www.e-rara.ch

Grondbeginsels der meetkunde

Swinden, Jan Hendrik van

Amsterdam, MDCCCXVI. [1816]

ETH-Bibliothek Zürich

Shelf Mark: Rar 22127

Persistent Link: https://doi.org/10.3931/e-rara-60795

Achtste boek.

www.e-rara.ch
Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien – von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material – from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d'imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L'éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes – des débuts de l'imprimerie jusqu'au 20e siècle.

e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

Nutzungsbedingungen Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titelinformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

Terms of Use This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

Conditions d'utilisation Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

Condizioni di utilizzo Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]

ACHTSTE BOEK.

OVER HET METEN VAN HOEKEN DOOR CIRKELBOGEN EN HET BEREKENEN VAN DEZELVE DOOR CHOORDEN, SINUSSEN, TANGENTEN, EN SECANTEN.

I. AFDEELING.

OVER HET METEN VAN HOEKEN DOOR CIRKELBOGEN.

I. VOORSTEL. Fig. 170.

In den zelfden cirkel, of in gelijke cirkels, is er tusschen de hoeken, zoo wel in het middelpunt als in den omtrek, de zelfde rede als tusschen de bogen op welke zij rusten: het zelfde heeft voor de *Sectoren* plaats: en een hoek in het middelpunt staat tot vier regte, als de boog op welken hij rust tot den geheelen omtrek.

EUCL. VI. 33 — L. G. II. 17.

BEREIDING. Men neme de bogen GB, BI, gelijk aan AG; en even veel bogen MN, NO gelijk aan KM: men trekke CB, CI; LN, LO.

BEWIJS. VOOR HET I. Uit de beschouwing dat boog AI en ∠ ACI gelijkvouden zijn van boog AG en van ∠ ACG: zoo als ook boog KO en ∠ KLO van boog KM en van ∠ KLM: en dan uit III. 3: V. 6. Gev. 1. en V. 5.

VOOR HET II. volgt uit het I.

VOOR HET III. Uit V. 6. Gev. 3.

I. GEVOLG.

Een boog kan dan voor de maat van eenen hoek in het middelpunt gehouden worden, zoo lang men van den zelfden cirkel spreekt: en wij zullen die spreekwijze aannemen.

L. G. II. 17. Cor.

II. GEVOLG.

De maat van eenen hoek in den omtrek is de helft van den boog op welken hij rust: (1. Gev. en V. 5).

L. G. II. 18.

II. VOORSTEL. Fig. 157.

De bogen [DF, AG] van ongelijke cirkels, op welke gelijke hoeken [ACG, DCF], namelijk alle in den omtrek, of alle in het middelpunt, rusten, zijn onderling in de zelfde rede als de omtrekken waarvan zij deelen zijn. En omgekeerd, indien twee bogen van ongelijke cirkels tot elkander staan als de geheele omtrekken, zullen de hoeken in het middelpunt, of de hoeken in den omtrek, die op dezelven rusten, gelijk zijn.

Zie KOENIG Cor. 2. op EUCL. VI. 33.

BEWIJS. VOOR HET I. GEDEELTE. Uit N°. 3 van het I. Voorstel, en III. Axioma 4.

VOOR HET II, Uit het I, door het ongerijmde

I. GEVOLG.

Dus rusten, in ongelijke cirkels, gelijke hoeken op gelijkvormige bogen. (VII. 10. het 2. Gev.)

II. GEVOLG.

De bogen van twee ongelijke cirkels, op welke gelijke hoeken rusten, zijn als de omtrekken, of als de halve middellijnen dier cirkels, en deze als de choorden dier bogen (VII. 10. en IV. 2.).

St. VI. 22. Gevolg.

III. GEVOLG.

En omgekeerd, zoo bogen van ongelijke cirkels zijn als de geheele omtrekken, of de halve middellijnen, zullen de hoeken die op dezelve rusten gelijk zijn, en hunne choorden zullen zijn als de halve middellijnen.

IV. GEVOLG.

Dus zijn, in alle cirkels, de bogen de eigenaartige maat der hoeken in het middelpunt: en de halve bogen die van de hoeken in den omtrek.

V. GEVOLG.

De zelfde ſtralen ſnijden gelijkvormige bogen van de omtrekken van cirkels die om het zelfde middelpunt ſtaan.

Zie KOENIG 3. Cor. op EUCL. VI. 33.

VI. GEVOLG.

Het meten der hoeken in graden ſteunt op het voorgaand Gevolg, en op VII. 10.

I. AANMERKING. Volgens een oud gebruik, deelt men den omtrek des cirkels in 360 *graden*, en de *graden* wederom, door eene gedurige zestigdeelige verdeling, in *minuten*, *ſeconden*, *tiercen*, enz. zoo dat een graad 60 *minuten*, eene minuut 60 *ſeconden*, eene ſeconde 60 *tiercen* enz. bevat. Waaruit volgt, dat de regte hoek, of het vierde gedeelte des omtreks, 90 graden bevat, en de drie hoeken eens driehoeks te ſamen 180° uitmaken.

II. AANMERKING. Hierop, en op het vijfde Gevolg, ſteunen die inſtrumenten uit de Mathematiſche kokers, welke *Transporteurs* genoemd worden: en, in het algemeen, alle inſtrumenten hoegenaamd, welke tot het meten van hoeken dienen.

De *Transporteurs* zijn van tweederlei gedaante: te weten of *cirkelvormige*, of in de gedaante eens regthoeks: in beide is de rand in graden verdeeld (ſomtijds ook in halve graden): doch op de eerstgemelde zijn alle graden gelijk; op de laatstgemelde zijn zij ongelijk.

Zij Fig. 171. de halve cirkel AFKA de Transporteur: waarvan C het middelpunt, doorgaands op de lijn AK, door een ſtreepje aangeduid. De gelijke bogen AB, BD, DE, enz. duiden gelijke hoeken aan, ACB, BCD, DCE enz. en een dubbelde, een drievoudige boog, dubbelde, drievoudige hoeken.

Maar indien de Transporteur de gedaante heeft eens regthoeks *b*BI*i*; worden de graden op de zijden *b*B, BI, I*i* aangeduid door de ſlippen, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, alwaar de *radii* CB, CD, CE, CF, CG, enz. uit het middelpunt getrokken naar gelijke bogen AB, BD, DE, EF, FG des halven cirkels, waarin de regthoek *b*BI*i* ſtaat; en die dus op de zijden B*b*, BI, I*i*, niet dan ongelijke deelen B*d*, *de*, *ef*, *fg*, *gh*, *h*I, kunnen affnijden.

Het gebruik der beide werktuigen is het zelfde, en valt in het oog. Men legt de middellijn AK op eenen der beenen des hoeks, het middelpunt C op de kruin: de graad D bijv. of *d*, die het ander been CD aanduidt, toont aan hoe

hoe vele graden er in den hoek, of in den boog die deszelfs maat is, begrepen zijn.

III. AANMERKING. In latere tijden, en bij het daarstellen van het *decimaal stelsel van Maten en Gewigten*, heeft men voorgesteld den regten hoek, of het vierde van den omtrek, ook *quadrant* genoemd, niet in 90, maar in 100 *graden* te verdeelen, welke als dan door de Fransche Schrijvers *grades* genoemd worden, om ze van de gewone sexagesimale verdeeling, waarin de graden den naam van *degrés* dragen, te onderscheiden. Ieder van die 100 graden wordt niet in 60, maar in 100 *seconden*, en iedere van de nieuwe *seconden* niet in 60 maar in 100 *tiercen* verdeeld, en altijd zoo voort. LE GENDRE heeft die verdeeling in zijne *Géometrie* aangenomen: en ook DE GELDER in zijne Meetkunde. Men kan over de groote voordeelen van die nieuwe verdeeling, over de wenschen van vroegere Wiskundigen om eene dergelijke werkstellig gemaakt te zien, over de pogingen van beroemde Mannen om ze intevoeren, nagaan het geen ik gezegd heb in mijne *Verhandeling over volmaakte Maten en Gewigten*, §. 120. en volgende. In dit werk zullen wij de oude verdeeling behouden.

IV. AANMERKING. Gelijk men den omtrek des cirkels met den *radius*, of met de middellijn heeft vergeleken, en in deelen van deze heeft uitgedrukt: zoo ook heeft men den *radius* uitgedrukt in deelen van den omtrek, dat is in *graden* en *minuten*: en hiertoe dient het volgende

III. VOORSTEL.

De boog wiens lengte gelijk is aan den *radius*, bevat 57 *graden*, 17 *minuten*, 44,8 *seconden*.

BEWIJS. De halve omtrek staat tot den *radius* als 355 : 113: dat is $180^0 : r = 355 : 113$: en dus $r = \frac{180^0 \times 113}{355}$; waaruit het Voorstel volgt.

I. GEVOLG.

De *radius*, in seconden uitgedrukt, bevat 206,264''.8.

AANMERKING. De *radius* in *seconden* uitgedrukt, wordt aangeduid door r''.

II. GEVOLG.

Een boog, in deelen van den *radius* uitgedrukt, en als eenheid beschouwd, zal in seconden uitgedrukt worden als men denzelven door r'' multipliceert: en een boog in *se-*

conden uitgedrukt, zal tot deelen van den *radius* herleid worden als men denzelven door r'' divideert.

IV. VOORSTEL. Fig. 158.

Gelijkvormige cirkelſtukken [ABC, DEF] zijn die welke gelijke hoeken bevatten: en gelijkvormige *Sectoren* zijn die welke door ſtralen, gelijke hoeken bevattende, gevormd worden.

St. III. def. 11. prop. 13, 14, en VI. def. 7.

BEWIJS. VOOR HET I. Uit het I. Voorſtel toont men dat de bogen, op welke de hoeken ABC, en DEF rusten, zijn als de omtrekken: en dus uit III. 8., dat de bogen ABC en DEF het ook zijn, waaruit het Voorſtel door VII. 10. Gev. 3. volgt.

VOOR HET II. Uit de gelijkheid der hoeken, en dus de gelijkvormigheid der bogen, en hunne gelijke rede tot de ſtralen, (door het I. Voorſtel, en VII. 10. Gev. 2.).

AANMERKING. EUCLIDES ſtelt dit Voorſtel onder de *Axiomata* van zijn derde boek.

I. GEVOLG.

De bogen van gelijkvormige cirkelſtukken, of *Sectoren*, zijn als de ſtralen der cirkels, of als de choorden waarop die bogen rusten.

L. G. IV. 11. Cor.

II. GEVOLG.

En dus zijn de gelijkvormige cirkelſtukken, die op gelijke choorden ſtaan, gelijk.

EUCL. III. 24.

III. GEVOLG.

En gevolgelijk kan men op eene lijn, aan den zelfden kant, geen twee cirkelſtukken plaatſen, die gelijkvormig en tevens ongelijk zijn.

EUCL. III. 23. — St. III. 15.

IV. GEVOLG.

Gelijkvormige *Sectoren* en cirkelſtukken zijn in verdubbelde rede der choorden op welke zij ſtaan, of

der

der middellijnen van de cirkels tot welke zij behooren (IV. 27. en VII. 10. Gev. 3).

L. G. IV. 11. Cor. — TACQUET *Schol.* op EUCL. XII. 2. — St. VI. 28. Gev. 2, 3 en 29.

V. VOORSTEL. Fig. 157.

Bogen [A G, D E] van ongelijke cirkels, op welke ongelijke hoeken rusten, zijn in samengestelde rede der hoeken, en der stralen: en de hoeken zijn in samengestelde rede van de regte rede der bogen, en de omgekeerde rede der stralen.

BEREIDING. Men onderstelt de cirkels om het zelfde middelpunt te staan: en men verlengt C G in F.

BEWIJS. VOOR HET I ⌒ A G : ⌒ D F = C A : C D en ⌒ D F; ⌒ D E = ∠ D C F : ∠ D C E: I. Voorstel. derhalve ⌒ A G : ⌒ D E = C A × ∠ D C F : C D × ∠ D C E (III. 10).

VOOR HET II. Uit het eerste: en III. Ax. 5.

AANMERKING. Hoe wel dit Voorstel van veel gebruik is in de Sterrekunde, vindt men het echter bijna in geen *elementaire* boeken. Zie het bij LA CAILLE *Leçons d'Astronomie.* §. 124. en KRAFFT *Geometria sublimior.* § 107.

VI. VOORSTEL.

Sectoren van verschillende cirkels staan tot elkander in samengestelde rede der hoeken die zij uitmaken, en der vierkanten van de *radii* der cirkels waartoe zij behoren. En, indien de *Sectors* gelijkvormig zijn, zijn zij onderling als de vierkanten der middellijnen.

BEWIJS. Uit VII. 15. is *Sector* C D E : *Sector* C A G = ⌒ D E × C D : ⌒ A G × A C; maar ⌒ D E : ⌒ A G = ∠ D C E × C D : ∠ A C G × A C : dus *Sector* C D E : *Sector* C A G = ∠ D C E × CD^2 : ∠ A C G × AC^2.

KRAFFT *Geometria sublimior*, §. 107.

AANMERKING. De inhoud eens cirkelstuks [Fig. 122.] hangt van dien des *Sectors* af: want de inhoud van een cirkelstuk is gelijk aan het verschil of aan de som van dien des *Sectors* en dien des middelpunts, beide tot den boog van dat cirkelstuk behorende, naar mate het zelve [zoo als L K H L] kleiner, of [zoo als L P H L] grooter is dan de halve cirkel, en dus (VII. 15. Aanm. I. en IV. 9. Gev. 6) wordt een cirkelstuk uitgedrukt door $\frac{B \times r}{2} \mp \Delta\, LCH = \frac{B \times r}{2} \mp \frac{1}{2} LH.CI.$

Zie hier over nader het 8 Voorst. Gev. 2. van het IX. Boek.

