Compendium der höhern Mathematik

Burg, Adam von

Wien, 1836

Zweiter Abschnitt.

Zweiter Abschnitt.

Die Lehre von den Functionen.

Erstes Capitel.

Von den Functionen im Allgemeinen.

Erklärungen.

§. **93.** Behält eine Gröſse während der Rechnung oder Entwicklung denselben Werth unverändert bei, so heiſst sie beständig oder constant; im entgegengesetzten Falle wird diese Gröſse veränderlich oder variabl genannt. Man bezeichnet die erstern gewöhnlich durch die ersten, die letztern durch die letzten Buchstaben des Alphabetes.

§. **94.** Jede Gröſse, deren Werth von dem Werthe einer andern Gröſse auf irgend eine Weise abhängt, wird eine Function dieser letztern genannt. Obschon aber nach dieser Erklär. der Werth eines jeden analytischen Ausdruckes von allen darin vorkommenden Gröſsen abhängt, so berücksichtiget man in der Regel doch nur die veränderlichen Gröſsen, und betrachtet einen solchen Ausdruck als Function dieser letztern. — Um die Abhängigkeit von diesen Variablen kurz anzuzeigen, setzt man ihnen einen der Buchstaben: f, F, φ, ψ u. s. w. vor und bezeichnet z. B. die Ausdrücke $a + bx$, $\sqrt{ay - \sin y}$, $a + bxy - 2 \log y$ beziehungsweise durch $f(x)$ oder $F(x)$ u. s. w. $f(y)$ oder $F(y)$ etc. und $f(x,y)$ oder $F(x,y)$ u. s. w. Übrigens wendet man in ein und derselben Entwicklung den nämlichen Buchstaben nur für solche Ausdrücke an, welche sich in nichts als den, die variable Gröſse bezeichnenden Buchstaben unterscheiden. Bezeichnet man z. B. die Relation $a + b^x - ab \sin x$ durch $\varphi(x)$, so versteht man in der nämlichen Entwicklung unter $\varphi(y)$ den Ausdruck:

$a + b^r - ab \sin y$ *). Functionen, wie diese beiden, heiſsen ähnliche Functionen.

Anmerk. Häufig bedient man sich auch statt der Bezeichnung von $f(x)$, $F(y)$, $f(z)$ u. s. w. bloſs der groſsen gleichnamigen Buchstaben X, Y, Z etc.

§. 95. Bei Gleichungen, wie z. B. $y = \sqrt{2ax - x^2}$, $z = 2x - 3a + \log v$ u. s. f. schreibt man ebenfalls: $y = f(x)$, $z = F(x, v)$ etc., um auszudrücken, daſs y eine Funct. von x, z eine Funct. von x und v u. s. w. sey. Die Gröſsen y und z (die Functionen), welche ebenfalls, obschon nicht unabhängig, variabl sind, werden abhängig oder relativ veränderliche Gröſsen genannt, während jene x, dann x und v unabhängig oder absolut variabl heiſsen **).

§. 96. Die im vorigen §. angeführten Functionen sind zugleich Beispiele von gesonderten oder entwickelten (expliciten) Functionen, weil y und z allein oder gesondert auf der einen Seite der Gleich. stehen. Ist hingegen bloſs die Relation der Function mit den veränderlichen Gröſsen, von welcher sie abhängt, gegeben, ohne noch durch diese letztern gehörig gesondert oder bestimmt zu seyn; so wird sie eine unentwickelte (implicite) Function genannt; so ist z. B. in dem Ausdrucke

$$y^2 - axy + bx^4 = 0,$$

y eine unentwickelte Funct. von x, so wie auch umgekehrt x eine eben solche Funct. von y. In $y = \log x$ ist y eine entwickelte Funct. von x, dagegen x eine unentw. F. von y.

§. 97. Eine Funct. heiſst algebraisch, wenn sich bei den Verbindungen der constanten mit den verän-

---

*) Bedeutung von $Ff(x)$, $ff(x)$ u. s. w. ?

**) Bei der nähern Erörterung oder Discussion der Gleichung des Kreises $y = \sqrt{2ax - x^2}$ z. B. ist der Halbmesser a eine beständige, die Abscisse x die unabhängig variable, und y, welche von a und x, oder wenn die Untersuchung in einem und demselben Kreise geführt wird, also a nicht weiter in Betracht kommt, von x abhängt, die abhängig veränderliche Gröſse oder die Function von x.

derlichen Grösen auf diese letztern blos algebraische Operationen (Addition, Subtract., Multiplicat., Division und Potenzirung mit ganzen oder gebrochenen, jedoch constanten Exponenten) beziehen; im entgegengesetzten Falle wird die Funct. eine transcendente genannt, unter welchen die logarithmischen und Kreisfunctionen die wichtigsten sind. So sind $a + bx - \frac{c}{x^2}$, $a\sqrt{x} + x^3 \log a$ Beispiele von algebraischen, und $a - 2ba^x$, $1 - \log x$, $a + b \sin x$ Beispiele von transcendenten Functionen.

§. 98. Eine algebr. Funct. heist rational, wenn die variable Gröse, nach allen möglichen Reductionen, weder einen gebrochenen Exponenten besitzt, noch unter einem Wurzelzeichen vorkömmt; im Gegentheile wird sie irrational genannt. So ist von den Functionen

$$2 + 3ax - 4x^2\sqrt{a} \quad \text{und} \quad a - b\sqrt[3]{x}$$

die erstere rational, die letztere irrational.

§. 99. Eine Funct. heist ferner eine ganze F., wenn die Variable weder als Nenner, noch mit einem negativen Exponenten erscheint; im entgegengesetzten Falle nennt man sie eine gebrochene; so sind die im vorigen §. angeführten Beispiele ganze, dagegen folgende: $2a - bx^{-1}$, $3ax - \frac{4 \log a}{x}$ gebrochene Functionen.

§. 100. Die allgemeine Form einer ganzen, rationalen Funct. ist sonach: $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$ *), so wie die einer gebrochenen, rationalen:

$$\frac{A + Bx + Cx^2 + \ldots}{a + bx + cx^2 + \ldots},$$

wobei $A, B, C, \ldots, a, b, c, \ldots$ von x unabhängige Coefficienten bezeichnen. Ist bei der letztern Function die höchste Potenz von x im Nenner gröser als jene

---

*) Wie läst sich jede andere Funct. von der Form

$$A x^m + B x^{m+n} + C x^{m+2n} + \ldots$$

auf diese zurückführen?

im Zähler, so heiſst die Function echt, im Gegentheile unecht gebrochen.

§. 101. Eine Funct. zweier oder mehrerer Variablen heiſst gleichartig oder homogen, wenn die Summe der Exponenten der veränderlichen Factoren (die sogenannte Dimension) in jedem einzelnen Gliede gleich groſs ist; im entgegengesetzten Falle wird die F. ungleichartig oder heterogen genannt. So sind z. B.

$$z = ax^3 + bx^2y + cxy^2 \quad \text{und} \quad z = \frac{2x^3 - y^3 + 4x^2y}{2x - 3y}$$

homogene Functionen des 3. und 2. Grades, während jene

$$a - bx + cx^2 + dy^2 \quad \text{und} \quad \frac{1 - 2xy^2 + 3x^4}{x + 5y}$$

ungleichartige F. des 2. und 3. Grades sind.

§. 102. Aus der vorigen Definition folgt auch, daſs eine Function $f(x, y, z, \ldots)$ homogen und vom m. Grade sey, wenn die Relat. besteht:

$$f(tx, ty, tz, \ldots) = t^m f(x, y, z, \ldots),$$

wobei t eine willkürliche, etwa neue variable Gröſse bezeichnet. So ist für das vorige 1. Beispiel, wenn man tx und ty statt x und y schreibt:

$$at^3x^3 + bt^2x^2ty + ctxt^2y^2 = t^3(ax^3 + bx^2y + cxy^2) = t^3z,$$

also z eine homogene F. des 3. Grades, wie vorhin.

§. 103. Von zwei oder mehreren Functionen von den nämlichen Variablen sagt man, sie seyen von einerlei Form, wenn die Exponenten der veränderlichen Gröſsen in allen F. nach demselben Gesetze fortschreiten. So sind z. B. die beiden F. $ax + bx^3 + cx^5 + \ldots$ und $Ax + Bx^3 + Cx^5 + \ldots$, so wie auch jene:

$$ax + (bx^2 + cxy + dy^2) + \ldots \quad \text{und}$$
$$Ax + (Bx^2 + Cxy + Dy^2) + \ldots$$

von der nämlichen Form, und unterscheiden sich sofort bloſs in der Verschiedenheit ihrer Coefficienten.

§. **104.** Eine Function heifst ein- oder vielförmig (vieldeutig), je nachdem ihr für jeden besondern Werth der veränderlichen Gröfse nur ein oder mehrere Werthe zukommen; je nach der Anzahl dieser Werthe heifst sie 2, 3, . . . $n$förmig. So ist z. B. $y = 2 - 3x + x^2$ eine einförmige, dagegen $y = 2x \pm \sqrt{x-1}$ eine zweiförmige Function von x.

Zus. Die höhern Gleichungen gehören sofort zu den vielförmigen Functionen.

§. **105.** Eine Funct. mehrerer Variablen heifst symmetrisch, wenn man in ihr, ohne dadurch den Werth zu verändern, die veränderlichen Gröfsen unter einander beliebig vertauschen kann. So sind z. B. $x^2 + 2xy + y^2$, $x^3 + y^3 + z^3 - \frac{xy}{z} - \frac{xz}{y} - \frac{yz}{x}$ symmetrische F. von x, y und x, y, z; so ist die Radicalgröfse ω in §. 66 eine sym. F. von den 3 Seiten a, b, c.

§. **106.** Ändert sich der Werth einer Funct., während die veränderliche Gröfse allmählich oder continuirlich zu- oder abnimmt, ebenfalls nur allmählich, d. i. so, dafs sie alle Grade der Gröfse von einem Werthe zum andern stetig durchläuft; so wird die Funct. continuirlich, im Gegentheile aber discontinuirlich genannt (eine weitere Definit. dieser Functionen folgt im §. 141). So sind z. B. $a + bx$ und x^n für alle endlichen Werthe von x continuirliche, jene $\frac{a}{x}$, x^{-n} und $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ nur für $x \gtrless 0$ continuirliche, dagegen für $x = 0$ discontinuirliche Functionen von x. Hieraus erhellet zugleich, dafs eine Funct. innerhalb gewisser Grenzen cont., dagegen aufserhalb derselben discont. seyn kann.

§. **107.** Lehrsatz. Ist eine Function von der in §. 100 angegebenen Form $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + ..$, wobei $A, B, C, ...$ von x unabhängige Coefficienten bezeichnen, für jeden Werth der Variablen x gleich Null; so ist auch jeder Coefficient für sich gleich Null.

Denn besteht die Gleichung 1) $A+Bx+Cx^2+\ldots=0$ für jeden Werth von x, also auch für $x=0$; so folgt dafür aus 1): $A=0$ und $x(B+Cx+\ldots)=0$. Dieser letztern Gleich. wird aber nicht blofs für $x=0$, sondern auch für $B+Cx+\ldots=0$ Genüge geleistet, aus welcher Gleich. aber wieder, wie in 1) $B=0$ und $x(C+Dx+\ldots)=0$, d. i. $C+Dx+\ldots=0$ folgt; daraus wird wieder für $x=0$ sofort $C=0$ u. s. w.

§. **108.** Zusatz. Sind 2 Functionen von derselben Form (§. 103) für alle Werthe der veränderlichen Gröfse (oder Gröfsen) einander gleich, so sind auch die gleichnamigen, d. i. jene Coefficienten, die beiderseits zu denselben Potenzen, oder wenn es Funct. mehrerer Variablen sind, zu denselben Combinationen der veränderl. Gröfsen gehören, einander gleich.

Denn ist z. B. $A+Bx+Cx^2+..=a+bx+cx^2+..$, so ist auch für jeden Werth von x: $(A-a)+(B-b)x+(C-c)x^2+..=0$, also nach dem vorigen §. $A-a=0$, $B-b=0$, $C-c=0$ u. s. w., d. i. $A=a$, $B=b$, $C=c$ etc. Eben so folgt auch aus der Gleich. $A_1x+A_2x^2y+A_3xy^2+..=a_1x+a_2x^2y+a_3xy^2+..$ sofort $A_1=a_1$, $A_2=a_2$, $A_3=a_3$, u. s. w.

Anmerk. Dieser hier vorgetragene Lehrsatz, unter dem Namen des Satzes oder der Methode der unbestimmten Coefficienten bekannt, ist der fruchtbarste und wichtigste Satz für die gesammte höhere Analysis.

§. **109.** Lehrsatz. Werden 2 oder mehrere Functionen von der genannten Form: $A+Bx+Cx^2+\ldots$ a) zusammen addirt oder von einander abgezogen, b) zusammen multiplicirt, c) durch einander dividirt, oder wird eine solche Function d) zu was immer für ganze oder gebrochene, positive oder negative Potenzen erhoben; so ist das Resultat immer wieder eine Function von der nämlichen (hier angeführten) Form.

a) Denn man erhält durch Addition und Subtraction der beiden Functionen $A+Bx+Cx^2+..$ und $a+bx+cx^2+..$

sofort: $(A \pm a) + (B \pm b)x + (C \pm c)x^2 + ..$, ein Resultat, welches in der That dieselbe Form $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + ..$ besitzt.

b) Durch Multiplication dieser beiden Functionen erhält man: $Aa + (Ba + Ab)x + (Ca + Bb + Ac)x^2 + ..$, welches Product abermals von der besagten Form $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + ..$ ist *).

c) Die Einheit durch die Functionsreihe $a + bx + cx^2 + ..$ dividirt, gibt nach der Natur der Division einen Quotienten von der Form: $p + qx + rx^2 + ...$ Nun ist aber

$$(A + Bx + Cx^2 + ..) : (a + bx + cx^2 + ..)$$
$$= (A + Bx + Cx^2 + ..)[1 : (a + bx + cx^2 + ..)]$$
$$= (A + Bx + Cx^2 + ..)(p + qx + rx^2 + ..),$$

also endlich wegen *b*) der Form nach $= \alpha + \beta x + \gamma x^2 + ...$

d) Für einen ganzen positiven Exponenten n folgt die Richtigkeit der Gleichung *m*) $(A + Bx + Cx^2 + ..)^n = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + ..$ unmittelbar aus *b*). Für einen negativen Exponenten hat man dann: $(A + Bx + Cx^2 + ..)^{-n} = 1 : (A + Bx + Cx^2 + ..)^n = 1 : (\alpha + \beta x + \gamma x^2 + ..) = p + qx + rx^2 + ..$ (*c*). Endlich ist, wenn man beide Theile der Gleich. *m*) zur Potenz $\frac{m}{n}$ erhebt:

$$(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + ..)^{\frac{m}{n}}$$
$$= (A + Bx + Cx^2 + ..)^m = a + bx + cx^2 + ..,$$

weil nämlich m eine ganze Zahl ist; dabei kann auch m, folglich der Exponent $\frac{m}{n}$ negativ seyn.

---

*) Man sieht leicht, daſs sich der in *a*) und *b*) geführte Beweis auf jede beliebige Anzahl von Functionen, welche die nämliche Form besitzen, ausdehnen läſst.

Zweites Capitel.

Allgemeine Gesetze für die Multiplication der Functionsreihen; polynomischer und binomischer Lehrsatz.

Multiplication der Functionsreihen.

§. 110. Für die folgenden Entwicklungen soll die allgemeine Functionsreihe (§. 100) durch

$$A_1 + A_2 x + A_3 x^2 + \ldots + A_n x^{n-1} +,$$

also durch die dem Buchstaben A angehängten Zeiger 1, 2, 3, . . zugleich die Stelle bezeichnet werden, die jeder Coefficient in der Reihe einnimmt. Diefs vorausgesetzt, erhält man durch die Multiplicat. der beiden Functionsreihen

$$(A_1 + A_2 x + A_3 x^2 + \ldots + A_n x^{n-1} + \ldots) \text{ und}$$
$$(a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots + a_n x^{n-1} + \ldots)$$

ganz einfach das Product:

$$A_1 a_1 + \left.\begin{matrix} A_2 a_1 \\ A_1 a_2 \end{matrix}\right\} x + \left.\begin{matrix} A_3 a_1 \\ A_2 a_2 \\ A_1 a_3 \end{matrix}\right\} x^2 + \ldots + \left.\begin{matrix} A_n a_1 \\ A_{n-1} a_2 \\ A_{n-2} a_3 \\ \ldots\ldots \\ A_2 a_{n-1} \\ A_1 a_n \end{matrix}\right\} x^{n-1} + \ldots,$$

in welchem sich hinsichtlich der Bildung der einzelnen Glieder folgende Gesetze aussprechen:

1. Die Summe der Zeiger der mit einander multiplicirten Coeffic. ist im 1. Gliede $= 2$, gleich der Anzahl der zusammen multiplicirten Functionsreihen.
2. In jedem folgenden Gliede wächst diese Summe um eine Einheit, und ist in den sämmtlichen Partialproducten, die zusammen einen Coeffic. ausmachen, durchaus die nämliche; so ist diese im 2. Coeffic. durchaus $= 3$, im 3. $= 4$ u. s. w., im n. Coeffic. $= n + 1 = n + 2 - 1$.
3. Jede dieser Summen erscheint so oft als möglich in 2 Theile zerlegt, wobei die Elemente jeder Complexion auch noch permutirt sind, so, dafs also die Zeiger die 2. Classe der Variationen zu bestimmten Summen bilden.

4. Die Anzahl der Theile oder Partialproducte der aufeinander folgenden Coefficienten correspondirt mit den Gliedern der Reihe: 1, 2, 3, . . . n, so, dafs das 3. Glied aus 3, das n. Glied aus n Theilen u. s. w. besteht.
5. Die Exponenten von x bilden dasselbe Gesetz wie in den ursprünglichen Reihen (§. 109, b).

Um also irgend ein, z. B. das 5. Glied dieses Productes zu entwickeln, wird man die 2. Cl. der Variationen zur Summe $5+2-1=6$, d. i. 51, 42, 33, 24, 15 bilden, in allen diesen Complexionen die ersten Zahlen links für die Zeiger von A, und die folgenden für jene von a (oder umgekehrt) gelten lassen, und sofort als 5tes Glied erhalten:

$$(A_5 a_1 + A_4 a_2 + A_3 a_3 + A_2 a_4 + A_1 a_5)\, x^4.$$

§. **111.** Wird das vorige Product noch mit der 3. Functionsreihe $\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \ldots$ multiplicirt, so erhält man, mit Anwendung der eben ausgesprochenen Gesetze, für das Product der 3 Functionen $(A + Bx + \ldots)(a + bx + \ldots)(\alpha + \beta x + \ldots)$ sofort:

$$A_1 a_1 \alpha_1 + \left.\begin{array}{l|l} A_2 a_1 & \\ A_1 a_2 & \alpha_1 \\ \hline A_1 a_1 & \alpha_2 \end{array}\right\} x + \left.\begin{array}{l|l} A_3 a_1 & \\ A_2 a_2 & \alpha_1 \\ A_1 a_3 & \\ \hline A_2 a_1 & \alpha_2 \\ A_1 a_2 & \\ \hline A_1 a_1 & \alpha_3 \end{array}\right\} x^2 + \ldots,$$

in welchem man wieder ohne Schwierigkeit (wenn man sich noch die angezeigten Multiplicationen mit α_1, α_2, . . . ausgeführt denkt) folgende, mit jenen des vorigen §. analoge, Gesetze erkennt:

1. Im 1. Gliede ist die Summe der Zeiger gleich der Anzahl der zusammen multiplicirten Functionsr. (= 3).
2. Diese Summe nimmt in jedem folgenden Glied um Eins zu, ist also im 2. Glied $=4$, im 3. $=5$ u. s. w., im n. Glied $=n+2=n+3-1$.
3. Jede dieser Summen erscheint so oft als möglich in 3 Theile zerlegt, oder es bilden, da auch alle Permutationen vorkommen, die Zeiger der einzelnen Coeffic. die 3. Variationsclasse zu den Summen 3, 4, 5 u. s. w.

4. Die Anzahl der Theile oder Partialproducte, aus welchen jeder der aufeinander folgenden Coeffic. zusammengesetzt ist, wird durch die correspondirenden Glieder der Reihe 1, 3, 6, 10, ... $\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$, welche durch successives Summiren der Glieder der vorigen Reihe 1, 2, 3, ... n entsteht, ausgedrückt.
5. Die Exponenten von x befolgen wieder das ursprüngliche Gesetz.

Es kann demnach auch hier sehr leicht jedes Glied des Productes unabhängig von allen übrigen gebildet werden. So ist z. B. für das 5. Glied die Summe der Zeiger $= 5 + 3 - 1 = 7$, und für diese Summe die 3. Variationsclasse: 511, 421, 331, 241, 151, 412, 322, 232, 142, 313, 223, 133, 214, 124, 115, wobei die Anzahl der Theile oder Complexionen in der That auch mit dem correspond. 5. Glied 15 der hier geltenden Verificationsreihe (die uns hier vorläufig nur als ein mechanisches Hilfsmittel dienen soll): 1, 3, 6, 10, 15, 21 u. s. w. übereinstimmt.

Dieses 5. Glied ist demnach:

$$(A_5 a_1 \alpha_1 + A_4 a_2 \alpha_1 + A_3 a_3 \alpha_1 + A_2 a_4 \alpha_1 + \ldots + A_1 a_2 \alpha_4 + A_1 a_1 \alpha_5)\, x^4,$$

welches indeſs, in der Form der erstern Glieder des obigen Schemas dargestellt, für die Anwendung auf gegebene Zahlenbeispiele bequemer ist.

§. 112. Wird das vorige Product abermals mit einer Functionsreihe $\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 x + \mathfrak{A}_3 x^2 + \ldots$ multiplicirt, so erhält man für das Product von 4 solchen Reihen genau wieder die mit obigen analogen Gesetze: die Summe der Zeiger ist im n. Gliede $= n + 4 - 1 = n + 3$; die Zeiger selbst bilden die 4. Variationsclasse zu dieser jedesmaligen Summe; die Anzahl der Theile in jedem einzelnen Coeffic. stimmt mit dem gleichnamigen Gliede der Verificationsreihe 1, 4, 10, 20, .. $\frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$, die wieder auf dieselbe Weise aus jener des vorigen §. wie diese letztere aus der ihr vorausgehenden (§. 110), d. i. durch successives Summiren der Glieder der R. 1, 3, 6, 10, .. entsteht, überein.

§. 113. Da sich nun diese Gesetze fortwährend wiederholen und für $m+1$ solcher Functionsreihen als giltig erweisen, wenn man sie für m Functionen als richtig annimmt; so kann jetzt ohne Schwierigkeit aus dem Producte jeder beliebigen Anzahl von dergleichen Functionsreihen jedes beliebige Glied gebildet werden.

Um dieses durch ein Beispiel nachzuweisen, wollen wir setzen, es sey aus dem Producte der 4 Functionen:

$$1-2x+3x^2-4x^3+.., \quad 1+x-x^2-x^3+x^4+..,$$
$$2+3x+x^2+2x^3+2x^4+.., \quad 3-x-3x^2-2x^3-4x^4-..$$

das 3. Glied zu bestimmen. Bildet man sonach die 4. Variationscl. zur Summe $3+4-1=6$, so erhält man: 3111, 2211, 1311, 2121, 1221, 1131, 2112, 1212, 1122, 1113, also im Ganzen 10 Complexionen, welche Zahl auch in der That mit dem 3. Glied der hieher gehörigen Verificat. Reihe 1, 4, 10, . . . übereinstimmt. Läſst man ferner in diesen Complexionen die ersten Zahlen links für die Zeiger der Coeffic. der 1. Function, die folgenden für jene der Coeffic. in der 2. Function u. s. w. gelten, oder schreibt man, was für die Rechnung bequemer und kürzer ist, diesen Coefficienten, übereinstimmend mit der Darstellung in §§. 110 und 111, auf folgende Art:

$$[(31+22+13)1+(21+12)2+(11)3]1$$
$$+[(21+12)1+(11)2]2+[(11)1]3;$$

so erhält man nach gehöriger Substitution und Reduction ganz einfach für das verlangte 3. Glied: $-13x^2$.

Anmerk. Sind die Functionsreihen von der Form

$$A_1 x^n + A_2 x^{n+m} + . .,$$

so darf man nur $x^m = y$ setzen, um diese wieder auf die hier vorausgesetzte Form: $y^{\frac{n}{m}}(A_1 + A_2 y + A_3 y^2 + . .)$ zu bringen.

Polynomischer Lehrsatz.

§. 114. Setzt man in der Entwicklung von §. 110 $a_1 = A_1$, $a_2 = A_2$, . . $a_n = A_n$; so erhält man nach einer einfachen Reduction für die 2. Potenz eines Polynoms:

$$(A_1 + A_2 x + A_3 x^2 + ..)^2 = A_1^2 + 2A_1 A_2 x$$
$$+ (2A_1 A_3 + A_2^2) x^2 + (2A_1 A_4 + 2A_2 A_3) x^3 + . . .,$$

wobei also wieder dieselben Gesetze wie im angeführten §., jedoch mit einiger Vereinfachung gelten. Um hier z. B. das 7. Glied aufser der Reihe zu entwickeln, wird man blofs die 2. Combinationsclasse zur Summe $7+2-1=8$ bilden, und jede Complexion (welche sofort die Zeiger des Buchstaben A geben) mit einer Zahl (welche den betreffenden Coefficienten liefert) versehen, die anzeigt, wie oft sich die Elemente dieser Complex. permutiren lassen. Man erhält dadurch die 4 Complexionen: 71, 62, 53, 44, zu denen der Reihe nach die Permutationszahlen 2, 2, 2, 1 kommen, deren Summe 7 (welche an die Stelle der Summe der Partialproducte in §. 110 tritt) wieder mit dem 7. Glied der hieher gehörigen Verificat. Reihe 1, 2, 3, . . übereinstimmt; es ist also das verlangte 7. Glied:

$$(2A_1A_7 + 2A_2A_6 + 2A_3A_5 + A_4^2)x^6.$$

§. 115. Setzt man eben so in § 111 $\alpha_1 = a_1 = A_1$, $\alpha_2 = a_2 = A_2$ u. s. f.; so erhält man für die 3. Potenz eines Polynoms:

$$(A_1 + A_2x + A_3x^2 + ..)^3 = A_1^3 + 3A_1^2A_2x$$
$$+ (3A_1^2A_3 + 3A_1A_2^2)x^2 + (3A_1^2A_4 + 6A_1A_2A_3 + A_2^3)x^3 + ..$$

dabei bilden die Zeiger im 1., 2., . . n. Glied die 3. Combinationsclasse zur Summe 4, 5, . . $n+3-1=n+2$, und die Coefficienten die zugehörigen Permutationszahlen.

Um also hier z. B. das 6. Glied zu bilden, hat man als Summe der Zeiger: $6+3-1=8$, und dafür: 611, 521, 431, 422, 332, welchen Complexionen beziehungsweise die Permutationszahlen 3, 6, 6, 3, 3 (deren Summe 21 sofort wieder mit dem 6. Gl. der hieher gehörigen Verif. R. 1, 3, 6, 10, . . übereinstimmt) zukommen, so, dafs man endlich für das 6. Glied den Ausdruck erhält:

$$(3A_1^2A_6 + 6A_1A_2A_5 + 6A_1A_3A_4 + 3A_2^2A_4 + 3A_2A_3^2)x^5.$$

§. 116. Bildet man nun nach dem nämlichen Gesetze die n. Potenz des Polynoms oder der Functionsreihe, indem man nach und nach die Zahlen n, $n+1$, $n+2$, . . als Summen der Zeiger im 1., 2., 3. Glied etc. so oft als möglich in n Theile ohne Wiederholung zerlegt, jeder so gebildeten Complexion die zugehörige Permutationszahl beifügt, und endlich aus diesen Elementen auf die vorige Weise die Glieder zusammensetzt; so erhält man nachstehende, unter dem Namen des polynomischen Lehrsatzes bekannte Entwicklung:

$$(A_1 + A_2 x + A_3 x^2 + \ldots)^n$$
$$= A_1^n + n A_1^{n-1} A_2 x + \left[n A_1^{n-1} A_3 + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2} A_1^{n-2} A_2^2\right] x^2$$
$$+ \left[n A_1^{n-1} A_4 + n(n-1) A_1^{n-2} A_2 A_3 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3} A_1^{n-3} A_2^3\right] x^3 + \ldots$$

welche nicht nur α) für jeden ganzen positiven, sondern auch β) für negative und γ) gebrochene Exponenten gilt, wie wir in den nächsten §§. erweisen wollen.

§. **117.** α) Multiplicirt man beide Theile der vorigen Gleichung mit dem Polynom $A_1 + A_2 x + A_3 x^2 + \ldots$, welches Kürze halber durch P bezeichnet werden soll; so erhält man ganz einfach:

$$P^{n+1} = A_1^{n+1} + (n+1) A_1^n A_2 x$$
$$+ \left[(n+1) A_1^n A_3 + \frac{(n+1)n}{1\,.\,2} A_1^{n-1} A_2^2\right] x^2 + \ldots,$$

ein Resultat, welches auch unmittelbar aus der vorigen Entwicklung (§. 116) hervorgeht, wenn man darin $n+1$ statt n schreibt: gilt demnach diese genannte Entwickl. für irgend einen ganzen, positiven Exponenten n, so gilt sie auch für den nächst folgenden um eine Einheit gröſsern $n+1$; da nun aber diese Entwickl. (§. 115) für $n=3$ gilt, so gilt sie auch für $3+1=4$, und da sie für $n=4$ gilt, wieder für $4+1=5$ u. s. w., also allgemein für jeden ganzen, positiven Exponenten n.

§. **118.** β) Bezeichnet man indeſs die Coefficienten der Entwicklung §. 116 durch B_1, B_2, ..., setzt also $P^n = B_1 + B_2 x + \ldots$; so ist

$$P^{-n} = 1 : P^n = 1 : (B_1 + B_2 x + B_3 x^2 + \ldots)$$
$$= T_1 + T_2 x + T_3 x^2 + \ldots \text{ (§. 109, } c\text{)},$$

wo also T_1, T_2, ... die zu bestimmenden Coefficienten sind. Multiplicirt man zu diesem Ende die letzte Gleich.

mit dem Nenner oder Divisor $B_1 + B_2 x + \ldots$, so erhält man (§. 110):

$$1 = T_1 B_1 + (T_2 B_1 + T_1 B_2) x + (T_3 B_1 + T_2 B_2 + T_1 B_3) x^2 + \ldots,$$

und daraus nach §. 107 (oder 108), wenn man für $B_1, B_2, \ldots$ die Werthe aus §. 116 herstellt:

$$T_1 B_1 = 1, \text{ also } T_1 = 1 : B_1 = 1 : A_1^n = A_1^{-n};$$

$$T_2 B_1 + T_1 B_2 = 0, \text{ also } T_2 = -T_1 B_2 : B_1 = -n A_1^{-n-1} A_2;$$

$$T_3 = (-T_2 B_2 - T_1 B_3) : B_1 = -n A_1^{-n-1} A_3 + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} A_1^{-n-2} A_2^2 \text{ u. s. w.};$$

es ist also

$$P^{-n} = A_1^{-n} - n A_1^{-n-1} A_2 x + \left[-n A_1^{-n-1} A_3 + \frac{-n(-n-1)}{1 \cdot 2} A_1^{-n-2} A_2^2\right] x^2 + \ldots,$$

woraus sofort folgt, dafs die obige Entwicklung §. 116 auch für negative Exponenten gilt.

§. 119. γ) Sey endlich der Potenzexponent $= \frac{n}{m}$, wo n und m ganze Zahlen seyn sollen; so hat man für $P^{\frac{n}{m}} = T_1 + T_2 x + T_3 x^2 + \ldots$ (§. 109, d), wenn die Gleich. zur m. Potenz erhoben wird:

$$P^n = (T_1 + T_2 x + T_3 x^2 + \ldots)^m, \text{ d. i. (§. 116):}$$

$$A_1^n + n A_1^{n-1} A_2 x + \ldots = T_1^m + m T_1^{m-1} T_2 x + \ldots$$

Aus dieser Gleich. folgt nach §. 108:

$$T_1^m = A_1^n \quad \text{oder} \quad T_1 = A_1^{\frac{n}{m}},$$

$$m T_1^{m-1} T_2 = n A_1^{n-1} A_2 \quad \text{oder} \quad T_2 = \frac{n}{m} A_1^{\frac{n}{m}-1} A_2 \text{ u. s. w.},$$

so, dafs man also erhält:

$$P^{\frac{n}{m}} = A_1^{\frac{n}{m}} + \frac{n}{m} A_1^{\frac{n}{m}-1} A_2 x + \left[\frac{n}{m} A_1^{\frac{n}{m}-1} A_3 + \frac{\frac{n}{m}\left(\frac{n}{m}-1\right)}{1 \cdot 2} A_1^{\frac{n}{m}-2} A_2^2\right] x^2 + \ldots,$$

wodurch sofort der Beweis hergestellt ist, dafs die besagte

Entwickelung in §. 116 auch für gebrochene Exponenten, die übrigens (da, nach §. 118, n oder m auch negativ seyn darf) positiv oder negativ seyn können, gilt.

Anmerk. Diese Entwickel. (§. 116) oder der polyn. Lehrsatz gilt übrigens nicht bloſs für rationale, sondern (wie wir im §. 127 sehen werden) auch für irrationale und selbst imaginäre Exponenten.

Zur Übung entwickle man $(1-2x+x^2-3x^3)^4$ vollständig und von $(1-2x^2+3x^4-4x^6+x^8)^4$ das 7. Glied. Man erhält beziehungsweise:

$$1-8x+28x^2-68x^3+142x^4-236x^5+322x^6-404x^7 +397x^8-336x^9+270x^{10}-108x^{11}+81x^{12} \text{ und } 1208x^{12}\text{*)}.$$

Binomischer Lehrsatz.

§. 120. Aus der Entwickelung des §. 116 folgt als specieller Fall für $A_3 = A_4 = \text{etc.} = 0$, wenn man noch zur gröſsern Einfachheit $A_1 = a$ und $A_2 x = b$ setzt, die unter der Benennung des binomischen Lehrsatzes bekannte Entwickelung:

$$(a+b)^n = a^n + n\,a^{n-1}\,b + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\,a^{n-2}\,b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,a^{n-3}\,b^3 + \ldots,$$

welche also ebenfalls für ganze, gebrochene, positive und negative Werthe von n gilt.

Anmerk. Der Kürze wegen werden wir in der Folge die Binomialcoefficienten, d. i. $\frac{n}{1}$, $\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}$, ... $\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,m}$, der Reihe nach, durch $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$, ... $\binom{n}{m}$ bezeichnen.

§. 121. Von den Gesetzen, welche in dieser Entwickelung Statt finden, führen wir hier, als die für uns wichtigsten, nur folgende an: 1) für ganze, positive Exponenten n bricht die Reihe ab und schlieſst mit dem

*) M. s. I. S. 28.

$n+1$. Glied. 2) In diesem Falle besitzen je 2 von den beiden äufsern gleich weit abstehende Glieder einerlei Coefficienten und die Exponenten von a und b sind blofs unter einander verwechselt. 3) Für negative und gebrochene Exponenten n geht die Reihe oder Entwickelung ohne Ende fort.

Denn das Abbrechen der genannten Reihe hängt offenbar blofs von dem Nullwerden eines der Schlufsfactoren $n-1$, $n-2$, $n-3$ u. s. w. ab; setzt man daher den Schlufsfactor des $m+2$. Gliedes, d. i. $n-m$ Null, so hat man als Bedingungsgleich. für das Abbrechen der obigen Reihe: $n-m=0$, und daraus $m=n$, so, dafs also (da m seiner Natur nach nur ganz und positiv seyn kann) für ganze, positive Werthe von n, das $m+2.=n+2$. Glied zuerst verschwindet, und sonach (da dieser Factor $n-m$ nun auch in allen folgenden Gliedern erscheint) die Reihe mit dem $n+1$. Gliede abbricht; dagegen für negative oder gebrochene Werthe von n, wofür diese Bedingungsgl. gar nicht bestehen kann, die Reihe ohne Ende fortläuft.

Ferner ist das $m+1$. Glied vom ersten gezählt

$$=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\ldots.\,m}\,a^{n-m}b^m,$$

und das $m+1$. Gl. vom letzten gezählt, welches sofort vom ersten an gerechnet, das $n-m+1$. bildet

$$=\frac{n(n-1)\ldots(m+2)(m+1)}{1\,.\,2\ldots(n-m-1)(n-m)}\,a^m b^{n-m}$$

$$=\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)(n-m)(n-m-1)\ldots(m+2)(m+1)}{1\,.\,2\ldots m\quad(m+1)(m+2)\ldots(n-m-1)(n-m)}\,a^m b^{n-m}$$

$$=\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1}{1\,.\,2\,.\ldots m}\,a^m b^{n-m}.$$

§. 122. Für einen ganzen, positiven Exponenten n folgt also nach dem vorigen §.:

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots$$
$$+ \binom{n}{2}a^2b^{n-2} + \binom{n}{1}ab^{n-1} + b^n,$$

oder, wenn man in dieser Reihe das 1. und letzte, 2. und vorletzte Glied u. s. w. zusammennimmt, auch:

1) $(a+b)^n = (a^n+b^n) + \binom{n}{1} ab(a^{n-2}+b^{n-2})$
$$+\binom{n}{2} a^2 b^2 (a^{n-4}+b^{n-4}) + \binom{n}{3} a^3 b^3 (a^{n-6}+b^{n-6}) + \ldots$$

dabei ist, wie man aus dem allgem. Gliede
$$\binom{n}{m} a^m b^m (a^{n-m}+b^{n-m})$$
findet, das letzte Glied, für n gerad (da man $m = \frac{n}{2}$ setzen und von dem Resultat die Hälfte nehmen muſs):
$$\frac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n}{2}+1\right)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,\frac{n}{2}} a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}}$$
und für n ungerad (indem man $m = \frac{n-1}{2}$ zu setzen hat):
$$\frac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n+3}{2}\right)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\left(\frac{n-1}{2}\right)} a^{\frac{n-1}{2}} b^{\frac{n-1}{2}} (a+b).$$

§. **123.** Wir wollen nun in dieser Entwickelung $a+b=y$ setzen, und sofort auch die Binome des 2. Theils: a^n+b^n, $a^{n-2}+b^{n-2}\ldots$, durch y auszudrücken suchen, dabei aber, um nur mehr den Gang der Rechnung anzuzeigen, nie weiter als bis zu dem Binome $a^{n-6}+b^{n-6}$ gehen, und sonach die folgenden $a^{n-8}+b^{n-8}$ u. s. w. auslassen. Dieſs vorausgesetzt, setze man, da die spätern Binome zuerst bestimmt werden müssen, in der genannten Entwickelung 1) $n-6$ statt n; so erhält man:
$$y^{n-6} = a^{n-6} + b^{n-6}$$
(wo man stehen bleiben muſs, indem im folgenden Gliede schon das Binom $a^{n-8}+b^{n-8}$ vorkäme), wodurch nun schon das Binom $a^{n-6}+b^{n-6}$, welches das letzte in unserer Reihe bilden soll, bestimmt ist.

Setzt man ferner in 1) $n-4$ statt n, so erhält man:
$$y^{n-4} = (a^{n-4}+b^{n-4}) + (n-4)\,ab\,(a^{n-6}+b^{n-6}),$$
und daraus, wenn gleich für das letzte Binom der eben gefundene Werth substituirt wird:
$$a^{n-4}+b^{n-4} = y^{n-4} - (n-4)\,aby^{n-6}.$$

Eben so folgt, wenn oben $n-2$ statt n gesetzt wird:

$$y^{n-2} = (a^{n-2}+b^{n-2}) + (n-2)ab(a^{n-4}+b^{n-4}) + \frac{(n-2)(n-3)}{1\,.\,2}a^2b^2(a^{n-6}+b^{n-6}),$$

und daraus erhält man, nach gehöriger Substitut. der bereits gefundenen Werthe und der einfachen Reduction:

$$a^{n-2}+b^{n-2} = y^{n-2} - (n-2)aby^{n-4} + \frac{(n-2)(n-5)}{1\,.\,2}a^2b^2y^{n-6}.$$

Läſst man endlich in 1) n ungeändert, bestimmt daraus a^n+b^n, indem man für die bereits durch y ausgedrückten Binome substituirt; so erhält man, wenn man zugleich die Entwickelung so weit hersetzt, wie sie erhalten wird, wenn man nicht mit dem Binome $a^{n-6}+b^{n-6}$, sondern erst mit jenem $a^{n-10}+b^{n-10}$ überall abbricht*):

$$a)\quad a^n+b^n = y^n - naby^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1\,.\,2}a^2b^2y^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1\,.\,2\,.\,3}a^3b^3y^{n-6} + \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}a^4b^4y^{n-8} - \frac{n(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}a^5b^5y^{n-10} + \ldots,$$

wobei also $a+b=y$ und n eine ganze, positive Zahl ist. Aus den leicht (nach jenen in §. 122) zu bildenden letzten Gliedern folgt, daſs diese Reihe immer nur so weit fortgesetzt werden darf, bis y den Exponenten 0 oder 1 erhält (die Entwickelung hat nämlich, je nachdem n gerad oder ungerad ist, $\frac{n}{2}+1$ oder $\frac{n+1}{2}$ Glieder).

§. **124.** Aus der Ableitungsart (§. 120) folgt, daſs das Binomialtheorem für jeden rationalen Exponenten Giltigkeit habe; um diese aber auch, des künftigen Gebrauches willen, für irrationale, ja selbst imaginäre Exponenten zu erweisen, behandeln wir in der nachstehen-

*) Eine dem Anfänger, der dankbaren Reductionen wegen, sehr empfehlenswerthe Übung.

den directen Ableitung dieses Satzes, den Exponenten vollkommen als variable Gröfse.

§. **125.** Man setze 1) $(1+x)^y = 1 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n + \ldots$, wobei A_1, A_2, ... von x unabhängige Coefficienten, also offenbar gewisse (eben zu bestimmende) Functionen vom Expon. y sind. Läfst man x um die ganz willkürliche Gröfse z zunehmen, so erhält man auch:

$$2) \quad (1+x+z)^y = 1 + A_1(x+z) + A_2(x+z)^2 + \ldots + A_n(x+z)^n + \ldots$$

Setzt man ferner in 1) $\frac{x}{z}$ statt x, so folgt, wenn man gleich durchaus mit dem Nenner z^y multiplicirt und hierauf z in $z+1$ übergehen läfst:

$$3) \quad (1+z+x)^y = (1+z)^y + A_1(1+z)^{y-1}x + A_2(1+z)^{y-2}x^2 + \ldots + A_n(1+z)^{y-n}x^n + \ldots$$

Aus 1) folgt aber, da A_1, A_2, ... nur vom Expon. abhängen: $(1+z)^y = 1 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots$, $(1+z)^{y-1} = 1 + B_1 z + B_2 z^2 + \ldots$, $(1+z)^{y-2} = 1 + C_1 z + C_2 z^2 + \ldots$ etc., $(1+z)^{y-n-1} = 1 + M_1 z + M_2 z^2 + \ldots$, $(1+z)^{y-n} = 1 + N_1 z + N_2 z^2 + \ldots$, so, dafs man also die Coefficienten B_1, C_1, ... N_1 aus A_1, jene B_2, C_2, ... N_2 aus A_2 u. s. w. erhält, indem man beziehungsweise in A_1, A_2, ... A_n (als Functionen von y) der Reihe nach $y-1$, $y-2$, ... $y-n$ setzt. Werden diese Werthe in 3) substituirt, hierauf die Entwickelungen 2) und 3) (als identische Ausdrücke) einander gleichgesetzt, und zugleich in 2) von den Potenzen (die man, weil die Expon. ganze Zahlen sind, als bekannt voraussetzen darf) nur überall die beiden ersten Glieder, als für unsern Zweck hinreichend, entwickelt; so erhält man die Gleichung:

$$\begin{aligned} &1 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots \\ &+ A_1 z + 2A_2 xz + 3A_3 x^2 z + \ldots + nA_n x^{n-1} z + \ldots \\ &= 1 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots + A_1 x(1 + B_1 z + B_2 z^2 + \ldots) \\ &+ A_2 x^2 (1 + C_1 z + C_2 z^2 + \ldots) + \ldots \\ &\qquad + A_{n-1} x^{n-1}(1 + M_1 z + M_2 z^2 + \ldots), \end{aligned}$$

und daraus, nach §. 108 (da A_1, A_2, ... B_1, B_2, ... etc.

von x und z unabhängig sind): $2A_2 = A_1 B_1$, $3A_3 = A_2 C_1$ u. s. w., $nA_n = A_{n-1} M_1$, woraus man der Reihe nach

$$A_2 = \frac{A_1 B_1}{1 \cdot 2},\quad A_3 = \frac{A_1 B_1 C_1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \text{ etc.,}$$

und dieses Gesetz für A_{n-1} als giltig angenommen, also

$$A_{n-1} = \frac{A_1 B_1 C_1 \ldots L_1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)}$$

gesetzt, aus der letzten Gleichung:

$$A_n = \frac{A_1 B_1 C_1 \ldots L_1 M_1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}$$

(wodurch die Allgemeingiltigkeit dieses Gesetzes erwiesen ist) erhält. — Nach dem, was vorhin über die Bildung der Coefficienten B_1, $C_1, \ldots M_1$ bemerkt worden, würden also die sämmtlichen Coeffic. A_2, $A_3 \ldots A_n$ gefunden seyn, wenn jener A_1 bekannt wäre.

§. **126.** Um aber diesen ersten Coefficienten A_1, von welchem alle folgenden abhängen, zu bestimmen, setze man (da er irgend eine Funct. vom Exponenten y seyn mufs), $A_1 = \varphi(y)$; so ist (§. 125) $(1+x)^y = 1 + x\varphi(y) + \ldots$ und eben so: $(1+x)^z = 1 + x\varphi(z) + \ldots$, $(1+x)^{y+z} = 1 + x\varphi(y+z) + \ldots$ Nun ist aber auch $(1+x)^{y+z} = (1+x)^y (1+x)^z$, also, wenn man substituirt:

$$1 + x\varphi(y+z) + \ldots = [1 + x\varphi(y) + \ldots][1 + x\varphi(z) + \ldots]$$
$$= 1 + x[\varphi(y) + \varphi(z)] + \ldots;$$

daraus folgt (§. 108): $\varphi(y+z) = \varphi(y) + \varphi(z)$. Diese Relation gibt für $z = y$: $\varphi(2y) = 2\varphi(y)$, für $z = 2y$: $\varphi(3y) = \varphi(y) + \varphi(2y) = 3\varphi(y)$, und so allgemein: $\varphi(ny) = n\varphi(y)$ oder $\frac{\varphi(ny)}{ny} = \frac{\varphi(y)}{y}$; die Funct. $\varphi(y)$ ist demnach so beschaffen, dafs der Quotient $\varphi(y):y$ ungeändert bleibt, wenn man statt y irgend ein Vielfaches von y setzt: diese ist also nothwendig von der Form Ay, wo A eine constante Gröfse bezeichnet. Man hat demnach $(1+x)^y = 1 + Ay.x + \ldots$, und da es gleichgiltig ist, bei welchem Werth von y die davon unabhängige Gröfse A bestimmt wird, so setze man $y = 1$; dadurch erhält man: $1 + x = 1 + Ax + \ldots$, so, daſs also (§. 108) $A = 1$, folglich $A_1 = \varphi(y) = Ay = y$ wird. Mit diesem Werthe von $A_1 = y$ hat man daher (§. 125) $B_1 = y - 1$, $C_1 = y - 2, \ldots$ $M_1 = y - (n-1)$, $N_1 = y - n$ u. s. w., also, wenn man diese Werthe in die obigen Ausdrücke von $A_2, A_3, \ldots A_n$, so wie dann diese Coefficienten in der Reihe 1) substituirt:

$$\beta)\ (1+x)^y = 1 + yx + \frac{y(y-1)}{1\,.\,2}x^2 + \frac{y(y-1)(y-2)}{1\,.\,2\,.\,3}x^3 + \ldots$$
$$+ \frac{y(y-1)\ldots(y-n+1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,n}x^n + \ldots,$$

in welcher Entwickelung nun der Exponent durchaus jeden (sowohl reellen als imaginären) Werth haben kann.

§. **127.** Zusatz. Man kann jetzt auch der Entwickelung in §. 116 oder dem polynomischen Lehrsatze dieselbe Allgemeinheit hinsichtlich des Exponenten verschaffen, wenn man $A_2 x + A_3 x^2 + \ldots = B$ setzt, wodurch die Entwickelung des Polynoms P^y in jene des Binoms

$$(A_1 + B)^y = A_1^y + yA_1^{y-1}B + \frac{y(y-1)}{1\,.\,2}A_1^{y-2}B^2 + \ldots$$

übergeht, hierauf die Potenzen B^2, $B^3, \ldots$ nach §§. 114, 115 etc. (oder §. 116, wo n nur ganze Werthe erhält), entwickelt und die erhaltenen Resultate gehörig substituirt. Man erhält dadurch, übereinstimmend mit §. 116:

$$P^y = A_1^y + yA_1^{y-1}A_2 x + \left[yA_1^{y-1}A_3 + \frac{y(y-1)}{1\,.\,2}A_1^{y-2}A_2^2\right]x^2 + \ldots,$$

wobei aber nun diese Entwickelung für jeden Exponenten gilt.

