

www.e-rara.ch

**Abhandlungen bei Begründung der Königlich Sächsischen Gesellschaft
der Wissenschaften, am Tage der zweihundertjährigen Geburtsfeier
Lebnizens**

Leibniz, Gottfried Wilhelm

Leipzig, 1846

ETH-Bibliothek Zürich

Shelf Mark: Rar 21791

Persistent Link: <https://doi.org/10.3931/e-rara-59434>

Über die Spiralen der Conchyliden, von C. F. Naumann.

www.e-rara.ch

Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien – von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material – from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d'imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L'éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes – des débuts de l'imprimerie jusqu'au 20e siècle.

e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

Nutzungsbedingungen Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titelinformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

Terms of Use This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

Conditions d'utilisation Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

Condizioni di utilizzo Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]

ÜBER DIE
SPIRALEN DER CONCHYLIIEN,

VON

C. F. NAUMANN.

SPRITZ- UND BEI- CONZENTRAT

Wenn die Ergründung der Gesetzmässigkeit organischer Formen überhaupt als eine interessante Aufgabe mathematischer Forschungen zu betrachten ist, so dürften wohl keine organischen Gebilde zu solchen Forschungen dringender auffordern, als die Conchylien, oder die Schalgehäuse der Acephalen, der Gasteropoden und Cephalopoden. Denn es offenbart sich in den meisten dieser Schalgehäuse eine so bewundernswerthe Regelmässigkeit der Gestaltung, und in den Gehäusen einer und derselben *Species* eine so vollständige, bis in das kleinste Detail zu verfolgende Wiederholung desselben Gestaltungs-Typus, dass diese organischen Gebilde, in Bezug auf Gleichmässigkeit und Uebereinstimmung ihrer specifischen Configuration, die Krystalle der anorganischen Natur bei Weitem übertreffen. Ganz vorzüglich aber und in höchst überraschender Weise gibt sich uns diese Geometrie der organischen Natur in denen, nach gewissen *Spiralen* oder Spiralschraubenlinien aufgewundenen Conchylien vieler Gasteropoden und Cephalopoden zu erkennen; und wer sich nur einigermaassen mit der Betrachtung solcher Formen beschäftigt hat, ja wer nur einmal den centralen Durchschnitt eines Nautilus zu bewundern Gelegenheit hatte, dem wird sich unwillkürlich die Ueberzeugung aufgedrängt haben, dass in diesen Conchylien eine strenge mathematische Gesetzmässigkeit walten müsse, welche sie eben so wohl als einen Gegenstand der Messung und Rechnung erscheinen lässt, wie die Krystallformen des Mineralreiches.

Seitdem nun zuerst durch Moseley *) die Formen gewisser Conchylien in das Gebiet mathematischer Untersuchungen gezogen worden sind, habe auch ich mich mit diesem interessanten Zweige der Morphologie des Thierreiches zu beschäftigen versucht, und bin dabei anfangs auf Resultate gelangt, welche mit denen von Moseley wesentlich übereinstimmen. Die zunächst festgestellte Thatsache ist nämlich die, dass die unmittelbar auf einander folgenden Windungsabstände bei denen in einer Ebene, wie bei denen in einer Kegelfläche gewundenen Conchylien eine *geometrische Progression* nach irgend einem Quotienten p bilden, welcher gewöhnlich einen sehr einfachen numerischen Ausdruck hat **).

*) On the geometrical forms of turbinated and discoid shells, in den Philosophical transactions for the year 1838, p. 354 ff.

**) Poggend. Annal. Bd. 50. 1840. S. 223.

Da nun die Windungsabstände einer jeden *logarithmischen* Spirale gleichfalls eine geometrische Progression bilden, so musste man unwillkürlich auf die Vermuthung geführt werden, dass es *diese* Spiralen seien, welche das Windungsgesetz der Conchylien bestimmen. Moseley hat auch wirklich versucht, für mehre Gasteropoden so wie für Nautilus Pompilius die logarithmische Spirale geltend zu machen, und ich selbst wurde bei meinen ersten Untersuchungen (ohne damals Moseley's Arbeit zu kennen) auf dieselbe Ansicht geleitet, indem ich mit der Thatsache der nach einer geometrischen Progression fortschreitenden Windungsabstände die Voraussetzung verband, dass auch die successiven Windungshalbmesser demselben Gesetze unterworfen seien. Wenn nämlich diese sehr nahe liegende Voraussetzung gegründet war, so musste in der That die *logarithmische* Spirale das Windungsgesetz der Conchylien bestimmen, so musste *diese* Linie als die wirkliche *Conchospirale* zu betrachten sein.

Nachdem ich später Moseley's Abhandlung kennen gelernt hatte, glaubte ich um so weniger an der Richtigkeit jener Voraussetzung zweifeln zu dürfen, und veröffentlichte demgemäss einen zweiten Aufsatz *), in welchem ich nicht nur einige allgemeine Eigenschaften der vorausgesetzten Conchospirale entwickelte, sondern auch einige Methoden angab, um aus gewissen Beobachtungselementen die Windungsquotienten der Ammoniten zu berechnen. Es stand mir jedoch damals nur wenig Material und gar kein Instrument zu Gebote, durch welches die erforderlichen Messungen mit hinreichender Genauigkeit hätten ausgeführt werden können **). So kam es denn, dass ich die zwischen Rechnung und Beobachtung vorkommenden Abweichungen theils der unsicheren Messungsmethode, theils dem Umstande zuschrieb, dass die geometrische Gesetzmässigkeit eines *organischen* Naturproductes wohl niemals ganz streng erfüllt sein werde, und noch weit grösseren Perturbationen unterliegen könne, als die Normalform eines Krystalles ***).

Gegenwärtig bin ich im Besitze eines zu derartigen Messungen geeigneten Instrumentes, welches wesentlich aus einem Millimeter-Maassstabe besteht,

*) Poggendorff's Annalen Bd. 51. S. 245 ff.

***) Ich hatte mir an einigen halb durchbrochenen Ammoniten aus der geognostischen Sammlung der Freiburger Bergakademie centrale Querschnitte angeschliffen, und konnte mich zur Messung nur eines Cirkels bedienen.

****) Ganz abgesehen von den Beobachtungsfehlern und von denen, durch die kaum zu vermeidende Excentricität des Querdurchschnittes veranlassten Fehlern, glaubte ich daher in denen aus meinen Messungen abgeleiteten Resultaten kleine *Schwankungen* erwarten zu können, ohne deshalb die logarithmische Spirale bezweifeln zu dürfen. Ich legte damals der Prüfung meiner Ansicht die Verhältnisse der Windungsdurchmesser zu Grunde. Sind nämlich D , D' und D'' drei successive, in eine und dieselbe gerade Linie fallende Durchmesser, so müssen die drei Quotienten $\frac{D'}{D}$, $\frac{D''}{D'}$ und $\sqrt{\frac{D''}{D}}$ gleichen Werth haben, dafern die Windung wirklich der logarithmischen Spirale folgt. Nun führten in der That die Messungen an einem Exemplare von Ammonites Murchisonae, von A. elegans und von A. Reineccii auf so nahe übereinstimmende Werthe jener Quotienten, dass ich auch für die Ammoniten eine Bestätigung meiner früheren Ansicht gefunden zu haben glaubte. Die ersten Bedenken gegen die Richtigkeit derselben stiegen in mir auf, als ich im Jahre 1845 ein Exemplar von A. communis durchmaass, und dabei auf so bedeutende Differenzen gelangte, wie sie weder durch Beobachtungsfehler, noch durch die Excentricität des Querschnittes, noch durch die, bei organischen Gebilden vorauszusetzenden Perturbationen gerechtfertigt werden konnten.

an welchem ein Mikroskop mit Fadenkreuz und Nonius durch ein Schraubengewinde hin und her bewegt werden kann. Die kreisförmige horizontale Platte, auf welche die zu messende Conchylie aufgelegt wird, ist an ihrem Rande in 360° getheilt, und lässt sich um ihren Mittelpunkt drehen, um Durchmesser nach allen Richtungen hin messen zu können. Mit Hülfe dieses Instrumentes (welches ich Conchylionometer*) nennen will, obwohl es auch zu mancherlei anderen Messungen geeignet ist) war es mir nun möglich, genauere Messungen anzustellen, welche natürlich auch auf richtigere Resultate führen mussten.

Als eines der Hauptresultate dieser neueren Untersuchungen glaube ich es nun hervorheben zu dürfen, dass das Windungsgesetz der meisten Conchylien *gar nicht* durch die logarithmische Spirale, sondern durch eine ganz *andere* und *eigenthümliche* Spirale bestimmt wird, welcher daher mit allem Rechte der Name *Conchospirale* zukommt. Als ein zweites Resultat ist die Thatsache zu bezeichnen, dass diese Conchospirale in verschiedenen Stadien ihrer Entwicklung nach *verschiedenen* Quotienten gewunden sein kann, so dass z. B. bei einem und demselben Ammoniten die *inneren* Windungen einer *anderen* Zahl gehorchen, als die *äusseren* Windungen (**).

Im Folgenden will ich nun zuvörderst die Theorie der Conchospirale entwerfen, dann aber versuchen, beide Resultate in der Natur nachzuweisen, und die Richtigkeit derselben durch die Uebereinstimmung darzuthun, welche sich zwischen Rechnung und Messung herausstellt.

I.

THEORIE DER CONCHOSPIRALE.

1) Von der einfachen Conchospirale.

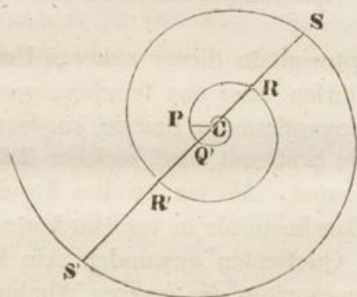
§. 1.

Allgemeine Terminologie. Es ist in dem Wesen der Spiralen überhaupt begründet, dass wir sie nicht auf geradlinige, sondern auf *polare* Coordinaten beziehen müssen, wenn wir die Gesetzmässigkeit ihres Verlaufes erkennen

*) Die Nothwendigkeit einer nach Zahl und Maass bestimmten Auffassung der Conchylienformen ist wohl zuerst von Boubée erkannt worden, welcher schon im Jahre 1831 ein Conchylionometer in Vorschlag brachte, dessen Einrichtung wesentlich die des Hauyschen Goniometers ist. Bulletin de la soc. géol. de France. T. I. p. 232. Nachdem später durch Moseley's und meine Untersuchungen auf die mathematische Gesetzmässigkeit der Conchylienformen hingewiesen worden war, gab Alcide d'Orbigny im Jahre 1842 ein ähnliches Instrument an, welches er Helicomètre nennt, und dessen Gebrauch er den Conchyliologen dringend anempfiehlt, da eine genaue Bestimmung der Dimensionen der Conchylien unerlässlich sei (Bulletin de la soc. géol. XIII., p. 200 ff.).

**) Eine vorläufige Notiz über diese beiden Resultate gab ich in Poggendorff's Annalen, Bd. 64, 1845, S. 544 ff.

wollen. Indem man also von einem *ersten* Radius $CP = a$ ausgeht, wird der Verlauf dieser Linien dadurch bestimmt, dass man sich einen um den Mittelpunkt C beweglichen Radius Vector vorstellt, welcher, von der Lage CP ausgehend, successiv im Kreise herumgeführt wird, und dass man für *jede* Lage dieses Radius Vector, oder für jeden Umlaufwinkel v , welchen er mit dem ersten Radius bildet, die Länge r desselben angibt, wie solche durch den betreffenden Punkt der Spirale bestimmt wird.



Den *ersten* Radius $CP = a$ will ich den *Parameter* der Spirale, und jeden besonderen Werth des Radius Vector für einen bestimmten Punkt der Spirale kurzweg den *Radius* dieses Punktes nennen.

Da nun der Radius Vector, nach vollendetem ersten Kreislaufe, einen zweiten, dritten, vierten Kreis u. s. w. beschreiben kann, so wird natürlich der Winkel v nach dem ersten, zweiten, dritten Umlaufe u. s. w. solche Werthe erhalten, welche grösser als 1.2π , 2.2π , 3.2π u. s. w. sein müssen; und gleichwie der erste Umlauf des Radius Vector die *erste* Windung der Spirale liefert, so werden seine folgenden Umläufe die *zweite*, *dritte*, *vierte* Windung u. s. w. liefern.

Es ist nun zuvörderst wichtig, sich kurz und bestimmt über die *Lage* der verschiedenen Radien aussprechen zu können, und dazu mag folgende Terminologie dienen*). Drei oder mehr successive Radien, welche *gleiche* Winkelabstände haben, will ich überhaupt *aequidistante* Radien nennen. Zwei (oder auch mehr aequidistante) Radien mögen noch besonders als *singulodistante*, *semissodistante* und *quadrantodistante* Radien unterschieden werden, je nachdem sie mit einander den Winkel 2π , π oder $\frac{1}{2}\pi$ bilden. Je zwei *singulodistante* Radien CR und CS , oder CR' und CS' fallen also nach *derselben* Richtung vom Mittelpunkte C aus in *eine* gerade Linie, indem der eine nur als die Verlängerung des andern erscheint; je zwei *semissodistante* Radien CR und CR' , oder CS und CS' fallen gleichfalls in *eine* gerade Linie, jedoch nach entgegengesetzten Richtungen vom Mittelpunkte aus; sie bilden in ihrer Vereinigung einen *Diameter* der Spirale.

Diese Diameter wollen wir ebenfalls als aequidistante Diameter überhaupt, oder als *singulodistante*, *semissodistante* und *quadrantodistante* Diameter insbesondere bezeichnen, je nachdem sie mit einander gleiche Winkel über-

*) Poggendorff's Annalen. Bd. 50. S. 229.

haupt, oder Winkel von 2π , π und $\frac{1}{2}\pi$ bilden. So sind z. B. in der Figur RR' und SS' zwei *singulodistante* Diameter, dagegen RR' , $R'S$ und SS' drei *semisodistante* Diameter.

Unter dem *Windungsabstande* irgend eines Punktes S verstehen wir die radiale Entfernung RS desselben von der unmittelbar vorausgehenden Windung der Spirale; die Windungsabstände einer Windung überhaupt sind also die Differenzen zwischen den *singulodistanten* Radien *dieser* und der *nächst vorhergehenden* Windung. Auch sie werden als *aequidistante*, *singulodistante*, *semisodistante* und *quadrantodistante* Windungsabstände unterschieden. In der Figur sind z. B. $Q'R'$ und $R'S'$ zwei *singulodistante*, RS und $R'S'$ dagegen zwei *semisodistante* Windungsabstände.

§. 2.

Gleichung der Conchospirale. Diejenige Spirale nun, welche für die meisten*) spiralförmig gewundenen Conchylien das eigentliche Grundgesetz zu liefern scheint, hat die Eigenschaft, dass vom Parameter a aus die Windungsabstände nach einer geometrischen Progression wachsen, oder, dass die vom Mittelpunkte aus in einem und demselben Radius Vector auf einander folgenden *singulodistanten* Windungsabstände eine dergleichen Progression nach irgend einem Quotienten p bilden, welchen ich den *Windungsquotienten* nennen will.

Bezeichnen wir also die Windungsabstände allgemein mit h , und den Winkel, welchen der zu irgend einem Windungsabstand gehörige *grössere* Radius mit dem *ersten* Radius a bildet, mit v , so können wir die successiven *singulodistanten* Windungsabstände von a aus folgendermaassen ausdrücken:

für $v = 0 \cdot 2\pi$	wird $h = a$
- $v = 1 \cdot 2\pi$	- $h = ap$
- $v = 2 \cdot 2\pi$	- $h = ap^2$
- $v = 3 \cdot 2\pi$	- $h = ap^3$
- \vdots	- \vdots
- $v = (m-1) \cdot 2\pi$	- $h = ap^{m-1}$.