VII. VOORSTEL. Fig. 119.

De maat eens hoeks [B A D], in het aanrakings ftip [A], door eene raaklijn [B A] en eene choorde [D A] gevormd, is de helft van den boog dien de choorde befpant.

L. G. II 19.

BEWIJS. Uit V. 8. en hier het II. Voorftel, 4. Gev.

VIII. VOORSTEL. Fig. 159, 160.

De maat eens hoeks [D A E] wiens kruin A niet op den omtrek des cirkels valt, is de helft van de fom, of van het verfchil, der bogen [D E, G H] op welke de beenen des hoeks, zoo noodig verlengd, rusten, naar mate de kruin binnen, of buiten, den cirkel valt.

L. C. §. 470.

BEREIDING. Men trekt H D.

BEWIJS. Uit I. 15. en hier het II. Voorftel, 4. Gev.

I. GEVOLG. Fig. 155.

Indien de kruin A zoodanig op de middellijn A C E genomen wordt, dat $AG = GC$ is, zal de hoek F A E het derde gedeelte zijn van den hoek gCE.

BEWIJS. $\angle A = \frac{1}{2} \frown gE - \frac{1}{2} \frown HG$: en $\angle GCA = \frown HG$: dus: $\frac{1}{2} \frown gE - \frac{1}{2} \frown HG = \frown HG$: of $\frown gE = 3 \frown HG$ en dus $\angle gCE = 3 \angle GCH = 3 \angle A$.

I. AANMERKING. Indien er dan een middel was om, een boog gE, of een hoek gCE, gegeven zijnde, eene fnijlijn F G A zoodanig te trekken in een' cirkel waarvan gC de *radius* is, dat het ftuk buiten den cirkel gelijk zij aan den *radius*, zoude het zeer gemakkelijk vallen eenen hoek in drie gelijke deelen te verdeelen: doch het is niet mogelijk zoodanige lijn door middel van den cirkel en van de regte lijn alléén, dat is, in den ftrikften zin *geometrisch*, te trekken.

VIETA heeft het vraagftuk van de verdeeling eens hoeks in drie deelen tot dit Voorftel gebragt (*Operum*, p. 245): en dit komt volmaakt overeen met het geen wij gezegd hebben, Boek I. 29. Aanm. 2.

II. GEVOLG. Fig. 123.

Zoo de kruin F des hoeks G F D, binnen den cirkel valt, waarin een der beenen van den hoek de diameter F C N des cirkels is; al verder, zoo die hoek zoodanig gefteld wordt, dat de choorde D G gelijk is aan F D, zal de boog D G het derde gedeelte zijn des boogs A B G D.

BE-

BEWIJS. Om dat $GD = FD$: is $\angle GFD = \angle FGD$ (I. 27.) d. i. $\frac{\frown AN + \frown GD}{2} = \frac{\frown NED}{2}$: en $\frown AN + \frown GD = \frown NED$: derhalve $\frown AN + 2 \frown GD = \frown NED + \frown DG = \frac{1}{2}$ *Omtr.*: maar $\frown AN + \frown ABG = \frac{1}{2}$ *Omtr.*: derhalve $\frown AN + 2 \frown GD = \frown AN + \frown ABG$: of $2 \frown GD = \frown ABG$ en $3 \frown GD = \frown ABG + \frown GD = \frown ABGD$.

II. AANMERKING. Derhalve een gegeven boog AD zoude in drie deelen gedeeld kunnen worden, indien men eene middellijn ND *geometrisch* zoodanig ſchikken kon, dat de choorde DG gelijk wordt aan FD, het ſtuk dat van de choorde AD des gegeven boogs door die middellijn wordt afgeſneden.

Ik heb deze oplosſing gevonden in eenen brief in 1654 door KINNER uit Praag aan HUYGENS geſchreven.

VIII*. VOORSTEL. Fig. 160.

De maat van den uitwendigen hoek [LKI], in den omtrek gemaakt door eene choorde [LK] en eene verlengde ſnijlijn [FI] is de helft van de ſom der bogen [LK en KF] die gemelde lijnen wederzijds van het ſnijpunt beſpannen.

BEREIDING. Men trekt LF.

BEWIJS. Uit I. 15. en hier het II. Voorſtel. 4. Gev.

II. AFDEELING.

VAN HET METEN EN BEREKENEN DER HOEKEN EN BOGEN DOOR CHOORDEN, SINUSSEN, TANGENTEN EN SECANTEN.

I. BEPALINGEN EN ALGEMEENE EIGENSCHAPPEN.

I. BEPALING. Fig. 172.

Men noemt *complement* van een' boog [DB] den boog [GD] dien men bij den boog [DB] voegen moet om het vierde gedeelte van den omtrek des cirkels uittemaken: en *ſupplement* den boog [AGD] dien men er moet bijvoegen om den halven omtrek uittemaken.

Insgelijks: men noemt *complement* van een' hoek [DCB], den

den hoek [GCD] dien men bij denzelven voegen moet, om een' regten hoek te verkrijgen: en *fupplement* den hoek [ACD], die er bijgevoegd moet worden om twee regten uittemaken.

St. VII. d. 2, 3.

I. AANMERKING. De woorden *complement* en *fupplement* beteekenen beide *bijvoegfel*, of *aanvulfel*. Het gebruik heeft gewild dat het eene *aanvulfel tot het vierde gedeelte des omtreks*, het ander *tot den halven omtrek* zoude beteekenen.

GEVOLG.

Indien men eenen boog, of hoek (dat is het getal graden dat derzelver grootte aanduidt) van 90° en van 180° aftrekt, verkrijgt men het *complement* en het *fupplement*.

II. AANMERKING. Daar de bogen de maat der hoeken zijn (Voorft. II. Gev. 4.) moet men in het vervolg door vierde gedeelte van den omtrek, of door halven omtrek, éénen regten hoek, of twee regte hoeken, verftaan: en 't geen men van bogen zeggen zal ook op hoeken toepasfen, en omgekeerd.

II. BEPALING.

Men noemt *choorde* eens boogs de lijn [DB], die beide de uiterften des boogs veréénigt: zij onderfpant, wel is waar, zoo wel den boog [ADB] die met den voorgaanden [DB] den geheelen omtrek uitmaakt, als dien boog [DB] zelven: doch men verftaat altijd, ftilzwijgend, alleen den boog die kleiner is dan de halve omtrek (*).

III. BEPALING.

Men noemt *finus* (of *hoekmaat*) eens boogs [DB], de loodlijn [DI] die van een zijner uiteinden nedergelaten wordt op de middellijn [BA], welke door het ander einde [B] gaat. En die zelfde loodlijn is ook de *finus*, of hoekmaat, van den hoek [DCB], waarvan de boog [DB] de maat is.

St. VII. def. 4. — L. G. *Trig.* §. 5.

I.

(*) Deze bepaling is hier, gemakshalve, uit de I. Bepaling van het V. Boek, herhaald.

I. GEVOLG.

De *ſinus* eens boogs is ook de *ſinus* van het ſupplement.

L. G. Tr. §. 10.

II. GEVOLG.

Hoe grooter de boog is hoe grooter de *ſinus* is, tot dat men eenen boog van negentig graden, of een vierde gedeelte van den omtrek, heeft: dan is de *ſinus* gelijk aan den *radius*; waarom ook de *radius* de *geheele ſinus* (*ſinus totus*) genoemd wordt. De *ſinusſen* [bijv. NP] van bogen [BGP] die grooter zijn dan 90 graden zijn wederom kleiner, en de *ſinus* van 180°. is nul.

AANMERKING. Indien men nog verder dan den halven cirkel wilde gaan, bij voorbeeld tot den boog [BGAM], zoude de *ſinus* NM zijn, de zelfde als voor BK, dat is voor het verſchil tusſchen den gegeven boog en den halven omtrek: doch dan valt de *ſinus* onder de middellijn, en dus aan het tegengeſtelde van den kant waarop men de *ſinusſen* der bogen tot 180 gr. toe genomen heeft. Indien men zich herinnert wat wij (III. 22. Aanm. 2.) van *negatieve* grootheden en derzelver aard gezegd hebben, zal het blijken, dat die *ſinusſen negatief* zijn: dus is *ſinus* $0° = 0$: *ſinus* $90° = r$: *ſinus* $180° = 0$: *ſinus* $270° = -r$: *ſinus* $360° = 0$ en zoo voorts.

L. G. Tr. §. 7, 8, 9.

IV. BEPALING. Fig. 172.

Men noemt *coſinus* of *mede-hoekmaat*, ook *ſchilboogs hoekmaat*, en meest *ſinus-complement*, van een' boog [DB] of van een' hoek [DCB], den *ſinus*, of hoekmaat, [HD] van zijn complement: of, wat op het zelfde uitkomt, het gedeelte [CI] van den *radius*, dat tusſchen het middelpunt des boogs, of den top des hoeks, en de ontmoeting van den *ſinus* bevat is.

St. VII. def. 6. — L. G. Tr. §. 6.

I. GEVOLG.

De *coſinus* is kleiner naar mate de boog of hoek grooter is: die van een' boog van 90 gr., of van een regten hoek, is *nul*: hij wordt grooter, en komt nader aan den *radius*, naar mate de boog kleiner wordt en dus nader

 aan

aan o graden komt. Dus is *cofinus* o°. gelijk aan den *radius*.

II. GEVOLG.

De *cofinus* eens hoeks of boogs is ook de *cofinus* van zijn fupplement.

AANMERKING. [Fig. 172.] Indien men zich het geen wij III. 22. Aanmerking 2. over den aard der *negatieve* grootheden gezegd hebben herinnert, blijkt het dat de *cofinusfen* van bogen tusfchen de 90° en 270° altijd *negatief* zijn: want men begint ze van C af te tellen: en dus voor de bogen van C af tot B toe naar den kant GB: doch voor de bogen van C door G tot A, naar den kant GA, en dus aan den anderen kant van het begin, of van den oorfprong, der telling: het geen juist het denkbeeld van eene *negatieve* grootheid uitmaakt: dus is *cofinus* 0° = *r*: *Cof.* 90° = o: *Cof.* 180° = — *r*: *Cof.* 270° = o: *Cof.* 360° = *r*.

Deze aanmerking is van gewigt: om dat men veeltijds uit het teeken + of — moet beoordeelen, of een berekende *cofinus* tot een' boog die kleiner dan 90°, of tot deszelfs fupplement, dus tot een' boog die grooter dan 90° is, behoort.

V. BEPALING. Fig. 172.

Men noemt *finus-verfus*, *verkeerde finus*, of *pijl*, het gedeelte [BI] van den *radius* dat tusfchen het eene einde des boogs, en den *finus*, begrepen is.

St. VII. def. 7.

GEVOLG.

De *finus-verfus* is dus gelijk aan het verfchil van den *cofinus* en den *radius* voor hoeken, of bogen, die kleiner dan 90 graden zijn: doch voor hoeken of bogen die grooter dan 90 graden zijn, dat is voor de fupplementen der eerstgemelden, is de *finus-verfus* [AI] gelijk aan de fom van den *radius* [AC] en den *cofinus* [CI].

AANMERKING. De *finus-verfus* is dus altijd *pofitief* tot 180° toe, omdat hij altijd naar den zelfden kant geteld wordt, groeijende van o tot + *r* en + 2 *r*.

VI. BEPALING. Fig. 172.

Men noemt *tangent* eens hoeks of boogs, dat gedeelte [BE]

[BE] van de onbepaalde raaklijn, het welk begrepen is tusſchen het ſtip van aanraking [B], en de ontmoeting [E] van den verlengden *radius*, die door het ander eind [D] van den boog gaat.

St. VII. Bep. 8. — L. G. Tr. §. 5.

GEVOLG.

De *tangent* wordt dus grooter naar mate de boog of hoek grooter wordt: doch de *tangent* eens boogs van 90 graden, kan den *radius*, die door het andere einde des boogs gaat, niet ontmoeten, om dat hij evenwijdig aan denzelven is: en dus is de *tangent*, in dat geval, onbepaald groot, of, gelijk Wiskundigen gewoon zijn te ſpreken, *oneindig*. Doch de *tangenten* van hoeken, die grooter dan 90° zijn, zijn gelijk aan de *tangenten* der bogen of hoeken waarvan zij *ſupplementen* zijn.

L. G. Tr §. 12.

AANMERKING. Indien men op het laatste gedeelte van dit gevolg let, zal men indedaad zien, dat, zoo de boog BG grooter is dan 90°, bijv. BGP, de *radius* CP nimmer de raaklijn BE boven de middellijn raken kan: maar indien men PC onder den diameter tot in Q verlengt, zal BQ, volgens de bepaling, de *tangent* van boog BK zijn: nu is BQ = EB = *tangent* van den boog DB, die het ſupplement is van boog PGD.

En indien men al verder let op het geen wij in het III. Boek, XXII. Voorſtel, Aanm. 2. gezegd hebben, over den aard der *negatieve* grootheden, blijkt het, dat BQ als *negatief* beſchouwd moet worden: en dus is *Tangens* 0° = 0: *Tang.* 90° = oneindig: *Tang.* van een' boog grooter dan 90° *negatief*: *Tang.* 180° = 0: *Tang.* boog grooter dan 180° tot 270° *poſitief*: *Tang.* 270°. oneindig: *Tang.* boog grooter dan 270° tot 360° *negatief*. *Tang.* 360° = 0.

Wij zullen in het vervolg (Aanm op Voorſtel XIX.) zien, hoe dit met het geen wij van *poſitieve* en *negatieve ſinusſen* en *coſinusſen* gezegd hebben, overeenkomt.