Drittes Capitel.

Von den Grenzen der Functionen; dem unendlich Groſsen und Kleinen.

Erklärungen.

§. 128. Nähert sich bei der steten Zu- oder Abnahme der veränderlichen Gröſse die davon abhängige Function immer mehr und mehr einer bestimmten Gröſse, ohne diese jemals überschreiten zu können; so wird diese letztere Gröſse **Grenze** der Function genannt.

So ist z. B., wenn x fortwährend wächst, a die Grenze der Function $y = a \pm \frac{b}{x}$; die Einheit die Grenze der Summe der unendlichen Reihe: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 1 - \frac{1}{2^x}$; der Kreisumfang die Grenze der demselben ein- und umgeschriebenen regelm. Vielecke, bei fortwährender Zunahme der Seitenzahl u. s. w. Eben so ist bei der steten Abnahme des numerischen Werthes von x, 1 die Grenze der Function $y = \frac{a}{a \pm x}$, welche Grenze sie überdieſs für $x = 0$, vollkommen erreicht.

§. 129. Von einer wachsenden Gröſse, deren numerischer Werth ins Unbestimmte, über alle angebbaren Grenzen hinaus zunimmt, sagt man, sie werde **unendlich**, oder ihre Grenze, die man dann durch ∞ bezeichnet, sey das **unendlich Groſse**. Will man anzeigen, daſs u bereits gröſser als jede angebbare Zahl geworden sey; so schreibt man: $u = \infty$.

So würde z. B. in der ohne Ende fortlaufenden Reihe: 1, 2, 3, 4, ... eines der spätesten oder letzten Glieder $u = \infty$ seyn.

Eine Gröſse kann beständig, d. i. ohne Ende zunehmen, und gleichwohl nicht Unendlich werden, sondern an eine bestimmte **endliche** Grenze gebunden seyn, wie im obigen Beispiele (vorig. §.) die Funct. $y = a - \frac{b}{x}$ bei der fortwährenden Zunahme von x, oder, wie der Umfang und die Fläche eines im Kreise beschriebenen regelm. Vieleckes ohne Ende mit der Seitenzahl zunehmen, ohne daſs sie jedoch jemals gröſser als der Umfang und die Fläche des Kreises werden können. Man hat daher ein Wachsen ohne Ende, von einem bis ins Unendliche zu unterscheiden.

§. 130. Von einer Gröſse, deren numerischer Werth ins Unbestimmte abnimmt und dabei kleiner werden kann als jede noch so kleine angebbare Gröſse, sagt man, sie werde unendlich klein oder habe die Null zur Grenze. — Ist a eine endliche, u eine bis ins Unendl. wachsende Gröſse; so kann jede unendl. klein werdende Gröſse durch $\omega = \frac{a}{u}$ dargestellt werden. Stellt man sich vor, daſs u ihre (fingirte) Grenze ∞ im Zunehmen erreicht hat; so ist auch ω mit ihrer Grenze o zusammengefallen und man hat $0 = \frac{a}{\infty}$.

So sind z. B. die letzten Glieder der unendlichen Reihe $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$,... unendlich klein und von Null nicht mehr zu unterscheiden.

Eine Gröſse kann ebenfalls ohne Ende abnehmen, ohne deſshalb unendlich klein zu werden, wie z. B. bei der unendl. Zunahme von x, die obige Funct. $y = a + \frac{b}{x}$, nicht kleiner als a, der Umfang oder die Fläche eines einem Kreise umschriebenen regelm. Polygons, bei der fortwährenden Zunahme der Seitenzahl, nicht kleiner als der Umfang oder die Fläche des Kreises werden kann u. s. w.

Analog mit der hier für die unendl. klein werdende Gröſse ω angeführte Bezeichnung läſst sich eine unendl. groſs werdende Gröſse auch durch $u = \frac{a}{\omega}$ darstellen, und es wird u ihre Grenze im Zunehmen erreicht haben, wenn ω die ihrige im Abnehmen erreicht hat, so, daſs $\infty = \frac{a}{0}$ ist. (Beide Gleich. $\infty = \frac{a}{0}$ und $0 = \frac{a}{\infty}$ folgen auch aus den gewöhnlichen arithmetischen Regeln, wobei jedoch immer, da o und ∞ wie wirkliche Gröſsen behandelt werden, die gröſste Vorsicht nöthig ist.)

§. **131.** Da bei der unendl. Zunahme von u nichts destoweniger das geometrische Verhältniſs $u : u^2$ jenem von $1 : u$ ungeändert gleich bleibt, so wird auch, wie u gegen 1, so u^2 gegen u unendlich zunehmen, und für $u = \infty$, sofort ∞^2 gegen ∞ selbst wieder unendl. groſs seyn. Aus diesem Grunde heiſst auch ∞^2 das Unendliche der zweiten Ordnung, während jenes einfache ∞ auch das der 1. Ordn. genannt wird. Aus gleichem Grunde heissen ∞^3, ∞^4, ... ∞^n beziehungsweise unendliche Gröſsen der 3., 4., ... n. Ordnung.

Obschon also bei dem unendl. Wachsen von u die Gröſsen u, u^n, a^u, $\log u$ u. s. w. durchweg Unendlich werden; so können sie dennoch von verschiedenen Ordnungen seyn, und selbst noch für $u = \infty$ eine Vergleichung unter einander gestatten.

§. **132.** Da eben so für die unendl. klein werdende Gröſse ω fortwährend $\omega : \omega^2 = 1 : \omega$ bleibt, so wird, wie ω gegen 1, so ω^2 gegen ω selbst wieder unendl. klein, und man nennt deſshalb auch ω^2 das unendlich Kleine der zweiten Ordnung, so wie aus gleichem Grunde ω^3, ω^4, ... ω^n unendlich kleine Gröſsen der 3., 4., ... n. Ordnung heiſsen.

Lehrsätze.

§. **133.** Aus den über das unendlich Groſse (§§. 129, 131) gegebenen Erklärungen folgen unmittelbar folgende Lehrsätze:

§. **134.** Eine unendlich werdende, oder kürzer, eine unendliche Gröſse wird nicht geändert, wenn man eine endliche Gröſse hinzuaddirt oder davon abzieht.

Denn es ist, wenn a eine endliche, u eine unendlich werdende Gröſse bezeichnet, offenbar $u + a = u$; indem ja schon in dem Begriffe des Unendlichwerdens von u, jede gedenkbare Zunahme liegt, also durch $u + a$ nichts ausgedrückt wird, was nicht schon u an und für sich bezeichnet. Ist aber $u + a = u$, so ist auch (beiderseits a abgezogen) $u = u - a$, also überhaupt: $u \pm a = u$, oder, auf die Grenzen übergehend: $\infty \pm a = \infty$.

§. **135**. Eine unendliche Gröſse höherer Ordnung wird durch Addition oder Subtraction einer unendl. Gröſse niederer Ordn. weder vermehrt noch vermindert.

Denn für $A = au^n$ und $B = bu^{n-m}$, wo also A (bei unendl. Zunahme von u) eine unendl. Gröſse von höherer Ordn. als B ist, hat man $A \pm B = u^{n-m}(au^m \pm b) = u^{n-m}.au^m$ (zufolge des vor. §.) $= au^n = A$, oder auch, auf die Grenzen übergehend: $a\infty^n \pm b\infty^{n-m} = a\infty^n$. (Offenbar ist der vorhergehende Satz in diesem hier mitbegriffen.)

§. **136**. Unendlich werdende continuirliche Gröſsen behalten das bei irgend einem endlichen Werth obwaltende geometr. Verhältniſs auch dann noch bei, wenn sich diese ihren Grenzen schon so weit man nur immer will genähert haben.

Denn für $A = nu$ und $B = mu$ hat man $A : B = nu : mu = n : m$, welches Verhältniſs selbst noch für $u = \infty$, wofür also A und B Unendl. werden, gilt.

§. **137**. Aus den Erklärungen (§§. 130, 132) über das unendl. Kleine ergeben sich gleichfalls folgende, mit den eben angeführten, analoge Lehrsätze:

§. **138**. Eine endliche Gröſse kann durch die Hinzufügung oder Wegnahme einer unendl. kl. Gröſse weder vermehrt noch vermindert werden.

Denn ist ω eine unendl. kl. werdende, oder kürzer, eine unendl. kl. Gröſse; so ist (§. 130) $\omega = \frac{a}{u}$, folglich

$$A \pm \omega = A \pm \frac{a}{u} = \frac{Au \pm a}{u} = \frac{Au}{u} = A,$$

weil (§. 134) die endliche Gröſse a gegen die unendliche Au verschwindet.

§. **139**. Eine unendl. kl. Gröſse niederer Ordnung wird durch die Addition oder Subtraction einer unendl. kl. Gröſse höherer Ordn. nicht geändert.

Denn für $A = a\omega^{n-m}$ und $B = b\omega^n$, wo also B unendl. kl. von höherer Ordn. als A ist, folgt mit Berücksichtigung des vorigen Satzes (§. 138): $A \pm B = \omega^{n-m}(a \pm b\,\omega^m) = \omega^{n-m}.a = a\,\omega^{n-m} = A$. (Man sieht, dafs eigentlich auch der vorige Satz im gegenwärtigen enthalten ist.)

§. 140. Unendlich klein werdende continuirliche Gröfsen behalten das geom. Verhältnifs, welches sie bei irgend einem endlichen Werthe gegen einander besitzen, selbst dann noch bei, wenn sie sich schon ihrer Grenze Null, so weit man nur immer will, genähert haben.

Denn setzt man $A = n\,\omega$ und $B = m\,\omega$, so findet fortwährend, obschon A und B mit ω unendl. klein werden, das Verhältnifs Statt: $A : B = n\omega : m\omega = n : m$.

§. 141. Zusatz. Mit Hilfe des unendl. Kleinen läfst sich nun auch von den continuirlichen Functionen (§. 106) folgende einfache Definition geben: die Function $f(x)$ ist innerhalb der Grenzen $x = a$ und $x = b$ stetig, wenn eine unendl. kleine Zu- oder Abnahme von x, dieses x zwischen a und b genommen, auch eine unendlich kleine Änderung in $f(x)$ hervorbringt. Liegt α zwischen a und b, so sagt man auch, die Function $f(x)$ sey, wie klein auch die Differenz $a - b$ oder $b - a$ seyn mag, in der Nähe von $x = \alpha$ stetig oder continuirlich.

So ist für $f(x) = x^n$: $f(x+\omega) = (x+\omega)^n = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1}\,\omega + \binom{n}{2} x^{n-2}\,\omega^2 + \ldots = x^n + P\omega$, wo P für alle endlichen Werthe von x (und natürlich n) eine endliche, also $P\omega$ eine unendlich kleine Gröfse, daher endlich die Änderung der Funct. $f(x+\omega) - f(x) = P\omega$ selbst unendl. klein, also x^n für alle endlichen Werthe der Variablen x eine continuirliche Funct. von x ist.

Viertes Capitel.

Theorie der höhern Gleichungen.

I.

Gleichungen mit einer Unbekannten.

Erklärungen.

§. **142**. Eine höhere Gleichung mit einer unbekannten Gröfse heifst geordnet, wenn sie auf die Form gebracht ist:

1) $x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1} x + A_n = 0.$

In dieser Gleich. des n. Grades, von der Unbekannten x, können die Buchstaben- oder Zahlencoefficienten A_1, $A_2, \ldots A_n$ reell oder imaginär, rational oder irrational, ganz oder gebrochen, positiv oder negativ und zum Theil (selbst alle von A_1 bis inclus. A_{n-1}) auch Null seyn; indefs setzen wir hier ein für alle Mal reelle, rationale Coefficienten voraus.

§. **143**. Der Kürze wegen werden wir diese allgem. Gleich. durch $X = 0$ darstellen, wobei X das Polynom der Gleich. heifst und sofort eine Function von x ist.

§. **144**. Jeder reelle oder imaginäre Ausdruck, welcher, für x gesetzt, der Gleich. Genüge leistet, also das Polynom X auf Null bringt, heifst Wurzel der Gleichung.

So ist z. B. für die Gleich. $4x^2 + 1 = 3x + 2x^3$, welche geordnet in $x^3 - 2x^2 + \frac{3}{2} x - \frac{1}{2} = 0$ übergeht, jeder der 3 Ausdrücke: 1, $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{-1})$ und $\frac{1}{2}(1 - \sqrt{-1})$ eine Wurzel, wovon man sich leicht überzeugen kann.

§. **145**. Lehrsatz. In jeder höhern Gleich. $X = 0$ ist das Polynom X für alle endlichen Werthe von x eine continuirliche Function von x.

Denn läſst man x um die willkürliche Gröſse ω zunehmen oder in $x + \omega$ übergehen, so geht X oder $f(x)$ über in

$$f(x+\omega) = (x+\omega)^n + A_1 (x+\omega)^{n-1} + A_2 (x+\omega)^{n-2} + \ldots + A_{n-1}(x+\omega) + A_n,$$

und wenn man (§. 120) entwickelt und Alles nach Potenzen von ω ordnet, erhält man:

$$a)\quad f(x+\omega) = X + X_1 \omega + X_2 \omega^2 + X_3 \omega^3 + \ldots + X_{n-1}\omega^{n-1} + X_n \omega^n,$$

wobei die auf einander folgenden Coefficienten X, $X_1 \ldots$ folgende Werthe haben:

$$X = x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1} x + A_n,$$

$$X_1 = \frac{n}{1} x^{n-1} + \frac{(n-1)}{1} A_1 x^{n-2} + \frac{(n-2)}{1} A_2 x^{n-3} + \ldots + A_{n-1},$$

$$X_2 = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} A_1 x^{n-3} + \ldots + A_{n-2},$$

$$X_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{n-3} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} A_1 x^{n-4} + \ldots + A_{n-3},$$

. . . .

$$X_{n-1} = \frac{n(n-1)\ldots 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \ldots (n-1)} x + A_1 = nx + A_1,$$

$$X_n = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)\, n} = 1.$$

Da nun X nichts anders als $f(x)$ ist, so folgt:

$$f(x+\omega) - f(x) = \omega(X_1 + X_2 \omega + \ldots + X_n \omega^{n-1}),$$

und es ist, wenn ω eine unendl. kleine Gröſse bezeichnet, für alle endliche Werthe von x, wofür, wie man sieht, auch X, X_1, $X_2, \ldots X_n$ endliche Gröſsen sind, diese Differenz oder Änderung der Funct. $f(x)$ unendlich klein, mithin diese Funct. $f(x) = X$ (§. 141) innerhalb dieser Grenzen in der That continuirlich.

Anmerk. Da die obige Entwickelung $a)$ in der Folge häufig angewendet wird, so machen wir darauf aufmerksam, daſs sie immer leicht hingeschrieben werden kann, wenn man nur die ganz einfachen Bildungsgesetze der Coeffic. X, X_1, $X_2, \ldots$ berücksichtiget; diese sind nämlich folgende: X ist das gegebene Polynom der Gleich. selbst. X_1 wird aus X gebildet oder abgeleitet, indem man in jedem Gliede den Exponenten von x zum Coefficienten macht und den Expon. selbst um eine Einheit vermindert. Genau auf dieselbe Art wird X_2 aus X_1, X_3 aus X_2 u. s. w., X_n aus X_{n-1} abgeleitet oder derivirt, nur dafs man noch alle Glieder in X_1 durch 1, in X_2 durch 1.2 u. s. w., in X_n durch $1.2.3\ldots n$ dividiren mufs. Aus diesem Grunde heifsen die Polynome $X_1, X_2, \ldots X_n$, der Reihe nach, das $1., 2., \ldots n.$ abgeleitete Polynom, und man erhält, was als Rechnungsprobe dienen kann, für das letzte Polynom X_n immer den 1. Coefficienten des Polynoms X der gegeb. Gleich. (also A_0, wenn $X = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots$ ist).

§. **146.** Lehrsatz. Ist, vom Zeichen abgesehen, A_m der gröfste Coefficient des Polynoms X; so wird für $x \overline{\overline{>}} A_m + 1$ das 1. Glied x^n desselben gröfser, als die Summe aller übrigen Glieder.

Denn setzt man Kürze halber $A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_n = P$, so ist offenbar $A_m x^{n-1} + A_m x^{n-2} + A_m x^{n-3} + \ldots + A_m$, d.i. 1) $A_m\left(\frac{x^n - 1}{x - 1}\right) > P$. Setzt man nun $x \overline{\overline{>}} A_m + 1$, so folgt $x - 1 \overline{\overline{>}} A_m$ oder $(x-1)x^n \overline{\overline{>}} A_m x^n$, und wenn man davon die Relat. $0 < A_m$ abzieht, für beide Fälle:

$$(x-1)x^n > A_m x^n - A_m \text{ oder } x^n > A_m\left(\frac{x^n - 1}{x - 1}\right).$$

Diese Relation, mit der vorigen 1) verglichen, gibt um so mehr: $x^n > P$, d. i. $x^n > A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_n$, was zu beweisen war.

So wird z. B. in $x^3 + 2x^2 + 4x + 3 = 0$, für $x = 4 + 1 = 5$, das 1. Glied $x^3 = 125$ gröfser, als die Summe der übrigen Glieder: $50 + 20 + 3 = 73$. In vielen Fällen (besonders wenn auch negative Glieder vorkommen) reichen sogar kleinere Zahlen, wie namentlich hier die Zahl 4, zu diesem Zwecke hin.

§. **147.** Folgerung. Aus diesem Satze folgt unmittelbar folgender: Es lassen sich in der endlichen oder unendl. Reihe $y^m + A_1 y^{m+1} + A_2 y^{m+2} + \ldots$ für y so kleine Werthe angeben, dafs dadurch das 1. Glied y^m gröfser als die Summe aller folgenden ausfällt.

Denn setzt man in dem obigen Polynom X (vor. §.) $x = \frac{1}{y}$, so hat man für $\frac{1}{y} \overline{\gtrless} A_m + 1$ sofort:

$$\frac{1}{y^n} > A_1 \frac{1}{y^{n-1}} + A_2 \frac{1}{y^{n-2}} + \ldots + A_{n-1} \frac{1}{y} + A_n,$$

d. i. für $y \overline{\lessgtr} \frac{1}{A_m + 1}$ sofort: $1 > A_1 y + A_2 y^2 + \ldots + A_n y^n$, oder, wenn man mit y^m multiplicirt, bei diesen angegebenen Werthen von y, auch:

$$y^m > A_1 y^{m+1} + A_2 y^{m+2} + \ldots + A_n y^{m+n},$$

wobei auch offenbar $n = \infty$ seyn kann.

§. **148.** Lehrsatz. Erhält man aus dem Polynome X der Gleich. $X = 0$, für die 2 auf einander folgenden Substitutionen $x = a$ und $x = b$, Resultate mit verschiedenen Zeichen; so liegt zwischen a und b wenigstens eine (je nach Beschaffenheit von a und b reelle oder imaginäre) Wurzel dieser Gleichung.

Denn da $X = f(x)$ (§. 145) eine continuirliche Funct. von x ist, so mufs $f(x)$ bei dem Übergange von $f(a)$ in $f(b)$, d. i. vom Positiven ins Negative, oder umgekehrt, nothwendig (da hier $f(x)$ nicht Unendlich werden kann) durch Null gehen, so, dafs es also einen zwischen a und b liegenden Werth α geben mufs, wofür $f(\alpha) = 0$ wird; dann ist aber (§. 144) $x = \alpha$ eine Wurzel der Gleichung $f(x) = X = 0$.

§. **149.** Zusatz 1. Da bei dieser Voraussetzung (dafs $f(a)$ und $f(b)$ verschiedene Zeichen besitzen) $f(x)$ bei dem Übergange von $f(a)$ in $f(b)$, oder umgekehrt, im Allgemeinen 3, 5, ... $2m + 1$ Mal durch Null gehen kann, so kann auch überhaupt zwischen a und b eine ungerade Anzahl von Wurzeln der Gleich. $X = 0$ liegen.

§. **150.** Zusatz 2. Man sieht ferner leicht, dafs, wenn $f(a)$ und $f(b)$ einerlei Zeichen besitzen, zwischen a und b sofort 0, 2, 4, ... $2m$, d. i. überhaupt eine gerade Anzahl von Wurzeln, die Null mit gerechnet (also auch gar keine), liegen könne.

§. **151.** Lehrsatz. Jede Gleichung von einem ungeraden Grad hat wenigstens eine reelle Wurzel, ihr Zeichen ist das entgegengesetzte von jenem des letzten Gliedes A_n.

Denn setzt man als 1. Substitution $x = 0$, so fallen in X alle Glieder bis auf das letzte A_n weg, und man hat je nach dem Zeichen desselben für X ein positives oder negatives Resultat. Setzt man ferner als 2. Substitution, je nachdem A_n posit. oder negat. ist, $x = \mp (A_m + 1)$, so erhält (§. 146) X das Zeichen des 1. Gliedes x^n, wird also negativ oder positiv, und es liegt daher (§. 148) im erstern Falle zwischen 0 und $-(A_m+1)$, im letztern Falle zwischen 0 und $+(A_m+1)$, wenigstens eine reelle Wurzel, und diese ist beziehungsweise negativ oder positiv.

§. **152.** Lehrsatz. Jede Gleichung von einem geraden Grad, deren letztes Glied negativ ist, hat wenigstens zwei reelle Wurzeln, davon ist eine positiv, die andere negativ.

Denn setzt man wieder als 1. Substitution $x = 0$, so wird X (gleich dem letzten Glied) negativ; setzt man dann als 2. Substitution $x = \pm (A_m + 1)$, so wird in beiden Fällen X positiv: es liegt also (§. 148) eine W. zwischen 0 und $+(A_m + 1)$, die sonach reell und positiv, und eine W. zwischen 0 und $-(A_m+1)$, welche sofort reell und negativ ist.

§. **153.** Lehrsatz. Jede Gleichung von einem geraden Grad, deren letztes Glied positiv ist, hat wenigstens eine in dem Ausdruck $p + q\sqrt{-1}$, wobei p und q reelle Gröfsen (die theilweise auch Null seyn können) bezeichnen, enthaltene Wurzel.

Denn sey $a)$ $x^{2m} + A_1 x^{2m-1} + \ldots + A_{2m-1} x + A_{2m} = 0$ eine Gleich. von gerader Ordnung und ihr letztes Glied A_{2m} positiv. Setzt man in dieser $k)$ $x = y + \gamma$, so erhält man, wie leicht zu finden, eine Gleich. von der Form $b)\ y^{2m} + T_1 y^{2m-1} + \ldots + T_{2m-1} y + T_{2m} = 0$, wobei, was den letzten Coeffic. betrifft, $l)\ T_{2m} = \gamma^{2m} + A_1 \gamma^{2m-1} + \ldots + A_{2m-1}\gamma + A_{2m}$ ist.

Verwandelt man ferner die Gleich. $b)$ in eine andere $Z = 0$, deren Wurzeln $m)\ z = \pm y$ sind; so erhält man $c)\ z^{4m} + B_1 z^{4m-2} + \ldots + B_{2m-1} z^2 + B_{2m} = 0$, wobei $n)\ B_{2m} = T^2_{2m}$ ist *), oder, wenn man, um abzukürzen, $p)\ z^2 = \omega$ setzt, die Gleichung:

$$\text{I.}\quad \omega^{2m} + B_1 \omega^{2m-1} + \ldots + B_{2m-1}\omega + B_{2m} = 0.$$

Läſst man nun n nur ungerade Zahlen bedeuten, so wird die obige Gleich. $a)$ der Stellvertreter aller Gleich. von gerader Ordnung seyn, wenn man $m = 2^{r-1} n$, wo r, von 1 angefangen, jede ganze positive Zahl bezeichnet, setzt; weil dadurch der Ordnungsexponent $2m = 2^r n$ wird, und in diesem Ausdrucke alle geraden Zahlen enthalten sind. — Dieſs, so wie auch noch als bekannt vorausgesetzt, daſs sich $\sqrt[4]{-1}$, $\sqrt[8]{-1}$, $\sqrt[16]{-1} \ldots \sqrt[2^r]{-1}$ immer auf die Form $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, wo α und β reelle Gröſsen sind, reduciren lasse, und daſs auch unter derselben Form jede Potenz des Binoms $A + B\sqrt{-1}$ erscheint, setze man $m = 2^{r-1} n$ und die willkürliche Gröſse $q)\ \gamma = v\sqrt[2^r]{-1} = v(\alpha + \beta\sqrt{-1})$; so erhält man aus der Relation $l)$:

$$T_{2m} = (v\sqrt[2^r]{-1})^{2^r n} + A_1 [v(\alpha + \beta\sqrt{-1})]^{2m-1} + \ldots$$
$$+ A_{2m-1} v(\alpha + \beta\sqrt{-1}) + A_{2m},$$

oder, wenn man (mit Rücksicht auf die vorige Bemerk.) entwickelt und gleich die Zeichen ändert:

$$- T_{2m} = v^{2m}$$
$$- A_1 v^{2m-1}(A + B\sqrt{-1}) - A_2 v^{2m-2}(A' + B'\sqrt{-1}) - \ldots$$
$$- A_{2m-1} v(\alpha + \beta\sqrt{-1}) - A_{2m},\quad \text{d. i.}$$

---

*) Man erhält diese Gleich. $c)$ ganz einfach durch die Multiplication der beiden Gleich. $z^{2m} + T_1 z^{2m-1} + \ldots + T_{2m} = 0$ und $z^{2m} - T_1 z^{2m-1} + - \ldots + T_{2m} = 0$, von denen die erstere die Wurzeln $z = +y$ und die letztere jene $z = -y$ besitzt.

$-T_{2m} = v^{2m} + \mathfrak{A}_1 v^{2m-1} + \ldots + \mathfrak{A}_{2m-1} v - A_{2m}$
$+ (\mathfrak{B}_1 v^{2m-1} + \mathfrak{B}_2 v^{2m-2} + \ldots + \mathfrak{B}_{2m-1} v) \sqrt{-1}$,
wobei die Coefficienten $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2 \ldots$ durchaus reell sind. Da es endlich immer reelle Werthe für v gibt, wofür der reelle Theil im zweiten Theile dieser Gleichung verschwindet, indem diese nur aus der Gleichung $v^{2m} + \mathfrak{A}_1 v^{2m-1} + \ldots + \mathfrak{A}_{2m-1} v - A_{2m} = 0$, welche (vorigen §.) wenigstens 2 reelle W. besitzt, bestimmt werden dürfen; so erhält für diese Werthe T_{2m} die Form $Q\sqrt{-1}$, wo Q eine reelle Gröſse bezeichnet. Dafür wird aber [Relat. n)] das letzte Glied $\mathfrak{B}_{2m} = T^2_{2m} = (Q\sqrt{-1})^2 = -Q^2$ der Gleich. I. wesentlich negativ, folglich besitzt diese für die nämlichen erwähnten Werthe von v wenigstens 2 reelle W. ω, wovon (vorigen §.) die eine positiv ist.

Da es also schlieſslich [Relat. p)] für $\omega = z^2$ immer wenigstens einen reellen, positiven Werth gibt; so ist auch dafür $z = \sqrt{\omega} = \omega'$ eine reelle Gröſse, und wegen $y = \pm z$ und $x = y + \gamma = y + v(\alpha + \beta\sqrt{-1})$ [Relationen m), k), q)] der Form nach: $x = p + q\sqrt{-1}$, wobei auch p und q reelle Gröſsen sind; d. h. nämlich, die obige Gleich. a) besitzt wenigstens eine in der Form $p + q\sqrt{-1}$ enthaltene Wurzel *).

§. **154.** Zusatz. Faſst man das in den 3 letzten §. Gesagte zusammen, so folgt, daſs jeder höhern Gleichung ohne Ausnahme wenigstens eine Wurzel, diese mag nun reell oder imaginär seyn, entsprechen muſs.

§. **155.** Lehrsatz. Ist $x = \omega$ eine Wurzel der Gleichung $X = 0$, so ist das Polynom X durch $x - \omega$ theilbar.

Denn ist ω eine W. der Gleich. $X = 0$, so findet (§. 144) die Gleichung Statt: $\omega^n + A_1 \omega^{n-1} + A_2 \omega^{n-2} + \ldots + A_{n-1}\omega + A_n = 0$; bestimmt man also aus dieser Gleich.

*) Diesen neuern Beweis hat der Verfasser zuerst in den Jahrbüchern des k. k. polyt. Institutes, Bd. XIX., bekannt gemacht.

A_n und setzt dessen Werth in das Polynom X, so erhält die Gleichung $X = 0$ die Form:

$$(x^n - \omega^n) + A_1(x^{n-1} - \omega^{n-1}) + \ldots + A_{n-2}(x^2 - \omega^2)$$
$$+ A_{n-1}(x - \omega) = 0,$$

unter welcher die Richtigkeit unseres Satzes unmittelbar erkannt wird*).

§. **156.** Zusatz. Theilt man wirklich, so erhält man, Alles wieder nach x geordnet:

$$x^{n-1} + B_1 x^{n-2} + B_2 x^{n-3} + \ldots + B_{n-2} x + B_{n-1} = 0,$$

dabei ist, wie man leicht findet: $B_1 = A_1 + \omega$, $B_2 = A_2 + A_1\omega + \omega^2$, $B_3 = A_3 + A_2\omega + A_1\omega^2 + \omega^3$, ... $B_{n-1} = A_{n-1} + A_{n-2}\omega + \ldots + \omega^{n-1}$. Es ist also, um es wiederholt zu bemerken:

$$X = (x - \omega)(x^{n-1} + B_1 x^{n-2} + B_2 x^{n-3} + \ldots + B_{n-1}) = 0.$$

§. **157.** Lehrsatz. Jede Gleichung des n. Grades hat n Wurzeln, und zwar weder mehr noch weniger.

Denn ist ω_1 jene Wurzel, die der Gleichung $X = 0$ §. 154) nothwendig zukommt, so hat man (vorig. §.)

$$X = (x - \omega_1)(x^{n-1} + B_1 x^{n-2} + \ldots + B_{n-1}) = 0.$$

Diese Gleich. wird aber nicht blofs für $x - \omega_1 = 0$, woraus eben die genannte W. $x = \omega_1$ folgt, sondern auch für $X' = x^{n-1} + B_1 x^{n-2} + \ldots + B_{n-1} = 0$ befriediget. Ist daher wieder ω_2 die W., welche dieser letztern Gleich. nothwendiger Weise zukömmt; so hat man eben so:

$$X' = (x - \omega_2)(x^{n-2} + C_1 x^{n-3} + \ldots + C_{n-2}) = 0,$$

eine Gleich., welcher auf doppelte Weise, ein Mal für $x - \omega_2 = 0$ (woraus eben $x = \omega_2$ folgt) und dann auch für

---

*) Scharfsinniger noch ist folgender Beweis: theilt man X durch $x - \omega$ und die Division geht nicht auf, so wird der Quotient X' eine ähnliche Funct. von x wie X seyn, dagegen der Rest R, nach der Natur der Division, kein x mehr enthalten, und man hat $X = (x - \omega)X' + R$. Setzt man nun $x = \omega$, so wird, da ω eine W. ist, $X = 0$, und man erhält daher $0 = 0 + R$, d. i $R = 0$, und zwar, da R von x unabhängig ist, nicht blofs für $x = \omega$, sondern überhaupt für jeden Werth von x.

$X'' = x^{n-2} + C_1 x^{n-3} + \ldots + C_{n-2} = 0$ Genüge geleistet wird. Bezeichnet man deſshalb die W., welche diese letztere Gleich. haben muſs, durch ω_3; so ist eben so

$$X'' = (x - \omega_3)(x^{n-3} + D_1 x^{n-4} + \ldots + D_{n-3}) = 0.$$

Werden diese Schlüsse fortgesetzt, so erhält man, da zuletzt statt dem Polynom nur noch ein Binom als Quotient entsteht: $X^{(n-2)'} = (x - \omega_{n-1})(x + Q) = 0$, so, daſs aus $x + Q = 0$ sofort die letzte W. $x = -Q = \omega_n$ hervorgeht. Man hat daher endlich durch die stufenweise Substitution:

$$X = (x - \omega_1) X' = (x - \omega_1)(x - \omega_2) X''$$
$$= (x - \omega_1)(x - \omega_2)(x - \omega_3) X'''$$

u. s. w., und zuletzt:

$$\gamma) \quad X = (x - \omega_1)(x - \omega_2)(x - \omega_3) \ldots (x - \omega_n) = 0,$$

aus welcher Darstellung nun auch unmittelbar folgt, daſs erstlich jede der n Gröſsen $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$, statt x gesetzt, die Gleich. $X = 0$ befriediget, also eine W. derselben ist, und ferner, daſs es auſser diesen keine andere W. mehr geben könne.

§. **158.** Zusatz. Sind also $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots \omega_n$ die n Wurzeln der Gleich. $X = 0$; so läſst sich das Polynom derselben durch $X = (x - \omega_1)(x - \omega_2)(x - \omega_3) \ldots (x - \omega_n)$ darstellen*), also in n einfache Factoren von der Form $x + p$, oder, wenn man will (für den Fall, daſs p ein Bruch wäre), $a + bx$ zerlegen. Ist n gerade, und nimmt man immer 2 einfache Factoren zusammen, so entstehen $\frac{n}{2}$ quadratische Factoren von der Form $a + bx + cx^2$; für n ungerade hingegen erhält man $\frac{n-1}{2}$ quadratische und einen einfachen Factor.

So hat z. B. die Gleich. $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$ die W. $x = +1, -1, +2, -3$; also ist:

$$x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = (x-1)(x+1)(x-2)(x+3)$$
$$= (x^2 - 1)(x^2 + x - 6) = (x^2 - 3x + 2)(x^2 + 4x + 3) \text{ u. s. w.}$$

*) Nach dieser Darstellung ist es ebenfalls leicht die Sätze in §§. 148 — 150 zu erweisen.

Um das Polynom $12x^3+16x^2-3x-4$ in Factoren zu zerlegen, bildet man die (sogleich geordnete) Gleichung

$$x^3+\tfrac{4}{3}x^2-\tfrac{1}{4}x-\tfrac{1}{3}=0,$$

und da die W. dieser Gleich. sind: $x=\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{4}{3}$; so folgt $x^3+\frac{4}{3}x^2-\frac{1}{4}x-\frac{1}{3}=(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})(x+\frac{4}{3})$, oder, wenn man die Brüche wegschafft:

$$12x^3+16x^2-3x-4=(2x-1)(2x+1)(3x+4).$$

§. 159. Lehrsatz. Ist $p+q\sqrt{-1}$ eine Wurzel der Gleich. $X=0$, so muſs auch der conjugirte Werth $p-q\sqrt{-1}$ eine W. dieser Gleich. seyn.

Denn setzt man in $X=x^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_n$, $x=p+q\sqrt{-1}$; so erhält man, nachdem sowohl die reellen, als auch imaginären Theile für sich zusammen genommen worden, einen Ausdruck von der Form $P+Q\sqrt{-1}$, wo P nur gerade und Q nur ungerade Potenzen von q enthält. Setzt man ferner im Polynome X, $x=p-q\sqrt{-1}$; so ändert sich durchaus nichts, als, da man nur $-q$ statt $+q$ zu setzen hat, das Zeichen von Q, und man erhält als Resultat dieser Substit.: $P-Q\sqrt{-1}$. Ist nun $p+q\sqrt{-1}$ eine Wurzel der Gleichung $X=0$, so hat man (§. 144) $P+Q\sqrt{-1}=0$, d i. (indem diese Relat. nicht anders bestehen kann) $P=0$ und $Q\sqrt{-1}=0$, woraus durch Subtraction auch $P-Q\sqrt{-1}=0$ folgt: es bringt also auch die 2. Substitution, nämlich $x=p-q\sqrt{-1}$, das Polynom X auf Null, folglich ist auch dieser Werth von x eine Wurzel der Gleichung $X=0$.

§. 160. Zusatz 1. Da also die imaginären Wurzeln einer Gleich. immer paarweise und conjugirt vorkommen, so entspringen aus jedem Paar die einfachen Factoren $x-p-q\sqrt{-1}$ und $x-p+q\sqrt{-1}$, welche zusammen den quadratischen Factor $(x-p)^2+q^2$ geben; es kann demnach das Polynom einer jeden höhern Gleich. in lauter reelle quadratische Factoren von der Form x^2+ax+b aufgelöst werden, wozu für eine Gleich. von ungeradem Grade, noch ein, ebenfalls reeller, einfacher Factor kommt.

§. **161.** Zusatz 2. Da ferner die quadrat. Factoren, also auch ihr Product, wesentlich positiv ist; so kann das Polynom einer höhern Gleich. von lauter imaginären W. für gar keinen reellen Werth von x negativ werden.

§. **162.** Eigenschaften der Coefficienten. Verrichtet man in γ) §. 157 die Multiplication mit den n Binomial-Factoren und ordnet das Ganze nach fallenden Potenzen von x, so erhält man:

δ) $X = x^n - C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} - C_3 x^{n-3} + \ldots + (-1)^n C_n$,

wobei die Coefficienten C_1, C_2, ... nachstehende Werthe haben: $C_1 = \omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_n$, $C_2 = \omega_1 \omega_2 + \omega_1 \omega_3 + \ldots + \omega_1 \omega_n + \omega_2 \omega_3 + \ldots + \omega_2 \omega_n +$ etc. $+ \omega_{n-1} \omega_n$, $C_3 = \omega_1 \omega_2 \omega_3 +$ etc. $+ \omega_{n-2} \omega_{n-1} \omega_n$ u. s. w., $C_n = \omega_1 \omega_2 \omega_3 \ldots \omega_{n-1} \omega_n$, so, daſs also C_1 die Summe der Wurzeln oder die Summe ihrer Combinationen zu 1, C_2 die Summe ihrer Combin. zu 2 u. s. w., C_n die Summe ihrer Combin. zu n, d. i. ihr Product, bezeichnet.

§. **163.** Zusatz. Fehlt also in einer höhern Gleich. das 2. Glied, so muſs die Summe der positiven W. jener der negativen W. gleich seyn. Fehlt das letzte Glied (A_n), so muſs wenigstens eine ihrer Wurzeln gleich Null seyn.

Anmerk. Sind die sämmtlichen Wurzeln einer Gleich. $X = 0$ negativ, so besitzt das Polynom $X = (x + \omega_1)(x + \omega_2) \ldots (x + \omega_n)$ nur positive Coefficienten.

§. **164.** Lehrsatz. Ändert man in der Gleichung $X = 0$ die Zeichen des 2., 4., ... d. i. jedes in gerader Stelle stehenden Gliedes; so verwandelt man dadurch die Gleich. in eine andere, welche die nämlichen Wurzeln, aber mit entgegengesetzten Zeichen besitzt.

Denn setzt man, um die Zeichen der Wurzeln zu ändern, in $X = 0$, statt x, $-x$; so erhält man, für n gerad: $x^n - A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} - \ldots + A_n = 0$, und für n ungerad: $-x^n + A_1 x^{n-1} - \ldots + A_n = 0$, oder, wenn man durchaus die Zeichen ändert, wieder wie zuvor: $x^n - A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} - \ldots - A_n = 0$. Diese Gleich. hat also die W. $-\alpha$, $-\beta$, $+\gamma$ etc., wenn die ursprüngliche $X=0$ die W. $+\alpha$, $+\beta$, $-\gamma$ u. s. w. besitzt.

So hat z. B. die Gleich. $x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$ die W. $+1$, -2, -3, während jene $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$ die W. -1, $+2$, $+3$ besitzt.

Anmerk. 1. Mit Rücksicht auf die Gleich. δ) (§. 162), in welcher die W. positiv angenommen sind, folgt also, daſs eine Gleich. $X=0$, in welcher das Polynom lauter positive Coefficienten besitzt, nur negative W. haben könne. (Vergleiche auch die vorige Anmerk.)

Anmerk. 2. Wir werden die Gleich. mit entgegengesetzten W. (wie man sich Kürze halber auszudrücken pflegt) kurz durch $\underline{X} = 0$ bezeichnen.

§. **165.** Erkl. Je nachdem zwei auf einander folgende Glieder des Polynoms X gleiche, oder verschiedene Zeichen besitzen, sagt man, daſs diese beiden Glieder eine Zeichenfolge (Permanenz) oder einen Zeichenwechsel (Variation) bilden.

Hieraus folgt, daſs, wenn in einer Gleich. des n. Grades kein Glied fehlt, die Summe aus der Anzahl der Zeichenfolgen und Zeichenwechsel gleich n ist.

So enthält z. B. die Gleich. $x^5 - 2x^4 - 3x^3 + x^2 - 4x - 5 = 0$ 3 Zeichenwechsel und 2 Zeichenfolgen.

§. **166.** Lehrsatz. Eine Gleich. $X=0$ kann nicht mehr reelle positive W. besitzen, als in X, und nicht mehr negative W. haben, als in $\underline{X} = 0$ (§. 164) Zeichenwechsel vorkommen.

Denn stellt man das Polynom X' einer Gleich. des m. Grades durch $X' = x^m + + \ldots - A_p x^p - - \ldots + A_q x^q + +$ etc. $- A_u x^u - - \ldots - A_m$ dar, wobei, ohne Rücksicht auf die etwa fehlenden Glieder, $A_p x^p$ das erste vorkommende negative, $A_q x^q$ das hierauf zuerst folgende positive Glied u. s. w., endlich $A_u x^u$ dasjenige Glied bezeichnet, in welchem der letzte Zeichenwechsel Statt findet, und daher mit dem letzten Gliede A_m, welches wir, um die Ideen zu fixiren, als negativ voraussetzen, einerlei Zeichen besitzt, also hier ebenfalls negativ ist, und diesem sonach unmittelbar ein positives Glied vorausgeht; so erhält man, wenn X' mit dem Binom $x - \omega$, wo ω positiv seyn soll, multiplicirt wird:

$$X'(x-\omega) = x^{m+1} \left.\begin{matrix} + + \ldots - A_p \\ - - \ldots - \alpha\omega \end{matrix}\right\} x^{p+1} \left.\begin{matrix} - - \ldots + A_q \\ + + \ldots + \beta\omega \end{matrix}\right\} x^{q+1}$$
$$\left.\begin{matrix} + + \ldots - A_u \\ \mp \mp \ldots - \varepsilon\omega \end{matrix}\right\} x^{u+1} \left.\begin{matrix} - - \ldots - A_m \\ + + \ldots + \upsilon\omega \end{matrix}\right\} x + \mu\omega,$$

so, daſs dieses Product die Form hat:

$$x^{m+1} \ldots - A'_p x^{p+1} \ldots + A'_q x^{q+1} \ldots - A'_u x^{u+1} \ldots + \mu\omega.$$

Obschon nun in diesem Producte die Zeichen der Zwischenglieder unbekannt sind, so ist doch so viel gewiſs, daſs vom 1. Glied x^{m+1} bis zu jenem $A'_p x^{p+1}$ wenigstens ein, bis zu jenem $A'_q x^{q+1}$ wenigstens zwei u. s. w., also bis zu jenem $A'_u x^{u+1}$ wenigstens eben so viele Zeichenwechsel, wie im ursprünglichen Polynom X' von x^m bis zu dem nämlichen oder correspondirenden Gliede $A_u x^u$ Statt finden. Da aber von da an in X' kein Zeichenwechsel mehr, dagegen im Producte wenigstens noch ein solcher (durch das letzte Glied $+\mu\omega$ begründet) vorkommt; so besitzt das Product $X'(x-\omega)$ wenigstens einen Zeichenwechsel mehr, als X' *).

Stellt nun X' das Product aller einfachen Factoren dar, welche aus den negativen und imaginären Wurzeln unserer Gleich. $X = 0$ entspringen (also $X' = 1$ ist, wenn keine solche W. vorhanden sind), und bezeichnen ω_1, ω_2, . . . die positiven Wurzeln derselben; so hat man $X = X'(x-\omega_1)(x-\omega_2)\ldots$, und es gibt sonach in $X'(x-\omega_1)$ wenigstens einen, in $X'(x-\omega_1)(x-\omega_2)$ wenigstens zwei u. s. w. Zeichenwechsel mehr, als in X'. Selbst also, wenn in X' gar kein Zeichenwechsel vorkommt, besitzt das Polynom X dennoch wenigstens eben so viele Zeichenwech-

*) Der Beweis ist der nämliche, wenn man das letzte Glied A_m, also auch damit $A_u x^u$ positiv, mithin das diesem Gliede vorausgehende als negativ annimmt.

sel, als in der Gleich. $X=0$ positive W. $\omega_1, \omega_2, \ldots$ vorhanden sind.

Verwandelt man ferner (§. 164) die Gleich. $X=0$ in jene mit entgegengesetzten W. $\underline{X}=0$, so erscheinen die negativen W. der erstern, als positive W. der letztern Gleich., und diese muſs daher wenigstens r Zeichenwechsel darbieten, wenn die Gleich. $X=0$ r negative Wurzeln besitzt.

Da also jede positive W. der Gleich. $X=0$ wenigstens einen Zeichenwechsel in X, und jede negative W. einen solchen Wechsel in $\underline{X}$ begründet; so kann man auch sagen, daſs in $X=0$ nicht mehr positive und negative reelle W. vorhanden seyn können, als beziehungsweise in X und $\underline{X}$ Zeichenwechsel Statt finden.

§. 167. Zusatz. Fehlt aber in einer Gleichung kein Glied, so kann diese nicht mehr positive W. als Zeichenwechsel, und nicht mehr negative reelle Wurzeln haben, als Zeichenfolgen vorhanden sind. Sind dabei die sämmtlichen Wurzeln reell, so bietet das Polynom genau so viele Zeichenwechsel und Folgen dar, als die Gleich. beziehungsweise positive und negative W. besitzt.

Die oben (§. 164) angeführte Gleich. $x^3-4x^2+x+6=0$ besitzt 2 positive und 1 negative W.; es enthält aber auch in der That das Polynom derselben 2 Zeichenwechsel und 1 Folge. So besitzt das Polynom der Gleich. $X=x^4-11x^2+18x-8=0$, deren W. sofort 1, 1, 2, -4 sind, 3, und jenes der Gleich. $\underline{X}=x^4-11x^2-18x-8=0$ 1 Zeichenwechsel; es hat aber auch in der That diese Gleich. 3 positive und 1 negative W.

Transformation der Gleichungen.

§. 168. Aufgabe. Eine gegebene Gleichung $X=0$ in eine andere $Y=0$ zu verwandeln, in welcher die Wurzeln um a kleiner als in der ursprünglichen sind.

Aufl. Bezeichnet man die Unbekannte oder das Symbol aller W. der transformirten Gl. durch y, so soll $y=x-a$ oder $x=a+y$ seyn. Dieser Werth für x in $X=0$ substituirt, gibt für die transformirte Gleichung:

$$Y = y^n + T_1 y^{n-1} + T_2 y^{n-2} + \ldots + T_{n-1} y + T_n = 0,$$

wobei, wie man am einfachsten aus der Entwickl. in §. 145 für $x = a$ und $\omega = y$ findet:

$$T_n = a^n + A_1 a^{n-1} + A_2 a^{n-2} + \ldots + A_{n-1} a + A_n,$$

$$T_{n-1} = n a^{n-1} + (n-1) A_1 a^{n-2} + \ldots + A_{n-1} \text{ etc.},$$

$$T_2 = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^2 + (n-1) A_1 a + A_2 \text{ und } T_1 = na + A_1 \text{ ist.}$$

§. **169.** Aufgabe. Aus einer Gleichung das zweite Glied wegzuschaffen.

Aufl. Transformirt man die gegebene Gleich. $X = 0$ nach dem vorigen §. in jene $Y = 0$, so soll in dieser Gleich. sofort T_1, d. i. $na + A_1 = 0$ seyn; aus dieser Bedingungs-gleich. folgt aber $a = -\frac{A_1}{n}$, also $x = y - \frac{A_1}{n}$, und daraus ganz einfach die Regel zur Wegschaffung des 2. Gliedes der Gleich. $X = 0$.

So muſs man also, um aus der Gleichung $x^4 - 8x^3 + 2x^2 + 6x - 5 = 0$ das 2. Glied wegzuschaffen,

$$x = y - \left(\frac{-8}{4}\right) = y + 2$$

setzen, wodurch man die Gleichung $y^4 - 22y^2 - 50y - 33 = 0$ erhält.

§. **170.** Aufgabe. Eine Gleichung in eine andere zu verwandeln, deren Wurzeln m Mal so groſs sind als die W. der gegebenen Gleichung.

Aufl. Ist $X = 0$ die gegebene, $Y = 0$ die transformirte Gleich.; so soll $y = mx$ oder $x = \frac{y}{m}$ seyn. Diesen Werth in X substituirt, erhält man, wenn auch gleich zur Wegschaffung der Brüche durchaus mit m^n multiplicirt wird:

$$y^n + mA_1 y^{n-1} + m^2 A_2 y^{n-2} + \ldots$$
$$+ m^{n-1} A_{n-1} y + m^n A_n = 0,$$

ein Resultat, welches man auch kürzer erhält, indem man unter die Glieder von X (die etwa fehlenden durch Nullen ergänzt) die geometrische Reihe $1, m, m^2, \ldots m^n$ setzt, je zwei über einander stehende Glieder mit einander multiplicirt, und überall y statt x schreibt.