Der Radius r , welcher irgend einem (z. B. dem m ten) Windungsabstande zukommt, ist nun offenbar nichts Anderes als das summatorische Glied der geometrischen Reihe, welche die sämmtlichen bis dahin auf einander folgenden Windungsabstände bilden; folglich wird

$$r = \frac{a}{p-1} (p^m - 1),$$

oder, nach Substitution des Werthes von m ,

*) Ich will es keinesweges in Abrede stellen, dass gewisse Conchylien auch nach anderen Spiralen gewunden sein können; da ich selbst bis jetzt verhältnissmässig doch nur sehr wenige Species untersucht habe, und da Moseley a. a. O. für mehrere Species die logarithmische Spirale, und Heis (Verhandlungen des naturhistorischen Vereines der Preussischen Rheinlande, Heft I., 1844, S. 23) für Argonaute Argo die parabolische Spirale gefunden hat.

$$r = \frac{a}{p-1} \left(p^{\frac{v+2\pi}{2\pi}} - 1 \right),$$

welches die Gleichung der Conchospirale ist.

Aus dieser Gleichung folgt für $v = -2\pi$

$$r = 0.$$

Es ist also vom Parameter a aus rückwärts noch *eine* Windung möglich, mit welcher die Conchospirale ihren Mittelpunkt erreicht. Für die logarithmische Spirale ist bekanntlich der Mittelpunkt ein asymptotischer Punkt.

Bezeichnet man mit r' den nächst folgenden x todistanten Radius, so wird

$$\begin{aligned} r' &= \frac{a}{p-1} (p^{m+x} - 1) \\ &= rp^x + \frac{p^x - 1}{p-1} a. \end{aligned}$$

Hieraus ersieht man, dass die aequidistanten *Radien* der Conchospirale keinesweges eine geometrische Progression bilden, wie diess in der logarithmischen Spirale der Fall ist; wohl aber haben beide Spiralen *die* Eigenschaft gemein, dass ihre aequidistanten *Windungsabstände* nach einer geometrischen Reihe wachsen.

§. 3.

Bestimmung von p aus den Windungsabständen. Es war

$$\text{für } v = (m-1)2\pi, \quad h = ap^{m-1},$$

und es ist allgemein:

$$\text{für } v = (m+x-1)2\pi, \quad h = ap^x p^{m-1};$$

folglich haben je zwei x todistante Windungsabstände das Verhältniss von $1 : p^x$.

Hat man also eine Reihe x todistanter Windungsabstände h, h', h'' u. s. w. gemessen, so müssen die Quotienten je zweier unmittelbar auf einander folgender Glieder solcher Reihe, oder

$$\frac{h'}{h} = \frac{h''}{h'} \dots = p^x$$

sein. Von diesem Verhältnisse wird man Gebrauch machen können, um eigentlich aus je *zwei* gemessenen Windungsabständen von bekannter Angulardistanz x den Windungsquotienten p zu finden. Am einfachsten bieten sich dazu die *singulodistanten* Abstände dar, deren Verhältniss unmittelbar das von $1 : p$ ist. Weil jedoch in der Wirklichkeit kleine Schwankungen vorkommen, auch die Windungsnaht nicht immer mit gleicher Schärfe und Regelmässigkeit ausgebildet ist, so bleibt es immer empfehlenswerth, eine *Reihe* von Windungsabständen zu messen, um aus den verschiedenen Näherungswerthen, welche je zwei derselben für p ergeben, desto sicherer auf den eigentlichen Normalwerth von p schliessen zu können.

Hat man auf solche Weise den wahrscheinlichen Normalwerth von p gefunden, so kann man die Summe der gemessenen Abstände zu Grunde legen,

um daraus die entsprechenden Werthe der einzelnen zu *berechnen*, und wird sich aus der Uebereinstimmung der berechneten und gemessenen Werthe überzeugen, ob jener Normalwerth auch wirklich zulässig sei.

§. 4.

Diameter und Radien der Conchospirale. Die an den Conchylien anzustellenden Messungen werden fast immer mehr oder weniger mit dem Fehler der Excentricität behaftet sein, weil der Mittelpunkt der Spirale in vielen Fällen gar nicht sichtbar, in den meisten Fällen aber mehr oder weniger unsicher bezeichnet ist. Dieser Fehler wird sich jedoch für die *Diameter* in weit geringerem Maasse herausstellen als für die *Radien*, indem ihre Werthe durch eine ungenaue Fixirung des Mittelpunktes weniger alterirt werden, als die Werthe der Radien. Aus diesem Grunde erhalten die *Diameter* für die Anwendung der Theorie eine ganz besondere Wichtigkeit.

Aus der Gleichung

$$r = \frac{a}{p-1} (p^m - 1)$$

folgt unmittelbar, dass der nächste semissodistante Radius

$$r' = \frac{a}{p-1} (p^m p^{1/2} - 1)$$

sein wird. Die *Summe* dieser beiden Radien ist aber derjenige *Diameter* der Spirale, welcher dem Umlaufwinkel $v = (m - \frac{1}{2}) 2\pi$ zukommt. Bezeichnen wir also diesen *Diameter* mit D , so wird

$$D = r' + r = \frac{a}{p-1} [p^m (p^{1/2} + 1) - 2].$$

Unmittelbar aus den vorstehenden Werthen von r und r' (oder auch mittelbar aus denen in §. 2. angegebenen Werthen zweier *x*todistanter Radien) ergibt sich auch

$$r' = r p^{1/2} + \frac{a}{p^{1/2} + 1}$$

und

$$r = \frac{r'}{p^{1/2}} - \frac{a}{(p^{1/2} + 1)p^{1/2}},$$

wodurch man aus dem kleineren Radius eines *Diameters* den grösseren finden kann, und umgekehrt, sobald man ausser p und r oder r' auch den Parameter a kennt.

Aus dem Werthe von D folgt aber:

$$r = \frac{D(p^{1/2} + 1) - a}{(p^{1/2} + 1)^2},$$

$$r' = \frac{D(p^{1/2} + 1)p^{1/2} + a}{(p^{1/2} + 1)^2},$$

wodurch man aus irgend einem gemessenen *Diameter* D die beiden ihn zusammensetzenden Radien finden kann, wenn ausser p und D auch a eine bekannte Grösse ist.

§. 5.

Berechnung von p aus drei Diametern. Aus dem in §. 4. gefundenen Werthe eines Diameter D ergibt sich der nächstfolgende x todistante Diameter

$$D' = \frac{a}{p-1} [p^m (p^{1/2} + 1) p^x - 2],$$

und der darauf folgende aequidistante Diameter

$$D'' = \frac{a}{p-1} [p^m (p^{1/2} + 1) p^{2x} - 2].$$

Die Differenzen dieser aequidistanten Diameter bestimmen sich also:

$$D' - D = \frac{a}{p-1} p^m (p^{1/2} + 1) (p^x - 1),$$

$$D'' - D' = \frac{a}{p-1} p^m (p^{1/2} + 1) (p^x - 1) p^x;$$

und folglich wird

$$p^x = \frac{D'' - D'}{D' - D}.$$

Demnach kann man auch aus *drei aequidistanten Diametern* den Windungsquotienten p berechnen. Sind diese Diameter singulodistant, so wird

$$p = \frac{D'' - D'}{D' - D},$$

und in diesem Falle ist das Resultat sehr einleuchtend, weil dann die Differenzen der Diameter nichts Anderes als die Summen je zweier semissodistanter Windungsabstände sind.

Sind aber die Diameter semissodistant, so wird

$$p = \left(\frac{D'' - D'}{D' - D} \right)^2,$$

was ebenfalls für sich begreiflich ist, weil dann beide Differenzen nichts Anderes als zwei semissodistante Windungsabstände sind.

Sind endlich die Diameter quadrantodistant, so wird

$$p = \left(\frac{D'' - D'}{D' - D} \right)^4,$$

welche Ausdrücke in vielen Fällen wenigstens zu einer Controle des aus den Windungsabständen gefundenen Werthes von p dienen können.

Aus vorstehenden Werthen von D , D' und D'' ergibt sich übrigens, dass in der *Conchospirale* niemals $\frac{D'}{D} = \frac{D''}{D'} = p^x$ sein kann, während die *logarithmische Spirale* durch diese Eigenschaft ausgezeichnet ist. Dagegen haben beide Spiralen diejenige Eigenschaft gemein, welche durch die Gleichung

$$p^x = \frac{D'' - D'}{D' - D}$$

ausgedrückt wird.

§. 6.

Berechnung des Parameters. Der Parameter a ist deshalb ein sehr wichtiges Element, weil er uns den Urwerth aller Windungsabstände und somit eine *absolute Grösse* kennen lehrt, welche für die ganze Entwicklung der Conchylië eine wesentliche Bedeutung haben dürfte *).

Man kann den Parameter sowohl aus je zwei Radien, als auch aus je zwei Diametern von bekannter Angulardistanz x berechnen.

Es folgt nämlich aus denen in §. 2. stehenden Werthen zweier x todistanter Radien r und r'

$$r + \frac{a}{p-1} = \frac{a}{p-1} p^m,$$

$$r' + \frac{a}{p-1} = \frac{a}{p-1} p^m p^x.$$

Dividirt man die zweite Gleichung durch die erste, so ergibt sich nach den gehörigen Umstellungen:

$$a = \frac{(p-1)(r'-rp^x)}{p^x-1},$$

oder, für zwei *singulodistante* Radien:

$$a = r' - pr.$$

Weil jedoch die Radien gewöhnlich weit unsicherer zu messen sind, als die Diameter, so ist es besser, die Berechnung von a auf zwei x todistante Diameter D und D' zu gründen, deren allgemeine Ausdrücke in §. 4. und 5. stehen. Aus diesen leitet man zuvörderst ab:

$$D + \frac{2a}{p-1} = \frac{a}{p-1} p^m (p^{1/2} + 1),$$

$$D' + \frac{2a}{p-1} = \frac{a}{p-1} p^m (p^{1/2} + 1) p^x.$$

Man dividirt hierauf die zweite Gleichung durch die erste, und erhält zuletzt:

$$a = \frac{(p-1)(D'-p^x D)}{2(p^x-1)}.$$

Sind also die Diameter *singulodistant*, so wird

$$a = \frac{1}{2}(D' - pD),$$

sind sie dagegen *semisodistant*, so folgt

$$a = \frac{1}{2}(p^{1/2} + 1)(D' - p^{1/2}D).$$

Man wird gewöhnlich im Stande sein, entweder zwei *singulodistante*, oder doch wenigstens zwei *semisodistante* Diameter zu messen, um aus ihnen den Werth von a zu berechnen. In vielen Fällen wird man sogar eine *Reihe* von

*) Zoologen, welche sich für diese Untersuchungen interessiren sollten, werden durch Beobachtungen an lebenden Gasteropoden in verschiedenen Stadien der Entwicklung die physiologische Bedeutung des Parameters a nachzuweisen vermögen. Es wäre wohl möglich, dass er den Zustand des Embryo und den des frei gewordenen Thieres unterscheidet.

singulodistanten Diametern messen können, und dann einen der Wahrheit ziemlich nahe kommenden Mittelwerth von a finden *).

§. 7.

Bestimmungen des Umlaufwinkels v oder $(m - 1)2\pi$. Nachdem die constanten Elemente p und a für die Conchospirale gefunden worden sind, kann man sehr leicht für einen jeden beliebigen, dem Windungsabstande h entsprechenden Punkt derselben den zugehörigen Umlaufswinkel v des Radius Vector berechnen. Es ist nämlich nach §. 2. allgemein

$$\text{für } v = (m - 1)2\pi, \quad h = ap^{m-1}.$$

Hieraus folgt

$$m - 1 = \frac{\log h - \log a}{\log p},$$

oder, weil $m - 1 = \frac{v}{2\pi}$,

$$v = \frac{(\log h - \log a) 2\pi}{\log p}.$$

Man sieht also, dass sich aus einigen Windungsabständen und ein paar Diametern der Conchospirale sämtliche Elemente derselben mit grosser Leichtigkeit berechnen lassen, und wird hieraus die Ueberzeugung gewinnen, dass diese Spirale allerdings weit interessantere Resultate liefert, als die logarithmische Spirale, deren Parameter *nur* auf dem Wege unmittelbarer Beobachtung gefunden werden kann.

§. 8.

Tangential - Winkel der Conchospirale. Bekanntlich ist der allgemeine Ausdruck für die Subtangente einer Curve bei polaren Coordinaten:

$$\text{Subtang.} = \frac{r^2 dv}{dr}.$$

Nun war die Gleichung der Conchospirale

$$r = \frac{a}{p-1} (p^m - 1),$$

wo m die Grösse $\frac{v + 2\pi}{2\pi}$ repräsentirt. Aus dieser Gleichung derivirt sich zunächst der Differentialquotient

$$\frac{dm}{dr} = \frac{p-1}{ap^m \log p}.$$

Weil jedoch $dm = \frac{dv}{2\pi}$, so folgt:

$$\frac{dv}{dr} = \frac{2\pi(p-1)}{ap^m \log p}.$$

*) Erhält man für a einen *negativen* Werth, so wird man in der Regel zu dem Schlusse berechtigt sein, dass keine einfache Spirale vorhanden ist, dass die gemessenen Diameter der äusseren Spirale einer Diplospirale angehören, und dass also die *inneren* Windungen auf eine *andere* Spirale zu beziehen sind (§. 15.).

Man findet aber den Tangentialwinkel φ , oder den Neigungswinkel, welchen die Tangente mit dem Radius bildet, indem man die Subtangente durch den Radius dividirt; folglich wird

$$\text{tang } \varphi = \frac{r dv}{dr} = \frac{2\pi(p^m - 1)}{p^m \log p}.$$

Hieraus ergibt sich, dass in der Conchospirale der Tangentialwinkel *nicht constant*, sondern einer fortwährenden Veränderung unterworfen ist, während sich die logarithmische Spirale bekanntlich durch die Beständigkeit dieses Winkels anszeichnet.

Der vorstehende Ausdruck *) von $\text{tang } \varphi$ bezieht sich auf denjenigen Punkt der Conchospirale, welcher durch den Umlaufswinkel $v = (m - 1)2\pi$ bestimmt wird. Ist nun $v = 0$, so muss $m = 1$ sein; folglich beginnt die Spirale mit einem Tangentialwinkel, für welchen

$$\text{tang } \varphi = \frac{2\pi(p - 1)}{p \log p}.$$

Da nun aber die Spirale unzählige Umläufe machen kann, so wird sich diese Tangente dem Werthe $\frac{2\pi}{\log p}$ immer mehr nähern, ohne ihn doch jemals zu erreichen.

Für $v = -2\pi$, d. h. für den Mittelpunkt der Spirale wird endlich $m = 0$, folglich auch

$$\text{tang } \varphi = 0.$$

Vom Mittelpunkte aus durchläuft also der Tangentialwinkel alle möglichen Werthe zwischen 0° und jenem unerreichbaren Maximum, welches durch den Werth von $\text{tang } \varphi = \frac{2\pi}{\log p}$ bestimmt wird.

2) Von der zusammengesetzten Conchospirale.

§. 9.

Begriff der zusammengesetzten Spirale. Es ist eine Eigenthümlichkeit der Conchospirale, welche wir in der Natur selbst vielfach bestätigt finden, dass sie mitten in ihrem Verlaufe von *einem* Windungsquotienten p auf einen *anderen* Quotienten q übergehen kann; ja, es ist nicht nur möglich, sondern scheint auch in der Wirklichkeit vorzukommen, dass die Conchospirale in ihrer Entwicklung successiv durch *mehre* Quotienten, p, q, s , u. s. w. bestimmt wird. Da sich nun in allen solchen Fällen die *ganze* Spirale aus zweien oder mehren *Theilen* zusammengesetzt erweist, deren jeder sein *besonderes* Gesetz befolgt, so können wir dergleichen Spiralen als *zusammengesetzte* Spiralen überhaupt bezeichnen, und als *Diplospiralen, Triplospiralen* u. s. w. unterscheiden, je nachdem sie in ihrem Verlaufe durch zwei, drei oder mehre verschiedene Quotienten bestimmt werden. Wir wollen uns vor der Hand nur auf die Be-

*) Es bedarf kaum der Bemerkung, dass in diesem Ausdrücke von $\text{tang } \varphi$ unter $\log p$ der natürliche, und nicht der gemeine Logarithmus zu verstehen ist.

trachtung der Diplospiralen beschränken, welche allerdings in den Conchylien eine ganz gewöhnliche Erscheinung sind, und in deren Theorie auch diejenige aller mehrfach zusammengesetzten Spiralen begründet ist.