VII. BEPALING. Fig. 172.

De *Cotangent* [GF] of *mede-raaklijn*, ook *tangent-complement* genoemd, is de *tangent* van het complement eens gegeven boogs, of hoeks.

St. VII. def. 9.

GE-

GEVOLG.

De *Cotangent* wordt dus kleiner naar mate de hoek grooter is: is *nul* voor een' regten hoek, *oneindig* voor den hoek dien men zoude begrijpen *nul* te zijn.

AANMERKING. Het geen wij voor het *positieve* of *negatieve* van den *tangent* gezegd hebben, heeft ook voor den *cotangent* plaats.

VIII. BEPALING. Fig. 172.

De *Secant* of *snijlijn* [CE] van een' boog of hoek, is de *radius* tot aan de *tangent* verlengt.

St. VII. def. 8. — L. G. Tr. §. 5.

GEVOLG.

De *secant* is dus grooter naar mate de hoek grooter is: die van een' boog of hoek van 90 gr. is *oneindig*: doch de *secanten* van bogen die grooter dan 90° zijn, zijn de zelfde als de *secanten* der bogen, of hoeken, die kleiner dan 90° zijnde, de supplementen van de eerstgemelde zijn.

AANMERKING. Het geen wij over het *positieve* of *negatieve* van de *tangenten* gezegd hebben, heeft op de zelfde wijze voor *secanten* plaats.

IX. BEPALING. Fig. 172.

Cosecant [CF], *of mede-snijlijn*, ook *secant-complement* genoemd, is de *secant* van het *complement*.

GEVOLG.

De *Cosecant* wordt kleiner naar mate de boog grooter wordt: die van 90° is *nul*: die van eenen boog, welken men begrijpen zoude nul te zijn, is *oneindig*.

AANMERKING. Het geen wij van het *positieve* en *negatieve* van de *secanten* gezegd hebben, heeft hier even eens plaats.

X. BEPALING.

Alle de opgenoemde lijnen, choorden, *sinus*, *cosinus*, *tangent*, *cotangent*, *secant*, *cosecant*, *sinus-versus*, worden thans onder den algemeenen naam van *goniometrische lijnen* begrepen, dat is van lijnen ter hoek-meting geschikt.

AAN-

AANMERKING. De eigenſchappen der *choorden*, *ſinusſen*, *tangenten* en *ſecanten*, worden ten vollen door de Meetkunde bewezen, en uit de eigenſchappen van den cirkel en van gelijkvormige driehoeken afgeleid: en in zoo verre behooren die lijnen tot de Meetkunde zelve. Doch de Wiskonstenaars gaan verder; zij vergelijken de hoegrootheid dier lijnen met den *radius*, en drukken dezelve door getallen uit. Dit gaat buiten de palen van het geen de Ouden, in den ſtrikſten zin, Meetkunde noemden: vooral daar de *choorden*, *ſinusſen*, *tangenten* en *ſecanten*, alle (op vier na, *choorde* 60°, *ſinus* 30°, *tangens* 45° en *ſecans* 60°) door onmeetbare getallen, en dus ſlechts ten naasten bij, kunnen worden uitgedrukt.

Dan, daar wij nu over die lijnen, meer bepaaldelijk, ten nutte van de praktijk ſpreken zullen, en wel met oogmerk om aantetoonen, hoe men derzelver grootheid berekent, zullen wij geen zwarigheid maken, de verkorte uitdrukkingen, in het IV. Boek, IX. Voorſtel, Gevolg 2. uitgelegd, te gebruiken: en van het *product* van twee lijnen te ſpreken, om den regthoek, door dezelve gemaakt, aan te duiden. Ons XIII. Voorſtel, bij voorbeeld, zoude, volgens de ſtrikte ſpreekwijze der Ouden, welken wij tot nu toe in acht genomen hebben, dus uitgedrukt worden: „ de regthoek uit de choorde, die de ſom van twee bogen beſpant, en de middellijn, is gelijk aan de ſom der regthoeken uit de choorde van elken boog, met de choorde van het ſupplement des anderen boogs." De volgende Voorſtellen konden op de zelfde wijze uitgedrukt worden. Hoe wel nu deze uitdrukkingen, misſchien, meer in den ſmaak der Ouden zouden vallen, verkiezen wij de andere te gebruiken, die korter zijn, en meer onmiddelijk in de berekeningen te pas komen; vooral daar wij dezelve zeer naauwkeurig uitgelegd, en tevens aangetoond hebben, hoe zij in de daad uit de ſtriktſte bewijzen der Meetkunde zelve afgeleid worden. Wij hebben daarin te minder zwarigheid gemaakt, daar EUCLIDES en ARCHIMEDES zelve ze gebruikt hebben, zoodra het op het rekenen in getallen aankwam, zoo als duidelijk blijkt uit het VII. en X. Boek van EUCLIDES, waarvan wij verſcheiden plaatſen hebben aangehaald, en uit het werk van ARCHIMEDES over den cirkel. Dit zij over onze manier van handelen in de volgende Voorſtellen genoeg.

IX. VOORSTEL. Fig. 172.

De reden van choorden [DB en *db*], *ſinusſen* [DI en *di*], verkeerde *ſinusſen* [BI en *bi*], *tangenten* [BE en *be*], *b e*], *ſecanten* [CE en C*e*], *coſinusſen* [CI en C*i*], *cotangenten* [GF en *gf*], *coſecanten* [CF en C*f*] van gelijke hoeken, of van bogen die gelijke hoeken beſpannen, en dus gelijkvormig zijn, tot den *radius*, zijn in alle cirkels, welke ook derzelver grootte zijn moge, de zelfde.

BEWIJS. Uit de gelijkvormige driehoeken, door IV. 2.

GEVOLG.

De *choorden*, *ſinusſen*, *tangenten*, *ſecanten*, zijn dus ook eene ware *maat* van de bogen en van de hoeken: en, welke ook de grootte van den *radius* zijn moge, worden die *choorden*, *ſinusſen*, *tangenten*, *ſecanten*, altijd door het zelfde getal deelen van dien *radius* uitgedrukt.

X. VOORSTEL.

De laatſte rede van den boog, van de choorde, van den *ſinus* en van den *tangent* is die van gelijkheid: die van den *coſinus* en van den *ſecant* is de *radius*: de middellijn is die des *coſinus* van het ſupplement eens boogs.

BEWIJS. Uit VII. 3. om dat de boog de limiet is van choorde, *ſinus* en *tangent*: de *radius* die van *coſinus* en *ſecant*: en de middellijn is de limiet van den *coſinus*-*ſupplement*, of van den *coſinus* van 180°.

I. GEVOLG.

De *ſinusſen* en *tangenten* van zeer kleine bogen volgen zeer ten naasten bij de rede van de bogen zelve: en hoe kleiner die bogen zijn hoe naauwkeuriger die gelijkheid van rede plaats heeft.

II. GEVOLG.

De boog van 1″ is klein genoeg om den *ſinus* te houden voor gelijk aan den boog zelven: of *ſinus* 1″ $=$ ⌒ 1″: en derhalve (Voorſt. III. Gev. 1 en 2.) de *radius* in ſeconden uitgedrukt $= \frac{1}{\text{ſin. } 1''}$.

AANMERKING. De boog van ééne ſeconde indien de *radius* door 1 wordt uitgedrukt, is

0.00000,4848,1368,11

deszelfs *ſinus* 0.00000,4848,1368,09.

De boog zelfs van 1′ verſchilt al zeer weinig van zijnen *ſinus*: want dezelve is

0.00029,088820,8666

en deszelfs *ſinus* 0.00029,088820,4563.

III. GEVOLG.

Indien dan een boog B zeer klein is, is $B = \textit{ſin.}\ B$; en dus $\frac{\textit{ſin.}\ B}{B} = 1$: en indien $B = x - y$, is $\frac{\textit{ſin.}\ (x-y)}{x-y} = 1$: d. i. hoe kleiner het verſchil van twee bogen is, hoe nader de *ſinus* van den boog welke dat verſchil uitdrukt, gedivideerd door dien boog zelven, aan de eenheid komt: indien $x = y$ of $x - y = 0$, heeft zulks plaats.

IV. GEVOLG.

Insgelijks indien B zeer klein is, is $\frac{\textit{tang.}\ B}{B} = 1$. en $\frac{\textit{tang.}\ (x-y)}{x-y} = 1$.

V. GEVOLG.

Ook is, zoo B zeer klein is, $\frac{\text{choorde } B}{B} = 1$. en $\frac{\text{choorde } (x-y)}{x-y} = 1$.

D. G. *Handleiding*, §. 969.

II. EIGENSCHAPPEN EN BEREKENING DER CHOORDEN.

XI. VOORSTEL. Fig. 156.

Indien twee ongelijke bogen van den zelfden cirkel gegeven zijn ($\frown BG$, $\frown AB$) zal de choorde van den grootſten eene kleiner rede hebben tot de choorde van den kleinſten, dan de grootſte boog tot den kleinſten.

BEREIDING. Zij de lijn BD, die den hoek ABG in twee gelijke deelen deelt: men trekke AG, DA, DG: en uit D, DZ $\perp$ op AG. Men beſchrijve uit D met den *radius* DE eenen cirkelboog die de verlengde DZ ſnijdt in T, en DA in H.

BEWIJS. Om dat $\angle DBG = \angle ABD$: is $DG = AD$: en om dat $BG > AB$ is $EG > AE$: Maar *ſector* $ETD > \Delta DEZ$: en $\Delta DEA >$ *ſector* HDE; derhalve $\Delta DEZ : \Delta DEA <$ *ſector* DET: *ſector* DEH: maar $\Delta DEZ : \Delta DEA = EZ : EA$: derhalve $EZ : EA <$ *ſector* DET: *ſector* DEH, $< \angle EDZ : \angle EDA$: en *componendo*.

$EZ + EA$ (of AZ): $EA < \angle ZDA : \angle EDA$: en dus ook om dat $AD = DG$: en $AZ = ZG$; $2\,AZ$ (of GA): EA

$<$

$<$ ∠ GDA: ∠ EDA: en *dividendo* GA — EA: EA $<$ ∠ GDE: ∠ EDA: maar GE: EA = GB: BA: en dus ∠ GDE of ∠ GDB: ∠ EDA = ⌒ BG: ⌒ AB: en derhalve GB: BA $<$ ⌒ BG: ⌒ AB.

AANMERKING. Dit Voorſtel is van PTOLEMAEUS, die het, even als de twee volgende in zijn *Almagestum*, I. Boek, Hoofdſt. IX. heeft voorgedragen.

GEVOLG.

De choorde eens boogs ſtaat dan tot de choorde van eenig gedeelte deszelven, bijv. het $\frac{1}{m}$, in kleinere rede dan $m : 1$: en dus is de choorde van $\frac{1}{3}$ gedeelte van den boog grooter dan het $\frac{1}{3}$ gedeelte van de choorde des geheelen boogs.

XII. VOORSTEL. Fig. 132.

Het vierkant der middellijn is gelijk aan de ſom der vierkanten van de choorde eens boogs, en van de choorde van het ſupplement

dat is, $\overline{AB}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{BE}^2$.

BEWIJS. Uit V. 7. en II. 16.

GEVOLG.

De middellijn van den cirkel, en de choorde eens boogs gegeven zijnde, vindt men gemakkelijk de choorde van het *ſupplement*

dat is, $\overline{AE}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BE}^2$.

I. AANMERKING. De choorde van eenen boog van 60°. is de zijde van den regelmatigen zeshoek in den cirkel beſchreven (VI. 8. Gev 2.), en is dus gelijk aan den *radius*. Alle andere choorden worden gevonden met den wortel uit getallen te trekken: doch deze zijn geen quadraat-getallen: en dus vindt men die choorden ſlechts bij nadering.

II. AANMERKING. Hierop, dat namelijk de choorde van 60 gr. gelijk is aan den *radius*, ſteunt het gebruik van die lijnen op den *proportionaal-pasſer* welke met de letter C, of het woord *choorde*, beſtempeld zijn. Zij dienen om de choorden van alle hoeken, of bogen, gemakkelijk te vinden; en omgekeerd, om uit de grootte der choorde de hoeken optemaken. De afſtand van het begin der ſchaal (dat is op den *proportionaal-pasſer* van het middelpunt deszelven af) tot

tot 60, is de choorde van 60 gr., en dus de *radius*. Het gebruik is gevestigd op IV. 2.

Men vindt ook dergelijke lijnen van choorden op de *pleinſchalen*: derzelver gebruik is bepaald tot den *radius* van de ſchaal, daar de *proportionaal-pasſer* voor alle mogelijke *radii* dient.

III. AANMERKING. De lijn der choorden dient ook om de zijden van de regelmatige veelhoeken, met betrekking tot den *radius*, te vinden: die zijden immers zijn de choorden der *middelpuntshoeken*. De lijn der choorden is zelfs tot die verrigting ruim zoo geſchikt als die der *polygonen*.

IV. AANMERKING. Op de pleinſchalen ſtaat de lijn der choorden meestal in verband met eene lijn gemerkt R, of met het woord *Rhumb*, en in 8 grootere deelen, en vervolgens ieder deel in vier onderdeelen, verdeeld. Het achtſte valt op 90°. Deze dient voor de zeelieden om de *Rhumbs*, of *compasſtreeken*; en daar door hunnen koers, gemakkelijk in hunne figuren, of kaarten, over te brengen. Het vierde gedeelte des omtreks van den cirkel bevat 8 ſtreeken; iedere ſtreek is dus een hoek van 11¼ gr.: ook komt de eerſte ſtreek op de lijn R overeen met 11¼ op de lijn der *choorden*; de tweede met 22½ enz.