Um z. B. die Gleich. $x^3 + x^2 - 10x + 8 = 0$ in eine andere mit 3 Mal so grofsen W. zu verwandeln, hat man nach diesem Verfahren: $y^3 + 3.y^2 - 9.10y + 27.8 = 0$, d. i. $y^3 + 3y^2 - 90y + 216 = 0$; es sind in der That die W. der gegebenen Gleich. $= 1, 2, -4$, während die letztere die W. 3, 6, -12 besitzt.

§. 171. Aufgabe. Aus einer gegebenen Gleichung, ohne dafs sie (§. 142) aufhört geordnet zu seyn, die Brüche wegzuschaffen.

Aufl. Seyen, um die Ideen festzusetzen, aus der Gleich. $x^3 + \frac{a}{p}x^2 + \frac{b}{q}x + \frac{c}{r} = 0$ die Brüche wegzubringen. Transformirt man nach dem vorigen §. diese Gleich. in eine andere, deren W. m Mal so grofs sind, so hat man:

$$y^3 + \frac{ma}{p}y^2 + \frac{m^2 b}{q}y + \frac{m^3 c}{r} = 0.$$

Nimmt man nun für die hier als unbestimmt anzusehende Gröfse m den kleinsten Werth, für welchen p, q, r beziehungsweise in m, m^2, m^3 (da man die Brüche $\frac{a}{p}$, $\frac{b}{q}$, . . als zur kleinsten Benennung gebracht voraussetzt) enthalten sind, was in jedem Falle, öfter aber auch durch kleinere Zahlen, erreicht wird, wenn man für m das kleinste gem. Vielfache von p, q, r nimmt; so ist die Aufgabe mit den möglich kleinsten Zahlen aufgelöst.

Um z. B. aus der Gleich. $x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{3}{8} = 0$ die Brüche wegzuschaffen, hat man nach der eben erwähnten allgemeinen Regel, wenn man, da 8 das kleinste gem. Vielfache der Nenner ist, die W. 8 Mal so grofs macht, also $x = \frac{1}{8}y$ setzt (§. 170): $y^4 - \frac{8}{2}y^3 + \frac{8^2.3}{4}y^2 - \frac{8^3.5}{4}y + \frac{8^4.3}{8} = 0$, d. i. $y^4 - 4y^3 + 48y^2 - 640y + 1536 = 0$. Indefs erreicht man hier seinen Zweck schon dadurch, dafs man die Wurzeln der gegeb. Gleich. blofs verdoppelt, indem man dafür

$$y^4 - \frac{2}{2}y^3 + \frac{4.3}{4}y^2 - \frac{8.5}{4}y + \frac{16.3}{8} = 0,$$

d. i. $y^4 - y^3 + 3y^2 - 10y + 6 = 0$, also eine weit einfachere Gleich. als vorhin erhält.

§. **172**. Aufgabe. Für eine gegebene Gleichung die Differenzen-Gleichung, d. i. jene Gleich. zu finden, deren Wurzeln die Differenzen aus je zwei W. der gegebenen Gleichung sind.

Aufl. Sind $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots \omega_n$ die W. der gegebenen Gleichung, und ist y die Unbekannte der gesuchten Gleich. $Y=0$; so ist zufolge der Aufgabe y der allgemeine Stellvertreter der sämmtlichen Differenzen $\omega_1-\omega_1$, $\omega_1-\omega_2, \ldots$ $\omega_1-\omega_n$, $\omega_2-\omega_1$, $\omega_2-\omega_2, \ldots \omega_2-\omega_n$ u. s. w., die sich aus den n W. der gegebenen Gleich. bilden lassen. Da nun ω_1 und ω_2 W. von $X=0$ sind, so bestehen (§. 144) die Gleichungen:

$$1)\quad \omega_1^n + A_1\omega_1^{n-1} + A_2\omega_1^{n-2} + \ldots + A_n = 0 \quad \text{und}$$
$$2)\quad \omega_2^n + A_1\omega_2^{n-1} + A_2\omega_2^{n-2} + \ldots + A_n = 0.$$

Aus $\omega_2-\omega_1=y$ folgt $\omega_2=\omega_1+y$, und wenn man diesen Werth in der letztern Gleich. 2) substituirt, so erhält man nach §. 145, $\omega=y$ gesetzt:

$$A + \tau_1 y + \tau_2 y^2 + \ldots + \tau_{n-1}y^{n-1} + \tau_n y^n = 0,$$

wobei $A, \tau_1, \tau_2, \ldots \tau_n$ die dort angegebenen Werthe von $X, X_1, X_2, \ldots X_n$ nur überall ω_1 statt x gesetzt, besitzen. Da aber auf diese Weise A das Polynom der vorigen Gleich. 1), und dieses gleich Null ist; so hat man auch:

$$\tau_1 y + \tau_2 y^2 + \ldots + \tau_n y^n = 0,$$

oder wenn man mit y abkürzt, d. i. die W. $y=0$ (die den Differenzen $\omega_1-\omega_1$, $\omega_2-\omega_2, \ldots \omega_n-\omega_n$ entspricht) gleich ausläſst, auch:

$$m)\quad \tau_1 + \tau_2 y + \tau_3 y^2 + \ldots + \tau_{n-1}y^{n-2} + y^{n-1} = 0$$

(wegen $\tau_n=1$), in welcher Gleich. sofort (§. 145) die Coeffic. $\tau_1, \tau_2, \ldots$ Functionen von ω_1, nämlich die abgeleiteten Polynome aus der Gleich. 1) sind. Eliminirt man daher aus dieser Gleich. m) und jener 1) die Gröſse ω_1, so erhält man eine Gleich. in y, deren Coefficienten gewisse Functionen von den gegebenen $A_1, A_2, \ldots$ sind, als gesuchte Gleichung.

Da man aber statt der in Rechnung gebrachten Differenz $\omega_2-\omega_1=y$ eben so gut jede andere $\omega_3-\omega_2=y$,

$\omega_2 - \omega_3 = y$ u. s. w. der übrigen hätte nehmen können; so muſs man gleichzeitig in 1) und den Coeffic. $\tau_1, \tau_2, \ldots$ (als Functionen von ω_1) die Wurzel ω_1 mit den übrigen ω_2, $\omega_3, \ldots \omega_n$ vertauschen können, und immer noch durch die angedeutete Elimination (nun von ω_2 oder ω_3 u. s. w.) aus den betreffenden Gleich. m) und 1) die gesuchte Gleichung erhalten.

Man kann also auch in 1) statt ω_1 den allgemeinen Stellvertreter von $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$, d. i. x, wodurch aber diese Gleich. in die ursprüngliche $X = 0$, und eben so in den Coeffic. $\tau_1, \tau_2, \ldots$ der Gleich. m) x statt ω_1 setzen, wodurch diese Gleich. genau in jene

$X_1 + X_2 y + X_3 y^2 + \ldots + X_{n-1} y^{n-2} + y^{n-1} = 0$ (vergl. §. 145)

übergeht, und aus diesen beiden Gleichungen x eliminiren, um die gesuchte Gleich. $Y = 0$ zu erhalten.

So ist z. B. für die Gleichung $x^3 - 7x + 6 = 0$ sofort $X = x^3 - 7x + 6$, $X_1 = 3x^2 - 7$, $X_2 = 3x$ ($X_3 = 1$); man muſs daher, um dazu die Differenzengleich. zu finden, aus den beiden Gleichungen $x^3 - 7x + 6 = 0$ ($X = 0$) und $3x^2 - 7 + 3xy + y^2 = 0$ ($X_1 + X_2 y + y^2 = 0$) x eliminiren. Man findet als Resultat dieser Elimination die Gleich. $y^6 - 42y^4 + 441y^2 - 400 = 0$, welches auch in der That die verlangte Differenzengleichung ist; denn es sind die W. der gegeb. Gleich.: $1, 2, -3$, aus denen sich sofort die Differenzen $1 - 2 = -1$, $1 + 3 = 4$, $2 - 1 = 1$, $2 + 3 = 5$, $-3 - 1 = -4$ und $-3 - 2 = -5$ (da jene $1 - 1$, $2 - 2$ etc. bereits ausgeschieden sind) als W. dieser letztern Gleich. ergeben.

Eben so findet man $y^6 - 36y^4 + 324y^2 + 459 = 0$ als Differenzengleichung der Gleich. $x^3 - 6x - 7 = 0$.

§. **173**. Da sich die n W. $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$, wenn man, wie es bereits oben geschehen ist, jene Differenzen $\omega_1 - \omega_1$, $\omega_2 - \omega_2, \ldots \omega_n - \omega_n$ ausläſst, $n(n-1)$ Mal zu 2 combiniren lassen, nämlich eben so viele Differenzen oder W. der Gleich. $Y = 0$ geben; so ist diese letztere vom $n(n-1)^{\text{ten}}$ Grade. Da ferner jeder positiven W. eine gleiche negative entspricht, indem man hat:

$$\omega_1 - \omega_2 = +\alpha \text{ und } \omega_2 - \omega_1 = -\alpha,$$
$$\omega_1 - \omega_3 = +\beta \text{ und } \omega_3 - \omega_1 = -\beta \text{ u. s. w.;}$$

so ist das Polynom der Differenzengleich. $Y=0$ in Factoren aufgelöst (§. 158):

$$Y=(y-\alpha)(y+\alpha)(y-\beta)(y+\beta)..=(y^2-\alpha^2)(y^2-\beta^2)..,$$

so, daſs dieses also aus $\frac{n(n-1)}{2}=m$ quadratischen Factoren von der Form $y^2-\omega^2$ besteht, welche sofort ein Product von lauter geraden Potenzen, d. i. ein Product von der Form

$$Y=y^{2m}+\delta_1 y^{2m-2}+\delta_2 y^{2m-4}+..+\delta_{m-1}y^2+\delta_m$$

geben. Setzt man daher $y^2=z$, so geht die Gleich. $Y=0$ über in jene: $Z=z^m+\delta_1 z^{m-1}+\delta_2 z^{m-2}+..+\delta_m=0$, deren Grad nur halb so groſs als jener der Differenzengleichung ist, und in welcher die W. $z=y^2$ die Quadrate von den Differenzen der Wurzeln der ursprünglichen Gleich. $X=0$ sind; aus diesem Grunde wird diese letztere Gleich. die quadrirte Differenzengleichung, oder besser, die Gleichung der quadrirten Differenzen der Gleich. $X=0$ genannt.

Für die im vorigen §. angeführte Gleich. $x^3-7x+6=0$ hat man sonach $z^3-42z^2+441z-400=0$ als die quadrirte Differenzengleichung.

Auf gleiche Art findet man $z^3-42z^2+441z-49=0$ als quadrirte Differenzengleich. für die Gleich. $x^3-7x\pm 7=0$.

§. **174**. Aufgabe. Zu untersuchen, ob eine gegebene Gleichung gleiche Wurzeln besitzt.

Aufl. Bezeichnet man in der Gleich. $X=0$, deren W. $\omega_1, \omega_2, .. \omega_n$ sind, die Binome $x-\omega_1$, $x-\omega_2$, .. $x-\omega_n$ Kürze halber durch $b_1, b_2, .. b_n$; so ist (§. 158)

$$X=b_1 b_2 b_3 .. b_n.$$

Setzt man in dieser Gleich. $x+\alpha$ statt x, wo α eine ganz willkürliche Gröſse bezeichnet; so geht (§. 145) X in $X+X_1\alpha+X_2\alpha^2+..+\alpha^n$, und das Product $b_1 b_2 .. b_n$ in $(b_1+\alpha)(b_2+\alpha)...(b_n+\alpha)=C_n+C_{n-1}\alpha+C_{n-2}\alpha^2+...+C_1\alpha^{n-1}+\alpha^n$ über, wobei (analog mit §. 162) C_n die Summe der Combinationen der Gröſsen $b_1, b_2, .. b_n$ zu n, C_{n-1} jene der Combinat. zu $n-1$ u. s. w., d. i. $C_n=b_1 b_2 .. b_n$,

$C_{n-1} = \frac{C_n}{b_1} + \frac{C_n}{b_2} + \ldots + \frac{C_n}{b_n}$ u. s. w. ist. Man hat also die Gleich. $X + X_1\,\alpha + \ldots + \alpha^n = C_n + C_{n-1}\,\alpha + \ldots + \alpha^n$, und daraus (§. 108), da X, X_1, .. C_n, C_{n-1}, .. von α unabhängig sind: $X = C_n = b_1 b_2 \ldots b_n$ (die urspr. Gleichung), $X_1 = C_{n-1} = \frac{X}{b_1} + \frac{X}{b_2} + \ldots + \frac{X}{b_n}$ u. s. w.

Besitzt nun die gegebene Gleich. $X = 0$ m gleiche Wurzeln, und zwar $\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_m = a$, so ist auch $b_1 = b_2 = \ldots = b_m$, und man hat $X = b_1^m\, b_{m+1} \ldots b_n$ und $X_1 = \frac{mX}{b_1} + \frac{X}{b_{m+1}} + \ldots + \frac{X}{b_n}$, d. i.

$$X_1 = m\,b_1^{m-1}\, b_{m+1} \ldots b_n + b_1^m\, b_{m+2} \ldots b_n + \text{etc.}$$
$$+ b_1^m\, b_{m+1} \ldots b_{n-1},$$

woraus sofort folgt, dafs die beiden Polynome X und X_1 als gröfsten gemeinsch. Divisor den Factor $b_1^{m-1} = (x-a)^{m-1}$ besitzen. Besäfse die obige Gleich. $X = 0$ aufserdem noch p W. jede $= b$, so würde man eben so finden, dafs die beiden Polynome X und X_1 als gröfsten gem. Factor den Ausdruck $(x-a)^{m-1}(x-b)^{p-1}$ haben, u. s. w.

§. 175. Um also zu untersuchen, ob die Gleichung $X = 0$ gleiche W. besitzt, leite man (§. 145, Anm.) aus X das Polynom X_1 ab, und suche zu X und X_1 den gröfsten gemeinsch. Divisor; ist dieser, in einfache Factoren zerlegt, von der Form $(x-a)^m (x-b)^p (x+c)^r \ldots$, so enthält diese Gleich. die W. a mMal, jene b p Mal, die W. $-c$ r Mal u. s f.; findet man keinen solchen gem. Divisor, so hat die Gleich. auch keine gleichen Wurzeln.

So ist z. B. für die Gleichung $x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2 = 0$: $X = x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2$, $X_1 = 4x^3 - 3x^2 - 6x + 5$; und da man zwischen X und X_1 als gröfsten gem. Divisor $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ findet, so enthält diese Gleichung die W. $x = 1$ 3 Mal; und in der That, die W. dieser Gleichung sind: 1, 1, 1 und -2.

Cubische Gleichungen.

§. 176. Da sich (§. 169) aus jeder Gleich. das 2. Glied wegschaffen läfst, so können wir zur gröfsern Einfachheit die aufzulösende cubische Gleich. in der Form voraussetzen: 1) $x^3 + px + q = 0$.

Um diese Gleich. aufzulösen, setze man 2) $x = y + z$; so geht sie über in: $y^3 + z^3 + (3yz + p)x + q = 0$, und wenn man, um y und z zu bestimmen, nebst der vorigen Bedingungsgleich. 2) noch die folgende: $3yz + p = 0$, woraus 3) $z = -\frac{p}{3y}$ folgt, annimmt, auch: 4) $y^3 + z^3 + q = 0$ oder $y^3 - \frac{p^3}{27y^3} + q = 0$, d. i. $y^6 + qy^3 = \frac{p^3}{27}$, woraus sofort $y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$ folgt. Aus 4) hat man $z^3 = -q - y^3$, oder wenn man für y^3 substituirt und die W. auszieht: $z = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \mp \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$. Es folgt also endlich aus 2), von den doppelten Zeichen nur die obern beibehaltend, indem die untern dasselbe Resultat geben:

$$5) \quad x = \sqrt[3]{\left[-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right]}$$
$$+ \sqrt[3]{\left[-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right]},$$

welcher Ausdruck unter dem Namen der Cardan'schen Formel bekannt ist.

§. 177. Setzt man Kürze halber

$$6) \quad -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = A \text{ und } -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = B,$$

so geht die Formel 5) in 7) $x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$ über. Um nun zu sehen, wie diese Formel die sämmtlichen 3 W. der Gleichung 1) enthält, bemerke man, dafs die 3 Cubikw. aus a^3 sind: a, $a\left(\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}\right)$ und $a\left(\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}\right)$ *), oder für

*) Setzt man nämlich $\sqrt[3]{a^3} = x$, so folgt $x^3 - a^3 = 0$, und da $x = a$ eine W., also (§. 155) $x^3 - a^3$ durch $x - a$ theilbar ist; so erhält man noch $x^2 + ax + a^2 = 0$, und daraus die beiden übrigen oben angegeb. imaginären W. von $\sqrt[3]{a^3}$.

$\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})=\alpha$ auch: a, αa, $\alpha^2 a$. Versteht man also unter $\sqrt[3]{A}$ die gewöhnliche, reelle oder arithmetische Cubikw. aus A; so sind die 3 Wurzeln von $\sqrt[3]{A}$ sofort: $1.\sqrt[3]{A}$, $\alpha\sqrt[3]{A}$, $\alpha^2\sqrt[3]{A}$. Auf die nämliche Art hat man für die 3 Werthe von $\sqrt[3]{B}$: $1.\sqrt[3]{B}$, $\alpha\sqrt[3]{B}$, $\alpha^2\sqrt[3]{B}$; da nun aber [vergl. 2) und 3)] wegen $yz=-\frac{p}{3}$ in 6) für $\sqrt[3]{A}$ und $\sqrt[3]{B}$ nur jene Werthe genommen werden dürfen, die zusammen ein reelles Product geben; so sind für x nur folgende 3 Combinationen möglich oder brauchbar:

$$8)\quad x_1=1.\sqrt[3]{A}+1.\sqrt[3]{B},\quad x_2=\alpha\sqrt[3]{A}+\alpha^2\sqrt[3]{B}$$
$$\text{und}\quad x_3=\alpha^2\sqrt[3]{A}+\alpha\sqrt[3]{B},$$

welches zugleich die gesuchten 3 W. der Gleich. 1) sind.

§. **178.** Um zu untersuchen, unter welchen Bedingungen die vorigen 3 W. der Gleich. $x^3+px+q=0$, in welcher p und q positiv oder negativ seyn können, reell oder imaginär ausfallen, mufs man die 3 Fälle unterscheiden: 1) wenn $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}>0$, 2) $=0$ und 3) <0 ist. Man findet durch diese Discussion [I, 105], dafs im 1. Falle die W. x_1 reell, die beiden übrigen imaginär sind; dafs im 2. Falle alle 3 W. reell sind und dabei $x_2=x_3$ ist, und dafs endlich auch im 3. Falle die sämmtlichen 3 W. reell ausfallen, obschon sie in der Cardan'schen Formel unter einer imaginären Form erscheinen, wefshalb man auch diesen den irreduciblen Fall genannt hat.

Auflösung der cubischen Gleichungen mittelst trigonom. Functionen.

§. **179.** Für den 1. der im vorigen §. angeführten 3 Fälle setze man, wenn a) der Coefficient p positiv ist,

$$m)\quad \frac{2}{q}\sqrt{\frac{p^3}{27}}=\tang\varphi\ \text{und}\ \sqrt[3]{\tang\tfrac{1}{2}\varphi}=\tang\psi,$$ wo φ und ψ zwei Hilfsw. bezeichnen; so erhält man für die Gröfsen A und B in §. 177, 6), nach einigen leichten Reductionen:

$A = \sqrt{\frac{p^3}{27}}\,.\,tang\,\frac{1}{2}\varphi$ und $B = -\sqrt{\frac{p^3}{27}}\,.\,cot\,\frac{1}{2}\varphi$, folglich für die reelle W. x_1 in 8): α) $x_1 = -2\sqrt{\frac{p}{3}}\,.\,cot\,2\psi$. Man wird also zuerst aus m) (mit beständiger Anwend. der Logarithmen) die Hilfswinkel φ und ψ, und mit diesen letzteren aus der Gleich. α) die W. x_1 berechnen.

§. **180.** Ist aber b) p negativ, so setze man, wenn überall [nämlich in 1) und 6), §§. 176, 177] p gleich negativ genommen, und dann unter p wieder nur der numerische Werth verstanden wird: m') $\frac{2}{q}\sqrt{\frac{p^3}{27}} = sin\,\varphi$ und wieder $\sqrt[3]{tang\,\frac{1}{2}\varphi} = tang\,\psi$; so findet man

$$A = -\sqrt{\frac{p^3}{27}}\,.\,tang\,\tfrac{1}{2}\varphi,\quad B = -\sqrt{\frac{p^3}{27}}\,.\,cot\,\tfrac{1}{2}\varphi$$

$$\text{und}\quad \alpha')\ x_1 = -\frac{2}{sin\,2\psi}\sqrt{\frac{p}{3}},$$

wobei die Rechnung wieder wie vorhin angegeben zu führen ist.

§. **181.** Da sich im 2. Falle die 3 W. unmittelbar logarithmisch berechnen lassen, so sind hiezu keine anderweitigen Hilfsgröfsen nothwendig.

§. **182.** Für den 3. oder sogenannten irreduciblen Fall, in welchem p nothwendig negativ seyn mufs, setze man, wenn unter p wieder nur der numerische Werth verstanden [also die Gleich. 1) durch $x^3 - px + q = 0$ dargestellt] wird, $x = r\,sin\,\varphi$ oder $sin\,\varphi = \frac{x}{r}$; so erhält man wegen (§. 23, Anmerkung) $sin\,3\varphi = 3\,sin\,\varphi - 4\,sin\,\varphi^3$ oder $sin\,\varphi^3 - \frac{3}{4}\,sin\,\varphi + \frac{1}{4}\,sin\,3\varphi = 0$ sofort:

$$n)\quad x^3 - \tfrac{3}{4}r^2x + \tfrac{1}{4}r^3\,sin\,3\varphi = 0,$$

eine Gleich., deren Wurzeln in dem Ausdrucke d) $x = r\,sin\,\varphi$, wobei für φ alle Werthe gesetzt werden müssen, für welche $sin\,3\varphi$ (als Bestandtheil des letzten Gliedes der vorigen Gleichung) ungeändert bleibt, enthalten sind. Diese so beschaffenen Werthe von φ sind aber die dritten Theile von 3φ, $180 - 3\varphi$, $3.180 - 3\varphi$, $5.180 - 3\varphi$, . . und $360 + 3\varphi$, $2.360 + 3\varphi$, $3.360 + 3\varphi$ u. s. w., also die Werthe: φ, $60 - \varphi$, $180 - \varphi$, $300 - \varphi$, . . und $120 + \varphi$, $240 + \varphi$, $360 + \varphi$ u. s. w. Es ist aber leicht zu sehen, daſs diese unzähligen Bogen nur 3 verschiedene Sinus: $sin\,\varphi$, $sin(60 - \varphi)$ und $-sin(60 + \varphi)$ haben, so, daſs also auch aus dem genannten Ausdrucke *d*) für die Gleich. *n*) nur 3 Wurzeln, nämlich β) $x_1 = r\,sin\,\varphi$, $x_2 = r\,sin(60 - \varphi)$ und $x_3 = -r\,sin(60 + \varphi)$ hervorgehen. Vergleicht man endlich die obige Gleich. *n*) mit der ursprünglichen:

$$x^3 - px + q = 0,$$

so folgt: γ) $\frac{3}{4}r^2 = p$ und $\frac{1}{4}r^3\,sin\,3\varphi = q$, woraus nun ganz einfach r und φ, und mit Hilfe dieser Werthe aus β) die 3 W. mittelst Logarithmen berechnet werden können.

Man findet z. B. für die zum 1. Falle (§. 179) gehörige Gleich. $x^3 + 3x - 2 = 0$ die Hilfswinkel $\varphi = 135°$, $\psi = 53° 17' 52''\cdot7$, und damit die reelle W. $x_1 = \cdot5960717$.

Für die zu dem im §. 180 angeführten Falle gehörende Gleichung $x^3 - 2x + 4 = 0$ folgt $\varphi = 15° 47' 35''\cdot4$, $\psi = 27° 22' 4''$ und $x_1 = -2$. (Die beiden imag. W. sind: $-1 \pm \sqrt{-1}$.)

Aus der zum 2. Falle (§. 181) gehörigen Gleich. $x^3 - 3x - 2 = 0$ erhält man die W. $x_1 = +2$, $x_2 = x_3 = -1$.

Endlich findet man für die zum 3. Falle (§. 182) gehörende Gleich. $x^3 - 7x + 6 = 0$, aus γ): $log\,r = \cdot4850183$ und $\varphi = 19°, 6' 23''\cdot8$, folglich mit diesen Werthen aus β): $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -3$.

Gleichungen des vierten Grades.

§. 183. Es sey auch hier die aufzulösende Gleich. bereits von ihrem 2. Gliede befreit und auf die Form gebracht: 1) $x^4 + px^2 + qx + r = 0$. Man setze 2) $x = u + y + z$, so wird $x^2 = u^2 + y^2 + z^2 + 2(uy + uz + yz)$ und $x^4 = (u^2 + y^2 + z^2)^2 + 4(u^2 + y^2 + z^2)(uy + uz + yz) + 4(u^2y^2 + u^2z^2 + y^2z^2) + 8uyzx$ [wegen 2)]; diese Werthe für x^2 und x^4 in 1) substituirt, erhält man:

3) $(u^2 + y^2 + z^2)^2 + 4(u^2y^2 + u^2z^2 + y^2z^2) + p(u^2 + y^2 + z^2) + r + [4(u^2 + y^2 + z^2) + 2p](uy + uz + yz) + (8uyz + q)x = 0.$

Da die Gleich. 2) unbestimmt ist und noch 2 Bedingungen gestattet, so setze man 4) $4(u^2+y^2+z^2)+2p=0$ und 5) $8uyz+q=0$; dadurch geht die vorige Gleich. 3), wenn man zugleich noch für $u^2+y^2+z^2$ den aus 4) folgenden Werth $-\frac{p}{2}$ substituirt, in die folgende einfachere über: 6) $u^2y^2+u^2z^2+y^2z^2=\frac{1}{16}(p^2-4r)$; endlich folgt noch aus 5): 7) $u^2y^2z^2=\frac{q^2}{64}$.

Da nun von den 3 Gröfsen u^2, y^2, z^2 in 4) die Summe oder Combinat. zu 1, in 6) die Summe der Combin. zu 2, und in 7) die Summe der Comb. zu 3 oder ihr Product ausgedrückt ist; so können diese (§. 162) als die Wurzeln der cubischen oder sogenannten reducirten Gleichung

$$8)\quad \varrho^3+\frac{p}{2}\varrho^2+\left(\frac{p^2-4r}{16}\right)\varrho-\frac{q^2}{64}=0$$

angesehen werden.

§. **184.** Löst man diese cubische Gleich. nach den vorhergehenden §§. auf, und bezeichnen ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 die 3 W. derselben; so hat man $u=\pm\sqrt{\varrho_1}$, $y=\pm\sqrt{\varrho_2}$, $z=\pm\sqrt{\varrho_3}$, und zufolge der Gleich. 2):

$$x=\pm\sqrt{\varrho_1}\pm\sqrt{\varrho_2}\pm\sqrt{\varrho_3}.$$

Macht man in dieser letztern Summe hinsichtlich der doppelten Zeichen alle Verbindungen, so findet man darunter nur 8 verschiedene Werthe. Von diesen 8 Werthen für x sind aber nur 4 als Wurzeln der gegebenen Gleich. brauchbar; man findet diese, wenn man berücksichtiget, dafs vermöge der Gleich. 5) das Product aus u, y, z, d. i. $\sqrt{\varrho_1}$, $\sqrt{\varrho_2}$, $\sqrt{\varrho_3}$, das entgegengesetzte Zeichen von q erhalten mufs.

§. **185.** Man hat also, wenn q positiv ist, nämlich für die Gleich. $a)$ $x^4+px^2+qx+r=0$, die Wurzeln:

$$x_1=-\sqrt{\varrho_1}-\sqrt{\varrho_2}-\sqrt{\varrho_3},\quad x_2=-\sqrt{\varrho_1}+\sqrt{\varrho_2}+\sqrt{\varrho_3},$$
$$x_3=\sqrt{\varrho_1}-\sqrt{\varrho_2}+\sqrt{\varrho_3},\quad x_4=\sqrt{\varrho_1}+\sqrt{\varrho_2}-\sqrt{\varrho_3},$$

und wenn q negativ ist, oder für die Gleich. $b)$ $x^4+px^2-qx+r=0$, die Wurzeln:

$$x_1 = \sqrt{v_1} + \sqrt{v_2} + \sqrt{v_3},\ x_2 = \sqrt{v_1} - \sqrt{v_2} - \sqrt{v_3},$$
$$x_3 = -\sqrt{v_1} + \sqrt{v_2} - \sqrt{v_3},\ x_4 = -\sqrt{v_1} - \sqrt{v_2} + \sqrt{v_3}.$$

Für die Gleich. $x^4 - 25x^2 + 60x - 36 = 0$ ist die reducirte oder cubische Gleich.: $v^3 - \frac{25}{2}v^2 + \frac{769}{16}v - \frac{225}{4} = 0$, und da man für diese die W. $v_1 = \frac{9}{4}$, $v_2 = 4$, $v_3 = \frac{25}{4}$ findet; so erhält man aus den der Gleich. *a*) zukommenden Wurzeln: $x_1 = -6$, $x_2 = +3$, $x_3 = +2$, $x_4 = +1$ als W. der gegeb. Gleich.

Eben so findet man für die Gleich. $x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6 = 0$, welche (§. 169) vom 2. Gliede befreit in jene

$$y^4 - \frac{11}{8}y^2 - \frac{3}{8}y + \frac{45}{256} = 0,$$

so wie diese, wenn (§. 171) die Brüche weggeschafft werden, in jene $y'^4 - 22y'^2 - 24y' + 45 = 0$ übergeht, als reducirte Gleich.: $v^3 - 11v^2 + 19v - 9 = 0$, dafür die W. $v_1 = 1$, $v_2 = 1$, $v_3 = 9$, und damit aus den obigen Wurzeln der Gleich. *b*):

$$y'_1 = 5,\ y'_2 = -3,\ y'_3 = -3,\ y'_4 = 1;$$

da ferner $y = \frac{1}{4}y'$ und $x = y + \frac{7}{4}$ ist, so erhält man endlich für die W. der gegebenen Gleich.: $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$.

Die reciproken Gleichungen.

§. 186. Erkl. Sind in einer Gleich. $X = 0$, welche die Wurz. α, β, . . besitzt, auch die reciproken Werthe $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, . . Wurzeln derselben; so wird die Gleich. eine reciproke genannt, und unmittelbar daran erkannt, daſs ohne Rücksicht auf die Zeichen, je 2 von den beiden äussern Gliedern des Polynoms gleich weit abstehende Glieder einerlei Coefficienten besitzen.

§. 187. Es ist also

1) $x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots \pm A_2 x^2 \pm A_1 x \pm 1 = 0$

die allgemeine Form der reciproken Gleichungen.

Denn ist α eine W. derselben, so hat man

$$\alpha^n + A_1 \alpha^{n-1} + A_2 \alpha^{n-2} + \ldots \pm A_2 \alpha^2 \pm A_1 \alpha \pm 1 = 0,$$

oder, wenn man durchaus mit $\pm \alpha^n$ dividirt und die Glieder in umgekehrter Ordnung schreibt:

$$\frac{1}{\alpha^n} + A_1 \frac{1}{\alpha^{n-1}} + A_2 \frac{1}{\alpha^{n-2}} + \ldots \pm A_2 \frac{1}{\alpha^2} \pm A_1 \frac{1}{\alpha} \pm 1 = 0,$$

woraus sofort folgt, dafs in 1) auch $x = \frac{1}{\alpha}$ (§. 144) eine W. ist. Dasselbe gilt auch für eine jede andere W. β, γ u. s. w. der Gleich. 1).

§. 188. Für eine reciproke Gleich. von gerader Ordnung hat man, nur die obern Zeichen beibehaltend:

$$2)\ x^{2n} + A_1 x^{2n-1} + A_2 x^{2n-2} + \ldots + A_n x^n + \ldots$$
$$+ A_2 x^2 + A_1 x + 1 = 0,$$

oder, wenn man durch x^n dividirt und die Glieder paarweise, nämlich das 1. und letzte, 2. und vorletzte u. s. w. zusammennimmt:

$$3)\ \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) + A_1\left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right)$$
$$+ A_2\left(x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}}\right) + \ldots + A_n = 0.$$

Setzt man nun 4) $x + \frac{1}{x} = y$, so erhält man aus der Entwickl. a), §. 123, für $a = x$ und $b = \frac{1}{x}$:

$$5)\ x^n + \frac{1}{x^n} = y^n - ny^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1\,.\,2} y^{n-4}$$
$$- \frac{n(n-4)(n-5)}{1\,.\,2\,.\,3} y^{n-6} \text{ etc.},$$

und daraus auch, indem man statt n nach und nach $n - 1$, $n - 2$ u. s. w. setzt, die Binome $x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}$ u. s. w. durch y ausgedrückt, so, dafs wenn man dann die Werthe aller dieser Binome in die Gleich. 3) substituirt, eine Gleich. in y entsteht, welche nur vom n., also halb so hohem Grade als die gegebene Gleich. 2) ist. Läfst sich diese letztere auflösen, so hat man zur Bestimmung der ursprünglichen Wurzeln x aus 4) die Relation: 6) $x = \frac{1}{2}(y \pm \sqrt{y^2 - 4})$, so, dafs also jede der n W. y, 2 W. in x, die zugleich zu einander reciprok sind, liefert, und sonach die $2n$ W. der Gleich. 2) gefunden sind.

So hat man z. B. für die Gleich. $x^6 - 6x^5 + 14x^4 - 18x^3 + 14x^2 - 6x + 1 = 0$ zuerst

$$\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+14\left(x+\frac{1}{x}\right)-18=0,$$

und für $x+\frac{1}{x}=y$, nach der Entwickl. 5) (oder auch davon unabhängig, wenn man die 3. und 2. Potenz macht):

$$x^3+\frac{1}{x^3}=y^3-3y \quad \text{und} \quad x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$$

(vergl. wegen des Abbrechens dieser Reihe §. 123), also wenn man substituirt und reducirt: $y^3-6y^2+11y-6=0$. Da diese Gleich. die W. $y=1, 2, 3$ besitzt; so erhält man nach der Relat. 6) für $y=1$:

$$x_1=\frac{1+\sqrt{-3}}{2}, \quad x_2=\frac{1-\sqrt{-3}}{2}=\frac{2}{1+\sqrt{-3}};$$

für $y=2$:

$$x_3=\frac{2+0}{2}=1, \quad x_4=\frac{2-0}{2}=\frac{1}{1};$$

und für $y=3$:

$$x_5=\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \quad x_6=\frac{3-\sqrt{5}}{2}=\frac{2}{3+\sqrt{5}}$$

als W. der gegebenen Gleichung.

§. 189. Zusatz. Haben die gleichen numerischen Coefficienten verschiedene Zeichen, wie z. B. in $x^6+A_1x^5+A_2x^4-A_2x^2-A_1x-1=0$ (wo also der mittlere Coeffic., da ihm gleichzeitig beide Zeichen zukommen, Null seyn muſs); so folgt zuerst aus der genannten Vereinigung der Glieder oder der Darstellung:

$$(x^6-1)+A_1x(x^4-1)+A_2x^2(x^2-1)=0,$$

daſs diese Gleich. durch x^2-1 theilbar ist, ihr also die beiden W. $x=\pm 1$ zukommen. Führt man aber die Division aus, so kommt man wieder auf eine reciproke Gleich. und zwar von der im vorigen §. behandelten Eigenschaft. Dieser Quotient ist für die vorige Gleichung:

$$x^4+A_1x^3+(1+A_2)x^2+A_1x+1=0.$$

§. 190. Ist die reciproke Gleich. von ungerader Ordnung, so hat diese, wie leicht zu sehen, je nachdem die gleichen numer. Coefficienten gleiche oder verschiedene Zeichen haben, zuerst die W. -1 oder $+1$, und man erhält, wenn das Polynom beziehungsweise (§. 155) durch $x\pm 1$ getheilt wird, wie man ganz einfach findet, als Quotienten das Polynom einer recipr. Gleich. von gerader Ordnung, die man sofort nach den beiden vorigen §§. weiter behandeln wird.

So ist für die Gleich. $3x^5 - x^4 - 18x^3 - 18x^2 - x + 3 = 0$ zuerst $x_1 = -1$ eine W., und man erhält daraus durch die Division mit $x + 1$ die reciproke Gleichung gerader Ordnung: $3x^4 - 4x^3 - 14x^2 - 4x + 3 = 0$, welche nach §. 188 behandelt, noch die W. $x_2 = -1$, $x_3 = \frac{1}{-1}$, $x_4 = 3$ und $x_5 = \frac{1}{3}$ liefert.

Eben so erhält man für die Gleichung

$$x^5 - \tfrac{7}{3}x^4 - \tfrac{10}{3}x^3 + \tfrac{10}{3}x^2 + \tfrac{7}{3}x - 1 = 0$$

zuerst die W. $x_1 = 1$, und dann aus der durch die Division mit $x - 1$ entstehenden reciproken Gleichung

$$x^4 - \tfrac{4}{3}x^3 - \tfrac{14}{3}x^2 - \tfrac{4}{3}x + 1 = 0$$

nach §. 188 noch die W. -1, $\frac{1}{-1}$, 3 und $\frac{1}{3}$.

Anmerk. Da wir von den zunächst hieher gehörigen binomischen Gleichungen $x^n \pm A = 0$, welche sich mit Hilfe der reciproken Gleich. allgemein bis zum 10. Grad auflösen lassen [I., 124], weiter unten (§§. 311, 312) die ganz allgemeine Auflösung geben werden; so können wir diese hier auslassen.

Auflösung der numerischen Gleichungen.

§. 191. Erkl. Sind die Coefficienten $A_1, A_2, \ldots A_n$ einer höhern Gleich. in Zahlen gegeben, so nennt man die Gleich. eine numerische Gleich, zu deren vollständigen oder näherungsweisen Auflösung (da die allgemeine Auflösung der Gleichungen bis jetzt noch nicht über die Gleich. des 4. Grades hinausreicht) die Analysten sofort verschiedene, mehr oder weniger scharfsinnige, Methoden erfunden haben.

Grenzen der reellen Wurzeln.

§. 192. Erkl. Liegen die positiven W. einer Gleich. zwischen den beiden (positiven) Zahlen g und G, so heifsen diese Zahlen Grenzen der positiven W.; man setzt aber dabei immer voraus, dafs g und G die Wurzeln, wenigstens in ganzen Zahlen, so eng wie möglich einschliefsen, g also (in der Voraussetzung von $g < G$) so grofs, und G so klein als möglich sey. (So wären in diesem Sinne $g = 4$ und $G = 10$ die Grenzen der posit. W. einer Gleich., welche die posit. W. 4·2, 6 und 9·6 besitzt.)

Bezeichnet man eben so die Grenzen der negativen W. durch g' und G', wo, vom Zeichen abstrahirt, $g' < G'$ ist; so heifsen auch G und G' die obern oder äufsern, und g und g' die untern oder innern Grenzen. Gewöhnlich, besonders wenn G und G' nicht weit von einander abstehen, läfst man die Null für die gemeinschaftliche innere Grenze gelten.

§. 193. Unter allen Methoden, die obere Grenze der positiven W. einer Gleich $X = 0$ im obigen Sinne zu finden, ist folgende (von Newton herrührende) die sicherste:

Man verwandle die Gleich. $X = 0$ durch Substitution von $x = y + \alpha$ (§. 145) in jene $Y = 0$, und suche die kleinste ganze Zahl für α, für welche die sämmtlichen Coefficienten T_1, T_2, ... T_n dieser transformirten Gleichung

$$Y = y^n + T_1 y^{n-1} + T_2 y^{n-2} + \ldots + T_n = 0$$

positiv ausfallen; so werden die sämmtlichen durch $y = x - \alpha$ dargestellten W. dieser letztern Gleich. (§. 164, Anmerk. 1.) negativ, folglich ist $\alpha > x$, d. i. bei diesem kleinsten Werth dennoch gröfser als jede positive W. der Gleich. $X = 0$.

§. 194. Zur Bestimmung der untern Gr. g der positiven W. der Gleich. $X = 0$ verwandle man diese durch Substitution von $x = \frac{1}{y}$, in jene $Y' = 0$, und suche für diese Gleich. wieder (nach dem vor. §.) die obere Grenze $'G$ der posit. W. y'; so ist $g = \frac{1}{'G}$ eine Zahl, kleiner als die kleinste W. x der Gleich. $X = 0$, und zwar wieder im obigen Sinne (§. 192).

§. 195 Um endlich die beiden Grenzen G', g' der negativen W. der Gleichung $X = 0$ zu bestimmen, verwandle man diese (§. 164) in jene $\underline{X}=0$ mit entgegengesetzten W., und suche für diese nach den beiden vorigen §§. wieder die beiden Grenzen L, l der positiven W.; so hat man sofort $G'=L$ und $g'=l$.

So findet man, z. B. für die Gleichung $x^4-2x^3-54x^2-30x+189=0$ die Grenzen $G=9$, $G'=6$, $g=1$, $g'=2$, und in der That, die W. dieser Gleich. sind: 1·6055, 8·4774, —5·6060, —2·4770.

Das Aufsuchen der *rationalen* Wurzeln.

§. 196. Lehrsatz. Die rationalen Wurzeln einer geordneten Gleichung, deren Coefficienten durchaus ganze Zahlen sind, können nur ganze Zahlen und keine Brüche seyn.

Denn es sey $\frac{\alpha}{\beta}$ ein zur kleinsten Benennung gebrachter Bruch, und wenn es möglich ist, $x=\frac{\alpha}{\beta}$ eine W. der nach §. 142 geordneten Gleich. $X=0$ von durchaus ganzen Coefficienten; so hat man, wenn dieser Werth in X substituirt und dann durchaus mit β^{n-1} multiplicirt wird:

$$\frac{\alpha^n}{\beta}+A_1\alpha^{n-1}+A_2\alpha^{n-2}\beta+\ldots+A_n\beta^{n-1}=0,$$

eine Gleich., welche unmöglich bestehen kann, weil sich sonst die Summe von ganzen Zahlen und einem Bruche auf Null reduciren könnte.

§. 197. Hat man daher die gegebene numerische Gleich. nach §. 142 geordnet, und die etwa vorhandenen Brüche nach §. 171 weggeschafft; so müssen die rationalen W. dieser Gleich. ganze Zahlen und überdiefs (§. 162) Factoren des letzten Gliedes A_n seyn. Zerlegt man demnach das letzte Glied des Polynoms in seine einfachen und zusammengesetzten Factoren, und setzt diese nach und nach für x, und zwar, wenn das Polynom X Zeichenwechsel und Zeichenfolgen besitzt (§. 166), sowohl positiv als auch negativ genommen; so sind jene Factoren, welche dabei X auf Null bringen, Wurzeln der gegeb. Gleich. $X=0$. Um indeſs dieses Verfahren, welches, wenn A_n aus sehr vielen Factoren besteht, ziemlich ermüdend werden kann, zu vereinfachen, dienet folgende Betrachtung.

§. 198. Es sey, um nur die Ideen festzusetzen, die Gleichung gegeben: $x^3 + A_1 x^2 + A_2 x + A_3 = 0$, und α eine W. derselben; so folgt: $A_3 = - A_2 \alpha - A_1 \alpha^2 - \alpha^3$. Da nun der 2. oder der Theil rechts dieser Gleichung durch α theilbar ist, so muſs es auch der 1. seyn, d. h. es muſs $A_3 : \alpha = B$ eine ganze Zahl seyn; es folgt also weiters, wenn man wirklich dividirt: $B + A_2 = - A_1 \alpha - \alpha^2$. Da auch hier wieder der Theil rechts durch α theilbar ist, so muſs gleichfalls $(B + A_2) : \alpha = C$ eine ganze Zahl seyn, und man erhält nach der Division: $C + A_1 = - \alpha$. Aus gleichem Grunde muſs auch $(C + A_1) : \alpha = D$ eine ganze Zahl seyn, und man erhält, nachdem wirklich durch α getheilt worden: $D + 1 = 0$. Man wird also, da sich diese Schlüsse auf eine jede Gleich. anwenden lassen, nachdem die Zahlen ± 1 auf gewöhnliche Art probirt worden, von den Factoren des letzten Gliedes sogleich jene als unbrauchbar oder Nichtwurzeln weglassen, welche bei diesem Vorgange die von α angeführten Bedingungen nicht erfüllen.

So findet man nach diesem Verfahren, daſs in der Gleich. $x^4 + 3x^3 - 31x^2 - 63x + 90 = 0$ von den Factoren des letzten Gliedes 90: 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90 nur jene: $+1$, -3, $+5$, -6 Wurzeln derselben sind. Denn man hat z. B. $\frac{+90}{-3} = -30$, $-30 - 63 = -93$, $\frac{-93}{-3} = 31$, $31 - 31 = 0$, $\frac{0}{-3} = 0$, $0 + 3 = 3$, $\frac{3}{-3} = -1$ und $-1 + 1 = 0$; also -3 eine W. Dagegen $\frac{+90}{6} = 15$, $15 - 63 = -48$, $\frac{-48}{6} = -8$, $-8 - 31 = -39$, aber -39 durch 6 nicht theilbar; also ist 6 keine W. u. s. w.

§. 199. Hat man auf diesem Wege nicht alle Wurzeln einer Gleich. finden können, so ist es möglich, daſs sie gleiche W. besitzt. Diese können nach §. 175, oder noch einfacher dadurch gefunden werden, daſs man die Gleich.

durch die aus den bereits gefundenen W. α, β, . . gebildeten Factoren $x-\alpha$, $x-\beta$, . . (§. 155) dividirt, und die als Quotient entstehende Gleich. neuerdings nach dem vorigen §. behandelt; dieses Verfahren aber überhaupt so oft als nöthig wiederholt.

So findet man z. B. nach der Verfahrungsweise des vorigen §. für die Gleich. $x^5-4x^4+x^3+10x^2-4x-8=0$ zuerst nur die beiden W. $x=-1$ und $x=2$. Dividirt man aber die Gleichung durch $(x+1)(x-2) = x^2-x-2$, so erhält man als Quot. die Gleich. $x^3-3x^2+4=0$, und für diese neuerdings die W. $x=-1$ und $x=2$. Theilt man daher diese letztere Gleich. abermals durch x^2-x-2, so entsteht die Gleichung $x-2=0$, aus welcher man die letzte W. $x=2$ findet. Es sind demnach die W. der gegebenen Gleich.: -1, -1, 2, 2, 2.

§. **200**. Hat man von einer gegebenen Gleich. alle Wurzeln bis auf 2 gefunden, so erhält man diese letztern immer dadurch, daſs man die als Quotienten entstehende quadratische Gleich., wenn man die gegebene durch das Product der aus den bereits gefundenen W. gebildeten einfachen Factoren dividirt, nach der Regel auflöst.

So findet man für die Gleich. $x^3-30x-56=0$ nach §. 198 nur die einzige W. $x=-4$. Dividirt man aber diese Gleich. durch $x+4$, so erhält man als Quot. die quadratische Gleich. $x^2-4x-14=0$, welche nach der Regel aufgelöst noch die beiden W. $x=2+\sqrt{18}$ und $x=2-\sqrt{18}$ liefert, so, daſs also die 3 W. der gegebenen Gleich. sind: -4, $2+3\sqrt{2}$, $2-3\sqrt{2}$.

Das Aufsuchen der irrationalen Wurzeln.

§. **201**. Hat man alle rationalen W. einer Gleichung nach dem Vorhergehenden gefunden, diese durch das Product der daraus entspringenden einfachen Factoren dividirt und als Quotienten die Gleich. $X=0$ erhalten; so kann diese Gleich., so ferne dieselben nicht imaginär sind, nur mehr irrationale W. enthalten. Um diese zu finden, sucht man, besonders wenn das letzte Glied A_n aus vielen Factoren besteht (§§. 193, 195), die äuſsern Grenzen G, G' der positiven und (wenn, §. 166, solche vorhanden seyn können) der negativen W., substituirt in X für x nach und nach die Werthe $0, 1, 2, \ldots G$ und $0, -1, -2, \ldots -G'$, und beobachtet die dadurch in X entstehenden Zeichenwechsel; ändert nämlich X für $x = a$ und $x = a + 1$ sein Zeichen, so liegt (§. 148) zwischen diesen beiden Zahlen a und $a + 1$ wenigstens eine reelle W. Bei diesen Substitutionen hat nun entweder das Polynom X sein Zeichen A) so oft Mal geändert, als der Ordnungsexponent n der Gleich. Einheiten hat, d. i. es haben sich die sämmtlichen W. der Gleichung $X = 0$ verrathen, oder es findet dieses B) nicht Statt; beide diese Fälle sollen besonders behandelt werden.

A) Wenn sich eben so viele W. zu erkennen geben, als n Einheiten besitzt.

