

**www.e-rara.ch**

## **Cours d'algèbre supérieure**

**Serret, Joseph Alfred**

**Paris, 1849**

**ETH-Bibliothek Zürich**

Shelf Mark: Rar 21242

Persistent Link: <https://doi.org/10.3931/e-rara-56914>

Vingt et unième leçon.

---

### **www.e-rara.ch**

Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien – von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material – from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d'imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L'éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes – des débuts de l'imprimerie jusqu'au 20e siècle.

e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

---

**Nutzungsbedingungen** Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titelinformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

**Terms of Use** This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

**Conditions d'utilisation** Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

**Condizioni di utilizzo** Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]

---



---

## VINGT ET UNIÈME LEÇON.

Des fonctions algébriques. — Des fonctions entières. — Des fonctions rationnelles. — Classification des fonctions algébriques non rationnelles. — Forme générale des fonctions algébriques.

### *Des fonctions algébriques.*

Les considérations développées dans la dix-huitième leçon et les suivantes donnent lieu de penser, sans toutefois le démontrer d'une manière rigoureuse, qu'il est impossible de résoudre algébriquement les équations générales de degré supérieur au quatrième. Abel est parvenu à démontrer cette impossibilité, par une méthode qui a été simplifiée ensuite par Wantzel dans quelques-unes de ses parties.

Résoudre une équation algébriquement, c'est former une fonction algébrique des coefficients qui, substituée à l'inconnue, satisfasse identiquement à l'équation; la première chose à faire, pour reconnaître si une équation est soluble ou non algébriquement, est donc d'étudier la forme générale des fonctions algébriques. C'est cette étude que nous allons faire ici, et nous démontrerons, dans la prochaine leçon, l'impossibilité de résoudre algébriquement les équations générales de degré supérieur au quatrième.

Soient

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_k,$$

$k$  quantités quelconques indépendantes, et  $\nu$  une fonction de ces quantités;  $\nu$  sera une *fonction algébrique*, si l'on

peut l'exprimer en  $x_1, x_2, x_3$ , etc., à l'aide des opérations suivantes, effectuées un nombre fini de fois : 1° l'addition ou la soustraction ; 2° la multiplication ; 3° la division ; 4° l'extraction des racines d'indices premiers. Nous ne comptons pas l'élevation aux puissances entières et l'extraction des racines de degrés composés, car ces opérations sont évidemment comprises dans les quatre que nous avons mentionnées

*Des fonctions entières.*

Lorsque la fonction  $\nu$  peut se former par les deux premières des quatre opérations mentionnées ci-dessus, elle est dite rationnelle et entière ou simplement entière.

Désignons par

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots)$$

une fonction qui peut être exprimée par une somme d'un nombre limité de termes de la forme

$$Ax_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots$$

A étant une constante, et  $m_1, m_2$ , etc., des exposants entiers et positifs. L'opération désignée par  $f$  fournit une fonction entière, conformément à la définition précédente ; et l'on peut généralement considérer toutes les fonctions entières comme obtenues en répétant cette opération un nombre limité de fois. Soient  $\nu_1, \nu_2$ , etc., plusieurs fonctions de  $x_1, x_2$ , etc., de la même forme que  $f$ , la fonction

$$f(\nu_1, \nu_2, \dots)$$

sera évidemment de la même forme. D'ailleurs  $f(\nu_1, \nu_2, \dots)$  est l'expression des fonctions obtenues en répétant deux fois l'opération  $f(x_1, x_2, \dots)$  ; d'où il suit qu'on trouvera toujours un résultat de même forme, en répétant cette

même opération autant de fois que l'on voudra, et que toute fonction entière de  $x_1, x_2$ , etc., peut être exprimée par une somme de termes de la forme

$$A x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots$$

*Des fonctions rationnelles.*

Une fonction  $\nu$  des quantités  $x_1, x_2, x_3$ , etc., est dite rationnelle lorsqu'elle peut être exprimée par les trois premières des quatre opérations algébriques ci-dessus désignées.

