

www.e-rara.ch

Compendium der höhern Mathematik

Burg, Adam von

Wien, 1836

ETH-Bibliothek Zürich

Shelf Mark: Rar 21615

Persistent Link: <https://doi.org/10.3931/e-rara-59642>

Erster Abschnitt.

www.e-rara.ch

Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien – von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material – from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d'imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L'éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes – des débuts de l'imprimerie jusqu'au 20e siècle.

e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

Nutzungsbedingungen Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titelinformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

Terms of Use This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

Conditions d'utilisation Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

Condizioni di utilizzo Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]

Erster Abschnitt.

Die Elemente der geradlinigen und sphärischen Trigonometrie.



Erstes Capitel.

Von den goniometrischen Linien.

Einleitung.

§. 1. Die Trigonometrie (Dreieckmefskunst) lehrt aus drei in Zahlen gegebenen Bestimmungsstücken eines Dreieckes die übrigen durch Rechnung finden. Sie zerfällt, je nachdem die betreffenden Dreiecke in einer Ebene, auf einer Kugel oder auf einem elliptischen Sphäroide liegen, in die ebene, sphärische und sphäroidische Trigonometrie. Die letztere bleibt von unserem Vortrage ausgeschlossen.

§. 2. Die zur Berechnung der Dreiecke oder Vierecke überhaupt nöthigen Hilfslinien und Sätze, mittelst denen es möglich wird, die Winkel sowohl unter einander als auch mit den Seiten zu vergleichen, bilden zusammen die Goniometrie. Nach dem gewöhnlichen, auch hier so genommenen, weitern Sinne umfasst die Trigonometrie zugleich auch die Lehre dieser Hilfslinien (Kreisfunctionen) oder die Goniometrie.

Die trigonometrischen oder goniometrischen Linien.

§. 3. Erklärung. Schneidet man auf dem, mit irgend einem Halbmesser $CA = r$ beschriebenen Kreis $AA'BB'$ (Fig. 1) von A aus, als Anfangspunct, einen beliebigen Bogen AM ab, zieht die Halbmesser CA , CM , ferner aus A und M auf AC die Perpendikel AE , MD , ersteres bis zum Durchschnitte E des verlängerten Halb-

messers CM ; so heißen die Linien MD der Sinus, AE die Tangente, CE die Secante und AD der Sinusversus des Bogens AM oder Winkels $ACM = \alpha$ für den Halbmesser r .

§. 4. Der Sinus eines Bogens ist also das aus dem Endpunkte dieses Bogens auf den durch seinen Anfangspunct gezogenen Halbmesser gefällte Perpendikel.

Die trigonometrische Tangente eines Bogens ist jenes Stück der im Anfangspuncte desselben errichteten Tangente, welches zwischen diesem Anfangs- und Durchschnittspuncte des durch den Endpunkt des Bogens verlängerten Halbmessers liegt.

Die Secante eines Bogens ist der durch dessen Endpunkt bis zum Durchschnitt mit der Tangente verlängerte Halbmesser.

Der Sinusversus (auch Quersinus) eines Bogens ist jenes Stück des durch den Anfangspunct gezogenen Halbmessers, zwischen diesem Anfangs- und Fußpunct des Sinus dieses Bogens.

§. 5. Erkl. Ergänzt der Bogen $A'M$ den vorigen AM zu einem Quadranten, oder ist $W. A'CM = \alpha'$ der Complementwinkel zu α (folglich nach unserer Sexagesimaltheilung $\alpha' = 90^\circ - \alpha$); so werden Sinus, Tangente, Secante und Sinusversus dieses Bogens $A'M$ oder Winkels α' , d. i. die Linien MD' , $A'E'$, CE' , $A'D'$ (A' als Anfangspunct des Bogens $A'M$ genommen) beziehungsweise: Cosinus (*Complementi Sinus*, *Co. Sinus*), Cotangente, Cosecante und Cosinusversus des ursprünglichen Bogens AM oder $W. \alpha$ genannt.

Zusatz. Wegen $MD' = CD$ nimmt man gewöhnlich dieses zwischen dem Mittelpunct C und Fußpunct D des Sinus liegende Stück des durch den Anfangspunct A geführten Halbmessers für den Cosinus des Bogens.

Anmerkung. Mit Rücksicht darauf, daß ein stumpfer Winkel ein negatives Complement hat, gelten die in diesen

beiden §§. aufgestellten Erklärungen ganz allgemein für jeden Bogen oder Winkel α .

Die Construction dieser genannten 8 trigonometrischen Hilfslinien für Bögen, deren Endpunct M beziehungsweise im 1., 2., 3. und 4. Quadranten liegt, ist eine dem Anfänger sehr zu empfehlende Übung.

§. 6. Die genannten goniometrischen Linien werden kurz auf folgende Weise bezeichnet: $MD = \sin \alpha$, $AE = \tan \alpha$, $CE = \sec \alpha$, $AD = \sin \alpha$, $CD = \cos \alpha$, $A'E' = \cot \alpha$, $CE' = \operatorname{cosec} \alpha$, $A'D' = \operatorname{cosin} \alpha$; dabei kann noch, wenn man es für nöthig hält, durch das Darüber- oder Daruntersetzen von r , der Halbmesser angedeutet werden, auf welchen sich diese Linien beziehen. Da wir zur grössern Einfachheit diesen Halbmesser durchaus, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt wird, zur Einheit nehmen oder gleich 1 setzen; so soll dieses durch die Anwendung kleiner Anfangsbuchstaben, d. i. dadurch angedeutet werden, dass wir schreiben: $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$ u. s. w.

§. 7. Damit die Relationen zwischen den goniometrischen Linien, wie diese im 1. Quadranten oder für einen spitzen Winkel α aufgefunden werden, auch für jeden andern Werth von α gelten können, ist es nöthig, diese Linien, wie es überhaupt in der analytischen Geometrie geschieht, mit gewissen Vorzeichen behaftet anzunehmen. So ist, um ein einfaches Beispiel anzuführen, für $\alpha = \angle ACM < 90^\circ$, wegen $AD = AC - CD$, sofort $\sin \alpha = 1 - \cos \alpha$, und für $\alpha = \angle ACM' > 90^\circ$, wegen $Ad = AC + Cd$: $\sin \alpha = 1 + \cos \alpha$. Soll nun für beide Fälle die erstere Relation oder der Satz gelten, dass der Sinusversus gleich ist dem Unterschiede aus dem Halbmesser und dem Cosinus, d. h. will man beide Fälle in einer und derselben Formel darstellen; so muss man schreiben: $\sin \alpha = 1 - (\pm \cos \alpha)$, dergestalt, dass der Cosinus im 1. Quadr. mit dem Zeichen $+$ und im 2. mit jenem $-$ behaftet erscheint und damit zusammenhängt, dass

eine beständig abnehmende, hierauf Null werdende und endlich wieder zunehmende Größe oder Linie, wie es hier mit CD der Fall ist (während α fortwährend wächst), nothwendig aus dem positiven in den negativen Zustand, oder umgekehrt, übergeht. Diese Gegensätze sind übrigens immer leicht aus der entgegengesetzten Lage der Linien selbst (wie hier aus jener CD und Cd) zu erkennen, und man verbindet mit der einen das Zeichen $+$ oder $-$ und mit der andern das entgegengesetzte — oder $+$.

S. 8. Betrachtet man daher die in den 4 Quadranten Statt findenden Lagen der goniom. Linien, jene im 1. Quadr. als die primitive oder positive (in welchem nämlich diese Linien sämmtlich das Vorzeichen $+$ erhalten) angesehen, so ergibt sich ganz einfach folgendes Schema, wobei r die ganzen Zahlen $0, 1, 2, 3, \dots$ bezeichnet:

die Sinus und Cosecanten *) sind positiv im 1., 2., 5., 6., ... $(4r + 1)$., $(4r + 2)$ ten Quadranten
 und negativ im 3., 4., 7., 8., ... $(4r + 3)$., $(4r + 4)$ ten
 die Cosinus und Secanten sind positiv im 1., 4., 5., 8., ... $(4r + 1)$., $(4r + 4)$ ten
 und negativ im 2., 3., 6., 7., ... $(4r + 2)$., $(4r + 3)$ ten
 die Tangenten und Cotangenten sind positiv im 1., 3., 5., 7., ... $(4r + 1)$., $(4r + 3)$ ten
 und negativ im 2., 4., 6., 8., ... $(4r + 2)$., $(4r + 4)$ ten
 die Sinus versus und Cosinus versus bleiben in allen Quadranten positiv.

*) Zur Beurtheilung der entgegengesetzten Lagen der Secante und Cosecante muß man darauf Rücksicht nehmen, ob der Durchschnitt des durch den Endpunkt des Bogens verlängerten Halbmessers mit der Tangente oder Cotangente dadurch entsteht, indem man diese Verlängerung vom Mittelpunct aus durch den Endpunkt, oder umgekehrt, vom Endpunkt des Bogens durch den Mittelpunct vornimmt.

§. 9. Nimmt der Winkel α bis Null ab, so verschwindet der Sinus MD und man hat $\sin 0 = 0$. Nimmt von da an der Winkel zu, so wächst auch der Sinus, und wird bei 90° dem Halbmesser gleich, so, daß man hat: $\sin 90 = \sin \frac{\pi}{2} = 1$. Nimmt der Bogen AM noch weiter zu, so, daß also der Endpunkt M in den 2. Quadranten fällt, so nimmt der Sinus wieder ab und verschwindet für $\alpha = 180^\circ$, oder es ist: $\sin 180 = \sin \pi = 0$. Im 3. Quadr. nimmt der Sinus wieder zu, wird aber nun negativ, und man hat sofort $\sin 270 = \sin \frac{3}{2}\pi = -1$. Im 4. Quadr. endlich, in welchem er immer noch negativ bleibt, nimmt der Sinus wieder ab und verschwindet für $\alpha = 360^\circ$, oder es ist: $\sin 360 = \sin 2\pi = 0$.

§. 10. Da überhaupt im 5., 9., 13., ... Quadranten dasselbe Statt findet, was im 1. Quadr. im 6., 10., 14. etc. Quadr. was im 2., im 7., 11., 15., ... was im 3. und endlich im 8., 12., 16., ... Quadranten, was im 4.; so hat man allgemein, wenn r wieder alle ganzen positiven Zahlen 0, 1, 2, 3, ... bezeichnet, und wenn man diese Untersuchung auch auf die übrigen goniometrischen Linien ausdehnt, folgendes Schema:

	sin.	cos.	tang.	col.	sec.	cosec.	sinv.	cosinv.
$2r\pi^*$	± 0	1	± 0	$\pm \infty$	1	$\pm \infty$	0	1
$(2r + \frac{1}{2})\pi$	1	0	∞	0	∞	1	1	0
$(2r + 1)\pi$	0	-1	-0	$-\infty$	-1	∞	2	1
$(2r + \frac{3}{2})\pi$	-1	-0	∞	0	$-\infty$	-1	1	2

Anmerk. Bemerkenswerth ist der Umstand, daß im 1. Quadranten (auf welchen immer Alles bezogen wird) der Sinus,

*) Von den doppelten Zeichen gilt durchaus das obere für $r = 0$ und das untere für $r = 1, 2, 3$ etc.

die Tangente, Secante und der Sinusversus (welche aus einem später einzusehenden Grunde auch Kreisfunctionen heißen) zu-, dagegen der Cosinus, die Cotangente u. s. w. (die Cofunctionen) abnehmen, wenn der Winkel oder Bogen α zunimmt, und umgekehrt.

§. 11. Verbindet man mit den in der Richtung von A gegen A' gezählten Bögen oder Winkeln α das Zeichen $+$, so muß man aus dem in §. 7 angeführten Grunde in der entgegengesetzten Richtung von A gegen B' gezählten Bögen oder Winkeln das Zeichen $-$ vorsetzen. Nimmt man daher der Größe nach $Am = AM = \alpha$, so ist

$$mD = \sin(-\alpha), \quad CD = \cos(-\alpha), \quad Ae = \tan(-\alpha),$$

$$A'e' = \cot(-\alpha), \quad Ce = \sec(-\alpha), \quad Ce' = \operatorname{Cosec}(-\alpha)$$

(die Sinusversus und Cosinusversus werden ihrer geringen Wichtigkeit wegen von nun an ausgelassen), und man hat ganz einfach mit Rücksicht auf §. 8:

$$\begin{aligned} \sin(-\alpha) &= -\sin \alpha, & \cos(-\alpha) &= \cos \alpha, \\ \tan(-\alpha) &= -\tan \alpha, & \cot(-\alpha) &= -\cot \alpha, \\ \sec(-\alpha) &= \sec \alpha, & \operatorname{cosec}(-\alpha) &= -\operatorname{cosec} \alpha, \end{aligned}$$

Relationen, welche, wie leicht zu sehen, für jeden Werth von α gelten.

Fig. 1.