XIII. VOORSTEL. Fig. 140.

De choorde [DB] van de ſom van twee boogen [AD, AB] is gelijk aan de ſom der producten van iedere choorde met de choorde van het ſupplement des anderen boogs gemultipliceerd, en door de middellijn gedivideerd, dat is,

$$DB = \frac{AB \times DI + AD \times IB}{AI}.$$

BEREIDING. Men trekt de middellijn IA: en de ſupplement-choorden BI, DI: dan is ABID een vierhoek in den cirkel beſchreven, waarvan DB de eene diagonaal en de middellijn AI de andere diagonaal is.

BEWIJS. Uit VI. 7. welk Voorſtel, het Voorſtel van PTOLEMAEUS genoemd, indedaad met dit overeenkomt, zoo men voor de regthoeken de producten der lijnen, dat is de producten der getallen die de lengte der lijnen uitdrukken, ſtelt: en ook PTOLEMAEUS heeft dit Voorſtel gebruikt om de choorden te berekenen.

I. GEVOLG.

Wanneer dus de choorden van twee bogen bekend zijn, kan men de choorde van de ſom dier bogen vinden: want men berekent eerst door het XII. Voorſtel, Gev. de choorden der fupplementen, en dan door dit Voorftel de gevraagde choorde der fom; en ook dit is door PTOLEMAEUS verrigt.

II. GEVOLG.

De choorde eens boogs, die het dubbeld is van een' gegeven boog, is gelijk aan het product der choorde van den boog door de choorde van het fupplement gemultipliceerd, en door den *radius* gedivideerd; dat is, zoo AB = AD, is

$$DB = \frac{AB \times DI}{\frac{1}{2} AI}.$$

III. GEVOLG.

Op de zelfde wijze vindt men de choorde van eenen drievoudigen, vijfvoudigen, enz. boog; met door ons Voorftel en door het II. Gevolg, de choorde te berekenen van den boog die de fom is van den enkelen en den dubbelden, vervolgens van den dubbelden en den drievoudigen, enz.

IV. GEVOLG.

De choorde AB van het verfchil van twee bogen ($\frown$ DAB en $\frown$ DPA) is

$$AB = \frac{AI \cdot DB - AD \cdot IB}{DI}.$$

BEWIJS. Het volgt onmiddelijk uit dit Voorftel: en het is ook door PTOLEMAEUS verrigt.

XIV. VOORSTEL. Fig. 143.

De choorde eens boogs [I*n*E] die de helft is van een' gegeven boog [FIE] is gelijk aan den vierkants-wortel van het product uit den *radius* [CE] en het verfchil [QE] van de middellijn en de choorde [TE] van het fupplement des gegeven boogs [FIE]: dat is, $IE = \sqrt{CE \times [TE - TF]}$.

BEWIJS. De choorde van een' boog is altijd de zijde van eenigen veelhoek: dus is de choorde van den halven boog de zijde des veelhoeks die eens zoo veel zijden heeft: en gevolgelijk is dit Voorftel het vermaard Voorftel van PTOLEMAEUS door ons in het XXVI. Voorftel van het VI. Boek bewezen.

GEVOLG.

Men kan derhalve de choorden berekenen van alle de bogen, die door eene gedurige verdeeling in twee gelijke deelen voorkomen: en die rekening wordt nog gemakkelijker gemaakt door het Voorftel van SNELLIUS dat het Gevolg is van het XXVI. Voorftel des VI. Boeks.

I. AANMERKING. Men kan de choorde van de helft eens gegeven boogs nog op eene andere wijze vinden.

Want, daar $FI = IE$ is, zij CK loodregt op FE, en dus $KE = \frac{1}{2} FE$: maar $CK = \sqrt{\overline{CE}^2 - \overline{EK}^2}$; $KI = CI - CK$, $IE = \sqrt{\overline{KE}^2 + \overline{KI}^2}$: en ſtellende voor KI^2, de waarde genomen door (II. 3. Gev. 3.) uit $[CI - CK]^2$; is $IE = \sqrt{KI \cdot BI}$: zijnde KI de helft van ZI: en $ZI = BI - BZ = BI - BL$: het geen is het Voorſtel van PTOLEMAEUS voor de choorde van den boog $[I\,n\,E]$, die de helft is van den gegeven boog $[IEL]$.

II. AANMERKING. Men kan dus gemakkelijk de choorden van alle hoeken of bogen berekenen: want die van $60°$ is gelijk aan den *radius*: en door de verdeeling in twee deelen, vindt men die van $30°$; $15°$; $7°, 30'$; $3°, 45' = 225'$: dan die van een vijfde gedeelte van $225'$ of van $45'$: dan die van een derde gedeelte van $45'$ of van $15'$: wederom die van een vijfde gedeelte of van $3'$: wederom die van een derde gedeelte of van $1'$. Om de choorden van bogen te vinden die het derde, of het vijfde, gedeelte zijn eens gegeven boogs, gebruikt men eene ſoort van *valſche poſitie*: de choorde van het derde gedeelte van een' boog is iets grooter dan het derde gedeelte van de choorde des gegeven boogs (Voorſtel XI. Gev): men neemt dan een getal dat iets grooter is dan het gemelde derde gedeelte, en gebruikt dit als of het de ware choorde was: die choorde aannemende berekent men de choorde van den drievoudigen boog (door het XIII. Voorſt. Gev. 3.) welke dus de gegeven choorde zijn moet: zoo er eenig verſchil is, maakt men dezen regel van drieën:

De gevonden choorde ſtaat tot het getal dat men geſteld heeft voor de choorde van het derde deel des boogs, als de ware choorde van den gegeven boog tot de ware choorde van het derde gedeelte: en deze regel ſteunt hierop, dat voor bogen die weinig van elkander verſchillen, de aanwas der choorden de zelfde rede als die der bogen volgt, gelijk reeds uit de Theorie der limieten is op te maken, en verder in ons XXI. Voorſtel Gev. 6. blijken zal.

Indien men dan de choorde van $7°. 30'$ heeft, kan men op die wijze de choorde van het derde gedeelte, of van $2°. 30'$. zoeken: en dan van het 5. gedeelte van $2°. 30'$ of van $30'$: en dan van het derde gedeelte, of van $10'$: en dan van het vijfde gedeelte of van $2'$: en dan van de helft of van $1'$: waaruit men alle andere choorden vindt.

Men kan hier over nazien DEPARCIEUX *Nouveau Traité*

de

de Trigonométrie, p. 4—12: die deze zaak uitmuntend behandeld heeft.

III. AANMERKING. PTOLOMAEUS is de eerste Schrijver, welke ons de eigenschappen der choorden op die wijze heeft doen kennen, en Tafels van choorden berekend heeft, van halve tot halve graden, beginnende met 30′ en eindigende met 180°. Hij verdeelde den *radius*, volgens de gewoonte van dien tijd, in 60 deelen: en ieder dezer deelen wederom in 60, en altijd zoo voort volgens de *sexagesimale* verdeeling. DE LAMBRE heeft de berekeningen van PTOLOMAEUS zeer naauwkeurig bevonden. Men gebruikte de choorden en derzelver Tafels toen de *sinussen* en *tangenten* nog niet bekend waren. Nu gebruikt men alleen deze, welke aan de Grieken onbekend waren: het zal uit het XV. Voorstel blijken dat men de *sinussen* uit de choorden, en wederkerig deze uit gene kan opmaken.

III. EIGENSCHAPPEN EN BEREKENING DER SINUSSEN EN SINUS VERSUS.

XV. VOORSTEL. Fig. 172.

De *sinus* [DI] van eenen boog [BD] is de helft van de choorde [DK] eens dubbelden boogs [DBK]: en de choorde eens boogs is tweemaal de *cosinus* van het halve supplement.

TACQUET *Trigon. Lemma.* p. 335. — L. G. *Trigon.* §. 15.

BEWIJS. VOOR HET I. Uit V. 6. en de derde Bepaling.

VOOR HET II. Uit het I. is choorde B $=$ 2 *sin.* $\frac{1}{2}$ B $=$ 2 *cos.* $(90° - \frac{1}{2}\,B) = 2\ cos. \left(\frac{180 - B}{2}\right) =$ *cos.* halve *supplement* B.

I. GEVOLG.

Men kan dan de *sinussen* uit de choorden, en omgekeerd, de choorden uit de *sinussen* opmaken.

II. GEVOLG.

De *sinus* van den hoek, of boog, van 30°, en derhalve ook de *cosinus* van den hoek, of boog, van 60°, is de helft van den *radius*, of van den *sinus* van 90° (Bep. 3. Gev. 2.) d. i. van het vierde gedeelte des omtreks.

St. VII. 2.

AANMERKING. Hierop steunen, op de *proportionaal-passers*, en en ook op de pleinſchalen, de lijnen welke den naam van *ſinus* dragen, of met eene groote S beſtempeld zijn. Zij dienen om de hoeken door middel van den *ſinus* te beſchrijven: of den *ſinus* voor eenen gegeven hoek, en voor eenen bepaalden *radius*, optemaken.

III. GEVOLG.

De zijde van een' veelhoek in den cirkel beſchreven, is het dubbeld van den *ſinus* des halven middelpuntshoeks: zoo dat men die zijden zeer gemakkelijk vinden kan, wanneer de *ſinusſen* van alle bogen met genoegzame naauwkeurigheid berekend zijn.

XVI. VOORSTEL.

De *ſinus* van een' grooteren boog heeft tot dien van een kleineren boog eene kleinere rede dan de grootſte boog tot den kleinſten.

BEWIJS. Zij A de grootſte boog, en a de kleinſte: dan is (Voorſt. XV.) *ſin.* A $=\frac{1}{2}$ choorde 2 A, en ſin. $a = \frac{1}{2}$ choorde 2 a. Maar choorde 2 A: choorde 2 a < 2 A: 2 a < A: a (Voorſt. XI): dus *ſin.* A: *ſin.* a < A: a.

GEVOLG.

De *ſinusſen* groeijen aan, of nemen af, in kleinere rede dan de bogen tot welke zij behooren: naar mate de bogen grooter zijn, wordt het verſchil grooter: doch het is voor zeer kleine bogen onmerkbaar.

XVII. VOORSTEL. Fig. 172.

De ſom der vierkanten van den *ſinus* en van den *coſinus* eens boogs, is gelijk aan het vierkant van den *radius*: dat is.

$$r^2 = \overline{\mathit{ſin.}}^2 + \overline{\mathit{coſ.}}^2.$$

L. G. Tr. §. 16.

BEWIJS. Uit II. 16.

I. GEVOLG.

Wanneer de *radius* en de *ſinus*, of de *coſinus*, gegeven zijn, vindt men gemakkelijk den *coſinus* of den *ſinus*: want

$$\overline{\mathit{ſin.}}^2 = r^2 - \overline{\mathit{coſ.}}^2 = (r + \mathit{coſ.})\,(r - \mathit{coſ.})$$
$$\overline{\mathit{coſ.}}^2 = r^2 - \overline{\mathit{ſin.}}^2 = (r + \mathit{ſin.})\,(r - \mathit{ſin.}).$$

TACQUET *Trigon. Poriſm.* I. — St. VII. 3.

II. GEVOLG.

$Sin.^2\ 45^\circ + cos.^2\ 45^\circ = 2\ sin.^2\ 45^\circ = 2\ cos.^2\ 45^\circ = r^2$ en $sin.\ 45^\circ = cos.\ 45^\circ = \frac{r}{\sqrt{2}}$.

III. GEVOLG.

$$Sin.\ 60^\circ = cos.\ 30^\circ = \frac{r}{2}\sqrt{3}.$$

BEWIJS. $Sin.^2\ 60 + sin.^2\ 30^\circ = r^2$
of $sin.^2\ 60^\circ + \frac{r^2}{4} = r^2$ (Voorst. XV. Gev. 2.)
of $sin.^2\ 60^\circ = \frac{3}{4}r^2$: en $sin.\ 60^\circ = \frac{1}{2}r\sqrt{3}$.

AANMERKING. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, en $\frac{1}{\sqrt{2}}$ komen dikwerf in berekeningen te pas: wij zullen ze om die reden hier bijvoegen.

$$\sqrt{2} = 1.41421356$$
$$\sqrt{3} = 1.73205081$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}} = 0.70710678$$

XVIII. VOORSTEL. Fig. 173.

De *sinus* [LM] van de helft van een' boog is gelijk aan den wortel uit het halve product van den *radius* en den *sinus versus*: of aan de helft van den wortel uit de som van de vierkanten van den *sinus* en den *sinus versus*: doch de *cosinus* [CM] van de helft van een' boog is gelijk aan den wortel uit het halve product van den *radius* en den *sinus versus* van het supplement: dat is

$$sin.\ \tfrac{1}{2}B = \sqrt{\tfrac{1}{2}r \times sin.\ v.\ B} = \sqrt{\tfrac{1}{2}r\,(1 - cos.\ B)}$$
$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{sin.\ B^2 + sin.\ v.\ B^2}:$$

en

$$cos.\ \tfrac{1}{2}B = \sqrt{\tfrac{1}{2}r \times sin.\ v.\ supp.\ B} = \sqrt{\left(\frac{r + cos.\ B}{2}\right) r}.$$

St. VII. 4. Gev. 1. — L. G. Tr. §. 20.

BEWIJS. VOOR HET EERSTE. Uit de gelijkvormige driehoeken ABL, en LBN, en de opmerking dat LM = ½ LB.

VOOR HET II. Uit II. 16. op den driehoek LBN toegepast.

VOOR

VOOR HET III. Uit de beſchouwing dat $cof. = \sqrt{r^2 - fin.^2}$ en voorts uit het I.

GEVOLG.