Soient

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots), \quad F(x_1, x_2, x_3, \dots)$$

deux fonctions entières, le quotient de ces fonctions

$$\frac{f(x_1, x_2, \dots)}{F(x_1, x_2, \dots)}$$

sera évidemment un cas particulier des fonctions rationnelles non entières, et l'on peut considérer toute fonction rationnelle comme obtenue en répétant plusieurs fois l'opération précédente; mais en désignant par  $\nu_1, \nu_2$ , etc., plusieurs fonctions de la forme  $\frac{f(x_1, x_2, \dots)}{F(x_1, x_2, \dots)}$ , il est évident que la fonction

$$\frac{f(\nu_1, \nu_2, \dots)}{F(\nu_1, \nu_2, \dots)}$$

peut être réduite à la même forme; d'où il suit que toute fonction rationnelle se réduira à la forme

$$\frac{f(x_1, x_2, \dots)}{F(x_1, x_2, \dots)},$$

$f$  et  $F$  désignant des fonctions entières.

*Classification des fonctions algébriques non rationnelles.*

Soit

$$f(x_1, x_2, \dots)$$

une fonction rationnelle quelconque; il est évident que toute fonction algébrique s'obtiendra en combinant l'opération désignée par  $f$  avec l'opération désignée par  $\sqrt[m]{\phantom{x}}$ ,  $m$  étant un nombre premier. Si donc  $p_1, p_2$  désignent des fonctions rationnelles de  $x_1, x_2$ , etc.,  $n_1, n_2$ , etc., des nombres premiers, et qu'on fasse

$$p' = f\left(x_1, x_2, \dots, \sqrt[n_1]{p_1}, \sqrt[n_2]{p_2}, \dots\right),$$

$p'$  sera la forme des fonctions algébriques dans lesquelles l'opération désignée par  $\sqrt{\phantom{x}}$  ne porte que sur des fonctions rationnelles. Nous appellerons, avec Abel, *fonctions algébriques du premier ordre* les fonctions de la forme  $p'$ .

Soient  $p'_1, p'_2$ , etc., des fonctions algébriques du premier ordre,  $n'_1, n'_2$ , etc., des nombres premiers; et posons

$$p'' = f\left(x_1, x_2, \dots, \sqrt[n'_1]{p_1}, \sqrt[n'_2]{p_2}, \dots, \sqrt[n'_1]{p'_1}, \sqrt[n'_2]{p'_2}, \dots\right),$$

$p''$  sera la forme générale des fonctions algébriques dans lesquelles l'opération désignée par  $\sqrt[m]{\phantom{x}}$  ne porte que sur des fonctions rationnelles ou sur des fonctions algébriques du premier ordre. Nous appellerons *fonctions algébriques du deuxième ordre* les fonctions de la forme  $p''$ .

De même si  $p''_1, p''_2$ , etc., désignent des fonctions algébriques du deuxième ordre,  $n''_1, n''_2$ , etc., des nombres premiers, et qu'on fasse

$$p''' = f\left(x_1, x_2, \dots, \sqrt[n''_1]{p_1}, \dots, \sqrt[n''_1]{p'_1}, \dots, \sqrt[n''_1]{p''_1}, \dots\right),$$

$p'''$  sera la forme des fonctions algébriques, où l'opération désignée par  $\sqrt[m]{\phantom{x}}$  ne porte que sur des fonctions rationnelles et sur des fonctions des deux premiers ordres. Les fonctions de la forme  $p'''$  seront les fonctions algébriques du troisième ordre.

En continuant ainsi, on formera des fonctions algébriques du quatrième, cinquième, etc.,  $\mu^{\text{ième}}$  ordre, et il est évident que l'expression générale des fonctions du  $\mu^{\text{ième}}$  ordre sera l'expression générale des fonctions algébriques.