Die Diplospiralen sind also solche Conchospiralen, welche nach innen und nach aussen durch zwei verschiedene Windungsquotienten p und q bestimmt werden. Sie bestehen deshalb aus zwei verschiedenen Theilen, aus einer *inneren* und einer *äusseren* Spirale, und können als *entosthene* und *exosthene* Diplospiralen unterschieden werden, je nachdem der *innere* Quotient p , oder der *äussere* Quotient q einen grösseren Werth hat.

§. 10.

Gleichung der äusseren Spirale. Es sei uns irgend eine einfache Conchospirale mit der Gleichung

$$r = \frac{p-1}{a} (p^m - 1)$$

oder

$$r = \frac{a}{p-1} \left(p^{\frac{v+2\pi}{2\pi}} - 1 \right)$$

gegeben. Denken wir uns nun, dass diese Spirale bei dem Umlaufwinkel v plötzlich aufhört, das bis dahin gültige Gesetz der Windungsabstände zu befolgen, wie solches durch die Reihe

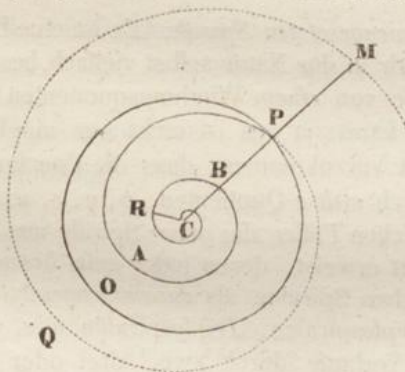
$$a, ap, ap^2, ap^3 \dots \dots \dots ap^{m-1}$$

bestimmt wird, und dass sie von dem zuletzt erreichten Windungsabstände ap^{m-1} aus anfängt, ihre *ferneren* Windungsabstände nach einem anderen Quotienten q oder nach der Reihe

$$ap^{m-1}, aqp^{m-1}, aq^2p^{m-1}, aq^3p^{m-1} \text{ u. s. w.}$$

zu bilden, so haben wir die Grundansicht für die Entwicklung einer Diplospirale gewonnen *).

Um die Sache anschaulicher zu machen, so sei $CBA P$ (s. d. Fig.) die innere Spirale, P derjenige Punkt, wo sie aufhört, also BP ihr letzter Win-



*) Künftige Untersuchungen werden darüber entscheiden müssen, ob zwischen je zwei auf einander folgenden Quotienten p und q ein bestimmtes Abhängigkeitsverhältniss stattfindet oder nicht. Ein so neues und fast noch ganz uncultivirtes Gebiet der angewandten Mathematik verspricht wohl dem Mathematiker wie dem Conchyliologen noch manche interessante Entdeckung.

dungsabstand ap^{m-1} ; so wird nun BP gewissermaassen der Parameter der in P beginnenden äusseren Spirale PQM , deren Windungsabstände nach dem Quotienten q fortschreiten, so dass z. B. $PM = aqp^{m-1}$, u. s. w.

Für den letzten Radius CP der inneren Spirale gilt

$$R = \frac{a}{p-1} (p^m - 1),$$

und für den nächst vorausgehenden singulodistanten Radius CB

$$R' = \frac{a}{p-1} (p^{m-1} - 1).$$

Es fragt sich nun vor allen Dingen, wie wir uns eigentlich den *Uebergang* aus der einen Spirale in die andere, oder die *Verknüpfung* beider Spiralen vorstellen sollen. In dieser Hinsicht bieten sich für die Auffassung des ganzen Problems besonders zwei verschiedene Methoden dar, je nachdem man nämlich die *erste* Windung der äusseren Spirale in dieser oder in jener Art ausgebildet denken will. Die in ihren Folgerungen einfachste Vorstellung ist unstreitig die, dass man sich mit dem *letzten* Radius der *inneren* Spirale einen *Kreis* beschrieben denkt, um welchen sich die äussere Spirale, gleichsam wie um ihr Fundament, dergestalt entwickelt, dass ihr Windungsabstand am Ende der ersten Windung $= aqp^{m-1}$ wird. Eine ganz andere, zwar an und für sich einfachere, allein in ihren Folgerungen etwas schwierigere Vorstellung ist die, dass die *erste* Windung der *äusseren* Spirale sich unmittelbar um die *letzte* Windung der *inneren* Spirale dergestalt entwickelt, dass für jeden, durch den Umlaufswinkel $v + \varepsilon \cdot 2\pi$ bestimmten Punkt dieser ersten Windung $h = aq^2 p^{m-1}$ wird.

Da mir Zeit und Umstände bisher nicht erlaubten, meine Untersuchungen hinreichend auszudehnen, um ein bestimmtes Urtheil darüber fällen zu können, welche von diesen beiden Vorstellungen eigentlich der Natur entspricht, so will ich an gegenwärtigem Orte nur die erstere ausführlich entwickeln, indem ich mir die Entwicklung der zweiten Ansicht und die Vergleichung der beiderseitigen Resultate für eine andere Gelegenheit vorbehalte*).

Man beschreibe also mit dem letzten Radius $CP = R$ der inneren Spirale um den Mittelpunkt C den Kreis PO , so kann sich die äussere Spirale wohl auf eine ähnliche Weise um diesen Kreis entwickeln, wie sich die innere Spirale um den Mittelpunkt entwickelte. Der Mittelpunkt hat sich für die äussere Spirale gleichsam zu dem Kreise PO ausgedehnt, und wir haben daher den constanten Radius dieses Kreises sorgfältig zu berücksichtigen, wenn wir die Gleichung der äusseren Spirale vom Mittelpunkte aus finden wollen.

Um jedoch beide Spiralen im Zusammenhange zu behalten, müssen wir die Umlaufswinkel des Radius Vector aus der inneren Spirale in die äussere Spirale fortrechnen. Der letzte Umlaufswinkel der inneren Spirale war $v = (m-1)2\pi$; bezeichnen wir also mit w die Umlaufswinkel der äusseren Spirale, und beziehen wir dieselbe auf die Kreisperipherie des Radius R , so wird

*) Eine sehr genaue Untersuchung diplospiraler Conchylien in derjenigen Region ihrer Windung, wo der *Uebergang* aus der inneren in die äusseren Spirale stattfindet, wird allein zu einer bestimmten Entscheidung der Frage gelangen lassen.

$$\begin{aligned}
 &\text{für } w = v, & h &= 0 \\
 &- w = v + 2\pi, & h &= aqp^{m-1} \\
 &- w = v + 2 \cdot 2\pi, & h &= aq^2p^{m-1} \\
 &- w = v + 3 \cdot 2\pi, & h &= aq^3p^{m-1} \\
 &\quad \vdots & & \quad \vdots \\
 &- w = v + n \cdot 2\pi, & h &= aq^n p^{m-1}.
 \end{aligned}$$

Als das summatorische Glied der in diesen Werthen von h gegebenen Reihe bestimmt sich aber:

$$S = \frac{ap^{m-1}}{q-1} (q^n - 1)q,$$

oder, nach Substitution der durch die Winkel v und w ausgedrückten Werthe von m und n ,

$$S = \frac{ap^{\frac{v}{2\pi}}}{q-1} \left(q^{\frac{w-v}{2\pi}} - 1 \right) q,$$

welcher Ausdruck als die Gleichung der äusseren Spirale zu betrachten ist, sofern solche auf die Kreisperipherie des Halbmessers R bezogen wird.

§. 11.

Gleichung der Diplospirale. Will man die äussere Spirale auf den Mittelpunkt beziehen, so hat man zu S die Grösse R (§. 10.) zu addiren, und erhält dadurch den Ausdruck für den *vollständigen* Radius der äusseren Spirale:

$$\begin{aligned}
 r &= R + S, \\
 &= R + \frac{ap^{m-1}}{q-1} (q^n - 1)q, \\
 &= \frac{a}{p-1} (p^m - 1) + \frac{ap^{m-1}}{q-1} (q^n - 1)q.
 \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck lässt sich nun in der That als die *Gleichung* der Diplospirale betrachten, wenn man nämlich sorgfältig darauf achtet, dass die Grösse m eine *constante* Zahl bedeutet, so lange $n > 0$ ist, und dass sie erst dann als eine *veränderliche* Grösse gelten kann, wenn $n = 0$ geworden ist, mit welchem Werthe die äussere Spirale verschwindet, und wiederum der Radius

$$r = \frac{a}{p-1} (p^m - 1)$$

wird, wie er anfänglich für die innere Spirale bestimmt worden war.

Dass sich aber die äussere Spirale wirklich um die Kreisperipherie des Radius R entwickelt, diess ergibt sich aus dem Ausdrucke von S (§. 10.), welcher für $n=0$ den Werth 0, für $n=1$ den Werth aqp^{m-1} erhält, woraus folgt, dass die *erste* Windung der äusseren Spirale im Punkte P (s. d. Fig. §. 10.) beginnend, sich um den Kreis PO , als ihr eigentliches Fundament, dergestalt windet, dass ihr Windungsabstand bei $P = 0$, bei $M = aqp^{m-1}$ ist.

Für irgend einen Punkt der *ersten* Windung der äusseren Spirale, dessen Umlaufswinkel $= v + z \cdot 2\pi$ (wobei der Werth von z zwischen 0 und 1 liegt),

ist der zugehörige Windungsabstand von der *letzten* Windung der inneren Spirale:

$$h = ap^{m-1} \left[\frac{p-p^z}{p-1} + \frac{(q^z-1)q}{q-1} \right],$$

welcher Werth für $z = 0$

$$h = ap^{m-1},$$

und für $z = 1$

$$h = ap^{m-1}q$$

gibt. In dieser ersten Windung findet daher ein ganz eigenthümliches Gesetz der Windungsabstände statt, wie diess auch für sie, als ein *Uebergangsglied* der inneren Spirale in die äussere, zu erwarten war.

§. 12.

Bestimmung der Windungsquotienten p und q. Je zwei x todistante Windungsabstände haben in der *äusseren* Spirale ebenso das Verhältniss von $1:q^x$, wie in der *inneren* Spirale das Verhältniss von $1:p^x$, und es findet demnach Alles, was in §. 3. zur Bestimmung des Windungsquotienten p gesagt worden ist, wiederum seine Anwendung bei der Bestimmung von q .

Man wird also auch durch Messung mehrerer aequidistanter Windungsabstände h, h', h'' u. s. w. der inneren und der äusseren Spirale zur Kenntniss von p und q gelangen, indem die Quotienten $\frac{h'}{h}, \frac{h''}{h'}$ u. s. w. einerseits den Werth p^x , andererseits den Werth q^x geben. Am zweckmässigsten ist und bleibt es übrigens in allen Fällen, wo möglich *) *singulodistante* Windungsabstände zu Grunde zu legen, weil dann jeder der Quotienten $\frac{h'}{h}, \frac{h''}{h'}$ u. s. w. *unmittelbar* auf p oder q gelangen lässt.

Ueberhaupt aber liefert uns eine vollständige Reihe singulodistanter Windungsabstände das einfachste *Erkennungsmittel* des *Vorhandenseins* einer Diplospirale, und es ist daher sehr empfehlenswerth, eine dergleichen Reihe so weit als möglich vom Mittelpunkte aus bis an die äusserste Windung hin zu messen. Man bildet dann die Reihe der Quotienten $\frac{h'}{h}, \frac{h''}{h'}$ u. s. w. und überzeugt sich leicht, ob sie durchgängig auf *denselben* Werth verweisen, oder ob sie nach innen einen *anderen* Werth geben, als nach aussen. Im letzteren Falle ist eine Diplospirale angezeigt, und dann wird man gewöhnlich für denjenigen Quotienten $\frac{h'}{h}$, welcher durch den *letzten* Windungsabstand h der inneren, und den *ersten* Windungsabstand h' der äusseren Spirale bestimmt wird, einen, sowohl von p als auch von q *abweichenden* Werth erhalten.

Diess ist auch ganz natürlich, weil im Allgemeinen ein letzter Windungsabstand h der inneren Spirale den Werth ap^zq^{m-2} , ein erster Windungsabstand der äusseren Spirale dagegen den zu Ende des vorigen §. stehenden Werth hat, und folglich der Quotient $\frac{h'}{h}$ für *diese* beiden Abstände nur dann

*) Denn allerdings können Fälle vorkommen, wo diess *nicht* mehr möglich ist.

entweder $= p$ oder $= q$ gefunden werden kann, wenn zufällig die Reihe der Windungsabstände in demjenigen Radius Vector gemessen worden ist, für welchen $z = 0$ oder $= 1$ ist.

§ 13.

Diameter der Diplospirale. Die inneren Diameter einer Diplospirale, so weit solche nämlich nach p gewunden ist, haben wir bereits in den §§. 4. und 5. betrachtet. Es kann sich daher nur noch um die äusseren Diameter handeln, welche dem nach q gewundenen Theile der Diplospirale angehören. Ein jeder solcher Diameter D besteht aber wiederum aus der Summe zweier semissodistanter Radien r und r' ; nun war allgemein (§. 11.)

$$r = R + \frac{ap^{m-1}}{q-1} (q^n - 1)q,$$

oder auch, wenn wir der Kürze wegen $\frac{ap^{m-1}}{q-1} = A$ setzen,

$$r = R + A(q^n - 1),$$

folglich wird der nächst grössere semissodistante Radius

$$r' = R + A(q^n q^{1/2} - 1),$$

und daher

$$D = r + r' = 2R + A[q^n(q^{1/2} + 1) - 2],$$

welches der allgemeine Ausdruck des, dem Umlaufswinkel $w + \pi$ entsprechenden Diameters ist.

§. 14.

Berechnung von q aus drei Diametern der Diplospirale. Der nächst grössere x todistante Diameter D' bestimmt sich

$$D' = 2R + A[q^n(q^{1/2} + 1)q^x - 2],$$

und der darauf folgende aequidistante Diameter

$$D'' = 2R + A[q^n(q^{1/2} + 1)q^{2x} - 2].$$

Bildet man die Differenzen $D'' - D'$ und $D' - D$, so folgt

$$q^x = \frac{D'' - D'}{D' - D}.$$

Also kann man auch den Windungsquotienten q der äusseren Spirale aus drei aequidistanten Diametern derselben berechnen, gerade so, wie diess in §. 5. für p in Betreff der inneren Spirale gezeigt worden ist. Sind diese Diameter singulodistant, so wird

$$q = \frac{D'' - D'}{D' - D},$$

sind sie dagegen semissodistant, so folgt

$$q = \left(\frac{D'' - D'}{D' - D} \right)^2.$$

Für ganze (d. h. nicht durchschnittene) Ammoniten ist diess oft die einzige Methode, um zur Kenntniss von q zu gelangen; doch muss man sich dabei

dreier quadrantodistanter Diameter bedienen, weshalb die Messungen mit grosser Genauigkeit angestellt werden müssen.

§. 15.

Bestimmung von a in der Diplospirale. Man kann aus je zweien Radien r und r' , oder auch aus je zweien Diametern D und D' der äusseren Spirale den Parameter a berechnen, sobald nämlich vorausgesetzt wird, dass m oder der Umlaufswinkel bekannt sei, bei welchem die innere Spirale endigt und die äussere Spirale beginnt.

