebene selbst liegt, und — was eine Folge davon ist, — jede Ebene den ihr entsprechenden Punkt selbst enthält. Hierdurch werden nicht nur die bei der Dualität im Allgemeinen Statt habenden Beziehungen in etwas modificirt, sondern es treten noch Relationen von eigenthümlicher Beschaffenheit hinzu. Folgende

Sätze geben eine kurze Uebersicht dieser merkwürdigen Beziehungen^{*)}.

Zuerst folgt unmittelbar aus dem Vorhergehenden:

1. Zu jedem Punkte gehört eine ihn enthaltende Nullebene und zu jeder Ebene ein in ihr liegender Nullpunkt.
2. Ist von einer Ebene und einem in ihr liegenden Punkte erstere die Nullebene des letztern, so ist auch letzterer der Nullpunkt der erstern, und umgekehrt.
3. Liegt ein Punkt in einer Ebene, so geht die Nullebene des Punktes durch den Nullpunkt der Ebene; oder was dasselbe ist:
- 3°. Geht eine Ebene durch einen Punkt, so liegt der Nullpunkt der Ebene in der Nullebene des Punktes.

Aus 3. fließt weiter: Liegen mehrere Punkte in einer Ebene, so gehen die Nullebenen der Punkte durch den Nullpunkt der Ebene; d. h.

4. Von mehreren in einer Ebene liegenden Punkten schneiden sich die Nullebenen in einem Punkte, welcher in ersterer Ebene liegt und ihr Nullpunkt ist.

Eben so folgt aus 3°:

- 4°. Von mehreren sich in einem Punkte schneidenden Ebenen liegen die Nullpunkte in einer Ebene, welche erstern Punkt enthält und seine Nullebene ist.

Aus 4. schliessen wir ferner: Von mehreren in zwei Ebenen zugleich, d. i. in einer Geraden, liegenden

*) Ausführlicher habe ich diesen Gegenstand in einer Abhandlung „Ueber eine besondere Art dualer Verhältnisse zwischen Figuren im Raume“ in Crelle's Journal X. Band, pag. 317. untersucht.

Punkten gehen die Nullebenen sowohl durch den Nullpunkt der einen, als durch den der andern jener zwei Ebenen, d. i. sie schneiden sich in der diese zwei Nullpunkte verbindenden Geraden; also:

5. Die Nullebenen mehrerer in einer Geraden liegenden Punkte schneiden sich wiederum in einer Geraden.

Aehnlicherwise ergibt sich aus 4°:

- 5°. Die Nullpunkte mehrerer sich in einer Geraden schneidenden Ebenen liegen wiederum in einer Geraden.

Nach 5. und 5°. entspricht also jeder Geraden eine zweite Gerade, so dass jeder Punkt der einen zu seiner Nullebene die durch ihn und durch die andere Gerade gelegte Ebene hat, und dass von jeder durch die eine Gerade gelegten Ebene der Nullpunkt derjenige ist, in welchem sie von der andern Geraden geschnitten wird. Je zwei solchergestalt sich entsprechende Gerade sind zugleich die Richtungen zweier Kräfte, auf welche sich das System reduciren lässt. Denn sind a und b die Nullebenen der Punkte A und B , und geht die eine der beiden Kräfte durch A oder B , so muss die andere resp. in a oder b liegen; geht folglich die eine durch A und B zugleich, so muss die andere den Durchschnitt von a mit b , d. i. die der AB entsprechende Gerade zur Richtung haben.

In dem besonderen Falle, wenn B in a liegt, geht nach 3. die Nullebene b von B durch den Nullpunkt A von a , d. i. a und b schneiden sich in AB selbst. Jede in einer Ebene a durch den Nullpunkt A derselben gezogene Gerade, oder, was dasselbe ist, jede durch einen Punkt A gelegte Gerade, welche zugleich in der Nullebene a des Punktes liegt, also jede Axe,

in Bezug auf welche das Moment des Systems null ist, hat folglich sich selbst zur entsprechenden, und es ist daher unmöglich, das System auf zwei Kräfte zu reduciren, von denen die eine eine solche Gerade zur Richtung hat.

Um diese Sätze durch ein Beispiel zu erläutern, wollen wir von den drei Coordinatenebenen, worauf das System der Kräfte in dem Vorigen bezogen worden, die Nullpunkte, und von dem Anfangspunkte der Coordinaten O die Nullebene zu bestimmen suchen.

Für eine in der Ebene der xy liegende Axe sind h und H null (§. 62.), folglich das Moment des Systems (§. 65.) in Bezug auf eine solche Axe

$$=rF(L-gC)+rG(M+fC).$$

Man sieht nun sogleich, dass, wenn man f und g durch die Gleichungen und $M+fC=0$ und $L-gC=0$ bestimmt, dieses Moment, unabhängig von F und G , also für jede in der Ebene der xy enthaltene Axe, welche durch den Punkt (f, g) geht, null wird. Dieser Punkt, d. i.

$$\left(-\frac{M}{C}, \frac{L}{C}, 0\right)$$

ist daher der Nullpunkt der Ebene der xy , und eben so finden sich

$$\left(0, -\frac{N}{A}, \frac{M}{A}\right) \text{ und } \left(\frac{N}{B}, 0, -\frac{L}{B}\right)$$

als die Nullpunkte der Ebenen der yz und zx .

Ferner ist für eine durch O gelegte Axe, wenn wir den Anfangspunkt (f, g, h) derselben mit O zusammen fallen lassen und daher $f, g, h=0$ setzen, das Moment

$$=rFG+rGM+rHN.$$

Da nun jetzt (F, G, H) der Endpunkt der Axe ist, so liegt derselbe, und mithin die von O ausgehende Axe selbst, wenn in Bezug auf sie das Moment null ist, in einer Ebene, deren Gleichung

$$Lx + My + Nz = 0,$$

welches also die Gleichung der Nullebene von O ist.

In dieser Ebene müssen nach 4° die Nullpunkte der in O sich schneidenden Coordinatenebenen liegen. Auch finden wir dieses durch unsere Rechnung bestätigt, wenn wir in der Gleichung für erstere Ebene die vorhin für die Nullpunkte erhaltenen Coordinaten substituiren.

§. 87.

Weitere Folgerungen ergeben sich, wenn wir Systeme von Ebenen betrachten, die entweder mit einer und derselben Geraden, oder mit einander parallel sind.

Drei oder mehrere sich in Parallelen schneidende Ebenen können als solche angesehen werden, die sich in einem unendlich entfernten Punkte schneiden, und wir schliessen daher nach 4°:

6. Die Nullpunkte mehrerer sich in Parallelen schneidenden Ebenen liegen in einer mit den parallelen Durchschnittslinien ebenfalls parallelen Ebene, deren Nullpunkt unendlich entfernt nach der durch die Parallelen bestimmten Richtung zu liegt.

Da ferner parallele Ebenen als solche betrachtet werden können, die sich in einer unendlich entfernt liegenden Geraden schneiden, so müssen nach 5°:

7. die Nullpunkte mehrerer paralleler Ebenen in einer Geraden liegen.

Seyen $a, a', a'', \dots$ mehrere unter sich parallele Ebenen, und eben so bilden $b, b', b'', \dots$ ein zweites

System unter sich, aber nicht auch mit den erstern parallelen Ebenen. Von $a, a', \dots$ seyen $A, A', \dots$ und von $b, b', \dots$ seyen $B, B', \dots$ die Nullpunkte, so liegen nach 7. $A, A', \dots$ in einer Geraden α , und $B, B', \dots$ in einer zweiten Geraden β . Da ferner die Ebenen $a, a', \dots$ von den Ebenen $b, b', \dots$ in einander parallelen Geraden geschnitten werden, so liegen nach 6. sämtliche Nullpunkte $A, A', \dots B, B', \dots$, also auch die Geraden α und β , in einer Ebene. Zugleich aber können α und β keinen Punkt mit einander gemein haben. Denn fiel z. B. A mit B zusammen, so müssten auch die Nullebenen a und b dieser Punkte zusammenfallen, welches gegen die Voraussetzung ist. Mithin sind α und β mit einander parallel, und wir können den Satz aufstellen:

Hat man mehrere Systeme paralleler Ebenen, so sind die Geraden, welche sich in jedem Systeme durch die Nullpunkte der Ebenen legen lassen, insgesamt mit einander parallel.

Diese parallele Richtung der Geraden ist, wie man leicht sieht, dieselbe, welche wir im Obigen bei jedem Systeme von Kräften als einzig in ihrer Art fanden und uns vertical dachten. Wir wollen auch gegenwärtig diese Richtung vertical annehmen und hiernach den vorigen Satz so aussprechen:

8. Die Nullpunkte eines Systems paralleler Ebenen liegen in einer verticalen Linie.

Hieraus folgt leicht der umgekehrte Satz:

9. Von zwei Punkten A und B , die in einer Verticallinie liegen, sind die Nullebenen a und b parallel.

Denn wären sie es nicht, so lege man durch B eine Ebene b' parallel mit a . Der Nullpunkt von b' müsste dann derjenige seyn, in welchem b' von einer

durch A gelegten Verticale getroffen wird, folglich B selbst. Mithin hätte B zwei verschiedene Nullebenen, welches nicht möglich ist.

10. Jede verticale Ebene c hat einen unendlich entfernten Nullpunkt, und jeder unendlich entfernte Punkt C eine verticale Nullebene.

