

www.e-rara.ch

Cours d'algèbre supérieure

Serret, Joseph Alfred

Paris, 1849

ETH-Bibliothek Zürich

Shelf Mark: Rar 21242

Persistent Link: <https://doi.org/10.3931/e-rara-56914>

Sixième leçon.

www.e-rara.ch

Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien – von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material – from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d'imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L'éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes – des débuts de l'imprimerie jusqu'au 20e siècle.

e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

Nutzungsbedingungen Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titelinformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

Terms of Use This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

Conditions d'utilisation Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

Condizioni di utilizzo Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]

SIXIÈME LEÇON.

Théorie générale de la décomposition des fractions rationnelles en fractions simples. — Théorèmes sur la possibilité du développement. — Méthodes pour former le développement.

Théorie générale de la décomposition des fractions rationnelles en fractions simples.

Nous avons été conduit naturellement, par une question incidente, à nous occuper de la décomposition des fractions rationnelles en fractions simples. Les détails dans lesquels nous sommes entré à ce sujet, suffisent pour l'objet que nous avons en vue; mais la théorie des fractions rationnelles est si importante, et ses applications dans l'analyse mathématique si variées, que je crois utile de la reprendre ici, en lui donnant tous les développements qu'elle comporte.

Nous commencerons par établir qu'une fraction rationnelle $\frac{F(x)}{f(x)}$, dont les deux termes sont des polynômes quelconques premiers entre eux, est décomposable en une partie entière (qui peut être nulle), et en plusieurs *fractions simples* à numérateurs constants, ayant pour dénominateurs les diverses puissances des facteurs linéaires qui peuvent diviser le polynôme $f(x)$. Nous démontrerons ensuite qu'une fraction rationnelle n'est décomposable ainsi que d'une seule manière, et nous indiquerons enfin le moyen de former son développement.

Théorèmes sur la possibilité du développement d'une fraction rationnelle.

THÉORÈME I. — Si a désigne une racine de l'équation $f(x) = 0$, α son degré de multiplicité, en sorte que l'on ait

$$f(x) = (x - a)^\alpha f_1(x),$$

$f_1(x)$ étant un polynôme non divisible par $x - a$, la fraction rationnelle $\frac{F(x)}{f(x)}$ pourra toujours être décomposée en deux parties de la manière suivante :

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x - a)^\alpha} + \frac{F_1(x)}{(x - a)^{\alpha-1} f_1(x)},$$

A étant une constante, et $F_1(x)$ un polynôme entier et rationnel.

En effet, on a identiquement, et quel que soit A ,

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F(x)}{(x - a)^\alpha f_1(x)} = \frac{A}{(x - a)^\alpha} + \frac{F(x) - A f_1(x)}{(x - a)^\alpha f_1(x)},$$

et pour que le deuxième terme du second membre ne contienne à son dénominateur que la puissance $\alpha - 1$ du facteur $x - a$, il faut et il suffit que le numérateur $F(x) - A f_1(x)$ s'annule pour $x = a$. Posons donc

$$F(a) - A f_1(a) = 0, \quad \text{d'où} \quad A = \frac{F(a)}{f_1(a)};$$

cette valeur de A sera finie, puisque $f_1(a)$ n'est pas nul, et si l'on fait

$$F(x) - A f_1(x) = (x - a) F_1(x),$$

on aura

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x - a)^\alpha} + \frac{F_1(x)}{(x - a)^{\alpha-1} f_1(x)},$$

ce qu'il fallait démontrer

COROLLAIRE. — En appliquant le même théorème à la fraction $\frac{F_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1} f_1(x)}$, on pourra la mettre sous la forme

$$\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \frac{F_2(x)}{(x-a)^{\alpha-2} f_1(x)},$$

A_1 étant une constante et $F_2(x)$ une fonction entière; seulement ici A_1 peut être nulle, car $F_1(x)$ peut admettre le facteur $x-a$. En continuant ainsi, on voit que la fraction rationnelle $\frac{F(x)}{f(x)}$ peut être décomposée de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \frac{F(x)}{f(x)} &= \frac{F(x)}{(x-a)^\alpha f_1(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \dots \\ &+ \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} + \frac{F_\alpha(x)}{f_1(x)}, \end{aligned}$$

A, A_1, A_2, \dots , étant des constantes finies et déterminées dont la première n'est pas nulle, et $F_\alpha(x)$ une fonction entière.