Il suit de là qu'en désignant par  $\nu$  une fonction algébrique du  $\mu^{\text{ième}}$  ordre,  $\nu$  aura la forme

$$\nu = f\left(r_1, r_2, \dots, \sqrt[n_1]{p_1}, \sqrt[n_2]{p_2}, \dots\right),$$

où  $f$  désigne toujours une fonction rationnelle,  $p_1, p_2$ , etc., des fonctions de l'ordre  $\mu - 1$ ,  $n_1, n_2$ , etc., des nombres premiers, et  $r_1, r_2$ , etc., des fonctions de l'ordre  $\mu - 1$  ou d'ordres moins élevés.

On peut évidemment supposer qu'aucun des radicaux  $\sqrt[n_1]{p_1}, \sqrt[n_2]{p_2}$ , etc., ne soit exprimable rationnellement en fonctions des autres radicaux et des quantités  $r_1, r_2$ , etc. Si, en effet,  $\sqrt[n_1]{p_1}$  était dans ce cas, en portant sa valeur dans l'expression de  $\nu$ , on aurait une valeur de  $\nu$

$$\nu = f\left(r_1, r_2, \dots, \sqrt[n_2]{p_2}, \dots\right)$$

de la même forme que la précédente, mais plus simple, puisqu'elle contiendrait le radical  $\sqrt[n_1]{p_1}$  de moins. Si de même l'un des radicaux qui restent pouvait s'exprimer en fonction rationnelle des autres radicaux et des quantités  $r_1, r_2$ , etc., on pourrait chasser ce radical de l'expression de  $\nu$ , qui conserverait d'ailleurs la même forme ;

et si l'on pouvait ainsi continuer jusqu'à ce qu'on eût éliminé tous les radicaux  $\sqrt[n_1]{p_1}$ ,  $\sqrt[n_2]{p_2}$ , etc., la fonction  $\nu$  serait réduite à l'ordre  $\mu - 1$ .

Si donc la fonction  $\nu$  est effectivement du  $\mu^{\text{ième}}$  ordre, on peut supposer que les radicaux  $\sqrt[n_1]{p_1}$ ,  $\sqrt[n_2]{p_2}$ , etc., aient été réduits au plus petit nombre possible, et qu'il soit impossible d'exprimer l'un de ces radicaux en fonction rationnelle des autres et de fonctions algébriques d'ordre inférieur. Et si  $m$  désigne alors le nombre de ces radicaux qui affectent des fonctions algébriques d'ordre  $\mu - 1$ , nous dirons que la fonction  $\nu$  d'ordre  $\mu$  est du *degré*  $m$ .

D'après cette définition, une fonction d'ordre  $\mu$  et de degré  $0$  n'est autre qu'une fonction d'ordre  $\mu - 1$ , et une fonction d'ordre  $0$  est une fonction rationnelle.

Il résulte de là que si  $\nu$  désigne une fonction algébrique d'ordre  $\mu$  et de degré  $m$ , on aura généralement

$$\nu = f\left(r_1, r_2, \dots, \sqrt[n]{p}\right),$$

$f$  désignant une fonction rationnelle,  $p$  une fonction algébrique d'ordre  $\mu - 1$ ,  $n$  un nombre premier, et  $r_1$ ,  $r_2$ , etc., des fonctions d'ordre  $\mu$ , mais de degré  $m - 1$ . En outre, d'après ce qui précède, on peut toujours supposer qu'il soit impossible d'exprimer  $\sqrt[n]{p}$  en fonction rationnelle de  $r_1$ ,  $r_2$ , etc.