$Sin.^2 (\frac{1}{2} B) \times cof.^2 (\frac{1}{2} B) = \frac{1}{4} r^2 \times fin.\ v.\ B.\ fin.\ v.\ fupp.\ B =$ (Bep. 5. Gev.) $\frac{r^2}{4} (1 - cof.\ B)(1 + cof.\ B) = \frac{r^2}{4}(1 - cof.^2\ B) = \frac{r^2\ fin.^2\ B}{4}$ en dus $fin.\ v.\ B = \frac{fin.^2\ B}{fin.\ v.\ fupp.\ B}$.

AANMERKING. Zie andere uitdrukkingen van den *ſinus verſus*, Bep. V. Gev. en Voorſt. XXIII.

XIX. VOORSTEL. Fig. 174.

Indien men op den omtrek eens cirkels eenen bepaalden boog [AY] aanneemt, vervolgens den dubbelden boog [AD] en bogen [DE, EF, FG, GH] ieder gelijk aan dien dubbelden boog [AD]; zal de *radius* ſtaan tot tweemalen den *coſinus* van dien boog, als de *ſinus* van dien boog tot den *ſinus* van den dubbelden boog: als de *ſinus* van den dubbelden boog tot de ſom der *ſinusſen* van den drievoudigen boog en van den enkelden: als de *ſinus* van den drievoudigen boog tot de ſom der *ſinusſen* van den viervoudigen en van den dubbelden: in één woord als de *ſinus* van den $n - 1$ boog tot de ſom der *ſinusſen* van den *n.* boog en van den $n - 2$ boog.

BEREIDING. Zij AY de boog, ACZ de middellijn: neem YD = AY; DE = EF = FG = GH = AD. Trek de choorden AY, AD, AE, AF, AG, AH: en ZD, ZE, ZF, ZG: verleng AF, AG, AH, enz.: maak EI = AE: FK = AF: GL = AG enz.

BEWIJS. ∠ DAE = ∠ EAF = ∠ FAG = ∠ GAH enz. en uit II. 27. ∠ I = ∠ EAI: ∠ K = ∠ FAG: ∠ L = ∠ HAG: zoo dat alle de △△ ADE, AEI, AFK, AGL gelijkbeenig, en boven dien onderling gelijkhoekig, en derhalve gelijkvormig zijn, en met △ DZC: om dat ∠ DZC, of ∠ DZA = ∠ DAE = ∠ CDZ. Verder △ EFI = △ ADE; △ FGK = △ EAF; △ GHL = △ FAG; en derhalve FI = DE, GK = AE, HL = AF enz. derhalve

DC : DZ = AD : AE

= AE : AI = AF + FI = AF + AD

 =

$$= AF : AK = AG + GK = AG + AE$$
$$= AG : AL = AH + HL = AH + AF.$$

enz.

Maar $DZ = 2\,\mathit{cos}.\ \tfrac{1}{2} \frown AD = 2\,\mathit{cos}. \frown AY$ (Voorst. XV.)

$AD = 2\,\mathit{sin}.\ \tfrac{1}{2} \frown AD = 2\,\mathit{sin}. \frown AY$

$AE = 2\,\mathit{sin}.\ \tfrac{1}{2} \frown AE = 2\,\mathit{sin}. \frown AD = 2\,\mathit{sin}\ 2 \frown AY$

$AF = 2\,\mathit{sin}.\ \tfrac{1}{2} \frown ADEF = 2\,\mathit{sin}.\ \tfrac{3}{2} \frown AD = 2\,\mathit{sin}.\ 3 \frown AY$

$AG = 2\,\mathit{sin}.\ \tfrac{1}{2} \frown AEFG = 2\,\mathit{sin}.\ \tfrac{4}{2} \frown AD = 2\,\mathit{sin}.\ 4 \frown AY$

$AH = 2\,\mathit{sin}.\ \tfrac{1}{2} \frown AEFGH = 2\,\mathit{sin}.\ \tfrac{5}{2} \frown AD = 2\,\mathit{sin}.\ 5 \frown AY$;

enz.

Dat is, stellende B voor $\frown AY$,

$r : 2\,\mathit{cos}.\ B = \mathit{sin}.\ B : \mathit{sin}.\ 2\,B$
$= \mathit{sin}.\ 2\,B : \mathit{sin}.\ 3\,B + \mathit{sin}.\ B$
$= \mathit{sin}.\ 3\,B : \mathit{sin}.\ 4\,B + \mathit{sin}.\ 2\,B$
$= \mathit{sin}.\ 4\,B : \mathit{sin}.\ 5\,B + \mathit{sin}.\ 3\,B$ enz.
$= \mathit{sin}.\ (n-1)\,B : \mathit{sin}.\ n\,B + \mathit{sin}.\ (n-2)\,B.$

I. AANMERKING. Dit Voorstel, doch op de choorden toegepast, is reeds in 1633 gebruikt door GELLIBRAND *Trigon. Brittannica*, Cap. II. *Lemma.* Daar na, even als het volgende, door anderen, als door SHARP, *Method. of Constr. the natur. sines*, prop. 3. te vinden in de *Mathematical Tables* van SHERWIN; door B. MARTIN, *Trigonometer's Guide*, *Theorem.* XXVI, XXVII. ROBERTSON, *Elem. of Navig.*, Boek III. prop. 4.

II. AANMERKING. Het bewijs van dit Voorstel, te weten $AD : AE = AE : AF + AD$ geeft deze belangrijke eigenschap des cirkels. „ Indien een hoek DAF in den omtrek, door „ eene lijn AE in twee gelijke deelen gesneden wordt: is „ die lijn middelevenredig tusschen het kleinste been en „ de som der twee beenen.

GEVOLG.

In het algemeen

$\mathit{sin}.\ n\,B = 2\,\mathit{cos}\ B\ \mathit{sin}.\ (n-1)\,B - \mathit{sin}.\ (n-2)\,B$

stellende den *radius* $r = 1$;

en in het bijzonder

$\mathit{sin}.\ 2\,B = 2\,\mathit{sin}.\ B\ \mathit{cos}.\ B.$

III. AANMERKING. Men ziet hieruit hoe gemakkelijk het valt om, *sin.* B en *cos.* B bekend zijnde, achtervolgens de *sinussen* van 2 B, 3 B, 4 B, enz. te berekenen, zonder de *cosinussen* van die zelfde bogen te kennen.

XX. VOORSTEL. Fig. 174.

In de zelfde onderstellingen als bij het voorgaande Voorstel:

ſtel: ſtaat de *radius* tot den dubbelden *coſinus* van den gegeven boog, als twee malen de *coſinus* tot de ſom van den *radius* en van den *coſinus* des dubbelden boogs: als de *coſinus* van den dubbelden boog tot de ſom van den *radius* en den *coſinus* van den drievoudigen boog: als de *coſinus* van den drievoudigen boog tot de ſom van den *radius* en van den *coſinus* van den viervoudigen boog: enz. in één woord, de *radius* ſtaat tot den dubbelden *coſinus* eens boogs, als de *coſinus* van $(n - 1)$ maal den boog n, tot de ſom van den *radius* en van den *coſinus* van n maal den boog.

BEREIDING. Men verlenge de middellijn ZA en de choorden ZD, ZE, ZF enz.: men trekke op die verlengingen $DM = DZ$; $EN = EZ$; $FO = FZ$; $GP = GZ$ enz.: dan zijn alle de driehoeken ZDM, ZEN, ZFO, ZGP, gelijkbeenig, onderling gelijkhoekig, en derhalve gelijkvormig, en ook gelijkvormig met driehoek DCZ.

Verder blijkt het dat $\triangle DAM = \triangle EZD$; $\triangle END = \triangle EFZ$
$\triangle FOE = \triangle FGZ$: waaruit volgt
$AM = EZ$; $DN = FZ$; $EO = GZ$ enz.
en uit de gemelde gelijkvormigheid is

$$
\begin{aligned}
DC : DZ &= DZ : ZM = ZA + AM = ZA + ZE \\
&= EZ : ZN = ZD + DN = DZ + ZF \\
&= FZ : ZO = ZE + EO = ZE + GZ
\end{aligned}
$$

enz.

maar $ZD = 2\, cof.\left(\frac{ſupp.\ boog\ DZ}{2}\right)$ Voorſt. XV. $=$

$$
\begin{aligned}
&2\, cof.\, \tfrac{1}{2} \frown AD = 2\, cof. \frown AY: \\
&ZE = 2\, cof.\, \tfrac{1}{2} \frown EDA = 2\, cof. \frown 2\, AY \\
&ZF = 2\, cof.\, \tfrac{1}{2} \frown FEDA = 2\, cof.\, \tfrac{6}{2} \frown AY = 2\, cof. \frown 3\, AY \\
&ZG = 2\, cof.\, \tfrac{1}{2} \frown GFEDYA = 2\, cof.\, \frac{8 \frown AY}{2} = 2\, cof.\, 4 \frown AY
\end{aligned}
$$

enz.

en dus ſtellende B voor $\frown AY$.

$$
\begin{aligned}
\text{is } r : 2\, cof.\, B &= cof.\, B : r + cof.\, 2\, B \\
&= cof.\, 2\, B : r + cof.\, 3\, B \\
&= cof.\, 3\, B : r + cof.\, 4\, B
\end{aligned}
$$

enz.

en in het algemeen

$$r : 2\, cof.\, B = cof.\, \overline{n - 1}.\, B : r + cof.\, n\, B.$$

I. AANMERKING. Uit het bewijs blijkt dat

$DC : DZ = DZ : ZA + ZE$: of

$AZ : DZ = DZ : \dfrac{ZA + ZE}{2}$: d. i.

„ Indien een hoek AZE, in den omtrek door de middellijn
„ ZA en eene choorde ZE gevormd, door eene lijn ZD
„ in twee gelijke deelen gedeeld wordt: ſtaat de ſnijden-
„ de lijn middelevenredig tusſchen de middellijn, en de
„ halve ſom van de middellijn en het ander been des ge-
„ geven hoeks."

GEVOLG.

Cos. n B $=$ (2 *cos.* B *cos.* $\overline{(n-1)}$ B $- r^2$) : r en in het bijzonder *cos.* 2 B $=$ (2 *cos.* B $- r^2$) : r $=$ *cos.*^{2} B $-$ (r^2 $-$ *cos.*^{2} B) $=$ *cos.*^{2} B $-$ *sin.*^{2} B, indien $r = 1$.

II. AANMERKING. Het blijkt dan hoe gemakkelijk men, *cos.* B gegeven zijnde, de *cosinusſen* van 2 B, 3 B, 4 B enz. vinden kan, zonder de *ſinusſen* van B, 2 B, 3 B enz. te kennen.

XXI. VOORSTEL. Fig. 175.

De *ſinus* [LN] van de ſom van twee hoeken of bogen [DL en DB], is gelijk aan de ſom der producten van den *ſinus* van ieder' boog gemultipliceerd met den *coſinus* van den anderen, en gedivideerd door den *radius*: en de *ſinus* [TS] van het verſchil van twee bogen is gelijk aan het verſchil dier zelfde producten: d. i.

ſin. [B + C] $=$ [*ſin.* B . *coſ.* C + *ſin.* C . *coſ.* B) : r

en

ſin. [B $-$ C] $=$ [*ſin.* B . *coſ.* C $-$ *ſin.* C . *coſ.* B] : r.

St. VII. 5. — L. G. Tr. §. 19.

BEREIDING. Zij LM loodregt op CD: dan is LM de *ſinus*, CM de *coſinus* van boog LD, of ∠ LCD: zij insgelijks DI ⊥ CB, dan is DI *ſinus* en CI *coſinus* van boog DB of ∠ DCB: zij LN ⊥ CB, dan is LN $=$ *ſinus* LB $=$ *ſin.* [LD + DB] en CN is $=$ *coſ.* [LD + DB]: voorts LM verlengende tot de ontmoeting des cirkels, is MT $=$ LM, en boog DT $=$ boog LD, en dus is TB $=$ boog [DB $-$ LD]. Stellende TU en PM loodregt op LN, en MO op CB; is TS $=$ *ſin.* TB $=$ UN $=$ PN $-$ PU $=$ PN $-$ PL; om dat PL $=$ PU, want LP: PU $=$ LM: MT: en LM $=$ MT.

BEWIJS. VOOR HET EERSTE. LN $=$ PN + PL: men zoekt eerst de waarde van PL uit de gelijkvormige driehoeken PML en CDI: dan die van PN uit de gelijkvormige driehoeken MCO en CDI. En men verkrijgt LN $= \dfrac{\text{LM} \times \text{CI} + \text{DI} \times \text{CM}}{\text{CD}}$ waaruit het Voorſtel volgt.

VOOR HET TWEEDE. TS $=$ UN $=$ PN $-$ PL: waaruit het Voorſtel volgt.

I. GEVOLG.

De *ſinus* van een' dubbelden hoek is gelijk aan het dubbeld product van den *ſinus* door den *coſinus*, gedivideerd door den *radius*: dat is

$$\textit{ſin.}\ 2\,\text{B} = \frac{2\ \textit{ſin.}\ \text{B} \times \textit{coſ.}\ \text{B}}{r}$$

of, zoo $r = 1$, *ſin.* 2 B $=$ 2 *ſin.* B × *coſ.* B.

AAN-

I. AANMERKING, Dit komt overeen met Voorſtel XIX. Gevolg.

II. GEVOLG.

$Sin.\ B = 2\ sin.\ \frac{1}{2} B\ .\ cos.\ \frac{1}{2} B.$

. CAGNOLI. §. 63.