Soient maintenant b une seconde racine de $f(x) = 0$ et ϵ son degré de multiplicité, en sorte que l'on ait

$$f_1(x) = (x-b)^\epsilon f_2(x);$$

en appliquant la formule précédente à la fraction $\frac{F_\alpha(x)}{f_1(x)}$, on aura une valeur de la forme

$$\begin{aligned} \frac{F_\alpha(x)}{f_1(x)} &= \frac{F_\alpha(x)}{(x-b)^\epsilon f_2(x)} = \frac{B}{(x-b)^\epsilon} + \frac{B_1}{(x-b)^{\epsilon-1}} + \dots \\ &+ \frac{B_{\epsilon-1}}{x-b} + \frac{F_\epsilon(x)}{f_2(x)}, \end{aligned}$$

et, par suite,

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} \\ + \frac{B}{(x-b)^\beta} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \dots + \frac{B_{\beta-1}}{x-b} + \frac{F_\beta(x)}{f_1(x)},$$

B, B_1 , etc., étant des constantes déterminées dont la première n'est pas nulle, et $F_\beta(x)$ une fonction entière.

Il résulte de là, qu'en général, si l'on suppose

$$f(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta \dots (x-c)^\gamma,$$

la fraction rationnelle $\frac{F(x)}{f(x)}$ pourra être développée de la manière suivante :

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a}, \\ + \frac{B}{(x-b)^\beta} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \dots + \frac{B_{\beta-1}}{x-b}, \\ \dots \\ + \frac{C}{(x-c)^\gamma} + \frac{C_1}{(x-c)^{\gamma-1}} + \dots + \frac{C_{\gamma-1}}{x-c} + E(x),$$

$A, A_1, \dots, B, B_1, \dots, C, C_1, \dots$, étant des constantes finies, et $E(x)$ une fonction entière. C'est précisément la proposition qu'il s'agissait d'établir.

Au lieu de s'occuper d'abord des fractions simples relatives à la racine a , on aurait pu commencer par celles qui se rapportent à une autre racine, b par exemple; mais, comme nous allons le faire voir, on aurait toujours trouvé le même développement.

THÉORÈME II. — Une fraction rationnelle n'est dé-

composable que d'une seule manière en une partie entière et en fractions simples.

Supposons qu'on ait trouvé deux développements d'une même fraction rationnelle,

$$\frac{A}{(x-a)^\alpha} + \dots + \frac{B}{(x-b)^\beta} + \dots + E(x)$$

et

$$\frac{A'}{(x-a)^{\alpha'}} + \dots + \frac{B'}{(x-b)^{\beta'}} + \dots + E'(x);$$

on aura

$$\frac{A}{(x-a)^\alpha} + \dots + E(x) = \frac{A'}{(x-a)^{\alpha'}} + \dots + E'(x).$$

Cela posé, α et α' étant respectivement les exposants des plus hautes puissances de $x-a$, dans les deux membres, je dis que $\alpha = \alpha'$ et $A = A'$. Supposons, en effet, que α et α' soient inégaux et que α soit le plus grand; tirons de l'équation précédente la valeur de $\frac{A}{(x-a)^\alpha}$, et réduisons tous les autres termes au même dénominateur; on aura

$$\frac{A}{(x-a)^\alpha} = \frac{\varphi(x)}{(x-a)^{\alpha-1}\psi(x)},$$

ou

$$A = (x-a) \frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

φ et ψ désignant des polynômes dont le second n'est pas divisible par $x-a$. D'ailleurs A est une constante; il faut donc qu'elle soit nulle, car l'équation précédente donne $A = 0$ pour $x = a$. Si donc A n'est pas nul, on ne peut supposer $\alpha > \alpha'$, et l'on ferait voir de même que, si A' n'est pas nul, on ne peut supposer non plus $\alpha < \alpha'$; on a donc $\alpha = \alpha'$. Je dis maintenant que $A = A'$. En effet, de

l'équation entre les deux développements on tireva, α' étant égal à α ,

$$\frac{A - A'}{(x - a)^\alpha} = \frac{\varphi(x)}{(x - a)^{\alpha-1} \psi(x)},$$

ou

$$A - A' = (x - a) \frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

φ et ψ étant, comme précédemment, des polynômes dont le second n'est pas divisible par $x - a$; comme $A - A'$ est constant, et que sa valeur est nulle pour $x = a$, d'après l'équation précédente, on aura $A = A'$.

Les termes qui renferment la plus haute puissance de $x - a$ en dénominateur, dans les deux développements, étant égaux entre eux, on pourra les ôter de part et d'autre, et les deux restes seront égaux. En raisonnant sur eux comme sur les proposés, on fera voir que les termes qui contiennent en dénominateur la plus haute puissance du même binôme $x - a$, ou d'un autre binôme, sont aussi égaux entre eux; et en continuant ainsi, on prouvera que les fractions simples des deux développements sont égales chacune à chacune: il en résultera par conséquent l'égalité des parties entières $E(x)$ et $E'(x)$.