§. **202**. In diesem Falle liegt zwischen zwei solchen auf einander folgenden Substit. $x = a$ und $x = a + 1$, die in X einen Zeichenwechsel bewirken, nur immer eine W., und man kann diese durch einige Zwischensubstitutionen sehr leicht zwischen zwei, höchstens um $\frac{1}{10}$ von einander abstehende Grenzen einschliefsen. Liegt also die betreffende W. bereits zwischen a und $a + \frac{1}{10}$, so setze man $x = a + y$, wobei nun $y < \frac{1}{10}$ ist; man erhält durch diese Substitution in $X = 0$ (§. 145):

$$X + X_1 y + X_2 y^2 + \ldots + X_{n-1} y^{n-1} + y^n = 0,$$

dabei die Polynome $X, X_1, \ldots$ so verstanden, dafs überall a statt x gesetzt wird. Aus dieser Gleich. folgt, wenn man, da es sich nur um einen Näherungswerth handelt, die höhern Potenzen von y vernachläfsiget: $X + X_1 y = 0$ oder

$$\alpha)\ y = -\frac{X}{X_1}.$$

Diesen Werth für y in $x = a + y$ substituirt, erhält man (im Allgemeinen) für x schon einen etwas genaueren Werth, welchen man für a gelten läfst und damit aus derselben Formel α) ein noch genaueres y berechnet, wodurch auch das neue $x = a + y$ dem wahren Werthe wieder näher gebracht wird, u. s. w.

So findet man z. B. für die Gleich. $x^3 - 5x - 3 = 0$ sofort: $G = 3$, $G' = 2$, und für $x = -2, -1, 0, +1, +2, +3$

beziehungsweise $X = -1, +1, -3, -7, -5, +9$, so, dafs also eine W. zwischen $+2$ und $+3$, eine zweite zwischen -2 und -1, und endlich die dritte zwischen -1 und 0 liegt. Setzt man, um hier nur die Rechnung für die positive W. durchzuführen, $x = 2{\cdot}5$; so findet man dafür $X = +{\cdot}125$, folglich liegt diese W. zwischen 2 und $2{\cdot}5$. Für $x = 2{\cdot}4$ dagegen, erhält man $X = -1{\cdot}176$, also liegt diese W. zwischen $2{\cdot}4$ und $2{\cdot}5$ und kann sonach von keinem dieser beiden Werthe um $\frac{1}{10}$ mehr verschieden seyn. Nimmt man daher in der obigen Formel α) $x = 2{\cdot}4$, so erhält man daraus $y = \frac{1{\cdot}176}{12{\cdot}28} = {\cdot}0958$ und damit $x = 2{\cdot}4 + {\cdot}0958 = 2{\cdot}4958$. Setzt man weiters in der nämlichen Formel $a = 2{\cdot}496$, so folgt $y = -{\cdot}005122$ und damit $x = 2{\cdot}496 - {\cdot}005122 = 2{\cdot}490878$. Für $a = 2{\cdot}49087$ wird wieder $y = -{\cdot}0^5 6038$ *) und $x = 2{\cdot}49086396$, ein Werth, welcher schon bis einschliefsig zur 6. Decimalziffer richtig ist.

Anmerk. Da man sich bei Anwendung dieser Newton'schen Näherungsmethode, und einer gewissen Beschaffenheit der Gleichung $X = 0$, im Verlaufe der Rechnung vom wahren Werthe wieder entfernen kann; so mufs man sich dabei von Zeit zu Zeit von dem Grade der Annäherung überzeugen. Dazu dienet die Bemerkung, dafs, wenn die m. Decimalziffer noch richtig ist, das Polynom X sofort sein Zeichen ändern mufs, wenn man diese Ziffer um eine Einheit vergröfsert.

§. 203. In allen Fällen bestimmt zum Ziele führend, jedoch auch beschwerlicher, ist folgende von Lagrange herrührende Näherungsmethode:

Liegt die zu berechnende W. zwischen a und $a+1$, so setze man in der Gleich. $X = 0$ sofort $x = a + \frac{1}{y}$, wobei also $y > 1$ und positiv seyn mufs. Die durch diese Substit. entstehende Gleich. (§. 145, wenn man zur Wegschaffung der Brüche sogleich mit y^n multiplicirt):

$$Xy^n + X_1 y^{n-1} + \ldots + 1 = 0$$

(die Polyn. $X, X_1, \ldots$ wieder so genommen, dafs man statt x, a stetzt) oder $Y = 0$ besitzt, da zufolge der Annahme

*) Der Kürze wegen schreiben wir ${\cdot}0^5 6$ statt ${\cdot}000006$, ${\cdot}0^3 8$ statt ${\cdot}0008$ u. s. w.

zwischen a und $a+1$ nur eine Wurzel liegt, nur eine positive reelle W. gröſser als 1. Liegt diese zwischen b und $b+1$, so setze man $y=b+\frac{1}{y'}$, wo also wieder $y'>1$ und positiv ist; dadurch erhält man auf ähnliche Art die transformirte Gleich. $Y'=0$, welche wieder nur eine einzige W. von der bemerkten Beschaffenheit, d. i. positiv und >1, haben kann. Liegt diese zwischen c und $c+1$, so setze man in der letzten Gleich. $y'=c+\frac{1}{y''}$, so wird abermals y'' positiv und >1 seyn u. s. w. Man erhält auf diese Weise: $y''=d+$, $y'=c+\frac{1}{d+}$, $y=b+\frac{1}{c+\frac{1}{d+}}$ und endlich

$$x=a+\frac{1}{b+\frac{1}{c+\frac{1}{d+}}},$$

wobei man nach den bekannten Eigenschaften der Kettenbrüche ganz sicher den Werth von x um so genauer erhält, je weiter man diese Kette, also das vorige Verfahren, fortsetzt. Wäre die W. x rational, so würde der Kettenbruch abbrechen, während er sonst ein unendlicher ist.

Wendet man diese Methode auf das vorige Beispiel $x^3-5x-3=0$, und zwar wieder auf die Berechnung der zwischen 2 und 3 liegenden Wurzel an; so hat man, $x=2+\frac{1}{y}$ gesetzt: $Y=5y^3-7y^2-6y-1=0$, und auch hier liegt die einzige (wie auch nach §. 166 erhellt) positive W., wie man (§. 148) leicht findet, zwischen 2 und 3. Setzt man daher in dieser Gleich. $y=2+\frac{1}{y'}$, so geht diese über in $Y'=y'^3-26y'^2-23y'-5=0$; da man ferner findet, daſs die positive W. dieser neuen Gleich. zwischen 26 und 27 liegt, so setze man darin $y'=26+\frac{1}{y''}$, wodurch man die Gleich. $Y''=603y''^3-653y''^2-52y''-1=0$ erhält, deren positive W. zwischen 1 und 2 liegt. Setzt man daher in dieser $y''=1+\frac{1}{y'''}$, so entsteht die Gleich. $Y'''=103y'''^3-451y'''^2-1156y'''-603=0$, deren positive W. zwischen 6 und 7 liegt u. s. w. Man hat daher

$$x = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{26 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{3 + \ldots}}}}}$$

Dieser Kettenbruch liefert der Reihe nach die Näherungsbrüche: $\frac{2}{1}, \frac{5}{2}, \frac{132}{53}, \frac{137}{55}, \frac{954}{383}, \frac{2999}{1204}$, von denen der letzte, gegen den wahren Werth etwas zu groſs, in einen Decimalbruch verwandelt, sofort $x = 2{\cdot}49086378$, also einen Näherungswerth gibt, welcher nach der Theorie der Kettenbrüche vom wahren Werthe um weniger als $\frac{1}{(1204)^2} = {\cdot}0^6 7$ abweicht, also wenigstens noch in den 6 ersten Decimalstellen richtig seyn muſs. (Vergl. Beisp. in §. 202.)

Für die beiden übrigen W. dieser Gleich. findet man nach der einen oder andern Methode:

$$x = -1{\cdot}8342431 \text{ und } x = -{\cdot}6566204 \text{ *)}.$$

§. 204. Ein in der Anwendung sehr geschätztes Verfahren, die W. nicht bloſs algebraischer, sondern selbst transcendenter Gleichungen mit jeder beliebigen Genauigkeit zu berechnen, bietet die sogenannte *Regula falsi* dar; sie besteht in Folgendem:

Sey $x = \omega$ die eben zu berechnende W. der ganz allgem. Gleich. 1) $y = Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + \ldots = 0$, und es gehe für $x = s_1$ und s_2, y in F_1 und F_2 über; so werden s_1 und s_2 dem wahren Werthe ω um so näher kommen, je weniger F_1 und F_2 von Null verschieden sind, daher $s_1 - \omega = d_1$ und $s_2 - \omega = d_2$ die Fehler der Substitutionen, und $F_1 - 0 = F_1$ und F_2 die Fehler der Resultate bezeichnen.

Weichen nun s_1 und s_2 wenig mehr, etwa um weniger als $\frac{1}{10}$, vom wahren Werthe ω ab, indem sie das Polynom y in 1) schon nahe auf Null bringen; so werden d_1 und d_2 so kleine Gröſsen seyn, daſs man bei einer bloſsen

*) Zur Berechnung der negat. W. kann man die gegebene Gleichung in jene $\underline{X} = 0$ mit entgegengesetzten W. verwandeln, und darin wieder, wie oben, die positiven W. aufsuchen.

Näherungsrechnung die 2. und höhern Potenzen davon vernachläſsigen kann. Dieſs vorausgesetzt, hat man aus 1): $F_1 = As_1^\alpha + Bs_1^\beta + \ldots$ und $F_2 = As_2^\alpha + Bs_2^\beta + \ldots$, also auch, wenn man von jeder dieser beiden Gleichungen jene $o = A\omega^\alpha + B\omega^\beta + \ldots$ abzieht: $F_1 = A(s_1^\alpha - \omega^\alpha) + B(s_1^\beta - \omega^\beta) + \ldots$ und $F_2 = A(s_2^\alpha - \omega^\alpha) + B(s_2^\beta - \omega^\beta) + \ldots$, oder wegen $s_1 = \omega + d_1$, also (mit Rücksicht auf das Gesagte) $s_1^\alpha = (\omega + d_1)^\alpha = \omega^\alpha + \alpha\omega^{\alpha-1}d_1$, $s_1^\beta = \omega^\beta + \beta\omega^{\beta-1}d_1$ u. s. w, und eben so $s_2^\alpha = \omega^\alpha + \alpha\omega^{\alpha-1}d_2$, $s_2^\beta = \omega^\beta + \beta\omega^{\beta-1}d_2$ u. s. f., auch: $F_1 = d_1(A\alpha\omega^{\alpha-1} + B\beta\omega^{\beta-1} + \ldots)$ und $F_2 = d_2(A\alpha\omega^{\alpha-1} + B\beta\omega^{\beta-1} + \ldots)$, daher endlich:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{d_1}{d_2}.$$

Setzt man in dieser, das Princip der *Regula falsi* enthaltenden Relation, statt d_1 und d_2 die gleichgeltenden Werthe $s_1 - \omega$ und $s_2 - \omega$, und bestimmt dann daraus ω; so erhält man, als genauern Werth von ω (als s_1 und s_2 waren):

$$2)\quad \omega = \frac{s_1F_2 - s_2F_1}{F_2 - F_1} = s_1 - \frac{F_1(s_2 - s_1)}{F_2 - F_1} = s_2 - \frac{F_2(s_1 - s_2)}{F_1 - F_2}.$$

Ist nun s_2 genauer als s_1, so nimmt man s_2 als erste, und den nach dieser Formel für ω gefundenen Werth als zweite Substit. (s_2), bemerkt wieder die entsprechenden Fehler F_1 (das vorige F_2), F_2, und berechnet mit diesen Elementen nach der nämlichen Formel neuerdings ω, welches dem wahren Werthe wieder näher kommen wird als das vorige; und so fährt man fort, bis man ω mit der gewünschten Genauigkeit gefunden hat.

Setzt man im vorigen Beispiel zur Berechnung der zwischen 2·4 und 2·5 liegenden W. der Gl. $x^3 - 5x - 3 = o$, $x = s_1 = 2{\cdot}4$ und $s_2 = 2{\cdot}5$; so erhält man $F_1 = -1{\cdot}176$ und $F_2 = {\cdot}125$, mithin nach der obigen Formel 2) näherungsweise $\omega = 2{\cdot}490$. Nimmt man als neue Substit. $s_1 = 2{\cdot}5$ und $s_2 = 2{\cdot}49$, so erhält man $F_1 = {\cdot}125$, $F_2 = -{\cdot}01175$ und damit aus 2) $\omega = 2{\cdot}490859$. Für $s_1 = 2{\cdot}49$ und $s_2 = 2{\cdot}490859$ erhält man weiters $F_1 = -{\cdot}01175$,

$F_2 = - \cdot 00006287$ und damit wieder $\omega = 2 \cdot 4908634$, ein bereits bis auf die 6. Decimalstelle genauer Werth *).

B) Wenn man durch diese Substitutionen *weniger* als n W. entdeckt.

§. **205.** In diesem Falle ist es möglich, daſs zwischen zwei auf einander folgenden Substitutionen a und $a+1$, für welche X sein Zeichen ändert (§. 149), mehr als eine, auch, daſs zwischen zwei solchen Zahlen, für welche X das Zeichen nicht ändert (§. 150), eine gerade Anzahl von W. liegt. Besitzt z. B. eine Gleichung die W. $\sqrt{2} = 1 \cdot 414$ und $\sqrt{3} = 1 \cdot 733$, so liegen diese zwischen 1 und 2, und werden sich bei den auf einander folgenden Substitutionen von $x = 1, 2, 3, \ldots$ durch keinen Zeichenwechsel von X verrathen. Substituirt man dagegen für x nach und nach eine Reihe von Zahlen, die um weniger als die Differenz $\sqrt{3} - \sqrt{2} = \cdot 319$, etwa nur um $\cdot 3$ zunehmen, setzt nämlich nach und nach $x = 1, 1 \cdot 3, 1 \cdot 6, 1 \cdot 9, \ldots$; so ändert X sein Zeichen von $1 \cdot 3$ zu $1 \cdot 6$ und von $1 \cdot 6$ zu $1 \cdot 9$, und man entdeckt nunmehr wirklich die beiden vorhin übergangenen Wurzeln.

§. **206.** Hieraus wird ersichtlich, daſs sich überhaupt alle reellen W. einer Gleich. verrathen müssen, wenn man die für x nach und nach zu substituirenden Zahlen um eine Differenz kleiner als die kleinste Differenz der W. der Gleich. zunehmen läſst. Da man aber die W., also auch diese kleinste Differenz, nicht im Voraus kennt; so wird man zur gegebenen Gleich. $X = 0$ (§. 173) die quadrirte Differenzen-Gleich. $Z = 0$, und in dieser (da ihre W. als Quadrate der Differenzen der reellen W. von $X = 0$ nur positiv seyn können) (§. 194) die untere Grenze g der positiven W. suchen; dann ist $\delta = \sqrt{g}$ offenbar eine Zahl, welche kleiner als die kleinste Differenz zwischen den W. der ursprünglichen Gleich. $X = 0$ ist. Man wird daher, wenn g, G, g', G' die Grenzen der posit. und negat. W.

*) Ein 2. nach dieser Methode berechnetes Beispiel einer transcendenten Gleichung, nämlich jener $x^x = 645$, wo man $x = 4 \cdot 3799099$ findet, s. m. Bd. I. S. 147.

der aufzulösenden Gleich. $X = 0$ sind, und für x nach und nach die Zahlen: $g, g + \delta, g + 2\delta, \ldots G$ u. $-g', -(g' + \delta), -(g' + 2\delta), \ldots - G'$ substituirt, nothwendig die sämmtlichen reellen W. dieser Gleich. entdecken.

So findet man z. B. für die Gleich. $x^3 - 7x - 7 = 0$, die äufsern Grenzen: $G = 4$, $G' = 2$, und man wird sonach die Null als gemeinschaftl. innere Gr. gelten lassen. Substituirt man also für x nach und nach die Werthe 0, 1, 2, 3, 4 und 0, -1, -2; so erhält das Polynom X der Reihe nach die Zeichen: $- - - - - +$ und $- - -$, so, dafs man also blofs eine W. zwischen $+3$ und $+4$ entdeckt. Um nun zu sehen, ob die beiden übrigen W. auf diese Weise übergangen worden, oder ob diese imaginär sind, hat man für die quadrirte Differenzengleich. der gegebenen Gleich. (§. 173): $z^3 - 42z^2 + 441\,z - 49 = 0$ und in dieser $g = \frac{1}{10}$ als innere Grenze, folglich $\delta = \sqrt{\cdot 10} = \cdot 3$ für die Zahl, welche kleiner als die kleinste Differenz zwischen den W. der ursprünglichen Gleich. ist. Setzt man demnach für x nach und nach die Zahlenreihe: 0, ·3, ·6 etc. und 0, $-$·3, $-$·6 etc., so findet man, dafs X sein Zeichen für $x = 3$ und 3·3 (von $-$ in $+$), für $x = -1{\cdot}2$ und $-1{\cdot}5$ (von $-$ in $+$) und endlich für $x = -1{\cdot}5$ und $-1{\cdot}8$ (von $+$ in $-$) ändert, dafs also eine W. zwischen 3 und 3·3, eine zweite zwischen $-1{\cdot}2$ und $-1{\cdot}5$, und endlich die dritte reelle W. zwischen $-1{\cdot}5$ und $-1{\cdot}8$ liegt; und in der That, die 3 W. der gegebenen Gleich. sind: $x_1 = 3{\cdot}048917$, $x_2 = -1{\cdot}692017$, $x_3 = -1{\cdot}356895$ *).

---

*) Nach der Methode von Lagrange, d. i. durch Kettenbrüche ausgedrückt, findet man

$$x_1 = 3 + \cfrac{1}{20 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + ,}}}}}}$$

$$-x_2 = 2 - \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{20 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + ,}}}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{20 + ,}}}}$$

$$-x_3 = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{20 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + .}}}}}}$$

Anmerk. Transformirt man die aufzulösende Gleich. in eine andere, deren W. m Mal so grofs sind (§. 170); so wird in der transformirten Gleich. $m\delta$ jene Zahl seyn, welche die besagte Eigenschaft besitzt, und sofort kleiner als die kleinste Differenz der W. dieser Gleich. ist. Man kann daher, anstatt die mühselige quadrirte Differenzengleich. zu suchen, die W. der aufzulösenden Gleich. auf Gerathewohl vergrössern, in der transform. Gleich. für x abermals die Reihe der natürlichen Zahlen 0, 1, 2,... substituiren und sehen, ob man nicht vielleicht darin die sämmtlichen W. entdeckt. Ist diefs der Fall, so kann man diese letztere Gleich. auflösen und jede W. durch m dividiren, um die W. der gegeb. Gleich. zu erhalten, oder es ist, wenn man gleich die ursprüngliche Gleich. auflösen will, jetzt $\delta = \frac{1}{m}$ zu nehmen.

So war im vorigen Beispiele $\delta = \cdot 3$, also ist $4\delta = 1\cdot 2$, und man kann daher in der Gleich. $y^3 - 112y - 448 = 0$, deren W. 4 Mal so grofs als die der erwähnten Gleich. $x^3 - 7x - 7 = 0$ sind, bei der Substit. von $y = 0, 1, 2, \ldots$ durchaus keine W. übergehen. Man findet in der That, dafs eine W. zwischen 12 und 13, eine zweite zwischen -5 und -6, und endlich die 3. W. zwischen -6 und -7 liegt, und zwar sind diese Wurzeln: $12\cdot 19566$, $-5\cdot 42759$ und $-6\cdot 76807$.

§. 207. Um schliefslich noch etwas über die Kennzeichen der imaginären W. einer Gleich. $X = 0$ beizufügen, so sind die vorzüglichsten in Kürze folgende:

1. Behält eine Gleich., in welcher Glieder fehlen, nicht die nämliche Anzahl von Zeichenwechsel und Folgen, wenn man sich die fehlenden Glieder ein Mal mit $+$ und dann auch mit dem Zeichen — eingeschaltet denkt; so hat die Gleich. imagin. W. Dieser Satz läfst sich übrigens nicht umkehren, d. h. man darf aus dem Umstande, dafs in beiden genannten Fällen diese Anzahl von Wechsel und Folgen dieselbe ist, noch nicht auf die Abwesenheit aller imag. W. schliefsen.
2. Ist die Gesammtzahl der Zeichenwechsel in der gegeb. Gleich. $X = 0$, in welcher Glieder fehlen, und in jener $\underline{X} = 0$ mit entgegengesetzten W. kleiner als der Grad

der Gleich. n; so besitzt diese Gleich. $X=0$ ebenfalls imagin. W. Auch dieser Schlufs darf nicht umgekehrt werden.

3. Fehlen in einer Gleich. 2 oder mehrere auf einander folgende Glieder, so besitzt die Gleich. ebenfalls imaginäre W. Von diesen Sätzen wird man die Beweise leicht selbst finden können.

4. Das vorzüglichste und bestimmteste Kennzeichen jedoch für das Vorhandenseyn oder Nichtvorhandenseyn von imagin. W. der Gleich. $X=0$ folgt aus der entsprechenden quadrirten Differenzengleich. $Z=0$, indem diese wenigstens eben so viele Zeichenfolgen darbieten mufs, als die Gleich. $X=0$ Paare von imagin. W. besitzt, und umgekehrt, kann diese Gleich. nur reelle W. haben, wenn im Polynome Z lauter Zeichenwechsel vorkommen. Denn da (§. 160) die imagin. W. immer paarweise und conjugirt vorkommen, so sey $p+q\sqrt{-1}$ und $p-q\sqrt{-1}$ ein solches Paar; ihre Differenz ist $2q\sqrt{-1}$ und davon das Quadrat $=-4q^2$ sofort negativ, welche als W. der Gleichung $Z=0$ erscheint, folglich (§. 166) in dem Polynome Z wenigstens eine Zeichenfolge erzeugt. Kommt demnach in Z keine solche Zeichenfolge vor, so kann die Gleich. $X=0$ durchaus keine imaginären W. besitzen *).

So hat die quadr. Differenzengl. $z^3-42z^2+441z-49=0$ der obigen Gleich. (§. 206) $x^3-7x-7=0$, keine Zeichenfolge, zum Beweis, dafs hier, wie wir in der That auch gefunden haben, die Gleich. lauter reelle W. besitzt.

Dagegen erhält man für die Gleich. $x^3-6x-7=0$ die quadr. Differenzengleich.: $z^3-36z^2+324z+459=0$, und da hier eine Zeichenfolge vorkommt; so besitzt die erste Gleich. nothwendig ein Paar imag. W.; und in der That, die W. dieser Gleich. sind: $2{\cdot}9005718$ und $-1{\cdot}4502859 \pm 0{\cdot}5567652\sqrt{-1}$.

*) Die Berechnung der imag. W. betreffend, so wie über mehres Andere hiehergehörige s. Bd. I. S. 153 — 167.

II.

Gleichungen mit zwei Unbekannten.

§. **208.** Erklär. Die allgemeine Form einer Gleichung des n. Grades mit 2 Unbekannten x und y ist:

$$P_0 x^n + P_1 x^{n-1} + P_2 x^{n-2} + \ldots + P_{n-1} x + P_n = 0,$$

wobei P_0, $P_1, \ldots P_n$ algebraische Functionen von y, jedoch beziehungsweise höchstens vom 0^{ten}, $1^{\text{ten}}, \ldots n^{\text{ten}}$ Grad, bezeichnen, also die Form haben: $P_0 = a$, $P_1 = b + cy$, $P_2 = d + ey + fy^2$ u. s. w.

§. **209.** Es seyen nun die beiden Gleichungen

$$P_0 x^n + P_1 x^{n-1} + \ldots + P_{n-1} x + P_n = 0 \; [A = 0],$$

$$P'_0 x^m + P'_1 x^{m-1} + \ldots + P'_{m-1} x + P'_m = 0 \; [A' = 0]$$

beziehungsweise des n. und m. Grades, die wir Kürze halber durch $A = 0$ und $A' = 0$ bezeichnen wollen, zur Auflösung gegeben. Um die sämmtlichen Auflösungen, d. i. alle Paare zusammengehöriger Werthe von x und y zu finden, welche gleichzeitig die Polynome A und A' auf Null bringen; so sey $x = \alpha$, $y = \beta$ eine solche Auflösung. Stellt man sich vor, daſs in P_0, $P_1, \ldots$ P'_0, $P'_1, \ldots$ für y bereits dieser Werth β gesetzt worden; so müssen die Polynome A und A' (§. 155) den gemeinsch. Factor $x - \alpha$ besitzen, welchen man auch in der That nach der bekannten Verfahrungsweise unter dieser Voraussetzung finden würde. Eben so würde man, wenn $x = \alpha'$, $y = \beta'$ eine 2. Auflösung unserer Gleichungen bildete, und in P_0, $P_1, \ldots$ P'_0, $P'_0, \ldots$ $y = \beta'$ gesetzt worden wäre, durch dieses Verfahren in A und A' den gemeinsch. Divisor $x - \alpha'$ finden u. s. w.

§ **210.** Da man aber die Werthe von $y = \beta$, $\beta', \ldots$ nicht im Voraus weiſs, so wird man, ohne eine vorausgegangene Substit. in P_0, P_1 u s. w., zu A und A' den gröſsten gemeinsch. Divisor aufsuchen, und, da dabei die Reste in Beziehung auf x nach und nach immer von niedrigerer Ordnung werden, den letzten Rest, welcher kein

x mehr enthält, gleich Null setzen, um die End- oder Finalgleichung in y zu erhalten, aus welcher man dann für y die sämmtlichen Werthe β, β'... bestimmen kann (indem für jeden dieser Werthe der letzte Rest verschwinden muſs). Setzt man ferner den vorletzten Rest (den gemeinsch. Divisor), welcher von der Form $a + bx$ seyn wird, und wobei a und b Functionen von y sind, ebenfalls Null; so erhält man aus dieser Gleich., indem man darin für y nach und nach die Werthe β, β',... substituirt, die correspondirenden Werthe von $x = \alpha$, α'... (ist nämlich $y = \beta$ gesetzt worden, so ist diese letztgenannte Gleich. sofort $x - \alpha = 0$, woraus $x = \alpha$ folgt; für $y = \beta'$ wird diese Gleich.: $x - \alpha' = 0$, woraus $x = \alpha'$ folgt u. s. w.).

Um z. B. die Gleich. $A = x^2 - (y+1)x - 2(y^2+2y+1) = 0$ und $A' = x^2 + (1-3y)x + 2y^2 - 2y = 0$, welche bereits nach x geordnet sind, aufzulösen, hat man zuerst, das Polynom A' als Divisor genommen, den Quotienten 1 und, wenn man gleich den gem. Factor 2 ausläſst, den Rest: $(y-1)x - (2y^2+y+1)$. Multiplicirt man weiter, zur Erzielung ganzer Quotienten, das Polyn. A', welches jetzt Dividend wird, mit $(y-1)^2$; so erhält man nach einer zweimaligen Division den Quot. $(y-1)x + 5y - y^2$ und den Rest (ohne x) $3y^3 + 10y^2 + 3y$, also die Finalgleich. in y: $3y^3 + 10y^2 + 3y = 0$, aus welcher man sofort $y = 0$, -3 und $-\frac{1}{3}$ findet. Setzt man daher den vorletzten Rest (in Bezug auf x vom 1. Grad) gleich Null, so erhält man die Gleichung $(y-1)x - (2y^2 + y + 1) = 0$, und daraus $x = \frac{2y^2+y+1}{y-1}$, also für $y = 0$: $x = \frac{1}{-1} = -1$, für $y = -3$: $x = -4$ und für $y = -\frac{1}{3}$, sofort $x = -\frac{2}{3}$. Man hat also für die gegebenen Gleich. die 3 Auflösungen: $x = -1$, $y = 0$, $x = -4$, $y = -3$ und $x = -\frac{2}{3}$, $y = -\frac{1}{3}$.

Auf gleiche Art findet man für die beiden Gleich. $x^3 - 7x + 6 = 0$ und $3x^2 + 3yx + y^2 - 7 = 0$, die Endgleichung in y: $y^6 - 42y^4 + 441y^2 - 400 = 0$ (vergl. §. 172, Beisp.) und die Auflösungen: $x = -3$, $y = 4$; $x = 1$, $y = -4$; $x = -3$, $y = 5$; $x = 2$, $y = -5$; $x = 1$, $y = 1$ und $x = 2$, $y = -1$.

§. 211. Hat man im Verlaufe der Rechnung, zur Erzielung ganzer Quotienten, Factoren, die im Allgemeinen Functionen von y seyn werden, eingeführt; so kann es geschehen, dafs diese, wenigstens zum Theil, in der Finalgleich. enthalten sind und sonach fremdartige Auflösungen liefern. Wird nämlich einer der Dividende mit F (als Function von y) multiplicirt, und ist R der correspondirende Divisor (als Funct. von x und y); so sind die aus dem Systeme $F=0$, $R=0$ folgenden Werthe von y und x, als den gegebenen Gleich. $A=0$, $A'=0$ fremdartige Auflösungen, wegzulassen.

Nimmt man z. B. von den beiden Gleich. $A=yx^2-3yx-(y^2-2)=0$ u. $A'=(y^2-3y+2)x^2+(y-1)x-(3y-1)=0$ das Polynom A zum Dividend und multiplicirt dieses sonach mit y^2-3y+2; so erhält man nach der ersten Division den Rest: $-y(3y^2-8y+5)x-(y^4-3y^3-3y^2+7y-4)$, welcher jetzt Divisor wird. Wegen $y(3y^2-8y+5)=y(y-1)(3y-5)$ und $y^2-3y+2=(y-1)(y-2)$ mufs man, um bei der folgenden Division ganze Quotienten und Reste zu erhalten, A' noch (mit Rücksicht darauf, dafs der Quotient zweigliederig wird) mit $y^2(y-1)(3y-5)^2$ multipliciren. Man erhält hierauf nach der 2. Division den von x unabhängigen Rest:

$$y^9-8y^8+12y^7+16y^6+y^5-170y^4+322y^3-294y^2+148y-32,$$

welcher, sofort $=$ Null gesetzt, die Endgleichung gibt.

Da man aber bei der 1. Division den Factor $y^2-3y+2=(y-1)(y-2)$ eingeführt hat, so kann die Endgleichung die fremden Factoren $y-1$ und $y-2$ enthalten. Indefs findet man, wenn man $(y-1)(y-2)=0$ und auch den betreffenden Divisor $A'=0$ setzt, für $y=1$ aus $A'=0$ keinen Werth für x, indem alle Glieder mit x verschwinden; dagegen erhält man daraus für $y=2$ sofort $x=5$: es wird also in der Endgleichung der Factor $y-1$ nicht, dagegen aber jener $y-2$ enthalten seyn, durch welchen man diese, um die wahre Finalgleichung zu erhalten, dividiren mufs. Dadurch erhält man (wie auch unmittelbar, wenn man gleich Anfangs A' zum Dividend und A zum Divisor nimmt) die wahre Endgleichung:

$$y^8-6y^7+16y^5+33y^4-104y^3+114y^2-66y+16=0.$$

Der im 2. Dividend A' eingeführte Factor jedoch hat auf die Finalgleichung keinen Einflufs. So wie dieses überhaupt durchgehends von jenem Dividend gilt, dessen entsprechender Divisor in Bezug auf x vom 1. Grad ist.

§. **212.** Hat man zur Vereinfachung der Rechnung, wie es bei diesem Verfahren erlaubt ist, irgend einen Divisor vor der Division in seinem entsprechenden Dividend D durch den Factor F abgekürzt, und ist dieser eine Function von y; so mufs man zu den am Ende erhaltenen Auflösungen noch jene aus dem Systeme $D=0$, $F=0$ resultirenden, hinzufügen. Auch müfste man, um die vollständige Finalgleichung in y zu erhalten, die so gefundene noch mit dem Factor F, diesen auf eine Potenz erhoben, die dem Ordnungsexponenten von D in Bezug auf x gleich kommt, multipliciren.

Nimmt man, um die Gleich. $A=x^3-4yx^2+5y^2x-2y^3=0$ und $A'=x^3-4x^2+(6-y)x-2y^2=0$ aufzulösen, das Polynom A' zum Divisor; so erhält man nach der 1. Division den Rest (als 2. Divisor) $-4(y-1)x^2+(5y^2+y-6)x-2y^2(y-1)$, welcher den Factor $y-1$ besitzt. Kürzt man durch diesen ab, so ist der vereinfachte 2. Divisor: $-4x^2+(5y+6)x-2y^2$, und das Polynom A' der zugehörige Dividend D. — Nach vollendeter ganz einfacher Rechnung findet man, wenn durch den gemeinsch. Factor -64 gleich abgekürzt wird, die Endgleich.: 1) $2y^6-27y^5+108y^4-108y^3=0$. Da nun ferner der vorletzte Rest oder letzte Divisor gleich Null gesetzt, die Gleich. liefert: $(17y^2-36y+36)x-(10y^3+12y^2)=0$; so erhält man aus diesen beiden Gleichungen die Auflösungen: $y=0$ 3 Mal, 6, 6, $\frac{3}{2}$ und $x=0$ 3 Mal, 6, 6, 3. Zu diesen nun kommen noch jene, welche aus dem Systeme $y-1=0$ und $x^3-4x^2+(6-y)x-2y^2=0$ hervorgehen, also jene: $y=1$, $x=1$, 1, 2. — Will man endlich die vollständige Finalgleichung in y haben, so mufs man die unvollständige 1) noch mit $(y-1)^3$ multipliciren.

§. **213.** Wird die aus dem vorletzten Reste gebildete Gleich. $a+bx=0$ (§. 210) für irgend einen aus der Endgleich. gefundenen Werth $y=\gamma$ identisch Null, d. h. wird $x=-\frac{a}{b}=\frac{0}{0}$; so ist diefs ein Zeichen, dafs diesem Werthe von $y=\gamma$ mehrere Werthe von x zukommen. In diesem Falle setze man den vor vorletzten Rest, d. i. jenen, welcher in Bezug auf x vom 2. Grade ist, gleich Null, und bestimme aus dieser Gleich. die beiden den $y=\gamma$

zukommenden Werthe von x. Sollte auch diese Gleich. für $y=\gamma$ identisch Null werden, so würden diesem Werthe von y mehr als zwei Werthe von x entsprechen, und man müſste diese, wenn es deren 3 sind, aus dem nächst vorhergehenden Reste oder Divisor, welcher also nach x vom 3. Grade ist, bestimmen u. s. w.

Für die Auflösungen der Gleichungen $A=x^2+(y+2)x-6y^2-4y=0$, $A'=x^2+3x-y^2-5y-4=0$ erhält man, das Polynom A' als Divisor genommen, als 1. Rest:

$$(y-1)x-5y^2+y+4.$$

Wird hierauf (da wir diesen Rest als neuen Divisor absichtlich nicht durch $y-1$ abkürzen wollen) das Polynom A, als nunmehrigen Dividend (wegen der 2 maligen Division), mit $(y-1)^2$ multiplicirt, so erhält man nach einer 2 maligen Division den von x unabhängigen Rest: $24y^4+2y^3-52y^2+2y+24$, welcher Null gesetzt, die Endgleich. und diese die Wurzeln $y=-\frac{3}{4}, -\frac{4}{3}, 1, 1$ liefert. Der obige Rest in x gleich Null gesetzt, gibt $x=\dfrac{5y^2-y-4}{y-1}$, und daraus folgt für $y=-\frac{3}{4}$ und $-\frac{4}{3}$ beziehungsweise $x=\frac{1}{4}$ und $-\frac{8}{3}$; dagegen wird für $y=1$, $x=\frac{0}{0}$. Setzt man also den nächst vorhergehenden Rest oder Divisor, hier nämlich das Polynom A' gleich Null, und in dieser Gleich. $y=1$; so erhält man $x^2+3x-10=0$, und daraus für die diesem Werthe von y entsprechenden beiden Werthe von x: 2 und -5.

Anmerk. Würde man oben vor der 2. Division den betreffenden Divisor, mit Rücksicht auf das in §. 212 Gesagte, durch den gemeinsch. Factor $y-1$ abgekürzt haben; so würde sich in der (unvollst.) Endgleich. die Wurzel $y=1$, wofür man eben $x=\frac{0}{0}$ erhalten hat, gar nicht vorgefunden haben.

§. 214. Es kann endlich kommen, daſs der letzte Rest entweder an und für sich schon Null (also gar kein Rest bleibt) oder eine bestimmte algebraische oder numerische Gröſse ohne y ist. Im 1. Falle enthalten die beiden Polynome A und A' an und für sich schon, ohne daſs y erst bestimmte Werthe zu erhalten braucht, einen gemeinschaftlichen Factor in x, und die gegebenen Gleichungen $A=0$, $A'=0$ sind sonach unbestimmt. Im 2. Falle, in welchem also eine bestimmte unveränderliche Gröſse gleich Null gesetzt werden müſste, stehen die beiden gegebenen Gleichungen mit einander im Widerspruche.

1) So erhält man z. B. für die beiden Gleichungen $A = x^2 - (3y - 1)x + 2y^2 - y = 0$ und $A' = x^2 - (4y - 2)x + 3y^2 - 2y = 0$ als 1. Rest oder 2. Divisor: $(y-1)x - y(y-1)$, welcher durch $y - 1$ abgekürzt, sofort in seinem Dividend A' ohne Rest enthalten, also $x - y$ der gemeinsch. Factor der beiden Polynome A und A' ist. Und in der That, die gegebenen Gleichungen sind auch:

$$(x-y)(x-2y+1) = 0 \text{ und } (x-y)(x-3y+2) = 0,$$

und diese werden offenbar für alle aus $x - y = 0$ folgenden unzähligen Werthe von x und y befriedigt.

2) Für die Gleich. $x^2 - (2y-3)x + y^2 - 3y + 2 = 0$ und $x^2 - (2y+3)x + y^2 + 3y + 2 = 0$ erhält man (immer das 2. Polynom zum Divisor genommen) als 1. Rest: $6x - 6y$, und als 2. von x unabhängigen Rest: $+2$; da dieser nun nicht Null werden kann, so sind die gegebenen Gleichungen mit einander im Widerspruche und haben keine Auflösung *).

Fünftes Capitel.

Von den Reihen.

Erklärungen.

§. 215. Eine nach irgend einem Gesetze gebildete Folge von Gröſsen wird Reihe, die Gröſsen selbst aber werden Glieder derselben genannt.

§. 216. Wir bezeichnen die Glieder einer Reihe einfach durch a_1, a_2, $a_3 \ldots a_n$, so, daſs also dieses letztere das n. Glied darstellt. Laufen die Glieder ohne Ende fort, so heiſst die Reihe eine unendliche.

§. 217. Ein allgemeiner Ausdruck, welcher jedes beliebige Glied einer Reihe, wie z. B. a_n, entweder durch

*) Noch mehreres hiehergehörige, so wie auch die Anwend. der *Regula falsi* auf Gleich. mit zwei Unbekannten, Bd. I. S. 168 — 186.

mehrere vorausgehende Glieder, oder unmittelbar als Function von n darstellt, heiſst das allgemeine Glied der Reihe; im ersten Falle wird dieses durch Recursion, im letztern unabhängig (independent) erhalten.

§. 218. Dagegen wird ein Ausdruck S_n, welcher, je nachdem man $n = 1, 2, \ldots m$ setzt, die Summe des 1., 1. und 2., 1., 2.... und m. Gliedes der Reihe liefert, das summatorische Glied oder die Summenformel der Reihe genannt. Manchmal bezeichnet man auch das Summenglied einer Reihe, deren allgemeines Glied $= a_n$ ist, durch $\int(a_n)$.

§. 219. Kann man sich bei Berechnung der Summe $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n +$ einer unendlichen Reihe, dem wahren Werthe um so mehr nähern, je gröſser man n nimmt, d. i. je mehr Glieder man beibehält, und kann dadurch überhaupt jede beliebige Annäherung an den wahren Werth herbeigeführt werden; so sagt man die Reihe convergire oder sey summirbar; im entgegengesetzten Falle heiſst sie divergent, in manchen Fällen auch unbestimmt. Oder mit andern Worten: gibt es eine bestimmte endliche Grenze G (§. 128), welcher sich S_n, bei dem unendlichen Wachsen von n, ohne Ende nähert; so ist die Reihe convergent, im Gegentheile aber divergent.

§. 220. Läſst sich jedes Glied einer Reihe durch mehrere der vorhergehenden Glieder nach einem und demselben Gesetze herleiten; so wird die Reihe eine wiederholende oder recurrirende genannt.

§. 221. Aufgabe. Aus dem summatorischen Gliede einer Reihe das allgemeine Glied und die Reihe selbst zu finden.

Aufl. Da man offenbar das n. Glied einer Reihe erhält, indem man von der Summe der ersten n jene der ersten $n - 1$ Glieder abzieht; so hat man $a_n = S_n - S_{n-1}$.

Aus diesem allgemeinen Glied erhält man ferner die Reihe selbst, indem man nach und nach $n = 1, 2, 3, \ldots$ setzt.

Ist z. B. $S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ das gegebene Summenglied,

so ist $S_{n-1} = \frac{(n-1)n(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$, und daher

$$a_n = \frac{n(n+1)(n+2) - (n-1)n(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$$

das allgemeine Glied, so wie daraus für $n = 1, 2, 3, \ldots$ die Reihe: $1, 3, 6, 10, 15, \ldots$

§. **222**. Zusatz. Aus dieser Ableitung des allgem. Gliedes aus dem summatorischen folgt unmittelbar, daſs, wenn das summatorische Glied einer Reihe die Form hat: $S_n = An + Bn^2 + \ldots + Pn^{m+1}$, sofort das allgemeine Glied von der Form ist: $a_n = a + bn + \ldots + pn^m$.

Arithmetische Reihen.

a) Differenzen-Reihen.

Erklärungen.

§. **223**. Zieht man in der Reihe $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, a_{n+1} \ldots$ jedes Glied von seinem nächstfolgenden ab; so heiſst jeder solche Unterschied die Differenz des abgezogenen Gliedes, und wird dadurch bezeichnet, daſs man diesem Gliede das Differenzzeichen Δ, welchem man noch der folgenden Differenzen wegen, den Ordnungsexponenten 1 beifügt und dann erste Differenz nennt, vorsetzt. Es ist nämlich $a_2 - a_1 = \Delta^1 a_1$, $a_3 - a_2 = \Delta^1 a_2, \ldots$ $a_{n+1} - a_n = \Delta^1 a_n$.

§. **224**. Verfährt man in der auf diese Weise entstehenden ersten Differenzreihe $\Delta^1 a_1, \Delta^1 a_2, \ldots$ $\Delta^1 a_n, \Delta^1 a_{n+1} \ldots$ wie in der vorigen; so erhält man die Differenzen der ersten, also die zweiten Differenzen der ursprünglichen Reihe. Es ist nämlich: $\Delta^1 a_2 - \Delta^1 a_1 = \Delta^1(\Delta^1 a_1) = \Delta^2 a_1$ u. s. w. $\Delta^1 a_{n+1} - \Delta^1 a_n = \Delta^2 a_n$.

Auf diese Weise erhält man die zweite Differenzreihe $\Delta^2 a_1, \Delta^2 a_2, \ldots \Delta^2 a_n, \ldots$ aus welcher nach derselben Verfahrungsart die dritten Differenzen gewonnen werden u. s. w.

§. **225**. Sind die ersten Differenzen einer Reihe, d. i. $\Delta^1 a_1, \Delta^1 a_2, \ldots$ einander gleich; so heifst die Reihe eine arithmetische, und zwar der ersten Ordnung. Eben so wird die Reihe eine arithmetische der 2., 3., ... m. Ordnung genannt, wenn beziehungsweise erst die 2., 3., ... m. Differenzen derselben einander gleich sind.

§. **226**. Aufgabe. Eine beliebige Differenz irgend eines Gliedes der gegebenen Reihe $a_1, a_2, \ldots$ d. i. $\Delta^m a_n$, zu bestimmen.

Aufl. Zufolge des §. 223 ist

$$\Delta^1 a_n = a_{n+1} - a_n = (-1)^1 (a_n - a_{n+1}).$$

Nach §. 224: $\Delta^2 a_n = \Delta^1 a_{n+1} - \Delta^1 a_n = a_{n+2} - a_{n+1} - (a_{n+1} - a_n) = (-1)^2 (a_n - 2a_{n+1} + a_{n+2})$.

Weiters: $\Delta^3 a_n = \Delta^2 a_{n+1} - \Delta^2 a_n = \Delta^1 a_{n+2} - \Delta^1 a_{n+1} - (\Delta^1 a_{n+1} - \Delta^1 a_n) = [\Delta^1 a_{n+2} - 2\Delta^1 a_{n+1} + \Delta^1 a_n]$
$= a_{n+3} - a_{n+2} - 2(a_{n+2} - a_{n+1}) + a_{n+1} - a_n$
$$= (-1)^3 (a_n - 3a_{n+1} + 3a_{n+2} - a_{n+3}) \text{ u. s. w.}$$

Setzt man nun nach diesem Gesetze

$$\Delta^m a_n = (-1)^m \left[a_n - \binom{m}{1} a_{n+1} + \binom{m}{2} a_{n+2} - + \ldots \pm a_{n+m}\right] \quad (\mathrm{I}$$

so findet man leicht durch höhere Induction [I., 194] die allgemeine Giltigkeit dieses Gesetzes für jede ganze positive Zahl m. Zugleich lassen sich auch aus dem Gange dieser Entwickelung die nach dem nämlichen Gesetze gebildeten Ausdrücke für $\Delta^m a_n$, durch die $m-1$. oder $m-2$. Differenzen u. s. w. ausgedrückt, ersehen.

§. **227**. Aufgabe. Das allgemeine Glied a_n einer Reihe $a_1, a_2, a_3 \ldots$ durch das 1. Glied a_1 und durch die Differenzen von a_1 auszudrücken.

Aufl. Aus den Entwickelungen des vorigen Paragraphes folgt unmittelbar:

$a_2 = a_1 + \Delta^1 a_1$ [wegen $\Delta^1 a_1 = a_2 - a_1$],

$a_3 = a_2 + \Delta^1 a_2 = a_1 + \Delta^1 a_1 + \Delta^1 a_1 + \Delta^2 a_1$

[wegen $\Delta^2 a_1 = \Delta^1 a_2 - \Delta^1 a_1$]

$= a_1 + 2\Delta^1 a_1 + \Delta^2 a_1$,

$a_4 = a_3 + \Delta^1 a_3 = a_2 + \Delta^1 a_2 + \Delta^1 a_2 + \Delta^2 a_2$

$= a_2 + 2\Delta^1 a_2 + \Delta^2 a_2$

$= a_1 + \Delta^1 a_1 + 2(\Delta^1 a_1 + \Delta^2 a_1) + \Delta^2 a_1 + \Delta^3 a_1$

[wegen $\Delta^3 a_1 = \Delta^2 a_2 - \Delta^2 a_1$]

$= a_1 + 3\Delta^1 a_1 + 3\Delta^2 a_1 + \Delta^3 a_1$ u. s. w.

Man hat also allgemein nach diesem Gesetze:

$$a_n = a_1 + \binom{n-1}{1} \Delta^1 a_1 + \binom{n-1}{2} \Delta^2 a_1 + \ldots + \Delta^{n-1} a_1 \quad \text{(II}$$

wobei ebenfalls wieder die allgemeine Giltigkeit für jeden ganzen positiven Werth von n leicht nachgewiesen werden kann [I., 196]. Aus dem befolgten Gange der Entwickelung ist zugleich zu ersehen, nach welchem Gesetze stufenweise a_n durch a_{n-1}, dann a_{n-2} u. s. w. ausgedrückt werden könne.

§. **228.** Aufgabe. Das summatorische Glied S_n der Reihe $a_1, a_2, a_3, \ldots$ zu finden.

Aufl. Nach §. 218 folgt $S_1 = a_1$,

$S_2 = a_1 + a_2 = a_1 + a_1 + \Delta^1 a_1 = 2a_1 + \Delta^1 a_1$ [vorig. §.],

$S_3 = S_2 + a_3 = (2a_1 + \Delta^1 a_1) + (a_1 + 2\Delta^1 a_1 + \Delta^2 a_1)$

[vorig. §.]

$= 3a_1 + 3\Delta^1 a_1 + \Delta^2 a_1$, u. s. w.

Setzt man allgemein nach diesem Gesetze:

$$S_n = \binom{n}{1} a_1 + \binom{n}{2} \Delta^1 a_1 + \binom{n}{3} \Delta^2 a_1 + \ldots + \Delta^{n-1} a_1 \quad \text{(III}$$

so findet man wieder [I., 197] ganz leicht durch höhere Induction, dafs diese Formel für jeden ganzen positiven Werth von n giltig sey.

§. **229.** Zusatz 1. Die Formeln II und III erstrecken sich offenbar nur dann bis zum angegebenen letzten Gliede $\Delta^{n-1} a_1$, wenn die Reihe $a_1, a_2, \ldots$ eine arithmetische, wenigstens der $n-1$. Ordnung ist. Ist sie dagegen blofs von der m. Ordn., so brechen diese Formeln von selbst bei dem Gliede mit $\Delta^m a_1$ ab. Daraus folgt auch, dafs für eine solche Reihe die $m+1$ ersten Glieder gegeben seyn müssen.