§. 12. Sind die beiden Durchmesser $AB, A'B'$ (Fig. 2) wieder auf einander perpendicularär und die Bögen

$$AM = A'M' = BM'' = B'M''' = \alpha,$$

so hat man, wie sich von selbst ergibt:

$$\sin(90 + \alpha) = M'D = \cos \alpha,$$

$$\sin(180 + \alpha) = M''D'' = -\sin \alpha$$

(mit Rücks. nämlich auf §. 8),

$$\sin(270 + \alpha) = M'''D''' = -\cos \alpha,$$

$$\sin(360 + \alpha) = MD = \sin \alpha.$$

Aus einer ganz ähnlichen Figur, in welcher die gleichen Bögen α von A, A', B, B' in entgegengesetzter Richtung aufgetragen werden, oder noch einfacher, indem man in

den vorigen Relationen $-\alpha$ statt α schreibt und die Relat. des vorigen Paragraphes berücksichtigt, erhält man auch:

$$\sin(90 - \alpha) = \cos \alpha, \quad \sin(180 - \alpha) = \sin \alpha, \quad \sin(270 - \alpha) = -\cos \alpha, \quad \sin(360 - \alpha) = -\sin \alpha.$$

§. 13. Verföhrt man mit den übrigen goniom. Linien auf die nämliche Art, so erhält man ohne Schwierigkeit die durch nachstehendes Schema dargestellten Ausdrücke:

	sin.	cos.	tang.	Cot.	sec.	cosec.
$\frac{1}{2}\pi \pm \alpha$	$\pm \cos \alpha$	$\mp \sin \alpha$	$\mp \text{Cot} \alpha$	$\mp \text{tang} \alpha$	$\mp \text{cosec} \alpha$	$\text{sec} \alpha$
$\pi \pm \alpha$	$\mp \sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\pm \text{tang} \alpha$	$\pm \text{Cot} \alpha$	$-\text{sec} \alpha$	$\mp \text{Cosec} \alpha$
$\frac{3}{2}\pi \pm \alpha$	$-\cos \alpha$	$\pm \sin \alpha$	$\mp \text{Cot} \alpha$	$\mp \text{tang} \alpha$	$\pm \text{cosec} \alpha$	$-\text{sec} \alpha$
$2\pi \pm \alpha$	$\pm \sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\pm \text{tang} \alpha$	$\pm \text{Cot} \alpha$	$\text{sec} \alpha$	$\pm \text{cosec} \alpha$ *)

Anmerk. Mit Hilfe dieser Relationen lassen sich alle trigonometrischen Ausdrücke, in welchen \sin -, \cos -. etc. von Winkeln $> 90^\circ$ vorkommen, in gleichgeltende umwandeln, in denen sich diese goniom. Linien auf Win-

*) Das aus diesem hier folgenden noch allgemeinere Schema findet man in dem Handbuche der Trigonometrie, S. 22, oder in der Sammlung der trigon. Formeln auf S. 2 und 3.

kel $< 90^\circ$ beziehen, was um so nothwendiger ist, als diese trigonom. Functionen (d. i. der Sinus, Cosinus etc.) nur für Winkel oder Bögen, die den 1. Quadranten nicht übersteigen, in den Logarithmentafeln eingetragen sind. — Wäre z. B. $x = A + \text{tang} 326$, so würde man auch, mit Rücksicht auf die erwähnte Eigenschaft der Tafeln, wegen $\text{tang} 326 = \text{tang} (270 + 56) = -\text{Cot} 56$ haben: $x = A - \text{cot} 56$, oder auch, wegen $\text{tang} 326 = \text{tang} (360 - 34) = -\text{tang} 34$:

$$x = A - \text{tang} 34$$

(was auch damit zusammenhängt, daß wegen $34 + 56 = 90$, sofort nach §. 5 $\text{tang} 34 = \text{Cot} 56$ ist).

Hauptrelationen zwischen Sinus, Cosinus, Tangente u. s. w.

Fig. 1.

§. 14. Es ist wegen $MD = \frac{1}{2} Mm$ (Fig. 1): $\sin \alpha = \frac{1}{2} \text{Chord } 2\alpha$ oder auch $\text{Chord } 2\alpha = 2 \sin \alpha$, d. h. der Sinus eines Winkels ist gleich der halben Sehne des doppelten Winkels, und umgekehrt ist die Sehne eines Winkels gleich dem doppelten Sinus des halben Winkels.

§. 15. Die rechtwinkligen Dreiecke MDC , CAE und $CA'E'$ geben der Reihe nach:

$$MD^2 + CD^2 = CM^2 \quad \text{oder} \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,$$

$$CE^2 = AC^2 + AE^2 \quad \text{oder} \quad \sec^2 \alpha = 1 + \text{tang}^2 \alpha$$

und

$$CE'^2 = CA'^2 + A'E'^2 \quad \text{oder} \quad \text{cosec}^2 \alpha = 1 + \text{Cot}^2 \alpha.$$

§. 16. Die Dreiecke CAE und $CA'E'$, welche jenem CMD ähnlich sind, geben ganz einfach:

$$CA : AE : CE = CD : MD : CM \quad \text{oder}$$

$$1 : \text{tang} \alpha : \sec \alpha = \cos \alpha : \sin \alpha : 1 \quad \text{und}$$

$$CA' : A'E' : CE' = MD : CD : CM \quad \text{oder}$$

$$1 : \text{cot} \alpha : \text{cosec} \alpha = \sin \alpha : \cos \alpha : 1;$$

daraus erhält man:

$$\text{tang} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha},$$

$$\text{cot} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad \text{und} \quad \text{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}.$$

Zugleich folgt auch:

$$\operatorname{tang} \alpha = 1 : \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\cot \alpha} \quad \text{und} \quad \cot \alpha = \frac{1}{\operatorname{tang} \alpha}.$$

Endlich hat man noch wegen $AD = AC - CD$ und $A'D' = A'C - MD$: $\sin \alpha = 1 - \cos \alpha$ und $\cos \sin \alpha = 1 - \sin \alpha$.

Anmerk. Hat man nur erst die Eigenschaften des Sinus und Cosinus in den verschiedenen Quadranten aus der Figur aufgefunden, so lassen sich die der übrigen goniom. Linien ganz einfach aus diesen hier erhaltenen Formeln analytisch entwickeln und sofort die oben (§§. 8—13) ebenfalls aus der Figur gefolgerten Resultate verificiren.

§. 17. Es ist nun leicht jede der 8 goniometrischen Linien durch die 7 übrigen auszudrücken, und dadurch zu 56, in den trigonom. Entwicklungen mehr oder weniger wichtigen Relationen zu gelangen; wir entwickeln hier nur noch einige der wichtigsten und geben dadurch zugleich den Weg zur Ableitung der übrigen an*).

§. 18. Aus §. 15 hat man, um den Sinus durch den Cosinus, und umgekehrt, auszudrücken, unmittelbar:

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \quad \text{und} \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}.$$

Um den Sinus durch die Tangente oder Cotangente auszudrücken hat man (§. 16)

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} \quad \text{und daraus}$$

$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{tang} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 \alpha}}.$$

Ferner ist, wegen (§. 16) $\operatorname{tang} \alpha = \frac{1}{\operatorname{Cot} \alpha}$ auch, wenn man diesen Werth in der eben gefundenen Formel substituirt:

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{cot}^2 \alpha}}.$$

*) Die Ableitung dieser 56 Formeln, welche sich sowohl im Handb. d. Trig. (S. 24 u. f.) als auch in der Form. Samml. S. 3 finden, ist dem Anfänger als eine nützliche Übung sehr zu empfehlen.

Auf gleiche Weise ist

$$\sin \alpha = 1 - \cos \alpha = 1 - \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

und daraus:

$$\sin \alpha = \sqrt{2 \sin \alpha - \sin^2 \alpha}.$$

Um den Cosinus durch die Cotangente oder Tangente auszudrücken, wird man (ohne die vorige Entwicklungsart zu wiederholen) am einfachsten in den beiden gefundenen Formeln statt α , $90^\circ - \alpha$ setzen; dadurch gehen (§. 5) $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$ und $\cot \alpha$ beziehungsweise in $\cos \alpha$, $\sin \alpha$, $\cot \alpha$, $\tan \alpha$ über, und man erhält:

$$\cos \alpha = \frac{\cot \alpha}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}.$$

Fig. 1. §. 19. Ist (Fig. 1) Bog. $AM = \alpha$ und $MD = \sin \alpha = x$, so sagt man, α sey ein Bogen, dessen Sinus x ist, und bezeichnet dieses durch $\alpha = \text{arc. sin } x$ [nach den französ. Mathematikern durch $\alpha = \text{arc.}(\sin = x)$]. Eben so folgt aus $\cos \alpha = x$, umgekehrt: $\alpha = \text{arc. cos } x$ u. s. w.

Da nun, wenn $\sin \alpha = x$ ist, alle übrigen goniom. Linien (§. 17) durch den Sinus ausgedrückt werden können, und z. B.

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - x^2},$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}},$$

u. s. w. ist, so hat man

$$\alpha = \text{arc sin } x = \text{arc cos } \sqrt{1 - x^2} = \text{arc tang } \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$= \text{arc Cot } \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x} = \text{arc sec } \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = \text{arc cosec } \frac{1}{x}$$

u. s. w.

Ähnliche Relationen erhält man auch noch, wenn man nach und nach $\cos \alpha = x$, $\tan \alpha = x$ u. s. w. setzt, und im ersten Falle alle übrigen Linien durch den Cosinus, im 2. durch die Tangente u. s. w. ausdrückt (Handb. d. Trig., S. 28, u. Formels. S. 21).

Entwicklung von $\sin(\alpha \pm \beta)$, $\cos(\alpha \pm \beta)$

u. s. w.

§. 20. Es seyen im Endpunkte A des Durchmessers AE (Fig. 3) die beiden Sehnen AB , AD zu beiden Seiten Fig. 3. desselben unter den Winkeln α , β und dann noch die Hilfslinien BE , BD , DE gezogen; dadurch entsteht ein im Kreise beschriebenes Viereck $ABED$, in welchem bekanntlich die Relation besteht:

$$AE \cdot BD = BE \cdot AD + ED \cdot AB.$$

Drückt man die Sehnen nach §. 14 aus, so erhält man (wegen $BE = \text{Chord } 2\alpha$):

$$BE = 2 \sin \alpha, \quad DE = 2 \sin \beta,$$

$$BD = 2 \sin(\alpha + \beta), \quad AB = 2 \sin \alpha' = 2 \cos \alpha$$

(wegen $\alpha' = 90^\circ - \alpha$), $AD = 2 \sin \beta' = 2 \cos \beta$ und $AE = 2$ (auch $= 2 \sin 90^\circ$), folglich, wenn man diese Werthe in der vorigen Relation substituirt und gleich durch $2 \cdot 2 = 4$ abkürzt:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha.$$

Schreibt man in dieser Formel $-\beta$ statt β und berücksichtigt dabei die Relationen des §. 11, so erhält man:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha,$$

so, daß man, diese beiden Fälle zusammengezogen, die Formel hat:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha.$$

§. 21. Es ist ferner, wenn man diese letztere Formel gleich anwendet (§. 5)

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \sin[90^\circ - (\alpha \pm \beta)] = \sin[(90 - \alpha) \mp \beta]$$

$$= \sin(90 - \alpha) \cos \beta \mp \cos(90 - \alpha) \sin \beta$$

oder endlich (§. 5 oder §. 12):

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta.$$

Anmerk. Um zu zeigen, daß diese beiden Grundformeln (§§. 20, 21) der Goniometrie nicht bloß für spitze Winkel α , β , sondern ganz Allgemein gelten, kann man auf

folgende Art verfahren. Sey zuerst ohne Rücksicht auf die Größe von α , $\beta > 90$ und < 180 , also $\beta = 90 + b$, wo $b < 90$; so ist $\sin(\alpha + \beta) = \sin(90 + \alpha + b) = \cos(\alpha + b) = \cos \alpha \cos b - \sin \alpha \sin b$, oder, wegen $\sin b = \sin(\beta - 90) = -\sin(90 - \beta) = -\cos \beta$ und $\cos b = \cos(\beta - 90) = \cos(90 - \beta) = \sin \beta$, wieder:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \beta \cos \alpha + \sin \alpha \cos \beta;$$

und da diese Formel bereits für $\beta > 90$ und < 180 gilt, so gilt auch die daraus abgeleitete für $\cos(\alpha + \beta)$ bei denselben Werthen von β . Setzt man daher neuerdings $\beta = 90 + b$, wo $b > 90$ und < 180 seyn soll; so wird

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha + b) = \cos \alpha \cos b - \sin \alpha \sin b \\ &= \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta, \end{aligned}$$

und es gilt sonach diese Formel (also auch die daraus abgeleitete für $\cos(\alpha + \beta)$) bereits für Werthe von $\beta > 180$ und < 270 . Da sich diese Schlüsse soweit man will fortsetzen oder wiederholen lassen, so ist die allgem. Giltigkeit der Formel von $\sin(\alpha + \beta)$, mithin auch die der übrigen daraus abgeleiteten, für jeden Werth von β erwiesen, da man endlich bei diesen Schlüssen α mit β verwechseln kann, so darf auch α jeden beliebigen Werth besitzen.

§. 22. Es ist ferner, diese eben entwickelten Formeln angewendet (§. 16),

$$\operatorname{tang}(\alpha \pm \beta) = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos(\alpha \pm \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha}{\cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta},$$

oder, wenn man Zähler und Nenner durch $\cos \alpha \cos \beta$ dividirt, gehörig abkürzt und überall statt $\frac{\sin}{\cos}$, tang setzt:

$$\operatorname{tang}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tang} \alpha \pm \operatorname{tang} \beta}{1 \mp \operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} \beta}.$$

§. 23. Setzt man in den Formeln der §§. 20 — 22 $\beta = \alpha$, so erhält man der Reihe nach: $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$ (je nachdem man nämlich nach §. 18 den Cosinus durch den Sinus oder Sin. durch Cos. ausdrückt) und

$$\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tang} \alpha}{1 - \operatorname{tang}^2 \alpha},$$

oder α statt 2α gesetzt:

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \alpha, \quad \cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} \alpha = 2 \cos^2 \frac{1}{2} \alpha - 1,$$

$$\tan \alpha = \frac{2 \tan \frac{1}{2} \alpha}{1 - \tan^2 \frac{1}{2} \alpha}.$$

Anmerk. Für $\beta = 2\alpha$ erhält man eben so:

$$\sin 3\alpha = \sin \alpha \cos 2\alpha + \sin 2\alpha \cos \alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha,$$

$$\cos 3\alpha = \cos \alpha \cos 2\alpha - \sin \alpha \sin 2\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

u. s. w. (Trigon., S. 40, u. Formelsamml. S. 14.)

§. 24. Aus den beiden vorigen Ausdrücken für $\cos \alpha$ folgt: $\sin \frac{1}{2} \alpha = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos \alpha)}$ und $\cos \frac{1}{2} \alpha = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos \alpha)}$; es ist also

$$\tan \frac{1}{2} \alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

(je nachdem man nämlich von der Wurzelgröße den Zähler oder Nenner rational macht).

§. 25. Die vorigen Wurzelausdrücke $\sqrt{1 \mp \cos \alpha} = \sqrt{1 \mp \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$ nach der bekannten Reducionsformel für $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ behandelt, erhält man noch:

$$\sin \frac{1}{2} \alpha = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \sin \alpha} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \sin \alpha} \quad \text{und}$$

$$\cos \frac{1}{2} \alpha = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \sin \alpha} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \sin \alpha};$$

dabei ist $\sqrt{1 - \sin \alpha}$, wie aus der Natur der Ableitung folgt, negativ zu nehmen, so, daß von diesen beiden Formeln eine in die andere übergeht, wenn $\cos \alpha$ negativ, d. i. $\alpha > 90$ ist.