Denn seyen A und B zwei Punkte in c , welche in einer verticalen Linie liegen. Die Nullebenen a und b von A und B sind folglich (9.) einander parallel, und da nach 3. in a sowohl, als in b , der Nullpunkt von c liegt, so muss dieser unendlich entfernt seyn.

Um den zweiten Theil des Satzes zu beweisen, lege man durch C eine Ebene a , und eine mit a parallele Ebene b , die, weil C unendlich entfernt seyn soll, ebenfalls durch C gehend zu betrachten ist. Nach 3^e. geht aber die Nullebene von C sowohl durch den Nullpunkt A von a , als durch den Nullpunkt B von b , also durch die Verticallinie AB (8.) und ist daher selbst vertical.

Da die Nullebenen zweier Punkte, die in einer Verticale liegen, einander parallel sind (9.), also sich erst in einer unendlich entfernten Geraden schneiden, so ist die einer Verticalen entsprechende Gerade unendlich entfernt. Von den zwei Kräften, worauf sich das System zurückführen lässt, kann daher keine eine verticale (mit der Hauptlinie parallele) Richtung haben, eben so wenig, als sie mit einer Axe, für welche das Moment des Systems null ist, zusammen fallen kann (vor. §.).

§. 88.

Zusätze. Sey $ABCD$ eine dreiseitige Pyramide, und von ihren Seitenflächen BCD , CDA , DAB ,

ABC seyen die Nullpunkte resp. F, G, H, I , so ist $FGHI$ eine in $ABCD$ eingeschriebene Pyramide, zugleich aber auch eine um letztere umschriebene. Denn die Ebene durch die Nullpunkte G, H, I der sich in A schneidenden Ebenen CDA, DAB, ABC ist nach §. 86. 4°. die Nullebene von A , und auf gleiche Art sind HIF, IFG, FGH die Nullebenen von B, C, D . Die zwei Pyramiden stehen daher in einer solchen gegenseitigen Beziehung, dass die Ecken der einen die Nullpunkte der Flächen der andern, und die Flächen der einen die Nullebenen der Ecken der andern sind. Dabei entspricht jeder Kante der einen Pyramide eine Kante in der andern; z. B. der Kante AB , in welcher sich die Flächen DAB und ABC schneiden, die Kante HI , welche die Nullpunkte dieser Flächen verbindet*).

Dieselbe Betrachtung lässt sich auch auf jedes andere Polyeder anwenden. Sey S die Ecke eines Polyeders, $a, b, c, \dots$ die in dieser Ecke in der Ordnung, wie sie an einander grenzen, (a an b , b an c , u. s. w.) zusammenstossenden Seitenflächen, und $A, B, C, \dots$ die Nullpunkte dieser Flächen, die daher in einer Ebene, in der Nullebene von S , liegen. $ABC \dots$ ist mithin ein ebenes Vieleck, und auf gleiche Art wird bei jeder andern Ecke durch die Nullpunkte der um die Ecke herumliegenden Flächen ein ebenes Vieleck bestimmt. Von allen Seiten aller dieser Vielecke gehört aber jede Seite, z. B. AB , zweien Vielecken zugleich an. Denn wenn die Kante des Polyeders, in welcher sich die Flächen a und b schneiden, und von welcher

*) Ueber die Construction zweier solchen Pyramiden siehe einen Aufsatz des Verf. in Crelle's Journal, III. Band, pag. 273. Vergl. auch Steiner Systemat. Entwickel, pag. 247.

S der eine Endpunkt ist, zum andern Endpunkte die Ecke T hat, so gehört die Seite AB des Winkels $ABC...$ auch zu dem Vielecke, welches sich in der Nullebene von T aus den Nullpunkten der in T zusammenstossenden Flächen bildet. Alle diese Vielecke hängen daher als Seitenflächen eines zweiten Polyeders zusammen, welches in das erstere zugleich um- und eingeschrieben ist; eingeschrieben, weil seine Ecken $A, B, ...$ die Nullpunkte der Flächen $a, b, ...$ des erstern sind, — umschrieben, weil seine Flächen $ABC...,$ u. s. w. die Ecken $S,$ u. s. w. des erstern zu Nullpunkten haben. Jedes von ihnen hat daher eben so viel Ecken und Flächen, als das andere resp. Flächen und Ecken hat; nach dem bekannten Euler'schen Satze, dass die Kantenzahl der um zwei Einheiten verminderten Summe der Ecken- und Flächenzahlen gleich ist, haben folglich beide Polyeder gleich viel Kanten, was auch schon daraus fließt, dass jeder Kante des einen eine Kante des andern entspricht, z. B. der Kante des ersten, in welcher sich die Flächen a und b schneiden, die Kante AB des zweiten.

Seyen, um diese Betrachtungen noch durch ein Beispiel deutlicher zu machen, a und a', b und b', c und c' die sechs sich zu zweien gegenüberliegenden Vierecke eines Hexaëders, in weiterem Sinne genommen, so sind die Nullpunkte A, A', B, B', C, C' dieser Flächen die Ecken eines in und um das Hexaëder beschriebenen Oktaëders, welche sich eben so paarweise, A und $A',$ u. s. w. gegenüberstehen. So wie das Hexaëder 6 Flächen und 8 Ecken hat, kommen dem Oktaëder 8 Flächen und 6 Ecken zu. Die Zahl der Kanten ist aber bei jedem der beiden Körper $= 12$.

Ist das Hexaëder ein Parallelepipedum, und daher

a' mit a , b' mit b , c' mit c parallel, so sind die drei Diagonalen AA' , BB' , CC' des Oktaëders einander parallel (§. 87. 8.); die Ebene $AA'BB'$ ist parallel mit den vier Kanten des Parallelepipedums, in denen sich die Flächen a , a' , b , b' schneiden; u. s. w. (§. 87. 6.). Allerdings macht es einige Schwierigkeit, sich ein Oktaëder, dessen Diagonalen einander parallel sind, vorzustellen. Es gehört zu den bis jetzt noch nicht betrachteten Polyedern, deren Flächen sich innerhalb der sie begrenzenden Kanten schneiden, zu Polyedern, welche den in §. 45. 3. gedachten Vielecken analog sind, deren Perimeter, bevor sie in sich zurückkehren, sich gleichfalls ein- oder mehrere Male begegnen.

Relationen zwischen Momenten, deren Axen beliebige Richtungen haben.

§. 89.

Die Momente eines Systems in Bezug auf mehrere sich in einem Punkte M schneidende Axen sind, wie wir in §. 76. gesehen haben, den Theilen der Axen proportional, welche in letztern von einer gewissen durch M zu beschreibenden Kugelfläche abgeschnitten werden. Sind daher von drei sich in einem Punkte M schneidenden und nicht in einer Ebene liegenden Axen MA , MB , MC die Momente α , β , γ gegeben, so lässt sich daraus das Moment δ für irgend eine vierte durch M gehende Axe MD durch folgende einfache Construction finden: Man nehme in den Axen MA , MB , MC die Abschnitte Ma , Mb , Mc proportional mit α , β , γ und beschreibe durch die vier Punkte M , a , b , c eine Kugelfläche. Schneidet nun diese die Axe MD in d , so wird Md dem gesuchten δ proportional seyn.

Eben so lässt sich aus den Momenten Ma , Mb

zweier sich schneidenden Axen MA , MB das Moment Md für jede dritte durch M gehende und mit erstern beiden in einer Ebene liegende Axe MD finden, indem man durch M , a , b einen Kreis beschreibt, welcher MD in d schneiden wird.

§. 90.

Schneiden sich die drei Axen, deren Momente gegeben sind, unter rechten Winkeln, so lässt sich die Aufgabe sehr einfach durch Rechnung lösen. — Sey unter allen durch M gehenden Axen MS die Axe des grössten Moments, und daher, wenn diese von der Kugelfläche in s geschnitten wird, Ms ein Durchmesser der Kugel. Alsdann ist $Ma = Ms \cdot \cos SMA$, oder, wenn wir das grösste Moment $= \sigma$ setzen und uns eine zweite Kugel denken, die um M als Mittelpunkt mit der gemeinschaftlichen Länge der Axen, als Halbmesser, beschrieben ist, und auf deren Oberfläche daher die Punkte S , A , B , C , D liegen:

$$a = \sigma \cos AS, \text{ und eben so}$$

$$\beta = \sigma \cos BS, \gamma = \sigma \cos CS, \delta = \sigma \cos DS.$$

Schneiden sich nun, wie angenommen worden, die drei Axen MA , MB , MC unter rechten Winkeln, und sind daher die Seiten und Winkel des sphärischen Dreiecks ABC insgesamt $= 90^\circ$, so hat man:

$$\cos DS = \cos AD \cos AS + \cos BD \cos BS \\ + \cos CD \cos CS.$$

Hierin für $\cos DS$, $\cos AS$, ... die ihnen nach vorigen Formeln proportionalen Werthe δ , a , ... substituirt, erhält man:

$$(A) \dots \delta = a \cos AD + \beta \cos BD + \gamma \cos CD.$$

Aus den Momenten für drei sich unter rechten Winkeln in einem Punkte schneidenden Axen findet

sich demnach das Moment für jede vierte durch denselben Punkt gehende Axe, wenn man erstere drei Momente resp. mit den Cosinussen der Winkel multiplicirt, welche von den Axen dieser Momente mit der Axe des vierten gebildet werden, und diese Producte addirt.