Es ist nämlich nach §. 13. allgemein in der Diplospirale für den Umlaufswinkel $w = v + n \cdot 2\pi$

$$r = R + A(q^n - 1),$$

und es wird also irgend ein grösserer x todistanter Radius

$$r' = R + A(q^n q^x - 1).$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt:

$$r' - R + A = (r - R + A)q^x;$$

$$R - A = \frac{r q^x - r'}{q^x - 1}.$$

Substituirt man hierin die in §. 12. und §. 13. stehenden Werthe von R und A , so ergibt sich

$$a = \frac{(r q^x - r')(p-1)(q-1)}{(q^x - 1)[(q-p)p^{m-1} - q + 1]},$$

oder für singulodistante Radien, d. h. wenn $x = 1$,

$$a = \frac{(r q - r')(p-1)}{(q-p)p^{m-1} - q + 1}.$$

Setzt man in diesen Ausdrücken $q = p$, so erhält man natürlich dieselben Werthe, wie oben in §. 6.

Macht man die Bestimmung des Parameters a auf ähnliche Weise von zwei x todistanten *Diametern* D und D' abhängig, so wird zunächst:

$$R - A = \frac{D q^x - D'}{2(q^x - 1)},$$

woraus sich dann ergibt:

$$a = \frac{(D q^x - D')(p-1)(q-1)}{2(q^x - 1)[(q-p)p^{m-1} - q + 1]},$$

oder, für singulodistante Diameter:

$$a = \frac{(D q - D')(p-1)}{2[(q-p)p^{m-1} - q + 1]},$$

welche beide Ausdrücke für $q = p$ auf die in §. 6. stehenden Werthe zurückkommen. So lange $q > p$ ist, wird der Nenner dieses Ausdruckes in der Regel einen positiven Werth haben; dagegen muss für $q < p$ derselbe Nenner, und folglich auch der Factor $Dq - D'$ des Zählers, einen *negativen* Werth erhalten. Hierdurch wird also die in §. 6. aufgestellte Behauptung gerechtfertigt, dass ein *negativer* Werth von $D' - qD$ auf eine *exsthene* Diplospirale und darauf schliessen lässt, dass die gemessenen Diameter einer *äusseren* Spi-

rale angehören, welche noch eine innere umschliesst. Dieselbe Bemerkung gilt natürlich auch für den aus zwei Radien r' und r bestimmten Werth von a .

Ich habe diese Werthe von a angeführt, einestheils um zu zeigen, dass sie für $q = p$ wirklich in die oben gefundenen Werthe übergehen, anderntheils um sie bei der Berechnung von p^{m-1} zu Grunde zu legen.

Weil nämlich diese ganze Bestimmung von a die Kenntniss der Grösse p^{m-1} oder m erfordert, welche doch eigentlich gar nicht vorausgesetzt werden kann, so müssen wir immer danach trachten, den Werth von a lediglich aus den Verhältnissen der inneren Spirale nach Anleitung von §. 6., und ganz unabhängig von der äusseren Spirale zu ermitteln.

§. 46.

Gränzpunkt der äusseren und inneren Spirale. Ein sehr wichtiges Element der Diplospirale ist derjenige Punkt, in welchem die innere Spirale zu Ende geht, und die äussere Spirale ihren Anfang nimmt*). Dieser Punkt wird durch den Radius R oder auch durch den Umlaufswinkel $v = (m - 1) 2 \pi$ bestimmt. Nun ist $m - 1$ immer nur als Exponent von p gegeben; folglich handelt es sich zunächst um die Bestimmung der Grösse p^{m-1} . Da wir voraussetzen, dass die beiden Windungsquotienten p und q , und der Parameter a bereits gefunden worden sind, so werden wir durch die in §. 45. stehenden Werthe von a in den Stand gesetzt, die Grösse p^{m-1} entweder aus zwei Radien, oder auch aus zwei Diametern von bekannter Angulardistanz zu berechnen.

Aus dem, durch zwei x todistante Radien r und r' der äusseren Spirale bestimmten Werthe von a folgt nämlich:

$$p^{m-1} = \frac{(q-1)[(rq - r')(p-1) + a(q^x - 1)]}{a(q-p)(q^x - 1)},$$

was für zwei semissodistante Radien

$$= \frac{(q^{1/2} + 1)[(rq^{1/2} - r')(p-1) + a(q^{1/2} - 1)]}{a(q-p)},$$

und für zwei singulodistante Radien

$$= \frac{(rq - r')(p-1) + a(q-1)}{a(q-p)}$$

wird. Ebenso folgt aus dem durch zwei x todistante Diameter D und D' bestimmten Werthe von a :

$$p^{m-1} = \frac{(q-1)[(Dq^x - D')(p-1) + 2a(q^x - 1)]}{2a(q-p)(q^x - 1)} = M,$$

was für zwei semissodistante Diameter

$$= \frac{(q^{1/2} + 1)[(Dq^{1/2} - D')(p-1) + 2a(q^{1/2} - 1)]}{2a(q-p)},$$

und für zwei singulodistante Diameter

*) Es ist möglich, dass es für je zwei auf einander folgende Windungsquotienten einen *nothwendig* bestimmten Punkt giebt, wo die innere Spirale zu Ende geht; doch ist es mir bis jetzt nicht gelungen, weder die Existenz noch die Bedingung eines solchen Verhältnisses aufzufinden.

$$= \frac{(Dq - D')(p-1) + 2a(q-1)}{2a(q-p)}$$

wird. Hat man so die Grösse p^{m-1} berechnet, so ist es leicht, den Umlaufswinkel $(m-1)2\pi$ zu finden. Aus $p^{m-1} = M$ folgt nämlich

$$m-1 = \frac{\log M}{\log p},$$

und daher endlich

$$v = (m-1)2\pi = \frac{2\pi \log M}{\log p},$$

wodurch der Gränzwinkel beider Spiralen gefunden ist.

§. 17.

Tangentialwinkel der äusseren Spirale. Aus der Gleichung

$$r = R + A(q^n - 1)$$

folgt durch Differentiirung:

$$dr = Aq^n \log q \, dn$$

nun war aber $n = \frac{w-v}{2\pi}$, in welchem Ausdrucke v constant vorausgesetzt wird.

Folglich ergibt sich

$$2\pi dr = Aq^n \log q \, dw$$

und die Tangente des Tangentialwinkels ψ

$$\text{tang } \psi = \frac{rdw}{dr} = \frac{2\pi [R + A(q^n - 1)]}{Aq^n \log q}.$$

Setzt man in diesem Werthe $q = p$, so ist die äussere Spirale nur die, bis zu dem Umlaufswinkel $(m-1+n)2\pi$ verlängerte Fortsetzung der inneren Spirale, und dann wird

$$\text{tang } \psi = \frac{2\pi(p^{m+n} - 1)}{p^{m+n} \log p} = \text{tang } \varphi \text{ in §. 8.}$$

Setzt man $n = 0$, so wird

$$\text{tang } \psi = \frac{2\pi R}{A \log q} = \frac{2\pi(p^m - 1)(q-1)}{q \log q (p-1)p^{m-1}},$$

mit welchem Tangentialwinkel die äussere Spirale beginnt.

Setzt man endlich $n = \infty$, so erhält man

$$\text{tang } \psi = \frac{2\pi}{\log q},$$

oder den Gränzwinkel, welchem sich die äussere Spirale immer mehr nähert, ohne ihn doch jemals zu erreichen.

§. 18.

Schlussbemerkung. Indem ich hiermit die theoretischen Betrachtungen über die Diplospirale abbreche, bemerke ich nochmals, dass ich denselben nur einen hypothetischen Werth zuschreiben kann, weil es mir bis jetzt noch nicht gelungen ist, darüber Gewissheit zu erlangen, ob die ihnen zu Grunde liegende Ansicht über die Verknüpfung beider Spiralen der Natur völlig angemessen ist.

Sollte nicht sie, sondern die zweite der in §. 10. angedeuteten Ansichten das wahre Verhältniss ausdrücken, so würde sich die Gleichung der äusseren Spirale zunächst in folgender Form herausstellen:

$$r = a \left[\frac{p^z p^{m-1} - 1}{p-1} + \frac{q^z p^{m-1} (q^n - 1)}{q-1} \right],$$

worin n die Anzahl von *ganzen* Peripherien und z den *Ueberschuss* über solche bedeutet, welche der Umlaufswinkel $w = v + (n + z) 2\pi$ vom Anfangspunkte der äusseren Spirale an zurückgelegt hat*).

Noch glaube ich Folgendes erwähnen zu müssen. In den meisten Fällen vollendet wohl jede der beiden Spiralen, aus welchen die Diplospirale besteht, *mehre* Windungen, so dass man aus den *singulodistanten* Windungsabständen nach §. 12. die Quotienten p und q bestimmen kann. Es wäre jedoch möglich, dass es Diplospiralen (und besonders auch Triplospiralen, überhaupt Pleo-*spiralen*) gibt, in denen sich der Windungsquotient von einer Windung zur andern verändert**), ja es könnten sogar Fälle vorkommen, bei welchen sich innerhalb einer und derselben Windung *successiv* verschiedene Quotienten geltend machen. In allen derartigen Fällen ist die so einfache und sichere Methode, den Windungsquotienten aus *singulodistanten* Abständen zu bestimmen, gar nicht mehr anwendbar; vielmehr muss man dann zur Messung *nahe* liegender Windungsabstände seine Zuflucht nehmen, also *quadrantodistante*, ja vielleicht *octantodistante*, oder irgend andere *aequidistante* Abstände messen. Je näher sich aber die zu messenden Abstände liegen, um so genauer müssen die Messungen angestellt werden, und um so mehr muss man darauf bedacht sein, ein möglichst regelmässig gestaltetes Exemplar zur Messung auszuwählen.

Uebrigens würden dergleichen Messungen *nahe* liegender (*aequidistanter*) Windungsabstände in der Uebergangsregion zweier auf einander folgender Spiralen, das sicherste Prüfungsmittel abgeben, *welche* von den beiden Vorstellungsweisen über das Verhältniss dieser Spiralen die wahre ist. Die zweite Vorstellungsweise würde allein zu der Folgerung berechtigen, dass die *x*todistanten Windungsabstände in *allen* Regionen *unmittelbar* auf die Kenntniss des Windungsquotienten in der *x*ten Potenz gelangen lassen.

*) Ungeachtet dieser verschiedenen Gleichung folgen doch Resultate, welche zum Theil mit denen aus der Gleichung des §. 11. abgeleiteten Resultaten sehr viel Uebereinstimmung zeigen.

**) Sollte nicht auch Nautilus Pompilius hierher gehören? —

II.

NACHWEISUNG DER CONCHOSPIRALE IN DER NATUR.

1) *Gasteropoden.*

§. 49.

Allgemeine Bemerkungen. Die meisten Gasteropoden scheinen ihre Windungen nach dem Gesetze der Conchospirale zu bilden, indem die Windungsnah von dem Anfangspunkte der Windungsaxe aus in der Fläche eines Spiralcylinders herabsteigt, dessen Horizontalprojection oder Querschnitt eine Conchospirale ist.

Der Descensionswinkel der Windungsnah (oder der Suturalwinkel, wie ihn Alcide d'Orbigny nennt) ist in den meisten Geschlechtern *constant*; in einigen Geschlechtern jedoch veränderlich. Wir wollen uns an gegenwärtigem Orte nur mit dem ersteren Falle beschäftigen, dessen Bedingung auf die Folgerung führt, dass die Windungsnah in der developpirten Cylinderfläche eine *gerade Linie* bildet *).

Sehr häufig kommen bei den Gasteropoden Diplospiralen und wohl auch Triplospiralen vor, was sich gewöhnlich in der Totalform des Windungskegels sehr leicht zu erkennen gibt. Es ist nämlich eine bekannte Thatsache, dass dieser Windungskegel zwar in einigen Species von Anfang bis Ende als ein einziger und völlig *geradliniger* Kegel ausgebildet ist (z. B. *Trochus Conulus* u. a.); dass er dagegen in vielen Species nach unten steiler abfällt als nach oben, während wiederum in anderen Species das Gegentheil statt findet **). Dieses oft recht auffallende Gestaltungsverhältniss des Windungskegels steht nun mit dem Charakter der ihm zu Grunde liegenden Spirale im genauesten Zusammenhange. Fällt der Windungskegel in seiner ganzen Länge unter *demselben* Winkel ab, so hat die Conchylie eine *einfache* Spirale; erscheint dagegen der Kegel nach unten entweder *flacher* oder *steiler* abfallend als nach oben (also *concau* oder *convex*), so ist *wenigstens* eine *Diplospirale*, und zwar im ersteren Falle eine *exosthene*, im anderen Falle eine *entosthene* Diplospirale angezeigt. In allen solchen Fällen besteht der Windungskegel eigentlich aus zweien oder mehren Kegeln, indem ein oberer Kegel auf dem schräg abgestumpften Ende eines unteren Kegels aufgesetzt ist.

Bei den sehr lang gestreckten und spitz kegelförmigen Conchylien waltet die eine Spirale oft sehr vor, indem sie den grössten Theil des Windungskegels beherrscht. Man gibt sich dann wohl leicht der Vermuthung hin, dass nur *eine* Spirale vorhanden sei, wird aber doch nicht selten an der Spitze des Kegels eine zweite Spirale entdecken, und sich somit von dem Vorhandensein einer Diplospirale überzeugen.

*) Einige Beobachtungen lassen mich vermuthen, dass die Windungsnah in den Conchylien mit veränderlichem, und zwar beständig zunehmenden Descensionswinkel dem Gesetze der Logistik oder logarithmischen Linie folge.

***) Vergl. Alcide d'Orbigny im Bulletin de la soc. géol. T. XIII. p. 202.

§. 20.

Beobachtungsmethoden. Was nun die zur Ermittlung der nöthigen Beobachtungs-Elemente geeigneten Methoden betrifft, so sind solche etwas verschieden, je nachdem man es mit *stumpf* kegelförmigen Conchylien (z. B. mit *Solarium*, *Helix*, *Ampullaria*, *Natica*) oder mit *spitz* kegelförmigen Conchylien (z. B. mit *Turritella*, *Terebra*, *Cerithium*) zu thun hat.

Conchylien mit stumpfem und breitem Windungskegel legt man mit möglichst verticaler Axe auf die Scheibe des Conchyliometers *), bringt darauf das Fadenkreuz des Mikroskopes so genau als möglich über den Mittelpunkt der Horizontalprojection des Windungskegels, und misst endlich in der Richtung eines grössten Durchmessers eine vollständige Reihe von Windungsabständen, wie solche durch die Windungsnaht bestimmt werden, wobei man auch die Lage des Mittelpunktes bestimmen kann, wenn er deutlich zu erkennen ist. Man erhält auf solche Weise, zugleich mit diesen singulodistanten Windungsabständen, eine Reihe von singulodistanten Diametern, auch, wenn der Mittelpunkt bestimmbar ist, zwei Reihen singulodistanter Radien, und kann aus diesen Elementen die Spiralen berechnen. — Geben die Quotienten der singulodistanten Windungsabstände durchgängig nur *einen* Werth, so ist die Spirale eine *einfache*; lassen sie in der Hauptsache *zwei* Werthe erkennen, so ist eine *Diplospirale* angezeigt. Im letzteren Falle werden es die Werthe der Windungsquotienten bestätigen, was schon die genaue Betrachtung des Windungskegels vermuthen lässt, dass nämlich entweder die äussere oder die innere Spirale nach einem grösseren Quotienten gewunden ist, je nachdem der Windungskegel concav oder convex erscheint. — Bei *dieser* Messungsmethode wird also die *Horizontalprojection* des Spiralecyllinders, oder die ihm zu Grunde liegende Spirale *unmittelbar* gemessen.