III. GEVOLG.

$Sin.\ (30 + a) = \frac{1}{2}\ cos.\ a + \frac{1}{2} \sqrt{3} \times sin\ a.$
$Sin.\ (30 - a) = \frac{1}{2}\ cos.\ a - \frac{1}{2} \sqrt{3} \times sin.\ a.$

Indien $r = 1$

en dus

$sin.\ (30 + a) = sin.\ (30 - a) + \sqrt{3} \times sin.\ a.$

BEWIJS. Uit Voorſt. XVII. Gev. 3.

II. AANMERKING. Derhalve is de ſom van ſin. *a* gemultipliceerd door $\sqrt{3}$ en van een' boog die *a* kleiner is dan 30°. gelijk aan den *ſinus* eens boogs die *a* grooter is dan 30°.

IV. GEVOLG.

$Sin.\ (60 + a) = \frac{1}{2} \sqrt{3}\ cos.\ a + \frac{1}{2}\ sin.\ a$
$Sin.\ (60 - a) = \frac{1}{2} \sqrt{3}\ cos.\ a - \frac{1}{2}\ sin.\ a$
$Sin.\ (60 + a) = sin.\ (60 - a) + sin.\ a$
$Sin.\ (60 - a) = sin.\ (60 + a) - sin.\ a.$

III. AANMERKING. Men kan derhalven uit den *ſinus* eens boogs die *a* grooter of kleiner is dan 60°, door additie den *ſinus* opmaken van een' boog die *a* kleiner of grooter is.

V. GEVOLG.

$Sin.\ (60^\circ + a) \sqrt{3} - sin.\ (90^\circ - a) = sin.\ (30^\circ + a) = sin.\ (60 + a) \sqrt{3} - cos.\ a.$

IV. AANMERKING. Men kan dan uit den *ſinus* eens boogs die *a* grooter is dan 30° den *ſinus* vinden des boogs die *a* grooter is dan 60° en omgekeerd.

VI. GEVOLG.

Indien boog C zeer klein is, is

$sin.\ [B \pm C] = sin.\ B \pm C\ cos.\ B:$

dat is: indien men twee bogen heeft die weinig van elkander verſchillen, is de aanwas of de afneming van de *ſinusſen* ten naasten bij in de zelfde rede als de aanwas of de afneming der bogen.

XXII. VOORSTEL. Fig. 173.

De *cosinus* [CN] van de som [LB] van twee hoeken, of bogen [LD, DB] is gelijk aan het verschil van de producten der *cosinussen* van beide de hoeken of bogen, en der *sinussen* van dezelven, gedivideerd door den *radius*: en de *cosinus* [CI] van het verschil van twee hoeken of bogen is gelijk aan de som van die zelfde producten; dat is

$$cos.\ (B + C) = (cos.\ B\ .\ cos.\ C - sin.\ B\ .\ sin.\ C) : r$$

en $$cos.\ (B - C) = (cos.\ B\ .\ cos.\ C + sin.\ B\ .\ sin.\ C) : r$$

St. VII. 5. Gev. 2. — L. G. Tr. §. 19.

BEREIDING. Zij is de zelfde als voor het voorgaande Voorstel; en daaruit volgt

$$CN = CO - NO = CO - PM.$$

en $$CS = CO + OS = CO + XT = CO + UX = CO + PM.$$

BEWIJS. Men zoekt eerst de waarde van CO door de gelijkvormige driehoeken CMO en CDI; en dan die van PM door de gelijkvormige driehoeken PLM en CDI: waaruit volgt

$$CN = \frac{CM \times CI - LM \times DI}{CD}$$

$$CS = \frac{CN \times CI + LM \times DI}{CD}$$: dat het Voorstel is.

I. AANMERKING. Het blijkt uit het I. Gevolg der 4. Bepaling, waarom de *cosinus* van de som van twee bogen kleiner is dan de *cosinus* van hun verschil.

I. GEVOLG.

De *cosinus* van eenen dubbelden hoek is gelijk aan het verschil der vierkanten van den *sinus* en van den *cosinus*, gedivideerd door den *radius*: dat is

$$cos.\ 2\ B = \frac{\overline{cos.\ B}^2 - \overline{sin.\ B}^2}{r}.$$

L. G. Tr. §. 13.

II. AANMERKING. Dit komt overeen met Voorst. XX. Gevolg.

II. GEVOLG.

Indien C zeer klein is: is $cos.\ (B \pm C) = cos.\ B \mp C\ sin.\ B$: dat is wanneer twee bogen weinig van elkander verschillen, volgt de aanwas of vermindering der *cosinussen* omtrent de zelfde rede als de aanwas of de vermindering der bogen zelven.

III. AANMERKING. Indien men in de formules van dit en van het voorgaande Voorstel stelt C = 2 B: dan is

sin.

$$\text{ſin.}\,[B + 2B] = \text{ſin.}\,3B = \frac{\text{ſin.}\,B\,\text{coſ.}\,2B + \text{ſin.}\,2B\,\text{coſ.}\,B}{r} =$$

$$\frac{\text{ſin.}\,B\,[\text{coſ.}^2 B - \text{ſin.}^2 B] + 2\,\text{ſin.}\,B\,\text{coſ.}^2 B}{r^2} =$$

$$\frac{\text{ſin.}\,B\,\text{coſ.}^2 B - \text{ſin.}^2 B + 2\,\text{ſin.}\,B\,\text{coſ.}^2 B}{r^2} =$$

$$\frac{3\,\text{ſin.}\,B\,\text{coſ.}^2 B - \text{ſin.}^2 B}{r^2} = \text{ſin.}\,3B.$$

en men vindt insgelijks

$$\text{coſ.}\,3B = \frac{\text{coſ.}^2 B - 3\,\text{ſin.}^2 B\,\text{coſ.}\,B}{r^2}$$

Indien men in deze formule voor *ſinus* 3 B, $r^2 - \text{ſin.}^2$ B ſtelt voor coſ.^2 B: verkrijgt men

$$\text{ſin.}\,3B = 3\,\text{ſin.}\,B - \frac{4\,\text{ſin.}^2 B}{r^2}:$$

en indien men ſtelt D = 3 B is

$$\text{ſin.}\,D = 3\,\text{ſin}\,[\tfrac{1}{3}D] - \frac{4\,\text{ſin.}^2\,[\tfrac{1}{3}D]}{r^2}.$$

IV. AANMERKING. Men kan op die zelfde wijze formules opmaken voor ſin. 4 B, ſin. 5 B, enz. (Zie L. G. Tr. §. 34.) te weten

$$\text{ſin.}\,4B = \frac{4\,\text{ſin.}\,B\,\text{coſ.}^3 B - 4\,\text{ſin.}^3 B\,\text{coſ.}\,B}{r^2}.$$

$$\text{coſ.}\,4B = \frac{\text{coſ.}^4 B - 6\,\text{coſ.}^2 B + \text{ſin.}^4 B.}{r^2}$$

En hieruit zoude men, zoo voortgaande, ras uit de wet, welke de leden dezer uitdrukking volgen, kunnen bemerken dat voor ſin. *n* B en coſ. *n* B deze algemeene *formules* plaats hebben.

$$\text{ſin.}\,nB = n\,\text{coſ.}^{n-1} B\,\text{ſin.}\,B - \frac{n \,.\, n-1}{1.\,2.}\,\frac{n-2}{3} \times$$
$$\text{coſ.}^{n-3} B\,\text{ſin.}^3 B + \frac{n \,.\, n-1\; n-2\; n-3}{1.\,2.\,3.\,4}\,\frac{n-4}{5}\,\text{coſ.}^{n-5} B\,\text{ſin.}^5 B$$
$- \text{enz.}$

en

$$\text{coſ.}\,nB = \text{coſ.}^n B - \frac{n \,.\, n-1}{2}\,\text{coſ.}^{n-2} B\,\text{ſin.}^2 B +$$
$$\frac{n \,.\, n-1.\; n-2.\; n-3}{1.\,2.\,3.\,4}\,\text{coſ.}^{n-4} B\,\text{ſin.}^4 B - \text{enz.}$$ welke formules ook uit andere gronden kunnen bewezen worden: zij zijn bij zeer vele Schrijvers te vinden: onder andere bij EULER *Introd. in Anal. Infinitor.* I. §. 133: CAGNOLI §. 117. — §. 124. DE GELDER, *Handleiding* §. 1057 en §. 1059.

V. AANMERKING. Indien men deze formule van ſin. 3 B, coſ. 3 B, of ſin. *n* B, coſ. *n* B; vergelijkt met die, welke in Voorſtel XIX en XX. zijn opgegeven, blijkt het hoe veel deze laatſte, voor het berekenen der *ſinusſen*, of *coſinusſen*, van 2 B|, 3 B, 4 B, enz.

van

door den gegeven *finus* B, *cofinus* B, gemakkelijker vallen: en hoe zij, uit geometrifche bewijzen ontleend, in de daad meerder en onmiddelijker tot de Meetkunde behooren, dan de andere, die meer in algebraifche veranderingen van eenmaal gegeven *formules* beftaan: doch het blijkt tevens hoe nuttig het is deze verfchillende handelwijzen met elkander te vergelijken.

VI. EN ALGEMEENE AANMERKING OVER HET BEREKENEN DER SINUSTAFELS. Het is door de voorgaande eigenfchappen der *finusfen* dat men de tafels van *finusfen* en *cofinusfen* voor alle bogen heeft kunnen berekenen. Men kan bijv., met den *finus* van 30 gr., die de halve *radius* is, beginnende, daaruit door Voorft. XVII. Gev 1. den *cofinus* van 30° afleidt: en vervolgens door Voorftel XVIII der *finusfen* en *cofinusfen* van 15°: $7^{\circ}.\ 30'$; $3^{\circ}.\ 45'$: $1^{\circ}.\ 52'.\ 30''$: $56', 15''$; $28'., 7\frac{1}{2}''$: $14'.\ 3\frac{3}{4}''$: $7'.\ 1\frac{7}{8}''$: $3'.\ 30\frac{7}{16}''$: $1'.\ 45\frac{7}{32}''$: $0'.\ 52\frac{39}{64}''$: welke boog klein genoeg is om daaruit door Voorft. XXII. Gev. den *finus* en *cofinus* van $1'$. optemaken: vervolgens, (door Voorft. XIV. Gev.) van $2'.\ 4.\ 8'.\ 16'.\ 32'.\ 64'$. enz. (door Voorft. XXI.) van $3'$. van $5'$. van $7'$. van $14'$. enz.: van $16' + 14'$ of $30'$. van 1°. en zoo voorts van graad tot graad tot 30°: waaruit men (door Voorft. XXI. Aanm. 2.) gemakkelijk de *finusfen* van graden boven de 30°. vindt. Men kan over het berekenen van *Sinus Tafels* op die wijze nazien STEENSTRA VII. 5. TACQUET *Trigon.* prop. 1—5: et p. 346: en anderen.

In den beginne heeft men op die wijze het verbazend werk om *Sinus-Tafels*, te berekenen van minuut tot minuut, en zelfs van 10″ tot 10″, verrigt. Na de uitvinding der Logarithmen, heeft men er de Logarithmen der *finusfen* bijgevoegd.

In latere tijden heeft men de *finusfen* gemakkelijker, en ook van feconde tot feconde, berekend door middel van reekfen, wier leden de magten zijn des boogs (in deelen van den *radius* uitgedrukt), waarvan men den *finus* zoekt: doch daar die reekfen niet geometrisch, maar geheel algebraisch zijn, kunnen wij over dezelve hier niet handelen: wij zullen er eenige in het *Aanhangfel* opgeven.

XXIII. VOORSTEL. Fig. 173.

De *Sinus verfus* of *pijl* [N B] is gelijk aan het vierkant van de choorde [L B], gedivideerd door den dubbelden *radius* [A B].

BEWIJS. Uit de gelijkvormige driehoeken L N B en A L B.

GEVOLG.

De *finus verfus* is dus gemakkelijk uit de choorde te be-

berekenen: doch nog gemakkelijker uit den *coſinus*. (V. Bepaling).

I. AANMERKING. Zie hier voren Voorſt. XVIII. Gev. nog eene andere uitdrukking van den *ſinus verſus*.

II. AANMERKING. Men vindt Tafels van *ſinus verſus* in de Engelſche Tafels van SHERWIN, en in de groote Nederduitſche van DOUWES. Dezelve gaan ſlechts tot 90°; en wij hebben te voren gezien, dat de *ſinus verſus* beſtendig aangroeit tot 180° toe; men moet dus ook de overigen weten te vinden; dit nu geſchiedt gemakkelijk, met bij den *radius* den *coſinus* van het getal graden die de gegeven hoek boven de 90° bevat, te voegen. Wil men verder den *Logarithmus* van die *ſinus verſus* hebben, behoeft men maar de *Logarithmen* der gevonden getallen (r + *coſinus*) te nemen, maar dan moet er wel opgelet worden dat men het character met 3 moet vermeerderen, om dat de *Logarithmus* des *ſinus verſus* (het geen ook in den Logarithmus der *ſinusſen*, *tangenten*, *ſecanten* plaats heeft) voor een' *radius* van 10,000,000,000, doch de natuurlijke, of ſlechts *ſinus verſus*, *ſinus*, of *tangent* alleen voor eenen *radius* van 10,000,000 berekend zijn.

XXIV. VOORSTEL. Fig. 172.

De laatſte rede van den *ſinus verſus* [B I], en van dat gedeelte [D E] van den *ſecant* dat tusſchen den omtrek en den *tangent* begrepen is, is de verdubbelde rede van den Boog B D.

NEWTON *Principia* I. *Lem.* II.