Uebrigens ist unter derselben Voraussetzung, dass $BC = CA = AB = 90^\circ$:

$$\cos AS^2 + \cos BS^2 + \cos CS^2 = 1$$

und daher

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \sigma^2,$$

$$\cos AS = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}, \cos BS = \text{u. s. w.}$$

Formeln, mittelst deren man aus den Momenten für drei sich rechtwinklig in einem Punkte schneidende Axen, von der durch denselben Punkt gehenden Axe, welche das grösste Moment hat, dieses Moment selbst und die Lage der Axe finden kann.

§. 91.

Die im vorigen §. erhaltene Relation zwischen vier Momenten, von deren vier Axen sich drei unter rechten Winkeln treffen, ist zuerst von Euler gegeben worden^o). Es ist aber nicht schwer, eine eben so einfache Formel für den allgemeineren Fall herzuleiten, wenn die vier Axen willkürliche Winkel mit einander machen.

1) Von einer durch die Gerade PQ vorgestellten Kraft ist das Moment in Bezug auf die Axe $A_1 B_1$ die Pyramide $A_1 B_1 PQ$ (§. 59. Zus.). Seyen nun A und B zwei beliebige andere Punkte in $A_1 B_1$, so verhalten

^o) Nova Acta Petrop. Tom. VII. vom Jahre 1793.

sich die Pyramiden $A_1 B_1 PQ : ABPQ$ wie die Dreiecke $A_1 B_1 P : ABP$, und diese wie die Geraden $A_1 B_1 : AB$; und es ist daher, wenn wir die Axenlänge $A_1 B_1$ zur Einheit des Maasses nehmen:

$$ABPQ = AB \cdot A_1 B_1 PQ,$$

wo die Linie AB positiv oder negativ zu nehmen ist, je nachdem sie mit der in sie fallenden Axe $A_1 B_1$ einerlei oder entgegengesetzte Richtung hat.

2) Auf gleiche Art ist, wenn wir noch andere Kräfte $P'Q', P''Q'', \dots$ auf die Axe $A_1 B_1$ beziehen:

$$ABP'Q' = AB \cdot A_1 B_1 P'Q',$$

u. s. w. Addiren wir alle diese Gleichungen, so kommt mit Anwendung des Summationszeichens Σ , und wenn wir das Moment des von den Kräften $PQ, P'Q', \dots$ gebildeten Systems in Bezug auf eine Axe, welche in der Geraden AB liegt, aber nicht AB selbst, sondern die Linieneinheit ($= A_1 B_1$) zur Länge hat, mit $[AB]$ bezeichnen:

$$\Sigma ABPQ = AB \Sigma A_1 B_1 PQ = AB [AB].$$

3) Seyen MA_1, MB_1, MC_1, MD_1 vier sich in einem Punkte M schneidende Axen, von denen die drei ersten wenigstens nicht in einer Ebene liegen. Man nehme in MD_1 beliebig einen Punkt D und construire um MD als Diagonale ein Parallelepipedum, dessen in M zusammenstossende Kanten in die Axen MA_1, MB_1, MC_1 fallen. Seyen resp. A, B, C die andern Endpunkte dieser Kanten, so ist, wenn PQ wiederum eine Kraft bezeichnet:

$$MDPQ = MAPQ + MBPQ + MCPQ \quad (\S. 63. 3.)$$

folglich auch bei einem Systeme von mehreren Kräften $PQ, P'Q', \dots$ u. s. w.:

$$\Sigma MDPQ = \Sigma MAPQ + \Sigma MBPQ + \Sigma MCPQ$$

folglich nach nr. 2.:

$$(B) \dots MD[MD] = MA[MA] + MB[MB] + MC[MC].$$

Wenn demnach für die drei Axen MA_1 , MB_1 , MC_1 die Momente $[MA]$, $[MB]$, $[MC]$ gegeben sind, und das Moment $[MD]$ für die Axe MD_1 gesucht wird, so construire man das Parallelepipedum $MABCD$, als wodurch sich die Verhältnisse zwischen $MA, \dots MD$ ergeben, und man erhält damit nach letzterer Gleichung folgenden das Gesuchte.

§. 92.

Zusätze. *a.* Macht man in den Axen $MA_1, \dots MD_1$ die Linien $Ma, \dots Md$ den Momenten der Axen resp. proportional, so liegen a, b, c, d mit M in der Oberfläche einer Kugel (§. 76.), und man bekommt damit den geometrischen Satz:

Hat man eine Kugel und ein Parallelepipedum, dessen eine Ecke M in der Fläche der erstern liegt, und sind a, b, c, d die Punkte, in denen die Kugelfläche resp. von den in M zusammenstossenden Kanten MA, MB, MC und der Diagonale MD des Parallelepipeds geschnitten wird, so ist:

$$MD \cdot Md = MA \cdot Ma + MB \cdot Mb + MC \cdot Mc.$$

b. Schneiden sich die drei Axen MA_1, MB_1, MC_1 unter rechten Winkeln, so verhalten sich

$$\begin{aligned} & MA : MB : MC : MD \\ &= \cos A_1 MD_1 : \cos B_1 MD_1 : \cos C_1 MD_1 : 1 \end{aligned}$$

und man kommt durch Substitution dieser Verhältnisswerthe in die allgemeine Gleichung (B) auf die specielle Gleichung (A) in §. 90. wieder zurück.

§. 93.

So sehr auch die Gleichung (*B*) die Eulersche (*A*) an Allgemeinheit übertrifft, so ist sie doch nur als ein specieller Fall einer weit allgemeineren Relation anzusehen, die sich auf ganz ähnliche Art wie (*B*) entwickeln lässt.

Man habe, wie vorhin, ein beliebiges System von Kräften $PQ, P'Q', P''Q'', \dots$, welches *S* heisse. Seyen ferner $AA', BB', CC', \dots$ die Kräfte eines zweiten Systems *T*, welche einander das Gleichgewicht halten. Alsdann ist wegen dieses Gleichgewichts von *T*, wenn man *T* nach und nach auf alle Kräfte $PQ, P'Q', \dots$ des Systems *S*, als auf Axen, bezieht (§. 58.):

$$AA'PQ + BB'PQ + CC'PQ + \dots = 0$$

$$AAP'Q + BB'P'Q + CC'P'Q + \dots = 0$$

u. s. w.; und wenn man alle diese Gleichungen summirt;

$$\Sigma AA'PQ + \Sigma BB'PQ + \Sigma CC'PQ + \dots = 0;$$

folglich nach §. 91. 2.:

$$AA'[AA'] + BB'[BB'] + CC'[CC'] + \dots = 0,$$

wo $[AA'], [BB'], \dots$ die Momente des Systems *S* für Axen bezeichnen, welche an Länge einander gleich sind und resp. in den Geraden $AA', BB', \dots$ liegen, und wo man, wie schon erinnert, die Coefficienten $AA', BB', \dots$ dieser Momente positiv oder negativ zu nehmen hat, je nachdem die Richtungen dieser Linien mit denen der in sie fallenden Axen übereinstimmen, oder nicht.

Bezieht man demnach ein System S von Kräften auf mehrere (einander gleiche) Axen, und kann man nach der Richtung einer jeden dieser Axen eine Kraft wirken lassen von der Grösse, dass alle diese

neuen Kräfte einander das Gleichgewicht halten, so ist die Summe der Momente von S , jedes Moment vorher mit einem Coefficienten multiplicirt, welcher der, der Axe des Moments zugehörigen, Kraft proportional ist, $= 0$.

Auf gleiche Art findet sich, wenn AA' die Resultante von BB' , CC' , ... ist:

$$AA'[AA'] = BB'[BB'] + CC'[CC'] + \dots$$

Auch fliesst dieses schon aus der vorhergehenden Formel. Denn alsdann sind AA' , BB' , ... mit einander im Gleichgewichte und daher

$$AA'[AA'] + BB'[BB'] + \dots = 0.$$

Es ist aber $AA' = -AA'$ und $[AA'] = [AA']$, indem der eine Ausdruck, so gut wie der andere, das Moment des Systems S in Bezug auf eine Axe vorstellt, welche in der durch die zwei Punkte A und A' gezogenen Geraden enthalten ist; folglich u. s. w.

§. 94.

Beispiele. 1) Hat man vier sich in einem Punkte schneidende Axen, so kann man immer ein Parallelepipedum construiren, von welchem drei in dem Punkte zusammenstossende Kanten und die durch denselben Punkt gehende Diagonale in die vier Axen zu liegen kommen. Von vier Kräften aber, welche ihrer Grösse und Richtung nach durch diese drei Kanten und die Diagonale vorgestellt werden, ist die Kraft in der Diagonale die Resultante der drei andern. Hiermit das vorige Theorem in Verbindung gebracht, kommen wir auf den Satz in §. 91. zurück, der daher von dem vorigen nur ein besonderer Fall ist.

2) Ist $ABCD$ ein Parallelogramm, so sind die

Kräfte AB und AD mit den Kräften BC und DC gleichwirkend, und daher:

$$AB[AB] + AD[AD] = BC[BC] + DC[DC].$$

3) Construiert man zu einem ebenen Vierecke $ABCD$ (Fig. 13.) ein zweites $abcd$, dessen Seiten $ab, bc, \dots$ mit den gleichnamigen $AB, BC, \dots$ des erstern, und dessen Diagonalen ac, bd mit den ungleichnamigen BD, AC des erstern parallel sind, so sind vier Kräfte, welche in den vier Seiten der einen Vierecks wirken, und deren Intensitäten sich wie die entsprechenden Seiten des andern verhalten, im Gleichgewichte (§. 29.); folglich:

$$ab[AB] + bc[BC] + cd[CD] + da[DA] = 0, \text{ so wie } AB[ab] + BC[bc] + CD[cd] + DA[da] = 0,$$

zwei Gleichungen, deren jede die Relation zwischen den Momenten für irgend vier in einer Ebene gelegene Axen darstellt.