COROLLAIRE. — La partie entière du développement d'une fraction rationnelle $\frac{F(x)}{f(x)}$ en fractions simples étant indépendante du moyen qu'on emploie pour faire ce développement, on l'obtiendra en faisant la division de $F(x)$ par $f(x)$; car si $\varphi(x)$ désigne le reste de cette division, $E(x)$ le quotient, on aura

$$\frac{F(x)}{f(x)} = E(x) + \frac{\varphi(x)}{f(x)}.$$

Or, le degré de $\varphi(x)$ étant moindre que celui de $f(x)$, le

développement de $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ ne contiendra évidemment pas de partie entière; donc, etc.

Méthodes pour former le développement d'une fraction rationnelle en fractions simples.

Le corollaire du théorème I, par lequel on démontre la possibilité du développement, donne aussi le moyen de former ce développement. Ainsi, dans le cas où les exposants $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ se réduisent tous à l'unité, on en déduit aisément la formule que nous avons obtenue dans la leçon précédente; mais, ce cas simple excepté, l'emploi de ce procédé exigerait des calculs fort pénibles.

On peut aussi employer la méthode des coefficients indéterminés; il faut alors calculer la partie entière du développement au moyen de la division du numérateur par le dénominateur, et l'on n'aura plus qu'à développer une fraction, dont le numérateur est de degré inférieur à celui du dénominateur; on égalera cette fraction au développement dont les coefficients seuls sont inconnus; on chassera les dénominateurs, et en égalant les coefficients des mêmes puissances de x dans les deux membres, on obtiendra une série d'équations qui serviront à déterminer les coefficients du développement.

EXEMPLE. — Soit à développer la fraction rationnelle $\frac{1}{x^3(x-1)}$ en fractions simples.

On posera

$$\frac{1}{x^3(x-1)} = \frac{A}{x^3} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x} + \frac{D}{x-1},$$

d'où, en chassant les dénominateurs,

$$\begin{aligned} 1 &= A(x-1) + B(x^2-x) + C(x^3-x^2) + Dx^3 \\ &= -A + (A-B)x + (B-C)x^2 + (C+D)x^3, \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$-A = 1, \quad A - B = 0, \quad B - C = 0, \quad C + D = 0,$$

d'où

$$A = -1, \quad B = -1, \quad C = -1, \quad D = 1,$$

et, par suite,

$$\frac{1}{x^3(x-1)} = -\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}.$$

Nous allons indiquer une autre méthode qui n'exige que l'emploi de la division algébrique.

Soit la fraction rationnelle $\frac{F(x)}{f(x)}$, dont le dénominateur $f(x)$ a pour valeur

$$f(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta \dots (x-c)^\gamma;$$

cette fraction n'étant susceptible que d'un seul développement, on peut chercher, à part la partie entière, les fractions simples qui répondent à la racine a , puis celles qui répondent à la racine b , etc., et faire ensuite la somme de tous les résultats partiels ainsi obtenus.

La partie entière $E(x)$ s'obtiendra par la division de $F(x)$ par $f(x)$; voyons comment on peut obtenir les fractions simples qui répondent à chaque racine, à a par exemple. Soit

$$f(x) = (x-a)^\alpha f_1(x).$$

Posons $x = a + h$, ordonnons les polynômes $F(a+h)$ et $f_1(a+h)$ par rapport aux puissances croissantes de h , et faisons la division du premier par le second, en arrêtant le quotient au terme du degré $\alpha - 1$ en h ; soient

$$A + A_1 h + A_2 h^2 + \dots + A_{\alpha-1} h^{\alpha-1}$$

ce quotient, et $h^\alpha R$ le reste qui contient h^α à tous ses

termes, en sorte que R désigne ici une fonction entière de h ; on aura

$$\frac{F(a+h)}{f_1(a+h)} = A + A_1 h + A_2 h^2 + \dots + A_{\alpha-1} h^{\alpha-1} + \frac{h^\alpha R}{f_1(a+h)}.$$

Remplaçons dans cette égalité h par sa valeur $x - a$, puis divisons les deux membres par $(x - a)^\alpha$, et remarquons enfin que R se réduira à une fonction entière de x , $F_\alpha(x)$; on aura

$$\begin{aligned} \frac{F(x)}{f(x)} &= \frac{F(x)}{(x-a)^\alpha f_1(x)} \\ &= \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-2}} + \dots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} + \frac{F_\alpha(x)}{f_1(x)}; \end{aligned}$$

d'où il suit que la partie du développement de $\frac{F(x)}{f(x)}$, qui est relative à la racine a , sera

$$\frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a}.$$

On pourrait déterminer ainsi, indépendamment les unes des autres, les parties du développement qui se rapportent aux diverses racines, mais il sera plus simple d'appliquer la même méthode à la fraction $\frac{F_\alpha(x)}{f_1(x)}$ qui complète les termes déjà trouvés; on obtiendra ainsi les termes qui se rapportent à une seconde racine, et une troisième fraction sur laquelle on continuera l'opération.