Bei den sehr *spitz* kegelförmigen Conchylien lässt sich diese Methode nicht füglich anwenden, weil die Umläufe der Windungsnaht in der Horizontalprojection zu nahe an einander treten, und oft durch den vorspringenden Rücken der Windungen, oder durch die Leisten und Knoten der Schale verdeckt werden. Solche Conchylien legt man dergestalt auf die Scheibe des Conchyliometers, dass eine Falllinie oder Generatrix des Kegels möglichst horizontal und parallel dem Rantle des Millimeter-Maassstabes zu liegen kommt. Hierauf stellt man das Mikroskop so ein, dass der eine Faden des Fadenkreuzes diese Falllinie des Windungskegels deckt, und misst nun der Länge nach über die Conchylie weg die ganze Reihe der singulodistanten Windungsabstände, wodurch die Windungsquotienten gefunden werden. — Um die gleichfalls erforderliche Reihe von singulodistanten *Radien* zu finden, braucht man nur zugleich die *Spitze* des Kegels zu bestimmen, und ihren Abstand von den einzelnen gemessenen Windungspunkten aufzusuchen. Durch alle diese Messungen erhält man natürlich nur die eine Seite einer Verticalprojection der Windungsnaht.

*) Eine Masse von weichem Wachs oder Thon bietet die beste Unterlage und das beste Befestigungsmittel der Conchylien dar.

Da man endlich auch die *Amplitude* des Windungskegels*) in seinen verschiedenen Regionen, oder doch wenigstens an seiner Spitze kennen muss, wenn man die Verticalprojection auf die Horizontalprojection reduciren und den Descensionswinkel der Windungsnahrt berechnen will, so wird man auch hierzu gelangen, indem man die Conchyliie mit ihrer Axe horizontal legt, und erst den *einen* seitlichen Rand der Kegelspitze unter den Faden des Mikroskopes bringt, dann aber die Conchyliometerscheibe so lange dreht, bis auch der *zweite* Rand von dem Faden gedeckt wird. Der Winkel, um welchen die Scheibe gedreht werden musste, gibt die Amplitude des Windungskegels.

Bei allen diesen conchyliometrischen Messungen ist es nun gar sehr zu berücksichtigen, dass man aus ihnen in vielen Fällen nur auf ungefähre Näherungswerthe der Windungsquotienten gelangen wird, in welchen man jedoch diejenigen Zahlen leicht zu erkennen vermag, welche eigentlich die Form beherrschen. Denn dass in organischen Gebilden häufig *individuelle Anomalieen* vorkommen werden, dies lässt sich wohl a priori erwarten, ohne dass man deshalb berechtigt wäre, eine *specifische Gesetzmässigkeit* zu bezweifeln. Nur wird man diese letztere um so leichter und bestimmter zu erkennen vermögen, je regelmässiger gebildete Individuen man der Untersuchung unterwirft.

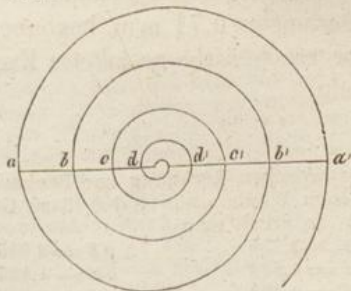
A) *Gasteropoden mit sehr stumpfem Windungskegel.*

§. 21.

Helix nemoralis. Ich will nun einige Beispiele anführen, durch welche der Beweis geliefert werden wird, dass es wirklich die *Conchospirale* ist, welche theils als einfache, theils als zusammengesetzte Spirale die Windungen vieler Gasteropoden bestimmt. Zuvörderst mögen einige Beispiele an solchen Formen erläutert werden, welche einen sehr stumpfen Windungskegel besitzen.

Helix nemoralis. Ein sehr regelmässig gestaltetes Exemplar gab mir folgende Beobachtungs-Elemente:

Windungsabstände	
im grossen Halbmesser;	im kleinen Halbmesser.
$a'b' = 2,75$ mm.	$ab = 2,25$
$b'c' = 1,85$	$bc = 1,45$
$c'd' = 1,25$	$cd = 0,95$.



*) Dieser Winkel ist es, welchen Alcide d'Orbigny nicht ganz passend den Spiralwinkel (angle spiral) nennt, und dessen grosse Beständigkeit in allen Individuen einer und derselben Species er hervorhebt.

Diameter	Differenzen derselben
$aa' = 12,10$	$D' - D = 5,00$
$bb' = 7,10$	$= 3,30$
$cc' = 3,80$	$= 2,20$
$dd' = 1,60$	

Da der Mittelpunkt ziemlich gut erkannt werden konnte, so bestimmte ich auch beide Reihen von singulodistanten Radien, und fand

im grösseren Halbmesser	im kleineren Halbmesser
$r' = 6,75$	$r = 5,35$
$= 4,00$	$= 3,10$
$= 2,15$	$= 1,65$
$= 0,90$	$= 0,70$

Dividirt man je zwei singulodistante Windungsabstände, so erhält man ganz unzweifelhaft den Windungsquotienten

$$p = \frac{3}{2},$$

indem die einzelnen Werthe so wenig von dieser Zahl abweichen, dass man solchen unbedingt als den Normalwerth betrachten kann *).

Dagegen überzeugt man sich leicht, dass weder die singulodistanten Radien noch die singulodistanten Diameter eine geometrische Progression bilden, dass also die logarithmische Spirale auf keine Weise angezeigt ist.

Bestimmt man aber nach §. 5. den Windungsquotienten p aus den Differenzen der singulodistanten Diameter oder Radien, so erhält man abermals $p = \frac{3}{2}$. Hieraus folgt denn, dass *Helix nemoralis* nach einer *Conchospirale* vom Windungsquotienten $\frac{3}{2}$ gewunden ist.

Weil nur eine *einfache* Spirale vorliegt, so können wir den Parameter a nach der Formel (§. 6.)

$$a = \frac{1}{2}(D' - pD) = r' - pr$$

berechnen; wir erhalten so:

$$\begin{array}{ll} \text{aus } aa' \text{ und } bb', & a = 0,72 \text{ mm.} \\ - bb' - cc', & = 0,70 \\ - cc' - dd', & = 0,70 \end{array}$$

die Radien geben sechs verschiedene Werthe, welche zwischen 0,60 und 0,80 mm. schwanken, und auf den Mittelwerth 0,74 führen. Wir sind daher zu der Folgerung berechtigt, dass das gemessene Exemplar von *Helix nemoralis* seine erste Windung mit dem Parameter 0,74 mm. begonnen habe.

Ein anderes, minder regelmässig gestaltetes Exemplar gab die singulodistanten Windungsabstände:

*) Die Uebereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung ergibt sich aus Folgendem. Legt man den *grössten* Windungsabstand 2,75 zu Grunde, und berechnet aus ihm die übrigen nach $p = \frac{3}{2}$, so erhält man

$$\begin{array}{ll} a'b' = 2,750 & ab = 2,245 \\ b'c' = 4,833 & bc = 4,497 \\ c'd' = 4,222 & cd = 0,968 \end{array}$$

welche Werthe von den beobachteten so wenig abweichen, als nur gefordert werden kann. Es beweist diess, dass bei der Messung in gegenwärtigem Falle sehr nahe alle Bedingungen erfüllt waren, weil ausserdem zwischen den Windungsabständen der einen und der andern Hälfte keine so völlige Uebereinstimmung stattfinden würde.

im grösseren Halbmesser im kleineren Halbmesser

$$\begin{array}{ll} a'b' = 3,25 & ab = 2,20 \\ b'c' = 2,05 & bc = 1,45 \\ c'd' = 1,25 & cd = 0,90 \end{array}$$

und die zugehörigen Diameter

	Differenzen
$a a' = 12,60$	$D' - D = 5,45$
$b b' = 7,15$	$= 3,50$
$c c' = 3,65$	$= 2,15$
$d d' = 1,50$	

Hier scheint in der That eine entosthene Diplospirale angezeigt zu sein, deren innere Windung nach $p = \frac{5}{3}$, die äussere Windung nach $q = \frac{3}{2}$ gebildet ist.

§. 22.

Solarium perspectivum. In der Horizontalprojection gemessen erhielt ich folgende Beobachtungs-Elemente, welchen ich zur Vergleichung die aus dem gefundenen Werthe von p berechneten Grössen beigefügt habe*).

*) Es sind diess die aus dem grössten Windungsabstände eines jeden Halbmessers für sich folgenden Werthe; berechnet man dagegen aus 4,65 die Abstände im kleineren Halbmesser, so erhält man 3,80 statt 3,60, 2,53 statt 2,45 u. s. w., also lauter etwas grössere Werthe als die gemessenen; was vermuthen lässt, dass bei der Messung nicht alle Bedingungen erfüllt waren. In dieser Hinsicht ist es nöthig, hier auf eine eigenthümliche Fehlerquelle aufmerksam zu machen, deren Einfluss nur selten ganz zu vermeiden ist. Dieselbe entspringt aus der Abweichung von der senkrechten Lage, welche die Axe der Conchylië sehr leicht erhalten wird, wenn man sie in ihrer Wachs- oder Thon-Unterlage auf der Scheibe des Conchyliometers aufstellt. Man kann selten dafür einstehen, dass nicht eine Abweichung von einigen Graden statt finde; ja, bei solchen Conchyliën, wo die Spindel sehr ausgeschweift und das untere Ende der Axe nicht scharf markirt ist, da kann die Abweichung derselben wohl bis 40° steigen. Durch diesen Umstand werden aber für die Messungs-Resultate ganz eigenthümliche Verhältnisse herbeigeführt. Setzen wir nämlich die Amplitude des Windungskegels = α , und die Abweichung seiner Axe von der verticalen Stellung oder (was hier dasselbe ist) von der optischen Axe des Mikroskopes in der Verticallebene der Messung, = δ , so wird irgend ein Windungsabstand h in der Horizontalprojection, statt mit seinem wirklichen Werthe, entweder mit dem grösseren Werthe:

$$H' = \frac{h \sin(\frac{1}{2}\alpha + \delta)}{\sin \frac{1}{2}\alpha} = h\gamma'$$

oder mit dem kleineren Werthe:

$$H = \frac{h \sin(\frac{1}{2}\alpha - \delta)}{\sin \frac{1}{2}\alpha} = h\gamma$$

erscheinen müssen. Der ihm gegenüberliegende nächste semissodistante Windungsabstand h' dagegen wird im ersteren Falle mit dem Werthe $h'\gamma$, im andern Falle mit dem Werthe $h'\gamma'$ beobachtet werden. Ueberhaupt werden alle Windungsabstände des *einen* Halbmessers *grösser*, und alle Windungsabstände des *anderen* Halbmessers *kleiner* beobachtet werden, als sie wirklich sind, indem jene mit dem Factor γ' , diese mit dem Factor γ behaftet sind. Dadurch wird nun zwar *innerhalb jedes einzelnen* Halbmessers das *Verhältniss* der Windungsabstände *gar nicht* gestört werden, wohl aber wird das Verhältniss je zweier semissodistanter Windungsabstände *unrichtig* ausfallen müssen, denn statt auf das Verhältniss $h:h' = 1:\sqrt{p}$, führt uns die Beobachtung entweder auf das Verhältniss $h\gamma':h'\gamma = 1:x$, oder auf das Verhältniss $h\gamma:h'\gamma' = 1:y$, so dass der Quotient der gemessenen semissodistanten Windungsabstände entweder mit $\frac{\gamma'}{\gamma}$ oder mit $\frac{\gamma}{\gamma'}$ multiplicirt werden müsste, um den wahren Werth von \sqrt{p} zu geben. Wie bedeutend übrigens dieser Fehler, und wie gross daher die scheinbare Discordanz

Windungsabstände

im grossen Halbmesser		im kleinen Halbmesser	
gemessen	berechnet	gemessen	berechnet
$a'b' = 4,65$	4,65	$ab = 3,60$	3,60
$b'c' = 3,25$	3,10	$bc = 2,45$	2,40
$c'd' = 2,05$	2,06	$cd = 1,60$	1,60
$d'e' = 1,30$	1,38	$de = 1,05$	1,06
$e'f' = 0,90$	0,92	$ef = 0,75$	0,74
$f'g' = 0,60$	0,61	$fg = 0,50$	0,47

Diese Windungsabstände führen offenbar auf den Werth $p = \frac{3}{2}$, indem nur der eine Abstand $b'c'$ eine etwas grössere Abweichung zeigt, weshalb an seiner Stelle eine locale Störung im Wachsthum der Conchylie statt gefunden haben mag.

Die zugleich mit gemessenen *Diameter* wurden mit nachstehenden Werthen gefunden:

Diameter	Differenz $D' - D$	
	gemessen	berechnet
$aa' = 23,80$	8,25	8,25
$bb' = 15,55$	5,70	5,50
$cc' = 9,85$	3,65	3,66
$dd' = 6,20$	2,35	2,44
$ee' = 3,85$	1,65	1,63
$ff' = 2,20$	1,10	1,09
$gg' = 1,10$		

Man sieht hieraus, dass die *Diameter keine* geometrische Progression bilden, dass also die Windungen *nicht* durch die logarithmische Spirale bestimmt sein können. Suchen wir dagegen nach §. 5. die Quotienten der *Diameter-Differenzen*, so erhalten wir abermals sehr nahe den Werth $p = \frac{3}{2}$; wie wenig die Beobachtung dieser Folgerung widerspricht, zeigen die nach diesem Werthe aus der ersten Differenz 8,25 berechneten folgenden Differenzen.

Berechnet man endlich aus den *Diametern* nach der Formel $a = \frac{1}{2}(D' - pD)$ die Werthe des Parameters a , so erhält man im Mittel

$$2a = 0,555 \text{ mm.}$$

mit den Extremen 0,78 und 0,425 mm.

Ein anderes Exemplar gab gleichfalls sehr übereinstimmend $p = \frac{3}{2}$, aber für a einen etwas grösseren Werth; nämlich im Minimo $2a = 0,775$ mm.

stanten Windungsabstände werden könne, diess zeigen folgende Beispiele. Ist $\alpha = 90^\circ$ und $\delta = 5^\circ$, so wird $\gamma' = 1,083$ und $\gamma = 0,909$; ist aber $\alpha = 90^\circ$ und $\delta = 10^\circ$, so wird $\gamma' = 1,161$ und $\gamma = 0,813$. Man sieht hieraus, wie sorgfältig man darauf Bedacht nehmen muss, die Axe der Conchylie möglichst vertical zu stellen, sobald die Spirale in der Horizontalprojection gemessen werden soll. Aus einer solchen Abweichung der Axe erklären sich also die in den §§. 23. und 24. für *Natica glaucina* und *Natica aperta* ersichtlichen Discordanzen zwischen den Windungsabständen *beider* Halbmesser, während doch die Abstände jedes *einzelnen* Halbmessers ihr wahres Verhältniss behaupten. Dasselbe gilt für die weit geringeren Abweichungen, welche bei *Solarium perspectivum* statt finden, während bei *Helix nemoralis* zufällig die Axe fast genau senkrecht gestanden haben mag.

§. 23.

Natica glaucina. An einem sehr regelmässig gebildeten Exemplare dieser Species fand ich folgende Elemente:

Windungsabstände			
im grossen Halbmesser		im kleinen Halbmesser	
	beobachtet	berechnet	
$a'b' =$	4,25	4,25	$ab =$ 2,75
$b'c' =$	1,40	1,41	$bc =$ 0,95
$c'd' =$	0,45	0,47	$cd =$ 0,35
$d'e' =$	0,25	0,23	$de =$?

Diameter		Differenz $D' - D$	
	beobachtet	berechnet	
$aa' =$	10,80	7,00	7,00
$bb' =$	3,80	2,35	2,33
$cc' =$	1,45	0,80	0,78
$dd' =$	0,65		

Die Windungsabstände führen fast ganz genau auf den Quotienten 3; es lässt jedoch schon das Verhältniss $c'd' : d'e'$ vermuthen, dass wir es nicht mit einer einfachen Spirale, sondern mit einer Diplospirale zu thun haben, deren äussere Windungen also nach dem Quotienten $q = 3$ gewunden sind, während die innersten Windungen wahrscheinlich nach $p = 2$ gewunden sein dürften*). Indessen scheint die innere Spirale sehr bald in die äussere Spirale überzugehen, welcher daher auch die meisten Windungen angehören.