BEWIJS. I. Uit XXII. is

ſin. verſ. $= \mathrm{BI} = \frac{\overline{\mathrm{DB}}^2}{\mathrm{AB}}$: maar boog D B is de limiet van de choorde D B: en dus is de limiet van *ſinus verſus* $= \frac{\overline{Boog}^2}{Diam.}$

II. Uit de driehoeken E D Z en C E B is (IV. 2).
D E : I B = C E : C B en dus

$$\mathrm{DE} = \frac{\mathrm{IB} \times \mathrm{CE}}{\mathrm{CB}} = \frac{\overline{\mathrm{DB}}^2 \times \mathrm{CE}}{\mathrm{AB} \times \mathrm{CB}}$$
: maar boog D B is de limiet van de choorde D B, en C B is de limiet van C E, en dus

limiet van D E $= \frac{\overline{Boog}^2}{Diam.}$

I.

I. GEVOLG.

De *finus verfus* van kleine bogen groeijen aan, of verminderen, in de verdubbelde rede hunner bogen.

II. GEVOLG.

Voor kleine bogen is het gedeelte van den *fecant*, tusfchen den omtrek en den *tangent* begrepen, gelijk aan den *finus verfus*, en het groeit aan als het vierkant van den boog.

AANMERKING. Beide deze gevolgen zijn van veel nut in de Natuur- en Sterrekunde.

IV. EIGENSCHAPPEN EN BEREKENING DER TANGENTEN.

XXIV. VOORSTEL. Fig. 172.

De Tangent of raaklijn [BE] van eenen boog [DB], of hoek [DCB], is gelijk aan den *radius* gemultipliceerd door den *finus*, en gedivideerd door den *cofinus*: en de *cotangent* [GF] is gelijk aan den *radius* gemultipliceerd door den *cofinus*, en gedivideerd door den *finus*; dat is,

$$Tang. = \frac{r \times fin.}{cof.}\ ; \ Cot. = \frac{r \times cof.}{fin.}$$

St. VII. 8. — L. G. Tr. §. 17.

BEWIJS. Uit de gelijkvormige driehoeken CID en CBE voor het I: CDI en GFC voor het II.

CAGNOLI §. 56, 57, 102.

I. AANMERKING. Hieruit blijkt, 1°. dat, indien, of de *finus* of de *cofinus* negatief is, de *tangent* het ook is, het geen overeenkomt met de Aanmerking op de 6. Bepaling: 2°. dat, indien, *finus* en *cofinus* het beiden zijn, de *tangent* wederom *pofitief* wordt: het geen plaats heeft voor bogen tusfchen 180 en 270 gr. en 3°. dat de *tangent* van 90° oneindig is. Want $tang. 0^{\circ} = \frac{fin.\ 90^{\circ}}{cof.\ 90^{\circ}} = \frac{r}{0}$ het geen eene oneindige grootheid aanduidt.

I. GEVOLG.

De *Tangent* en *Cotangent* van eenen boog van 45°. zijn beiden gelijk aan den *radius*.

St. VII. 8.

I.

II. AANMERKING. Hierop ſteunt de lijn geteekend *tangent*, zoo wel op den *proportionaal-pasſer* als op de pleinſchalen. De afſtand van het begin tot 45° is de *radius*: daar na worden de *tangenten* grooter dan de *radius*: doch juist daarom zijn er op den *proportionaal-pasſer* twee ſtellen lijnen van *tangenten*: het eene, op wiens lijnen, op ieder blad van den pasſer, aan het eind ſtaat 45: en dit ſtel dient vóor de hoeken die kleiner zijn dan 45°. Voor deze is de *radius* van den pasſer die geheele lijn van het middelpunt af tot 45°. Het ander ſtel, (dat doorgaans met eene kleine *t* gemerkt is) begint met 45° op eenigen afſtand van het middelpunt, en gaat voort tot in de 70 graden Dit ſtel dient voor de hoeken die grooter zijn dan 45°, en is dus op eene kleinere ſchaal vervaardigd dan het eerſte ſtel: zijnde de *radius* die geringe afſtand van het middelpunt tot 45°.

III. AANMERKING. Op vele pleinſchalen ſtaat de lijn der *tangenten* in verband met eene andere, gemerkt S. T. (*Semi-Tangent*), en doorgaans genoemd de lijn der *halve tangenten*, of beter, der *tangenten* van de halve bogen.

Zij Fig. 178. B G een boog waarvan B E de *tangent* is: men trekke uit het uiteinde H der middellijn B H de ſupplement-choorde H G, die den loodregten *radius* in D ſnijdt: dan is de lijn C D, het geen men op die ſchaal noemt halve *tangent* ⌒ B G, of eigenlijk *tangent* des halven boogs B G: immers $\angle GHB = \frac{1}{2}\angle GCB = \frac{1}{2}$ ⌒ B G: en C A, *radius*, zoude zijn de halve *tangent*, of liever de *tangent* halven boog B A of 90°: d. i. *tangent* $\angle AHC = 45°$. Die ſchaal is, onder anderen, bij het vervaardigen van figuren de *Stereographiſche projectie* betreffende, van veel nut.

II. GEVOLG.

Tangenten en *Cotangenten* zijn gemakkelijk te berekenen, als men de *ſinusſen* en *coſinusſen* eerst berekend heeft.

TACQUET Tr. prob. 6. p. 343.

III. GEVOLG.

De *tangent* van een' boog is de helft der zijde van een' veelhoek om den cirkel beſchreven, wiens middelpuntshoek het dubbeld van den gegeven hoek is: even als de *ſinus* de helft is der zijde van een' dergelijken veelhoek in den cirkel beſchreven, gelijk wij reeds te voren gezegd hebben: dus is bij voorbeeld de *tangent* eens boogs van 1°. 52'. 30'' de helft der zijde van eenen veelhoek wiens middelpuntshoek 3° en 45′ bedraagt, dat is, van eenen 96-hoek: en de *sinus* van 1°. 52′. 30″. is de halve zijde van den 96 hoek in den cirkel beschreven. Indien men dan dien *tangent* en dien *sinus* neemt, is de rede van den omtrek van den cirkel tot den *radius* kleiner dan 192 malen die *tangent*, en grooter dan 192 malen die *sinus*; of tot de middellijn kleiner dan 96 malen die *tangent*, en grooter dan 96 malen die *sinus*. En indien men den *sinus* en den *tangent* van eenen boog van 1′ nam, kwam het op het zelfde uit als of men een 10800 hoek gebruikte: dit gaat dus zeer gemakkelijk voort wanneer men eerst de *sinus* en *tangenten* tafel berekend heeft; doch men lette op het geen wij in het VII. Boek in de VIII. Aanmerking op het XIX. Voorstel gezegd hebben.

IV. GEVOLG.

De *tangent* van eenen boog van 60° is het drievoud van den *tangent* des boogs van 30°

BEWIJS. $Tang.\ 60^\circ = \frac{sin.\ 60^\circ}{cos.\ 60^\circ} = \frac{2\,sin.\ 30^\circ\ cos.\ 30^\circ}{sin.\ 30^\circ} =$
$2\ cos.\ 30^\circ := \sqrt{3} = \frac{3}{\sqrt{3}}$ (XV. Gev. 2. en Voorst. XVII. Gev. 3.). rad. = 1 gesteld.

Maar $tang.\ 30^\circ = \frac{sin.\ 30}{cos.\ 30^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$: derhalve $tang.\ 60^\circ = 3\ tang.\ 30^\circ$.

Dit zal op eene andere en meer geometrische wijze bewezen worden in Voorst. XXXI. Gev. 5. Aanmerking 1.

XXVI. VOORSTEL. Fig. 172.

De *tangent* eens boogs is gelijk aan het vierkant van den *radius* gedivideerd door den *cotangent*: en de *cotangent* is gelijk aan het vierkant van den *radius* gedivideerd door den *tangent*: dat is

$$tang. = \frac{r^2}{cot.}\ .\ cot. = \frac{r^2}{tang.}$$

BEWIJS. Uit de gelijkvormige driehoeken CEB en CFG.

I. GEVOLG.

De *tangenten* zijn in omgekeerde rede van de *cotangenten*,

ten, en de *cotangenten* in omgekeerde rede van de *tangenten*: dat is:

$$Tang. = \frac{1}{cot.};\ Cot. = \frac{1}{tang.}$$

L. G. Trig. §. 18.

II. GEVOLG.

Het komt gevolgelijk op het zelfde uit, of men door den *cotangent* divideert, of door den *tangent* multipliceert; en omgekeerd: of, wanneer men door Logarithmen werkt, men den *Logarithmus* van den *cotangent* aftrekt, of den *Logarithmus* van den *tangent* bijtelt; en omgekeerd. Daar nu de bijtelling gemakkelijker valt dan de aftrekking, moet men altijd aan dezelve den voorrang geven.

XXVII. VOORSTEL. Fig. 143.

Van twee ongelijke bogen heeft de *tangent* van den grootſten eene grooter rede tot dien van den kleinſten, dan de grootſte boog tot den kleinſten.

BEREIDING. Zij IEL de grootſte en IE de kleinſte boog: IH is de *tangent* van ⌒ IEL: en IG van ⌒ IE. Trek de lijnen CEG en CLH: en beſchrijf uit C met den *radius* CG den boog VGU, die CI, verlengd, in V, en CH in U ſnijdt.

BEWIJS. *Sector* CGU: *ſector* VCG = ⌒ GU: ⌒ VG = ⌒ EL: ⌒ IE (VII. 15. Aanm. 1.),
△ GCH: △ ICG = GH: IG: maar △ GCH > *ſector* GCU en △ ICG < *ſector* VCG: derhalve △ GCH: △ ICG > *ſector* GCU: *ſector* VCG: d. i. GH: IG > ⌒ EL: ⌒ IE: en *componendo* GH + IG: IG > ⌒ EL + ⌒ IE: ⌒ IE: of IH: IG > ⌒ IEL: ⌒ IE.

I. AANMERKING. Dit Voorſtel is het zelfde als IV. 12. Gev. 2: en wordt op deze wijze door COMMANDINUS in de aldaar aangehaalde plaats van PAPPUS bewezen.

II. AANMERKING. De beroemde Nederlandſche Wiskundige ALBERT GIRARD heeft dit Voorſtel in zijn voortreffelijk werkje *Invention nouvelle en Algebre* uit PAPPUS overgenomen, en eenvoudiger aldus bewezen. Fig. 176. Zij BFK eene ſnijlijn en FP eene raaklijn in F: MK // BH: dan is MK: BG: < GH: BG: maar MK: BG = FK: BF. Derhalve FK: BF < GH: BG; en dus FP: BF < GH: BG: gevolgelijk ⌒ FD: ⌒ BF < GH: BG: en *componendo* ⌒ FD + ⌒ BF: dat is ⌒ BFD: ⌒ BF < BH: BG: of BH: BG > ⌒ BFD: ⌒ BF.

GEVOLG.

De *tangenten* groeijen in grooter rede aan dan de bogen, en des te grooter dat de bogen grooter worden.

XXVIII. VOORSTEL. Fig. 177.

Het verſchil der vierkanten van den *radius*, en van den *tangent* eens boogs ſtaat tot het dubbelde vierkant van den *radius*, als de *tangent* des boogs tot den *tangent* des dubbelden boogs.

BEREIDING. BH de boog: BHD de dubbelde boog. Trek BF ⊥ op AB: AC, ADF, DB, en uit C, CI ⊥ op AC en dus // ED. Dan is DE = EB; of DB = 2 DE.

BEWIJS. Om dat Δ ABC $\backsim$ Δ ABE is $\overline{AB}^2 = AC \times AE$ en
$\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 = AC \,.\, AE : \overline{AC}^2 = AE : AC = ED : CI$. Maar
$2\,\overline{AB}^2 : \overline{AB}^2 = BD : DE$: dus *ex aequo*.
$2\,\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 = BD : CI = BF : FC$ of
$2\,\overline{AB}^2 : \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = BF : FC$: *dividendo*.
$\overline{AB}^2 - \overline{BC}^2 : 2\,\overline{AB}^2 = BF - FC : BF$
d. i. $\overline{AB}^2 - \overline{BC}^2 : 2\,\overline{AB}^2 = BC : BF$.

GEVOLG.

$$BF = \frac{2\,\overline{AB}^2 \,.\, BC}{\overline{AB}^2 - \overline{BC}^2}\text{: d. i.}$$

$$tang.\ 2\,B = \frac{2\,r^2\ tang.\ B}{r^2 - (tang.)^2\,B}.$$

I. AANMERKING. Dit Voorſtel is het beroemd Voorſtel van JOHN PELL; en het Bewijs is dat, het welk CAVALLIERI daarvan gegeven heeft. Zie *Controverſia de Circuli Menſura*, p. 13. en 60.

II. AANMERKING. Men kan dit Voorſtel ook zonder de leer der gelijkvormige driehoeken bewijzen:
$AF : AB = CF : BC$: en $\overline{AF}^2 : \overline{AB}^2 = \overline{CF}^2 : \overline{BC}^2$ of (II 16.)
$\overline{AB}^2 + \overline{BF}^2 : \overline{AB}^2 = \overline{CF}^2 : \overline{BC}^2 = (BF - BC)^2 : \overline{BC}^2 =$
$\overline{BF}^2 + \overline{BC}^2 - 2\,BC \,.\, BF : \overline{BC}^2$: *dividendo* en *alternando*.
$2\,BC \,.\, BF : \overline{BF}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2 : \overline{AB}^2$: derhalve
$2\,BC : BF = \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2 : \overline{AB}^2$: en.

$$BF = \frac{2\,\overline{AB}^2 \,.\, BC}{\overline{AB}^2 - \overline{BC}^2}\text{: of } tang.\ 2\,B = \frac{2\,r^2\ tang\ B}{r^2 - (tang.\,B)^2}.$$

Dit Bewijs is van LAGNY in zijne ſchoone Verhandeling over de *tangenten* der veelvouden van hoeken: *Mem. de l'Acad.* 1705, p. 254.