§. 26. Setzt man $\alpha + \beta = s$ und $\alpha - \beta = d$, so wird $\alpha = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}d$ und $\beta = \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}d$, also auch (§§. 20, 21):

$$\sin \alpha = \sin \frac{1}{2}s \cos \frac{1}{2}d + \sin \frac{1}{2}d \cos \frac{1}{2}s,$$

$$\sin \beta = \sin \frac{1}{2}s \cos \frac{1}{2}d - \sin \frac{1}{2}d \cos \frac{1}{2}s,$$

$$\cos \alpha = \cos \frac{1}{2}s \cos \frac{1}{2}d - \sin \frac{1}{2}s \sin \frac{1}{2}d,$$

$$\cos \beta = \cos \frac{1}{2}s \cos \frac{1}{2}d + \sin \frac{1}{2}s \sin \frac{1}{2}d,$$

und daraus erhält man durch Addition und Subtraction, wenn man für s und d gleich wieder die Werthe herstellt:

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta), \\ \sin \alpha - \sin \beta &= 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta), \\ \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta), \\ \cos \beta - \cos \alpha &= 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta), \end{aligned}$$

Formeln, mittelst welchen Summe und Unterschied der Sinus und Cosinus in Producte verwandelt werden und für die Anwendung der Logarithmen äußerst wichtig sind.

§. 27. Wird jede der 4 vorigen Formeln durch die 3 übrigen dividirt, so erhält man 12 neue brauchbare Formeln, von denen wir, des künftigen Gebrauches wegen, nur eine einzige wirklich hersetzen wollen. Dividirt man nämlich die 1. durch die 2., so erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \alpha - \sin \beta} &= \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta)} \\ &= \operatorname{tang} \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \operatorname{cot} \frac{1}{2}(\alpha - \beta), \end{aligned}$$

oder endlich wegen (§. 16) $\operatorname{tang} x = 1 : \operatorname{Cot} x$ auch:

$$\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \alpha - \sin \beta} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}.$$

§. 28. Dagegen erhält man aus diesen genannten 4 Formeln durch Multiplication (mit Rücksicht, daß (§. 23) $2 \sin \frac{1}{2}x \cos \frac{1}{2}x = \sin x$ ist):

$$\begin{aligned} \sin \alpha^2 - \sin \beta^2 &= \cos \beta^2 - \cos \alpha^2 = \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta), \\ \text{so wie aus jenen beiden in §. 21 (wenn man die doppelten Zeichen trennt):} \\ \cos \alpha^2 - \sin \beta^2 &= \cos \beta^2 - \sin \alpha^2 = \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta). \end{aligned}$$

Umwandlung der Formeln für den Halbmesser r .

Fig. 4. §. 29. Es seyen aus dem Scheitelpuncte C (Fig. 4) des Winkels $ACB = \alpha$ mit den Halbmessern $Ca = 1$ und $CA = r$ die Kreisbögen ab , AB und für diese die Sinus, Tangenten u. s. w. gezogen; so geben die dadurch entstehenden rechth. ähnlichen Dreiecke ganz einfach die Proportionen: $bd : BD = Cb : CB$, $Cd : CD = Cb : CB$,

$ae : AE = Ca : CA$ u. s. w., oder, wenn man zum Unterschiede die Sinus, Cosinus etc. für den Kreisbogen vom Halbmesser r durch einen großen Anfangsbuchstaben auszeichnet:

$\sin \alpha : \text{Sin } \alpha = 1 : r$, $\cos \alpha : \text{Cos } \alpha = 1 : r$, $\tan \alpha : \text{Tang } \alpha = 1 : r$
u. s. w. nämlich, wenn $f(\alpha)$ irgend eine der goniom. Linien für den Halbmesser 1 und $F(\alpha)$ die gleichnamige für den Halbmesser r bezeichnet, allgemein: $f(\alpha) : F(\alpha) = 1 : r$, woraus

$$F(\alpha) = rf(\alpha) \quad \text{und} \quad f(\alpha) = \frac{F(\alpha)}{r} \quad \text{folgt.}$$

§. 30. Um also z. B. den Sinus eines Winkels α in einem Kreise vom Halbmesser r zu erhalten, wird man den Sinus desselben Winkels α aus dem Kreise vom Halbmesser 1 mit r multipliciren. Dagegen findet man umgekehrt aus dem Sinus eines Winkels im Kreise vom Halbmesser r , den Sinus desselben Winkels für den Kreis vom Halbmesser 1, wenn man den gegebenen Sinus durch r dividirt. Dasselbe gilt auch für die übrigen trigonom. Linien oder Functionen.

Anmerk. Man sieht, daß die Quotienten $\frac{\text{Sin } \alpha}{r}$, $\frac{\text{Tang } \alpha}{r}$ u. s. w.,
so wie auch jene $\frac{\sin \alpha}{1}$, $\frac{\cos \alpha}{1}$, $\frac{\tan \alpha}{1}$ u. s. w. abstracte oder absolute Zahlen sind.

§. 31. Die letztere der beiden Relationen in §. 29 dienet auch zur Umwandlung der für den Halbmesser 1 abgeleiteten Formeln auf den Halbmesser r . Denn wendet man diese z. B. auf die für den Halbmesser 1 (§. 16) entwickelte Formel $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ an, so erhält man

$$\frac{\text{Tang } \alpha}{r} = \frac{\text{Sin } \alpha}{r} : \frac{\text{Cos } \alpha}{r} \quad \text{oder} \quad \text{Tang } \alpha = \frac{r \text{ Sin } \alpha}{\text{Cos } \alpha},$$

in welcher Formel sich nun die goniom. Linien $\text{Tang } \alpha$, $\text{Sin } \alpha$ und $\text{Cos } \alpha$ auf einen Kreis vom Halbmesser r beziehen.

Auf die nämliche Art erhält man auch aus (§§. 16, 20)

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}, \quad \sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha$$

u. s. w., sofort:

$$\sec \alpha = \frac{r^2}{\cos \alpha}, \quad \sin(\alpha \pm \beta) = \frac{\sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha}{r}$$

u. s. w.

Und so kann man überhaupt alle oben für den Halbmesser 1 entwickelten Formeln, wenn es nöthig seyn sollte, für den Halbmesser r herstellen.

Anmerk. Da, wie man sieht, in diesen auf den Halbmesser r bezogenen Formeln durchaus die nämliche Dimension herrscht, was bei der Anwendung der Algebra auf Geometrie überhaupt, wie wir im 3. Abschnitte (§. 354) sehen werden, sobald jede Linie durch einen Buchstaben (und keine durch 1) bezeichnet wird, eine nothwendige Eigenschaft ist; so kann man auch noch kürzer diese Umwandlung der Formeln vom Halbmesser 1 auf jenen r bewirken, indem man die umzuwandelnde Formel in ihren Gliedern mit solchen Potenzen von r multiplicirt oder dividirt, das dadurch in der ganzen Gleichung oder Formel die besagte gleiche Dimension hergestellt wird. So folgt z. B. aus der in §. 23 entwickelten Formel von $\operatorname{tang} \alpha$ durch $\operatorname{tang} \frac{1}{2} \alpha$ ausgedrückt, für den Halbmesser 1:

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} \alpha = \frac{-1 + \sqrt{1 + \operatorname{tang} \alpha^2}}{\operatorname{tang} \alpha};$$

stellt man nun im 2. Theil dieser Gleich. durchaus die Dimension = 1 her (da auch der erste Theil von dieser Dimension ist), so erhält man:

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} \alpha = \frac{-r^2 + r \sqrt{r^2 + \operatorname{tang} \alpha^2}}{\operatorname{tang} \alpha},$$

die auf den Halbmesser r sich beziehende Formel, wie man sie auch nach dem obigen Verfahren finden würde.

Zweites Capitel.

Über die Berechnung der Sinus, Cosinus u. s. w.

§. 32. Da sich die zur Berechnung der Sinus darbietenden bequemern und einfachern Methoden der neuern Zeit hier noch nicht anführen lassen, so wollen wir nur einen kurzen Begriff geben, wie diese Berechnung mit den bisher entwickelten Relationen ausgeführt werden kann.

Mit Hilfe der Formeln in §§. 14, 18, 20 können nach und nach die Sinus von 3° , 6° , 9° ... überhaupt von 3 zu 3 Grad durch den ganzen Quadranten gefunden werden. Da es uns aber hier vorzüglich um die Bestimmung von $\sin 3^\circ$ zu thun ist, so sollen, um den Weg anzugeben, ausser diesem nur einige Sinus aus dieser erwähnten Reihe gesucht werden.

§. 33. Nach der Relation in §. 14 hat man für $\alpha = 30$, 45 , 60 und 18° der Reihe nach:

$$\sin 30 = \cos 60 = \frac{1}{2} \text{Chord } 60 = \frac{1}{2} = \cdot 5,$$

$$\sin 45 = \cos 45 = \frac{1}{2} \text{Chord } 90 = \frac{1}{2} \sqrt{2} = \cdot 707,$$

$$\sin 60 = \cos 30 = \frac{1}{2} \text{Chord } 120 = \frac{1}{2} \sqrt{3} = \cdot 866,$$

$$\sin 18 = \cos 72 = \frac{1}{2} \text{Chord } 36 = \frac{1}{2} \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right) = \cdot 309^*).$$

Nach der Formel in §. 20 erhält man jetzt, $\alpha = 60$ und $\beta = 45^\circ$ gesetzt:

$$\sin (60 \pm 45) = \sin 60 \cos 45 \pm \sin 45 \cos 60 \text{ oder}$$

$$\begin{aligned} \sin 105 = \sin 75 = \cos 15 &= \frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2} + \frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{2} (1 + \sqrt{3}) = \cdot 966 \end{aligned}$$

$$\text{und } \sin 15 = \cos 75 = \frac{1}{4} \sqrt{2} (-1 + \sqrt{3}) = \cdot 259.$$

Eben so ist für $\alpha = 18$ und $\beta = 15^\circ$:

$$\sin (18 \pm 15) = \sin 18 \cos 15 \pm \sin 15 \cos 18,$$

und da (§. 18) $\cos 18 = \sqrt{1 - \sin^2 18} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}(5 + \sqrt{5})}$ ist:

$$\sin 33 = \cos 57 = \frac{1}{4} (-1 + \sqrt{5}) \frac{1}{4} \sqrt{2} (1 + \sqrt{3})$$

$$+ \frac{1}{4} \sqrt{2} (-1 + \sqrt{3}) \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}(5 + \sqrt{5})} = \cdot 545,$$

*) Man substituirt nämlich für *Chord* 60, 90, 120 und 36° die aus der Geometrie bekannten Ausdrücke der regeln. 6, 4, 3 und 10. Eck-Seite für den Halbmesser 1.

und (statt der Summe, die Differenz derselben beiden Bestandtheile genommen) $\sin 3 = \cos 87 = \cdot 052$ u. s. w.

§. 34. Aus dem auf diese Weise gewonnenen kleinsten Sinus, d. i. aus $\sin 3^\circ$, findet man nach der Formel (§. 25)

$$\sin \frac{1}{2} \alpha = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \sin \alpha} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \sin \alpha},$$

indem man nach und nach $\alpha = 3^\circ, \frac{3^\circ}{2}, \frac{3^\circ}{4} = 45', \frac{45'}{2}, \frac{45'}{4}$ u. s. w. setzt, auch die Sinus dieser Winkel; ist man dabei bis zu $\alpha = \frac{45'}{32}$ gekommen, so findet man $\sin \frac{45'}{32} = \cdot 00040903$ und hierauf für $\alpha = \frac{45'}{64} : \sin \frac{45'}{64} = \cdot 00020452$, so, dafs sich also (weil diese Zahl die Hälfte von der vorigen ist) bei dieser Gröfse der Winkel, bis auf 7 Decimalstellen genau, die Sinus wie die Winkel verhalten. Um also den für die weitere Berechnung wichtigen Sinus einer Minute zu finden, hat man $\sin \frac{45'}{64} : \sin 1' = \frac{45}{64} : 1$, und daraus, wenn man für $\sin \frac{45'}{64}$ seinen Werth setzt: $\sin 1' = \cdot 00029087$, welcher Werth (da bis auf 12 Stellen genau, $\sin 1' = \cdot 000290888207$) bis auf die 7. Decimalstelle richtig ist.

§. 35. Da (§. 20) $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$ und (§. 23) $\cos \beta = 1 - 2 \sin \frac{1}{2} \beta^2$ ist, so erhält man

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha + [\sin \alpha - \sin(\alpha - \beta)] = 4 \sin \alpha \sin \frac{1}{2} \beta^2,$$

und daraus und dem vorigen Werth von $\sin 1'$, wenn man $\beta = 1'$ und dann nach und nach $\alpha = 1, 2, \dots 59$, so wie endlich Kürze halber, $4(\sin \frac{1}{2})^2 = 4(\cdot 0001454441)^2 = \cdot 000000846 = k$ setzt:

$$\sin 2' = \sin 1' + (\sin 1' - \sin 0) = k \sin 1',$$

$$\sin 3' = \sin 2' + (\sin 2' - \sin 1') = k \sin 2',$$

$$\sin 4' = \sin 3' + (\sin 3' - \sin 2') = k \sin 3',$$

u. s. w.

§. 36. Hat man auf diese Weise endlich $\sin 60' = \sin 1^\circ$ berechnet, so findet man nach der nämlichen Formel des vorigen §. die Sinus von $2, 3, \dots 90^\circ$, wenn man darin $\beta = 1^\circ$

und nach und nach $\alpha = 1, 2, \dots, 89^\circ$, oder die Sinus von $1^\circ, 1', 1'', 2''$ u. s. w., wenn man $\alpha = 1', 2', \dots$ setzt.

Von 60° angefangen können jedoch die folgenden Sinus aus den vorhergehenden nach der Formel $\sin(60^\circ + \alpha) = \sin(60^\circ - \alpha) + \sin \alpha$ (die aus jener im vorigen §. angeführten für $\beta = 60^\circ$ folgt) bequemer gefunden werden.

Anmerk. Da es bei diesen Rechnungen nöthig ist, sich von Zeit zu Zeit von der Richtigkeit derselben zu überzeugen, so kann man unter andern Mitteln dazu die sogenannten Verificationsformeln anwenden. Eine solche ist:

$$\begin{aligned} \sin A + \sin(36^\circ - A) + \sin(72^\circ + A) \\ = \sin(36^\circ + A) + \sin(72^\circ - A). \end{aligned}$$

§. 37. Sind auf diese Weise die sämmtlichen Sinus, also zugleich auch die Cosinus für den ganzen Quadranten (über welchen man, §. 13, Anmerk., nicht hinauszugehen braucht) gefunden; so kann man nach den Formeln in §. 16 die Tangenten und Cotangenten (da die übrigen Functionen entbehrlich sind) berechnen.