Die gemessenen Durchmesser beziehen sich alle auf die äussere Spirale, weshalb die Quotienten ihrer Differenzen wiederum sehr genau auf den Werth $q = 3$ gelangen lassen. Versuchen wir es aber, den Parameter a nach der, nur für die einfache Spirale gültigen Formel $a = \frac{1}{2} (D' - qD)$ zu berechnen, so erhalten wir lauter negative Werthe; zum Beweise, dass wir es wirklich mit einer exosthenen Diplospirale zu thun haben (§. 6. und 15.).

Leider gestatteten die inneren Windungen wegen ihrer Kleinheit keine genaue Messung mit dem mir zu Gebote stehenden Instrumente, weshalb denn auch der eigentliche Werth von a nicht bestimmt werden konnte**).

*) Ich kann nicht umhin zu bemerken, dass die nach $q = 3$ aus dem grössten Windungsabstände berechneten Windungsabstände des kleinen Halbmessers mit auffallend kleineren Werthen gefunden werden, als es die Beobachtung ergab; nämlich

$$\begin{aligned} ab &= 2,455 \\ bc &= 0,818 \\ cd &= 0,273 \end{aligned}$$

was, bei der nahen Uebereinstimmung der auf jeder Seite gefundenen Windungsabstände unter sich, allerdings befremden muss, aber daraus zu erklären ist, dass die Axe der Conchylie bei der Messung schief stand. Eine andere Messung nach einer anderen Richtung gab

$$\begin{aligned} a'b' &= 4,0 & ab &= 2,4 \\ b'c' &= 1,3 & bc &= 0,8 \\ c'd' &= 0,4 & cd &= 0,3 \end{aligned}$$

mit einer sehr guten Uebereinstimmung der beiderseitigen Windungsabstände.

***) Der Nonius meines Instruments giebt die Zehnthelle eines Millimeters an, und lassen sich also die Messungen bequem bis auf 0,05 mm. genau anstellen; viel weiter

§. 24.

Natica aperta Lam. Aus der Pariser Tertiärformation; die Messung wurde in der Horizontalprojection angestellt, und ergab:

Windungsabstände		Windungsabstände	
im grossen Halbmesser		im kleinen Halbmesser	
beobachtet	berechnet	beobachtet	berechnet
$a'b' = 4,10$	4,100	$ab = 2,45$	2,450
$b'c' = 2,05$	2,050	$bc = 1,20$	1,225
$c'd' = 1,05$	1,025	$cd = 0,60$	0,612
$d'e' = 0,55$	0,512	$de = 0,30$	0,306
$e'f' = 0,30$		$ef = ?$	
Diameter		Differenz $D' - D$	
		beobachtet	berechnet
$aa' = 13,35$		6,55	6,550
$bb' = 6,80$		3,25	3,275
$cc' = 3,55$		1,65	1,637
$dd' = 1,90$		0,85	0,819
$ee' = 1,05$			

Die Windungsabstände führen sehr übereinstimmend auf den Werth $q = 2$; derselbe folgt aus den Differenzen der Diameter, während diese selbst keine geometrische Progression bilden*). Dass jedoch die innersten Windungen nach einem *anderen* Quotienten gewunden sein, und daher auch hier wiederum *zwei* Spiralen vorliegen müssen, dies ergibt sich daraus, weil der Ausdruck $\frac{1}{2}(D' - qD)$ lauter negative Werthe erhält.

Die Kleinheit der innersten Windungen gestattete keine genaue Messung derselben mit meinem Conchylioneter, weshalb ich auf die Bestimmung von p und a Verzicht leisten muss. Doch ist jedenfalls $p < q$, und wahrscheinlich $= \frac{5}{3}$ oder $\frac{3}{2}$.

Messungen an *Natica Sigaretina* gaben sehr genau den Windungsquotienten 2, jedoch ebenfalls mit negativem Werthe von $D' - qD$, woraus sich ergibt, dass auch hier die innerste Windung nach einem kleineren Quotienten gewunden sein muss.

B) *Gasteropoden mit spitzem Windungskegel.*

§. 25.

Turritella terebellata und *imbricata*. Die sehr spitzen oder thurmformigen Windungskegel sind meist durch *kleinere* Werthe der Windungsquotienten ausgezeichnet, wie folgende Beispiele lehren.

kann ich ohnedies nicht gehen, weil die Fäden des Fadenkreuzes etwas stark sind. Es unterliegt aber keinem Zweifel, dass in vielen Fällen für die Messungen der *innersten* Windungen *grössere* Grade der Genauigkeit erfordert werden.

*) Bei aller Uebereinstimmung, welche die Windungsabstände innerhalb der einzelnen Halbmesser mit dem Gesetze $q = 2$ zeigen, ist doch die Abweichung ihrer, aus einander *gegenseitig* abzuleitenden Werthe nicht unbedeutend; die Axe der Conchylie muss also bei der Messung eine starke Abweichung von der vertikalen Lage gehabt haben.

Turritella terebellata von Paris. Diese sehr lang gestreckte *Turritella* gab in einer Falllinie des Windungskegels gemessen von unten nach oben folgende Reihe von Windungsabständen:

beobachtet	berechnet	nach
9,8	9,94	$\frac{7}{6}$
8,5	8,50	-
7,2	7,27	-
6,3	6,24	-
5,4	5,35	-
4,7	4,59	-
4,0	3,93	-
3,3	3,37	-
3,0	2,89	-
2,4	2,47	-
2,1	2,12	-
1,8	1,82	-
1,5	1,50	$\frac{6}{5}$
1,2	1,20	$\frac{5}{4}$

Die Spitze des Windungskegels war an dem mir zu Gebote stehenden Exemplare abgebrochen. Man sieht jedoch aus diesen Beobachtungen, dass die Windungsabstände anfangs nach $p = \frac{5}{4}$ ausgebildet sind, von welcher inneren Spirale nur noch die letzte Windung erhalten war; dann folgt eine Uebergangswindung, für welche sich zufällig der Werth $\frac{6}{5}$ herausstellt, und weiterhin ist die ganze Schale durch zwölf Windungen nach $q = \frac{7}{6}$ gebildet.

Die berechneten Werthe der letzten zwölf Windungsabstände sind aus der Summe der gemessenen Abstände unter Zugrundlegung von $q = \frac{7}{6}$ gefunden worden.

Turritella imbricataria von Paris; 40 Windungsabstände von unten nach oben gaben:

beobachtet	berechnet	nach
6,45	6,385	$\frac{6}{5}$
5,45	5,324	-
4,50	4,434	-
3,70	3,695	-
3,05	3,079	-
2,55	2,566	Uebergang
2,00	2,000	$\frac{7}{6}$
1,70	1,714	-
1,40	1,469	-
1,20	1,259	-

Also liegt auch dieser Species eine Diplospirale zu Grunde, welche zwar anfangs nach $\frac{7}{6}$, dann aber grösstentheils nach $\frac{6}{5}$ gewunden ist. Jede dieser beiden *Turritellen* liefert uns also ein Beispiel von einer Diplospirale, jedoch die erstere von einer entosthenen, die andere von einer exosthenen Diplospirale

§. 26.

Turritella carinata. Diese Species aus der Subapenninen-Formation gab mir in einem gut erhaltenen Exemplare folgende Reihe von Windungsabständen und Radien:

Windungsabstände		Radien	Differenz $r' - \frac{5}{4}r$
beobachtet	berechnet nach $\frac{5}{4}$		
1,00	1,00	2,00	
1,25	1,25	3,20	0,70
1,60	1,56	4,80	0,80
2,00	1,95	6,80	0,80
2,45	2,44	9,25	0,75
3,05	3,05	12,30	0,74
3,70	3,84	16,00	0,63
4,80	4,76	20,80	0,80

Diese Windungsabstände führen offenbar auf den Quotienten $p = \frac{5}{4}$, indem nur der vorletzte Abstand einen verschiedenen Werth andeuten könnte, welcher vielleicht der Uebergangswindung zu einem anderen Quotienten angehört, da ich an einem grösseren Exemplare weiterhin den Quotienten $q = \frac{8}{7}$ gefunden habe.

Die Reihe der Radien scheint zwar in den vier Gliedern von 6,80 bis 16,00 eine geometrische Progression nach $\frac{4}{3}$ zu bilden, was jedoch nur zufällig und durchaus nicht gesetzlich sein kann, wie die übrigen Radien lehren. Wenn wir dagegen nach der Formel $a = r' - pr$ (§. 6.) den Parameter a , oder vielmehr denjenigen Theil der Falllinie des Windungskegels bestimmen, welcher dem Parameter a entspricht, so erhalten wir ziemlich nahe liegende Werthe, als deren Mittelwerth sich

$$f = 0,75 \text{ mm.}$$

herausstellt. Wäre nun auch die Amplitude α des Windungskegels bekannt, so würde sich a nach der Formel

$$a = f \sin \frac{1}{2} \alpha$$

berechnen lassen.

§. 27.

Cerithium lignitarum, aus Mähren. Diese Species scheint nach denen, an drei Exemplaren angestellten Messungen triplospiral zu sein, was übrigens gewiss mit sehr vielen thurmformigen Conchylien der Fall ist. Ich fand nämlich zuvörderst an einem kleineren Exemplare nahe von der Spitze weg

die Windungsabstände		
beobachtet	berechnet	nach
0,70	0,71	$\frac{7}{5}$
1,00	1,00	-
1,40	1,40	-
1,95	1,96	-
2,55	2,61	$\frac{4}{3}$
3,60	3,48	-
4,75	4,64	-

Zwei grössere, aber an ihrer Spitze abgeschweuerte und deshalb dort nicht messbare Exemplare gaben mir dagegen folgende Windungsabstände:

das eine Ex.			das andere Ex.		
beobachtet	berechnet	nach	beobachtet	berechnet	nach
2,40	2,31	$\frac{4}{3}$	2,20	2,17	$\frac{4}{3}$
3,10	3,08	-	2,85	2,89	-
4,10	4,10	-	3,85	3,85	-
4,75	4,78	$\frac{7}{6}$	4,90	4,90	$\frac{7}{6}$
5,65	5,58	-	5,70	5,72	-
			6,70	6,67	-

Hieraus geht wohl hervor, dass *Gerithium lignitarum* seinen Windungskegel successiv nach drei verschiedenen Spiralen bildet, deren Quotienten sich bestimmen:

$$\begin{aligned} \text{für die innerste Spirale } p &= \frac{7}{5} \\ \text{für die mittlere Spirale } q &= \frac{4}{3} \\ \text{für die äusserste Spirale } s &= \frac{7}{6} \end{aligned}$$

Da nun $\frac{7}{5} > \frac{4}{3}$, und $\frac{4}{3} > \frac{7}{6}$, so ist es eine *entosthene* Triplospirale, welche das Gestaltungsgesetz dieser Conchylic bestimmt; hieraus erklärt sich auch die convexe Form des Windungskegels.

§. 28.

Pleurotomaria conoidea, aus der Juraformation von Bayeux. Ein ziemlich vollständig erhaltenes Exemplar gab mir folgende Elemente:

Windungsabstände			Radien	$r' - pr$
beobachtet	berechnet	nach		
1,20	1,20	$\frac{4}{3}$	2,0	0,53
1,60	1,60	-	3,2	0,53
2,10	2,13	-	4,8	0,50
2,80	2,84	-	6,9	0,50
3,50	3,50	$\frac{7}{5}$	9,7	-
4,90	4,90	-	13,2	-0,38
6,90	6,86	-	18,4	-0,34
			25,0	

Es unterliegt hiernach keinem Zweifel, dass der Windungskegel nach zwei verschiedenen Spiralen gebildet ist, für welche sich $p = \frac{4}{3}$ und $q = \frac{7}{5}$ bestimmt. Da nun $q > p$, so ist es eine *exosthene* Diplospirale, welche dieser Conchylic zu Grunde liegt; was auch vollkommen mit der allgemeinen Form des Windungskegels übereinstimmt, welcher concav ist, oder unten flacher abfällt als oben. Der Uebergang zwischen den Windungsabständen 2,80 und 3,50 giebt (wohl nur zufällig) genau den Quotienten $\frac{5}{4}$.

Von denen in der Falllinie des Kegels gemessenen Radien der Windungspunkte beziehen sich die fünf ersten auf die *innere* Spirale, und wir erhalten aus ihnen nach der Formel $r' - pr$ die obenstehenden sehr übereinstimmenden und positiven Werthe, deren Mittelwerth

$$f = 0,545 \text{ mm.}$$

Wäre uns also auch die Amplitude α des Windungskegels an seiner Spitze bekannt, so würde $a = f \sin \frac{1}{2} \alpha$ gefunden werden.

Ganz andere Resultate ergeben sich, wenn wir bei der Bildung der Differenz $r' - qr$ die drei folgenden Radien benutzen, welche sich auf die äussere Spirale beziehen; zuvörderst erhalten wir *negative* Werthe, was nach §. 15. der Fall sein muss, weil $q > p$ ist; ferner erhalten wir zwar unter einander übereinstimmende, aber von den vorher gefundenen sehr abweichende Werthe, was erklärlich ist, weil ja die Differenz $qr - r'$ noch mit einem sehr complicirten Factor multiplicirt werden muss, um den wahren Werth von a zu geben. Ich glaube nicht, dass man bei organischen Gebilden eine grössere Uebereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung erwarten kann.

2) Cephalopoden.

§. 29.

Allgemeine Bemerkungen. Bekanntlich sind die spiralförmig gewundenen Schalen der Cephalopoden grösstentheils in einer Ebene dergestalt aufgewunden, dass die inneren Windungen durch die äusseren mehr oder weniger verdeckt werden; ja, nicht selten umschliesst die letzte Windung alle übrigen so vollständig, dass von diesen fast gar nichts zu sehen ist. Deswegen ist man bei den meisten Species von Nautilus, Ammonites, Goniatites, Bellerophon u. s. w. genöthigt, die Schale auf eine zweckmässige Weise durchschneiden und anschleifen zu lassen, bevor man das Gesetz ihrer Windung studiren kann.

Es ist nun besonders der *Windungsrücken*, dessen Lage das nächste und sicherste Anhalten bei der Untersuchung dieser Schälgehäuse darbietet. Die Rückenlinie ist ja in den Ammoniten und Goniatiten durch den Siphon, und ausserdem oft durch einen Kiel, durch eine Rinne oder durch sonstige Merkmale ausgezeichnet, welche ihr vorzugsweise die Aufmerksamkeit zuwenden müssen; überdies erscheint sie als die *einzig* symmetrische Halbiringlinie und zugleich als diejenige Linie der Schale, in welcher sich die Windungen mit den grössten Dimensionen herausstellen. Daher werden wir an gegenwärtigem Orte die *Rückenspirale* zum ausschliesslichen Gegenstande unserer Untersuchungen machen. Die bei den Gasteropoden so wichtige Nahtspirale hat zwar auch bei vielen Cephalopoden ihre Bedeutung, gewährt aber doch ein weit weniger sicheres Anhalten als die Rückenspirale, und wird nur einen untergeordneten Werth haben, wenn die Windungen sehr stark umschliessend und folglich die Dimensionen der Windungsnahse sehr klein sind.

Die Schnitte, durch welche die Architektur der Cephalopodenschalen aufgeschlossen werden kann, müssen so genau als möglich central sein, was allerdings seine Schwierigkeit hat, und wohl in den meisten Fällen nur näherungsweise zu erreichen ist, weil der Mittelpunkt der Schale entweder in den Windungen versteckt, oder auch bei den versteinerten Cephalopoden theils durch Gesteinsmasse verdeckt, theils ausgebrochen zu sein pflegt. Uebrigens aber ist der Schnitt entweder *parallel* der Windungsebene, oder *rechtwinkelig* auf dieselbe anzulegen, entweder als *Längsschnitt* oder als *Querschnitt* auszuführen.