### *Forme générale des fonctions algébriques.*

Dans l'expression précédente de  $\nu$ ,  $f$  désigne une fonction rationnelle des quantités  $r_1$ ,  $r_2$ , etc., et  $\sqrt[n]{p}$ ; mais toute fonction rationnelle de plusieurs quantités peut être représentée par le quotient de deux fonctions en-

tières, nous pouvons donc poser

$$\nu = \frac{\varphi(r_1, r_2, \dots, \sqrt[n]{p})}{\psi(r_1, r_2, \dots, \sqrt[n]{p})},$$

$\varphi$  et  $\psi$  désignant des fonctions entières, et si l'on ordonne  $\varphi$  et  $\psi$  par rapport aux puissances de  $\sqrt[n]{p}$  ou  $p^{\frac{1}{n}}$ , on aura pour  $\nu$  une valeur de la forme

$$\nu = \frac{s_0 + s_1 p^{\frac{1}{n}} + s_2 p^{\frac{2}{n}} + \dots + s_\nu p^{\frac{\nu}{n}}}{t_0 + t_1 p^{\frac{1}{n}} + t_2 p^{\frac{2}{n}} + \dots + t_{\nu'} p^{\frac{\nu'}{n}}} = \frac{S}{T},$$

où  $s_0, s_1, \dots, s_\nu$  et  $t_0, t_1, \dots, t_{\nu'}$ , sont des fonctions entières de  $r_1, r_2$ , etc.

Soit  $\alpha$  une racine imaginaire de l'équation

$$\alpha^n = 1;$$

désignons par

$$T_1, T_2, \dots, T_{n-1};$$

les  $n - 1$  valeurs qu'on obtient en remplaçant dans  $T$ ,  $p^{\frac{1}{n}}$  successivement par

$$\alpha p^{\frac{1}{n}}, \quad \alpha^2 p^{\frac{1}{n}}, \quad \alpha^3 p^{\frac{1}{n}}, \dots, \alpha^{n-1} p^{\frac{1}{n}},$$

et multiplions par  $T_1 T_2 \dots T_{n-1}$  les deux termes de la valeur de  $\nu$ , on aura

$$\nu = \frac{S T_1 T_2 \dots T_{n-1}}{T T_1 T_2 \dots T_{n-1}}.$$

Le produit  $T_1 T_2 \dots T_{n-1}$  peut évidemment s'exprimer en fonction entière de  $p$  et des quantités  $r_1, r_2$ , etc.; il est donc une fonction algébrique d'ordre  $\mu$  et de degré  $m - 1$

au plus, que nous désignerons par  $u$ . Pareillement, le produit  $ST_1 T_2 \dots T_{n-1}$  est une fonction entière de  $r_1, r_2, \text{etc.}$ , et  $\sqrt[n]{p}$ ; nous représenterons sa valeur par

$$u_0 + u_1 p^{\frac{1}{n}} + u_2 p^{\frac{2}{n}} + \dots + u_i p^{\frac{i}{n}},$$

et l'on aura

$$v = \frac{u_0 + u_1 p^{\frac{1}{n}} + u_2 p^{\frac{2}{n}} + \dots + u_i p^{\frac{i}{n}}}{u},$$

ou simplement

$$v = q_0 + q_1 p^{\frac{1}{n}} + q_2 p^{\frac{2}{n}} + \dots + q_i p^{\frac{i}{n}},$$

en mettant  $q_0, q_1, \text{etc.}$ , au lieu de  $\frac{u_0}{u}, \frac{u_1}{u}, \text{etc.}$   $q_0, q_1, \text{etc.}$ , désignent ici des fonctions rationnelles de  $r_1, r_2, \text{etc.}$ , et  $p$ .

On peut chasser de l'expression précédente de  $v$  les puissances de  $p^{\frac{1}{n}}$  supérieures à la  $(n - 1)^{\text{ième}}$ . Si, en effet,  $j$  désigne un nombre qui, divisé par  $n$ , donne le quotient  $g$  et le reste  $h$ , on a

$$p^{\frac{j}{n}} = p^g \cdot p^{\frac{h}{n}},$$

et, en se servant de cette formule, on pourra mettre  $v$  sous la forme

$$(1) \quad v = q_0 + q_1 p^{\frac{1}{n}} + q_2 p^{\frac{2}{n}} + \dots + q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}},$$

$q_0, q_1, q_2, \dots, q_{n-1}$  étant toujours des fonctions rationnelles de  $p, r_1, r_2, \text{etc.}$ , et, par conséquent, des fonctions algébriques d'ordre  $\mu$  et de degré  $m - 1$  au plus, telles, en outre, qu'il soit impossible d'exprimer rationnellement  $p^{\frac{1}{n}}$  en fonction des quantités dont elles dépendent.