§. 38. Da bei den wirklichen Rechnungen weniger diese so gefundenen Zahlen der Sinus, Cosinus u. s. w. die sogenannten natürlichen Functionen, als ihre Logarithmen (die künstlichen Functionen) in Anwendung kommen; so sind auch gewöhnlich nur diese Logarithmen in den Tafeln eingetragen. Da aber für den Halbmesser 1, die Sinus durchaus eigentliche Brüche sind, so erhalten ihre Logarithmen (um sie positiv zu machen) eine negative Charakteristik, indem z. B. wegen $\sin 30^\circ = \cdot 5$,

$$\log \sin 30^\circ = \log \cdot 5 = \cdot 6989700 - 1$$

ist; dasselbe gilt auch für die Cosinus und unter 45° für die Tangenten, über 45° für die Cotangenten. Um daher diese angehängten negativen Zahlen zu vermeiden, nimmt man in den Tafeln den Halbmess. nicht $= 1$, sondern $= 10^{10}$, so dafs also für diesen Tafelhalbmess. $r = 10^{10}$, $\log r = 10$ wird. Dadurch hat man aus (§. 29) $F(\alpha) = rf(\alpha)$, sofort: $\log F(\alpha) = \log f(\alpha) + 10$, also im vorigen Beisp. für den Halbm. der Tafel: $\log \sin 30^\circ = \cdot 6989700$.

§. 39. Zusatz. Die Logarithmen der trigon. Functionen, diese auf den Halb. 1 bezogen, werden daher in Tafellogarithmen, oder in solche, die sich auf den Halb. der Tafel r beziehen, umgewandelt, indem man zu den erstern 10 Einheiten addirt; dagegen werden die letztern auf die erstern gebracht, indem man von jedem Logarithmus der Tafel 10 Einheiten abzieht.

§. 40. Die Einrichtung und den Gebrauch der logarithmisch-trigonometrischen Hilfstafeln lernt man am besten aus der Einleitung kennen, die gewöhnlich einer jeden solchen Tafel beigelegt ist; indess beruht diese Einrichtung immer auf folgenden Sätzen:

1. Im ersten Quadranten nehmen, wenn die Winkel wachsen, die Functionen (Sinus, Tangente etc.) zu, dagegen die Cofunctionen (Cosinus, Cotang. u. s. w.) ab.
2. Die Sinus und Tangenten kleiner Winkel stehen mit den entsprechenden Winkeln in geometrischer, also die Logarithmen dieser Functionen mit den Logarithmen der Winkel in arithm. Proportion.
3. Bei grösseren, weniger als um eine Minute von einander verschiedenen Winkeln verhalten sich die Differenzen der Logarithmen der Functionen oder Cofunctionen, wie die Differenzen der zugehörigen Winkel.
4. Die Logarithmen der Cotangenten haben mit jenen der Tangenten einerlei Differenzen.

Von diesen 4 Sätzen ist der 1. bereits (§. 10, Anmerk.) angeführt; der 2. und 3. ergeben sich am einfachsten aus der Tafel selbst, aus welcher man zugleich auch ersieht, wie weit diese Sätze ausgedehnt werden dürfen; der 4. Satz endlich folgt ganz einfach aus der Gleich. (§. 16)

$$\operatorname{tang} \alpha \operatorname{Cot} \alpha = 1^*).$$

*) Hier ist zugleich der Ort, an welchem die nöthigen Übungen mit den logarithmisch-trigonometrischen Tafeln, um zu irgend einem gegeb. W., $\log \sin$, $\log \cos$ etc., und umgekehrt, zu einem gegeb. Logarithmus Sinus, Cosinus etc. den entsprechenden Winkel zu finden, vorzunehmen sind.

Drittes Capitel.

Grundformeln zur Auflösung der geradlinigen
Dreiecke.

§. 41. Bezeichnet man in einem beliebigen geradl. Dreiecke ABC (Fig. 5) die Winkel durch A, B, C , die gegenüberliegenden Seiten beziehungsweise durch a, b, c , und fällt aus einem der Winkelpuncte, z. B. C , auf die gegenüberstehende Seite das Perpendikel CD ; so ist, wenn man sich aus A mit dem Halbmesser $AC = b$ den Kreisbogen beschrieben denkt, CD der Sinus des W. A für den Halbm. b , und man hat, wenn, wie bisher, $\sin A$ den Sinus dieses W. A für den Halbm. $= 1$ bezeichnet (§. 30): $CD = b \sin A$. Eben so ist, wenn der Kreisbogen aus B , mit dem Halbm. $BC = a$ beschrieben gedacht wird, im Falle das Perpendikel (Fig. 5) CD in das Dreieck fällt:

$$CD = a \sin B,$$

und wenn das Perpendikel (Fig. 5') außerhalb desselben fällt: $CD = a \sin \alpha$ oder wegen $\sin \alpha = \sin (180 - B) = \sin B$ (§. 13) ebenfalls $CD = a \sin B$. Man hat also

$$b \sin A = a \sin B \quad \text{oder} \quad a : b = \sin A : \sin B.$$

§. 42. Da es ganz gleichgiltig ist, von welchem Winkelpuncte das Perpendikel auf die gegenüberliegende Seite gefällt wird, so hat man eben so gut (was gleichfalls aus der vorigen Proport. durch bloße Vertauschung der Buchstaben folgt) auch

$$a : c = \sin A : \sin C \quad \text{und} \quad b : c = \sin B : \sin C,$$

oder allgemein

$$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C,$$

wodurch der erste und wichtigste Satz des geradl. Dreieckes ausgedrückt wird.

§. 43. Aus der vorigen Proportion $a : b = \sin A : \sin B$ folgt auch $a + b : a - b = \sin A + \sin B : \sin A - \sin B$, oder

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(A-B)}$$

(§. 27), d. i.

$$a + b : a - b = \operatorname{tang} \frac{1}{2}(A+B) : \operatorname{tang} \frac{1}{2}(A-B),$$

welche Proportion einen zweiten Hauptsatz des Dreieckes ausspricht.

§. 44. So wie oben (§. 41) $CD = b \sin A = a \sin B$ war, so ist auch (§. 5, Zus.) (Fig. 5) $AD = b \cos A$ und $BD = a \cos B$, folglich $AD + BD$, d. i.

$$c = a \cos B + b \cos A^*).$$

Analog mit dieser Relation hat man noch

$$b = a \cos C + c \cos A \quad \text{und} \quad a = b \cos C + c \cos B.$$

Multiplicirt man diese 3 Gleich. beziehungsweise mit c, b, a ; so erhält man:

$$c^2 = ac \cos B + bc \cos A,$$

$$b^2 = ab \cos C + bc \cos A,$$

$$a^2 = ab \cos C + ac \cos B,$$

und wenn man von der Summe der beiden erstern dieser Gleichungen die letztere abzieht:

$$b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \cos A,$$

woraus endlich der dritte für das geradl. Dreieck wichtige Satz folgt:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \text{oder} \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

*) Dieselbe Relation findet man auch aus Fig. 5' mit Berücksichtigung, daß

$$BD = a \cos \alpha = -a \cos B \quad \text{und} \quad c = AB = AD - BD \text{ ist.}$$

Viertes Capitel.

Auflösung der geradlinigen Dreiecke.

a) Der rechtwinkligen.

§. 45. Obschon die Auflösung der rechtw. Dreiecke in jener der schiefwinkeligen als besonderer Fall enthalten ist, so verdient diese dennoch, der großen Einfachheit wegen, besonders angeführt zu werden.

§. 46. Bezeichnet man (Fig. 6) den rechten W. durch *C*, die beiden spitzen W. durch *A* und *B*, also die Hypotenuse durch *c* und die beiden Catheten durch *a* und *b*; so können hier blofs 5 verschiedene Fälle vorkommen, und sofort aufser dem rechten W. gegeben seyn: 1. *a, b*, 2. *a, c* (gleichgeltend mit *b, c*), 3. *a, A* (analog mit *b, B*), 4. *a, B* (anal. mit *b, A*) und 5. *c, A* (analog mit *c, B*).

Ohne nun erst für alle diese Fälle besondere Regeln aufzustellen, ist es einfacher aus der blofsen Anschauung der Figur diejenige Relation oder Gleichung (nach §§. 3 und 30) anzusetzen, welche die beiden gegebenen und das gesuchte Stück enthält, und daraus das letztere zu bestimmen. Wären z. B. eine Cathete und der gegenüberliegende W. gegeben und die Hypotenuse zu suchen, so würde man unmittelbar aus der Figur (indem man sich aus *A* mit dem Halbm. $AB = c$ einen Bogen beschrieben denkt) $a = c \sin A$ und daraus $c = a : \sin A$ haben. Wäre dagegen die zweite Cathete zu finden, so würde man ebenfalls aus dem Dreiecke selbst (indem man sich, um eine Relation zwischen *a, A, b* zu erhalten, aus *A* mit dem Halbm. $AC = b$ einen Bogen beschrieben vorstellt) $a = b \tan A$ und daraus $b = a : \tan A = a \cot A$ erhalten.

§. 47. Die Auflösung der rechtw. Dreiecke liegt also in den 5 einfachen Relationen: $a^2 + b^2 = c^2$, $a = c \sin A = b \tan A$, $b = c \cos A = a \cot A$, und man erhält, durch Zusammenstellung aller vorkommenden Fälle, folgende Tabelle:

Gegebene Stücke.

Gesuchte Stücke.

Die beiden Catheten a, b $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\text{tang } A = \frac{a}{b}$.

Eine Cathete und die Hypotenuse a, c $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(c+a)(c-a)}$, $\sin A = \frac{a}{c}$.

Eine Cathete und der gegenüberliegende W. a, A . $b = a \cdot \cot A$, $c = \frac{a}{\sin A}$.

Eine Cathete und der anliegende W. b, A $a = b \text{ tang } A$, $c = \frac{b}{\cos A}$.

Die Hypotenuse und ein Winkel c, A $a = c \sin A$, $b = c \cos A$, dabei ist überall $B = 90^\circ - A$.

S. 48. Diese Ausdrücke sind zugleich, mit Ausnahme des erstern, so beschaffen, dals man darauf die Logarithmen anwenden kann. Um auch den erstern dafür einzurichten, setze man, da

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = a \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$$

ist, und die Tangente jeden Werth von 0 bis ∞ annehmen kann, $\frac{b}{a} = \text{tang } \varphi$, wo φ einen Hilfswinkel

bezeichnet; so hat man: $c = a \sqrt{1 + \text{tang } \varphi^2} = a \sec \varphi$ (§. 15) oder auch (§. 16): $c = \frac{a}{\cos \varphi}$.

Man bestimmt also zuerst aus der Gleich. $\log \text{tang } \varphi = \log b - \log a$ den Hilfswinkel φ und damit aus der Gleich. $\log c = \log a - \log \cos \varphi$ die Hypotenuse c .

§. 49. Zur Bestimmung der Fläche F des Dreieckes hat man in den genannten 5 Fällen ganz einfach beziehungsweise: $F = \frac{1}{2} ab = \frac{1}{2} a \sqrt{(c+a)(c-a)} = \frac{1}{2} a^2 \cot A = \frac{1}{2} b^2 \tan A = \frac{1}{2} c^2 \sin A \cos A$ oder (§. 23) auch $= \frac{1}{4} c^2 \sin 2A$; welche Ausdrücke ebenfalls der logarithmischen Behandlung fähig sind.

Anmerk. 1. Die in den Relationen dieses und des §. 47 vorkommenden trigon. Linien oder Functionen beziehen sich, wie man sieht, wieder auf den Halbmesser 1, und können, wenn man will, nach §. 31, leicht auf jenen r gebracht werden; es gehen z. B. dadurch die Ausdrücke $\tan A = \frac{a}{b}$,

$$a = c \sin A, \quad F = \frac{1}{2} a^2 \cot A \quad \text{u. s. w.}, \quad \text{in} \quad \tan A = \frac{ra}{b},$$

$$a = \frac{c \sin A}{r}, \quad F = \frac{a^2 \cot A}{2r} \quad \text{u. s. w. über.} \quad \text{Allein wir ziehen es vor, diese Formeln ungeändert zu lassen und dagegen bei der wirklichen Berechnung, nach §. 39, die Logarithmen der trigon. Functionen der Tafel, auf den Halbmesser 1, und umgekehrt, die gefundenen Logarithmen der auf den Halbm. 1 sich beziehenden trigon. Functionen, zur Auf-$$

findung der entsprechenden Winkel, auf den Tafelhalbmesser zu reduciren.

Anmerk. 2. Zur Übung in den genannten 5 Fällen mag man das Dreieck nehmen, in welchem $a = 110.806$, $b = 148.6$, $c = 185.364$, $A = 36^\circ 42' 38''$, $B = 53^\circ 17' 22''$, $C = 90$ und $F = 8232.886$ ist.

b) Der schiefwinkligen oder beliebigen Dreiecke.

§. 50. Bei der Auflösung der schiefwinkligen Dreiecke können (da sich darunter immer eine Seite befinden muß) gegeben seyn: I. eine Seite und zwei Winkel; II. zwei Seiten und ein Winkel, und zwar α) ein gegenüberliegender oder β) der eingeschlossene W.; III. alle drei Seiten.

§. 51. I. Gegeben eine Seite und zwei Winkel, z. B. c, A, B . Da in diesem Falle immer auch der 3. W. $C = 180 - (A+B)$ gegeben ist, so hat man (§. 42)

$c : a = \sin C : \sin A$ und daraus $a = c \sin A : \sin C$ oder $\log a = \log c + \log \sin A - \log \sin C$. Auf dieselbe Art erhält man (wozu in der letztern Relat. nur a und b , also auch A und B mit einander zu vertauschen sind):

$$\log b = \log c + \log \sin B - \log \sin C.$$

Fig. 5.

§. 52. Zur Bestimmung der Fläche F hat man (Fig. 5) $F = \frac{1}{2} AB \cdot CD$, oder da $AB = c$ und $CD = b \sin A = a \sin B$ ist:

$$F = \frac{1}{2} b c \sin A = \frac{1}{2} a c \sin B (= \frac{1}{2} a b \sin C);$$

es ist also im vorliegenden Falle, wegen $b = \frac{c \sin B}{\sin C}$, sofort

$$F = \frac{c^2 \sin A \sin B}{2 \sin C} = \frac{c^2 \sin A \sin B}{2 \sin(A+B)}.$$

Zur Übung dieses und der folgenden Fälle kann das Dreieck dienen, in welchem $a = 36.52$, $b = 48.34$, $c = 55.62$, $A = 40^\circ 22' 26'' 56$, $B = 59^\circ 1' 46'' 34$, $C = 80^\circ 35' 47'' 1$ und $F = 870.826$ ist. (M. s. Handb. der Trigonom., S. 98 u. f.)