§. 95.

Folgerungen. α . Ist in dem zweiten Beispiele des vorigen §. D der Nullpunkt der Ebene des Parallelogramms $ABCD$, so ist $[AD] = 0$, $[DC] = 0$, und die Formel wird:

$$AB[AB] = BC[BC];$$

folglich verhalten sich die Momente $[AB]$ und $[BC]$, wie BC und AB , d. i. wie die Abstände der Linien AB und BC von D ; also:

Von je zwei in einer Ebene liegenden Axen sind die Momente den Abständen der Axen vom Nullpunkte der Ebene proportional, so dass, wenn man um den Nullpunkt, als Mittelpunkt, Kreise in der Ebene

beschreibt, alle Axen, welche einen und denselben Kreis berühren, gleiche Momente haben, und dass für Axen, welche Tangenten verschiedener Kreise sind, die Momente sich wie die Halbmesser der Kreise verhalten.

b. Sind daher AA' , BB' (Fig. 28.) zwei parallele Axen, und trägt man auf sie Längen Aa , Bb , welche den Momenten für diese Axen proportional sind, so muss in der Geraden DD' , welche durch den Schnittpunkt D der Geraden AB und ab parallel mit den Axen gezogen wird, der Nullpunkt der Ebene der Axen liegen. Denn die Abstände der AA' und BB' von irgend einem Punkte dieser, und nur dieser, Geraden DD' verhalten sich wie Aa und Bb . In Bezug auf DD' , als Axe, ist daher das Moment null, und für je zwei mit DD' parallele und in einer Ebene gelegene Axen sind die Momente den Abständen der Axen von DD' proportional. Für eine dritte mit AA' und BB' parallele und mit ihnen in derselben Ebene liegende Axe CC' , die von AB in C und von ab in c geschnitten wird, ist folglich das Moment proportional mit Cc .

c. Auf ähnliche Art, wie hiernach aus den Momenten für zwei parallele Axen das Moment für jede dritte mit ihnen parallele und in derselben Ebene enthaltene Axe gefunden werden kann, lässt sich auch aus den Momenten Aa , Bb , Cc (Fig. 29.) für drei parallele und nicht in einer Ebene liegende Axen das Moment für jede vierte mit ihnen parallele Axe p überhaupt bestimmen. — Eine durch Aa und Bb gelegte Ebene und eine durch Cc und p gelegte mögen sich in der Geraden q schneiden, die mit den vier Axen $Aa, \dots p$ parallel seyn wird. Sind daher F und f die Durchschnitte von q mit AB und ab , so ist Ff das Moment

für q , und eben so, wenn p von CF und cf resp. in G und g getroffen wird, Gg das Moment für p . Es liegt aber G mit A, B, C , und g mit a, b, c in einer Ebene, welches folgende noch kürzere Regel giebt: Man lege durch A, B, C eine Ebene und eine zweite durch a, b, c , und wenn diese Ebenen die vierte Axe p resp. in G und g schneiden, so ist Gg das für p gesuchte Moment.

Sind daher von drei parallelen aber nicht in einer Ebene liegenden Axen die Momente einander gleich, so ist auch das Moment jeder vierten mit ihnen parallelen Axe von derselben Grösse, indem dann jene zwei Ebenen eine parallele Lage haben. Sind aber die drei Momente ungleich, so schneiden sich die zwei Ebenen, und wenn man durch ihre Durchschnittslinie eine Ebene α parallel mit den Axen $Aa, \dots$ legt, so ist von jeder mit $Aa, \dots$ parallelen Axe das Moment dem Abstände der Axe von α proportional. Alle Axen, die parallel mit $Aa, \dots$ und in einer und derselben mit α parallelen Ebene enthalten sind, haben daher einander gleiche Momente. Jede in α selbst fallende und mit $Aa, \dots$ parallele Axe hat ein Moment $= 0$. Der Nullpunkt der Ebene α ist daher unendlich entfernt und liegt nach der durch die Parallelen $Aa, \dots$ bestimmten Richtung. Die Ebene α ist folglich mit der Hauptlinie des Systems parallel (§. 87. 10.).

§. 96.

Zusatz. Aus dem Satze des vorigen §., dass die Momente für Axen, die in einer Ebene liegen, sich wie die Abstände der Axen vom Nullpunkte der Ebene verhalten, fliesst eine leichte Methode, um aus den Momenten dreier Axen in einer Ebene, die nicht

alle drei mit einander parallel sind, oder sich in einem Punkte schneiden, den Nullpunkt der Ebene und damit das Moment für jede vierte Axe der Ebene zu finden. Sey ABC (Fig. 30.) das von den Richtungen der drei Axen gebildete Dreieck, (von welchem die eine Ecke auch unendlich entfernt seyn kann,) und die Momente ~~die~~ dieser nach BC , CA , AB gerichteten Axen seyen f , g , h . Man construire ein zweites Dreieck $A'B'C'$, dessen Seiten $B'C'$, ... mit den gleichnamigen BC , ... des erstern parallel laufen und von BC , ... sich in Abständen befinden, die den Momenten f , g , h proportional sind. Da hiernach die Abstände des Punktes A' von CA und AB sich wie g zu h verhalten, und in demselben Verhältnisse die Abstände jedes andern Punktes der Linie AA' , und nur dieser, von CA und AB sind, so muss jenem Satze zufolge der Nullpunkt der Ebene in AA' , und aus ähnlichem Grunde auch in BB' und CC' , liegen. Die drei Geraden AA' , BB' , CC' schneiden sich daher in einem Punkte N , im Nullpunkte der Ebene, und das Moment für jede vierte Axe der Ebene verhält sich z. B. zu f , wie der Abstand der vierten Axe von N zum Abstände der Axe BC von N .

Beiläufig folgt hieraus der auch sonst schon bekannte geometrische Satz, dass bei zwei ähnlichen und ähnlich liegenden Dreiecken die drei Geraden, welche die sich entsprechenden Ecken verbinden, sich in einem Punkte schneiden.

— Die Aufgabe, aus den Momenten dreier in einer Ebene liegenden Axen das Moment für irgend eine vierte Axe der Ebene zu finden, kann auch mittelst einer der beiden Formeln in §. 94. 3. gelöst werden, wie von selbst einleuchtet.

Noch eine Lösung der Aufgabe geht aus der in §. 89. zu Ende bemerkten Construction hervor. Liegen nämlich die Axen, deren Momente gegeben sind, in den Seiten des Dreiecks ABC , und ist D ein beliebiger Punkt der vierten Axe, so erhält man mittelst jener Construction aus den Momenten der Axen in AB und AC das Moment der Axe in AD , aus den Momenten der Axen in AC und BC das Moment der Axe in CD , und aus den Momenten der Axen in AD und CD das Moment der vierten Axe selbst. — Hiermit ergeben sich zugleich einige geometrische Sätze, bei deren Entwicklung ich mich aber nicht aufhalten will.

§. 97.

Die im Vorhergehenden erhaltenen Relationen zwischen den Momenten eines Systems in Bezug auf mehrere Axen fanden nur dann statt, wenn Kräfte bestimmt werden konnten, welche, nach den Axen wirkend, einander das Gleichgewicht hielten. Die Relationen selbst waren von linearer Form, und jene Kräfte traten darin als Coefficienten der Momente auf. Es entsteht nun die Frage, ob nicht auch dann, wenn ein solches Gleichgewicht nicht möglich ist, Relationen, wenn auch von anderer, als linearer Form, zwischen den Momenten sich angeben lassen.

Um dieses zu untersuchen, wollen wir mehrere Axen in solcher Anzahl $= n$, und in solcher Lage gegen einander voraussetzen, dass zwischen den auf sie bezogenen Momenten irgend eines Systems von Kräften stets eine Gleichung, und nur eine, statt findet. Für ein System S seyen diese n Momente $= M, M', M'', \dots$; für ein beliebiges andere S' seyen sie $= M + N, M' + N', M'' + N'', \dots$. Nach der Natur der Momente

werden alsdann für ein drittes System, welches aus den Kräften von S' und den direct entgegengesetzten von S besteht, die Momente in Bezug auf dieselben n Axen, $= N, N', N'', \dots$ seyn. Besteht daher die gesuchte Gleichung das einmal zwischen $M, M', \dots$ und das andremal zwischen $M + N, M' + N', \dots$, so muss sie auch bestehen zwischen $N, N', \dots$, d. i. wenn man für $M, M', \dots$ die Incremente setzt, welche diese Grössen der Gleichung zufolge haben können. Wie die Analysis lehrt, ist dieses aber nur dann möglich, wenn die Gleichung von der linearen Form $pM + p'M' + p''M'' + \dots = 0$ ist, wo $p, p', p'', \dots$ Zahlen vorstellen, die von einem Systeme S zum andern in constanten Verhältnissen zu einander stehen^{o)}).