§. **230**. Zusatz 2. Aus den Formeln II und III folgt unmittelbar, dafs für eine arithm. Reihe der m. Ordnung das allgemeine und summatorische Glied beziehungsweise die Form haben: $a_n = a + bn + cn^2 + \ldots + pn^m$ und $S_n = An + Bn^2 + Cn^3 + \ldots + Pn^{m+1}$ (vergl. §. 222). Zugleich ergeben sich auch noch nachstehende Sätze:

1. Die m. Potenzen der natürlichen Zahlen, d. i. 1^m, 2^m, $3^m, \ldots$ bilden eine arithm. Reihe der m. Ordnung.
2. Eine eben solche Reihe bilden auch die m. Potenzen der Glieder der R. a, $a+d$, $a+2d, \ldots$
3. Überhaupt bilden die m. Potenzen der Glieder einer arithm. Reihe der r. Ordnung eine arithm. R. der mr. Ordnung.
4. Werden die gleichnamigen Glieder mehrerer arithm. Reihen durch Addition oder Subtraction mit einander verbunden, so entsteht eine arithm. Reihe, deren Ordnungsexponent dem höchsten der verbundenen Reihen gleich kommt.
5. Werden dagegen die correspondirenden Glieder dieser Reihen mit einander multiplicirt, so entsteht eine arithm. Reihe, deren Ordnungsexponent gleich ist der Summe aus jenen der einzelnen Reihen.

Beispiel 1 Um für die Reihe 2, 4, 9, 17, 28, ... welche, da die 1. Differenzreihe: 2, 5, 8, 11 ... und die zweite: 3, 3, 3 ... ist, sofort eine arithmetische Reihe der 2. Ordnung bildet, das allgemeine und summatorische Glied zu finden; hat man, wegen $a_1 = 2$, $\Delta^1 a_1 = 2$, $\Delta^2 a_1 = 3$, $\Delta^3 a_1 = \Delta^4 a_1 = \ldots = 0$; nach Form. II, §. 227:

$$a_n = 2 + (n-1)\,2 + \tfrac{3}{2}(n-1)(n-2) = \frac{3n^2 - 5n + 6}{2},$$

und nach Form. III, §. 228:

$$S_n = 2n + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\,2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,3 = \frac{n(n^2 - n + 4)}{2};$$

Benützt man die in §. 230 für a_n und S_n angegebene Form, so lassen sich diese beiden Formeln auch auf folgende Weise finden. Da die vorliegende Reihe eine arithm. der 2. Ordnung ist, so setze man $a_n = a + bn + cn^2$, wo a, b, c zu bestimmen sind. Nimmt man daher, um die hiezu nöthigen 3 Gleich. zu erhalten, successive $n = 1, 2, 3$, wodurch a_n beziehungsweise $= 2, 4, 9$ seyn mufs; so erhält man:

$$2 = a + b + c,\quad 4 = a + 2b + 4c,\quad 9 = a + 3b + 9c,$$

und aus diesen 3 Gleich.: $a = 3$, $b = -\frac{5}{2}$, $c = \frac{3}{2}$, so wie endlich damit aus der vorigen Gleich. für a_n, wie zuvor:

$$a_n = \frac{6 - 5n + 3n^2}{2}.$$

Ferner erhält man aus der hier anzunehmenden Gleichung $S_n = An + Bn^2 + Cn^3$, wieder für $n = 1, 2, 3$, wofür S_n beziehungsweise die Werthe 2, $2 + 4 = 6$, $6 + 9 = 15$ erhält, die 3 Gleichungen: $2 = A + B + C$, $6 = 2A + 4B + 8C$, $15 = 3A + 9B + 27C$, und daraus $A = 2$, $B = -\frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{2}$, also, wenn man diese Werthe substituirt, wie vorhin:

$$S_n = \frac{4n - n^2 + n^3}{2}.$$

Beispiel 2. Um die Summenformel für die Reihe $1^3, 2^3, 3^3 \ldots n^3$ zu finden, hat man $a_1 = 1$, $\Delta^1 a_1 = 7$, $\Delta^2 a_1 = 12$, $\Delta^3 a_1 = 6$ (alle folgenden Differenzen sind Null), und daher, nach Form. III, §. 228, und nach einer einfachen Reduction:

$$S_n = \frac{n^2 (n + 1)^2}{4}.$$

b) Summen-Reihen.

Erklärungen.

§. 231. Bildet man aus der Grundreihe $1, d, d, d, \ldots$ wo d was immer für eine ganze positive Zahl bedeuten kann, die Glieder einer Reihe dadurch, dafs man nach und nach $1, 2, 3, \ldots$ Glieder derselben addirt; verfährt man hierauf in der entstehenden Reihe auf die nämliche Art, dann in der dadurch gebildeten Reihe wieder so u. s. f.; so erhält man beziehungsweise arithmetische Reihen der 1., 2., 3.... Ordnung, welche Summenreihen heifsen, und sich von den Differenzenreihen nur durch die Art der Entstehung unterscheiden. Man erhält nämlich dadurch:

$$1,\ d,\ d,\ d, \ldots \text{ Grundreihe,}$$

$$\alpha)\quad 1,\ 1+d,\ 1+2d,\ 1+3d, \ldots \text{ arithm. R. der 1. Ordnung,}$$

$$\beta)\quad 1,\ 2+d,\ 3+3d,\ 4+6d, \ldots \text{ arithm. R. der 2. Ordnung,}$$

$$\gamma)\quad 1,\ 3+d,\ 6+4d,\ 10+10d, \ldots \text{ arithm. R. der 3. Ordnung}$$

u. s. w.

§. **232.** Von diesen so gebildeten Reihen heiſst jene β), welche der 2. Ordnung ist, auch Reihe der Polygonal- oder Vieleckzahlen, und zwar insbesondere für $d=1$, wodurch die R. 1, 3, 6, 10,... entsteht, der Dreieck- oder Trigonalzahlen; für $d=2$, wodurch die R. 1, 4, 9, 16,... entsteht, der Quadrat- oder Tetragonalzahlen; für $d=3$, wodurch die R. 1, 5, 12, 22,... entsteht, der Fünfeck- oder Pentagonalzahlen u. s. w.; weil sich z. B. eben so viele materielle Puncte, als die Glieder dieser Reihen Einheiten haben, beziehungsweise in regelmäſsige Dreiecke, Vierecke, Fünfecke u. s. w. ordnen lassen.

§. **233.** Aus einem ähnlichen Grunde wird die Reihe γ), welche sofort von der 3. Ordnung ist, Reihe der Pyramidalzahlen, und zwar beziehungsweise für $d=1$, 2, 3,... der 3-, 4-, 5seitigen Pyramidalzahlen u. s. w. genannt.

§. **234.** Überhaupt nennt man diese Summenreihen auch figurirte Zahlenreihen und zwar beziehungsweise der 1., 2., 3,... Ordnung.

Die Polygonalzahlen.

§. **235.** Die Reihe der Polygonalzahlen ist nach dem §. 232: $1,\ 2+d,\ 3+3d,\ 4+6d, \ldots$; man erhält also dafür wegen $a_1=1$, $\Delta^1 a_1=1+d$, $\Delta^2 a_1=d$ (die übrigen

Differenzen sind Null) nach §. 227: $a_n = \frac{1}{2}[dn^2 + (2-d)n]$ und §. 228: $S_n = \frac{1}{6}[dn^3 + 3n^2 + (3-d)n]$.

Für $d = m - 2$ erhält man (§. 232) die m Eckzahlen, also dafür nach den vorigen Ausdrücken:

$1,\ m,\ 3m-3,\ 6m-8, \ldots\ a_n = \frac{1}{2}[(m-2)n^2 - (m-4)n]$
und $S_n = \frac{1}{6}[(m-2)n^3 + 3n^2 - (m-5)n]$,

so wie endlich wieder daraus ganz einfach, für $m = 3, 4, 5, \ldots$ die Reihen, allgemeinen und summatorischen Glieder der 3, 4, 5, ... Eckzahlen.

Die Pyramidalzahlen.

§. 236. Die Reihe der Pyramidalzahlen ist (§ 233): $1,\ 3+d,\ 6+4d,\ 10+10d, \ldots$ und wegen $a_1 = 1$, $\Delta^1 a_1 = 2+d$, $\Delta^2 a_1 = 1+2d$, $\Delta^3 a_1 = d$, dafür das allgem. und summat. Glied (§§. 227 und 228):

$$a_n = \tfrac{1}{6}(3-d)n + \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{6}dn^3,$$
$$S_n = \tfrac{1}{12}(4-d)n + \tfrac{1}{24}(12-d)n^2 + \tfrac{1}{12}(2+d)n^3 + \tfrac{1}{24}dn^4.$$

Für $d = m - 2$ erhält man die betreffenden Ausdrücke für die m seitigen Pyramidalzahlen, und zwar die Reihe: $1,\ m+1,\ 4m-2,\ 10m-10, \ldots$ das allgem. und summat. Glied:

$$a_n = \tfrac{1}{6}(5-m)n + \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{6}(m-2)n^3,$$
$$S_n = \tfrac{1}{12}(6-m)n + \tfrac{1}{24}(14-m)n^2 + \tfrac{1}{12}mn^3 + \tfrac{1}{24}(m-2)n^4,$$

woraus man wieder ganz einfach, indem man $m = 3, 4, 5, \ldots$ setzt, die Reihen, allgemeinen und summatorischen Glieder der 3, 4, 5, ... seitigen Pyramidalzahlen erhält.

Die figurirten Zahlen überhaupt.

§. 237. Aus den vorhergehenden Paragraphen erhält man für die auf einander folgenden Reihen der figurirten Zahlen (§. 234) ganz leicht:

$$1 + 1 + 1 + 1 + \ldots + 1 = n,$$
$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = \tfrac{1}{2}n(n+1) = s,$$
$$1 + 3 + 6 + 10 + \ldots + s = \frac{1}{2.3}n(n+1)(n+2) = s',$$

$$1+4+10+20+\ldots+s'=\frac{1}{2.3.4}n(n+1)(n+2)(n+3)=s'',$$

. . . .

$$1+m+\frac{m(m+1)}{1\,.\,2}+\ldots+\frac{n(n+1)\ldots(n+m-2)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,m-1}$$
$$=\frac{n(n+1)\ldots(n+m-1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,m}\;*).$$

Anmerk. Die im 2. Capitel dieses Abschnittes bei der Multiplication der Functionsreihen angeführten Zahlen- oder Verificationsreihen sind also, wie man sieht, die hier aufgestellten figurirten Zahlenreihen.

c) Potenz-Reihen.

§. **238**. Obschon sich die Summe der Reihe $1^m+2^m+3^m+\ldots+n^m$, als (§. 230, 1.) eine arithm. R. der m. Ordnung, nach der allgemeinen Summenformel III, §. 228, immer leicht bestimmen läſst; so führt doch die besondere Ableitung der hiehergehörigen Summenformel $\int(n^m)$ (§. 218) zu einem bemerkenswerthen Ergebniſs.

§. **239**. Setzt man nämlich (§. 230) $\int(n^m)$, d. i.

1) $1^m+2^m+\ldots+n^m=t_1n^{m+1}+t_2n^m+t_3n^{m-1}+\ldots+t_{m+1}n$,

und schreibt in dieser Gleich. $n+1$ statt n; so erhält man, wenn von der neu entstehenden Gleich. diese hier abgezogen wird:

$$(n+1)^m=t_1[(n+1)^{m+1}-n^{m+1}]+t_2[(n+1)^m-n^m]+\ldots$$
$$+t_{m+1}[(n+1)-n],$$

oder, wenn man entwickelt und nach n ordnet:

$$n^m+\binom{m}{1}n^{m-1}+\binom{m}{2}n^{m-2}+\ldots+1$$
$$=t_1\binom{m+1}{1}n^m+\left[t_1\binom{m+1}{2}+t_2\binom{m}{1}\right]n^{m-1}$$
$$+\left[t_1\binom{m+1}{3}+t_2\binom{m}{2}+t_3\binom{m-1}{1}\right]n^{m-2}+\ldots$$
$$+[t_1+t_2+t_3+\ldots+t_{m+1}].$$

*) Auf gleiche Weise kann man statt der Reihe $1+1+1+\ldots$ eine der folgenden: $1+2+2+\ldots$, $1+3+3+\ldots$ etc. $1+d+d+\ldots$ zum Grunde legen und daraus mit den obigen ähnliche Reihen ableiten.

Da aber die Coefficienten $t_1, t_2, \ldots$ von n unabhängig sind; so hat man nach dem Satze der unbestimmten Coefficienten: $(m+1)t_1 = 1$, $\frac{(m+1)m}{1 \cdot 2}t_1 + mt_2 = m$, $\frac{(m+1)m(m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}t_1 + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}t_2 + (m-1)t_3 = \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}$ u. s. w., und daraus: $t_1 = \frac{1}{m+1}$, $t_2 = \frac{1}{2}$, $t_3 = \frac{m}{12}$, $t_4 = 0$, $t_5 = -\frac{m(m-1)(m-1)}{120 \cdot 2 \cdot 3}$, $t_6 = 0$ u. s. f.

Mit diesen Werthen erhält man endlich aus der obigen Gleichung 1):

$$2)\ \int(n^m) = \frac{n^{m+1}}{m+1} + \tfrac{1}{2}n^m + \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{1}{2}\binom{m}{1}n^{m-1} - \tfrac{1}{30}\cdot\tfrac{1}{4}\binom{m}{3}n^{m-3}$$
$$+ \tfrac{1}{42}\cdot\tfrac{1}{6}\binom{m}{5}n^{m-5} - \text{etc.}$$

Anmerk. 1. Die in dieser Entwickelung vorkommenden Zahlen $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{42}$, $\frac{1}{30}$ etc., mittelst welchen man in dieselbe ein einfaches Gesetz hineinbringt, heifsen Bernoullische Zahlen [I., 212].

Anmerk. 2. Mit Hilfe dieser Summenformel $\int(n^m)$ lassen sich auch Reihen summiren, deren allgemeine Glieder die Form $A + Bn + Cn^2 + \ldots$ besitzen. Denn wäre z. B. $a_n = A + Bn + Cn^2$ das allgemeine Glied einer Reihe, so wären ihre Glieder: $a_1 = A + B + C$, $a_2 = A + 2B + 2^2C$, $a_3 = A + 3B + 3^2C$ u. s. w., also ihre Summe:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = nA + B(1 + 2 + \ldots + n)$$
$$+ C(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2),$$

oder wegen $n = \int(n^0)$ (weil nämlich $\int(n^0) = 1 + 1 + \ldots + 1 = n$ ist), $1 + 2 + \ldots + n = \int(n^1)$ und $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \int(n^2)$, auch: $\int(a_n) = \int(An^0 + Bn + Cn^2) = A\int(n^0) + B\int(n) + C\int(n^2)$; woraus zugleich noch folgt, dafs die Summe eines Ausdruckes von dieser Form, nämlich $\int(An^0 + Bn + Cn^2)$, aus der Summe eines jeden einzelnen Gliedes besteht, und die constanten Factoren vor das Summenzeichen $\int$ zu setzen sind.

Beispiele. Setzt man in dieser Formel 2) nach und nach $m = 1, 2, 3, \ldots$ so erhält man:

$$\int(n) = \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2},\quad \int(n^2) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3},\quad \int(n^3) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

u. s. w.

Besondere Anwendung der Differenzen-Reihen.

§. **240.** So wie aus x^m, oder, allgemeiner noch, aus Ax^m eine arithm. Reihe der m. Ordnung entsteht, wenn man nach und nach $x = a$, $a + d$, $a + 2d$ u. s. w. setzt, d. i. x nach einer arithm. Reihe der 1. Ordnung wachsen läſst; eben so entstehen unter derselben Voraussetzung aus Bx^n, Cx^p . . . arithmetische Reihen der n., p. u. s. w. Ordnung. Ist nun $y = Ax^m + Bx^n + Cx^p + \ldots$, und x eine in arithm. Progression zunehmende Gröſse; so wird dabei, wenn m der gröſste Exponent von x ist, y nach einer arithm. Reihe der m. Ordnung zunehmen; es werden nämlich, da die von den Reihen Bx^n, Cx^p, ... niederigerer Ordnung herrührenden Differenzen schon früher Null werden, die m^{ten} Differenzen constant und gerade so seyn, als ob bloſs $y = Ax^m$ wäre.

§. **241.** Diese Eigenschaft, verbunden mit dem Umstande, daſs die Differenzreihen sehr leicht zu bilden sind, läſst sich in der Anwendung, und ganz vorzüglich bei Berechnung von Tafeln aller Art, mit dem gröſsten Vortheile benützen. — Wollte man z. B. eine Tafel der Kreisflächen für die um die beständige Differenz von $\frac{1}{4}$ Zoll zunehmenden Durchmesser, von $\frac{1}{4}$ Zoll angefangen bis 100 Zoll hinauf, berechnen; so müſste man auf gewöhnliche Art, in der Formel $y = \frac{1}{4}\pi x^2$, wo x den Kreisdurchmesser bezeichnet, 400 Substitutionen vornehmen. Dagegen wird man, da die auf einander folgenden Werthe von y, nach dem im vorigen §. Bemerkten, eine arithm. R. der 2. Ordnung bilden, nur die 3 ersten Werthe von y nach dieser Formel, daraus durch Subtraction die 2 ersten Glieder der 1. Differenzreihe, und endlich daraus wieder das erste, aber constante Glied der 2. Differenzreihe bestimmen; setzt man diese aus lauter gleichen Gliedern bestehende Reihe nach Belieben fort, und sucht nun umgekehrt durch wiederholtes Summiren die weitern Glieder der 1. Differenzreihe, so wie damit jene der ursprünglichen Reihe; so hat man sofort die gesuchten auf einander folgenden Werthe von y gefunden.

Legt man, wenn die Kreisflächen bis auf 4 Decimalstellen verlangt werden, um ganz sicher zu gehen, die Rechnung auf 6 Decimalstellen an; so hat man zuerst, nach der obigen Formel, für $x = \frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{4}$ beziehungsweise: $y =$ ·049087, ·196349 und ·441786. Hieraus folgen ·147262, ·245437 als die beiden ersten Glieder der 1. und daraus ·098175 als das beständige Glied der 2. Differenzreihe. Läfst man also den Decimalpunct weg, und schreibt nur die bedeutenden Ziffern an, mit dem Vorbehalte, dafs man zuletzt wieder 6 Ziffern als Decimalstellen abschneidet, so stellt sich die Rechnung auf folgende Art:

98175, 98175, 98175, 98175, 98175, ... 1. Differenzr.,
147262, 245437, 343612, 441787, 539962, 638137, ...
2. Differenzr.
49087, 196349, 441786, 785398, 1227185, 1767147, 2405284, ...
gesuchte R.

Schneidet man also, wie gesagt, überall 6 Ziffern als Decimalen ab, behält aber blofs (mit gehöriger Correctur) 4 davon bei; so erhält man als Anfang der verlangten Tabelle folgendes Bruchstück:

Durchm.	Kreisfl.	Durchm.	Kreisfl.	Durchm.	Kreisfl.
$\frac{1}{4}$	·0491	$1\frac{1}{4}$	1·2272	$2\frac{1}{4}$	3·9761
$\frac{1}{2}$	·1963	$1\frac{1}{2}$	1·7671	$2\frac{1}{2}$	4·9087
$\frac{3}{4}$	·4418	$1\frac{3}{4}$	2·4053	$2\frac{3}{4}$	5·9396
1	·7854	2	3·1416	3	7·0686

Da übrigens ein Rechnungsfehler allen folgenden Werthen mitgetheilt würde, so mufs man sich von der Richtigkeit der Rechnung dadurch überzeugen, dafs man von Zeit zu Zeit eine dieser gefundenen Zahlen oder Flächen auch direct nach der obigen Formel berechnet und nachsieht, ob damit die correspondirende in der Reihe übereinstimme.

Auf dieselbe Weise würde man, um nach der Formel

$$\Delta t = \cdot 0^4 6617381\, t - \cdot 0^5 81653\, t^2 + \cdot 0^7 181\, t^3$$

eine Tafel für die Dichtigkeiten des Wassers bei den Temperatursgraden $t = 1, 2, 3 \ldots$ bis 80° zu berechnen, am einfachsten, da die auf einander folgenden Werthe von Δt dadurch eine arithm. R. der 3. Ordnung bilden, blofs die 4 ersten Werthe nach der Formel berechnen, daraus durch successives Abziehen die 3 ersten Glieder der 1., die 2 ersten Glieder der 2. und das beständige Glied der 3. Differenzreihe suchen, und endlich damit wieder durch das umgekehrte Verfahren oder wiederholte Summiren die 2., 1. und ursprüngliche oder gesuchte Reihe beliebig fortsetzen. [I., 219]

Interpolation der Reihen.

§. **242** Erklär. Eine Reihe interpoliren heifst zwischen je 2 Gliedern derselben eine gegebene Anzahl von Gliedern dergestalt einschalten, dafs dadurch wieder eine Reihe derselben Gattung und Ordnung entsteht.

§. **243**. Um diese Aufgabe für die arithmetischen Reihen zu lösen, bemerke man zuerst, dafs, wenn von einer beliebigen Stelle angefangen, die Glieder der zu interpolirenden Reihe durch a_n, a_{n+1}, a_{n+2} u. s. w. bezeichnet werden, die auf einander folgenden, zwischen a_n und a_{n+1} einzuschaltenden $r-1$ Glieder sodann durch $a_{n+\frac{1}{r}}$ $a_{n+\frac{2}{r}} \ldots a_{n+\frac{r-1}{r}}$ bezeichnet werden müssen; weil dadurch das nächstfolgende, wie es seyn soll, die Bezeichnung $a_{n+\frac{r}{r}} = a_{n+1}$ erhält.

§. **244**. Nun hat man nach Form. II., §. 227, wo man sich blofs a_n in $a_{1+(n-1)}$ aufgelöst denken darf:

$$a_{n+m} = a_n + \binom{m}{1}\Delta^1 a_n + \binom{m}{2}\Delta^2 a_n + \binom{m}{3}\Delta^3 a_n + \ldots,$$

und da dieser Ausdruck nicht nur für ganze, sondern auch für gebrochene Werthe von m gilt [I., 221]; so setze man, wie es zufolge der angeführten Bezeichnung für die einzuschaltenden Glieder nöthig ist, $m = \frac{u}{v}$. Dadurch erhält man, wenn man einrichtet und noch bemerkt, dafs beim Gebrauche immer $u < v$ bleiben kann, für die gesuchte Interpolationsformel:

$$a_{n+\frac{u}{v}} = a_n + \frac{u}{v}\Delta^1 a_n - \frac{u(v-u)}{1.2\,v^2}\Delta^2 a_n$$
$$+ \frac{u(v-u)(2v-u)}{1.2.3.v^3}\Delta^3 a_n - \text{etc.} \quad \text{(IV.}$$

Diese Formel bricht wieder mit dem $m+1$. Gliede ab, wenn die zu interpolirende arithm. R. von der m. Ordnung ist.

Beispiel 1. Um zwischen je 2 Gliedern der arithm. R. zweiter Ordnung: 1, 16, 49, 100, ... 2 neue Glieder im obigen Sinne einzuschalten, hat man für die Interpolirung zwischen 1 und 16 sofort: $a_n = 1$, $a_{n+1} = 16$, $\Delta^1 a_n = 15$, $\Delta^2 a_n = 18$ (die übrigen Differenzen $= 0$), $v = 3$ und nach und nach $u = 1$ und $= 2$, mithin nach der vorigen Formel IV:

$$a_{n+\frac{1}{3}} = 1 + \tfrac{1}{3}.15 - \tfrac{1}{9}.18 = 4 \quad \text{und}$$
$$a_{n+\frac{2}{3}} = 1 + \tfrac{2}{3}.15 - \tfrac{1}{9}.18 = 9.$$

Für die beiden folgenden einzuschaltenden Glieder wird $a_n = 16$, $a_{n+1} = 49$, $\Delta^1 a_n = 33$ und $\Delta^2 a_n = 18$; also wieder

$$a_{n+\frac{1}{3}} = 16 + \tfrac{1}{3}.33 - \tfrac{1}{9}.18 = 25 \quad \text{und}$$
$$a_{n+\frac{2}{3}} = 16 + \tfrac{2}{3}.33 - \tfrac{1}{9}.18 = 36 \quad \text{u. s. w.}$$

Die interpolirte Reihe ist sonach: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49..., also in der That, wie die gegebene, eine arithm. R. der zweiten Ordnung.

Beispiel. 2. Da man sich bei physikalischen und naturwissenschaftlichen Gegenständen überhaupt häufig mit dem gröfsten Nutzen der Interpolations-Methode auch bei solchen Folgen von durch mühsame Rechnung oder gewöhnlicher durch Beobachtung gefundener Gröfsen bedient, welche keine genauen arithmetischen Reihen, jedoch so beschaffen sind, dafs man sie, ohne die gestattete Fehlergrenze zu überschreiten, als solche ansehen kann; so wollen wir setzen, es seyen für die Elasticität des Wasserdampfes bei den Temperatursgraden 1, 3, 5, 7... aus Versuchen der Reihe nach die Zahlen: ·1422, ·1741, ·2122, ·2571, ·3101, ·3721 u. s. w. gefunden worden, und man wolle die den Temperatursgraden 2, 4, 6, ... entsprechenden Zahlen durch Interpolation ableiten. Für diesen Fall findet man, wenn man die Differenzen sucht, ·0319, ·0381, ·0449, ·0530, ·0620, ·0724, ... als erste, ·0062, ·0068, ·0081, ·0090, ·0104, ... als zweite, ·0006, ·0013, ·0014, ... als 3. Differenzreihe u. s. w. Läfst man nun die nur wenig mehr von einander verschiedenen 3. Differenzen als gleich gelten, und nimmt dafür in dieser Gegend die Mittelzahl $\cdot 0012$; so erhält man, nach der obigen Formel IV, wegen $v = 2$:

$$\cdot 1422 + \tfrac{1}{2} \times \cdot 0319 - \tfrac{1}{8} \times \cdot 0062 + \tfrac{1}{16} \times \cdot 0012 = \cdot 1575 \quad \text{und}$$

$$\cdot 1741 + \tfrac{1}{2} \times \cdot 0381 - \tfrac{1}{8} \times \cdot 0068 + \tfrac{1}{16} \times \cdot 0012 = \cdot 1924.$$

Eben so findet man weiters: ·2337, ·2825 u. s. w., welche Zahlen auch in der That mit jenen durch wirkliche Beobachtung gefundenen recht gut übereinstimmen. — Ist man in der Reihe weiter gekommen, so kann man die für die constante 3. Differenz genommene Mittelzahl so ändern, dafs sie wieder mehr mit der in dieser Gegend wirklich herrschenden 3. Differenz übereinstimmt.

Beispiel 3. Es sey endlich mit Hilfe einer Tafel, welche die Briggischen Logarithmen aller Zahlen von 1 bis 1200 auf 10 Decimalstellen enthält, $log\, 114835$ auf eben so viele Stellen zu berechnen.

Da in diesem Logarithmensysteme die Aufgabe gelöst ist, sobald man die Mantisse für $log\, 1148{\cdot}35$ gefunden hat, welche sofort zwischen den Mantissen von $log\, 1148$ und $log\, 1149$ liegt; so ergibt sich dafür folgendes Verfahren:

Man findet in der erwähnten Tafel für die Logarithmen der Zahlen 1148, 1149, 1150 etc. der Reihe nach: ·0599418881, ·0603200287, ·0606978404, ·0610753236, ·0614524791 u. s. w., und daraus durch wiederholtes Abziehen, für die ersten Glieder der 1., 2. und 3. Differenzreihe, bei der man füglich (da sie $\cdot 0^9 4$, $\cdot 0^9 8$, $\cdot 0^9 4, \ldots$ ist) stehen bleiben kann, beziehungsweise: $\cdot 0^3 3781406$, $-\cdot 0^6 3289$ und $\cdot 0^9 4$. Denkt man sich nun in der ursprünglichen R. zwischen den beiden ersten Gliedern 99 Glieder eingeschaltet, wodurch in der obigen Formel $v = 100$ wird, und davon das 35ste genommen, wodurch $u = 35$ wird; so erhält man, $a_n = \cdot 0599\ldots (= log\, 1148)$ gesetzt, sofort:

$$a_{n+\cdot 35} = \cdot 0599\ldots + \cdot 35 \times \cdot 0^3 378\ldots$$
$$+ \frac{35 \times 65}{20000} \times \cdot 0^6 32\ldots + \frac{35\,.\,65\,.\,165}{6000000} \times \cdot 0^9 4 = \cdot 0600742747,$$

wobei also, nur bis auf 10 Decimalstellen gerechnet, die 3. Differenz keinen Einflufs mehr hat. Es ist sonach

$$log\, 114835 = 5{\cdot}0600742747\ ^{*)}.$$

*) Über das allgemeine Interpolations-Problem, so wie über die Newton'sche und Lagrange'sche Interpolationsformeln: I., 226 — 232.

Sechstes Capitel.

Von den vorzüglichsten Umwandlungen der Functionen *einer* Variablen.

§. **245.** Erklär. Eine Function umwandeln, heiſst dieselbe ohne Veränderung ihres Werthes auf eine andere Form bringen; dabei behält man entweder die nämliche veränderliche Gröſse bei, oder substituirt dafür eine neue, die mit ihr in einer bekannten Beziehung steht.

Die wichtigsten Umwandlungen der erstern Art sind: I. Zerlegung ration. ganzer Functionen in einfache oder quadratische Factoren. II. Zerlegung ration. gebrochener Functionen in Partialbrüche, und III. Entwickelung der Funct. in unendliche Reihen.

I. Zerlegung ration. ganzer Functionen in Factoren.

§. **246.** Jede ganze ration. Function einer Variablen hat die Form $y = A + Bx + Cx^2 + \ldots$; setzt man diese gleich Null und sucht nach Capitel 4 die Wurzeln α, β, γ, . . der entstehenden Gleichung, so hat man (§. 158):

$$y = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \ldots$$

Da die Wurzeln sowohl reell wie auch imaginär, und im erstern Falle gebrochen seyn können; so haben die reellen einfachen Factoren die Form $a - bx$, und die quadratischen, welche von ein paar conjugirten imaginären W. herrühren, jene: $a + bx + cx^2$.

Wäre z. B. $y = 36 - 42x - 20x^2 + 7x^3 - 6x^4$ in Factoren zu zerlegen, so würde man aus der Gleichung

$$-\tfrac{1}{6}y = x^4 - \tfrac{7}{6}x^3 + \tfrac{10}{3}x^2 + 7x - 6 = 0$$

die W. $x = \frac{2}{3}$, $-\frac{3}{2}$, $1 \pm \sqrt{-5}$, mithin

$$-\tfrac{1}{6}y = (x - \tfrac{2}{3})(x + \tfrac{3}{2})(x - 1 - \sqrt{-5})(x - 1 + \sqrt{-5})$$

oder

$$y = (2 - 3x)(3 + 2x)(6 - 2x + x^2)$$

erhalten.

II. Zerlegung rationaler ganzer Functionen in Partialbrüche.

§. 247. Da sich jede unecht gebrochene Function immer in eine ganze und eine echt gebrochene Function auflösen läſst, so können wir bei den folgenden Entwicklungen immer echt gebrochene Functionen voraussetzen.

So zerfällt z. B. die unecht gebrochene Function

$$y = \frac{1 + x - 5x^2 + 6x^3}{2 + 3x - 2x^2}$$

durch die Division, bei welcher man zuvor Zähler und Nenner nach fallenden Potenzen von x geordnet hat, in die 2 Theile: $-(2 + 3x)$ als ganze, und $\dfrac{5 + 13x}{2 + 3x - 2x^2}$ als echt gebrochene Function (erstere kann sich auch auf eine constante Gröſse reduciren).

§. 248. Um die echt gebrochene Function

$$\frac{Z}{N} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 x + \ldots + \alpha_n x^{n-1}}{\beta_1 + \beta_2 x + \ldots + \beta_{n+1} x^n}$$

in Partialbrüche zu zerlegen, muſs man zuerst den Nenner N nach §. 246 in seine einfachen Factoren auflösen. Je nach Verschiedenheit dieser Factoren aber sind nachstehende, in den nächst folgenden §§. erörterten Fälle möglich.

A. Die einfachen Factoren des Nenners N sind sämmtlich *ungleich* und dabei

a) reell.

§. 249. Sind in diesem Falle $a_1 - b_1 x$, $a_2 - b_2 x$, .. $a_n - b_n x$ die nach §. 246 gefundenen Factoren von N; so setze man

$$\frac{Z}{N} = \frac{A_1}{a_1 - b_1 x} + \frac{A_2}{a_2 - b_2 x} + \ldots + \frac{A_n}{a_n - b_n x},$$

befreie diese Gleich. durch Multiplication mit N von den Brüchen, ordne Alles nach Potenzen von x, und bestimme endlich nach dem Satze der unbestimmten Coefficienten, welcher hier n Gleichungen liefert, die unbekannten Coefficienten A_1, A_2, .. A_n.

1. So ist z. B. für die gebrochene Function $\frac{1}{1-x^2}$ sofort $N = 1 - x^2 = (1+x)(1-x)$; man setze also

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{A_1}{1+x} + \frac{A_2}{1-x},$$

so erhält man

$1 = A_1(1-x) + A_2(1+x)$ oder $1 = (A_1 + A_2) + (A_2 - A_1)x$, und daraus $A_1 + A_2 = 1$ und $A_2 - A_1 = 0$, demnach $A_1 = \frac{1}{2}$ und $A_2 = \frac{1}{2}$. Man hat daher, diese Werthe substituirt:

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2(1+x)} + \frac{1}{2(1-x)}.$$

2. Für die gebrochene Funct. $\frac{2+4x-x^2}{3-x-8x^2-4x^3}$ hat man $N = (1+x)(3+2x)(1-2x)$, also

$$\frac{Z}{N} = \frac{A_1}{1+x} + \frac{A_2}{3+2x} + \frac{A_3}{1-2x} \text{ oder}$$

$$2+4x-x^2 = (3A_1 + A_2 + 3A_3) + (-4A_1 - A_2 + 5A_3)x \\ + (-4A_1 - 2A_2 + 2A_3)x^2;$$

aus dieser identischen Gleichung folgt: $3A_1 + A_2 + 3A_3 = 2$, $-4A_1 - A_2 + 5A_3 = 4$, $-4A_1 - 2A_2 + 2A_3 = -1$, und daraus: $A_1 = -1$, $A_2 = \frac{25}{8}$ und $A_3 = \frac{5}{8}$, so, daſs man mit diesen Werthen endlich hat:

$$\frac{2+4x-x^2}{3-x-8x^2-4x^3} = \frac{-1}{1+x} + \frac{25}{8(3+2x)} + \frac{5}{8(1-2x)}.$$

§ **250.** Da die Coefficienten $A_1, A_2, \ldots$ von x ganz unabhängig sind, und demnach bei was immer für einem Werthe von x bestimmt werden dürfen; so kann man einfacher und bequemer aus der Gleichung

$$Z = A_1(a_2 - b_2x)(a_3 - b_3x)\ldots + A_2(a_1 - b_1x)(a_3 - b_3x)\ldots,$$

in derem 2. Theile also in jedem Gliede einer der Binomialfactoren (im 1. Glied der Nenner zu A_1, im 2. jener zu A_2 u. s. w.) nicht vorkommt, ohne die Multiplication zu verrichten, die Zähler $A_1, A_2, \ldots$ bestimmen, indem man nach und nach für x jene Werthe setzt, für welche die zugehörigen Nenner $a_1 - b_1x$, $a_2 - b_2x$, .. Null werden. — So erhält man im vorigen Beispiele aus der Gleichung

$$2+4x-x^2 = A_1(3+2x)(1-2x) + A_2(1+x)(1-2x) \\ + A_3(1+x)(3+2x)$$

unmittelbar für $x = -1$ (wofür $1+x=0$): $-3=3A_1$, und daraus $A_1 = -1$; für $x = -\frac{3}{2}$ (aus $3+2x=0$): $-\frac{25}{4} = -2A_2$, daraus $A_2 = \frac{25}{8}$; für $x = \frac{1}{2}$ (aus $1-2x=0$): $\frac{15}{4} = 6A_3$, also $A_3 = \frac{5}{8}$, wie oben.

Sollte einer der Zähler, z. B. $A_m = 0$, gefunden werden; so wäre dieſs ein Beweis, daſs sich der Bruch $\frac{Z}{N}$ durch den Factor $a_m - b_m x$ abkürzen läſst.

b) Gänzlich oder zum Theile *imaginär.*

§. **251.** In diesem Falle bilde man aus jedem Paar conjug. imag. einfacher Factoren den reellen quadratischen, welcher sofort die Form $a + bx + cx^2$ hat, und nehme diesen zum Nenner eines der Partialbrüche, welchem man aber einen Zähler von der Form $A + Bx$ gibt.

Um z. B. den Bruch $\dfrac{2-x^2}{-5+9x-5x^2+x^3}$ in Partialbrüche zu zerlegen, hat man

$N = (x-1)(x-2+\sqrt{-1})(x-2-\sqrt{-1}) = (x-1)(5-4x+x^2)$.

Man setze also $\dfrac{Z}{N} = \dfrac{A_1}{x-1} + \dfrac{A+Bx}{x^2-4x+5}$, so folgt daraus

$$Z = A_1(5-4x+x^2) + (A+Bx)(x-1),$$

und aus dieser Gleichung, wenn man, anstatt nach der allgem. Regel zu verfahren (d. i. die Multiplicat. zu verrichten, nach x zu ordnen u. s. w.), das im vorigen §. Bemerkte berücksichtiget, für $x=1$ (aus $x-1=0$): $1=2A_1$, und daraus $A_1=\frac{1}{2}$. Wird dieser Werth in der vorigen Gleich. substituirt und diese reducirt, so erhält man: $-\frac{1}{2}+2x-\frac{3}{2}x^2 = (A+Bx)(x-1)$, oder durch $x-1$ dividirt (es muſs nämlich auch der 1. Theil der Gleich., wie es der 2. ist, durch $x-1$ theilbar seyn, weil A und B ganze Functionen von x seyn müssen) auch: $\frac{1}{2}-\frac{3}{2}x = A+Bx$. Es ist also:

$$\frac{2-x^2}{-5+9x-5x^2+x^3} = \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1-3x}{2(x^2-4x+5)}.$$

B. Der Nenner N enthält auch *gleiche* Factoren.

§. **252.** Sey in diesem Falle $N = S(a-bx)^m$, wo S in Bezug auf x von der $n-m^{\text{ten}}$ Ordnung seyn, und den Factor $a-bx$ nicht weiter enthalten soll. Man setze zur

Bestimmung der aus den gleichen Factoren entspringenden Partialbrüche

$$\frac{Z}{N} = \frac{P}{S} + \frac{B_1}{(a-bx)^m} + \frac{B_2}{(a-bx)^{m-1}} + \ldots + \frac{B_m}{a-bx},$$

schaffe die Nenner durch Multiplication mit N weg und ordne nach x; so erhält man wieder durch Gleichsetzung der gleichnamigen Coefficienten n Gleichungen, davon m zur Bestimmung von B_1, B_2, . . B_m, und $n-m$ zur Bestimmung der Zähler A_1, A_2, . . A_{n-m} für die aus $\frac{P}{S}$ entstehenden Partialbrüche dienen.

So findet man für die Bruchfunction $\frac{3-2x+4x^2}{x^4+x^3-x^2-x}$ sofort $N = x(x-1)(x+1)^2$; man setze daher

$$\frac{Z}{N} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{B_1}{(x+1)^2} + \frac{B_2}{x+1}.$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$a)\quad Z = A_1(x-1)(x+1)^2 + A_2 x(x+1)^2 + B_1 x(x-1) + B_2 x(x-1)(x+1)$$

oder

$$3-2x+4x^2 = -A_1 + (-A_1 + A_2 - B_1 - B_2)x + (A_1 + 2A_2 + B_1)x^2 + (A_1 + A_2 + B_2)x^3,$$

und daraus:

$$A_1 = -3,\quad -A_1 + A_2 - B_1 - B_2 = -2,\quad A_1 + 2A_2 + B_1 = 4,\quad A_1 + A_2 + B_2 = 0,$$

so wie endlich aus diesen Gleichungen: $A_1 = -3$, $A_2 = \frac{5}{4}$, $B_1 = \frac{9}{2}$, $B_2 = \frac{7}{4}$. Man hat daher

$$\frac{3-2x+4x^2}{x^4+x^3-x^2-x} = \frac{-3}{x} + \frac{5}{4(x-1)} + \frac{9}{2(x+1)^2} + \frac{7}{4(x+1)}.$$

§. **253**. Auch hier läſst sich das im §. 250 hinsichtlich der bequemern Berechnung der Zähler Bemerkte benützen, wie wir sogleich ohne weitere Erklärung an dem eben behandelten Beispiele nachweisen wollen.

Aus der obigen Gleich. a) folgt (wenn man nämlich den zu A_1 gehörigen Nenner gleich Null setzt) für $x=0$: $3 = -A_1$, und daraus $A_1 = -3$; für $x=1$ (aus $x-1=0$): $5 = 4A_2$ daraus $A_2 = \frac{5}{4}$; für $x = -1$ [aus $(x+1)^2 = 0$]: $9 = 2B_1$, daraus $B_1 = \frac{9}{2}$; diese Werthe in a) substituirt und die Gleich. reducirt (um B_2 bestimmen zu können), erhält man:

$$\tfrac{7}{4}x(x^2-1) = B_2 x(x^2-1),$$

folglich $B_2 = \frac{7}{4}$; Alles wie im vorigen §.

Auf dieselbe Art findet man auch die Partialbrüche, wenn der sich wiederholende Factor ein quadratischer ist, wie z. B. bei der Funct. $\frac{4x-7x^2-2x^5}{(1+x^2)^3(5-2x^4)}$. Denn setzt man hier

$$\frac{Z}{N} = \frac{A_1+B_1 x}{(1+x^2)^3} + \frac{A_2+B_2 x}{(1+x^2)^2} + \frac{A_3+B_3 x}{1+x^2} + \frac{P}{5-2x^4},$$

so findet man: $A_1 = \frac{7}{3}$, $B_1 = \frac{2}{3}$, $A_2 = -\frac{49}{9}$, $B_2 = \frac{4}{9}$, $A_3 = \frac{238}{27}$, $B_3 = -\frac{22}{27}$ und $P = \frac{1}{27}(-770+68x+476x^2-44x^3)$ [I. 242 — 247].

III. Entwicklung der Functionen in unendliche Reihen.

§. 254. Hier sollen bloſs die algebraischen Functionen in Betracht kommen, weil wir die Auflösung der transcendenten Functionen in unendliche Reihen in spätern Capiteln besonders vortragen werden; und zwar haben wir es hier, da die aus irrationalen Functionen entstehenden Reihen in der Entwicklung von $(a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots)^{\frac{m}{n}}$ enthalten, und bereits in §. 116 abgehandelt sind, lediglich mit jenen Reihen zu thun, die aus rationalen, gebrochenen Functionen entstehen.

Recurrirende oder wiederkehrende Reihen.

§. 255. Da sich nach §. 109, c) jede ration. gebrochene Function in eine unendliche Reihe von der Form $A + Bx + Cx^2 + \ldots$ auflösen läſst, so setze man für die erste und einfachste Form einer solchen Bruchfunction, die wir wieder (§. 247) als echt gebrochen voraussetzen:

$$\frac{A_1}{a_1+a_2 x} = A + t_1 x + t_2 x^2 + \ldots + t_n x^n + t_{n+1} x^{n+1} + \ldots;$$

so erhält man durch Multiplication mit dem Nenner:

$$A_1 = A a_1 + (t_1 a_1 + A a_2) x + (t_2 a_1 + t_1 a_2) x^2 + \ldots$$
$$+ (t_{n+1} a_1 + t_n a_2) x^{n+1} + \ldots;$$

mithin (§. 108)

$$Aa_1 = A_1,\quad t_1 a_1 + A a_2 = 0,\quad t_2 a_1 + t_1 a_2 = 0 \text{ etc.},$$
$$t_{n+1} a_1 + t_n a_2 = 0,$$

und aus diesen Gleichungen:

$$A = \frac{A_1}{a_1},\; t_1 = \frac{-A a_2}{a_1},\; t_2 = -\frac{a_2}{a_1} t_1, \ldots t_{n+1} = -\frac{a_2}{a_1} t_n.$$

Wie man sieht, wird vom 2. angefangen, jeder folgende Coefficient gebildet, indem man den nächst vorhergehenden mit dem beständigen Quotienten $-\frac{a_2}{a_1}$ multiplicirt; die entstehende Reihe ist daher (§. 220) eine wiederkehrende oder recurrirende (auch rücklaufende). Der Quotient $-\frac{a_2}{a_1}$ heifst dabei die Relationsscala, welche hier Eingliederig ist, und aus welchem Grunde auch die erzeugte Reihe eine recurrirende der ersten Ordnung genannt wird.

Anmerk. Man wird von selbst die Bemerkung machen, dafs das Gesetz der Bildung der Coefficienten (welches hier, wo der Zähler der gegebenen Bruchfunct. Ein Glied hat, vom 2. angefangen gilt) schon in der einzigen Gleich. für t_{n+1} enthalten ist, also die vorausgehenden Relationen von t_1, t_2 u. s. w. ganz überflüssig sind. Da man ferner auch das 1. Glied der Reihe $\frac{A_1}{a_1}$ immer als bekannt, gleich hinschreiben kann; so wird das einfachste und kürzeste Verfahren, eine solche Bruchfunction in eine recur. R. aufzulösen, folgendes, durch nachstehendes Beispiel erläutertes, seyn.

Für die Bruchfunction $\frac{2}{1-x}$ z. B. setze man

$$\frac{2}{1-x} = 2 + \ldots + t_n x^n + t_{n+1} x^{n+1} + \ldots;$$

so erhält man durch Wegschaffung des Nenners:

$$2 = 2 + \ldots + (t_{n+1} - t_n) x^{n+1} + \ldots,$$

und daraus: $t_{n+1} - t_n = 0$ oder $t_{n+1} = t_n$, welche Relat. das vom 2. Glied angefangen geltende Bildungsgesetz der Coefficienten (nämlich, dafs jeder folgende Coefficient seinem nächst vorhergehenden gleich ist) enthält, so, dafs man also hat: $\frac{2}{1-x} = 2 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + \ldots$

§. **256**. Um die zunächst auf die vorige Form folgende Bruchfunction $\frac{A_1 + A_2 x}{a_1 + a_2 x + a_3 x^2}$ auf die einfachste Art in eine recur. Reihe aufzulösen, setze man, in Gemäſsheit der vorigen Anmerk., da der Zähler sich bis x erstreckt und der Nenner aus 3 Gliedern besteht:

$$\frac{A_1 + A_2 x}{a_1 + a_2 x + a_3 x^2} = \frac{A_1}{a_1} + t_1 x + \ldots$$
$$+ t_n x^n + t_{n+1} x^{n+1} + t_{n+2} x^{n+2} + \ldots,$$

so erhält man:

$$A_1 + A_2 x = A_1 + \left(t_1 a_1 + \frac{A_1}{a_1} a_2\right) x + \ldots$$
$$+ (t_{n+2} a_1 + t_{n+1} a_2 + t_n a_3) x^{n+2} + \ldots,$$

und daraus:

$$t_1 a_1 + \frac{A_1}{a_1} a_2 = A_2, \ \ldots \ t_{n+2} a_1 + t_{n+1} a_2 + t_n a_3 = 0,$$

also für das im 3. Glied anfangende Gesetz der Bildung:

$$t_{n+2} = -\frac{a_2}{a_1} t_{n+1} - \frac{a_3}{a_1} t_n,$$

nach welchem, wenn aus der 1. Gleich. t_1 bestimmt ist, t_2, t_3, .. leicht gefunden werden. Da hier die Relationsscala $-\frac{a_2}{a_1} - \frac{a_3}{a_1}$ zweigliederig ist, so heiſst die entstehende R. eine recurrirende der zweiten Ordnung.

So hat man für die Bruchfunction $\frac{1 - 2x}{-2 + x + x^2}$, diese $= -\frac{1}{2} + t_1 x + \ldots + t_n x^n + t_{n+1} x^{n+1} + t_{n+2} x^{n+2} + \ldots$ gesetzt, wenn man mit dem Nenner multiplicirt:

$$1 - 2x = 1 + (-2t_1 - \tfrac{1}{2}) x + \ldots$$
$$+ (-2t_{n+2} + t_{n+1} + t_n) x^{n+2} + \ldots,$$

und daraus

$$-2t_1 - \tfrac{1}{2} = -2, \text{ also } t_1 = \tfrac{3}{4};$$
$$-2t_{n+2} + t_{n+1} + t_n = 0, \text{ also } t_{n+2} = \tfrac{1}{2}(t_{n+1} + t_n),$$

d. h. vom 3. angefangen, ist jeder folgende Coefficient gleich der halben Summe der beiden nächst vorhergehenden; mithin ist endlich die Reihe selbst:

$$\frac{1 - 2x}{-2 + x + x^2} = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{4} x + \tfrac{1}{8} x^2 + \tfrac{7}{16} x^3 + \tfrac{9}{32} x^4 + \ldots$$

§. **257**. Auf die nämliche Art erhält man aus der Funct. $\frac{A_1 + A_2 x + A_3 x^2}{a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3}$ eine recur. Reihe der dritten Ordnung; die Scala ist dreigliedrig, und das Gesetz der Bildung der Coefficienten fängt, wenn nicht etwa $A_3 = 0$ ist, erst im 4. Gliede der Reihe an.