§. 53. II. a) Gegeben zwei Seiten und ein gegenüberliegender Winkel, z. B. a, b, B . In diesem Falle hat man ebenfalls wieder (nach §. 42)

$$b : a = \sin B : \sin A,$$

und daraus $\sin A = a \sin B : b$ oder

$$\log \sin A = \log a + \log \sin B - \log b.$$

Entspricht nun diesem so berechneten Logarithmus Sinus in der Tafel der W. a , welcher also (§. 37) jedenfalls ein spitzer ist; so kann im Allgemeinen (weil beide Winkel denselben Sinus haben) $A = \alpha$ und $= 180^\circ - \alpha$ seyn. Ist aber B der der größern Seite gegenüberliegende W., also $a < b$, so ist auch $A < B$, und es kann von den beiden Werthen nur jener $A = \alpha < 90^\circ$ gelten, so, daß in diesem Falle das Dreieck vollkommen bestimmt ist. Liegt hingegen der gegeb. W. B der kleinern Seite gegenüber, ist nämlich $a > b$, also auch $A > B$; so können, ohne gegen diese letztere Bedingung zu verstossen, beide Werthe:

$A = \alpha < 90$ und $A = 180 - \alpha > 90$ gelten, so daß es in diesem (unbestimmten) Falle zwei Dreiecke oder Auflösungen gibt (wie dies Alles auch aus der Geometrie schon bekannt ist).

Im 1. Falle ist ferner, nachdem $A = \alpha$ gefunden ist, $C = 180 - (A + B)$, und aus $c : b = \sin C : \sin B$, wenn man gleich Logarithmen nimmt:

$$\log c = \log b + \log \sin C - \log \sin B,$$

also auch C und c bestimmt. Im 2. oder unbestimmten Falle aber erhält man, wegen des zweifachen Werthes von A , auch 2 Werthe sowohl für C als für c , die den erwähnten beiden Dreiecken entsprechen.

§. 54. Zur Berechnung der Fläche hat man (§. 52) $F = \frac{1}{2} ac \sin B$, oder da aus der Gl. (§. 44)

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B,$$

wenn man sie nach c auflöst,

$$c = a \cos B \pm \sqrt{b^2 - a^2 \sin^2 B} \text{ folgt:}$$

$$F = \frac{1}{2} a \sin B [a \cos B \pm \sqrt{b^2 - a^2 \sin^2 B}].$$

Für $b > a$, d. i. im bestimmten Falle, ist

$$b^2 - a^2 \sin^2 B > a^2 - a^2 \sin^2 B = a^2 \cos^2 B,$$

also $\sqrt{b^2 - a^2 \sin^2 B} > a \cos B$; es kann also, da F positiv seyn muß, vor der Wurzelgröße nur das Zeichen $+$ gelten. Für $b < a$, oder im unbestimmten Falle aber, ist $\sqrt{b^2 - a^2 \sin^2 B} < a \cos B$, und es können, ohne das F negativ ausfällt, beide Zeichen genommen werden, wodurch also auch F zwei verschiedene, den vorhin genannten beiden Dreiecken entsprechenden Werthe erhält.

Nimmt man, um auch ein Beispiel für den unbestimmten Fall zu haben, von dem oben (§. 52) angegebenen Dreiecke, in welchem $a < b$ ist, a, b und A als gegebene Stücke; so findet man, außer dem eben genannten Dreieck, auch noch jenes: $a = 36.52$, $b = 48.34$, $c = 18.0339$, $A = 40^\circ 22' 26'' 56$, $B = 120^\circ 58' 13'' 66$, $C = 18^\circ 39' 19'' 78$ und $F = 282.352$, welches der Bedingung der Aufgabe entspricht.

§. 55. II. β) Gegeben zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel, z. B. a, b, C . In diesem Falle hat man zur Bestimmung der beiden fehlenden Winkel A und B (§. 43): $a + b : a - b = \operatorname{tang} \frac{1}{2}(A + B) : \operatorname{tang} \frac{1}{2}(A - B)$, und daraus mit Anwendung der Logarithmen: $\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}(A - B) = \log(a - b) + \log \operatorname{tang} \frac{1}{2}(A + B) - \log(a + b)$, in welchem Ausdrücke, wegen $\frac{1}{2}(A + B) = 90 - \frac{1}{2}C$, auch $\operatorname{cot} \frac{1}{2}C$ statt $\operatorname{tang} \frac{1}{2}(A + B)$ gesetzt werden könnte. Da nun durch C die Summe $\frac{1}{2}(A + B) = s$ bekannt ist, und aus der vorigen Gleich. $\frac{1}{2}(A - B) = d$ gefunden wird; so ist $A = s + d$ und $B = s - d$; dabei ist für $a > b$, weil d positiv ausfällt, auch $A > B$; für $a < b$, wird d negativ, also auch $A < B$ (im letztern Falle kann man auch a mit b verwechseln, oder überhaupt immer die grössere Seite durch a bezeichnen).

Nachdem die W. A und B bestimmt sind, kann man die Seite c nach dem Satze $c : a = \sin C : \sin A$, woraus $\log c = \log a + \log \sin C - \log \sin A$ folgt, berechnen.

§. 56. Um aber, was oft nothwendig und wünschenswerth ist, diese dritte Seite c unmittelbar aus den gegebenen Stücken zu finden, hat man (§. 44)

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C,$$

oder, wenn man zur Anwendung der Logarithmen, zum 2. Theil der Gleich. $2ab$ addirt und abzieht, und noch berücksichtigt, dafs (§. 23) $1 + \cos C = 2 \cos \frac{1}{2}C^2$ ist:

$$c^2 = (a + b)^2 - 4ab \cos \frac{1}{2}C^2 = (a + b)^2 \left(1 - \frac{4ab \cos \frac{1}{2}C^2}{(a + b)^2} \right),$$

und wenn man endlich $\frac{4ab \cos \frac{1}{2}C^2}{(a + b)^2} = \cos \varphi^2$ setzt, wo φ einen Hilfswinkel bezeichnet, auch: $c^2 = (a + b)^2 \sin \varphi^2$ oder $c = (a + b) \sin \varphi$.

Nachdem man also aus der Gleichung (die aus der vorigen für $\cos \varphi^2$ folgt)

$$\log \cos \varphi = \log 2 + \log \cos \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}(\log a + \log b) - \log(a + b)$$

den Hilfsw. φ bestimmt hat, findet man c aus jener:

$$\log c = \log(a + b) + \log \sin \varphi.$$

§. 57. Für die Fläche hat man hier unmittelbar (§. 52)
 $F = \frac{1}{2} a b \sin C$.

Bestimmt man die Seite c nach dem vorigen §., so findet man dazu den Hilfsw. $\varphi = 40^\circ 57' 8'' 85$.

§. 58. III. Gegeben alle drei Seiten a, b, c .
 In diesem Falle hat man zur Berechnung des W. A (§. 44)

a) $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, oder, wenn man, um diese Formel für die Anwendung der Logarithmen geeignet zu machen, den halben W. hineinbringt und zuerst (§. 23) $\cos A = 2 \cos \frac{1}{2} A^2 - 1$ setzt und gleich $2 \cos \frac{1}{2} A^2$ bestimmt:

$$2 \cos \frac{1}{2} A^2 = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc},$$

oder wenn man Kürze halber $a + b + c = 2s$ setzt, wodurch $b + c - a = 2(s - a)$, $a + c - b = 2(s - b)$ und $a + b - c = 2(s - c)$ wird, auch

$$2 \cos \frac{1}{2} A^2 = \frac{4s(s-a)}{2bc} \quad \text{oder} \quad \cos \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}.$$

§. 59. Setzt man dagegen in der vorigen Gleich. a), $\cos A = 1 - 2 \sin \frac{1}{2} A^2$ (§. 23) und bestimmt daraus $2 \sin \frac{1}{2} A^2$, so erhält man, mit der vorigen Annahme von $a + b + c = 2s$:

$$2 \sin \frac{1}{2} A^2 = \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc} = \frac{(a+b-c)(a+c-b)}{2bc} = \frac{4(s-c)(s-b)}{2bc}$$

$$\text{oder} \quad \sin \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}.$$

§. 60. Wegen $\tan \frac{1}{2} A = \sin \frac{1}{2} A : \cos \frac{1}{2} A$ und (§. 23) $\sin A = 2 \sin \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} A$ hat man auch noch:

$$\tan \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} \quad \text{und}$$

$$\sin A = \frac{2}{bc} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Durch bloßes Vertauschen der Buchstaben findet man aus diesen 4 Formeln die analogen zur Berechnung der beiden übrigen Winkel B und C .

(Über die Vorzüge, welche in der Anwend. die 3 erstern Formeln vor der letztern gewähren, beim mündlichen Vortrage; auch s. m. Handb. d. Trigöñ., S. 113.)

§. 61. Um endlich noch die Fläche in diesem Falle zu bestimmen, hat man aus (§. 52) $F = \frac{1}{2}bc \sin A$, wenn man für $\sin A$ den Werth aus dem vorigen §. substituirt:

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Zur fernern Übung mögen noch die beiden Dreiecke dienen: $a = 842.7$, $b = 692.3$, $c = 504.045$, $A = 88^{\circ}5'42''8$, $B = 55^{\circ}11'32''2$, $C = 36^{\circ}42'45''$, $F = 174378.7$, und $a = 24.6$, $b = 32.8$, $c = 21.5$, $A = 48^{\circ}35'17''94$, $B = 90^{\circ}27'23''88$, $C = 40^{\circ}57'18''28$, $F = 264.442$.

Fünftes Capitel.

Grundformeln zur Auflösung der sphärischen Dreiecke.

Fig. 7.

§. 62. Es sey ABC (Fig. 7) ein auf der Kugel vom Mittelpunct O und Halbmesser $OA = OB = OC = 1$ liegendes sphärisches Dreieck, dessen Winkel wir wieder durch A, B, C und gegenüberstehende Seiten durch a, b, c bezeichnen. Zieht man im Winkelpuncte C an die beiden Seiten oder Kreisbogen CA, CB die Tangenten CD, CE (die also beziehungswe. in den Ebenen COA und COB liegen) und die Secanten OAD und OBE ; so ist (wegen Halbm. = 1) $CD = \tan b$, $CE = \tan a$, $OD = \sec b$ und $OE = \sec a$. Nun hat man aus den beiden geradl. Dreiecken CDE und ODE nach §. 44:

$$\begin{aligned} DE^2 &= CE^2 + CD^2 - 2CE \cdot CD \cos DCE \\ &= OE^2 + OD^2 - 2OE \cdot OD \cos DOE, \end{aligned}$$

oder, wenn man substituirt und noch berücksichtigt, daß $\text{W. } DCE = \text{sph. W. } C$ und $\text{W. } DOE = \text{W. } c$ ist:

$$\begin{aligned} \tan a^2 + \tan b^2 - 2 \tan a \tan b \cos C \\ = \sec a^2 + \sec b^2 - 2 \sec a \sec b \cos c, \end{aligned}$$

und wenn man abkürzt, da (§. 15) $\sec a^2 = 1 + \tan a^2$ ist, auch $\tan a \tan b \cos C = \sec a \sec b \cos c - 1$, aus welcher Gleich., wenn die Tangenten und Secanten durch Sinus und Cosinus (§. 16) ausgedrückt werden, sofort folgt:

$$\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b}.$$

§. 63. Bezeichnet man in derselben Ordnung die W. des zugehörigen Polardreieckes (Fig. 8) durch A', B', C' und die gegenüberl. Seiten beziehungsweise durch a', b', c' ; so ist bekanntlich:

$A + a' = 180, B + b' = 180, C + c' = 180$ und
 $A' + a = 180, B' + b = 180, C' + c = 180^*$,
 also $a = 180 - A', b = 180 - B', c = 180 - C'$ und
 $C = 180 - c'$, mithin wenn man diese Werthe in der vorigen Formel substituirt (d. h. auf diese die Eigenschaft des Pol. Dr. anwendet) (§. 13):

$-\cos c' = (-\cos C' - \cos A' \cos B') : \sin A' \sin B'$,
 oder, wenn man zugleich die Accente wegläßt, indem diese Relation nun in jedem sph. Dreiecke gilt:

$$\cos c = \frac{\cos C + \cos A \cos B}{\sin A \sin B}.$$

*) Da diese Eigenschaft des Pol. Dreieckes nicht in allen Lehrbüchern der elem. Geometrie vorgetragen wird, so wollen wir diese hier kurz nachweisen.

Beschreibt man auf der Kugel aus den Winkelpuncten A, B, C des sph. Dreieckes ABC (Fig. 8), als Pole, mit der Entfernung von 90° größte Kreisbögen; so entsteht das zugehörige Polardreieck $A'B'C'$. Dieser Construction zufolge steht aber A' sowohl von B als auch von C um 90° ab, also ist A' der Pol des größt. Kreisbogens BC . Eben so sind B' und C' die Pole der Bögen AC und AB ; so wie also $A'B'C'$ das Polardreieck des Dreieckes ABC , so ist auch umgekehrt ABC das Polardreieck von jenem $A'B'C'$.

Nun ist (da DE das Maß des sph. $W. C$, und FG jenes des $W. C'$ ist)

$$C + A'B' = DE + A'B' = DE + A'E + B'D - DE = A'E + B'D = 90 + 90$$

(weil A' der Pol von CE und B' jener von CD ist), d. i. $C + c' = 180^\circ$, und damit analog: $B + b' = 180, A + a' = 180$.

Ferner ist $C' + AB = FG + AB = FB + GA = AB + AB = FB + GA = 90 + 90$ (weil B der Pol von FC' und A der Pol von $C'G$ ist), oder $C' + c = 180^\circ$, und damit analog auch $B' + b = 180$ und $A' + a = 180$.