Um diese constanten Verhältnisse zu bestimmen, setze man, das System S bestehe aus einer einzigen

^{o)} In der That, sind z. B. drei Veränderliche x, y, z durch eine Gleichung $z = f(x, y)$ mit einander verbunden, so ist die allgemeine Gleichung zwischen ihren Incrementsen $\Delta x, \Delta y, \Delta z$:

$$\Delta z = p \Delta x + q \Delta y + \frac{1}{2} r \Delta x^2 + s \Delta x \Delta y + \frac{1}{2} t \Delta y^2 + \dots$$

wo $p, q, r, s, t, \dots$ die aus der Gleichung $z = f(x, y)$ zu bestimmenden Differentialquotienten

$$\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}, \frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^2z}{dx dy}, \frac{d^2z}{dy^2}, \dots$$

bezeichnen. Soll nun zwischen den Increments dieselbe Gleichung, wie zwischen x, y, z , statt finden, soll also Δz bloss von Δx und Δy , nicht aber von x und y abhängen, so müssen auch in jener allgemeinen Gleichung der Incremente die Coefficienten $p, q, r, s, t, \dots$ unabhängig von x und y , folglich constant seyn. Sind aber p und q constant, so sind alle folgenden $r, s, t, \dots$ null. Hiernach ist die Gleichung zwischen den Incrementsen:

$$\Delta z = p \Delta x + q \Delta y,$$

und damit die Gleichung zwischen x, y, z selbst:

$$z = px + qy,$$

wo p und q constant sind.

Kraft. Alsdann sind $M, M', \dots$ die (sechsfachen) Pyramiden, welche diese eine Kraft S zur gemeinschaftlichen Kante und die der Längeneinheit gleichen n Axen zu gegenüberstehenden Kanten haben. Die Producte $pM, p'M', \dots$ sind folglich Pyramiden, die man erhält, wenn man in den vorigen die mit den Axen zusammenfallenden Kanten resp. $=p, p', \dots$, statt $=1$, nimmt; folglich auch die Momente von Kräften $p, p', \dots$, welche in den n Axen wirken, in Bezug auf eine in der Richtung von S liegende Axe. Da nun die Summe dieser Momente für jede Lage von S null seyn soll, so müssen die Kräfte $p, p', \dots$ einander das Gleichgewicht halten.

Sind demnach mehrere Axen in solcher Anzahl $=n$ und in solcher Lage gegen einander vorhanden, dass die Momente $M, M', \dots M^{(n-2)}$ für $n-1$ derselben nach der Beschaffenheit des Systems, welches auf sie bezogen wird, alle möglichen Werthe haben können, das Moment $M^{(n-1)}$ für die n te Axe aber durch jene $n-1$ Momente bestimmt wird, so ist die deshalb zwischen den n Momenten statt findende Gleichung von der linearen Form:

$$pM + p'M' + \dots + p^{(n-1)} M^{(n-1)} = 0,$$

und Kräfte, welche die Richtungen der n Axen haben und sich wie die Coefficienten $p, p', \dots p^{(n-1)}$ verhalten, sind mit einander im Gleichgewichte.

Sind folglich — so können wir hieraus noch schließen — die Momente für irgend $n-1$ Axen von einander unabhängig, und lassen sich für die $n-1$ Axen und eine n te keine Kräfte angeben, welche, nach ihnen wirkend, einander das Gleichgewicht halten, so ist auch

das Moment für die n te Axe von den Momenten für die $n - 1$ erstern unabhängig.

Dieselbe Folgerung gilt aber auch dann noch, wenn die Momente für die $n - 1$ erstern Axen, oder für einige derselben, von einander abhängig sind, so dass zwischen ihnen eine oder auch etliche Gleichungen (α) statt finden. Denn gäbe es eine Gleichung (β) zwischen dem n ten Momente und den übrigen, so könnte man aus (β) mittelst der Gleichungen (α) so viel der $n - 1$ erstern Momente eliminiren, dass in (β) ausser dem n ten Momente nur solche zurückblieben, welche von einander unabhängig wären, und es müssten dann Kräfte, nach den Axen dieser Momente wirkend, mit der Kraft in der n ten Axe im Gleichgewichte seyn können, welches gegen die Voraussetzung streitet; überhaupt also:

Je nachdem sich für die Richtungen gegebener Axen Kräfte, die im Gleichgewichte mit einander sind, angeben lassen, oder nicht, findet auch zwischen den Momenten eines Systems in Bezug auf diese Axen Abhängigkeit, oder keine, statt.

§. 98.

Nach den Ergebnissen des vorigen §. ist die Untersuchung über die gegenseitige Abhängigkeit zwischen den Momenten eines Systems in Bezug auf gegebene Axen in jedem Falle auf die Beantwortung der Frage zurückgebracht: Welches muss die gegenseitige Lage einer gegebenen Anzahl gerader Linien seyn, wenn Kräfte sollen gefunden werden können, welche, nach diesen Linien wirkend, einander das Gleichgewicht halten?

Wir gehen, um diese schon an sich nicht unin-

interessante Frage zu beantworten, von den sechs allgemeinen Bedingungen des Gleichgewichts aus:

$$(a) \begin{cases} A=0, & B=0, & C=0, \\ L=0, & M=0, & N=0, \end{cases} \quad (\S. 66.)$$

wo, wenn $P, P', \dots$ die Kräfte des Systems und $\varphi, \chi, \psi; \varphi', \chi', \psi'; \dots$ die Winkel bezeichnen, welche die Richtungen von $P; P'; \dots$ mit den drei Axen eines rechtwinkligen Coordinatensystems machen, und wenn $(x, y, z), (x', y', z'), \dots$ beliebige in den Richtungen von $P, P', \dots$ genommene Punkte sind:

$$\begin{aligned} A &= \Sigma P \cos \varphi, & B &= \Sigma P \cos \chi, & C &= \Sigma P \cos \psi \\ L &= \Sigma P (y \cos \psi - z \cos \chi), & M &= \Sigma P (z \cos \varphi - x \cos \psi), \\ N &= \Sigma P (x \cos \chi - y \cos \varphi). \end{aligned}$$

Aus dem Früheren wissen wir, dass zwischen zwei Kräften nur dann Gleichgewicht herrschen kann, wenn ihre Richtungen in eine und dieselbe Gerade fallen (§. 4. I.), und zwischen drei Kräften nur dann, wenn ihre Richtungen in einer und derselben Ebene liegen (vergl. §. 85. 1.) und sich darin entweder in einem Punkte schneiden oder einander parallel sind. Dasselbe muss sich auch aus den Gleichungen (a) folgern lassen. Doch wollen wir uns bei den hierzu nöthigen Rechnungen nicht aufhalten, sondern sogleich zu dem Falle übergehen, wenn

1) das System aus 4 Kräften besteht. Eliminirt man diese 4 Kräfte aus den Gleichungen (a), so bleiben, weil in (a) nur die gegenseitigen Verhältnisse der Kräfte vorkommen, 3 Gleichungen, sie mögen (b) heissen, — zwischen den die Richtungen der vier Kräfte bestimmenden Grössen $x, y, z, \varphi, \chi, \psi, x', \dots \psi'''$ zurück. Diese Gleichungen (b) geben daher für die gegenseitige Lage der 4 Richtungen die Bedingungen an, unter

denen es möglich ist, dass 4 nach diesen Richtungen wirkende Kräfte sich das Gleichgewicht halten können.

Nun wird die Lage einer geraden Linie im Raume im Allgemeinen durch 4 Constanten bestimmt, z. B. die Richtung der Kraft P durch die zwei Coordinaten x, y ihres Durchschnitts mit der Ebene der x, y , und durch die zwei Winkel φ und χ , welche P mit den Axen der x und y macht. Die Lage einer Geraden ist daher als bestimmt anzusehen, wenn zwischen diesen 4 Constanten 4 Gleichungen gegeben sind. Zu einer solchen Gleichung führt unter andern die Bedingung, dass die Gerade eine andere gegebene Linie schneiden soll; zu zwei solchen Gleichungen die Bedingung, dass die Gerade durch einen gegebenen Punkt gehen, oder in einer gegebenen Ebene liegen soll.

Bezeichnen wir daher die Richtungen der vier Kräfte mit a, b, c, d und nehmen a, b, c als willkürlich gegeben an, so haben wir für die Bestimmung der 4 Constanten von d die 3 Gleichungen (b), und wir können daher nach Willkühr noch eine 4te Gleichung hinzusetzen, welche z. B. die Bedingung ausdrückt, dass d eine gegebene Gerade l schneiden soll. Dies führt zu der bestimmten Aufgabe:

I. *Zu drei gegebenen Richtungen a, b, c eine vierte d zu finden, welche eine noch andere gegebene Gerade l schneidet, dergestalt, dass sich vier Kräfte angeben lassen, welche, nach diesen vier Richtungen wirkend, im Gleichgewichte sind.*

2) Bestehe das System aus 5 Kräften. Nach Elimination derselben aus den 6 Gleichungen (a) erhält man zwei Bedingungsgleichungen (b) zwischen ihren Richtungen. Lässt man daher 4 dieser Richtungen gegeben seyn, so muss die 5te den 2 Gleichungen (b)

Genüge leisten, und man kann daher zur vollständigen Bestimmung der 4 Constanten der 5ten Richtung noch zwei beliebige andere Gleichungen zwischen diesen Constanten hinzufügen, wodurch z. B. die Bedingung ausgedrückt wird, dass die 5te Richtung durch einen gegebenen Punkt M gehen, oder in einer gegebenen Ebene μ liegen soll. Hieraus fliesst die bestimmte Aufgabe:

II. *Zu vier gegebenen Richtungen a, b, c, d eine fünfte e zu finden, welche durch einen gegebenen Punkt M geht, oder in einer gegebenen Ebene μ enthalten ist, dergestalt, dass sich nach diesen fünf Richtungen wirkende Kräfte angeben lassen, welche sich das Gleichgewicht halten.*

3) Hat man ein System von 6 Kräften, so geht nach Elimination derselben aus (a) eine einzige Gleichung (b) zwischen den Richtungen hervor. Hier können also 5 Richtungen beliebig gegeben seyn und für die 6te 3 Bedingungen nach Willkühr genommen werden, z. B. dass die 6te drei gegebene Gerade, oder einen gegebenen Punkt und eine gegebene Gerade treffen soll. Man hat daher die Aufgabe:

III. *Zu fünf gegebenen Richtungen a, b, c, d, e eine sechste f zu finden, welche in einer gegebenen Ebene μ liegt und darin einen gegebenen Punkt M trifft, dergestalt, dass sich nach diesen sechs Richtungen wirkende Kräfte u. s. w.*

4) Ist das System aus 7 Kräften zusammengesetzt, so lassen sich aus (a) je 5 derselben eliminiren, und man bekommt damit das Verhältniss je zweier Kräfte zu einander, ausgedrückt durch die Grössen, welche die Richtungen der 7 Kräfte bestimmen.