Bei solchen Cephalopodenschalen, welche nur mit wenigen Windungen vollendet sind (wie z. B. bei *Nautilus Pompilius*), dürften die Längsschnitte, bei solchen dagegen, welche eine grössere Anzahl von Windungen besitzen (wie z. B. bei den meisten Ammoniten), dürften die Querschnitte vorzuziehen sein. Diese Querschnitte gewähren in der That eine so vollständige Einsicht in die Architektur der Ammoniten und anderer Cephalopoden, dass die Herstellung derselben allen denen nicht genug empfohlen werden kann, welche sich mit einer Untersuchung ihrer Formen beschäftigen wollen.

Noch giebt es eine Methode, um auch an *ganzen*, d. h. *nicht* durchschnittenen Exemplaren zur Kenntniss wenigstens desjenigen Gesetzes zu gelangen, welches die äusserste Windung beherrscht. Sie besteht darin, dass man die letzten drei quadrantodistanten Diameter misst, was allemal dann bewerkstelligt werden kann, wenn das Ende der letzten Windung *quer* (d. h. in radialer Richtung) abgebrochen ist; eine Bedingung, welche sich leicht erfüllen lässt, wenn sie nicht schon durch den natürlichen Abbruch erfüllt sein sollte.

Dass übrigens bei solchen Ammoniten, deren Rücken gerippt und undulirt, oder mit einem gekörnten oder gefalteten Kiele versehen ist, die Messungen mehr oder weniger unsicher werden müssen, dies bedarf zwar keiner Erwähnung, wohl aber in vorkommenden Fällen einer sorgfältigen Berücksichtigung. Ist dann der Siphon in allen Windungen sichtbar, so würde es wohl am zweckmässigsten sein, die Messungen unmittelbar auf ihn zu beziehen.

§. 30.

Messungsmethoden. Auch hier kommt es zunächst darauf an, aus gemessenen äquidistanten Windungsabständen die Windungsquotienten p, q, s u. s. w. zu finden, welche in den verschiedenen Regionen der Schale das Gesetz ihrer Windung bestimmen.

Bei solchen Cephalopoden, welche überhaupt nach sehr *wenigen* Windungen die *Gränze* ihres Wachsthums erreichen, und bei denen im Allgemeinen die *Längsschnitte* vorzuziehen sind, verfährt man nun so, dass man, nachdem das Fadenkreuz des Mikroskopes in Bezug auf die Scheibe des Conchylometers centrirt worden ist, die Schnittfläche der Conchylie horizontal und möglichst centrirt auf die Scheibe auflegt, und nun durch alle Windungen hindurch die quadrantodistanten oder auch octantodistanten Windungsabstände misst, indem man nach jeder Messung die Scheibe um 90° oder 45° dreht. Auf diese Weise werden zugleich die zugehörigen Diameter erhalten, und also alle diejenigen Beobachtungs-Elemente gewonnen, deren man zur vollständigen Berechnung der Form bedarf.

Bei denjenigen Cephalopoden dagegen, welche eine grössere Anzahl von Windungen besitzen und zweckmässiger in ihren *Querschnitten* studirt werden, stellt man die Conchylie dergestalt auf die Scheibe des Conchylometers, dass ihre Schnittfläche horizontal, und ihr grösster Durchmesser oder die Axe des Schnittes (in welcher alle Durchschnittspunkte der Rückenspirale und des Siphons enthalten sind) dem Millimetermaassstabe parallel zu liegen kommt. Man überzeugt sich am besten davon, dass diese Lage erreicht worden ist, wenn man das Mikro-

skop über die Schnittfläche hinführt und zusieht, ob der eine Faden des Fadenkreuzes alle Durchschnittspunkte der Rückenlinie und des Siphon deckt. Hierauf misst man die sämtlichen singulodistanten Windungsabstände der Rückenspirale, wie solche in der Axe des Querschnittes hinter einander liegen, sowohl im grösseren als im kleineren Halbmesser dieses Querschnittes, und erhält so zugleich eine Anzahl von singulodistanten und semissodistanten Diametern, also überhaupt alle zur Berechnung erforderlichen Beobachtungselemente.

§. 31.

Formänderung der Schale bei verschiedenen Windungsquotienten. Den Cephalopodenschalen scheint gewöhnlich eine Diplospirale, ja nicht selten eine Triplospirale zu Grunde zu liegen. In den Querschnitten derselben geben sich die verschiedenen einzelnen Spiralen oft durch eine mehr oder weniger auffallende Aenderung der Form zu erkennen, welche in der Dorsalregion der Schale am deutlichsten hervortritt, und es bisweilen auf den ersten Blick erkennen lässt, dass man es mit einer diplospiralen Schale zu thun hat. So erscheint z. B. im Querschnitte der Rücken der inneren Windungen oft sehr flach gewölbt, während der Rücken der äusseren Windungen einen scharfen Winkel bildet; oder die inneren Windungen sind fast halbkreisförmig gebogen, während die äusseren entweder platt oder hoch elliptisch gewölbt erscheinen; auch ist wohl nach aussen ein Kiel vorhanden, von welchem die innersten Windungen keine Spur erkennen lassen; u. s. w. Man wird nun gewöhnlich finden, dass diesen verschiedenen Formen verschiedene Windungsquotienten entsprechen, und dass in derjenigen Region des Querschnittes, wo sich die Formänderung deutlich zu erkennen giebt, der Uebergang aus dem einen Gesetze in das andere statt findet. Dass diese Formänderung des Rückens, oder überhaupt des Querschnittes der einzelnen Windungen, mehr oder weniger eine allgemeine Formverschiedenheit der ganzen Schale in den verschiedenen Stadien ihres Wachsthums zur Folge haben müsse, versteht sich von selbst; auch braucht es wohl kaum erwähnt zu werden, dass sie nicht plötzlich eintritt, sondern dass sich die eine Form allmählig aus der anderen herausbildet.

Ich wende mich nun zur Betrachtung einiger Beispiele, um den Beweis zu liefern, dass wahrscheinlich die meisten Cephalopoden den Gesetzen der Conchospirale unterworfen sind, und dass auch bei ihnen die zusammengesetzten Spiralen zu den sehr gewöhnlichen Erscheinungen gehören*).

§. 32.

Ammonites Murchisonae von Aalen. Dickrippige Varietät, mit breitem Rücken, weiter Mündung und tiefem Nabel (ähnlich Zieten, Taf. 6., Fig. 2.). Der Querschnitt entblöste drei vollständige Windungen, der innere Theil war ausgebrochen. Eine Messung gab folgende Beobachtungselemente:

*) Alle im Folgenden angeführte Messungen wurden an Querschnitten angestellt.

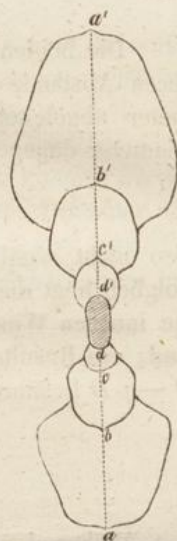
Windungsabstände

im grossen Halbmesser im kleinen Halbmesser

$a'b' = 20,50$	$ab = 14,2$
$b'c' = 10,00$	$bc = 7,1$
$c'd' = 5,05$	$cd = 3,5$

Diameter $D' - D$

$aa' = 67,20$	$34,70$
$bb' = 32,50$	$17,10$
$cc' = 15,40$	$8,55$
$dd' = 6,85$	



Die Windungsabstände führen unmittelbar auf den Windungsquotienten $p = 2$; dasselbe Resultat folgt aus den Differenzen der Diameter *). Bestimmt man a nach der Formel

$$a = \frac{1}{2}(D' - pD),$$

so erhält man zwei Mal den Werth 0,85 und ein Mal den Werth 1,1, also im Mittel 0,92 mm. Demnach ist das gemessene Exemplar wahrscheinlich monospiral, beginnt mit dem Parameter 0,92 und ist nach dem Quotienten 2 gewunden. Die Quotienten der Diameter sind 2,07, 2,11 und 2,25; folglich bilden die Diameter keine geometrische Progression, womit zugleich die Unzulässigkeit der logarithmischen Spirale erwiesen ist.

A. Murchisonae von Aalen; andere Varietät, scheibenförmig, mit scharfem Rücken und schmaler Mundöffnung; der Querschnitt des gemessenen Exemplares zeigte ebenfalls nur drei Windungen, weil die innersten Windungen ausgebrochen waren **).

Windungsabstände

im grossen Halbmesser im kleinen Halbmesser

$a'b' = 23,00$	$ab = 16,45$
$b'c' = 10,20$	$bc = 7,00$
$c'd' = 5,05$	$cd = 3,50$

Diameter $D' - D$

$aa' = 71,85$	$39,45$
$bb' = 32,40$	$17,20$
$cc' = 15,20$	$8,55$
$dd' = 6,65$	

*) Die beiderseitigen Windungsabstände stimmen recht gut, denn es wird $ab = a'b' : \sqrt{2} = 14,5$.

***) Daher konnte der Querdurchschnitt nur sehr ungefähr central sein, was auch die geringere Uebereinstimmung der gemessenen Werthe erklärt. Desungeachtet stimmen die beiderseitigen Windungsabstände recht wohl zusammen.

Die beiden kleineren Windungsabstände geben $p = 2$, die beiden grösseren Abstände $q = \frac{9}{4}$, welchen Werthen die aus den Differenzen der Diameter abgeleiteten Quotienten sehr wohl entsprechen. Die Quotienten der Diameter dagegen sind

$$\frac{cc'}{dd'} = 2,28; \frac{bb'}{cc'} = 2,13; \frac{aa'}{bb'} = 2,22.;$$

also nicht wohl vereinbar mit der Annahme einer logarithmischen Spirale. Folglich liegt dieser Varietät eine exosthene Diplospirale zu Grund, in welcher die inneren Windungen nach 2, die äusseren Windungen nach $\frac{9}{4}$ gewunden sind; ein Resultat, welches seine Bestätigung findet, wenn wir die Differenz $D' - pD$ bestimmen; es folgt nämlich:

$$cc' - 2dd' = 4,9 \text{ mm.}$$

$$bb' - 2cc' = 2,0$$

$$aa' - \frac{9}{4}bb' = -4,05.$$

Während also die Diameter der inneren Spirale für $\frac{1}{2}(D' - pD)$ den positiven Mittelwerth 0,97 mm. geben, welcher dem für die vorige Varietät gefundenen Werthe von a sehr nahe kommt, so folgt aus den Diametern der äusseren Spirale ein negativer und ganz verschiedener Werth, wie dies ja nach §. 15. deshalb der Fall sein muss, weil wir es hier mit einer exosthenen Diplospirale zu thun haben.

§. 33.

Ammonites Murchisonae (?) von Moskau. Ein kleines, sehr schönes, farbenspielendes Exemplar. Der Querschnitt wurde mit Oel bestrichen und im Sonnenlichte gemessen, um die innersten Windungen deutlich beobachten zu können; ich erhielt so folgende Elemente:

Windungsabstände

im grossen Halbmesser	im kleinen Halbmesser
$a'b' = 6,20$	$ab = 4,40$
$b'c' = 3,10$	$bc = 2,15$
$c'd' = 1,55$	$cd = 1,10$
$d'e' = 0,80$	$de = 0,60$
$e'f' = 0,40$	$ef = 0,30$
$f'g' = 0,25$	$fg = 0,20$
Diameter	$D' - D$
$aa' = 21,55$	10,60
$bb' = 10,95$	5,25
$cc' = 5,70$	2,65
$dd' = 3,05$	1,40
$ee' = 1,65$	0,70
$ff' = 0,95$	0,45
$gg' = 0,50$	

Aus den Windungsabständen *) folgt mit grosser Bestimmtheit, dass die äusseren Windungen weit hinein nach $q = 2$ gebildet sind, wogegen die innersten Windungen, von $e'f'$ an, auf den Quotienten $p = \frac{3}{2}$ führen; ein Resultat, welches durch die Differenzen der Diameter vollkommen bestätigt wird. Dieser Ammonit hat daher eine exosthene Diplospirale; auch können wir im Voraus erwarten, dass die Differenz $D' - qD$ für die äusseren Diameter negativ ausfallen, und dass der Werth von a , unmittelbar durch den Ausdruck $\frac{1}{2}(D' - pD)$, nur aus den innersten Windungen mit einiger Sicherheit zu bestimmen sein werde. In der That finden wir:

$$aa' - 2bb' = -0,35 \text{ mm.}$$

$$bb' - 2cc' = -0,45$$

$$cc' - 2dd' = -0,40$$

$$dd' - 2ee' = -0,25$$

$$ee' - \frac{3}{2}ff' = 0,225$$

$$ff' - \frac{3}{2}gg' = 0,200$$

womit denn die vorstehenden Folgerungen ihre völlige Bestätigung finden. Dieser Ammonit der Russischen Juraformation unterscheidet sich also von Ammonites Murchisonae der Deutschen Juraformation wesentlich dadurch, dass er seine Windungen mit dem Quotienten $\frac{3}{2}$ und mit einem weit kleineren Parameter beginnt.

§. 34.

Ammonites opalinus und *A. Reineccii*. *Ammonites opalinus* scheint triplospiral zu sein, wie folgende Messungen lehren:

Windungsabstände	
im grossen Halbmesser	im kleinen Halbmesser
$a'b' = 7,7$	$ab = 4,70$
$b'c' = 3,2$	$bc = 1,85$
$c'd' = 1,0$	$cd = 0,65$
$d'e' = 0,5$	$de = 0,35$
Diameter	$D' - D$
$aa' = 20,50$	12,40
$bb' = 8,10$	5,05
$cc' = 3,05$	1,65
$dd' = 1,40$	0,85
$ee' = 0,55$	

Sowohl die Windungsabstände **) als auch die Diameterdifferenzen führen darauf, dass sich nach einander die drei Quotienten $p = 2$, $q = 3$ und $s = \frac{5}{2}$ geltend machen. Die drei kleinsten Diameter geben für a die beiden Werthe 0,15 mm. und 0,125 mm., also den Mittelwerth 0,137 mm.

*) Die beiderseitigen Windungsabstände zeigen unter einander eine recht gute Uebereinstimmung, denn es wird $ab = a'b' : \sqrt{2} = 4,38$.

**) Die beiderseitigen Windungsabstände stimmen recht wohl zusammen; denn es ist $a'b' : \sqrt{\frac{5}{2}} = 4,87$, $b'c' : \sqrt{3} = 4,847$ und $c'd' : \sqrt{2} = 0,707$.

Ammonites Reineccii. Auch dieser Species liegt eine zusammengesetzte Spirale zu Grunde, wie aus nachstehenden Beobachtungen hervorgeht:

Windungsabstände	
im grossen Halbmesser	im kleinen Halbmesser
$a'b' = 12,7$	$ab = 9,05$
$b'c' = 6,9$	$bc = 4,50$
$c'd' = 2,9$	$cd = 1,75$
$d'e' = 1,1$	$de = 0,65$
Diameter	
$aa' = 40,70$	$D' - D$
$bb' = 18,95$	21,75
$cc' = 7,55$	11,40
$dd' = 2,90$	4,65
$ee' = 1,15$	1,75

Die Spirale ist also in ihrem inneren Theile nach $p = \frac{8}{3}$, in ihrem äusseren Theile nach $q = 2$ gebildet, während in der Uebergangsregion die Zahl $\frac{7}{3}$ zu walten scheint. Der etwas undulirte Kiel macht die Messungen mehr oder weniger unsicher. Desungeachtet giebt $a'b' : \sqrt{2}$ für ab den Werth 8,98, und $c'd' : \sqrt{\frac{8}{3}}$ für cd den Werth 1,776.

§. 35.