§. 64. Drückt man (auf ähnliche Art, wie in §. 58) in der Formel von §. 62 $\cos C$ durch den halben W. aus, so hat man zuerst für $\cos C = 2 \cos \frac{1}{2} C^2 - 1$:

$$2 \cos \frac{1}{2} C^2 = \frac{\sin a \sin b + \cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b} = \frac{\cos c - \cos(a+b)}{\sin a \sin b},$$

oder (§. 26)

$$2 \cos \frac{1}{2} C^2 = \frac{2 \sin \frac{1}{2}(a+b+c) \sin \frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin a \sin b},$$

und wenn man wieder $a + b + c = 2s$ setzt (vergl. §. 58)

$$\text{endlich: } \cos \frac{1}{2} C^2 = \frac{\sin s \sin(s-c)}{\sin a \sin b}.$$

Analog damit ist noch:

$$\cos \frac{1}{2} B^2 = \frac{\sin s \sin(s-b)}{\sin a \sin c} \quad \text{und} \quad \cos \frac{1}{2} A^2 = \frac{\sin s \sin(s-a)}{\sin b \sin c}.$$

§. 65. Setzt man dagegen $\cos C = 1 - 2 \sin \frac{1}{2} C^2$, so erhält man eben so (wieder mit Rücks. auf §. 26):

$$-2 \sin \frac{1}{2} C^2 = \frac{\cos(b-a) - \cos c}{\sin a \sin b} = \frac{2 \sin \frac{1}{2}(b+c-a) \sin \frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin a \sin b}$$

$$\text{d. i. } \sin \frac{1}{2} C^2 = \frac{\sin(s-a) \sin(s-b)}{\sin a \sin b},$$

und damit analog (durch bloße gehörige Vertauschung der Buchstaben):

$$\sin \frac{1}{2} B^2 = \frac{\sin(s-a) \sin(s-c)}{\sin a \sin c} \quad \text{und} \quad \sin \frac{1}{2} A^2 = \frac{\sin(s-b) \sin(s-c)}{\sin b \sin c}.$$

§. 66. Setzt man Kürze halber

$$\sqrt{\sin s \sin(s-a) \sin(s-b) \sin(s-c)} = \omega,$$

so hat man aus den Formeln der beiden vorigen §§., nach der Relation (§. 23) $\sin \alpha = 2 \sin \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \alpha$:

$$\sin A = \frac{2\omega}{\sin b \sin c}, \quad \sin B = \frac{2\omega}{\sin a \sin c}, \quad \sin C = \frac{2\omega}{\sin a \sin b},$$

und daraus folgt:

$$\sin A : \sin B : \sin C = \sin a : \sin b : \sin c,$$

ein wichtiger (und jenem in §. 42 analoger) Satz der sph. Dreiecke.

§. 67. Aus den erwähnten Formeln der §§. 64 und 65 erhält man durch Multiplication und Division:

$$\frac{\sin \frac{1}{2} A^2 \cos \frac{1}{2} B^2}{\cos \frac{1}{2} C^2} = \frac{\sin (s-b)^2}{\sin c^2} \quad \text{oder}$$

$$a) \frac{\sin \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B}{\cos \frac{1}{2} C} = \frac{\sin (s-b)}{\sin c};$$

und auf die nämliche Art:

$$\beta) \frac{\sin \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} A}{\cos \frac{1}{2} C} = \frac{\sin (s-a)}{\sin c}, \quad \gamma) \frac{\cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B}{\sin \frac{1}{2} C} = \frac{\sin s}{\sin c},$$

$$\delta) \frac{\sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B}{\sin \frac{1}{2} C} = \frac{\sin (s-c)}{\sin c}.$$

Die Gleichung β) zu jener a) addirt und davon subtrahirt gibt mit Rücksicht auf die Relat. in §. 20:

$$\frac{\sin \frac{1}{2} (A \pm B)}{\cos \frac{1}{2} C} = \frac{\sin (s-b) \pm \sin (s-a)}{\sin c},$$

oder, wenn man Summe und Unterschied des 2. Theils der Gleich., nach §. 26, in Producte verwandelt, für $\sin c$, $2 \sin \frac{1}{2} c \cos \frac{1}{2} c$ setzt und abkürzt:

$$1) \frac{\sin \frac{1}{2} (A+B)}{\cos \frac{1}{2} C} = \frac{\cos \frac{1}{2} (a-b)}{\cos \frac{1}{2} c} \quad \text{und}$$

$$2) \frac{\sin \frac{1}{2} (A-B)}{\cos \frac{1}{2} C} = \frac{\sin \frac{1}{2} (a-b)}{\sin \frac{1}{2} c}.$$

Genau eben so gibt die Verbindung von γ) \pm δ) mit Rücksicht auf die Relat. in §§. 21 und 26:

$$3) \frac{\cos \frac{1}{2} (A-B)}{\sin \frac{1}{2} C} = \frac{\sin \frac{1}{2} (a+b)}{\sin \frac{1}{2} c} \quad \text{und}$$

$$4) \frac{\cos \frac{1}{2} (A+B)}{\sin \frac{1}{2} C} = \frac{\cos \frac{1}{2} (a+b)}{\cos \frac{1}{2} c},$$

welche 4 Formeln gewöhnlich die Gauß'schen heißen.

§. 68. Dividirt man von diesen 4 Formeln 1) durch 4) und 2) durch 3), so erhält man, den Factor $\tan \frac{1}{2} C = 1 : \cot \frac{1}{2} C$ gleich in den 2. Theil der Gleich. gebracht:

$$I. \tan \frac{1}{2} (A+B) = \frac{\cos \frac{1}{2} (a-b)}{\cos \frac{1}{2} (a+b)} \cot \frac{1}{2} C,$$

$$\text{II. } \operatorname{tang} \frac{1}{2}(A - B) = \frac{\sin \frac{1}{2}(a - b)}{\sin \frac{1}{2}(a + b)} \operatorname{cot} \frac{1}{2}C,$$

und wenn man auf diese beiden Relationen die Eigenschaft des Polardreieckes anwendet, wodurch (§. 63) $\frac{1}{2}(A + B) = 180 - \frac{1}{2}(a' + b')$, $\frac{1}{2}(A - B) = -\frac{1}{2}(a' - b')$, $\frac{1}{2}C = 90 - \frac{1}{2}c'$ und $\frac{1}{2}(a + b) = 180 - \frac{1}{2}(A' + B')$, $\frac{1}{2}(a - b) = -\frac{1}{2}(A' - B')$, $\frac{1}{2}c = 90 - \frac{1}{2}C'$ wird, nach Hinweglassung der Accente und der (mit Rücksicht auf §§. 11 und 13) ganz einfachen Reductionen:

$$\text{III. } \operatorname{tang} \frac{1}{2}(a + b) = \frac{\cos \frac{1}{2}(A - B)}{\cos \frac{1}{2}(A + B)} \operatorname{tang} \frac{1}{2}c,$$

$$\text{IV. } \operatorname{tang} \frac{1}{2}(a - b) = \frac{\sin \frac{1}{2}(A - B)}{\sin \frac{1}{2}(A + B)} \operatorname{tang} \frac{1}{2}c,$$

vier Formeln, welche unter dem Namen der Neper'schen Analogien bekannt sind.

Sechstes Capitel.

Auflösung der sphärischen Dreiecke.

a) Der rechtwinkligen und Quadranten-Dreiecke.

§. 69. Da die Summe der 3 Winkel eines sph. Dreieckes überhaupt zwischen 2 und 6 rechten Winkeln eingeschlossen ist, so kann ein rechth. sph. Dreieck 1, 2 oder 3 rechte W. besitzen. Weil aber bei der 2. Gattung 2 Seiten Quadranten sind, und die 3. Seite das Maß des schiefen W., also eines durch das andere gegeben ist, bei der letztern Gattung hingegen jede Seite ein Quadrant, also auch hier alles bekannt ist; so haben wir es hier blofs mit der erstern Art von rechth. Dreiecken zu thun.

§. 70. Man bezeichne nun wieder den rechten W. durch C , die beiden schiefen W. durch A und B , also die Hypotenuse durch c und die Catheten durch a und b ; so können, da jede auflösende Gleichung 3 Stücke: die beiden

gegebenen und das gesuchte enthalten muß, diese der Reihe nach seyn:

$$BcA, cAb, Aba, baB, aBc, \\ acb, BAa, cbB, Aac, bBA,$$

so, daß also bei der Auflösung der rechth. sphär. Dreiecke im Ganzen 10 Fälle, wovon jedoch, da der 4., 5., 9. und 10. Fall mit dem 3., 2., 8. und 7. identisch ist, und durch bloße gehörige Vertauschung der Buchstaben entsteht, nur 6 wesentlich von einander verschieden sind, vorkommen. Man erhält diese 10 auflösende Gleichungen, ohne Rücksicht auf ihre Ordnung, ganz leicht auf folgende Weise.

§. 71. Aus den Relationen in den §§. 62, 63, 66 hat man der Reihe nach, wegen $C = 90^\circ$, also $\sin C = 1$ und $\cos C = 0$: 1) $\cos c = \cos a \cos b$, 2) $\cos c = \cot A \cot B$ und $\sin a : \sin b : \sin c = \sin A : \sin B : 1$ oder

$$3) \sin a = \sin A \sin c, \sin b = \sin B \sin c.$$

Setzt man diesen Werth von $\cos c$ aus 1) in (§. 62)

$$a) \cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c},$$

so erhält man:

$$\cos A = \frac{\cos a (1 - \cos b^2)}{\sin b \sin c} = \frac{\cos a \sin b}{\sin c},$$

oder [3)] wegen $\sin c = \frac{\sin a}{\sin A}$, auch

$$4) \cot A = \cot a \sin b, \text{ und analog } \cot B = \cot b \sin a.$$

Der aus 1) folgende Werth $\cos a = \cos c : \cos b$, in a) substituirt, gibt

$$\cos A = \frac{\cos c (1 - \cos b^2)}{\sin b \cos b \sin c} = \frac{\cos c \sin b}{\cos b \sin c} \text{ oder}$$

$$5) \cos A = \tan b \cot c \text{ und } \cos B = \tan a \cot c.$$

Diese erstere Gleich. 5) mit jener [3)] $\sin b = \sin B \sin c$ multiplicirt, gibt

$$\cos A = \frac{\sin B \cos c}{\cos b} = \frac{\sin B \cos a \cos b}{\cos b} \quad [1)] \text{ oder}$$

$$6) \cos A = \cos a \sin B \text{ und } \cos B = \cos b \sin A.$$

§. 72. Diese 10 auflösenden Gleichungen lassen sich auch aus 2 sehr einfachen und leicht zu behaltenden Sätzen, den sogenannten Neper'schen Regeln ableiten. Berücksichtigt man nämlich, daß oben (§. 70) in den beiden horizontalen Gruppen von den 5 Stücken des Dreieckes: c, A, b, a, B (da der rechte $W. C$ nicht vorkommt) jedes der Reihe nach Mittelstück ist, und die beiden übrigen in der erstern Reihe die diesem Stücke anliegenden, in der 2. Reihe aber die gegenüberliegenden Stücke sind, und schreibt man noch überall in diesen beiden Gruppen statt der Catheten a und b ihre Complementary $90 - a$ und $90 - b$; so bestehen diese beide Regeln in Folgendem:

1. der Cosinus des Mittelstückes ist gleich dem Producte der Cotangenten der anliegenden Stücke;
2. der Cosinus des Mittelstückes ist gleich dem Producte der Sinus der gegenüberliegenden Stücke.

Anmerk. Die Richtigkeit dieser beiden, die sämtliche Auflösung der rechth. sph. Dreiecke enthaltenden Regeln folgt daraus, weil durch ihre Anwendung auf die beiden obigen, alle hier möglichen Combinationen darstellenden Reihen (§. 70) die vorigen 10 Gleichungen erhalten werden. So erhält man aus der 1. Reihe nach der 1. Regel:

$$\begin{aligned} \cos c &= \cot A \cot B \text{ [Gl. 2]}, \\ \cos A &= \cot c \cot(90 - b) = \cot c \operatorname{tang} b \text{ [5]} \text{ u. s. w.;} \end{aligned}$$

aus der 2. Reihe nach der 2. Regel:

$$\begin{aligned} \cos c &= \sin(90 - a) \sin(90 - b) = \cos a \cos b \text{ [Gl. 1]}, \\ \cos A &= \sin B \cos a \text{ [6]}, \quad \sin b = \sin c \sin B \text{ [3]} \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

Sind also z. B. die Cathete b und der anliegende $W. A$ gegeben, und soll die andere Cathete a bestimmt werden; so wird man von diesen 3 Stücken jenes zum Mittelstück wählen, wodurch die beiden übrigen entweder anliegende oder gegenüberstehende Stücke werden, und dann im 1. Falle die 1., im letztern die 2. Regel anwenden. Man sieht hier sogleich, daß b als Mittelst. genommen, die beiden übrigen A und a anliegende Stücke werden; man hat daher nach der 1. dieser Neper'schen Regeln:

$$\cos(90 - b) = \cot A \cot(90 - a), \text{ d. i.}$$

$$\sin b = \cot A \operatorname{tang} a \text{ [Gl. 4]},$$

und daraus: $\operatorname{tang} a = \operatorname{tang} A \sin b$, und so in allen übrigen Fällen.

§. 73. Bei der Auflösung der sph. rechth. Dreiecke kommt ebenfalls ein unbestimmter Fall vor, und es ist jener, in welchem eine Cathete und der gegenüberstehende W., z. B. a und A gegeben sind; in diesem Falle hat man nämlich zur Bestimmung der Hypotenuse [Gl. 3]: $\sin c = \frac{\sin a}{\sin A}$, und da c aus dem Sinus gefunden wird, so gibt es (vergl. §. 53) für c zwei Werthe, also auch in diesem Falle 2 Dreiecke *). Um indeß noch näher zu untersuchen, ob nicht in besondern Fällen c , also das Dreieck dennoch bestimmt seyn kann, dienen folgende Betrachtungen.

§. 74. Aus der Relation 4), §. 67, in welcher die Nenner $\sin \frac{1}{2}C$ und (da für jedes aufzulös. Dreieck $c < 180^\circ$ ist) $\cos \frac{1}{2}c$ immer positiv sind, folgt (was auch aus I., §. 68 hervorgeht), daß $\cos \frac{1}{2}(A+B)$ und $\cos \frac{1}{2}(a+b)$ immer einerlei Zeichen besitzen, also $A+B$ und $a+b$ von einerlei Art, d. i. für $A+B \gtrless 180$ auch $a+b \gtrless 180$ und umgekehrt sey; eine Eigenschaft, welche für jedes sph. Dreieck überhaupt, also auch für das rechth. gilt.

§. 75. Für das rechth. Dreieck folgt insbesondere aus 4), §. 71: $\sin b = \operatorname{tang} a : \operatorname{tang} A$, und da $\sin b$ immer positiv ist, so haben auch $\operatorname{tang} a$ und $\operatorname{tang} A$ immer dasselbe Zeichen, oder es sind die Cathete und der gegenüberstehende Winkel immer von einerlei Art, d. h. es ist für $a \gtrless 90$ zugleich auch $A \gtrless 90$.

*) Man kann, wenn man will, auch die beiden übrigen Stücke b und B durch c ausdrücken, indem man [Gl. 1) und 5)]

$$\cos b = \frac{\cos c}{\cos a} \text{ und } \cos B = \cot c \operatorname{tang} a \text{ hat.}$$

§. 76. Ist nun, um auf unsern unbestimmten Fall (§. 73) zurück zu kommen, 1. $A = 90^\circ$, also $A + C = 180$, mithin (§. 74) auch $a + c = 180$; so ist, wegen (§. 75) $a = 90$, sofort $c = 90$, also bestimmt (vergl. §. 69). Ist 2. $A < 90$, also $A + C < 180$, folglich (§. 74) auch $a + c < 180$; so ist, wegen (§. 75) $a < 90$, sofort $c \geq 90^*$, also unbest., ausgenommen, es würde der stumpfe W. $c \geq 180 - a$ (wodurch gegen die vorige Relat. $a + c \geq 180$ ausfiele), dann müßte der spitze W., d. i. $c < 90$ genommen werden, wodurch das Dreieck bestimmt wäre. Ist endlich 3. $A > 90$, also $A + C > 180$, folglich (§. 74) auch $a + c > 180$; so ist, wegen (§. 75) $a > 90$, sofort $c \geq 90$, also unbest., ausgenommen, es fiele der spitze W. $c \geq 180 - a$ aus (wodurch $a + c \geq 180$ würde), dann könnte nur der Werth $c > 90$ gelten, wodurch also auch das Dreieck bestimmt wäre.