Sind daher sieben Richtungen gegeben, so ist es im Allgemeinen immer möglich, Kräfte zu finden,

welche, nach diesen Richtungen wirkend, einander das Gleichgewicht halten. Die Intensität einer dieser Kräfte kann nach Willkühr bestimmt werden.

Aehnlicherweise erhellet, dass im Allgemeinen für 8, 9, etc. gegebene Richtungen sich Kräfte im Gleichgewichte finden lassen, und dass von diesen Kräften resp. 2, 3, etc. ihrer Intensität nach willkürlich genommen werden können.

§. 99.

Zusätze. *a.* Von den drei im vorigen §. gestellten Aufgaben lässt sich die erste, ohne die allgemeinen Formeln (*a*) zu Hülfe zu nehmen, auch folgendergestalt durch Construction lösen. Zuerst sieht man leicht, dass jede Gerade *x*, welche die drei gegebenen Richtungen *a*, *b*, *c*, zugleich schneidet, auch die vierte *d* schneiden muss. Denn heissen *P*, *Q*, *R*, *S* die nach *a*, *b*, *c*, *d* gerichteten Kräfte, so sind in Bezug auf *x*, als Axe, die Momente von *P*, *Q*, *R* einzeln null (§. 60.), mithin muss wegen des Gleichgewichts zwischen *P*, *Q*, *R*, *S* auch das Moment von *S* für *x* null seyn; dieses ist aber nicht anders möglich, als wenn *x* der *d* begegnet.

Halten sich daher vier Kräfte das Gleichgewicht, so trifft jede Gerade, welche die Richtungen dreier der vier Kräfte schneidet, auch die Richtung der vierten.

Es ist aber bekannt, dass, wenn eine Gerade *x* so fortbewegt wird, dass sie drei andere *a*, *b*, *c* fortwährend schneidet, jede Gerade *d*, welche drei verschiedenen Lagen *h*, *i*, *k* der *x* begegnet, auch jede vierte Lage der *x* trifft, dass folglich die durch die Bewegung der *x* erzeugte Fläche, — ein hyperbo-

lisches Hyperboloid, — auch entsteht, wenn d an h, i, k fortgeführt wird.

Man ziehe demnach drei Gerade h, i, k , deren jede die Richtungen a, b, c zugleich schneidet, und die Aufgabe ist darauf zurückgebracht: eine Gerade d so zu legen, dass sie die vier Geraden h, i, k, l zugleich trifft. Dieses ist aber im Allgemeinen entweder auf doppelte Weise, oder gar nicht möglich, je nachdem nämlich das durch die Bewegung von x oder d erzeugte Hyperboloid von der Geraden l entweder in zwei Punkten, oder gar nicht getroffen wird. Im erstern Falle führe man die Gerade d an h, i, k so weit fort, bis sie durch den einen oder andern Schneidepunkt geht, und sie wird dann die verlangte Lage haben. Im letzteren Falle aber ist die Lösung der Aufgabe unmöglich.

Nachdem somit die Richtung von d , wo möglich, bestimmt worden, hat es keine Schwierigkeit, die Verhältnisse zwischen den Kräften P, Q, R, S noch auszumitteln. Man lege die Kräfte parallel mit ihren bekannten Richtungen a, b, c, d an einen und denselben Punkt. Weil dadurch das Gleichgewicht, das zwischen ihnen bestehen soll, nicht gestört wird (§. 67. 2.), so muss jetzt die Resultante von P und Q , welche T heisse, der Resultante von R und S gleich und direct entgegengesetzt seyn. Die Richtung von T ergibt sich hiermit als der Durchschnitt der Ebene, in welcher P und Q liegen, mit der Ebene, in welcher R und S sind. Nach §. 28. *a.* kennt man damit die Verhältnisse zwischen P, Q, T , so wie zwischen $R, S, - T$, folglich auch die Verhältnisse zwischen P, Q, R, S selbst.

b. Ohne bei der Lösung der zweiten und dritten Aufgabe zu verweilen, will ich über diese Aufgaben nur folgende Bemerkungen hinzufügen.

Da sich bei vier gegebenen Richtungen a, b, c, d zu jedem Punkte M eine durch ihn gehende fünfte, so wie zu jeder Ebene μ eine in ihr liegende fünfte Richtung finden lässt, so wird durch alle fünften Richtungen, die zu vier gegebenen gefunden werden können, der ganze Raum erfüllt, jedoch so, dass sich im Allgemeinen keine zwei derselben schneiden, oder, was dasselbe ist, keine zwei in einer Ebene liegen, indem es sonst für den Durchschnittspunkt M zwei durch ihn gehende fünfte Richtungen e und e_1 gäbe, und damit auch jede andere durch M gehende und in der Ebene von e und e_1 liegende Gerade f eine fünfte Richtung seyn könnte. Sind nämlich P, Q, R, S, T Kräfte, die, nach a, b, c, d, e gerichtet, sich das Gleichgewicht halten, und sind die nach a, b, c, d, e_1 gerichteten Kräfte P_1, Q_1, R_1, S_1, T_1 ebenfalls im Gleichgewichte, so würden auch die Kräfte $P+P_1, Q+Q_1, R+R_1, S+S_1$ mit der Resultante der nach e und e_1 gerichteten Kräfte T und T_1 im Gleichgewichte seyn. Weil es aber sowohl bei den erstern fünf Kräften $P, \dots, T$, als bei den fünf letztern $P_1, \dots, T_1$, nur auf ihr gegenseitiges Verhältniss ankommt, so würde man das noch willkührliche Verhältniss von T zu T_1 so bestimmen können, dass die gedachte Resultante irgend eine durch M gehende und in der Ebene von e und e_1 liegende Richtung f hätte.

Haben die vier gegebenen Richtungen eine solche Lage, dass sich zwei Gerade m und n angeben lassen, von deren jeder jede der vier Richtungen geschnitten wird, so ist die einem Punkte M zugehörige fünfte Richtung e diejenige, welche durch M , die m und n zugleich schneidend, gelegt wird. Denn für m und n , als Axen, ist das Moment jeder der nach a, b, c, d wirkenden Kräfte null. Mithin muss auch das Moment

der nach e gerichteten Kraft in Bezug auf m sowohl, als auf n , null seyn.

c. Sind fünf Richtungen a, b, c, d, e gegeben, so sind alle daraus herzuleitenden sechsten Richtungen $f, f_1, f_2, \dots$, welche durch einen und denselben Punkt M gehen, in einer Ebene enthalten. Denn gesetzt, es lägen f, f_1, f_2 nicht in einer Ebene. Da nun drei Kräfte, die nach drei sich in einem Punkte M schneidenden und nicht in einer Ebene liegenden Richtungen wirken, immer in solchen Verhältnissen zu einander genommen werden können, dass ihre durch M gehende Resultante irgend eine beliebige Richtung hat, so würde man nach ähnlichen Schlüssen, wie vorhin, von den fünf Richtungen $a, \dots e$ zu allen durch M gehenden Richtungen überhaupt, also auch zu allen durch M gehenden und in der Ebene μ enthaltenen Richtungen, nicht bloss zu einer derselben, wie es die dritte Aufgabe fordert, gelangen können. Sind aber die sechsten Richtungen, welche den Punkt M treffen, in einer Ebene ν enthalten, so ist die in der Aufgabe geforderte Richtung der Durchschnitt der Ebenen μ und ν .

Auf ähnliche Weise zeigt sich, dass alle aus $a, \dots e$ herzuleitenden sechsten Richtungen, welche in einer und derselben Ebene μ liegen, sich in einem Punkte N dieser Ebene schneiden müssen, und dass die in der Aufgabe verlangte Richtung die Gerade MN ist.

Bei einer solchen Lage der fünf Richtungen endlich, bei welcher sie sämmtlich von einer Geraden m geschnitten werden, wird jede aus ihnen herzuleitende Richtung von m , als von einer der Axen, für welche das Moment der sechs Kräfte null ist, gleichfalls getroffen. Die in diesem Falle gesuchte sechste Richtung

ist daher die von M nach dem Durchschnitte von μ und m gezogene Gerade.

§. 100.