So findet man für die Bruchfunction $\frac{3 - 2x + x^2}{1 + 2x - 2x^3}$, diese $= 3 + t_1 x + t_2 x^2 + .. + t_n x^n + t_{n+1} x^{n+1} + t_{n+2} x^{n+2} + t_{n+3} x^{n+3} + ..$ gesetzt (weil sich nämlich der Zähler bis x^2 erstreckt, und der Nenner, das fehlende mit gezählt, aus 4 Gliedern besteht) und den Nenner weggeschafft: $t_1 + 6 = -2$, $t_2 + 2t_1 = 1$, .. $t_{n+3} + 2t_{n+2} - 2t_n = 0$, also $t_1 = -8$, $t_2 = 17$ und (als Gesetz der Bildung) $t_{n+3} = 2(t_n - t_{n+2})$ (die dreigliedrige Relationsscala ist: $-2 + 0 + 2$), so, daſs also vom 4. angefangen, jeder folgende Coefficient gleich ist der zweifachen Differenz aus dem dritt- und nächst vorhergehenden Coefficienten. Man hat daher endlich:

$$\frac{3 - 2x + x^2}{1 + 2x - 2x^3} = 3 - 8x + 17x^2 - 28x^3 + 40x^4 - 46x^5 + .$$

§. **258**. Ohne diese Entwicklungen noch weiter fortzusetzen, ist es ersichtlich, daſs man auf dieselbe Weise aus der gebrochenen Function

$(A_1 + A_2 x + .. + A_n x^{n-1}) : (a_1 + a_2 x + .. + a_{n+1} x^n)$

die recurrirende Reihe der n. Ordnung entwickeln kann.

§. **259**. Ist umgekehrt die recur. Reihe $t_1 + t_2 x + t_3 x^2 + ..$ nebst dem Gesetze ihrer Bildung, z. B.

$$t_{n+2} = \frac{B}{A} t_{n+1} - \frac{C}{A} t_n,$$

oder der Relationsscala $\frac{B}{A} - \frac{C}{A}$ gegeben; so läſst sich dazu die gebrochene oder erzeugende Function sehr leicht finden. Denn aus der gegebenen Relation folgt $A t_{n+2} - B t_{n+1} + C t_n = 0$, und daraus unmittelbar (mit Rücksicht auf die das Bildungsgesetz darstellende Relation und den Nenner der Bruchfunction in §. 256) der Nenner der gesuchten Funct.: $A - Bx + Cx^2$. Setzt man daher, unter der steten Voraussetzung, daſs die Funct. echt gebrochen sey,

$\frac{A_1 + A_2 x}{A - Bx + Cx^2} = t_1 + t_2 x + ..$ gleich der gegebenen Reihe; so geben, nachdem der Nenner weggeschafft worden, die beiden ersten aus der Vergleichung der gleichnamigen Coefficienten entstehenden Gleichungen die Werthe von A_1 und A_2.

Es sey z. B. $-\frac{1}{2} + \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}x^2 + ..$ die recur. Reihe und $t_{n+2} = \frac{1}{2}(t_{n+1} + t_n)$ ihr Gesetz der Bildung, so ist, wegen $2t_{n+2} - t_{n+1} - t_n = 0$, sofort $2 - x - x^2$ der Nenner der erzeugenden Funct. Setzt man daher $\frac{A_1 + A_2 x}{2 - x - x^2} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{4}x + ..$ (indem man nur 2 Glieder braucht), so erhält man $A_1 + A_2 x = -1 + (\frac{3}{2} + \frac{1}{2})x + ..$, und daraus $A_1 = -1$ und $A_2 = 2$; die gebrochene Function ist demnach: $\frac{-1 + 2x}{2 - x - x^2} = \frac{1 - 2x}{-2 + x + x^2}$ (vergl. §. 256, Beisp.).

§. 260. Die gebrochene oder erzeugende Function läfst sich auch noch finden, wenn aufser der recur. Reihe nur die Form der Bruchfunct. oder (bei Voraussetzung von echt gebrochenen Funct.) die Anzahl der Glieder der Relationsscala gegeben ist; wie wir diefs gleich an einem Beispiele nachweisen wollen.

Weifs man z. B. dafs die Scala der recur. R. $-\frac{1}{2} + \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{7}{16}x^3 + ..$ zweigliederig ist, so kann man daraus schliefsen, dafs die erzeugende Function von der Form sey: $\frac{A_1 + A_2 x}{a_1 + a_2 x + a_3 x^2}$. Setzt man daher diesen Bruch gleich der gegebenen Reihe, die man Kürze halber immer durch $t_1 + t_2 x + t_3 x^2 + ..$ bezeichnen kann, und bringt den Nenner weg; so erhält man nach dem Satze der unbest. Coefficienten: $A_1 = t_1 a_1$, $A_2 = t_2 a_1 + t_1 a_2$, $0 = t_3 a_1 + t_2 a_2 + t_1 a_3$, $0 = t_4 a_1 + t_3 a_2 + t_2 a_3$ u. s. w. Drückt man alle übrigen Coefficienten der Bruchfunct. durch a_1 aus (wodurch sich der Bruch am Ende abkürzen läfst), so bedarf man zur Bestimmung der Coefficienten a_2 und a_3 des Nenners, womit man am besten die Rechnung beginnt, blofs die beiden letztern Gleich., welche, wenn man für t_1, t_2, .. substituirt, in $\frac{1}{8}a_1 + \frac{3}{4}a_2 - \frac{1}{2}a_3 = 0$ und $\frac{7}{16}a_1 + \frac{1}{8}a_2 + \frac{3}{4}a_3 = 0$ übergehen, und sich nach den bekannten Multiplications-Gesetzen zweier Functionsreihen immer unmittelbar hinschreiben lassen. Aus diesen beiden Gleich. erhält man ganz einfach durch Elimination: $a_2 = -\frac{1}{2}a_1$, $a_3 = -\frac{1}{2}a_1$, und damit aus den beiden ersten der vorigen Gleich.: $A_1 = -\frac{1}{2}a_1$ und $A_2 = \frac{3}{4}a_1 - \frac{1}{2}a_2 = \frac{3}{4}a_1 + \frac{1}{4}a_1 = a_1$; folglich für die erzeugende Function: $\frac{-\frac{1}{2}a_1 + a_1 x}{a_1 - \frac{1}{2}a_1 x - \frac{1}{2}a_1 x^2}$, d. i. $\frac{1 - 2x}{-2 + x + x^2}$, wie im vorigen Paragraphe. [I., 255.]

§. 261. Bilden die Coefficienten einer recur. Reihe eine arithmetische Reihe irgend einer Ordnung, so läſst sich durch eine einfache Transformation die erzeugende Function auf folgende Art finden.

Es sey $S = A + t_1 x + t_2 x^2 + .. + t_n x^n$ eine solche Reihe; man setze $x = \frac{z}{1+z}$, so wird (§. 255)

$$x = z - z^2 + z^3 - z^4 + ..,$$

und nach §§. 114, 115 etc.:

$$x^2 = z^2 - 2z^3 + 3z^4 - 4z^5 + ..,$$
$$x^3 = z^3 - 3z^4 + 6z^5 - 10z^6 + ..,$$
$$x^4 = z^4 - 4z^5 + 10z^6 - 20z^7 + .. \text{ u. s. w.}$$

Man erhält also mit diesen Werthen aus der gegebenen Reihe:

$$S = A + t_1 z + (t_2 - t_1)z^2 + (t_3 - 2t_2 + t_1)z^3$$
$$+ (t_4 - 3t_3 + 3t_2 - t_1)z^4 + ..$$

oder (§. 226):

$$S = A + t_1 z + \Delta^1 t_1 z^2 + \Delta^2 t_1 z^3 + \Delta^3 t_1 z^4 + ..,$$

und da aus der oben angenommenen Relation $z = \frac{x}{1-x}$ folgt, endlich:

$$S = A + t_1\left(\frac{x}{1-x}\right) + \Delta^1 t_1\left(\frac{x}{1-x}\right)^2 + \Delta^2 t_1\left(\frac{x}{1-x}\right)^3 + ..,$$

eine Reihe die immer abbricht, wenn, wie vorausgesetzt wurde, t_1, t_2, t_3, .. eine arithmetische Reihe bilden.

1. So ist z. B. für die recur. R. $3 + x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + .. + nx^n + ..$ sofort $A = 3$, $t_1 = 1$, $\Delta^1 t_1 = 1$, $\Delta^2 t_1 = 0$, $\Delta^3 t_1 = 0$ u. s. w., also $S = 3 + \frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{(1-x)^2} = \frac{3 - 5x + 3x^2}{1 - 2x + x^2}$.

2. Auf gleiche Weise findet man für die recur. R. $1 + 4x + 15x^2 + 40x^3 + 85x^4 + 156x^5 + ..$ wegen $A = 1$, $t_1 = 4$,

$\Delta^1 t_1 = 11$, $\Delta^2 t_1 = 14$, $\Delta^3 t_1 = 6$ (alle folgenden Differenzen sind Null) sofort: $S = \frac{1 + 5x^2}{1 - 4x + 6x^2 - 4x^3 + x^4}$.

§. **262.** Um zu untersuchen, ob eine vorliegende Reihe eine recurrirende sey, und in diesem Falle, ohne ein sonstiges Bestimmungsstück, die erzeugende Function zu finden, dienen folgende Betrachtungen.

§. **263.** Ist die recur. R. S von der 1. Ordnung, so ist der Form nach $S = \frac{A_1}{a_1 + a_2 x}$, daher $\frac{1}{S} = \frac{a_1}{A_1} + \frac{a_2}{A_1} x$; theilt man also die Einheit durch die recur. R. erster Ordn., so entsteht ein Quotient von der Form $p + qx$.

§. **264.** Ist die recur. R. von der 2. Ordnung, also $S = \frac{A_1 + A_2 x}{a_1 + a_2 x + a_3 x^2}$, so folgt

$$\frac{1}{S} = \frac{a_1}{A_1} + \frac{A_1 a_2 - A_2 a_1}{A_1^2} x + \frac{A_1^2 a_3 - A_2 (A_1 a_2 - A_2 a_1)}{A_1^2 (A_1 + A_2 x)} x^2;$$

dabei rührt der letzte in x^2 multiplicirte Bruch, welcher, wie man sieht, eine recur. R. der 1. Ordnung erzeugt, von dem Reste S' her, welcher geblieben ist, nachdem man im Quotienten bereits 2 Glieder $p + qx$ gefunden hat. Da nun auf diese Weise $\frac{1}{S} = p + qx + \frac{S'}{S} x^2$ und $\frac{S'}{S}$ eine recur. R. der 1. Ordnung ist; so mufs nach dem vorigen §. $\frac{S}{S'}$ einen Quotienten von der Form $p' + q' x$ ohne Rest geben.

§. **265.** Durch Fortsetzung dieser Schlüsse gelangt man nun zu folgender Regel: Um zu untersuchen, ob die Reihe $S = t_1 + t_2 x + t_3 x^2 + \ldots$ eine recurrirende sey, theile man die Einheit durch diese R., setze aber die Division nur so weit fort, bis man im Quotienten 2 Glieder, $p + qx$ und demnach einen Rest $S' x^2$, wo S' wieder die Form $t'_1 + t'_2 x + t'_3 x^2 + \ldots$ besitzt, erhalten hat. Hierauf theile man eben so S durch S', bis man im Quotienten 2 Glieder $p' + q' x$ und den Rest $S'' x^2$, wo $S'' = t''_1 + t''_2 x + \ldots$ ist, erhalten hat. Unter denselben Bedingungen theile man ferner S' durch S'', S'' durch S''' u. s. w. Gelangt man durch dieses Verfahren endlich zu einem solchen zweigliederigen Quotienten ohne Rest, so ist S eine recurrirende Reihe, und zwar von der m. Ordnung, wenn die letzte Division in der Reihe die m. war. Gesetzt, es gehe die dritte Division auf, so, dafs man hat:

$$\frac{1}{S} = p + qx + \frac{S'}{S} x^2,$$

$$\frac{S}{S'} = p' + q'x + \frac{S''}{S'} x^2 \text{ und } \frac{S'}{S''} = p'' + q''x;$$

so ist

$$\frac{S''}{S'} = \frac{1}{p'' + q''x}, \quad \frac{S}{S'} = \frac{(p' + q'x)(p'' + q''x) + x^2}{p'' + q''x},$$

$$\frac{1}{S} = \frac{(p + qx)(p' + q'x)(p'' + q''x) + (p + qx + p'' + q''x)\, x^2}{(p' + q'x)(p'' + q''x) + x^2},$$

und endlich der Form nach: $S = \dfrac{A_1 + A_2 x + A_3 x^2}{a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3}$ die erzeugende Funct., welche sofort eine recur. R. der dritten Ordnung liefert.

So ist z. B. für $S = -\frac{1}{2} + \frac{3}{4} x + \frac{1}{8} x^2 + \frac{7}{16} x^3 + \frac{9}{32} x^4 + \ldots$ sofort $\frac{1}{S} = -2 - 3x + \frac{S'}{S} x^2$, $S' = \frac{5}{2} + \frac{5}{4} x + \frac{15}{8} x^2 + \frac{25}{16} x^3 + \ldots$ und $\frac{S}{S'} = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5} x$, ohne Rest; es ist also die gegebene Reihe eine recurrirende, und zwar der 2. Ordnung. Um dafür die erzeugende Function zu finden, hat man

$$\frac{S'}{S} = \frac{5}{-1 + 2x}, \quad \frac{1}{S} = -2 - 3x + \frac{5x^2}{-1 + 2x} = \frac{2 - x - x^2}{-1 + 2x},$$

also endlich $S = \dfrac{1 - 2x}{-2 + x + x^2}$ (vergl. Beisp. im §. 256).

Anmerk. In der Anwendung kann es öfter vortheilhaft seyn, Reihen, welche keine recurrirenden sind, näherungsweise doch als solche anzusehen, und dazu die erzeugende Funct. zu suchen. Diese werden (vorausgesetzt, dafs sie convergiren) der Wahrheit um so näher kommen, von je höherer Ordnung man die recur. R. annimmt. [Die Entwicklung des allgem. und summat. Gliedes findet man I., 261 — 266.]

Siebentes Capitel.

Über die Umkehrung der Reihen.

§. 266. Erklär. Eine Reihe

$$y = Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots,$$

in welcher also y als Function von x erscheint, umkehren, heiſst x als Function von y, und zwar wieder durch eine nach steigenden Potenzen von y fortschreitende Reihe darstellen.

§. 267. Um nun die Reihe

$$1)\ y = Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots,$$

wobei A, B, C, .. von x unabhängige Coefficienten sind, umzukehren, nehme man für x die unbestimmte Reihe $x = t_1 y + t_2 y^2 + t_3 y^3 + \ldots$ an, bilde daraus die in 1) vorkommenden Potenzen von x, und substituire die dadurch für x, x^2, x^3, .. entstehenden Reihen in 1); so erhält man, Alles nach y geordnet, nach dem Satze der unbestimmten Coefficienten die zur Bestimmung von t_1, t_2, t_3, .. nöthigen Gleichungen.

1. Um z. B. die Reihe $y = x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$ umzukehren, setze man $x = t_1 y + t_2 y^2 + t_3 y^3 + \ldots$; so wird (§§. 114 etc.) $x^2 = t_1^2 y^2 + 2t_1 t_2 y^3 + (2t_1 t_3 + t_2^2) y^4 + \ldots$, $x^3 = t_1^3 y^3 + 3t_1^2 t_2 y^4 + \ldots$, $x^4 = t_1^4 y^4 + \ldots$ u. s. w., also, wenn man diese Werthe für x, x^2, .. in der gegebenen R. substituirt und nach y ordnet:

$$y = t_1 y + (t_2 + t_1^2) y^2 + (t_3 + 2t_1 t_2 + t_1^3) y^3$$
$$+ (t_4 + 2t_1 t_3 + t_2^2 + 3t_1^2 t_2 + t_1^4) y^4 + \ldots$$

Aus dieser Gleich. folgt aber: $t_1 = 1$; $t_2 + t_1^2 = 0$, also $t_2 = -1$; $t_3 + 2t_1 t_2 + t_1^3 = 0$, also $t_3 = 1$; $t_4 + 2t_1 t_3 + t_2^2 + 3t_1^2 t_2 + t_1^4 = 0$, also $t_4 = -1$ u. s. w. Die gesuchte oder umgekehrte R. ist sonach: $x = y - y^2 + y^3 - y^4 + \ldots$ (Und in der That, die für y gegebene R. ist eine recurrirende, wofür §. 259 $y = \frac{x}{1-x}$ die erzeugende Funct. ist; da nun daraus $x = \frac{y}{1+y}$ folgt, so ist, diesen letztern Bruch nach §. 255 in eine recur. R. aufgelöst, wieder $x = y - y^2 + y^3 - y^4 + \ldots$)

2. Setzt man, um die R. $y = x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + ..$ umzukehren, wieder $x = t_1 y + t_2 y^2 + t_3 y^3 + ..$, entwickelt wie im vorigen Beispiele die Potenzen von x und substituirt die entstehenden Werthe durch y ausgedrückt in die gegeb. Reihe; so erhält man, wenn wieder nach y geordnet und der mehr erwähnte Satz der unbest. Coeffic. angewendet wird, die Relationen: $t_1 = 1$; $t_2 + \frac{1}{1.2} t_1^2 = 0$, also $t_2 = -\frac{1}{2}$; $t_3 + t_1 t_2 + \frac{1}{2.3} t_1^3 = 0$, daraus $t_3 = \frac{1}{3}$; $t_4 + t_1 t_3 + \frac{1}{2} t_2^2 + \frac{1}{2} t_1^2 t_2 + \frac{1}{2.3.4} t_1^4 = 0$, daraus $t_4 = -\frac{1}{4}$ u. s. w., demnach für die umgekehrte Reihe:

$$x = y - \tfrac{1}{2} y^2 + \tfrac{1}{3} y^3 - \tfrac{1}{4} y^4 + ..$$

3. Laufen die Exponenten von x in der gegebenen R. nach den ungeraden Zahlen fort, so beobachten die Exponenten von y in der umgekehrten R. wieder dasselbe Gesetz. Um daher die R. $y = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - ..$ umzukehren, setze man $x = t_1 y + t_2 y^3 + t_3 y^5 + ..$ (nimmt man auch die Glieder py^2, qy^4, .. mit in die Reihe auf, so findet man zuletzt $p = 0$, $q = 0$, ..), entwickle damit x^3, x^5, .. und substituire die in y ausgedrückten Werthe dieser ungeraden Potenzen in der gegeb. R.; so erhält man, nachdem Alles nach y geordnet worden, aus den durch Vergleichung der gleichnamigen Coeffic. entstehenden Gleichungen: $t_1 = 1$, $t_2 = \frac{1}{6}$, $t_3 = \frac{3}{40}$, $t_4 = \frac{5}{112}$ u. s. w., mithin für die umgekehrte R. selbst:

$$x = y + \frac{1.y^3}{2.3} + \frac{1.3y^5}{2.4.5} + \frac{1.3.5y^7}{2.4.6.7} + ..$$

4. Eben so erhält man durch Umkehrung der Reihe

$$y = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{3.5} + \frac{17x^7}{3.5.7.3} + \frac{62x^9}{3.5.7.9.3} + ..$$

folgende sehr einfache Reihe:

$$x = y - \tfrac{1}{3} y^3 + \tfrac{1}{5} y^5 - \tfrac{1}{7} y^7 + ..$$

Anmerk. Sind allgemein m, $m + n$, $m + 2n$, $m + 3n$, .. die Exponenten von x in der gegebenen Reihe, so sind $\frac{1}{m}$, $\frac{1+n}{m}$, $\frac{1+2n}{m}$, $\frac{1+3n}{m}$ etc. die auf einander folgenden Exponenten der umgekehrten Reihe [I., 271].

Wäre die R. $y = A + Bx + ..$ umzukehren, so müfste man zuerst A transferiren, d. i. $y - A = z$ gesetzt, die Reihe $z = Bx + Cx^2 + ..$ umkehren.

Achtes Capitel.

Über die Convergenz und Divergenz der unendlichen Reihen.

§. 268. Da die Anwendung der divergirenden Reihen in der Analysis nur zu leicht zu Irrthümern führen, und ganz falsche Resultate veranlassen kann; so ist es von der gröſsten Wichtigkeit, ein allgemeines Kennzeichen für die Con- und Divergenz der unendlichen Reihen aufzufinden. Da ferner nach §. 219 eine unendliche R. convergirt oder divergirt, je nachdem ihre Summe eine bestimmte endliche Gröſse oder Unendlich ist, in welch letzterem Falle sie eigentlich keine Summe hat; so wäre die Frage ob, und unter welcher Bedingung eine vorliegende Reihe convergire, äuſserst leicht zu beantworten, wenn man jede Reihe summiren könnte (in welchem Falle aber auch die ganze Frage weit weniger wichtig wäre).

Um z. B. die Bedingungen anzugeben, unter welchen die geometr. R. $a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n + \ldots$ convergirt, hat man bekanntlich $S_n = \dfrac{aq^n - a}{q - 1} = \dfrac{a - aq^n}{1 - q}$.

Ist nun 1. $q > 1$, so wächst aq^n mit n bis ins Unendliche, also wird für $n = \infty$ auch $S_n = \infty$.

Ist 2. $q = 1$, so erscheint S_n unter der Form $\frac{0}{0}$; es ist aber offenbar auch in diesem Falle die Summe $S_n = a + a + a + \ldots$ dieser unendl. R. $= \infty$.

Ist endlich 3. $q < 1$, so nimmt aq^n unendlich ab, wenn n unendlich wächst, und es nähert sich dabei S_n ohne Ende der Grenze $\dfrac{a}{1-q}$, oder es wird für $n = \infty$ sofort $S_n = \dfrac{a}{1-q}$.

Aus diesen Untersuchungen folgt also, daſs eine geometr. unendliche R. nur dann convergire, wenn der Quotient oder Exponent derselben, ohne Rücksicht auf das Zeichen, kleiner als die Einheit ist, und daſs diese R. in allen übrigen Fällen divergire.

§. 269. Da jedoch die Summirung nur in den wenigsten Fällen gelingt, und häufig auch dann noch sehr schwierig ist; so muſs man für die Convergenz der Reihen andere, von dieser Summirung unabhängige Kennzeichen aufzustellen trachten. Die Betrachtungen der folgenden §§. sollen uns zu solchen verhelfen.

§. **270** Es seyen a_1, a_2, . . a_n . . die Glieder einer unendlichen Reihe, die wir vorläufig als positiv voraussetzen, und S_n ihre Summe; so kann man setzen:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + E_n,$$

wo $E_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots$ ins Unendl. die Ergänzung der Reihe für den Zeiger n bezeichnet. Diefs vorausgesetzt, wird die Reihe offenbar convergiren, wenn bei der unendlichen Zunahme von n, E_n unendlich abnimmt, und für $n = \infty$ vollends verschwindet; im entgegengesetzten Falle aber divergiren.

§. **271.** Besitzt eine unendl. Reihe durchaus gleiche Glieder a, so ist ihre Summe na für $n = \infty$, wenn auch a eine noch so kleine endliche Gröfse wäre, Unendlich, also die Reihe selbst divergent. Da dieses für Reihen mit wachsenden Gliedern noch in einem höhern Grade der Fall ist, so können wir unsere Untersuchung offenbar auf Reihen mit abnehmenden Gliedern, d. i. auf fallende Reihen beschränken.

§. **272.** Sind aber von irgend einer Stelle angefangen $\frac{1}{t_n}$, $\frac{1}{t_{n+1}}$, $\frac{1}{t_{n+2}}$ 3 auf einander folgende Glieder einer fallenden R., also $t_n < t_{n+1} < t_{n+2}$ und überhaupt t_n um so gröfser, je gröfser n ist; so hat man $\frac{t_n}{t_{n+1}}$, $\frac{t_{n+1}}{t_{n+2}}$ für 2 auf einander folgende Quotienten, welche entstehen, wenn man in der Reihe jedes folgende Glied durch sein unmittelbar vorhergehendes dividirt, und $\frac{t_n t_{n+2} - t_{n+1}^2}{t_{n+1} t_{n+2}}$ für die Differenz dieser beiden Quotienten. Man sieht aber leicht, dafs diese Differenz bei der beständigen Zunahme von n fortwährend abnimmt und für $n = \infty$ vollends verschwindet, weil bei dieser Zunahme von n der Nenner dieses Bruches ebenfalls fortwährend wächst, während sich der Zähler zugleich ohne Ende der Null nähert.

§. **273**. Es seyen nun für unsere obige Reihe a_1, a_2, . . a_n . . die Quotienten $\frac{a_{n+1}}{a_n} = x$ und $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = x + \alpha_n$; so ist nach den Bemerkungen der beiden vorigen §§. $x < 1$ und α_n eine Gröſse, welche unendlich abnimmt, während n unendlich wächst. Aus diesen beiden Quotienten folgt: $a_{n+1} = a_n x$ und $a_{n+2} = a_{n+1}(x + \alpha_n) = a_n x (x + \alpha_n)$. Eben so ist weiters:

$$a_{n+3} = a_{n+2}(x + \alpha_{n+1}) = a_n x (x + \alpha_n)(x + \alpha_{n+1}),$$
$$a_{n+4} = a_{n+3}(x + \alpha_{n+2}) = a_n x (x + \alpha_n)(x + \alpha_{n+1})(x + \alpha_{n+2})$$

u. s. w.

Es ist also, diese Werthe oben in $E_n = a_{n+1} + a_{n+2} + ..$ substituirt:

$$m)\quad E_n = a_n [x + x(x + \alpha_n) + x(x + \alpha_n)(x + \alpha_{n+1}) + x(x + \alpha_n)(x + \alpha_{n+1})(x + \alpha_{n+2}) + ..],$$

oder wenn man multiplicirt und die Summe der unendlichen geometr. R. $x + x^2 + x^3 + .. = S$ setzt:

$$E_n = a_n S(1 + \alpha_n + x\alpha_{n+1} + x^2\alpha_{n+2} + .. + \alpha_n\alpha_{n+1} + x\alpha_n\alpha_{n+2} + .. \text{ etc.}).$$

§. **274**. Da dieser Relation wesentlich die Bedingung zu Grunde liegt, daſs $x < 1$, nämlich die zu untersuchende R. fallend sey; so ist (§. 268) $S = \frac{x}{1 - x}$ eine endliche Gröſse, und sonach (da α_n, α_{n+1}, . . dabei unendlich abnehmen) $a_n S$ die Grenze, welcher sich E_n bei der unendlichen Zunahme von n ohne Ende nähert [was auch aus der Relat. m) ersichtlich ist]: nimmt also (§. 270) diese Grenze, nämlich $a_n \frac{x}{1 - x}$, bei der unendl. Zunahme von n unendlich ab, und wird dieser Quotient für $n = \infty$ vollends gleich Null; so ist die betreffende Reihe convergent, im entgegengesetzten Falle aber divergent. — Da es übrigens dabei gleichgiltig ist, ob der Quotient x, bei welchem es nur auf den numerischen Werth ankömmt, positiv oder negativ ist; so gilt dieser Satz auch dann noch, wenn (wenigstens von irgend einer Stelle angefangen) in der Reihe ein regelmäſsiger Zeichenwechsel Statt findet.

§. 275. Das eben entwickelte Kennzeichen für die Convergenz und Divergenz unendlicher Reihen zeigt deutlich, daſs das bloſse Abnehmen der Glieder oder Fallen der Reihe zur Convergenz noch keineswegs hinreichend sey; obschon man umgekehrt, aus dem Nichtvorhandenseyn dieser Eigenschaft, mit Bestimmtheit auf ihre Divergenz schlieſsen kann.

1. So hat man z. B. für die unendl. R. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$ sofort $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n}{n+1}=1-\frac{1}{n}+\left(\frac{1}{n^2}+\ldots\right)$, also (da $x<1$ seyn muſs, und der Voraussetzung daſs n fortwährend zunimmt) $x=1-\frac{1}{n}$ und $a_n\frac{x}{1-x}=1-\frac{1}{n}$. Da nun dieser Quotient bei der unendl. Zunahme von n nicht bis Null, sondern nur bis 1 abnehmen kann; so ist die vorliegende Reihe divergent.

2. Für die Reihe $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$ dagegen ist

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=-1+\frac{1}{n}-\left(\frac{1}{n^2}+\ldots\right),\text{ also}$$

$$x=-1+\frac{1}{n}\left(\text{oder }-x=1-\frac{1}{n}\right)\text{ und}$$

$$a_n\frac{x}{1-x}=\frac{-n+1}{n(2n-1)}.$$

Da dieser Quotient bei der unendl. Zunahme von n unendlich abnimmt und für $n=\infty$ verschwindet, so ist diese Reihe convergent.

3. Um die Bedingung zu finden, unter welcher die unendl. R. $\frac{1}{2^m}+\frac{1}{4^m}+\ldots+\frac{1}{(2n)^m}+\ldots$ convergirt, hat man

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(2n)^m}{(2n+2)^m}=\frac{(2n)^m}{(2n)^m+m(2n)^{m-1}2+\ldots}=1-\frac{m}{n}+\ldots,$$

also $x=1-\frac{m}{n}$ und $a_n\frac{x}{1-x}=\frac{n-m}{m(2n)^m}$, woraus sofort folgt, daſs diese Reihe für alle positiven Werthe von $m>1$ convergire, für alle übrigen Werthe aber divergire.

§. **276.** Setzt man für x seinen Werth $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ (§. 273), so wird $a_n \frac{x}{1-x} = \frac{a_n a_{n+1}}{a_n - a_{n+1}}$, und es ist die Anwendung dieses letztern Quotienten statt des vorigen, zur Untersuchung der Convergenz einer gegebenen unendl. Reihe, meistentheils noch bequemer.

1. So ist z. B. für die unendliche Reihe

$$1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1} + \ldots$$

sofort $\frac{a_n a_{n+1}}{a_n - a_{n+1}} = \frac{1}{2}$; da also dieser Quotient für $n = \infty$ nicht Null werden kann, so ist die Reihe divergent.

2. Dagegen erhält man für die Reihe

$$1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \ldots \pm \frac{1}{2n-1} \mp \frac{1}{2n+1} \pm \ldots : \frac{a_n a_{n+1}}{a_n - a_{n+1}} = \mp \frac{1}{4n},$$

und da dieser Quotient bei der unendl. Zunahme von n unendlich abnimmt und zuletzt für $n = \infty$ ganz verschwindet, so gehört die vorliegende Reihe zu den convergirenden.

3. Für die unendliche Reihe $\frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} + \ldots$ hat man

$$\frac{a_n a_{n+1}}{a_n - a_{n+1}} = \frac{1}{m n^{m-1} + \binom{m}{2} n^{m-2} + \ldots},$$

woraus sofort folgt, dafs diese Reihe nur für positive, die Einheit übersteigende Werthe von m convergire.

4. Um die Bedingung der Convergenz für die Reihe

$$\frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$$

aufzufinden, hat man dafür

$$\frac{a_n a_{n+1}}{a_n - a_{n+1}} = \frac{x^{n+1}}{1.2.3\ldots n(n+1-x)}$$

$$= 1 : \left[\frac{1}{x} \cdot \frac{2}{x} \cdot \frac{3}{x} \ldots \frac{n}{x} \frac{(n+1-x)}{x}\right],$$

und es ist nicht schwer einzusehen, dafs dieser Quotient bei der unendl. Zunahme von n für jeden endlichen Werth von x unendlich abnimmt, folglich die vorliegende R. für alle innerhalb der Grenzen $+\infty$ und $-\infty$ liegenden Werthe von x convergire.

5. Für die unendl. R. $x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots$ erhält man $\frac{a_n a_{n+1}}{a_n - a_{n+1}} = \frac{\mp x^n \cdot x^{n+1}}{(n+1)x^n + nx^{n+1}} = \mp 1 : \left(\frac{n+1}{x^{n+1}} + \frac{n}{x^n}\right)$.

Da nun für $n = \infty$ der Quotient $\frac{n}{x^n}$ $\left(\text{also auch jener } \frac{n+1}{x^{n+1}}\right) = 0$ oder ∞ wird, je nachdem $x >$ oder < 1 ist (was man leicht findet, wenn man beziehungsweise $x = 1 + \alpha$ und $= \frac{1}{1+\alpha}$ setzt, und damit $\frac{x^n}{n}$ entwickelt); so folgt, dafs diese R. nur innerhalb der Grenzen $x = -1$ und $x = +1$ (diese letztere noch mit begriffen) convergire, sonst aber divergent sey.

6. Unter den nämlichen Bedingungen convergirt auch die Reihe $x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + ..$

7. Für die Reihe $x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5}$ — etc. findet man

$$\frac{a_n a_{n+1}}{a_n - a_{n+1}} = \mp 1 : \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{2}{x} \ldots \frac{2n+1}{x} + \frac{1}{x} \cdot \frac{2}{x} \ldots \frac{2n-1}{x}\right),$$

und daraus folgt, so wie im 4. Beispiele, dafs diese R. für jeden endlichen Werth von x, d. i. innerhalb der Grenzen $x = -\infty$ $x = +\infty$ convergire.

8. Dasselbe Ergebnifs findet man auch für die unendl. Reihe

$$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} - \text{etc.}$$

9. Um endlich noch die Bedingung aufzufinden, unter welcher die R. $(1 + x)^m = 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + ..$, die bekanntlich (§. 121) blofs für ganze positive Werthe von m abbricht, convergire, hat man dafür:

$$\frac{a_n a_{n+1}}{a_n - a_{n+1}} = \frac{m(m-1) \ldots (m-n+1)(m-n)}{1 \cdot 2 \ldots n[(n+1) + (n-m)x]} x^{n+1},$$

und da (wie wir unten §. 297, 5. sehen werden) dieser Quotient bei der unendl. Zunahme von n blofs für $x < 1$ unendlich abnimmt und für $n = \infty$ verschwindet; so convergirt diese Reihe ebenfalls nur innerhalb der Grenzen $x = -1$ und $x = +1$. Auch convergirt diese Reihe noch für $x = 1$, wenn m positiv ist (vergl. auch §. 278, Beisp. 2.).

§. 277. Zusatz. Fallende Reihen, bei denen ein regelmäfsiger Zeichenwechsel Statt hat, sind immer convergent. Denn sind wieder $\pm a_n \mp a_{n+1}$ 2 auf einander folgende Glieder (oder wenn immer mehrere Glieder das nämliche Zeichen besitzen, Gruppen von Gliedern) der R., so hat man $\frac{a_n a_{n+1}}{a_n - a_{n+1}} = \pm 1 : \left(\frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_n}\right)$; da nun die R. fallend ist, also a_n und a_{n+1} für $n=\infty$ unendlich klein, demnach $\frac{1}{a_{n+1}}$ und $\frac{1}{a_n}$ unendlich groſs werden; so wird dabei in der That dieser Quotient gleich Null.

§. **278.** Die in §. 274 zur Untersuchung der Convergenz der unendl. Reihen entwickelte allgemeine Regel läſst sich für jene besondern Reihen, für welche der Quotient $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ die Form $r)$ $\frac{n^\alpha + a\,n^{\alpha-1} + \ldots}{n^\alpha + A n^{\alpha-1} + \ldots}$ erhält, noch einfacher ausdrücken. — Es sey nämlich

$$a_n = (n^r + p n^{r-1} + \ldots) : (n^m + p' n^{m-1} + \ldots)$$

das allgem. Glied einer solchen R., und dabei m und r positiv, so ist

$$a_{n+1} = [(n+1)^r + p(n+1)^{r-1} + \ldots] : [(n+1)^m + p'(n+1)^{m-1} + \ldots]$$
$$= [n^r + (p+r)\,n^{r-1} + \ldots] : [n^m + (p'+m)\,n^{m-1} + \ldots],$$

demnach

$$s)\ \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^{r+m} + (p+p'+r)\,n^{r+m-1} + \ldots}{n^{r+m} + (p+p'+m)\,n^{r+m-1} + \ldots} = 1 - \frac{m-r}{n} + \ldots;$$

es ist also $x = 1 - \frac{m-r}{n}$ und

$$a_n \frac{x}{1-x} =$$

$$(n^r + p n^{r-1} + \ldots)\left(1 - \frac{m-r}{n}\right) : (n^{m-1} + p' n^{m-2} + \ldots)(m-r),$$

welcher Quotient bei der unendl. Zunahme von n offenbar nur dann unendlich abnehmen kann, wenn $m-1>r$ oder $m-r>1$ ist. Da nun aber, den obigen Quotienten $r)$ mit jenem $s)$ verglichen, $r+m=\alpha$, $p+p'+r=a$ und $p+p'+m=A$, mithin $m=A-p-p'$ und $r=a-p-p'$, folglich $m-r=A-a$ ist; so wird also die betreffende Reihe convergiren, wenn (bezogen auf den obigen Quot. $r)$ $A-a>+1$ ist.

1. So sind z. B. für die beiden unendlichen Reihen

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots \text{ und } \frac{1}{1^m} + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \ldots$$

die Quotienten $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ beziehungsweise:

$$\frac{2n-1}{2n+1} = \frac{n - \frac{1}{2}n^0}{n + \frac{1}{2}n^0} \text{ und } \frac{n^m}{(n+1)^m} = \frac{n^m + 0\,n^{m-1} + \ldots}{n^m + mn^{m-1} + \ldots}.$$

Da nun $A - a$ für den erstern $= 1$, und für den letztern $= m$ ist; so folgt, daſs die erste Reihe divergent, die letztere aber bloſs für $m > +1$ convergent sey (§. 276, 1. und 3.).

2. Setzt man in der im 9. Beisp. §. 276 angeführten Reihe $x = 1$, so wird $\frac{a_{n+1}}{a_n} = -\frac{n-m}{n+1}$, woraus wieder (und zwar einfacher als a. a. O.) folgt, daſs wegen $A - a = m + 1$ diese Reihe, bei dem angeführten Werthe von $x = 1$, nur für positive Werthe von m convergire.

Neuntes Capitel.

Entwickelung der Exponentialgröſsen und logarithmischen Reihen. Bemerkung über die Convergenz unendlicher Factorenfolgen.

§. 279. Erklär. Jede Gröſse (die Einheit ausgenommen) mit einem veränderlichen Exponenten wird Exponentialgröſse genannt; sie hat daher immer eine der beiden Formen a^x oder y^x.

Eine Exponentialgröſse entwickeln, heiſst diese in eine (convergente) unendliche, nach steigenden Potenzen ihres Exponenten fortlaufende Reihe auflösen.

§. 280. Um die Exponentialgröſse a^x zu entwickeln, setze man 1) $a = 1 + b$; so wird $a^x = (1+b)^x$, oder wenn man nach dem Binomialtheorem (dessen ganz allgem. Giltigkeit §. 126 erwiesen wurde) entwickelt:

$$a^x = 1 + \binom{x}{1} b + \binom{x}{2} b^2 + \binom{x}{3} b^3 + \ldots + \binom{x}{n} b^n + \ldots,$$

und wenn man die Multiplicationen von

$$\binom{x}{2} = \frac{x(x-1)}{1 \,.\, 2}, \quad \binom{x}{3} = \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} \text{ u. s. w.}$$

ausführt und Alles nach x ordnet:

$$a^x = 1 + \Big[1.b - \tfrac{1}{2}b^2 + \frac{-1 \,.\, -2}{2 \,.\, 3} b^3 + \ldots$$
$$+ \frac{-1 \,.\, -2 \ldots -(n-1)}{1 \,.\, 2 \ldots (n-1)\,n} b^n\Big] x + B_2 x^2 + B_3 x^3 + \ldots$$

Dabei ist der Coefficient von x, nämlich $A_1 = b - \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{4}b^4 + \ldots \pm \frac{1}{n}b^n$, nach einem einfachen und bestimmten (von der Natur der Binomialcoeffic. abhängigen) Gesetze gebildet, während alle übrigen Coefficienten B_2, B_3, .. ganz unregelmäſsige Reihen bilden. — Man hat also, wegen $b = a - 1$ [aus 1)]:

$$\alpha)\quad a^x = 1 + A_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 + \ldots,$$

und dabei

$$2)\quad A_1 = (a-1) - \tfrac{1}{2}(a-1)^2 + \tfrac{1}{3}(a-1)^3 - \tfrac{1}{4}(a-1)^4 + \ldots$$

§. **281**. Um ferner die noch als unbestimmt anzusehenden Coeffic. B_2, B_3 .. durch dieselbe einfache Reihe A_1 auszudrücken, setze man in α) $2x$ statt x; so erhält man, da die Coeffic. von x unabhängig sind:

$$a^{2x} = 1 + 2A_1 x + 2^2 B_2 x^2 + 2^3 B_3 x^3 + \ldots$$

Nun ist aber auch $a^{2x} = (a^x)^2 = (1 + A_1 x + B_2 x^2 + \ldots)^2$; entwickelt man daher die 2. Potenz dieses Polynoms und setzt diese der vorigen Entwicklung von a^{2x} gleich, so erhält man die identische Gleichung:

$$\begin{aligned} 1 + 2A_1 x + (2B_2 + A_1^2)x^2 + \ldots \\ + (2B_n + 2A_1 B_{n-1} + 2B_2 B_{n-2} + \ldots)x^n + \ldots \\ = 1 + 2A_1 x + 4B_2 x^2 + \ldots + 2^n B_n x^n + \ldots, \end{aligned}$$

und daraus (§. 108):

$$2B_2 + A_1^2 = 4B_2 \quad \text{oder} \quad B_2 = \frac{A_1^2}{2};$$

$$2B_3 + 2A_1 B_2 = 8B_3 \quad \text{oder} \quad B_3 = \frac{A_1^3}{2 \cdot 3} \quad \text{u. s. w.};$$

$$2B_n + 2A_1 B_{n-1} + 2B_2 B_{n-2} + \ldots = 2^n B_n,$$

und daraus, wenn man das hier herrschende Gesetz für die vorausgehenden Coeffic. B_{n-1}, B_{n-2}, .. gelten läſst:

$$B_n = \frac{A_1^n}{2 \cdot 3 \ldots n},$$

wovon die Richtigkeit auch noch leicht durch höhere Induction nachgewiesen werden kann [I., 289]. Man hat also endlich aus α):

3) $a^x = 1 + \frac{A_1}{1} x + \frac{A_1^2}{1.2} x^2 + \frac{A_1^3}{1.2.3} x^3 + .. + \frac{A_1^n}{1.2..n} x^n + ..$ wobei A_1 die oben in 2) angegebene Reihe oder Function der Basis a ist, und (§. 276, 5.) innerhalb der Grenzen von $a - 1 = -1$ und $+1$, also $a = 0$ und $+2$ convergirt. Ist A_1 eine endliche Gröſse, so convergirt diese Reihe 3) (§. 276, 4.) für jeden endlichen Werth von x oder innerhalb der Grenzen $x = -\infty$ und $x = +\infty$.

Anmerk. Um kurz anzuzeigen, daſs eine Reihe innerhalb der Grenzen von $x = a$ bis $x = b$ convergire, schreiben wir neben oder unter die Reihe: $\{x = a,\ x = b\}$, und wenn die Grenze b noch mit begriffen ist: $\{x = a,\ x = \underline{b}\}$.

§. **282**. Setzt man in der vorigen R. 3) $A_1 = 1$, und bezeichnet den besondern Werth von a, welchen diese Grundzahl vermöge Relat. 2) (§. 280) erhalten muſs, durch e; so hat man:

4) $e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + .. \{x = +\infty,\ x = -\infty\}$.

Um ferner den numerischen Werth von e zu finden, darf man nur die obige R. 2) umkehren, wodurch man (§. 267, 2.)

$a - 1 = A_1 + ..$ oder $a = 1 + A_1 + \frac{A_1^2}{1.2} + \frac{A_1^3}{1.2.3} + ..$

erhält, und dann $A_1 = 1$ setzen.

Ohne jedoch erst die Umkehrung zu Hilfe zu nehmen, darf man nur in der vorigen R. 4) $x = 1$ setzen, und man erhält: $e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + ..$, oder bis auf 9 Decimalen genau: 5) $e = 2{\cdot}718281828$.

Die logarithmischen Reihen.

§. **283**. Bezeichnet a die Basis oder Grundzahl irgend eines Logarithmen-Systems, so ist bekanntlich die Grundgleich. der Logarithmen: $a^x = y$, und daraus für dieses System m) $x = log\, y$.

§. **284**. Um $log\, y$ in eine Reihe nach y zu entwickeln, folgt aus der vorigen Gleich., wenn man beide Theile zur

Potenz z erhebt: $a^{xz} = y^z$, oder [§. 281, 3)]:

$$1 + A_1 xz + \ldots = 1 + \alpha_1 z + \ldots,$$

wobei $A_1 = (a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \ldots$, also eben so

$$\alpha_1 = (y-1) - \tfrac{1}{2}(y-1)^2 + \tfrac{1}{3}(y-1)^3 - \text{etc.}$$

ist. Aus dieser identischen Gleich. folgt ferner, da sowohl $A_1 x$ als auch α_1 von z nicht abhängen (§. 108): $A_1 x = \alpha_1$ oder $x = \frac{1}{A_1}[(y-1) - \frac{1}{2}(y-1)^2 + \frac{1}{3}(y-1)^3 - \ldots]$.

Setzt man für x den Werth aus der obigen Gleich. m) und Kürze halber n) $\frac{1}{A_1} = \frac{1}{(a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \ldots} = M$, so erhält man:

1) $log\, y = M[(y-1) - \frac{1}{2}(y-1)^2 + \frac{1}{3}(y-1)^3 - \ldots]$,

und wenn man $y+1$ statt y schreibt:

2) $log(1+y) = M(y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \ldots)$
$\{y = -1,\ y = +1\}$.

§. **285**. Der von der Basis a abhängige Factor M heifst M o d u l des Logarithmensystems der Basis a. Nimmt man, was am einfachsten und natürlichsten ist, $M = 1$, wodurch auch (Gleich. n) $A_1 = 1$, mithin §. 282, $a = e$ wird; so heifsen die dieser Basis e entsprechenden Logarithmen n a t ü r l i c h e, oder auch, aus einem später (§. 862) einzusehenden Grunde, h y p e r b o l i s c h e Logarithmen. Da wir diese durchgehends blofs mit l bezeichnen werden, so folgt (da der Logarithmus der Basis immer gleich Eins ist) $le = 1$ und 3) $l(1+y) = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \ldots$

§. **286**. F o l g e r u n g. Für $y = a - 1$ hat man nach 3): $la = (a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{3}(a-1)^3 - \ldots$, folglich §. 280, 2): $A_1 = la$, daher auch §. 281, 3):

$$a^x = 1 + la.x + \frac{l^2 a}{2}x^2 + \frac{l^3 a}{2.3}x^3 + \ldots,$$

und §. 284, n): $M = \frac{1}{la}$.

Um vom Logarithmensysteme Log auf ein anderes log von der Basis a überzugehen, hat man bekanntlich:

$$log\,y = \frac{Log\,y}{Log\,a}.$$

Läſst man daher die natürlichen für die bekannten Logarithmen gelten, so erhält man $log\,y = \frac{l\,y}{l\,a} = \frac{1}{l\,a} l\,y$, oder endlich (vermöge der vorigen Relat.) $log\,y = M l\,y$; dabei bezeichnet M den Modul für das System log von der Basis a.