Anmerk. Ausser diesem angeführten Falle sind, wie man leicht sieht, alle übrigen vollkommen bestimmt, indem die gesuchten Stücke durch die Tangente, Cotangente oder den Cosinus bestimmt werden. Der einzige Fall, wo noch der Sinus vorkommt, ist jener, in welchem die Hypotenuse c und ein W., z. B. A gegeben sind und die Cathete a gesucht wird; denn man hat dafür [3]: $\sin a = \sin A \sin c$, hier ist aber $a < 90$ zu nehmen, je nachdem (§. 75) der gegeb. W. $A < 90$ ist.

Zur Übung kann man von dem Dreiecke, in welchem $A = 23^\circ 27' 42''$, $B = 66^\circ 58' 0''$, $a = 4^\circ 35' 26''$, $b = 10^\circ 39' 40''$ und $c = 11^\circ 35' 49''$ ist, abwechselnd 2 Stücke als bekannt annehmen und das 3. bestimmen.

Ein 2. Dreieck ist: $a = 27^\circ 48'$, $b = 69^\circ 9' 47''$, $c = 71^\circ 39' 37''$, $A = 29^\circ 25' 44''$ und $B = 79^\circ 56' 4''$.

§. 77. Ein Dreieck, in welchem eine Seite, z. B. $c = 90^\circ$ ist, heißt ein Quadranten-Dreieck, und da in dem entsprechenden Polardreiecke (§. 63) der W.

*) Fände man $c = 90^\circ$ (was für $a = A$ geschieht), so besäße das Dreieck 2 rechte W. ($C = B = 90$) und wäre (da auch $b = 90$ wird) vollkommen bestimmt.

$C' = 180 - c = 90$, das Dreieck also ein rechtwinkeliges ist; so kann dieses nach den obigen §. §. aufgelöst werden, wodurch dann auch, wenn man wieder auf das ursprüngliche Dreieck zurückgeht, dasselbe bestimmt ist. Wäre z. B. in einem solchen Dreiecke $c = 90^\circ$, a und B gegeben; so wären es in dem bei C' rechth. Polardreiecke die Stücke $A' = 180 - a$ und $b' = 180 - B$, welches sofort aufgelöst wieder die Stücke $b = 180 - B'$, $A = 180 - a'$ und $C = 180 - c'$ des Quadrantendreieckes gibt.

Zur Übung kann das Dreieck dienen: $a = 32^\circ 57' 6''$, $b = 66^\circ 32'$, $c = 90^\circ$, $A = 23^\circ 49' 26'' \cdot 5$, $B = 42^\circ 56' 12'' \cdot 3$ und $C = 132^\circ 2' 44'' \cdot 6$.

b) Der schiefwinkligen sphärischen Dreiecke.

§. 78. Bei der Auflösung der schiefw. sph. Dreiecke können die 3 bestimmenden Stücke seyn: I. die 3 Seiten; II. die 3 Winkel (weil nämlich ihre Summe nicht wie im geradl. Δ unveränderlich ist); III. 2 Seiten sammt dem eingeschlossenen W.; IV. 2 Winkel und die zwischen liegende Seite; V. 2 Seiten und ein gegenüber liegender W.; endlich VI. 2 Winkel und eine gegenüber liegende Seite.

§. 79. I. Gegeben die 3 Seiten a, b, c . In diesem Falle findet man den Winkel A nach einer der Formeln (§. 64)

$$\sin \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin(s-b) \sin(s-c)}{\sin b \sin c}} \quad (\text{wobei für } \frac{1}{2} A$$

$$\text{immer der spitze W. gilt) oder } \cos \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-a)}{\sin b \sin c}},$$

oder nach der aus beiden durch Division entstehenden von $\tan \frac{1}{2} A$, welche Formeln zugleich die Anwendung der Logarithmen gestatten. Zur Berechnung der beiden übrigen W. B und C dienen die analogen, durch bloße Vertauschung der Buchstaben aus den eben genannten abgeleiteten Formeln.

Zur Übung dieses und der folgenden Fälle kann das Dreieck dienen, in welchem $a = 50^\circ 54' 32''$, $b = 37^\circ 47' 18''$, $c = 74^\circ 51' 50''$, $A = 44^\circ 10' 40'' \cdot 78$, $B = 33^\circ 22' 44'' \cdot 86$ und $C = 119^\circ 55' 6''$ ist.

§. 80. II. Gegeben die 3 Winkel A, B, C . Zur Bestimmung der Seite a wird man am einfachsten auf die vorigen Formeln die Eigenschaft des Polardreieckes anwenden, indem sich dadurch die Seiten in Winkel und die Winkel in Seiten verwandeln. Man erhält nämlich, wenn $A' + B' + C' = S'$, also $A + B + C = S$ gesetzt wird, wegen $s = 270^\circ - \frac{1}{2}S'$, $s - a = 90^\circ - (S' - A')$, $s - b = 90^\circ - (S' - B')$, $s - c = 90^\circ - (S' - C')$, $b = 180^\circ - B'$ und $c = 180^\circ - C'$, mit Hinweglassung der Accente:

$$\sin \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{-\cos S \cos (S - A)}{\sin B \sin C}} \quad \text{und}$$

$$\cos \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\cos (S - B) \cos (S - C)}{\sin B \sin C}},$$

woraus auch ganz einfach (§§. 16, 23) die Formeln für $\tan \frac{1}{2}a$ und $\sin a$ folgen. Durch gehörige Verwechslung der Buchstaben erhält man auch die analogen Formeln zur Berechnung von b und c .

Anmerk. Da in jedem sph. Dreieck $A + B + C > 2R$ und $< 6R$, also $\frac{1}{2}(A + B + C)$, d. i. $S > R$ und $< 3R$ ist; so ist (§. 8) $\cos S$ immer negativ. Da ferner $S - A = \frac{1}{2}(B + C - A)$, und im entspr. Polardreieck $b' + c' > a'$ oder (§. 63) $180^\circ - B + 180^\circ - C > 180^\circ - A$, d. i. $\frac{1}{2}(B + C - A) < 90^\circ$ ist; so ist $\cos (S - A)$ immer positiv (was auch für $\cos (S - B)$ und $\cos (S - C)$ gilt), also die obige Wurzelgröße in $\sin \frac{1}{2}a$ für jedes mögliche Dreieck reell.

§. 81. III. Gegeben 2 Seiten sammt dem eingeschlossenen Winkel, z. B. a, b, C . Um zuerst die beiden W. A und B zu bestimmen, wendet man die beiden Neper'schen Analogieen I. und II., §. 68, welche sich auch logarithmisch behandeln lassen, an, und berechnet nach der erstern $\frac{1}{2}(A + B) = s$, und nach der 2. $\frac{1}{2}(A - B) = d$; so hat man $A = s + d$ und $B = s - d$ (wäre $A < B$, so dürften nur A und B mit einander verwechselt werden). Sind die Winkel bestimmt, so findet man die 3. Seite c nach einer der Relationen (§. 66)

$$\sin c = \sin a \sin C : \sin A = \sin b \sin C : \sin B.$$

§. 82. Um jedoch diese Seite c unmittelbar aus den gegebenen Stücken zu bestimmen, hat man aus §. 62:

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C,$$

oder, um diese Formel zur Anwendung der Logarithmen geeignet zu machen, wenn man im 2. Theil der Gleich. $\sin a \sin b$ addirt und abzieht und gleich reducirt:

$$\begin{aligned} \cos c &= \cos(a+b) + \sin a \sin b (1 + \cos C) \\ &= \cos(a+b) + 2 \sin a \sin b \cos \frac{1}{2} C^2 \quad (\S. 23), \end{aligned}$$

und wenn man auch für $\cos c$ den Werth $1 - 2 \sin \frac{1}{2} c^2$ setzt und $2 \sin \frac{1}{2} c^2$ bestimmt:

$$\begin{aligned} 2 \sin \frac{1}{2} c^2 &= 1 - \cos(a+b) - 2 \sin a \sin b \cos \frac{1}{2} C^2 \\ &= 2 \sin \frac{1}{2} (a+b)^2 - 2 \sin a \sin b \cos \frac{1}{2} C^2, \end{aligned}$$

oder wenn man $\frac{\sin a \sin b \cos \frac{1}{2} C^2}{\sin \frac{1}{2} (a+b)^2} = \cos \varphi^2$ setzt:

$$\begin{aligned} \sin \frac{1}{2} c^2 &= \sin \frac{1}{2} (a+b)^2 (1 - \cos \varphi^2), \text{ d. i.} \\ \sin \frac{1}{2} c &= \sin \frac{1}{2} (a+b) \sin \varphi. \end{aligned}$$

Man wird also aus dieser Gleichung, auf die sich nun die Logarithmen anwenden lassen, die Seite c berechnen können, sobald man aus jener $\cos \varphi = \frac{\cos \frac{1}{2} C}{\sin \frac{1}{2} (a+b)} \sqrt{\sin a \sin b}$, die sich ebenfalls logarithmisch behandeln läßt, den Hilfswinkel φ bestimmt hat *).

Für das obige Dreieck (§. 79) findet man, wenn c auf die hier vorgetragene Weise gesucht wird, den Hilfswinkel

$$\varphi = 60^\circ 24' 13'' \cdot 5.$$

§. 83. IV. Gegeben 2 Winkel sammt der anliegenden Seite, z. B. A, B, c . In diesem Falle erhält man die sämtlichen nöthigen Formeln aus jenen des vorigen Falles, indem man auf diese das Polardreieck an-

*) Setzt man dagegen $\sin \varphi = \cos \frac{1}{2} C \sqrt{\sin a \sin b}$, so folgt:

$$\begin{aligned} (\S. 28) \quad \sin \frac{1}{2} c^2 &= \sin \frac{1}{2} (a+b)^2 - \sin \varphi^2 \\ &= \sin [\frac{1}{2} (a+b) + \varphi] \sin [\frac{1}{2} (a+b) - \varphi]. \end{aligned}$$

Nach dieser Art findet man für das obige Dreieck

$$\varphi = 20^\circ 11' 46'' \cdot 5.$$

wendet. So wird man zuerst wieder aus den beiden Analogien III. und IV., §. 68 (welche ebenfalls auch auf die erwähnte Art aus I. und II. entstehen), die Seiten a und b , und dann nach einer der Relationen $\sin C = \frac{\sin c \sin A}{\sin a} = \frac{\sin c \sin B}{\sin b}$ den 3. Winkel C , oder wenn man diesen durch die gegebenen Stücke unmittelbar (jedoch mittelst eines Hilfsw.) ausdrücken will, aus der Formel $\cos \frac{1}{2} C = \sin \frac{1}{2} (A + B) \sin \varphi$ bestimmen, nachdem man früher den Hilfsw. φ nach der Gleich. $\cos \varphi = \frac{\sin \frac{1}{2} c}{\sin \frac{1}{2} (A + B)} \sqrt{\sin A \sin B}$ mit Hilfe der Logarithmen berechnet hat *).

Das obige Dreieck als Beispiel gewählt, findet man hier

$$\varphi = 53^\circ 3' 51'' \cdot 2.$$

§. 84. V. Gegeben 2 Seiten und ein gegenüber liegender Winkel, z. B. a, b, A . Hier bestimmt man zuerst den W. B aus der Gleich.

$$\sin B = \frac{\sin b \sin A}{\sin a} \quad (\S. 66),$$

und dann nach der Relation (I., §. 68)

$$\cot \frac{1}{2} C = \tan \frac{1}{2} (A + B) \frac{\cos \frac{1}{2} (a + b)}{\cos \frac{1}{2} (a - b)}$$

den W. C , so wie endlich mittelst dieses W. aus der Formel

$$\sin c = \frac{\sin a \sin C}{\sin A}, \text{ oder ohne diesen aus jener } (\S. 68, \text{ III.})$$

$$\tan \frac{1}{2} c = \tan \frac{1}{2} (a + b) \frac{\cos \frac{1}{2} (A + B)}{\cos \frac{1}{2} (A - B)} \text{ die Seite } c.$$

§. 85. Um aber auch C und c unmittelbar aus den gegebenen Stücken zu bestimmen, hat man (um eine Relat.

*) Oder man bestimmt den Hilfsw. aus

$$\sin \varphi = \sin \frac{1}{2} c \sqrt{\sin A \sin B},$$

und dann C aus der Gleichung:

$$\cos \frac{1}{2} C^2 = \sin \left[\frac{1}{2} (A + B) + \varphi \right] \sin \left[\frac{1}{2} (A + B) - \varphi \right]$$

(welche Relationen ebenfalls aus den beiden vorigen der Note mit Hilfe des Polardr. folgen). Für das obige Dreieck erhält man $\varphi = 22^\circ 6' 30'' \cdot 93$.

zwischen a, b, A, C zu erhalten) (§. 62)

$$\cos A = (\cos a - \cos b \cos c) : \sin b \sin c,$$

oder wegen $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$ (aus §. 62) auch:

$$\cos a - \cos b \cos c = \cos a (1 - \cos b^2) - \sin a \sin b \cos b \cos C,$$

also wenn man (da $1 - \cos b^2 = \sin b^2$ ist) durch $\sin b$ abkürzt:

$$\cos A = (\cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C) : \sin c,$$

oder endlich, wegen $\sin c = \sin a \sin C : \sin A$, auch:

$$\cot A \sin C + \cos b \cos C = \cot a \sin b;$$

um diese Formel für die Anwendung der Logarithmen geeignet zu machen, setze man $\alpha)$ $\tan \varphi = \tan A \cos b$, so wird, wie leicht zu sehen: $\beta)$ $\sin(C + \varphi) = \tan b \cot a \sin \varphi$.

Ferner ist (zur Berechnung von c) aus der 1. der obigen Gleichungen: $\cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A = \cos a$, oder für $\alpha')$ $\tan \omega = \tan b \cos A$ auch:

$$\beta') \cos(c - \omega) = \frac{\cos a \cos \omega}{\cos b}.$$

Nachdem man also die Hilfswinkel φ und ω aus den Relationen $\alpha)$, $\alpha')$ bestimmt hat, findet man C und c nach den Gleichungen $\beta)$ und $\beta')$.