Dieselben Bedingungen, die wir somit für die Richtungen von Kräften gefunden haben, wenn die Kräfte sich das Gleichgewicht sollen halten können, müssen nun auch für die Richtungen von Axen statt finden, wenn zwischen den Momenten irgend eines Systems in Bezug auf diese Axen eine Relation bestehen soll, oder, was dasselbe ist, wenn das Moment für eine dieser Axen aus den Momenten für die übrigen soll hergeleitet werden können. Es findet daher

1. *zwischen den Momenten eines Systems in Bezug auf zwei Axen nur dann eine Relation statt, wenn letztere in einer und derselben Geraden liegen. Die zwei Momente sind dann einander gleich und haben einerlei oder entgegengesetzte Zeichen, nachdem die Axen einerlei oder entgegengesetzte Richtungen haben.*

2. *Zwischen den Momenten in Bezug auf drei Axen, von denen keine zwei in dieselbe Gerade fallen, giebt es nur dann, und dann immer, eine Relation, wenn die drei Axen in einer Ebene liegen und sich darin entweder in einem Punkte schneiden (§. 89.), oder einander parallel sind (§. 95. b.).*

3. *Sind die Momente dreier Axen von einander unabhängig, so kann aus ihnen das Moment für jede vierte bestimmt werden, welche gegen die erstern drei eine solche Lage hat, dass jede Gerade, welche erstere drei schneidet, auch der vierten Axe begegnet.*

Von den Momenten dreier Axen, die in einer Ebene liegen, aber sich nicht in einem Punkte schneiden, ist daher das Moment jeder vierten Axe in der Ebene abhängig (§. 96.), und aus den Momenten dreier Axen, die sich in einem Punkte schneiden, aber nicht in einer Ebene liegen, kann das Moment für jede vierte den Punkt treffende Axe gefunden werden (§. 89. u. §. 91.). Wenn keine von drei Axen die andere schneidet, so ist von ihren Momenten das Moment jeder vierten abhängig, welche zu den drei erstern eine hyperboloidische Lage hat (§. 99. a.).

4. *Bei vier Axen, die rücksichtlich der auf sie bezogenen Momente von einander unabhängig sind, giebt es für jeden Punkt eine durch ihn gehende, und für jede Ebene eine in ihr liegende, Axe, deren Moment aus den Momenten der vier erstern bestimmt werden kann (§. 99. b.).*

Wird jede der vier Axen von denselben zwei Geraden getroffen, so sind von ihnen alle diejenigen, und keine anderen, abhängig, welche gleichfalls von diesen Geraden geschnitten werden.

5. *Bei fünf von einander unabhängigen Axen giebt es für jeden Punkt eine durch ihn gehende Ebene, und für jede Ebene einen in ihr liegenden Punkt dergestalt, dass aus den Momenten für erstere fünf Axen das Moment für jede durch den Punkt gehende und in der Ebene zugleich enthaltene Axe gefunden werden kann (§. 99. c.).*

Werden die fünf Axen von einer und derselben Geraden geschnitten, so sind von ihnen alle diejenigen, und keine anderen, abhängig, welche dieser Geraden ebenfalls beegnen.

6. Aus den Momenten für sechs von einander unabhängige Axen kann das Moment für jede siebente gefunden werden (§. 98. zu Ende).

§. 101.

Zusatz. Da die Gleichung zwischen den von einander abhängigen Momenten von linearer Form ist und darin kein von den Momenten freies Glied vorkommt (§. 97.) so schliessen wir noch, dass wenn von den $n-1$ Momenten, woraus sich ein n tes bestimmen lässt, jedes $=0$ ist, auch das n te $=0$ seyn muss.

Sind also die Momente für 6 von einander unabhängige Axen einzeln $=0$, so ist es auch das Moment jeder 7ten, und es herrscht Gleichgewicht. Eben so, wie bei einem Systeme von Kräften in einer Ebene daraus, dass die Momente des Systems für 3 nicht in einer Geraden liegende Punkte der Ebene $=0$ waren, die Nullität des Moments für jeden andern Punkt der Ebene, und somit das Gleichgewicht des Systems, sich folgern liess (§. 33. A.^o), kann also bei einem System im Raume auf die Nullität aller Momente und somit auf das Gleichgewicht geschlossen werden, wenn man weiss, dass für irgend 6 von einander unabhängige Axen die Momente einzeln $=0$ sind. — Dasselbe ergibt sich auch aus dem allgemeinen Ausdrucke für das Moment eines Systems im Raume (§. 65.):

$F(L - gC + hB) + G(M - hA + fC) + H(N - fB + gA)$.
Denn schon dadurch, dass man denselben für 6 verschiedene Axen, also für 6 verschiedene Systeme zusammengehöriger Werthe von f, g, h, F, G, H , null setzt, gelangt man zu den 6 Bedingungen des Gleichgewichts: $A=0, \dots N=0$.

Wenn ferner in Bezug auf 5 von einander unabhängige Axen die Momente eines nicht im Gleichgewichte

befindlichen Systems einzeln $=0$ sind, so sind es auch die Momente aller andern, von erstern fünf abhängigen Axen, nicht aber das Moment einer Axe, welche von ihnen unabhängig ist, indem sonst nach dem Vorhergehenden das System im Gleichgewichte wäre, gegen die Voraussetzung. Aus 5 von einander unabhängigen Axen, deren Momente $=0$ sind, lassen sich daher alle übrigen Axen, die ein Moment $=0$ haben, finden. — Eben so, wie alle durch einen Punkt gehenden Axen, deren Momente null sind, in einer Ebene liegen (§. 84.), müssen daher auch alle in einem Punkte zusammen-treffenden Axen überhaupt, deren Momente aus den Momenten für 5 von einander unabhängige Axen gefunden werden können, in einer Ebene enthalten seyn, u. s. w. (Vergl. vor. §.)

§. 102.

Die Bedingungen unter denen sich für 4, 5 oder 6 Richtungen Kräfte finden lassen, die mit einander im Gleichgewichte sind, so wie die Verhältnisse zwischen den sich das Gleichgewicht haltenden Kräften selbst, können ausser den im Obigen angezeigten Verfahrungsweisen, noch auf eine andere Art hergeleitet werden, die sich unmittelbar auf den das Gleichgewicht im Raume betreffenden Hauptsatz (§. 58.) gründet und wegen der Einfachheit, mit welcher sie die gesuchten Resultate liefert, eine nähere Anzeige verdient. Es wird hinreichen, wenn ich diese Methode an dem Falle erläutere, wenn das System nur aus vier Kräften besteht.

Seyen daher P, Q, R, S vier Kräfte, zwischen denen Gleichgewicht herrschen soll. Stellt man diese Kräfte durch Linien dar, bezeichnet durch x irgend eine andere Linie von bestimmter Länge, und

drückt durch Px u. s. w. die Pyramiden aus, welche P und x u. s. w. zu gegenüberliegenden Kanten haben, so ist jenem Hauptsatze zufolge:

$$(1) \dots Px + Qx + Rx + Sx = 0,$$

welches auch die Lage und Länge von x seyn mag.

Man nehme nun in den Richtungen von P, Q, R, S Abschnitte a, b, c, d von beliebiger Länge, so ist (§. 91. 1) $Px = \frac{P}{a} \cdot ax$, etc. wo ax die durch die Geraden a und x bestimmte Pyramide vorstellt, und es wird die vorige Gleichung, wenn man noch der Kürze willen

$$(2) \dots \frac{P}{a} = p, \frac{Q}{b} = q, \frac{R}{c} = r, \frac{S}{d} = s$$

$$\text{setzt: } (3) \dots p \cdot ax + q \cdot bx + r \cdot cx + s \cdot dx = 0.$$

Man lasse jetzt die noch unbestimmte Gerade x nach und nach mit a, b, c, d identisch werden, so erhält man, weil die Pyramiden aa, bb null sind, und $ab = ba$, u. s. w. ist (§. 72. zu Ende.):

$$(4) \begin{cases} q \cdot ab + r \cdot ac + s \cdot ad = 0, \\ p \cdot ab + r \cdot bc + s \cdot bd = 0, \\ p \cdot ac + q \cdot bc + s \cdot cd = 0, \\ p \cdot ad + q \cdot bd + r \cdot cd = 0, \end{cases}$$

vier Gleichungen, welche die gesuchten Bedingungen des Gleichgewichts enthalten müssen.

Eliminirt man r und s das einmal aus den drei letzten dieser Gleichungen und das anderemal aus der ersten, dritten und vierten, so kommt:

$$(5) \dots p \cdot (ab \cdot cd - ac \cdot bd - ad \cdot bc) = 2q \cdot bc \cdot bd$$

$$(6) \dots 2p \cdot ac \cdot ad = q \cdot (ab \cdot cd - ac \cdot bd - ad \cdot bc)$$

und wenn hieraus noch das Verhältniss $p:q$ eliminirt wird:

$$(7) \dots (ab \cdot cd - ac \cdot bd - ad \cdot bc)^2 = 4 \cdot ac \cdot bd \cdot ad \cdot bc,$$

welches die Bedingungsgleichung für die gegenseitige Lage der vier Richtungen ist. Nach dem bereits in

§. 99. Gefundenen kann sie daher nichts anderes, als die hyperboloidische Lage dieser Richtungen ausdrücken. Auch lässt sich dies unter der Voraussetzung, dass es zwei Gerade t und t' giebt, deren jede jeder der vier Richtungen zugleich begegnet (ebendas.) folgendergestalt leicht darthun.