Dans l'expression (1) de  $\nu$ , on peut supposer

$$q_1 = 1.$$

Pour le démontrer, supposons d'abord que  $q_1$  ne soit pas nul, et posons

$$p_1 = pq_1^n;$$

d'où

$$p = \frac{p_1}{q_1^n} \quad \text{et} \quad p^n = \frac{p_1^n}{q_1^n};$$

l'expression de  $\nu$  devient

$$\nu = q_0 + p_1^{\frac{1}{n}} + \frac{q_2}{q_1} p_1^{\frac{2}{n}} + \dots + \frac{q_{n-1}}{q_1^{n-1}} p_1^{\frac{n-1}{n}},$$

ou plus simplement

$$(2) \quad \nu = q_0 + p^{\frac{1}{n}} + q_2 p^{\frac{2}{n}} + \dots + q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}},$$

en écrivant  $p$  au lieu de  $p_1$ ;  $q_2$ ,  $q_3$ , etc., au lieu de  $\frac{q_2}{q_1}$ ,  $\frac{q_3}{q_1}$ , etc.

Dans cette nouvelle expression (2) de  $\nu$  qui se déduit de (1) en faisant  $q_1 = 1$ , les quantités  $q_0$ ,  $q_2$ , etc., désignent toujours des fonctions algébriques d'ordre  $\mu$  et de degré  $m - 1$ .

Supposons maintenant que dans l'expression (1) de  $\nu$  on ait  $q_1 = 0$ ; désignons par  $q_k$  l'une des quantités  $q_1$ ,  $q_2$ , etc., qui n'est pas nulle, et posons

$$p_1 = q_k^n p^k,$$

d'où

$$p_1^{\frac{\alpha}{n}} = q_k^{\alpha} p^{\frac{k\alpha}{n}}.$$

$n$  étant premier et  $k$  moindre que  $n$ , on peut toujours

trouver deux entiers  $\alpha$  et  $\beta$  tels, que

$$k\alpha - n\beta = \lambda,$$

$\lambda$  étant un nombre entier quelconque donné; alors on aura

$$p^{\frac{\alpha}{n}} = q_k^\alpha p^\beta p^{\frac{\lambda}{n}};$$

d'où

$$p^{\frac{\lambda}{n}} = q_k^{-\alpha} p^{-\beta} p^{\frac{\alpha}{n}}.$$

On a, en particulier et par hypothèse,

$$p^{\frac{k}{n}} = \frac{p^{\frac{1}{n}}}{q_k};$$

à l'aide des deux formules précédentes, on substituera aux puissances de  $p^{\frac{1}{n}}$  dans la valeur (1) de  $\nu$ , celles de  $p^{\frac{k}{n}}$ , et, après cette substitution, il est évident que la forme de  $\nu$  n'aura pas changé, mais que le coefficient de  $p^{\frac{1}{n}}$  sera l'unité; car, dans l'expression primitive de  $\nu$ ,  $p^{\frac{k}{n}}$  a pour coefficient  $q_k$ .

CONCLUSION. — Il résulte de ce qui précède que toute fonction algébrique d'ordre  $\mu$  et de degré  $m$  peut être mise sous la forme

$$\nu = q_0 + p^{\frac{1}{n}} + q_2 p^{\frac{2}{n}} + \dots + q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}},$$

où  $n$  est un nombre premier,  $q_0, q_2, \dots$ , des fonctions algébriques d'ordre  $\mu$ , mais de degré  $m - 1$ , et  $p$  une fonction d'ordre  $\mu - 1$ , dont la racine  $n^{\text{ième}}$  ne peut être exprimée rationnellement par les quantités  $q_0, q_2, \dots$ .