Ammonites elegans. Von dieser Species wurden zwei Exemplare gemessen, ein grösseres von 32,3 mm. und ein kleineres von 15,2 mm. Durchmesser. Das erstere gab folgende Elemente:

Windungsabstände	
im grossen Halbmesser	im kleinen Halbmesser
$a'b' = 11,30$	$ab = 7,60$
$b'c' = 4,95$	$bc = 3,00$
$c'd' = 1,95$	$cd = 1,20$
$d'e' = 0,80$	$de = 0,50$
Diameter	
$aa' = 32,30$	$D' - D$
$bb' = 13,40$	18,90
$cc' = 5,45$	7,95
$dd' = 2,30$	3,15
$ee' = 1,00$	1,30

Die meisten der Windungsabstände führen auf den Quotienten $q = \frac{5}{2}$, nur der grösste Abstand 11,30 scheint den etwas kleineren Werth $\frac{7}{3}$ zu fordern. Mit diesen beiden Resultaten stimmen auch die aus den Diametern abgeleiteten Werthe sehr wohl überein; es scheint also in der That, dass die Mehrzahl der gemessenen Windungen nach $\frac{5}{2}$ gebildet ist, während die letzte Windung den Uebergang in einen kleineren Quotienten vermittelt.

Aber auch die nach $\frac{5}{2}$ gewundene Spirale ist noch nicht die innerste der ganzen Schale, wie sich daraus schliessen lässt, dass die Differenz $D' - qD$

negativ wird, wenn wir sie aus den vier kleineren Diametern zu bestimmen versuchen; wir erhalten nämlich

$$\begin{aligned} bb' - \frac{5}{2} cc' &= -0,225 \\ cc' - \frac{5}{2} dd' &= -0,300 \\ dd' - \frac{5}{2} ee' &= -0,200. \end{aligned}$$

Es müssen also die innersten, *nicht* gemessenen Windungen nach einer kleineren Zahl als $\frac{5}{2}$ gewunden sein; auch vermüthe ich nach einer approximativen Messung, dass der innere Quotient $q = 2$ sein mag.

Das kleinere Exemplar gab mir folgende Resultate:

Windungsabstände *)

im grossen Halbmesser		im kleinen Halbmesser	
	gemessen	berechnet	
$a'b' =$	5,55	5,55	$ab =$ 3,55
$b'c' =$	2,20	2,22	$bc =$ 4,40
$c'd =$	0,90	0,88	$cd =$ 0,55
$d'e' =$	0,35	0,35	$de =$ 0,20

Diameter		$D' - D$	
		gemessen	berechnet
$aa' =$	15,20	9,10	9,10
$bb' =$	6,10	3,60	3,64
$cc' =$	2,50	1,45	1,46
$dd' =$	1,05	0,55	0,58
$ee' =$	0,50		

Auch hier führen die Windungsabstände eben so wie die Diameter auf $q = \frac{5}{2}$, und abermals bestätigt es sich, dass die innersten *nicht* gemessenen Windungen nach einem kleineren Quotienten gebildet sein müssen, weil die Differenz $D' - qD$ lauter negative Werthe giebt.

Demzufolge ist *Ammonites elegans* ein diplospiraler, ja vielleicht ein triplospiraler Ammonit, dessen drei successive Quotienten den Zahlen 2, $\frac{5}{2}$ und $\frac{7}{3}$ entsprechen.

§. 36.

Ammonites Amaltheus. Von dieser Species wurden drei Exemplare verschiedener Varietäten gemessen, deren eines jedoch in seiner Bildung gestört gewesen zu sein scheint. Auch muss ich noch bemerken, dass für diese, wie für jede Species mit gefaltetem oder gekerbtem Kiele, nur approximative Messungs-Resultate zu erwarten sind, weil die Spirale durch die Undulationen des Kieles selbst undulirt wird, und man niemals wissen kann, ob der gemessene Punkt einem Wellenthale oder einem Wellenberge angehört.

Das kleinste Exemplar von 28,7 mm. Durchmesser mit stark hervortretenden Sichelfalten zeigte die äusseren Windungen mit scharfem, die inneren Windungen mit ganz rundem Rücken und gab folgende Elemente:

*) Berechnen wir ab aus $a'b'$, so erhalten wir $ab = 3,51$, also sehr übereinstimmend.

Windungsabstände	
im grossen Halbmesser	im kleinen Halbmesser
$a'b' = 11,05$	$ab = 6,7$
$b'c' = 3,65$	$bc = 2,3$
$c'd' = 1,70$	$cd = 1,2$
$d'e' = 0,80$	
Diameter	
$aa' = 28,70$	$D' - D = 17,75$
$bb' = 10,95$	$5,95$
$cc' = 5,00$	$2,90$
$dd' = 2,10$	

Zwar sind diese Messungen wegen der ungefähr 0,2 bis 0,3 mm. betragenden Höhe der Undulationen des Kieles etwas unsicher; sie führen aber desungeachtet auf das Resultat, dass dieser Ammonit eine diplospirale Schale hat, deren Windungen nach innen dem Quotienten $p = 2$, nach aussen dem Quotienten $q = 3$ folgen. Dass diese Diplospirale exosthen sei, folgt übrigens auch aus der Differenz $aa' - 3bb'$, welche einen negativen Werth erhält, während die Differenzen

$$bb' - 2cc' = 0,95$$

$$cc' - 2dd' = 0,80$$

mit positiven und hinreichend übereinstimmenden Werthen gefunden werden.

Ein zweites, 53,3 mm. grosses Exemplar zeigte die äusserste Windung sehr hoch, schmal und scharfkantig, die nächste Windung immer noch scharf, doch beinahe rechtwinkelig, die inneren Windungen halbkreisförmig; die Sichelalten waren kaum sichtbar. Die Messung führte auf folgende Elemente:

Windungsabstände	
im grossen Halbmesser	im kleinen Halbmesser
$a'b' = 21,80$	$ab = 13,15$
$b'c' = 7,40$	$bc = 4,25$
$c'd' = 2,45$	$cd = 1,40$
$d'e' = 0,90$	$de = 0,60$
$e'f' = 0,50 ?$	
Diameter	
$aa' = 53,30$	$D' - D = 34,95$
$bb' = 18,35$	$41,65$
$cc' = 6,70$	$3,85$
$dd' = 2,85$	$4,50$
$ee' = 1,35$	

Die meisten dieser Windungsabstände und Diameter führen abermals auf den Quotienten $q = 3$; die innersten Windungsabstände verweisen jedoch auf eine kleinere Zahl p , welche höchst wahrscheinlich $= 2$ ist.

Das dritte Exemplar gab insofern abweichende Resultate, als die Messungen zwar nach Innen sehr bestimmt auf $p = 2$ führten, dann aber einerseits die Werthe $\frac{8}{3}$ und $\frac{1}{5}$, anderseits die Werthe $\frac{7}{3}$ und $\frac{8}{3}$ bestimmen liessen, so dass von einer äusseren Windung zur anderen ein Wechsel der Quotienten statt zu finden scheint.

§. 37.

Ammonites Jason, *A. tumidus* und *A. hecticus*. Ein Exemplar von *Ammonites Jason* führte auf das Resultat, dass auch diese Species nach einer Diplospirale gewunden ist; zugleich ergab sich im Querschnitte, dass die inneren Windungen noch sehr flach gewölbt und frei von der Rückenrinne sind, welche die äusseren hoch gewölbten Windungen charakterisirt. Die Messung lieferte folgende Elemente:

Windungsabstände	
im grossen Halbmesser	im kleinen Halbmesser
$a'b' = 6,85$	$ab = 4,60$
$b'c' = 2,80$	$bc = 1,80$
$c'd' = 1,25$	$cd = 0,95$
$d'e' = 0,65$	$de = 0,45$
$e'f' = 0,35$	
Diameter	
$aa' = 20,45$	$D' - D = 11,45$
$bb' = 9,00$	$4,65$
$cc' = 4,35$	$2,20$
$dd' = 2,15$	$1,10$
$ee' = 1,05$	

Sowohl die Windungsabstände als die Diameter verweisen darauf, dass die inneren Windungen nach $p = 2$, die äusseren Windungen nach $q = \frac{5}{2}$ gewunden sind, obwohl dieser letztere Quotient nur eine Windung zu beherrschen scheint, da der grösste Windungsabstand 6,85 wieder eine Verminderung seines Werthes vermuthen lässt. Die Spirale ist also entweder eine exothene Diplospirale, oder vielleicht gar eine Triplospirale.

Ammonites tumidus. Ein in der Mitte ausgebrochenes Exemplar dieser Species liess beiderseits nur zwei Windungsabstände beobachten; die Messungen ergaben:

Windungsabstände	
im grossen Halbmesser	im kleinen Halbmesser
$a'b' = 9,5$	$ab = 6,5$
$b'c' = 4,3$	$bc = 2,9$
Diameter	
$aa' = 29,4$	$D' - D = 16,0$
$bb' = 13,4$	$7,2$
$cc' = 6,2$	

Hieraus folgt, dass die gemessenen Windungen nach dem Quotienten $q = \frac{9}{4}$ gebildet sind*); weil jedoch die Differenz $D' - qD$ die beiden negativen Werthe $-0,55$ und $-0,75$ erhält, so müssen die inneren Windungen nach einem kleineren Quotienten p gebildet sein.

*) Der Windungsabstand $a'b'$ ist wohl etwas zu klein gefunden worden. Ueberhaupt muss ich bemerken, dass bei solchen Exemplaren, deren Mitte ausgebrochen ist, die Querschnitte sehr leicht bedeutend excentrisch werden können, weil jedes sichere Anhalten bei ihrer Herstellung fehlt, und sie daher nur ganz zufällig centrisch gerathen können.

Ammonites hecticus. Von den sehr verschieden geformten kleinen Ammoniten, welche gewöhnlich unter diesem Namen in den Sammlungen liegen, wählte ich zwei aus, deren einer einen runden hoch gewölbten, der andere einen schmalen und scharfen Rücken hatte; da sie beide in der Mitte ausgebrochen waren, so liessen sich an jedem derselben beiderseits nur zwei Windungsabstände messen, aus welchen für den ersten $p = 2$, für den anderen $p = \frac{1}{5}$ berechnet wurde.

§. 38.

Ammonites communis. Ein kleines, fein geripptes Exemplar gab nachstehende Beobachtungs-Elemente, welche in den äusseren Windungen wegen der Rippen um $\pm 0,4$ mm. unsicher sein dürften.

Windungsabstände	
im grossen Halbmesser	im kleinen Halbmesser
$a'b' = 7,4$	$ab = 6,2$
$b'c' = 4,9$	$bc = 3,6$
$c'd' = 2,8$	$cd = 2,0$
$d'e' = 1,4$	$de = 1,0$
$e'f' = 0,7$	$ef = 0,5$
Diameter	$D' - D$
$aa' = 31,4$	13,6
$bb' = 17,8$	8,5
$cc' = 9,3$	4,8
$dd' = 4,5$	2,4
$ee' = 2,1$	1,2
$ff' = 0,9$	

Die inneren Windungsabstände führen ganz entschieden auf $p = 2$, die äusseren Abstände dagegen auf $q = \frac{1}{4}$, und die beiden Abstände $a'b'$ und $b'c'$ sogar auf $s = \frac{3}{5}$. Da nun diese Resultate durch die Differenzen der Diameter vollkommen bestätigt werden, so sind wir zu der Folgerung berechtigt, dass *Ammonites communis* nach einer entosthenen Triplospirale gewunden sei, indem der Windungsquotient aus 2 durch $\frac{1}{4}$ in $\frac{3}{5}$ überspringt*).

Die Zahl 2 scheint aber wirklich das Gesetz der innersten Windungen zu bestimmen, denn die vier kleinsten Diameter führen nach der Formel $a = \frac{1}{2}(D' - pD)$ sehr übereinstimmend auf den Werth

$$a = 0,15 \text{ mm.}$$

Ein fast doppelt so grosses Exemplar als das vorhergehende, bei welchem wegen der stärkeren Rippen und tieferen Furchen des Rückens die Messungen der äusseren Windungspunkte noch unsicherer sein mussten, gab im Allgemeinen doch recht wohl übereinstimmende Resultate.

*) In der That wird auch $a'b' : \sqrt{\frac{3}{5}} = ab = 6,043$, also recht übereinstimmend mit der Beobachtung.

§. 39.

Ammonites costatus. Ein aus einem grösseren Exemplare herausgesprengter centraler Theil von 14,3 mm. Durchmesser gab folgende Elemente:

Windungsabstände	
im grossen Halbmesser	im kleinen Halbmesser
$a'b' = 4,7$	$ab = 3,2$
$b'c' = 2,3$	$bc = 1,6$
$c'd' = 0,9$	$cd = 0,6$
Diameter	
$D' - D$	
$aa' = 14,3$	7,9
$bb' = 6,4$	3,9
$cc' = 2,5$	1,5
$dd' = 1,0$	

Diese Messungen lehren, dass die innersten Windungen nach $p = \frac{5}{2}$ gebildet sind, während die darauf folgende Windung die Zahl $q = 2$ zu fordern scheint.

Bei grösseren Exemplaren müssen wegen des gekerbten Kieles die Messungen der äusseren Windungen mehr oder weniger unsicher werden; desungeachtet aber erhalten wir immer noch recht übereinstimmende Resultate, wie nachstehende Messungen an einem 45,7 mm. grossen Exemplare zeigen:

Windungsabstände	
im grossen Halbmesser	im kleinen Halbmesser
$a'b' = 12,30$	$ab = 10,1$
$b'c' = 7,90$	$bc = 5,2$
$c'd' = 3,25$	$cd = 2,1$
Diameter	
$D' - D$	
$aa' = 45,70$	22,40
$bb' = 23,30$	13,10
$cc' = 10,20$	5,35
$dd' = 4,85$	

Hier lassen die Windungsabstände, eben so wie die Diameter, auf das Resultat gelangen, dass die inneren Windungen nach $\frac{5}{2}$ gewunden sind, während die äusserste nach $\frac{3}{2}$ gebildet ist, und die Uebergangsregion aus dem einen Gesetze in das andere durch 2 charakterisirt wird.

Wesentlich dasselbe Ergebniss in Betreff der äusseren Windungen liefern folgende, an einem 65,2 mm. grossen (jedoch etwas verdrückten) Exemplare angestellten Messungen:

Windungsabstände	
im grossen Halbmesser	im kleinen Halbmesser
$a'b' = 17,5$	$ab = 14,40$
$b'c' = 11,5$	$bc = 7,50$
$c'd' = 4,8$	$cd = 3,15$
$d'e' = 2,2$	$de = 1,35$

Diameter	$D' - D$
$aa' = 65,20$	31,90
$bb' = 33,30$	19,00
$cc' = 14,30$	7,95
$dd' = 6,35$	3,55
$ee' = 2,80$	

Die inneren Windungsabstände geben allerdings $p = \frac{7}{3}$, die äusseren Abstände aber lassen durch 2 auf $\frac{3}{2}$ gelangen.

Es ist also höchst wahrscheinlich, dass in *Ammonites costatus* die Windungen nach innen durch $\frac{5}{2}$ oder $\frac{7}{3}$, nach aussen durch $\frac{3}{2}$, überhaupt aber durch eine zusammengesetzte *entosthene* Spirale bestimmt werden, von welcher jedoch zu vermuthen ist, dass sie ganz im Innern noch einen andern Quotienten als $\frac{5}{2}$ oder $\frac{7}{3}$ geben werde, weil die Differenzen $D' - pD$ negativ ausfallen.

Ob aber überhaupt bei Ammoniten mit gekerbtem, geripptem, gefaltetem, und undulirtem Rücken ganz sichere Bestimmungen zu erlangen sein werden, dies ist sehr in Frage zu stellen.

Indem ich hiermit diese Abhandlung beschliesse, bin ich mir recht wohl bewusst, dass sie nur als ein *Versuch* zur Lösung des mir gestellten Problems betrachtet werden darf. Ich kann daher den Wunsch nicht unterdrücken, dass Andere, denen Zeit und Verhältnisse ein weiteres und tieferes Eingehen in die Sache gestatten, meine Resultate einer Prüfung unterwerfen, die Theorie berichtigen und vervollkommen, die Beobachtungen wiederholen und vervielfältigen, und dadurch den Weg zu einer gründlichen Bearbeitung eines Gebietes der Morphologie bahnen mögen, in welchem ich nur einige vorläufige Orientirungslinien abzustecken versucht habe.