La méthode précédente a surtout l'avantage de faire connaître l'expression algébrique des coefficients du développement. En effet, la division des polynômes $F(a+h)$ et $f_1(a+h)$, que nous avons effectuée, dans le but d'obtenir les coefficients $A_1, A_2, \dots, A_\alpha$, revient évidemment

à développer la fonction $\frac{F(a+h)}{f_1(a+h)}$ en série ordonnée suivant les puissances croissantes de h , et comme une fonction n'est développable que d'une seule manière en une série de cette espèce, on obtiendra le même résultat en faisant usage de la formule de Maclaurin. Si donc on pose

$$\frac{F(x)}{f_1(x)} = \varphi(x),$$

on aura

$$\begin{aligned} \frac{F(a+h)}{f_1(a+h)} = \varphi(a+h) &= \varphi(a) + h\varphi'(a) + h^2 \frac{\varphi''(a)}{1.2} + \dots \\ &+ h^{\alpha-1} \frac{\varphi^{\alpha-1}(a)}{1.2\dots(\alpha-1)} + h^\alpha R_1, \end{aligned}$$

en désignant par $h^\alpha R_1$ le reste de la série; ici R_1 est une fonction rationnelle de h qui n'est point infinie pour $h=0$, et, par conséquent, cette valeur de $\frac{F(a+h)}{f_1(a+h)}$ est identique à celle trouvée précédemment. On aura donc

$$\begin{aligned} A &= \varphi(a), \quad A_1 = \varphi'(a), \quad A_2 = \frac{\varphi''(a)}{1.2}, \dots, \\ A_{\alpha-1} &= \frac{\varphi^{\alpha-1}(a)}{1.2\dots(\alpha-1)}, \end{aligned}$$

d'où résulte ce théorème général.

THÉORÈME. — *Si l'on a*

$$f(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta \dots (x-c)^\gamma,$$

que $F(x)$ désigne une fonction entière de x , dont le quotient par $f(x)$ soit $E(x)$, et que l'on fasse, pour abrégér,

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= (x-a)^\alpha \frac{F(x)}{f(x)}, \quad \psi(x) = (x-b)^\beta \frac{F(x)}{f(x)}, \dots, \\ \omega(x) &= (x-c)^\gamma \frac{F(x)}{f(x)}, \end{aligned}$$

on aura le développement suivant pour la fraction rationnelle $\frac{F(x)}{f(x)}$:

$$\begin{aligned} \frac{F(x)}{f(x)} &= E(x) \\ &+ \frac{\varphi(a)}{(x-a)^\alpha} + \frac{\varphi'(a)}{(x-a)^{\alpha-1}} + \frac{\varphi''(a)}{1.2(x-a)^{\alpha-2}} + \dots + \frac{\varphi^{\alpha-1}(a)}{1.2\dots(\alpha-1)(x-a)} \\ &+ \frac{\psi(b)}{(x-b)^\beta} + \frac{\psi'(b)}{(x-b)^{\beta-1}} + \frac{\psi''(b)}{1.2.(x-b)^{\beta-2}} + \dots + \frac{\psi^{\beta-1}(b)}{1.2\dots(\beta-1)(x-b)} \\ &\dots \\ &+ \frac{\varpi(c)}{(x-c)^\gamma} + \frac{\varpi'(c)}{(x-c)^{\gamma-1}} + \frac{\varpi''(c)}{1.2(x-c)^{\gamma-2}} + \dots + \frac{\varpi^{\gamma-1}(c)}{1.2\dots(\gamma-1)(x-c)} \end{aligned}$$

La théorie qui vient d'être exposée subsiste entièrement si quelques-unes des racines de $f(x) = 0$ sont imaginaires, mais le développement de $\frac{F(x)}{f(x)}$ est alors compliqué d'imaginaires. On a cherché à modifier, dans ce cas, la forme de ce développement, de manière à n'y introduire que des quantités réelles, et on y est parvenu par une méthode que nous exposerons dans la leçon suivante.