Schneide die eine dieser Geraden t die Richtungen, in denen die Abschnitte a, b, c, d liegen, resp. in A, B, C, D (Fig. 31.), und die andere Gerade t' resp. in A', B', C', D' . Man nehme ferner die noch unbestimmt gelassenen Abschnitte a, b, c, d resp. $= AA', BB', CC', DD'$. Hiermit werden die Pyramiden $ab = AA' BB' = -ABA'B', bc = -BCB'C',$ etc. Nach §. 59. Zus. ist aber das Sechsfache der Pyramide $ABA'B' = AB.A'B'. u \sin \varphi$, wo u den kürzesten Abstand der beiden Geraden AB und $A'B'$, oder t und t' , von einander, und φ den Winkel von t' mit t bezeichnet. Die Pyramiden $ab, bc, \dots$ werden daher proportional den Produkten $AB.A'B', BC.B'C', \dots$ Substituirt man diese Verhältnisswerthe in der Gleichung (7) und setzt noch zur Abkürzung:

$$AB.CD=f, AC.BD=g, AD.BC=h, \\ A'B'.C'D'=f', A'C'.B'D'=g', A'D'.B'C'=h,$$

so wird die Gleichung:

$$(ff' - gg' - hh')^2 = 4gg'hh'.$$

Weil aber A, B, C, D in einer Geraden liegen, so ist, wie man leicht findet:

$$(a) \begin{cases} f = g - h, \text{ und aus ähnlichem Grunde} \\ f' = g' - h'. \end{cases}$$

Hiermit reducirt sich die Gleichung auf: $(gh' - g'h)^2 = 0$, also:

$$(b) \dots g:h = g':h', \text{ d. i.}$$

$$(c) \frac{AC}{BC} \cdot \frac{AD}{BD} = \frac{A'C'}{B'C'} \cdot \frac{A'D'}{B'D'},$$

d. h. das Verhältniss zwischen den Verhältnissen, nach welchen die Linie AB das einmal in C und das anderemal in D geschnitten wird, ist dem eben so durch die Punkte A', B', C', D' bestimmten Verhältnisse gleich. Wie bekannt, ist dies aber das charakteristische Merkmal, bei welchem ausser t und t' auch jede dritte Gerade, welche dreien der vier Geraden AA', BB', CC', DD' begegnet, zugleich die vierte trifft*).

Mittelst der Abschnitte $AB, BC, \dots A'B', \dots$ lassen sich auch die Verhältnisse zwischen den Kräften sehr einfach darstellen. Setzt man nämlich noch

$$BC \cdot BD = i, \quad B'C' \cdot B'D' = i',$$

so geht die Gleichung (5) über in:

$$p(ff' - gg' - hh') = 2qii',$$

und wenn man darin für f, f', h aus (a) und (b) ihre Werthe setzt:

$$-pgk' = qii',$$

$$\text{folglich } \dots p:q = -\frac{BC \cdot B'D'}{AC \cdot A'D'},$$

$$\begin{aligned} \text{d. i. } \frac{P}{AA'} : \frac{Q}{BB'} &= -\frac{BC \cdot A'D'}{AC \cdot B'D'} \\ &= -\frac{BD \cdot A'C'}{AD \cdot B'C'} \text{ nach (c)} \end{aligned}$$

woraus durch gehörige Vertauschung der Buchstaben sich die Verhältnisse zwischen je zwei der übrigen Kräfte ergeben.

Zugleich folgt hieraus, dass, wenn die Punkte A, B, C, D in der genannten Ordnung in der Geraden t auf einander folgen, und mithin auch A', B', C', D' die Folge der Punkte in der Geraden t' ist, und wenn

*) Vergl. Steiner Systemat. Entwickel. pag. 192.

P nach der Richtung AA' wirkt, Q die Richtung $-BB'$, d. i. BB , hat. Auf eben die Weise zeigt sich, dass unter denselben Voraussetzungen CC' die Richtung von R und DD' die Richtung von S ist.

§. 103.

Zusätze. *a.* Nicht je drei Kräfte können auf eine einzige Kraft reducirt werden, also auch nicht mit einer einzigen Kraft ins Gleichgewicht gebracht werden. Sind daher von den Richtungen der vier Kräfte P, Q, R, S , welche im Gleichgewichte seyn sollen, irgend drei, z. B. die von P, Q, R , willkürlich gegeben, so können nicht auch P, Q, R selbst nach Belieben genommen werden, und es muss folglich zwischen P, Q, R und den Grössen, welche die gegenseitige Lage der Richtungen dieser drei Kräfte bestimmen, eine Relation statt finden. Diese Relation ergibt sich ebenfalls ganz leicht aus den vier Gleichungen (4). Denn multiplicirt man sie der Reihe nach mit p, q, r, s und zieht hierauf von der Summe der drei ersten die vierte ab, so kommt:

$$p.q.ab + p.r.ac + q.r.bc = 0,$$

und mit Zuziehung von (2):

$$P.Q.\frac{ab}{a.b} + P.R.\frac{ac}{a.c} + Q.R.\frac{bc}{b.c} = 0,$$

welches die gesuchte Gleichung ist. Sie drückt aus, dass die Summe der drei Pyramiden, welche P und Q , P und R , Q und R zu gegenüberliegenden Seiten haben, null ist. Denn so wie $\frac{P}{a}.ab$ die Pyramide darstellt, deren gegenüberliegende Seiten die Linie P , welche in a fällt, und b sind, so drückt $\frac{P}{a}.\frac{Q}{b}.ab$ die Pyramide aus, die zu gegenüberliegenden Seiten zwei Linien hat, welche in a und b fallen, und deren Längen resp. P und Q sind, u. s. w.

6. Auf eine andere Weise, als vorhin geschah, lassen sich die Verhältnisse zwischen den vier Kräften folgendergestalt darstellen. Man multiplicire wiederum die Gleichungen (4) in ihrer Folge mit p, q, r, s und ziehe dann von der Summe je zweier die Summe der beiden andern ab; dies giebt:

$$\begin{aligned} p \cdot q \cdot ab &= r \cdot s \cdot cd, \\ p \cdot r \cdot ac &= q \cdot s \cdot bd, \\ p \cdot s \cdot ad &= q \cdot r \cdot bc^*), \end{aligned}$$

und wenn man je zwei dieser drei Gleichungen mit einander multiplicirt:

$$\begin{aligned} p^2 \cdot ac \cdot ad &= q^2 \cdot bc \cdot bd, \\ p^2 \cdot ab \cdot ad &= r^2 \cdot bc \cdot cd, \\ p^2 \cdot ab \cdot ac &= s^2 \cdot bd \cdot cd, \end{aligned}$$

folglich $p:q:r:s =$

$$\sqrt{bc \cdot bd \cdot cd} : -\sqrt{ac \cdot ad \cdot cd} : \sqrt{ab \cdot ad \cdot bd} : -\sqrt{ab \cdot ac \cdot bc},$$

wo nur noch $\frac{p}{a}, \frac{q}{b}, \dots$ für $p, q, \dots$ zu setzen sind, und wo die Vorzeichen so gewählt sind, wie sie statt finden müssen, wenn a, b, c, d die Ordnung ist, in welcher diese Linien von einer sie alle zugleich schneidenden Geraden getroffen werden.

Substituirt man diese Verhältnisswerthe von $p, q, \dots$ in einer der Gleichungen (4), so ergiebt sich:

$$\sqrt{ab \cdot cd} - \sqrt{ac \cdot bd} + \sqrt{ad \cdot bc} = 0,$$

welches die Bedingungsgleichung für die hyperboloidische Lage der vier Geraden a, b, c, d ist, die, wenn

*) Nach dem vorhin Bemerkten sind diese drei Gleichungen identisch mit: $PQ=RS, PR=QS, PS=QR$, und stellen daher den schon in §. 72. c gefundenen, von Chasles entdeckten, Satz dar. Auch ist die Schlussfolge, durch welche wir gegenwärtig zu diesem Satze gelangt sind, von der dortigen nicht wesentlich verschieden.

sie rational gemacht wird, mit der bereits erhaltenen (7), wie gehörig, zusammenfällt.

c. Durch Substitution derselben Werthe von p, q, r, s in (3) erhält man nachstehenden geometrischen Satz:

Sind a, b, c, d vier Gerade von beliebigen Längen und so gelegen, dass jede andere Gerade, welche drei derselben schneidet, auch die vierte trifft, so findet zwischen den Pyramiden ax, bx, cx, dx , welche eine beliebige fünfte Gerade x zur gemeinschaftlichen Kante und a, b, c, d zu gegenüberliegenden Kanten haben, immer eine lineare Relation statt. Es ist nämlich:

$$\sqrt{bc. bd. cd. ax} - \sqrt{ac. ad. cd. bx} + \sqrt{ab. ad. bd. cx} - \sqrt{ab. ac. bc. dx} = 0.$$

d. Heissen K, L, M, N die Momente irgend eines Systems in Bezug auf vier Axen, welche resp. in die hyperboloidisch gelegenen Linien a, b, c, d fallen, so bekommt man die Relation zwischen diesen Momenten, wenn man in letzterer Gleichung für ax, bx, cx, dx resp. $a.K, b.L, c.M, d.N$ setzt.

Siebentes Kapitel.

Von den Mittelpunkten der Kräfte.

§. 104.

Bei allen bisherigen Untersuchungen über Systeme von Kräften, die auf einen frei beweglichen festen Körper wirken, zogen wir bloss die Intensitäten und die Richtungen der Kräfte in Betracht, liessen aber