§. **287**. Um die obige Reihe 2) für Werthe von $y > 1$ gut convergirend, also für die wirkliche Berechnung brauchbar zu machen, setze man in dieser R. $-y$ statt y, und ziehe von ihr die dadurch entstehende Reihe ab; so erhält man $log(1+y) - log(1-y)$ oder

$$\beta)\quad log\left(\frac{1+y}{1-y}\right) = 2M(y + \tfrac{1}{3}y^3 + \tfrac{1}{5}y^5 + ..),$$

und wenn man $\frac{1+y}{1-y} = \frac{x}{x-1}$ setzt, woraus $y = \frac{1}{2x-1}$ folgt:

$$4)\quad log\,x = log(x-1) + 2M\left[\frac{1}{2x-1} + \frac{1}{3(2x-1)^3} + \frac{1}{5(2x-1)^5} + ..\right].$$

§. **288**. Nach dieser schon sehr gut convergirenden Reihe erhält man die natürl. Logarithmen der 3 ersten Primzahlen (die Logarithmen der zusammengesetzten Zahlen werden durch bloſse Addition aus jenen der Primzahlen erhalten) wegen $l1 = 0$ und $M = 1$:

$$l2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} + ..\right) = 0{\cdot}69314718,$$

$$l3 = l2 + 2\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} + ..\right) = 1{\cdot}09861229,$$

$$l5 = 2l2 + 2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3.9^3} + ..\right) = 1{\cdot}60943791.$$

Daraus hat man z. B. für die zusammengesetzte Zahl 10:

$$l10 = l2 + l5 = 2{\cdot}30258509.$$

§. **289**. Um diese letzte Reihe 4) noch convergenter zu machen, setze man $x = z^2$; so erhält man, wegen

$$log(x-1) = log(z^2-1) = log(z+1) + log(z-1):$$

5) $$log\, z = \tfrac{1}{2}[log(z-1) + log(z+1)]$$
$$+ M\left[\frac{1}{2z^2-1} + \frac{1}{3(2z^2-1)^3} + \ldots\right].$$

§. **290.** Setzt man, für den Fall, daſs die Logarithmen auf 20 oder 30 Decimalstellen berechnet werden sollen, in der Reihe β), §. 287: $y = \frac{2}{x^3-3x}$; so erhält man $1+y = \frac{(x-1)^2(x+2)}{x^3-3x}$, $1-y = \frac{(x+1)^2(x-2)}{x^3-3x}$, folglich

$$log\frac{(x-1)^2(x+2)}{(x+1)^2(x-2)} = 2M\left[\frac{2}{x^3-3x} + \frac{2^3}{3(x^3-3x)^3} + \ldots\right],$$

und daraus, wenn man die eingeklammerte Reihe durch R bezeichnet, die von Borda gefundene Formel:

6) $$log(x+2) = 2\,log(x+1)$$
$$+ log(x-2) - 2\,log(x-1) + 2MR.$$

§. **291.** Setzt man in der nämlichen Reihe β) $y = \frac{p-q}{p+q}$, wodurch $\frac{1+y}{1-y} = \frac{p}{q}$ wird; so erhält man

γ) $$log\frac{p}{q} = 2M\left[\left(\frac{p-q}{p+q}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^3 + \ldots\right],$$

und daraus viele gut convergirende Reihen, wenn man den unbestimmten Gröſsen p und q solche Werthe beilegt, daſs sich diese erstlich in einfache Factoren zerlegen lassen, und dann $p-q$ bedeutend kleiner als $p+q$ ausfällt. Solche Werthe sind z. B. die folgenden:

$$p = x^4 - 25x^2 = x^2(x+5)(x-5) \text{ und}$$
$$q = x^4 - 25x^2 + 144 = (x+3)(x-3)(x+4)(x-4);$$

denn man erhält damit aus γ), wenn man der Kürze wegen die Reihe

$$\left(\frac{72}{x^4-25x^2+72}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{72}{x^4-25x^2+72}\right)^3 + \ldots = R$$

setzt, die von Haros herrührende Reihe:

7) $$log(x+5) = log(x+4) + log(x+3)$$
$$+ log(x-4) + log(x-3) - 2\,log\,x - log(x-5) - 2MR.$$

Anmerk. So brauchbar auch diese bisher entwickelten Reihen seyn mögen, so würde man doch noch, wenn es sich heut zu Tage um die Berechnung von ausgedehnten logarithmischen Tafeln handeln sollte, mit grofsem Vortheile damit ein Verfahren in Verbindung bringen, welches die Differenzenreihen an die Hand geben [I., 302].

§. **292**. Aufser dem natürlichen Logarithmensysteme, welches ausschliefsend in der Analysis angewendet wird, ist noch vorzüglich, und zwar durchgehends beim Rechnen, das Briggische System, welches 10 zur Basis hat, im Gebrauche. Da aber für dieses System der Modul (§. 286)

$$M = \frac{1}{l\,10} = \frac{1}{2{\cdot}302\ldots} = {\cdot}43429448$$

ist, so wird man (§. 286) die natürl. Logarithmen (l) in Briggische (die wir immer durch log bezeichnen werden) umwandeln, wenn man die erstern mit diesem Decimalbruche ·434... multiplicirt, dagegen, umgekehrt, diese letztern auf natürliche bringen, wenn man sie durch diesen Bruch dividirt, oder, was bequemer ist, mit $l\,10 = 2{\cdot}302585 09$ multiplicirt.

§. **293**. Da wir die Eigenthümlichkeiten und Vorzüge dieses Systems als bekannt voraussetzen dürfen, so wollen wir hier nur noch kurz einen Satz ableiten, auf welchem der Gebrauch der Tafeln beruht, und welcher in den Elementen nur aus den Tafeln selbst nachgewiesen werden kann.

§. **294**. Setzt man in der R. 2), §. 284, in welcher jetzt M den Briggischen Modul bezeichnen soll, $y = \frac{1}{n}$; so erhält man $log(n+1) - log\,n = M\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \ldots\right]$, eine Reihe für die Differenz der Logarithmen zweier um eine Einheit von einander verschiedener Zahlen.

Ist nun bereits $n > 10000$, also $\frac{1}{n} < {\cdot}0001$ und $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 < {\cdot}0^{8}5$;

so hat, da auch überdieſs noch $M < 1$ ist, selbst schon das 2. Glied dieser Reihe auf 7 stellige Mantissen keinen Einfluſs mehr, und man kann daher für Tafeln, welche die Logarithmen auf höchstens 7 Decimalstellen enthalten, und für Zahlen n, welche schon nahe gleich 10000 sind, oder gar diese Zahl übersteigen (für 6 stellige Mantissen brauchen diese nur 1000 zu übersteigen) setzen:

$$log(n+1) - log\, n = \frac{M}{n}.$$

Unter den nämlichen Bedingungen ist aber auch

$$log(n+2) - log(n+1) = \frac{M}{n+1},$$

und da bei dieser Gröſse von n und bis auf die angenommene Grenze von 7 Decimalstellen (wie man leicht findet) $\frac{M}{n+1} = \frac{M}{n}$ ist; so hat man:

$$log(n+1) - log\, n : log(n+2) - log(n+1)$$
$$= \frac{M}{n} : \frac{M}{n+1} = 1 : 1 = (n+1) - n : (n+2) - (n+1),$$

d. h. es verhalten sich unter diesen Bedingungen die Differenzen der Logarithmen, wie die Differenzen der zugehörigen Zahlen.

Bekanntlich beruht auf diesem Satze die Methode, um aus einer solchen 7 stelligen Tafel, die gewöhnlich die Logarithmen aller 5 ziffrigen Zahlen unmittelbar enthält, auch die Logarithmen der 6, 7 und in manchen Fällen 8 ziffr. Zahlen mit Hilfe der Proportionaltheile zu finden. [Noch mehreres hierüber in I., 307, ff.]

§. 295. Um eine Reihe für die entsprechende Zahl durch den Logarithmus ausgedrückt zu finden, setze man $e^z = x$; so wird, §. 282: $x = 1 + z + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \ldots$, oder wegen $z = lx = \frac{log\, x}{M}$ auch:

$$8)\quad x = 1 + \left(\frac{log\, x}{M}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{log\, x}{M}\right)^2 + \frac{1}{2.3}\left(\frac{log\, x}{M}\right)^3 + \ldots$$
$$\left\{\frac{log\, x}{M} = -\infty,\ \frac{log\, x}{M} = +\infty\right\}.\quad [I., 309, ff.]$$

§. **296.** Mit Hilfe der logarithmischen Reihe 2), §. 284, läſst sich nun auch eine Formel zur approximativen Berechnung von x aus der Gleichung $x^x = a$ entwickeln. Denn ist $x = \alpha$ ein vom wahren Werthe um keine ganze Einheit mehr abweichender erster Näherungswerth, welcher durch ein paar Versuche leicht gefunden wird; so setze man m) $x = \alpha + y$, wobei also $y < 1$ ist. Dadurch erhält man, wegen $x \log x = \log a$:

$$\log a = (\alpha + y) \log (\alpha + y) = (\alpha + y)\left[\log \alpha + \log\left(1 + \frac{y}{\alpha}\right)\right],$$

oder wegen

$$\log\left(1 + \frac{y}{\alpha}\right) = M\left[\frac{y}{\alpha} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\alpha}\right)^2 + \ldots\right] = \frac{My}{\alpha},$$

wenn man nämlich, da es sich nur um einen einfachen Näherungswerth handelt, die höhern Potenzen von $\frac{y}{\alpha}$ ausläſst:

$$\log a = (\alpha + y)\left(\log \alpha + \frac{My}{\alpha}\right) = \alpha \log \alpha + My + y \log \alpha$$

[$\frac{My^2}{\alpha}$ wieder weggelassen], und daraus als Näherungswerth für y:

$$9) \quad y = \frac{\log a - \alpha \log \alpha}{M + \log \alpha}.$$

Um z. B. aus der Gleichung $x^x = 645$ den Werth für x zu finden, hat man nach dieser Formel, da $4^4 = 256$ und $5^5 = 3125$ ist, also x zwischen 4 und 5 liegt, für $\alpha = 4{\cdot}5$, wegen $a = 645$ und (§. 292) $M = {\cdot}4342945$: $y = -{\cdot}119$. Mit diesem Werthe ist $x = 4{\cdot}5 - {\cdot}119 = 4{\cdot}381$ genauer als der vorige Werth α Läſst man diesen letztern Werth für α gelten, und berechnet nach der nämlichen Formel 9) dafür y, so erhält man $y = -{\cdot}00109$, also ist noch genauer: $x = 4{\cdot}381 - {\cdot}00109 = 4{\cdot}37991$. Setzt man aber neuerdings $\alpha = 4{\cdot}37991$, so findet man $y = -{\cdot}0^6 1$, also $x = 4{\cdot}37991 - {\cdot}0^6 1 = 4{\cdot}3799099$, welcher Werth bereits schon bis einschlieſsig zur 7. Decimalstelle richtig ist und durch Fortsetzung dieses Verfahrens leicht noch genauer gefunden werden kann.

Convergenz unendlicher Factorenfolgen.

§. **297.** Um zu untersuchen, unter welchen Bedingungen eine unendl. Factorenfolge $F = a_1 a_2 a_3 \ldots a_n a_{n+1} \ldots$

convergirt, d. h. sich einer bestimmten endlichen Grenze um so mehr nähert, je mehr Factoren von vorne herein man beibehält; so bemerke man, dafs wegen (§§. 283, 285) $a_n = e^{la_n}$, auch 1) $F = e^{la_1 + la_2 + \ldots + la_n + \ldots}$ ist. Ist nun die unendl. Reihe 2) $la_1 + la_2 + \ldots + la_n + \ldots$ convergent, und s ihre Summe, so ist auch $F = e^s$ convergent und von Null verschieden. Ist dagegen diese R. 2) divergent, also ihre Summe $= \pm \infty$; so ist im 1. Falle $F = e^{+\infty} = \infty$ divergent, und im 2. Falle $F = e^{-\infty} = 0$, also convergent und gleich Null.

1. So ist z. B. für die unendl. Factorenfolge $(1+1)(1+\frac{1}{4})(1+\frac{1}{9})(1+\frac{1}{16})\ldots$ die obige Reihe 2) sofort:

$$l(1+1) + l\left(1+\frac{1}{4}\right) + \ldots + l\left(1+\frac{1}{n^2}\right) + .$$

Setzt man Kürze halber den Quotienten (§. 276)

$$\frac{a_n\, a_{n+1}}{a_n - a_{n+1}} = Q,$$

löst hier $l\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ und $l\left(1+\frac{1}{(n+1)^2}\right)$ nach §. 285, 3) auf, und behält dabei nur immer das 1. Glied der R. bei; so erhält man $Q = \frac{1}{(n+1)^2 - n^2} = \frac{1}{2n+1}$. Die vorige R. ist demnach, da für $n = \infty$, $Q = 0$ wird, convergent; es convergirt also auch die vorliegende unendl. Factorenfolge gegen eine endliche Grenze.

2. Für die Factorenfolge $(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{4})\ldots\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots$ wird die obige R. 2): $l(1-\frac{1}{2}) + l(1-\frac{1}{3}) + \ldots$, und für diese, nach einem ähnlichen Verfahren, $Q = \frac{1}{n-(n+1)} = -1$. Diese R. ist also divergent und (da Q negativ ist) ihre Summe $= -\infty$; es convergirt demnach die betreffende Factorenfolge gegen Null.

3. Da man hingegen für die Factorenfolge $(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})\ldots\left(1+\frac{1}{n}\right)\ldots$, $Q = \frac{1}{n+1-n} = 1$ findet, so wird diese für $n = \infty$ ebenfalls Unendlich und ist sonach divergent.

4. Für die unendliche Factorenfolge $(1 \pm x^2)\left(1 \pm \frac{x^2}{2^2}\right)$

$\left(1 \pm \frac{x^2}{3^2}\right) \ldots \left(1 \pm \frac{x^2}{n^2}\right) \ldots$ findet man, daſs sie für einen jeden endlichen Werth von x gegen eine bestimmte endliche Grenze convergire.

5. Um endlich noch zu untersuchen, für welche Werthe von x die Factorenfolge $\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1 \ . \ 2 \ . \ 3 \ . \ . \ . \ n} x^n$, welcher man auch die Form $\pm m\left(1-\frac{m}{1}\right)\left(1-\frac{m}{2}\right)\ldots\left(1-\frac{m}{n-1}\right)\frac{x^n}{n}$ geben kann, convergire, wird dafür die obige R. 2): $l\left(1-\frac{m}{1}\right)+\ldots$ $+l\left(1-\frac{m}{n-1}\right)+n\left(lx-\frac{ln}{n}\right)$, wobei sich das letzte Glied, bei der unendl. Zunahme von n (weil dabei $\frac{ln}{n}$ gegen Null convergirt, I., 318), auf nlx reducirt. Für positive Werthe von m ist die Summe dieser R. bis einschlieſsig zum vorletzten Glied genommen, da sie steigend, also divergent ist, und die Logarithmen negativ sind, gleich $-\infty$; es ist also für $n=\infty$ die Summe der ganzen R. $=\infty(-1+lx)$, und daraus folgt, daſs für negative Werthe von lx überhaupt, also für $x<1$, dann für solche positive Werthe, wofür $lx<1$, also für $x<e$, mithin zusammen, überhaupt für $x \overset{=}{<} 1$, die besagte Reihe 2) gleich ∞, demnach endlich die vorliegende Factorenfolge gleich Null wird; ferner, daſs für $x>e$ (d. i. $x>2{\cdot}718$), wofür nämlich $lx>1$ ist, die Summe dieser R. $=+\infty$, folglich die Factorenfolge divergent oder unendlich wird. — Für negative Werthe von m hingegen ist für $n=\infty$ die Summe dieser R. 2) $=\infty(1+lx)$, also für $x \overset{=}{>} 1$ sofort $=+\infty$, und für solche Werthe von $x<1$, für welche dem numerischen Werth nach $lx>1$ ausfällt (da dabei lx negativ ist) $=-\infty$: die Factorenfolge selbst ist daher im 1. Falle divergent und im 2. convergent und gleich Null. Alles zusammengefaſst, sieht man also, daſs die hier vorliegende Factorenfolge bei jedem Werthe von m, für $x<1$ convergent und gleich Null, dagegen im Allgemeinen für $x>1$ divergent und unendlich sey.

Zehntes Capitel.

Trigonometrische Reihen. Berechnung von π. Moivre'sche Formel. Binomische Gleichungen.

§. **298.** Setzt man Kürze halber $\sqrt{-1} = i$ und in der Reihe 4), §. 282, statt x einmal xi und dann $-xi$; so erhält man: $e^{xi} = 1 + xi - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3 i}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} + \frac{x^5 i}{2\ldots5} -$ etc. und $e^{-xi} = 1 - xi - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3 i}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} - \frac{x^5 i}{2\ldots5} -$ etc. Ferner aus diesen beiden Reihen, wenn man sie einmal zusammen addirt und dann auch von einander subtrahirt, im erstern Falle sogleich durch 2, und im letztern durch $2i$ dividirt:

$$\frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} - \frac{x^6}{2\ldots6} + \ldots \text{ und}$$

$$\frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i} = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \ldots$$

§. **299.** Bezeichnet man den ersten dieser beiden Exponentialausdrücke durch $f(x)$ und den letztern durch $\varphi(x)$, so erhält man ganz einfach daraus folgende Relationen: $f(0) = 1$, $\varphi(0) = 0$, $\overline{f(x)}^2 + \overline{\varphi(x)}^2 = 1$, $f(-x) = f(+x)$, $\varphi(-x) = -\varphi(+x)$, $f(2x) = 2\overline{f(x)}^2 - 1 = 1 - 2\overline{\varphi(x)}^2$, $\varphi(2x) = 2\varphi(x) f(x)$ u. s. w., so wie auch noch, $\varphi(x \pm y) = \varphi(x) f(y) \pm \varphi(y) f(x)$ und $f(x \pm y) = f(x) f(y) \mp \varphi(x)\varphi(y)$ [I., 328]. Aus allen diesen Relationen folgt aber, was auch schon die beiden ersten allein beweisen, das $f(x) = \cos x$ und $\varphi(x) = \sin x$ sey (vergl. §§. 9 — 24).

§. **300.** Man hat demnach folgende wichtige Ausdrücke:

1) $\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$, 2) $\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$,

3) $\sin x = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2\ldots5} - \ldots$,

$$4)\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} - \frac{x^6}{2\ldots6} + \ldots,$$

$$\{x = -\infty,\quad x = +\infty \text{ für beide R.}\}.$$

§. 301. Wegen $\tang x = \frac{\sin x}{\cos x}$ und $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ erhält man ganz einfach, wenn man für $\sin x$ und $\cos x$ die Reihen 3) und 4) substituirt:

$$5)\ \tang x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{3.5} + \frac{17x^7}{3^2.5.7} + \frac{62x^9}{3^2.5.7.9} + \ldots$$

$$6)\ \cot x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{3^2.5} - \frac{2x^5}{3^3.5.7} - \ldots$$

[Wie man in diese Reihen durch Einführung der Bernoullischen Zahlen (§. 239, Anmerk. 1) ein Gesetz hineinbringt, so wie die Entwickl. der Reihen für $l \sin x$, $l \cos x$ etc., s. m. I., 333, ff.].

§. 302. Um x durch $\sin x$ und $\tang x$ auszudrücken, erhält man durch Umkehrung der Reihen 3) und 5), §. 267, Beispiele 3. und 4.:

$$7)\ x = \sin x + \frac{1 . \sin x^3}{2.3} + \frac{1.3 \sin x^5}{2.4.5} + \frac{1.3.5 \sin x^7}{2.4.6.7} + \ldots$$

$$\{\sin x = -1,\quad \sin x = +1\},$$

$$8)\ x = \tang x - \tfrac{1}{3} \tang x^3 + \tfrac{1}{5} \tang x^5 - \tfrac{1}{7} \tang x^7 + \ldots$$

$$\{\tang x = -1,\quad \tang x = +1\}.$$

Anmerk. Diese letztere Reihe kann auch direct auf folgende Art abgeleitet werden: aus den Gleich. 1) und 2), §. 300, folgt durch Addition und Subtraction (wieder $\sqrt{-1} = i$ gesetzt): $e^{xi} = \cos x + i \sin x = \cos x(1 + i \tang x)$ und $e^{-xi} = \cos x - i \sin x = \cos x (1 - i \tang x)$, und wenn man auf natürl. Logarith. übergeht: $xi = l \cos x + l(1 + i \tang x)$ und $-xi = l \cos x + l(1 - i \tang x)$; diese beiden letztern Gleich. von einander abgezogen, erhält man, wenn man auch gleich durch $2i$ dividirt: $x = \frac{1}{2i} l\left(\frac{1 + i \tang x}{1 - i \tang x}\right)$, oder, wegen (§. 287, β)

$$l\left(\frac{1 + i \tang x}{1 - i \tang x}\right) = 2i(\tang x - \tfrac{1}{3} \tang x^3 + \ldots),$$

endlich: $x = \tang x - \frac{1}{3} \tang x^3 + \frac{1}{5} \tang x^5 - \ldots$

Reihen zur Berechnung der Ludolphischen Zahl π.

§. **303.** Setzt man in der vorigen Reihe 8)

$$x = \frac{\pi}{4} = 45^\circ,$$

so erhält man, wegen $tang\,x = tang\,45^\circ = 1$, sofort die zuerst von *Leibnitz* aufgestellte Reihe:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \ldots,$$

welche jedoch wegen ihrer zu geringen Convergenz zur Berechnung selbst nicht brauchbar ist.

§. **304.** Dagegen erhält man für $x = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$ aus der genannten Reihe, wegen $tang\,30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$, die schon besser convergirende R. $\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3.3\sqrt{3}} + \frac{1}{5.3^2\sqrt{3}} - \ldots$ oder $\pi = 2\sqrt{3}\left(1 - \frac{1}{3.3^1} + \frac{1}{5.3^2} - \frac{1}{7.3^3} + \ldots\right)$.

§. **305.** Setzt man $a + b = 45^\circ$, so wird (§. 22)

$$tang(a+b) = \frac{tang\,a + tang\,b}{1 - tang\,a\;tang\,b} = 1,$$

und aus dieser letztern Gleichung für $tang\,a = \frac{1}{2}$, sofort $tang\,b = \frac{1}{3}$. Nun ist aber wieder nach der Reihe 8), wegen $tang\,a = \frac{1}{2}$: $a = \frac{1}{2} - \frac{1}{3.2^3} + \ldots$ und wegen $tang\,b = \frac{1}{3}$: $b = \frac{1}{3} - \frac{1}{3.3^3} + \ldots$, mithin wenn man diese beiden Reihen addirt, wegen $a + b = \frac{\pi}{4}$, sofort:

$$\frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} - \ldots\right) + \left(\frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} - \ldots\right).$$

Nach dieser von *Euler* herrührenden, zur wirklichen Rechnung äuſserst bequemen Reihe findet man für die ersten 16 Decimalstellen: $\pi = 3{\cdot}1415926535897932$.

Anmerk. Gestützt auf das hier angewandte Verfahren, den Bogen von 45° in 2 oder mehrere andere zu zerlegen, deren Tangenten passende Werthe haben, lassen sich noch viele andere und stärker convergirende Reihen herleiten. So wird z. B. für $2a + b = 45^0$ und $tang\, a = \frac{1}{3}$, wofür man $tang\, b = \frac{1}{7}$ findet: $\frac{\pi}{4} = 2\left(\frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.3^3} + \ldots\right) + \left(\frac{1}{1.7} - \frac{1}{3.7^3} + \ldots\right)$. Für $4a + b = 45^0$ und $tang\, a = \frac{1}{5}$, wozu $tang\, b = -\frac{1}{239}$ gefunden wird, erhält man: $\frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{1.5} - \frac{1}{3.5^3} + \ldots\right)$ $-\left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3.329^3} + \ldots\right)$, u. s. w. [I., 337, ff.]

Moivre'sche Formel.

§. **306**. Aus den Gleichungen 1) und 2), §. 300, folgt, fortwährend $\sqrt{-1} = i$ gesetzt:

$$a) \quad \cos x \pm i \sin x = e^{\pm ix}.$$

Eben so ist auch $\cos y \pm i \sin y = e^{\pm iy}$, mithin, wenn man diese beiden Gleich. mit einander multiplicirt:

$$b) \ (\cos x \pm i \sin x)(\cos y \pm i \sin y) = \cos(x+y) \pm i \sin(x+y).$$

Setzt man in a) $x \pm 2r\pi$ statt x, wo r jede ganze positive Zahl bezeichnen soll; so erhält man wegen

$$\cos(x \pm 2r\pi) = \cos x \quad \text{und} \quad \sin(x \pm 2r\pi) = \sin x,$$

sofort: $\cos x \pm i \sin x = e^{\pm i(x \pm 2r\pi)}$, und wenn diese Gleich. zur n. Potenz erhoben wird, wo n jeden Werth haben kann: $(\cos x \pm i \sin x)^n = e^{\pm ni(x \pm 2r\pi)}$, und endlich mit Berücksichtigung der Gleich. a), wenn man in derselben $n(x \pm 2r\pi)$ statt x setzt:

$$1) \ (\cos x \pm i \sin x)^n = \cos n(x \pm 2r\pi) \pm i \sin n(x \pm 2r\pi),$$

welche Formel unter dem Namen der *Moivre*'schen bekannt ist*).

§. **307**. Ist in dieser Formel 1) n eine ganze Zahl, so erhält man für die Entwickelung (da $\cos$ und $\sin n(x \pm 2r\pi)$ $= \cos$ und $\sin nx$ wird), wie es seyn soll, nur einen Werth. Ist dagegen $n = \frac{s}{m}$ ein zur kleinsten Benennung

*) Eigentlich verstand man darunter, selbst bis auf die neueste Zeit, die speciellere: $(\cos x \pm i \sin x)^n = \cos nx \pm i \sin nx$, welche aber nur für ganze Zahlen von n giltig ist.

gebrachter Bruch vom Nenner m, so erhält man für $r = 0$, $1, 2, \ldots m - 1, m, m + 1, \ldots$ aus $n(x \pm 2r\pi)$ der Reihe nach die Bögen: $\frac{s}{m}x$, $\frac{s}{m}x \pm \frac{2s}{m}\pi, \ldots \frac{s}{m}x \pm \frac{2s(m-1)}{m}\pi$, $\left(\frac{s}{m}x \pm 2s\pi\right)$, $\left(\frac{s}{m}x \pm \frac{2s}{m}\pi \pm 2s\pi\right)$ u. s. w., von welchen aber, man mag nun durchaus die obern oder untern Zeichen beibehalten, wie man sieht, nur die m ersten (nicht eingeklammerten) verschiedene Sinus und Cosinus, dagegen der $m + 1$. mit dem 1., der $m + 2$. mit dem 2. u. s. w. denselben Sinus und Cosinus besitzen, so, daſs also die Entwickel. 1), in diesem Falle, wie es seyn soll, m und auch nur m verschiedene Werthe, und zwar dadurch erhält, daſs man nach und nach $r = 0, 1, 2, \ldots (m - 1)$ setzt. Behält man jedoch die doppelten Zeichen bei, so darf man zur Gewinnung dieser m Werthe, wie leicht zu sehen, diese Substitutionen bloſs bis $r = \frac{m}{2}$, wenn m gerad und $r = \frac{m-1}{2}$, wenn m ungerad ist, fortsetzen. Denn ist m gerad, so entsteht für $r = \frac{m}{2} + 1$ ein Bogen, welcher für das obere oder untere Zeichen denselben Sinus und Cosinus besitzt, wie der durch die zweit vorhergehende Substitution von $r = \frac{m}{2} - 1$ entstandene Bogen für das untere oder obere Zeichen; dasselbe gilt von den beiden Bögen, welche durch die Substit. von $r = \frac{m}{2} + 2$ und $r = \frac{m}{2} - 2$ entstehen u. s. w. Ist aber m ungerad, so gibt die Substitution von $r = \frac{m-1}{2} + 1 = \frac{m+1}{2}$ einen Bogen, welcher für das untere oder obere Zeichen denselben Sinus und Cosinus erhält, wie der aus der Substit. von $r = \frac{m-1}{2}$ für das obere oder untere Zeichen; dasselbe gilt für die beiden, aus den Substitutionen von $r = \frac{m+3}{2}$ und $r = \frac{m-3}{3}$ entstehenden Bögen u. s. w.

§. **308.** Für $x = 0$ und $x = \pi$ erhält man aus der Gleichung 1), § 306, beziehungsweise:

$$2) \quad (+1)^n = \cos 2rn\pi \pm i \sin 2rn\pi,$$

$$3) \quad (-1)^n = \cos(2r+1)n\pi \pm i \sin(2r+1)n\pi,$$

und es gilt auch von diesen beiden Formeln das eben Angeführte. Man erhält nämlich, sowohl für $(+1)^n$ als für $(-1)^n$, nur einen Werth, wenn n eine ganze Zahl, dagegen m Werthe, wenn $n = \frac{s}{m}$ ist, und zwar dadurch, dafs man nach und nach $r = 0, 1, 2, \ldots \frac{m}{2}$ oder $\frac{m-1}{2}$ setzt, je nachdem m gerad oder ungerad ist.

§. **309.** Setzt man in der Relat. b), §. 306, nx statt x und $y = \pm 2rn\pi$, so erhält man

$$(\cos nx \pm i \sin nx)(\cos 2rn\pi \pm i \sin 2rn\pi)$$
$$= \cos n(x \pm 2r\pi) \pm i \sin n(x \pm 2r\pi),$$

nämlich dasselbe Resultat, wie in der Formel 1), §. 306, so, dafs sich also diese letztere, mit Rücksicht auf die vorige Gleich. 2), auch so darstellen läfst:

$$4) \quad (\cos x \pm i \sin x)^n = (+1)^n (\cos nx \pm i \sin nx).$$

Aus dieser letztern Formel folgt auch noch für $x = \pi$:

$$5) \quad (-1)^n = (+1)^n (\cos n\pi \pm i \sin n\pi),$$

und man erhält sonach aus diesen beiden Formeln, wenn $n = \frac{s}{m}$ ist, die m verschiedenen Werthe, indem man den Werth von $\cos nx \pm i \sin nx$ und $\cos n\pi \pm i \sin n\pi$ nach und nach mit den m verschiedenen [aus 2) zu findenden] Werthen von $(+1)^{\frac{s}{m}}$ multiplicirt.

Für $x = \frac{\pi}{2}$ erhält man noch aus 4):

$$6) \quad (\pm i)^n = (+1)^n \left(\cos \frac{n}{2}\pi \pm i \sin \frac{n}{2}\pi\right),$$

wofür dieselbe Bemerkung gilt.

Anmerk. Versteht man unter $(1)^{\frac{s}{m}}$, wie bisher, die sämmtlichen m Werthe oder Wurzeln von $1^{\frac{s}{m}}$, dagegen unter

$\overline{1}^{\frac{1}{m}}$ nur den einen, gewöhnlichen oder sogenannten arithmetischen Werth, und macht man überhaupt denselben Unterschied auch zwischen $(a)^n$ und (wenn n gebrochen ist) $\bar{a}^n$, $log(a)$ und $log\,\bar{a}$ u. s. w.; so erhält man sofort auch die m Wurzeln von $\sqrt[m]{\pm a} = (\pm a)^{\frac{1}{m}}$, indem man die arithmetische W. $\bar{a}^{\frac{1}{m}}$ mit den m Wurzeln von $(\pm 1)^{\frac{1}{m}}$ der Reihe nach multiplicirt; denn es ist

$$\sqrt[m]{\pm a} = \sqrt[m]{\pm 1} . \sqrt[m]{a} = (\pm 1)^{\frac{1}{m}} \bar{a}^{\frac{1}{m}}.$$

(Vergl. auch §. 177.)

§. 310. Da sich die Formeln 2) und 3), §. 308, mit Rücksicht auf jene a), §. 306, auch so darstellen lassen:

7) $(+1)^n = e^{\pm 2rni\pi}$ und $(-1)^n = e^{\pm(2r+1)ni\pi}$,

so erhält man daraus, wenn man natürl. Logarithmen nimmt und überall gleich durch n abkürzt: $l(+1) = \pm 2ri\pi$ und $l(-1) = \pm(2r+1)i\pi$; woraus sofort folgt, dafs sowohl (wegen $r = 0, 1, 2, \ldots$) der positiven, wie der negativen Einheit unendlich viele Logarithmen zukommen, dafs aber unter den ersteren nur einer (jener für $r = 0$), unter den letzteren aber gar keiner reell ist. Da ferner

$$l(+a) = l(+1 . a) = l(+1) + l\bar{a} \quad \text{und}$$
$$l(-a) = l(-1 . a) = l(-1) + l\bar{a}$$

ist, so gilt dieses überhaupt für jede Zahl, und wegen $log A = MlA$, auch für jedes Logarithmensystem.

Allgemeine Auflösung der binomischen Gleichungen.

§. 311. Mit Hilfe der vorigen Formeln können wir nun auch die oben (§. 190, Anmerk.) erwähnten binomischen Gleich., welche sich immer auf die Form $x^n \mp 1 = 0$ bringen lassen (ist nämlich $y^n = \pm A$, so darf man nur $y = x\sqrt[n]{A}$ setzen), allgemein auflösen.

Für die Gleichung $x^n - 1 = 0$ hat man $x = (+1)^{\frac{1}{n}}$ oder, wenn man in der Formel 2), §. 308, $\frac{1}{n}$ statt n schreibt:

$$\alpha)\quad x = \cos\frac{2r}{n}\pi \pm i\sin\frac{2r}{n}\pi,$$

aus welcher Formel man die n Wurzeln dieser Gleichung durch die successive Substitution von $r = 0, 1, 2, \ldots \frac{n}{2}$ oder $\frac{n-1}{2}$, je nachdem n gerad oder ungerad ist, erhält.

Anmerk. Für n gerade entstehen 2 reelle W. $+1$ und -1 [aus den Substit. von $r = 0$ und $r = \frac{n}{2}$]; für n ungerade nur eine reelle W. $+1$ (aus der Substit. von $r = 0$). Alle übrigen W. sind imaginär (und entstehen aus den übrigen Werthen von r), welche (übereinstimmend mit §. 160) paarweise conjugirt, und überdiess, wegen

$$\left(\cos\frac{2r}{n}\pi + i\sin\frac{2r}{n}\pi\right)\left(\cos\frac{2r}{n}\pi - i\sin\frac{2r}{n}\pi\right) = 1,$$

reciprok sind.

1. Für die Gleichung $x^4 - 1 = 0$ folgt aus α):

$$x = \cos\frac{r}{2}\pi \pm i\sin\frac{r}{2}\pi,$$

und man erhält daraus für $r = 0, 1, 2$ beziehungsweise:

$$x = \cos 0 \pm i\sin 0 = 1,\quad \cos\frac{\pi}{2} \pm i\sin\frac{\pi}{2} = \pm i \text{ und}$$

$$\cos\pi \pm i\sin\pi = -1.$$

Die 4 Wurzeln dieser Gleich. sind also: $+1$, -1, $+\sqrt{-1}$ und $-\sqrt{-1}$.

2. Für die Gleichung $x^5 - 1 = 0$ erhält man aus α):

$$x = \cos\frac{2r}{5}\pi \pm i\sin\frac{2r}{5}\pi,$$

und daraus beziehungsweise für $r = 0$, 1 und 2:

$$x = \cos 0 \pm i\sin 0 = 1,\quad \cos 72^0 \pm i\sin 72^0 \text{ und}$$

$$\cos 144 \pm i\sin 144.$$

Die 5 W. dieser Gleich. sind daher (mit Zuhilfnahme der trigonom. Tafeln):

1, $\cdot 3090170 \pm \cdot 9510565\sqrt{-1}$ und $-\cdot 8090170 \pm \cdot 5877853\sqrt{-1}$.

§. 312. Aus der Gleichung $x^n + 1 = 0$ folgt eben so $x = (-1)^{\frac{1}{n}}$, und wenn man in der Formel 3), §. 308, $\frac{1}{n}$ statt n setzt:

$$\beta)\quad x = \cos\left(\frac{2r+1}{n}\right)\pi \pm i \sin\left(\frac{2r+1}{n}\right)\pi,$$

aus welcher Formel wieder die n Wurzeln dieser Gleich. erhalten werden, indem man nach und nach $r = 0, 1, 2, \ldots \frac{n}{2} - 1 = \frac{n-2}{2}$ oder $\frac{n-1}{2}$ setzt, je nachdem n gerad oder ungerad ist.

Anmerk. Ist n gerad, so sind die sämmtlichen W. imaginär, ist dagegen n ungerad, so erhält man eine reelle W., und zwar aus der Substitution von $r = \frac{n-1}{2}$.

1. Um die Gleich. $x^6 + 1 = 0$ aufzulösen, hat man aus der Formel β): $x = \cos\left(\frac{2r+1}{6}\right)\pi \pm i \sin\left(\frac{2r+1}{6}\right)\pi$, und daraus für $r = 0, 1, 2$ beziehungsweise:

$$x = \cos\tfrac{1}{6}\pi \pm i \sin\tfrac{1}{6}\pi,\quad \cos\tfrac{3}{6}\pi \pm i \sin\tfrac{3}{6}\pi \text{ und } \cos\tfrac{5}{6}\pi \pm i \sin\tfrac{5}{6}\pi.$$

2. Für die Gleichung $x^5 + 1 = 0$ erhält man

$$x = \cos\left(\frac{2r+1}{5}\right)\pi \pm i \sin\left(\frac{2r+1}{5}\right)\pi,$$

und daraus für $r = 0, 1$ und 2 die 5 W.:

$$x = \cos\tfrac{1}{5}\pi \pm i \sin\tfrac{1}{5}\pi,\quad \cos\tfrac{3}{5}\pi \pm i \sin\tfrac{3}{5}\pi \text{ und } \cos\pi \pm i \sin\pi = -1.$$

Eilftes Capitel.

Entwickelung der Sinus und Cosinus der *vielfachen*, dann der Potenzen dieser Functionen der *einfachen* Bögen.

§. **313**. Durch die wirkliche Potenzirung des Binoms $\cos x \pm i \sin x$ erhält man aus der Gleich. 1), §. 306, wenn man gleich die reellen, wie auch die imaginären Glieder für sich zusammennimmt:

$$\cos n(x \pm 2r\pi) + i \sin n(x \pm 2r\pi)$$
$$= \left[\cos x^n - \binom{n}{2}\cos x^{n-2}\sin x^2 + \binom{n}{4}\cos x^{n-4}\sin x^4 - \ldots\right]$$
$$+ i\left[\binom{n}{1}\cos x^{n-1}\sin x - \binom{n}{3}\cos x^{n-3}\sin x^3 + \ldots\right],$$

oder, wenn man $\cos x^n$ herausnimmt und berücksichtiget, dafs im Falle n gebrochen ist, die sämmtlichen Werthe von $\cos x^n$ erhalten werden, indem man (§. 309, Anmerk.) den arithmetischen Werth, welchen wir unter $\cos x^n$ verstehen wollen, mit allen Wurzeln von $(+1)^n$ multiplicirt, auch:

$$1)\quad \cos n(x \pm 2r\pi) + i \sin n(x \pm 2r\pi)$$
$$= (+1)^n \cos x^n \left[\left(1 - \binom{n}{2} \tan x^2 + \binom{n}{4} \tan x^4 - \ldots\right)\right.$$
$$\left. + i\left(\binom{n}{1} \tan x - \binom{n}{3} \tan x^3 + \ldots\right)\right],$$
$$\left\{x = -\frac{\pi}{4},\quad x = +\frac{\pi}{4}\right\},$$

in welcher Formel, da innerhalb der angegebenen Grenzen $\pm\frac{\pi}{4}$ der Convergenz [welche Grenzwerthe noch mitbegriffen sind, wenn, §. 276, 9), n positiv ist] $\cos x$ immer positiv ist, es für jeden reellen Werth von n, wenigstens einen reellen Werth von $\cos x^n$ gibt.

§. 314. Ist n eine ganze, positive oder negative Zahl, so hat $(+1)^n \cos x^n$ nur einen, und zwar reellen Werth; demnach zerfällt die vorige Gleichung 1), nach dem Satze, dafs die reellen und imaginären Theile, für sich genommen, beiderseits einander gleich sind, in die beiden folgenden:

$$2)\quad \cos nx = \cos x^n$$
$$- \binom{n}{2} \cos x^{n-2} \sin x^2 + \binom{n}{4} \cos x^{n-4} \sin x^4 - \ldots,$$

$$3)\quad \sin nx = \binom{n}{1} \cos x^{n-1} \sin x - \binom{n}{3} \cos x^{n-3} \sin x^3 + \ldots,$$

wenn man nämlich die Multiplication mit $\cos x^n$ verrichtet und die 2. Gleich. durch i abkürzt. — Für den besondern Fall, dafs n positiv ist, brechen diese beiden Reihen ab und sind sonach nicht an die Bedingung der Convergenz gebunden. Zugleich läfst sich auf diesen erwähnten Fall immer auch jener zurückführen, in welchem n negativ ist; weil (§. 11) $\cos(-n) = \cos(+n)$ und $\sin(-n) = -\sin(+n)$ ist.

§. **315.** Ist dagegen n gebrochen und gleich $\frac{s}{m}$, so hat (§. 308) $(+1)^{\frac{s}{m}}$ m verschiedene Werthe, wovon nur einer, wenn m ungerad, und zwei reell sind, wenn m gerad ist. Es läſst sich daher die obige Gleich. 1) nicht mehr für alle Werthe von r, sondern nur für jene, für welche $(+1)^{\frac{s}{m}}$ reelle Werthe erhält, also (§. 311) beziehungsweise für $r=0$ und $r=0$, $r=\frac{m}{2}$, auf die vorhin angegebene Weise trennen. Für alle übrigen Werthe von r zerfällt jedes der beiden Glieder im 2. Theile der Gleich. 1) in einen reellen und einen imaginären Theil; was man am besten sieht, wenn man für $(+1)^{\frac{s}{m}}$ den Werth aus 2), §. 308, substituirt. Es fällt also auch die Trennung der Gleich. 1) durch Gleichsetzung der reellen, so wie der imaginären Theile, anders aus als im vorigen §. Man erhält nämlich, wenn man Kürze halber n statt $\frac{s}{m}$ stehen läſst und die obigen Reihen 2) und 3), nämlich

$$\cos x^n - \binom{n}{2} \cos x^{n-2} \sin x^2 + \ldots = R \text{ und}$$

$$\binom{n}{1} \cos x^{n-1} \sin x - \binom{n}{3} \cos x^{n-3} \sin x^3 + \ldots = R' \text{ setzt:}$$

$$4) \quad \cos n(x \pm 2r\pi) = \cos 2rn\pi . R \mp \sin 2rn\pi . R',$$

$$5) \quad \sin n(x \pm 2r\pi) = \pm \sin 2rn\pi . R + \cos 2rn\pi . R',$$

welche beiden Formeln für $r=0$, wenn $\left(\text{in } n=\frac{s}{m}\right)$ m ungerad, und für $r=0$, $r=\frac{m}{2}$, wenn m gerad ist, wie es seyn soll, in die obigen 2) und 3) übergehen.

Anmerk. Da diese Formeln 2) — 5), den Fall ausgenommen, in welchem n eine ganze, positive Zahl ist, ebenfalls nur innerhalb der Grenzen $x=\mp\frac{\pi}{4}$ verläſsliche Resultate liefern; so wird man für auſserhalb dieser Grenzen liegende Werthe von x, $x=y+k\frac{\pi}{4}$ setzen, und, was immer möglich ist, für k eine solche ganze Zahl wählen, daſs der Bogen $y = x - k\frac{\pi}{4}$ in die genannten Grenzen hineinfällt. (Für $x = 125^0$ z. B. wird für $k = 2$: $y = 125 - 2\frac{\pi}{4} = 35^0$; welcher Bogen sonach in die besagten Grenzen fällt). Hat man $\cos ny$ und $\sin ny$ nach den obigen Formeln gefunden, so kann man dann auch, wegen $nx = ny + \frac{nk}{4}\pi$, $\cos nx$ und $\sin nx$ (§§. 21, 20) leicht bestimmen.

§. **316.** Die obigen, für jede ganze Zahl von n (die überdieſs auch noch immer positiv angenommen werden kann) geltenden Formeln 2) und 3), §. 314, lassen sich mit geringer Ausnahme, auch so darstellen, daſs darin bloſs die Sinus oder Cosinus vorkommen.

Es ist nämlich [2), §. 300] α) $2\cos x = e^{xi} + \frac{1}{e^{xi}}$ oder für $e^{xi} = z$ auch β) $2\cos x = z + \frac{1}{z}$.

Eben so ist, wenn man in α) nx statt x schreibt, und wegen $e^{nxi} = (e^{xi})^n = z^n$, sofort: γ) $2\cos nx = z^n + \frac{1}{z^n}$.

Setzt man jetzt in der Formel α), §. 123, $a = z$ und $b = \frac{1}{z}$, wodurch $y = a + b = z + \frac{1}{z} = 2\cos x$ und $ab = 1$ wird; so erhält man $z^n + \frac{1}{z^n}$, d. i.

$$1)\quad 2\cos nx = (2\cos x)^n - n\,(2\cos x)^{n-2}$$
$$+ \frac{n(n-3)}{1\,.\,2}(2\cos x)^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1\,.\,2\,.\,3}(2\cos x)^{n-6} + \ldots,$$

wobei für $n = 1$ und 2 (für die übrigen Werthe bricht sie ohnehin von selbst ab) die Reihe beziehungsweise nur 1 und 2 Glieder erhält.

§. **317.** Es ist ferner eben so [1), §. 300] $2i\sin x = z - \frac{1}{z}$ und δ) $2i\sin nx = z^n - \frac{1}{z^n}$. Setzt man daher in der angezogenen Formel α), §. 123, $a = z$, $b = -\frac{1}{z}$, wodurch $a + b = z - \frac{1}{z} = 2i\sin x$ und $ab = -1$ wird;

so erhält man, je nachdem n gerad oder ungerad ist:

$$z^n \pm \frac{1}{z^n} = i^n (2\sin x)^n + n i^{n-2} (2\sin x)^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1 \cdot 2} i^{n-4} (2\sin x)^{n-4} - \ldots,$$

und daraus für n gerade [Gleich. γ)]:

$$2)\quad 2\cos nx =$$

$$(-1)^{\frac{n}{2}} \left[(2\sin x)^n - n(2\sin x)^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1 \cdot 2} (2\sin x)^{n-4} - \ldots \right]$$

und für n ungerade, wenn man gleich durch i abkürzt [Gleich. δ)]:

$$3)\quad 2\sin nx =$$

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} \left[(2\sin x)^n - n(2\sin x)^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1 \cdot 2} (2\sin x)^{n-4} - \ldots \right].$$

Potenzen der Sinus und Cosinus.

§. 318. Aus der Gleichung α), §. 316, folgt auch $2\cos x = \frac{1 + e^{2xi}}{e^{xi}}$, und wenn man diese Gleich. zur n. Potenz erhebt, wobei n jeden Werth haben kann, und die einzelnen Glieder der Entwickel. $(1 + e^{2xi})^n$ gleich durch den entstehenden Nenner e^{nxi} dividirt:

$$2^n \cos x^n = e^{-nxi} + \binom{n}{1} e^{-(n-2)xi} + \binom{n}{2} e^{-(n-4)xi} + \ldots$$

Da aber nach der Formel a), §. 306,

$$e^{-nxi} = \cos nx - i \sin nx,$$

also auch ganz allgemein

$$h)\quad e^{-(n-\alpha)xi} = \cos(n-\alpha)x - i\sin(n-\alpha)x$$

ist; so hat man auch:

$$2^n \cos x^n = \cos nx + \binom{n}{1} \cos(n-2)x + \ldots - i\left[\sin nx + \binom{n}{1} \sin(n-2)x + \ldots\right].$$

Wegen $\cos(-x) = \cos x$ erhält man aus dieser Formel für $2^n \cos x^n$ noch einen 2. Ausdruck, wenn man statt x, $-x$ setzt; da sich aber dadurch bloſs das Zeichen der in i multiplicirten Reihe (die lauter Sinus enthält) ändert, so hat man allgemein:

$$1)\ 2^n \cos x^n = \cos nx + \binom{n}{1}\cos(n-2)x + \binom{n}{2}\cos(n-4)x + \ldots$$
$$\pm\sqrt{-1}\left[\sin nx + \binom{n}{1}\sin(n-2)x + \binom{n}{2}\sin(n-4)x + \ldots\right].$$

§. 319. Auf gleiche Art findet man, da [1), §. 300] $2i\sin x = \dfrac{e^{2xi}-1}{e^{xi}} = \dfrac{-1.(1-e^{2xi})}{e^{xi}}$ ist, auch:

$$(2i)^n \sin x^n$$
$$= (-1)^n\left[e^{-nxi} - \binom{n}{1}e^{-(n-2)xi} + \binom{n}{2}e^{-(n-4)xi} - \ldots\right]$$
$$= (-1)^n\Big[(\cos nx - i\sin nx)$$
$$- \binom{n}{1}[\cos(n-2)x - i\sin(n-2)x] + \ldots\Big],$$

mit Rücksicht nämlich auf die vorige Gleich. h). Daraus folgt für n gerad:

$$2)\quad 2^n \sin x^n$$
$$=(-1)^{\frac{n}{2}}\left[\cos nx - \binom{n}{1}\cos(n-2)x + \binom{n}{2}\cos(n-4)x - \ldots\right]$$
$$-(-1)^{\frac{n}{2}}\sqrt{-1}\Big[\sin nx - \binom{n}{1}\sin(n-2)x$$
$$+ \binom{n}{2}\sin(n-4)x - \ldots\Big],$$

und für n ungerad, wenn man gleich beide Theile der Gleich. mit $i = \sqrt{-1}$ multiplicirt:

$$3)\quad 2^n \sin x^n$$
$$=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\left[\sin nx - \binom{n}{1}\sin(n-2)x + \binom{n}{2}\sin(n-4)x - \ldots\right]$$
$$+(-1)^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{-1}\Big[\cos nx - \binom{n}{1}\cos(n-2)x$$
$$+ \binom{n}{2}\cos(n-4)x - \ldots\Big].$$

Anmerk. Auch aus 1) läſst sich noch eine Formel für $\sin x^n$ herleiten, wenn man statt x, $\frac{\pi}{2} - x$ schreibt. Ist n ein Bruch vom Nenner m, so müssen wieder $\cos x^n$ in 1) und $\sin x^n$ in 2) und 3) m verschiedene Werthe erhalten. Man findet diese, indem man den einen, gewöhnlichen, aus den Formeln 1)—3) gefundenen Werth von $\cos x^n$ und $\sin x^n$

mit den m Wurzeln von $(+1)^n$ multiplicirt. — Zugleich gelten diese Formeln, da man (§. 315, Anmerk.) x immer als zwischen $-\frac{\pi}{4}$ und $+\frac{\pi}{4}$ liegend annehmen kann, für jeden reellen Werth von n, den man übrigens auch immer als positiv voraussetzen kann; weil z. B.