Für unser Dreieck wird

$$\varphi = 37^\circ 31' 17'' \cdot 23 \quad \text{und} \quad \omega = 29^\circ 4' 37'' \cdot 12.$$

§. 86. Da der W. B , von welchem auch die übrigen Stücke C und c abhängen, hier aus dem Sinus gefunden wird; so ist dieser Fall (wie jene in §§. 53, 73) ein unbestimmter, und es gibt hier wieder im Allgemeinen 2 Dreiecke, welche der Bedingung der Aufg. entsprechen. Um die Fälle aufzufinden, in denen das Dreieck dennoch bestimmt ist, dienen wieder folgende Betrachtungen.

§. 87. Ist $\alpha)$ $a + b = 180^\circ$, also auch (§. 74) $A + B = 180^\circ$; so ist 1. für $A = 90$ sofort $B = 90$, 2. für $A < 90$: $B > 90$, und 3. für $A > 90^\circ$: $B < 90$, also B immer bestimmt.

Ist $\beta)$ $a + b < 180^\circ$, also auch $A + B < 180$; so ist

1. für $A=90$ sofort $B<90$, und 2. für $A>90$ ebenfalls $B<90$, also B in beiden Fällen bestimmt. Dagegen ist 3. für $A<90$ sofort $B\geq 90$, also unbestimmt*), den Fall ausgenommen, in welchem 4. der stumpfe W. $B\overline{=}180-A$ ausfiele (wodurch gegen die Voraussetzung $A+B\overline{=}180$ würde), wo dann nur der spitze W. $B<90$ gelten kann, folglich B bestimmt ist, ein Fall, welcher immer für $b\overline{=}a$ eintritt, weil dann auch $B\overline{=}A$ seyn muß.

Ist endlich $\gamma) a+b>180$, also (§. 74) auch $A+B>180$; so ist 1. für $A=$ und <90 sofort $B>90$, also bestimmt, dagegen 2. für $A>90$ offenbar $B\geq 90$, also unbestimmt, den Fall ausgenommen, in welchem 3. der spitze W. $B\overline{=}180-A$ ausfiele (wodurch gegen die Annahme $A+B\overline{=}180$ würde), wo dann nur der Werth $B>90$ gelten kann, also B bestimmt ist, ein Fall, welcher immer eintritt für $b\overline{=}a$, weil dann auch $B\overline{=}A$ seyn muß.

Nimmt man in dem obigen Dreiecke (§. 79) die Stücke a, b, A als gegeben an, so findet man nur dieses genannte eine Dreieck, aber auch nach $\beta)$, 4. folgt, wegen $a+b<180, A<90$ und $b<a$, daß dieser Fall ein bestimmter ist.

Dagegen erhält man für $a=36^{\circ}24'12''$, $b=52^{\circ}7'15''$ und $A=40^{\circ}45'4''$ zwei Dreiecke, und zwar für das eine $c=64^{\circ}20'19''$, $B=60^{\circ}14'55''.4$, $C=97^{\circ}29'54''.7$, und für das andere: $c=24^{\circ}8'35''.8$, $B=119^{\circ}45'4''.6$, $C=26^{\circ}44'13''.4$.

§. 88. VI. Gegeben 2 Winkel und eine gegenüber liegende Seite, z. B. A, B, a . Die hier nöthigen auflösenden Gleichungen werden wieder am einfachsten aus jenen des vorigen Falles erhalten, wenn man auf diese das Polardreieck anwendet. Man erhält nämlich der Reihe nach: $\sin b = \frac{\sin B \sin a}{\sin A}$ zur Bestimmung von b .
 $\operatorname{tang} \frac{1}{2} c = \operatorname{tang} \frac{1}{2} (a+b) \frac{\cos \frac{1}{2} (A+B)}{\cos \frac{1}{2} (A-B)}$, um damit, oder, wenn man den Hilfsw. φ aus $\operatorname{tang} \varphi = \operatorname{tang} a \cos B$ berechnet hat, aus $\sin (c-\varphi) = \operatorname{tang} B \cot A \sin \varphi$ unmittelbar c zu finden.

*) Würde zufällig $B=90$, so wäre das Dreieck rechth. und bestimmt.

Endlich findet man mit Hilfe von c aus $\sin C = \frac{\sin c \sin A}{\sin a}$

oder auch aus $\cot \frac{1}{2} C = \tan \frac{1}{2} (A + B) \frac{\cos \frac{1}{2} (a + b)}{\cos \frac{1}{2} (a - b)}$, oder nachdem der Hilfsw. ω nach der Gleich. $\tan \omega = \tan B \cos a$ berechnet worden, unmittelbar aus der Relat.

$$\cos [180 - (C + \omega)] = \frac{\cos A \cos \omega}{\cos B} \text{ den W. } C.$$

Für unser Beispiel wird hier

$$\varphi = 45^\circ 47' 12'' \cdot 87 \text{ und } \omega = 22^\circ 33' 36'' \cdot 71.$$

§. 89. Auch dieser Fall ist im Allgemeinen unbestimmt, so, daß der Aufgabe zwei Dreiecke entsprechen. Wiederholt man die im §. 87 durchgeführte Untersuchung, oder kürzer, wendet man auf alle Relationen dieses §. wieder das Polardreieck an; so findet man Folgendes: Das Dreieck ist bestimmt 1. für $A + B = 180^\circ$; dabei ist für $a >, =, < 90^\circ$ beziehungsweise $b <, =, > 90^\circ$. 2. für $A + B < 180^\circ$ und $a =$ oder $> 90^\circ$; dabei ist $b < 90$. 3. für $A + B > 180$ und $a =$ oder $< 90^\circ$; dabei ist $b > 90$. Dagegen ist das Dreieck unbestimmt: 1. für $A + B < 180^\circ$ und $a < 90^\circ$; dabei kann $b >$ oder < 90 seyn, ausgenommen der stumpfe W. b fiele dadurch $=$ oder $> 180 - a$ aus, ein Fall, der immer eintritt, wenn bei der vorigen Annahme $B =$ oder $< A$ ist, in welchem Falle dann nur der spitze W. für b genommen werden darf, wodurch also b ebenfalls bestimmt ist. 2. für $A + B > 180$ und $a > 90$; dabei kann $b >$ oder < 90 seyn, den Fall ausgenommen, in welchem dadurch der spitze W. $b =$ oder $< 180 - a$ ausfiel (was für $B > A$ geschieht), wo dann nur $b > 90$ seyn kann, also der Fall ein bestimmter ist.

Nimmt man wieder aus dem obigen Dreieck (§. 79) die 3 Stücke A, B, a als gegeben an, so findet man, daß dieser Fall ein bestimmter ist (wegen $A + B < 180$, $a < 90$ und $B < A$), mithin nur dieses eine Dreieck.

Dagegen findet man für $A = 40^\circ 45' 4''$, $B = 60^\circ 14' 55'' \cdot 4$ und $a = 36^\circ 24' 12''$ (wegen $A + B < 180^\circ$, $a < 90$ und $B > A$) zwei Dreiecke, und zwar für das eine:

$$b = 52^\circ 7' 15'', \quad c = 64^\circ 20' 19'', \quad C = 97^\circ 29' 54'' \cdot 7,$$

und für das andere:

$$b = 127^{\circ} 52' 45'', \quad c = 155^{\circ} 51' 24'' \quad \text{und} \quad C = 153^{\circ} 15' 46'' \cdot 6.$$

§. 90. Zur Bestimmung der Fläche F eines sphär. Dreieckes hat man zuerst, wenn die Winkel A, B, C desselben gegeben sind, der rechte W. zur Einheit des Winkel-, und das Dreieck mit 3 rechten Winkeln (d. i. der 8. Theil der Kugelfläche) zur Einheit des Flächenmaßes genommen wird, bekanntlich: 1) $F = A + B + C - 2$. Man erhält also daraus, wenn die Winkel in Gradmaß gegeben sind, und der Kugelhalbm. $= r$, folglich der 8. Theil der Kugelfläche $= \frac{1}{8} r^2 \pi$ ist, nach dem Sinne dieser Relation:

$$F : \frac{1}{8} r^2 \pi = (A + B + C - 180)^{\circ} : 90 \quad \text{oder}$$

$$2) \quad F = \left(\frac{A + B + C - 180^{\circ}}{180^{\circ}} \right) r^2 \pi.$$

§. 91. Um F durch 2 Seiten a, b und den eingeschlossenen W. C auszudrücken, hat man aus der vorigen Gleich. 1), die Winkel in Gradmaß ausgedrückt:

$$\frac{1}{2}(A + B + C) = 90 + \frac{1}{2}F, \quad \text{folglich}$$

$$\text{tang} \frac{1}{2}(A + B + C) = -\cot \frac{1}{2}F$$

$$= [\text{tang} \frac{1}{2}(A + B) + \text{tang} \frac{1}{2}C] : [1 - \text{tang} \frac{1}{2}(A + B) \text{tang} \frac{1}{2}C]$$

(§. 22) oder, wenn man für $\text{tang} \frac{1}{2}(A + B)$ den Werth I., §. 68 substituirt, und die Brüche wegschafft:

$$-\cot \frac{1}{2}F = [\cos \frac{1}{2}(a - b) + \cos \frac{1}{2}(a + b) \text{tang} \frac{1}{2}C^2] : [\cos \frac{1}{2}(a + b) - \cos \frac{1}{2}(a - b)] \text{tang} \frac{1}{2}C = [\cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b (1 + \text{tang} \frac{1}{2}C^2) + \sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b (1 - \text{tang} \frac{1}{2}C^2)] : -2 \sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b \text{tang} \frac{1}{2}C,$$

oder nach einer einfachen Reduction (wobei für tang , der Quotient $\sin : \cos$ gesetzt wird):

$$\cot \frac{1}{2}F = \frac{\cot \frac{1}{2}a \cot \frac{1}{2}b + \cos C}{\sin C}.$$

§. 92. Um endlich noch F durch die 3 Seiten a, b, c auszudrücken, hat man aus dieser letzten Formel $1 + \cot \frac{1}{2}F^2$, d. i.

$$a) \quad 1 : \sin \frac{1}{2}F^2$$

$$= [\cot \frac{1}{2}a^2 \cot \frac{1}{2}b^2 + 2 \cot \frac{1}{2}a \cot \frac{1}{2}b \cos C + 1] : \sin C^2.$$

Drückt man in der Gleichung (§. 62)

$$\cos C = (\cos c - \cos a \cos b) : \sin a \sin b$$

die Sinus und Cosinus nach den Formeln

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \quad \text{und} \quad \cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$$

aus; so erhält man, beide Theile der Gleich. noch mit $2 \cot \frac{1}{2} a \cot \frac{1}{2} b$ multiplicirt:

$$r) \quad 2 \cot \frac{1}{2} a \cot \frac{1}{2} b \cos C = \frac{\sin \frac{1}{2} a^2 + \sin \frac{1}{2} b^2 - \sin \frac{1}{2} c^2}{\sin \frac{1}{2} a^2 \sin \frac{1}{2} b^2} - 2.$$

Es ist ferner

$$\begin{aligned} \cot \frac{1}{2} a^2 \cot \frac{1}{2} b^2 &= \frac{(1 - \sin \frac{1}{2} a^2)(1 - \sin \frac{1}{2} b^2)}{\sin \frac{1}{2} a^2 \sin \frac{1}{2} b^2} \\ &= \frac{1 - \sin \frac{1}{2} a^2 - \sin \frac{1}{2} b^2}{\sin \frac{1}{2} a^2 \sin \frac{1}{2} b^2} + 1, \end{aligned}$$

daher, wenn man diesen und den vorigen Werth $r)$ oben in $a)$ substituirt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \frac{1}{2} F^2} &= \frac{\cos \frac{1}{2} c^2}{\sin \frac{1}{2} a^2 \sin \frac{1}{2} b^2 \sin C^2} \quad \text{oder} \\ \sin \frac{1}{2} F &= \frac{\sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b}{\cos \frac{1}{2} c} \sin C, \end{aligned}$$

und wenn man endlich für $\sin C$ den Werth aus §. 66 setzt, und dabei $\sin a$ und $\sin b$ durch den halben W. ausdrückt:

$$\sin \frac{1}{2} F = \frac{\sqrt{\sin s \sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)}}{2 \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c} *).$$

Für das obige, hier durchgehends als Beispiel gewählte Dreieck (§. 79) ist der sphärische Excess in Graden ausgedrückt: $(A + B + C - 180)^\circ = 17^\circ 47' 54''$, folglich die Fläche für den Kugelhalmesser r (§. 90, 2): $F = 305004 r^2$. Für die beiden Dreiecke des 2. Beisp. in §. 87 findet man auf den Kugelhalmesser = 1 bezogen, für das erste: $F = 32285$, und für

*) Zwar lassen sich auch noch in den 3 übrigen Fällen Formeln ableiten, in welchen die Fläche F unmittelbar durch die 3 Bestimmungsstücke ausgedrückt ist; allein diese Formeln werden so verwickelt, besonders wenn man sie für die Anwendung der Logarithmen einrichten will, daß es jedenfalls kürzer ist, entweder die Winkel oder die Seiten des Dreiecks zu bestimmen, und dann F respective nach der obigen Formel 2) (§. 90) oder nach der eben entwickelten zu berechnen.

das zweite: $F = \cdot 12635$. Endlich hat man noch für jene beiden in §. 89 (2. Beisp.) angegebene Dreiecke, für das erste: $F = \cdot 32285$, und für das zweite: $F = 1\cdot 29613$, und zwar in Quadratschuh, Quadratklafter u. s. w., je nachdem der Kugelhalbmesser gleich 1 Schuh, 1 Klafter u. s. w. ist.

Zur fernern Übung können noch die Dreiecke dienen, in welchen

$$a = 65^{\circ} 15' 26'', \quad b = 78^{\circ} 44' 37'', \quad c = 45^{\circ} 54' 56'',$$

$$A = 66^{\circ} 20' 17''\cdot 4, \quad B = 98^{\circ} 27' 40'', \quad C = 46^{\circ} 25' 18'',$$

$$F = \cdot 54491 \text{ und}$$

$$a = 40^{\circ} 18' 27'', \quad b = 72^{\circ} 24' 12'', \quad c = 51^{\circ} 0' 42'',$$

$$A = 39^{\circ} 25' 2''\cdot 5, \quad B = 110^{\circ} 40' 7''\cdot 6, \quad C = 49^{\circ} 43' 28''\cdot 5,$$

$$F = \cdot 34576 \text{ ist.}$$