$\cos x^{-n} = 1 : \cos x^n$ ist.

§. 320. Ist n eine ganze, positive Zahl; so verschwindet in der Formel 1), §. 318, die mit $\sqrt{-1}$ multiplicirte Reihe. Denn erstlich bricht diese (§. 121) mit dem $n+1$. Gliede ab, und dann sind je 2, von den beiden äufsern gleich weit abstehende Glieder, immer numerisch einander gleich und mit entgegengesetzten Zeichen versehen, wodurch sie sich paarweise aufheben; erscheint (was für n gerad geschicht) ein mittleres Glied, so ist dieses für sich gleich Null. — Auf gleiche Weise verschwinden auch in den Formeln 2) und 3) des vorigen §. in diesem Falle die mit $\sqrt{-1}$ multiplicirten Reihen.

§. 321. Für diesen Fall also, von n ganz und positiv, erhält man aus den allgem. Formeln 1), 2) und 3) folgende Relationen:

Für n gerad oder ungerad:

$$4)\quad 2^n \cos x^n = \cos nx + n \cos(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1 \,.\, 2} \cos(n-4)x + \ldots$$

Für n gerad:

$$5)\quad 2^n \sin x^n = (-1)^{\frac{n}{2}} \left[\cos nx - n\cos(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1 \,.\, 2}\cos(n-4)x - \ldots\right].$$

Für n ungerad:

$$6)\quad 2^n \sin x^n = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left[\sin nx - n\sin(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1 \,.\, 2}\sin(n-4)x - \ldots\right].$$

Dabei ist noch, für n gerad:

$$\sin nx \pm n \sin(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1 \,.\, 2} \sin(n-4)x \pm \ldots = 0,$$

und für n ungerad:

$$\cos nx - n\cos(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\cos(n-4)x - \ldots = 0.$$

Alle diese Reihen sind so weit fortzusetzen, bis sie von selbst abbrechen, also einschliefsig bis zum $n+1^{ten}$ Gliede.

Zwölftes Capitel.

Die Elemente der Wahrscheinlichkeits-Rechnung.

Erklärungen.

§. **322**. Die mathematische Wahrscheinlichkeit oder Probabilität irgend eines Ereignisses ist das Verhältnifs der das Ereignifs begünstigenden zu allen gleich möglichen Fällen, und wird durch einen Bruch ausgedrückt, in welchem diese beiden Zahlen beziehungsweise den Zähler und Nenner bilden.

So ist die W. mit einem gewöhnlichen Würfel eine der 6 Zahlen, z. B. jene 3 zu werfen, $= \frac{1}{6}$; jene, irgend eine der beiden Zahlen 2 oder 3 zu werfen, $= \frac{2}{6}$ u. s. w.

§. **323**. Die W. also, welche für das Eintreffen irgend eines Ereignisses Statt findet, wird um so gröfser, je mehr sich die Zahl der günstigen, jener der gleich möglichen Fälle, d. i., je mehr sich der die W. ausdrückende Bruch, der Einheit nähert. Kann von allen möglichen Fällen keiner dem Ereignifs entgegen oder ungünstig seyn, so wird die W. zur Gewifsheit, und diese, da nun Zähler und Nenner gleich grofs sind, durch die Einheit ausgedrückt: die Einheit ist sonach das Symbol der Gewifsheit.

So ist die W. mit dem genannten Würfel irgend eine, gleichgiltig welche, der 6 Zahlen zu werfen, $= \frac{6}{6} = 1$.

§. **324**. Die W., dafs irgend ein Ereignifs nicht, sondern das Gegentheil davon eintreffe, heifst die entgegengesetzte W. des erwarteten Ereignisses, und mufs zur W. des Ereignisses selbst addirt, die Einheit geben; weil es gewifs ist, dafs dieses Ereign. entweder eintrifft oder nicht eintrifft.

So ist im obigen Beispiele die W., dafs die Zahl 3 nicht geworfen werde (wofür 5 Fälle, nämlich, dafs eine der 5 übrigen Zahlen 1, 2, 4, 5, 6 fällt, günstig sind), $= \frac{5}{6}$, welche zu der oben gefundenen W. $\frac{1}{6}$ addirt, in der That die Einheit gibt. [I., 378.]

§. **325.** Aufser der eben betrachteten Wahrscheinlichkeit, welche auch einfache oder absolute W. heifst, unterscheidet man noch die relative und zusammengesetzte W. — Unter der relativen W. versteht man die W., welche entsteht, wenn man blofs jene Fälle, die zweien bestimmten Ereignissen günstig sind, ohne Rücksicht auf die noch übrigen möglichen Fälle, in Betracht zieht.

Die W. z. B. aus einer Urne, welche weifse, rothe, blaue und schwarze Kugeln enthält, eher eine weifse als eine schwarze Kugel zu ziehen, wobei also jene Fälle, in welchen man eine rothe oder blaue Kugel zieht, nichts entscheiden, ist eine relative W.

§. **326.** Unter der zusammengesetzten W. versteht man die W., dafs zwei oder mehrere von einander unabhängige Ereignisse zusammen eintreffen werden, so wie auch die W. eines Ereignisses, welches von dem Eintreffen eines oder mehrerer vorausgehender Ereignisse, die wieder ihre eigene W. haben, abhängt oder bedingt wird.

So ist z. B. die W. mit 2 Würfeln auf einen Wurf den Pasch 66 zu werfen, eine zusammengesetzte; weil die Ereignisse, mit dem einen Würfel die 6, und dann auch mit dem 2. Würfel dieselbe Zahl zu werfen, zusammen eintreffen müssen.

Theilt man die 32 Karten nach den Farben in 4 Packete, so ist die W., das Coeur-Afs zu ziehen, ebenfalls eine zusammengesetzte; weil man zuerst die Hand auf das rechte Packet (auf jenes der Coeurs) legen, und dann erst daraus das Afs ziehen mufs; welch' letzteres Ereignifs offenbar gar nicht eintreffen kann, wenn nicht das erstere schon Statt gefunden hat.

Die *einfache* oder *absolute* Wahrscheinlichkeit.

§. **327.** Bezeichnen a und b die Anzahl der Fälle, welche beziehungsweise ein Ereignifs begünstigen und demselben entgegen sind; so ist die W. für das Ereignifs: $\omega = \frac{a}{a+b}$, und die entgegengesetzte W. desselben: $\omega_1 = \frac{b}{a+b}$.

§. **328.** Zerfällt das mögliche Resultat einer Handlung oder eines Versuches in mehr als 2, z. B. in 3 Classen, so, dafs von 3 verschiedenen Ereignissen nothwendig eines eintreffen mufs, und sind a Fälle dem ersten, b Fälle dem zweiten, und c Fälle dem 3. Ereignisse günstig; so sind ihre W., wenn man $a+b+c=s$ setzt, beziehungsweise: $\omega = \frac{a}{s}$, $\omega' = \frac{b}{s}$, $\omega'' = \frac{c}{s}$. Zugleich ist, wie es seyn soll, die W., dafs von diesen 3 Ereign. entweder das 1. oder 2., oder 3. eintreffe $= \frac{a+b+c}{s} = 1$, gleich der Gewifsheit. — Auf gleiche Art werden die W. ausgedrückt, wenn noch mehrere Ereignisse möglich sind.

§. **329.** Beispiele und Aufgaben über die einfache Wahrscheinlichkeit.

1. Wie grofs ist die W., mit 2 gewöhnlichen Würfeln eine bestimmte Summe zu werfen?

Es können überhaupt die Summen 2, 3, 4, . . 12 fallen, die aber keineswegs alle einerlei W. für sich haben. So können die Summen 2 und 12 nur auf eine Art geworfen werden, indem jeder der beiden Würfel beziehungsweise 1 und 6 zeigen mufs. Die Summe 6 dagegen kann schon auf 5 verschiedene, durch die Combinationen 15, 24, 33, 42, 51 dargestellte Arten, wobei immer die 1. Zahl dem 1., und die 2. dem 2. Würfel angehören soll, geworfen werden. Da nun überhaupt $6^2 = 36$ Fälle gleich möglich sind, indem sich die 6 Felder des einen Würf. mit allen 6 Feldern des andern verbinden lassen; so ist die W. die Summe 2 zu werfen $= \frac{1}{36}$ (so auch die für die Summe 12), dagegen jene für die Summe 6 $= \frac{5}{36}$. — Diese Betrachtungen auch auf alle übrigen der oben erwähnten Summen ausgedehnt, erhält man ganz einfach für die W., beziehungsweise die Summe 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 und 12 zu werfen, der Reihe nach: $\frac{1}{36}$, $\frac{2}{36}$, $\frac{3}{36}$, $\frac{4}{36}$, $\frac{5}{36}$, $\frac{6}{36}$, $\frac{5}{36}$, $\frac{4}{36}$, $\frac{3}{36}$, $\frac{2}{36}$ und $\frac{1}{36}$. Dabei ist, wie es seyn soll, die Summe aller dieser W. $= 1$.

2. Die W. finden, dafs man mit 3 Würfeln *a*) die Summe 9 überhaupt werfe, *b*) dafs sich darunter 2, und nur 2 gleiche Zahlen befinden, *c*) dafs alle 3 Zahlen gleich sind, *d*) dafs dabei der 1., 2. und 3. Würfel beziehungsweise die Zahlen 2, 3 und 4 zeigt, und *e*) dafs diese 3 Zahlen ohne Rücksicht auf die Ordnung der Würfel fallen.

a) Da sich die Zahl 9 (§. 111) auf 28 verschiedene Arten zu 3 zerlegen und permutiren läfst, von welcher Anzahl jedoch der Natur der Sache nach die 3 Complexionen 711, 171, 117 ausgeschlossen bleiben; so sind dem fraglichen Ereignifs 25 Fälle günstig, während im Ganzen $6^3 = 216$ Fälle gleich möglich sind. Die gesuchte W. ist demnach $= \frac{25}{216}$ (welche zwischen $\frac{1}{8}$ und $\frac{1}{9}$ liegt).

b) Da der Fall mit 3 gleichen Zahlen ausgeschlossen seyn soll, so können die beiden gleichen Zahlen nur 22 und 44, also die 3. ungleiche Zahl beziehungsweise blofs 5 und 1 seyn; da ferner diese 3. Zahl jeder der 3 Würfel zeigen kann, so gibt es im Ganzen $3 \times 2 = 6$ günstige Fälle, und die gesuchte W. ist demnach $= \frac{6}{216} = \frac{1}{36}$.

c) Da die Summe 9 nur auf eine einzige Art mit 3 gleichen Zahlen (333) fallen kann, so ist hier die W. $= \frac{1}{216}$.

d) Auch in diesem Falle ist die gesuchte W. $= \frac{1}{216}$.

e) Da sich die Zahlen 234 6 Mal permutiren lassen, oder was dasselbe ist, da die Zahlen 234 auf 6 verschiedene Arten fallen können; so ist hier die W. $= \frac{6}{216} = \frac{1}{36}$.

3. Man hat die 13 Blätter von einer Farbe eines vollständigen Spieles von 52 Karten in einen Pack gethan und gehörig gemischt; wie grofs ist die W., dafs das oberste Blatt der König und das nächste das Afs sey?

Die beiden obersten Blätter bilden (auf eine gleich mögliche Weise) eine der $\frac{13 . 12}{1 . 2} = 78$ Combinationen der 13 Blätter zu 2, unter denen jene von Afs und König nur 1 Mal vorkömmt; es ist also die W., dafs ohne Rücksicht auf die Ordnung, das oberste Paar Afs und König sey $= \frac{1}{78}$. Da aber bei einer bestimmten Ordnung die W. nur halb so grofs ist, so erhält man für die gesuchte W.: $\frac{1}{156}$; was man auch findet, wenn man berücksichtiget, daſs jede der genannten 78 Combinat. noch 2 Permutationen zuläſst, und unter diesen so entstehenden 156 Complexionen nur eine dem fraglichen Ereigniſs günstig ist. [I., 383.]

Die *relative* Wahrscheinlichkeit.

§. 330. Um die Regel für die relative W. sogleich an einem Beispiele zu entwickeln, soll die W. bestimmt werden, mit 2 Würfeln auf einen Wurf eher die Summe 7 als jene 5 zu werfen.

Nach dem vorigen §. (Beisp. 1.) gibt es für die Summen 7 und 5 beziehungsweise 6 und 4 günstige Fälle, und da es nach dem Sinne der vorliegenden Aufgabe $6+4=10$ gleich mögliche Fälle gibt, so sind die gesuchten W. beziehungsweise: $\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$ und $\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$. Da nun aber die absol. W. für das Werfen der Summen 7 und 5 respective $\frac{6}{36}$ und $\frac{4}{36}$ sind (vorig. §.), so findet man die vorigen Resultate auch, indem man die betreffende absol. W. durch die Summe beider W. dividirt; denn man erhält dadurch als relat. W. für die Summe 7: $\frac{6}{36}:(\frac{6}{36}+\frac{4}{36})=\frac{6}{10}$, und für die Summe 5: $\frac{4}{36}:(\frac{6}{36}+\frac{4}{36})=\frac{4}{10}$, wie vorhin. Auch hier ist die Summe der beiden W., der Natur der Sache gemäſs, gleich der Einheit; weil es gewiſs ist, daſs man (da die übrigen Summen unberücksichtiget bleiben) entweder eher die Summe 7 als jene 5, oder umgekehrt, eher die Summe 5 als jene 7 werfen wird.

§. 331. Sind also allgemein a Fälle dem Ereigniſs A, b Fälle dem Ereign. B, c Fälle dem Ereign. C u. s. w. günstig, und setzt man $a+b+c+\ldots=s$; so sind die absoluten W. für die Ereignisse A, B, C, . . beziehungsweise $\omega=\frac{a}{s}$, $\omega'=\frac{b}{s}$, $\omega''=\frac{c}{s}$, . ., also die W. daſs A eher als B eintreffen werde: $\Omega=\frac{\omega}{\omega+\omega'}=\frac{a}{a+b}$, und die entgegengesetzte W. nämlich, daſs B eher als A eintrifft: $\Omega_1=\frac{\omega'}{\omega+\omega'}=\frac{b}{a+b}$; also wieder $\Omega+\Omega_1=1$. Eben so ist die W. dafs A eher als C eintritt $= \frac{\omega}{\omega + \omega''} = \frac{a}{a+c}$; jene, dafs B eher als C zutrifft $= \frac{\omega'}{\omega' + \omega''} = \frac{b}{b+c}$ u. s. w.

Die relative W. eines Ereignisses wird demnach erhalten, indem man die absol. W. desselben, durch die Summe der absol. W. jener beiden Ereignisse, die gerade mit einander verglichen werden, dividirt.

§. 332. Beispiele und Aufgaben über die relative Wahrscheinlichkeit.

1. Eine Urne enthält 6 weifse, 8 rothe, 14 blaue und 12 schwarze Kugeln (von übrigens gleicher Beschaffenheit); wie grofs ist die W. auf einen Zug eher eine weifse als schwarze Kugel zu ziehen?

Da hier die absol. W. für das Ziehen einer weifsen Kugel $= \frac{6}{40}$, jene eine schwarze zu ziehen $= \frac{12}{40}$ ist; so hat man für die gesuchte relat. W., wenn man gleich durch 40 abkürzt: $\omega = \frac{6}{6+12} = \frac{1}{3}$; für die des Gegentheils: $\omega_1 = \frac{12}{6+12} = \frac{2}{3}$, und sofort $\omega + \omega_1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$.

2. Ein Spiel von 16 Karten, worunter immer 4 von derselben Farbe sind, wird unter 4 Spieler vertheilt, und dabei ist die letzte Karte Trumpf; wie grofs ist die W., dafs der Spieler A, welcher die Karten nicht gibt, eher einen, und auch nur einen Trumpf, als 3, und zwar auch nur 3 Karten von einerlei Farbe (z. B. 3 Coeurs) erhält?

Da (rücksichtlich des 1. Punctes der Frage) eigentlich nur 15 Karten ausgegeben werden, worunter sich 3 Trümpfe befinden; so kann A seine 4 Karten auf $\frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 1365$ verschiedene Arten erhalten. Da sich ferner nach Hinwegnahme der 3 Trümpfe die übrigen 12 Karten auf $\frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 220$ verschiedene Arten zu 3 verbinden lassen, so gibt es 3 Mal 220, d. i. 660 Verbindungen zu 4, deren jede Einen, und auch nur Einen Trumpf enthält, also auch eben so viele günstige Fälle; es ist daher die absol. W. für das 1. Ereignifs: $\omega = \frac{660}{1365} = \frac{220}{455} = \frac{44}{91}$ (etwas kleiner als $\frac{1}{2}$).

Da sich ferner (rücksichtlich des 2. Punctes kommen alle

Blätter in Rechnung) die 16 Blätter auf $\frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 1820$ verschiedene Arten zu 4 verbinden lassen, und unter diesen Verbindungen 192 mit 3 gleichen und einer ungleichen Farbe enthalten sind (die 4 Coeurs z. B. lassen sich $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4$ Mal zu 3 verbinden, und jede dieser Complexionen gibt mit jeder der 12 übrigen Karten eine Verbindung zu 4 von der verlangten Eigenschaft, also gibt es $4 \times 12 = 48$ Verbindungen, deren jede 3 Coeurs und eine andere Farbe enthält. Da aber dasselbe auch, wie von Coeur, für jede der 3 übrigen Farben gilt; so gibt es in der That $4 \times 48 = 192$ günstige Fälle), so ist die absol. W. für das 2. Ereignifs: $\omega' = \frac{192}{1820} = \frac{48}{455}$ (zwischen $\frac{1}{9}$ und $\frac{1}{10}$). Es ist also endlich die gesuchte relative W.:

$$\frac{\omega}{\omega + \omega'} = \frac{220}{220 + 48} = \frac{55}{67} \text{ (etwas } < \tfrac{5}{6}\text{)}.$$

Die *zusammengesetzte* Wahrscheinlichkeit.

§. 333. Um die W. für das Zusammentreffen der beiden Ereignisse A und B, denen beziehungsweise a und a' Fälle günstig, b und b' Fälle entgegen seyn sollen, welche also die absoluten W. $\omega = \frac{a}{a+b}$ und $\omega' = \frac{a'}{a'+b'}$ besitzen, zu finden; so gibt es, da die a günstigen Fälle des 1. mit den a' günstigen Fällen des 2. Ereignisses $a a'$ Verbindungen geben, also beide Ereignisse auf $a a'$ verschiedene Arten zusammen eintreffen können, auch eben so viele günstige Fälle; da ferner im Ganzen $(a+b)(a'+b')$ Fälle auf eine gleich mögliche Art Statt finden können, so ist die gesuchte W. für das Zusammentreffen beider Ereignisse (§. 327): $\Omega = \frac{a a'}{(a+b)(a'+b')} = \omega \omega'$.

Auf gleiche Weise findet man, dafs wenn ω, ω', ω'', .. beziehungsweise die einfachen W. für die Ereignisse A, B, C, .. sind, sofort die W. für das Zusammentreffen aller dieser Ereignisse $\Omega = \omega \omega' \omega'' \ldots$, d. i. gleich dem Producte der einfachen W. der einzelnen Ereignisse ist.

§. 334. Beispiele und Aufgaben über die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit.

1. Die W. zu bestimmen, dafs man mit einem gewöhnlichen Würfel die Zahl 6 mehre Male hinter einander werfen werde?

Hier ist die einfache W. die Zahl 6 zu werfen $= \frac{1}{6}$, mithin die zusammengesetzte W., dafs diese Zahl 2, 3, . . m Mal nach einander falle, beziehungsweise:

$$\tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{1}{6} = \frac{1}{6^2},\quad \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{1}{6} = \frac{1}{6^3} \text{ u. s. w. } \frac{1}{6^m};$$

eine W., welche um so kleiner wird, je gröfser m ist.

2. Nehmen wir das in §. 326 angeführte Beispiel und suchen die W., auf einen zufälligen Griff, aus den nach den Farben in 4 Packete getheilten 32 Karten (ohne zu wissen von welcher Farbe jedes Packet ist) das Coeur-Afs zu ziehen.

Die W. die Hand auf das Packet der Coeurs zu legen ist $= \frac{1}{4}$, und die W. daraus die bezeichnete Karte zu ziehen $= \frac{1}{8}$; folglich ist die gesuchte W. für das zusammengesetzte Ereignifs $= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{32}$. Dasselbe Resultat erhält man auch für die einfache W., aus einem wohl gemischten Spiele von 32 Karten das Coeur-Afs zu ziehen; welcher Fall auch in der That mit dem hier behandelten identisch ist.

3. Wie grofs ist die W., dafs man aus einem gut gemischten Spiele von 32 Karten in zwei auf einander folgenden Zügen Afs und König von derselben Farbe in beliebiger Ordnung ziehen werde?

Die W., auf den 1. Zug das Afs der bestimmten Farbe zu ziehen, ist $= \frac{1}{32}$; die W., hierauf den König derselben Farbe zu ziehen, $= \frac{1}{31}$; folglich ist die W., dafs beides in dieser angeführten Ordnung eintreffen werde, $= \frac{1}{32}\cdot\frac{1}{31}$. Da aber die Ordnung willkürlich seyn soll, also auch jener Fall, in welchem zuerst der König und dann das Afs gezogen wird, ein günstiger ist; so ist die gesuchte zusammenges. W. doppelt so grofs oder $= \frac{2}{32\,.\,31}$. Und da endlich auch die Farbe nicht bestimmt ist, also dieses Ereignifs in allen 4 Farben eintreten kann; so hat man zuletzt für die zusammengesetzte W. des genannten Ereignisses: $\omega = \frac{2\,.\,4}{32\,.\,31} = \frac{1}{124}$.

Zu diesem Ergebnifs gelangt man auch auf folgendem Wege: Die 32 Karten können auf $\frac{32\,.\,31}{1\,.\,2}$ Arten zu 2 verbunden werden, worunter aber dem fraglichen Ereignisse nur 4 Combinationen, nämlich jene günstig sind, in welchen Afs und König von gleicher Farbe beisammen liegen; man hat daher für die einfache W. dieses Ereignisses, wie zuvor, $\frac{4 \cdot 1 \cdot 2}{32 \cdot 31} = \frac{1}{124}$.

4. Von 2 Urnen enthält die erste 3 weifse und 1 schwarze, die zweite 4 weifse und 2 schwarze Kugeln; wie grofs ist die W., dafs man auf einen zufälligen Griff in eine der beiden Urnen eine weifse Kugel ziehen wird?

Die W. in die 1. Urne zu greifen ist $= \frac{1}{2}$, jene daraus eine weifse Kugel zu ziehen $= \frac{3}{4}$, folglich die W. für das Zusammentreffen beider Ereignisse $= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$. Eben so ist die zusammengesetzte W. dafs man in die 2. Urne greifen und dann daraus eine weifse Kugel ziehen wird $= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$; man hat daher endlich, da beide diese betrachteten Ereignisse dem fraglichen Ereignifs günstig sind, für die gesuchte zusammengesetzte W.: $\frac{3}{8} + \frac{1}{3} = \frac{17}{24}$.

Genau eben so findet man für die W. auf einen zufälligen Griff in eine der beiden Urnen eine schwarze Kugel zu ziehen: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} = \frac{7}{24}$, welche W. mit der vorigen addirt, wie es in der That seyn soll, die Einheit gibt; indem diese W. die entgegengesetzte von der vorigen bildet [I., 392].

5. Das im §. 329 angeführte 3. Problem läfst sich einfacher mittelst der zusammengesetzten W. auflösen. Denn es ist die W. dafs das oberste Blatt der König sey, $= \frac{1}{13}$, jene, dafs nachdem diese Karte weggenommen worden, das oberste Blatt das Afs sey, $= \frac{1}{12}$, folglich die gesuchte W. dafs beides in dieser Ordnung Statt finde: $\frac{1}{13} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{156}$, wie a. a. O.

6. Die W. zu bestimmen, dafs in der gewöhnlichen Zahlenlotterie, in welcher von den 90 Nummern jedes Mal 5 gezogen werden, von 2 besetzten Nummern wenigstens eine heraus komme?

Die W. dafs auf den 1. Zug eine der beiden Nummern heraus komme ist $= \frac{1}{90}$, jene dafs auf den 2. Zug die andere gezogen wird $= \frac{1}{89}$; mithin die W. dafs beides geschieht $= \frac{1}{90} \cdot \frac{1}{89}$. Da es aber hier auf die Ordnung, in welcher beide Nummern gezogen werden, nicht ankömmt; so wird diese W. (da sich 5 Elemente, worunter 3 gleiche sind, 20 Mal permutiren lassen) 20 Mal so grofs, also die W. dafs unter 5 Zügen die 2 bestimmten Nummern heraus kommen $= \frac{20}{90 \cdot 89} = \frac{2}{9 \cdot 89}$. — Ferner ist die W. dafs in diesen 5 Zügen blofs eine der beiden Nummern, z. B. die erste, komme $= \frac{5}{90}$, und jene, dafs die andere in den 4 übrigen Zügen nicht herauskömmt $= 1 - \frac{4}{89} = \frac{85}{89}$, also die W. dafs beides zutrifft $= \frac{5}{90} \cdot \frac{85}{89}$; da ferner dasselbe auch in Beziehung auf die 2. Nummer gilt, so ist überhaupt die W. dafs in diesen 5 Zügen nur eine der beiden Nummern heraus kommt $= 2 \cdot \frac{5}{90} \cdot \frac{85}{89} = \frac{85}{9 \cdot 89}$. Es ist also endlich, da beide betrachteten Ereignisse der Erwartung günstig sind, die gesuchte W. $= \frac{2}{9 \cdot 89} + \frac{85}{9 \cdot 89} = \frac{87}{801}$ (nahe $= \frac{1}{9}$). Zur Übung kann man dieses Resultat auch durch die einfache W. zu erhalten suchen. [I., 393, 395.]

Die wiederholten Versuche.

§. 335. Gibt es m Fälle, welche dem Ereignifs A, und n Fälle, welche jenem B günstig sind, und findet bei jedem neuen Versuche immer das nämliche Verhältnifs zwischen der Zahl der Fälle beider Arten Statt; so kann die W. für irgend eine Erwartung nach einer bestimmten Anzahl von Versuchen leicht durch die zusammengesetzte W. gefunden werden. — Nehmen wir z. B. ein $(m+n)$seitiges regelm. Prisma, wovon m Seiten mit A und n Seiten mit B bezeichnet sind, und setzen, dafs damit z. B. 3 Mal hinter einander geworfen werde; so können dabei folgende Fälle eintreten: Man wirft 3 Mal A, oder 2 Mal A und 1 Mal B, oder 1 Mal A und 2 Mal B, oder endlich 3 Mal B. Bezeichnet man die W. für das Eintreffen von A und B beziehungsweise durch a und b, so ist (§. 327) $a = \frac{m}{m+n}$ und $b = \frac{n}{m+n}$; folglich die zusammenges. W. für das 1. Ereignifs AAA sofort $a.a.a = a^3$; für das 2. oder AAB: $a.a.b = a^2 b$, und wenn dabei die Ordnung nicht bestimmt ist (also AAB 3 Mal permut. werden kann) $= 3a^2 b$; für das 3. Ereign. oder ABB: ab^2, und ohne Rücksicht auf die Ordnung $= 3ab^2$, und endlich für den 4. Fall, d. i. für BBB: $b.b.b = b^3$. Die bei diesen 3 wiederholten Versuchen vorkommenden W. aller dabei möglichen Fälle sind demnach, wenn die Ordnung nicht bestimmt ist: a^3, $3a^2b$, $3ab^2$, b^3, nämlich die Glieder der Entwickelung von $(a+b)^3$.

§. **336**. Durch Fortsetzung dieser Betrachtungen findet man eben so, dafs die einzelnen W. für alle jene Fälle, welche bei n wiederholten Versuchen eintreten können, durch die Glieder der Entwickelung von $(a+b)^n$, d. i. durch a^n, $\binom{n}{1}a^{n-1}b$, $\binom{n}{2}a^{n-2}b^2$, . . b^n ausgedrückt werden, so, dafs nämlich das allgem. Glied $\binom{n}{p}a^{n-p}b^p$ die W. ausdrückt, dafs unter n Versuchen oder Würfen, ohne Rücksicht auf die Ordnung, A $n-p$ Mal und B p Mal eintreffe. — Soll dabei die Ordnung eine bestimmte seyn, so darf man darin nur den Coefficienten auslassen, d. i. $\binom{n}{p}=1$ setzen.

§. **337**. Soll endlich die W. bestimmt werden, dafs unter diesen n Versuchen A wenigstens $n-2$ Mal eintrifft, so sind auch jene Fälle dem Ereignifs günstig, in welchem A $n-1$ oder n Mal zutrifft; mithin drückt die Summe der ersten 3 Glieder der vorigen Entwickl. die gesuchte W. aus, weil man in diesem Falle eigentlich die W. sucht, dafs A n Mal, oder $n-1$ Mal, oder $n-2$ Mal eintrifft. — Dagegen ist die W., dafs A unter n Versuchen höchstens $n-2$ Mal eintritt, gleich der Summe der ganzen Reihe, um jene der beiden ersten Glieder vermindert. Dasselbe gilt auch in Beziehung auf das Ereignifs B.

Anmerk. Da hier immer $a+b=1$, also auch $(a+b)^n=1$ oder die Summe der ganzen Reihe gleich 1 ist; so ist auch die Summe aus der W., dafs A wenigstens $n-p$ Mal und höchstens $n-p-1$ Mal unter n Versuchen eintrifft, immer gleich der Einheit oder Gewifsheit; was auch seyn soll. Zugleich folgt daraus, dafs es, wenn zur Bestimmung irgend einer W. mehr als die halbe Anzahl der Glieder dieser Reihe summirt werden soll, bequemer ist, die Summe der kleineren Hälfte von der Einheit als Summe der ganzen Reihe abzuziehen; was damit übereinstimmt, anstatt der gesuchten W. die entgegengesetzte W. zu bestimmen und sie von der Einheit abzuziehen. [I., 398 — 403.]

§. 338. Beispiele und Aufgaben über die wiederholten Versuche.

1. Wie grofs ist die W. mit einem gewöhnlichen Würfel unter 4 Würfen a) die Zahl 6 Einmal, also 3 Mal eine andere Zahl, b) diese Zahl 6 wenigstens 2 Mal, und endlich c) höchstens 2 Mal zu werfen?

Hier ist die einfache W. des Ereignisses A: $a = \frac{1}{6}$, also die entgegengesetzte: $b = \frac{5}{6}$ und $n = 4$; daher

$$(a + b)^n = (a + b)^4 = a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

a) In diesem Falle gibt das 4. Glied dieser Reihe die gesuchte W., diese ist nämlich: $4ab^3 = 4 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{125}{216} = \frac{125}{324}$.

b) Die gesuchte W. wird hier durch die Summe der 3 ersten Glieder dieser Reihe ausgedrückt, so, dafs man dafür hat:

$$\frac{1 + 4.5 + 6.25}{6^4} = \frac{19}{144}.$$

c) In diesem Falle erhält man die W. durch die Summe der 3 letzten Glieder der Reihe, diese ist nämlich

$$= \frac{6.25 + 4.125 + 625}{6^4} = \frac{1275}{1296} = \frac{425}{432}.$$

2. In einer Urne befinden sich 4 weifse und 6 schwarze Kugeln; wie grofs ist die W. in 6 Zügen, nach deren jedem die Kugel wieder in die Urne gethan wird, 2 weifse und 4 schwarze Kugeln zu ziehen?

Hier ist die einf. W. eine weifse Kugel zu ziehen (die W. für das Ereignifs A): $a = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$, und jene eine schwarze zu ziehen (die W. für das Ereignifs B): $b = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$. Die gesuchte W. wird durch jenes Glied der Entwickelung von $(a + b)^6$ ausgedrückt, welches die Form $K a^2 b^4$ hat (die Expon. von a und b sind die Wiederholungszahlen von A und B), und da hier $K = \frac{6.5.4.3.2.1}{1.2.1.2.3.4} = 15$ ist; so hat man für die gesuchte W.:

$$15\, a^2 b^4 = 15 \cdot \frac{4}{25} \cdot \frac{81}{625} = \frac{972}{3125}.$$

3. Man wirft ein Geldstück, dessen beide Seiten beziehungsweise das Gepräge von Kopf und Wappen besitzen, in die Höhe; wie grofs ist die W., dafs in 2 Würfen wenigstens Einmal Wappen falle?

Die gesuchte W. ist $= a^2 + 2ab$, wobei $a = b = \frac{1}{2}$ ist, also $= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$; von welchem Ergebnifs man sich auch leicht durch die einfachen W. überzeugen kann. [1., 405.]

§. **339.** Zusatz. Verändert sich nach jedem Versuche die Anzahl aller Fälle, wie z. B. wenn die gezogenen Kugeln nicht wieder in die Urne zurück gelegt werden; so treten andere Verhältnisse ein, und man findet z. B., dafs wenn A m, und B n Fälle für sich hat, und $m+n=s$ gesetzt wird, die W. dafs nach p Versuchen, nach deren jedem die Summe s um eine Einheit abnimmt, A $p-q$, und B q Mal eintreffen werde $=$

$$\frac{p(p-1)\,.\,.\,(p-q+1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,.\,q} \times \frac{m(m-1)\,.\,.\,[m-(p-q)+1] \times n(n-1)\,.\,.\,(n-q+1)}{s\,(s-1)\,\,.\,.\,\,(s-p+1)}$$

ist. Auch sieht man von selbst, dafs wenn mehr als zwei Arten von Ereignissen vorkommen, man statt dem Binom das Polynom in Anwendung bringen müsse. — Befinden sich z. B. in einer Urne 3 weifse, 5 schwarze und 4 rothe Kugeln; so werden beziehungsweise die W. für alle bei n auf einander folgenden Zügen, nach deren jedem die Kugel wieder in die Urne gethan wird, vorkommenden Ereignisse, durch die Glieder der Entwickelung von $(a+b+c)^n$, wo a, b, c der Reihe nach die absol. W. für das Ziehen einer weifsen, schwarzen und rothen Kugel bezeichnen, also $=\frac{3}{12}$, $\frac{5}{12}$ und $\frac{4}{12}$ sind, ausgedrückt. [I, 406.]

Steigerung der Wahrscheinlichkeit durch fortgesetzte Versuche.

§. **340.** Nach §. 336 drückt das letzte Glied b^n der Entwickl. von $(a+b)^n$, wobei a und b die absol. W. der Ereignisse A und B bezeichnen, die W. aus, dafs unter n Versuchen A kein Mal, also B n Mal nach einander eintreffen werde. Nun wird aber, wegen $b<1$, b^n um so kleiner, je gröfser n wird; also die W., dafs unter n Versuchen A gar nicht eintrifft, immer kleiner, folglich die entgegengesetzte W. $1-b^n$, dafs nämlich A dabei wenigstens 1 Mal zutrifft, immer gröfser. Es läfst sich daher die Frage aufwerfen, für welchen Werth von n, oder nach wie viel Versuchen diese W. eine bestimmte Gröfse erreicht haben wird?

§. **341.** Setzt man zur Beantwortung dieser Frage die gegebene W. (welche das Ereignifs: dafs A unter n Versuchen wenigstens Einmal eintrifft, erhalten soll) $= g$, so ist die entgegengesetzte W.: $b^n = 1 - g$, und aus dieser Gleich., wenn man Logarithmen anwendet: $n = \frac{\log(1-g)}{\log b}$; welcher Ausdruck sofort zeigt, dafs n oder die Anzahl der Versuche um so gröfser seyn mufs, je mehr sich b oder g der Einheit nähern.

Beisp. Die W. mit 2 Würfeln auf einen Wurf einen Pasch zu werfen ist $= \frac{1}{6}$; nach wie vielen Versuchen wird die W. wenigstens Einmal einen Pasch zu werfen $= \frac{1}{2}$, und nach wie vielen Versuchen $= \frac{3}{4}$ seyn?

Hier ist $a = \frac{1}{6}$, $b = \frac{5}{6}$, und für den 1. Fall $g = \frac{1}{2}$; folglich nach der vorigen Formel

$$n = \log\tfrac{1}{2} : \log\tfrac{5}{6} = \log 2 : (\log 6 - \log 5) = \cdot 30103 : \cdot 07918 = 3\cdot 8,$$

oder die W. für das genannte Ereignifs nach 4 Versuchen schon etwas weniges $> \frac{1}{2}$.

Für den 2. Fall ist $g = \frac{3}{4}$, also

$$n = \log 4 : (\log 6 - \log 5) = 7\cdot 6,$$

also die W. nach 8 Versuchen ebenfalls schon gröfser als $\frac{3}{4}$.

Regeln beim Wetten.

§. **342.** Eine Wette zwischen 2 oder mehreren Personen kann nur dann rechtmäfsig genannt werden, wenn der Einsatz eines jeden der W., die Wette zu gewinnen, proportional ist. Denn nimmt man z. B. an, dafs beim gewöhnlichen Würfelspiele von 6 Personen jede eine der 6 Zahlen besetzt, so wird offenbar jeder gleich viel einsetzen müssen; es hat aber auch in der That jeder der Spieler die nämliche W. für sich, das Spiel zu gewinnen. Übernimmt nun z. B. B 5 Antheile oder vertritt er die Stelle von 5 Spielern, die etwa beziehungsweise auf die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 gesetzt haben; so bleibt Alles dasselbe, wenn nur B seinen vorigen, oder den jetzigen Einsatz des A 5fach leistet, und sonach mit dem Einsatze 5 gegen A, welcher 1 auf die Zahl 6 einsetzt, wettet, dafs eine der 5 übrigen Zahlen von 1 bis 5 falle. Aber auch in diesem Falle, dessen Rechtmässigkeit einleuchtet, verhalten sich die W., die beziehungsweise A und B zum Gewinnen des Spieles haben, wie $\frac{1}{6} : \frac{5}{6} = 1 : 5$, d. i. wie ihre Einsätze.

§. 343. Setzen also 2 Spieler die Summen a und a', und sind ihre W. das Spiel zu gewinnen ω und ω'; so wird erfordert, dafs $a : a' = \omega : \omega'$ oder $a\,\omega' = a'\omega$ sey: es müssen nämlich die Producte aus dem Gewinnste, den jeder hofft, in die W. diesen zu erlangen, d. i. die mathematischen Hoffnungen oder Erwartungen einander gleich seyn.

1. Wettet A gegen B, dafs er mit 2 Würfeln auf einen Wurf die Summe 5 werfen wird, so müssen sich die von A und B zu leistenden Einsätze wie $1 : 8$ verhalten; weil die W. die Summe 5 zu werfen (§. 329, 1.) $= \frac{1}{9}$, also die des Gegentheils $= \frac{8}{9}$ ist.

2. Verspricht A dem B beim Kopf- und Wappenspiel, wenn Wappen auf den 1. Wurf fällt 2, und wenn es erst auf den 2. Wurf fällt, 4 Groschen; so ist die mathematische Hoffnung des B, da die einfachen W. der genannten Ereignisse beziehungsweise $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{4}$ sind, sofort: $2 . \frac{1}{2} + 4 . \frac{1}{4} = 2$ Groschen; und eben so viel mufs auch der B dem A entgegen setzen, weil Einsatz und Hoffnung gleich seyn sollen.

Soll aber, ungeachtet vielleicht schon auf den 1. Wurf Wappen fiel, B dennoch die 4 Groschen bekommen, wenn es auf den 2. Wurf fällt; so ist jetzt die W., dafs Wappen auf den 2. Wurf fällt, da nun der 1. Wurf hierauf keinen Einflufs hat, $= \frac{1}{2}$, also die mathem. Hoffnung des $B = 2 . \frac{1}{2} + 4 . \frac{1}{2} = 3$ Groschen, die er sofort auch einsetzen mufs.

Rechtmäfsige Theilung des Einsatzes vor Beendigung des Spieles.

§. 344. Sind mehrere Versuche nöthig, um ein Spiel zu entscheiden, und wird, nachdem bereits einige Versuche gemacht worden, das Spiel vor dessen Beendigung abgebrochen; so kann gefragt werden, nach welchem Verhältnisse der von den Spielern geleistete Einsatz zu vertheilen sey. Da man bei jedem Spiele von dem Grundsatze ausgeht, dafs jeder Spieler auf den geleisteten Einsatz verzichtet, dagegen, wenn der Zufall über den ganzen Einsatz noch nicht entschieden hat, zur Entschädigung auf diesen Einsatz ein Recht besitzt, welches seiner Hoffnung, d. i. seiner W. das Spiel zu gewinnen, proportionirt ist; so muſs eben diese Regel, die sogenannte Theilungsregel, bei allen solchen Theilungen, wenn sie rechtmäſsig seyn sollen, zu Grunde liegen.

1. Wettet z. B. A, mit einem Würfel 2 Mal hinter einander die Zahl 6 zu werfen; so darf er (nach dem Grundsatze in §. 343) nur die Summe 1 setzen, während sein Gegner B den Einsatz 35 zu leisten hat. Gehen die Spieler aus einander, bevor noch ein Wurf gemacht worden, so muſs natürlich jeder seinen Einsatz unverändert zurück nehmen, oder es muſs der ganze Einsatz 36 so vertheilt werden, daſs davon A die Summe 1, und B die Summe 35 erhält, also augenscheinlich in demselben Verhältniſs, in welchem in diesem Augenblicke noch ihre W. das Spiel zu gewinnen stehen. Hat aber A bereits Einmal und dabei wirklich die Zahl 6 geworfen, so haben sich dadurch die Hoffnungen der Spieler ganz anders gestellt: A gewinnt nun, wenn er im nächsten Wurf die Zahl 6 wirft, wofür er die W. $= \frac{1}{6}$ hat; B dagegen gewinnt, wenn A diese Zahl nicht wirft, wofür die W. $= \frac{5}{6}$ ist. Vor dem 2. Wurfe verhalten sich also die mathemat. Hoffnungen des A und B das Spiel zu gewinnen, wie $1:5$, also muſs auch, falls sich die Spieler vor diesem 2. Wurfe trennen, der ganze Einsatz 36 in eben demselben Verhältniſs getheilt werden, so, daſs davon A die Summe 6 und B jene 30 erhält.

2. Zwei Spieler A und B kommen mit einander überein, daſs derjenige den ganzen Einsatz erhalten solle, welcher zuerst 3 Partien gewinnt; nachdem nun A bereits 2, und B Eine Partie gewonnen haben, trennen sie sich; nach welchem Verhältniſs ist jetzt der Einsatz zu theilen?

Wäre das Spiel fortgesetzt worden, so würde A dasselbe gewonnen haben, wenn er entweder die folgende Partie gewonnen hätte, wofür die W. $= \frac{1}{2}$ ist, oder, wenn er diese Partie verloren, dagegen die nächst folgende gewonnen hätte, welches zusammengesetzte Ereigniſs sonach die W. $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ für sich hat; es ist also in dem Augenblicke, in welchem das Spiel unterbrochen wird, die mathemat. Hoffnung des $A = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. B dagegen würde das Spiel nur haben gewinnen können, wenn er die beiden folgenden Partien nach einander gewonnen hätte, wofür die zusammenges. W. $=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ ist; und diefs ist zugleich die Hoffnung, welche *B* beim Abbrechen des Spiels hat. Es mufs also zufolge der obigen Regel von dem ganzen Einsatze *A* $\frac{3}{4}$ und *B* $\frac{1}{4}$ erhalten, so, dafs wenn z. B. jeder 32 Ducaten gesetzt hat, *A* und *B* davon beziehungsweise 48 und 16 Ducaten bekommen. [I., 413.]

Die Wahrscheinlichkeit *a posteriori.*

§. **345.** Bei allen bisher behandelten Aufgaben hat sich das Verhältnifs der günstigen zu allen gleich möglichen Fällen aus den gegebenen Bedingungen immer im Voraus, also auch die W. *a priori* bestimmen lassen. Ist dieses Verhältnifs aber unbekannt, und soll dieses erst, so weit es möglich, aus Beobachtungen abgeleitet werden; so wird die darauf gebaute Wahrscheinlichkeit eine W. *a posteriori* genannt. Kennt man z. B. die Bedingungen einer Urne nicht vollständig, aus welcher die Ereignisse hervorgehen; so mufs man alle möglichen Bedingungen untersuchen, unter welchen diese Ereignisse haben Statt finden können, um dafür wenigstens eine Art von mittlerer W. zu erhalten, welche der wahren um so näher gebracht werden kann, je zahlreicher die Erfahrungen oder angestellten Versuche sind.

§. **346.** Gesetzt man habe aus einer Urne, welche 3 Kugeln enthält, davon jede entweder weifs oder schwarz seyn kann, so, dafs man die wahre Anzahl der weifsen und schwarzen Kugeln nicht genau kennt, in 3 Zügen, nach deren jedem die gezogene Kugel wieder in die Urne gethan wird, 2 weifse und 1 schwarze Kngel gezogen; so können in Betreff der Bedingungen dieser Urne die beiden folgenden, aber auch nur diese beiden Hypothesen aufgestellt werden: die Urne enthält α) 2 weifse und 1 schwarze, oder β) 1 weifse und 2 schwarze Kugeln.

Bezeichnet a die W. eine weifse, und b jene eine schwarze Kugel zu ziehen; so ist nach der ersten oder Hypothese α): $a=\frac{2}{3}$, $b=\frac{1}{3}$, und nach der 2. β): $a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{2}{3}$. Nun wird die W. 2 weifse und eine schwarze Kugel zu ziehen (§. 336) durch $3a^2b$ ausgedrückt, folglich ist diese nach den beiden Hypothesen α) und β) beziehungsweise $3.\frac{4}{9}.\frac{1}{3}=\frac{4}{9}$ und $3.\frac{1}{9}.\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$. Nach der 2. Hypothese ist also die W. des beobachteten Ereignisses nur halb so groſs als nach der ersten; es ist aber auch in der That die 2. Hypothese weniger wahrscheinlich als die erste.

§. **347.** Da aber nach der Leichtigkeit, mit welcher die aufgestellte Hypothese die beobachteten Ereignisse herbeiführt, auch der Grad der W. der Hypothese selbst beurtheilt werden muſs; so hat man folgenden Grundsatz aufgestellt: die W. der Hypothesen oder Ursachen sind den W., welche daraus für die beobachteten Ereignisse hervorgehen, proportional.

Im angeführten Beispiele verhalten sich also die W. beider Hypothesen wie 2 : 1, und da von beiden eine nothwendig Statt finden muſs, so muſs auch (§. 323) die Summe ihrer W. = 1 seyn. Aus dieser Bemerkung findet man sofort die W. der Hypothesen, indem man die betreffenden Verhältniſszahlen 2 und 1 durch ihre Summe dividirt; es ist nämlich die W. der 1. Hypothese $=\frac{2}{3}$, und die der 2. $=\frac{1}{3}$ (denn nun ist, wie es seyn soll, $\frac{2}{3}:\frac{1}{3}=2:1$, und zugleich $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1$).

§. **348.** Sind allgemein H, H', H'', . . die W. der Hypothesen, und A, A', A'', . . beziehungsweise die darnach berechneten W. für die beobachteten Ereignisse; so ist dem vorigen Satze gemäſs:

$$H : A = H' : A' = H'' : A'' = \text{etc.},$$

und daraus

$$H+H'+H''+\ldots : A+A'+A''+\ldots = H:A = H':A' = \text{etc.}$$

oder wegen $H+H'+H''+\ldots=1$, und wenn man $A+A'+A''+\ldots=S$ setzt:

$$1 : S = H : A = H' : A' \text{ u. s. w.},$$

so, daſs man endlich hat:

$$H=\frac{A}{S},\quad H'=\frac{A'}{S},\quad H''=\frac{A''}{S} \text{ u. s. w.}$$

So hat man im vorigen Beispiele $A = \frac{4}{9}$ und $A' = \frac{2}{9}$, mithin $S = A + A' = \frac{6}{9}$, und daher $H = \frac{4}{9} : \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ und $H' = \frac{2}{9} : \frac{6}{9} = \frac{1}{3}$, wie vorhin.

§. **349**. Sind die W. der möglichen Ursachen oder Hypothesen ausgemittelt, so kann man nun auch die W. für ein folgendes Ereignifs (nach der W. *a priori*) finden. Es darf nämlich nur die W. des erwarteten Ereignisses nach jeder Hypothese genommen, und diese mit der W. der betreffenden Hypothese selbst multiplicirt werden, so drückt die Summe dieser zusammengesetzten W. die gesuchte W. aus.

So ist in dem vorigen Beispiele die W. auf den folgenden oder 4. Zug eine weifse Kugel zu ziehen $= \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{9}$, und die W. eine schwarze zu ziehen $= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$; die Summe dieser beiden W. ist $\frac{5}{9} + \frac{4}{9} = 1$, wie es auch seyn soll; weil es gewifs ist, dafs man auf diesen 4. Zug entweder eine weifse oder eine schwarze Kugel ziehen wird. [I., 418, dann vermischte Beispiele 420 — 432.]