III. AANMERKING. Men kan ook uit de Voorſtellen XXI en XXII. het zelfde opmaken: want $tang.\ 2\,B = \frac{\text{ſin.}\ 2\,B}{\text{coſ.}\ 2\,B} = \frac{2\ \text{ſin}\ B\ .\ \text{coſ.}\ B}{\text{coſ.}^2\,B - \text{ſin.}^2\,B} =$

$$\frac{2}{\frac{\text{coſ.}\ B}{\text{ſin.}\ B} - \frac{\text{ſin.}\ B}{\text{coſ.}\ B}} = \frac{2\,r^2}{\text{cot.}\ B - \text{tang.}\ B} = \frac{2\,r^2}{\frac{r^2}{\text{tang.}\ B} - \text{tang.}\ B} =$$

$$\frac{2\,r^2\ \text{tang.}\ B}{r^2 - \text{tang.}^2\ B}.$$

IV. AANMERKING. Indien men zelfs de *formules* voor *ſin.* 3 B, *ſin.* 4 B, *ſin* 5 B . . . . . *ſin.* *n* B, en voor *coſ.* 3 B, *coſ.* 4 B, *coſ.* 5 B . . . *coſ.* *n* B aldaar opgegeven, door elkander divideert: zoude men formules voor *tang.* 3 B, *tang.* 4 B, *tang.* 5 B . . . . . *tang.* *n* B kunnen opmaken: doch wij oordeelen het onnoodig dezelve hier intelasſchen: om dat ze tot het berekenen der Tafels van *tangenten* niet gebruikt worden: en eigenlijk meer tot de Stelkunde dan tot de Meetkunde behooren.

XXIX. VOORSTEL. Fig. 144.

De ſom der *Sinusſen* van alle de bogen in den halven cirkel, te beginnen van een' bepaalden boog af, en altijd met den zelfden opklimmende, is gelijk aan den *cotangent* van de helft diens boogs, gemultipliceerd door den *radius*.

BEWIJS. Zij A B die boog; men noeme den zelven B.
Dan is A B : B E = A E : 2 (B K + C M + D O) (VI. 15.).
Maar 2 (B K + C M + D O) is de ſom van alle de *ſinusſen* B K, K H, C M, M G, D O, O F in den geheelen cirkel: dus *choorde* B ; *choorde ſup.* B = *r* : ſom van alle de *ſinusſen*, tot 180°. (VI. 16. Gevolg)

derhalve

$$\text{ſom van de ſinusſen tot } 180^\circ = \frac{r \times \text{choorde ſup. } B}{\text{choorde } B}$$

$$= \frac{r \times \frac{1}{2}\ \text{choorde ſup. } B}{\frac{1}{2}\ \text{choorde } B} = \frac{r \times \text{ſin. } \frac{1}{2}\ \text{ſup. } B}{\text{ſin. } \frac{1}{2}\ B} =$$

$$= \frac{r \times \text{coſ. } \frac{1}{2}\,B}{\text{ſin. } \frac{1}{2}\,B} = r \times \text{cot. } \tfrac{1}{2}\,B =$$

$r \times tang.\ comp.\ \frac{1}{2}\,B.$

Indien dus $B = 1^\circ$; zijn alle de *ſinusſen*, van graad tot graad genomen, te ſamen $= r \times tang.\ 89\tfrac{1}{2}^\circ. = 114{,}5886$, indien de *radius* 1. geſteld wordt.

Zie VIETA, *Operum* p. 375. en KRAFFT, *Geometria ſublimior.* §. 100.

V. EIGENSCHAPPEN EN BEREKENING DER SECANTEN.

XXX. VOORSTEL. Fig. 178.

De *secant* eens boogs is de som van den *tangent* des boogs en van den *tangent* van deszelfs halve *complement*.

BEWIJS. $\angle E = 90^\circ - \angle ECB$. Zij $\angle BCF = \frac{1}{2} \angle E = \frac{1}{2} [90^\circ - \angle ECB]$; dan is $\angle ECF = \angle ECB + \angle BCF = \angle ECB + \frac{90^\circ}{2} - \frac{1}{2} \angle ECB = \frac{90^\circ - \angle ECB}{2}$.

Maar $\angle CFB = 90^\circ - \angle BCF = 90^\circ - \frac{1}{2}(90^\circ - \angle ECB) = \frac{90^\circ - \angle ECB}{2} = \angle ECF$: derhalve $EC = EF = EB + BF =$ *tang.* $\angle ECB +$ *tang.* $\angle BCF =$ *tang.* $\angle ECB +$ *tang.* $\frac{1}{2}$ *comp.* $\angle ECB$.

GELLIBRAND *Trigon. Britan.* Cap. XVII. pr. 6.

GEVOLG.

De *secanten* kunnen derhalve opgemaakt worden uit eene enkele optelling van *tangenten*.

XXXI. VOORSTEL. Fig. 172.

De *secant* CE is gelijk aan den wortel uit de som der vierkanten van den *tangent* en van den *radius*: ook gelijk aan het vierkant van den *radius* gedivideerd door den *cosinus*: ook gelijk aan het product van den *tangent* gemultipliceerd door den *radius*, en gedivideerd door den *sinus*: en de *cosecant* is gelijk aan den wortel uit de som der vierkanten van den *radius* en den *cotangent*: ook gelijk aan het vierkant van den *radius* gedivideerd door den *sinus*: ook gelijk aan het product van *cotangent*, gemultipliceerd door den *radius*, en gedivideerd door den *cosinus*; dat is

$$sec. = \sqrt{R^2 + tang.^2} = \frac{r^2}{cosin.} = \frac{r \times tang.}{sin.}$$

$$cosec. = \sqrt{R^2 + cot.^2} = \frac{r^2}{sin.} = \frac{r \times cot.}{cosin.}$$

St. VII. 8. — L. G. *Trig.* §. 17, 18.

BEWIJS. VOOR HET I. N°. 1. uit II. 16. toegepast op △ CEB: voor N°. 2. en N°. 3. uit de gelijkvormige driehoeken CDI en CEB.

VOOR HET II. N°. 1., uit II. 16. toegepast op △ GCF: voor N°. 2. en N°. 3. uit de gelijkvormige driehoeken CGF en CHD.

I. GEVOLG.

De *ſecanten* zijn in omgekeerde rede van de *coſinusſen*: de *coſecanten* in die van de *ſinusſen*: en omgekeerd; dat is

$$sec. = \frac{1}{cos.};\ cosec. = \frac{1}{sin.};\ cos. = \frac{1}{sec.};\ sin. = \frac{1}{cosec.}$$

L. G. Tr. § 17.

II. GEVOLG.

Het komt dus op het zelfde uit, door den *ſecant* te multipliceren of door den *coſinus* te divideren, en door den *ſecant* te divideren of door den *coſinus* te multipliceren: of, wanneer men door de Logarithmen werkt, den *Logarithmus-ſecant* aftetrekken, of den *Logarithmus coſinus* bijtetellen; en den *Logarithmus-ſecant* bijtetellen of den *Logarithmus-coſinus* aftetrekken.

III. GEVOLG.

De *Logarithmus-ſecant* is het arithmetisch complement van den *Logarithmus coſinus*; en de *Logarithmus-coſecant* is het arithmetisch complement van den *Logarithmus-ſinus* (III. 36. Gev. 3.).

IV. GEVOLG.

Hieruit volgt, dat de Tafels van *Logarithmus-ſecanten* en *coſecanten* gemakkelijk te berekenen zijn als men die van *Logarithmus-ſinusſen* en *coſinusſen* berekend heeft: doch het blijkt tevens, dat zij onnuttig zijn: om dat men in derzelver plaats de *Logarithmus-ſinusſen* en *coſinusſen* gebruiken kan: waarom zij ook in de beste Tafels van GARDINER en CALLET weggelaten zijn.

V. GEVOLG.

$$Sec.\ 60^\circ = 2\,r.$$

BEWIJS. $Sec.\ 60^\circ = \frac{r^2}{cos.\ 60^\circ} = \frac{r^2}{sin.\ 30^\circ} = \frac{r^2}{\frac{1}{2}r} = 2\,r.$

I. AANMERKING. Hieruit valt het IV. Gevolg van het XXV. Voorstel gemakkelijk te bewijzen: want indien Fig. 177. ∠ DAB = 60° en ∠ CAB = 30°: is ∠ FAC = ∠ CAB: en derhalve FC: CB = AF: AB = 2:1. (IV, 12.) derhalve FC = 2 CB: en FB = 3 CB.

II. AANMERKING. Er is op sommige *pleinschalen*, en op alle de *proportionaal-passers* eene lijn van *secanten*, welke op deze met eene kleine *s* bestempeld is. Daar alle de *secanten* grooter zijn dan de *radius*, en het op den *proportionaal-passer* noodzakelijk is den *radius* te kennen; begint aldaar de lijn der *secanten* niet in het *middelpunt* des passers, maar op eenigen afstand daar van: zoo dat de afstand die er is op de lijn der *secanten* tusschen het middelpunt en de o, de *radius* is des cirkels tot welken de lijn der *secanten* op den *proportionaal-passer*, behoort: en men, den passer geopend hebbende, den *radius* des cirkels, welken men bedoelt, moet nemen op de beide bladen van o tot o in de lijnen der *secanten*.

III. AFDEELING.

OVER DE SINUS-TAFELS EN DE GONIOMETRISCHE SCHALEN.

I. OVER SINUS-TAFELS.

Ik ben in mijne lessen gewoon, alhier, de samenstelling en het gebruik der *Sinus-Tafels* uitteleggen: en in die uitlegging te letten op de volgende stukken.

1°. Op die Tafels zelve, waarin, vóór de ontdekking der *Logarithmen*, alléén de *natuurlijke*, of gelijk onze zeelieden gewoon zijn zich uittedrukken, de *slecht sinussen*, *tangenten* en *secanten* te vinden waren: terwijl, zederd die gewigtige ontdekking, er Tafels zijn, enkel van *natuurlijke sinussen*, *tangenten* en *secanten*: andere waarin de *natuurlijke*, en naast dezelve de *Logarithmus-sinussen*, *tangenten* en *secanten* staan: andere eindelijk die alleen de Logarithmen van die *Goniometrische* getallen bevatten.

2°. Op de schikking zelve der getallen in die Tafels: waarin, boven aan de bladzijde de graad staat, en in de eerste kolom de minuten, gaande van boven tot beneden, van o tot 60, of tot 30, naar mate er tot éénen graad, maar eene bladzijde, of wel twee bladzijden gebruikt worden: terwijl die

die graden niet hooger loopen dan tot 45. Onder aan de bladzijde, ftaan de graden, welke het *complement* van de getallen die boven aan zijn, uitmaken, en in de laatfte kolom, aan de regterhand de minuten, opklimmende van beneden naar boven: waardoor de getallen welke *finusfen*, *tangenten*, of *fecanten* zijn voor de eerfte 45 gr. voor de overige worden *cofinusfen*, *cotangenten*, of *cofecanten*: en die welke voor deze *finusfen*, *tangenten* of *fecanten* zijn, voor de eerfte *cofinusfen*, *cotangenten* of *cofecanten* worden: en aldus *finus* bijv. en *cofinus* van eenigen graad en minuut op de zelfde horizontale lijn ftaan, als de *cofinus* en *finus* voor den graad en de minuut die het *complement* uitmaken van den gegeven, en dus van beneden naar boven gezocht worden.

3°. Dat de *Logarithmus-Sinus*, *tangent* of *fecant* niets anders is dan de gewone *Logarithmus* van het getal dat den natuurlijken *finus*, *tangent* of *fecant* uitdrukt: welverftaande echter, dat zoo het *character* van den *Logarithmus-Sinus* van 90 gr., of van den *radius*, 10 is, dit onderftelt dat de *radius* zelve uit 11 cijfferletters zoude beftaan: daar, voor de natuurlijke *finusfen*, enz. de *radius* maar op 10,000,000 gefteld is, en derhalve flechts uit 8 letters beftaat. Beter ware het dat, gelijk in de Tafels van CALLET, het *character* van den *Logarithmus-radius* 0 ware in plaats van 10; en dus dat alle de Logarithmen der *finusfen*, gelijk mede die der *tangenten* beneden 45°, voor decimale breuken moesten gehouden worden, met het behoorlijk *character*, 9, 8, 7 enz. voorzien (zie bl. 153, N°. II. van het Berigt): het geen het best met den waren aard der *finusfen*, enz. overeenkomt.

4°. Dat er een middel is om, met genoegfame naauwkeurigheid, den *finus*, *tangent* of *fecant* te vinden van eenigen boog, die niet in de Tafel ftaat; en omgekeerd: dat is van bogen met *feconden* uitgedrukt, al gaan de Tafels maar van *minuut* tot *minuut*. Dat middel beftaat in eenen eenvoudigen regel van drieën, gevestigd op het 6. Gevolg van ons XXI. Voorftel, zeggende, indien men bij voorbeeld den *finus* van 54° 12′. 8″ zoekt; 1′ of 60″, verfchil tusfchen 54°. 12′. en 54°. 13′, ftaat tot het verfchil der *finusfen* van 54°. 12′ en 54°. 13′, als het getal *feconden* boven de 54°. 12′, (dat is 8″) tot eene vierde evenredige; die, gevoegd bij den *finus* van 54°. 12′, den *finus* geeft van 54°. 12′. 8″. De zelfde regel dient voor *tangenten* en *fecanten*, en voor de Logarithmen van alle die lijnen: alleen moet men hierop letten, dat wanneer men het zelfde voor *cofinusfen*, *cotangenten* en *cofecanten* zoekt, men de gevonden vierde evenredige van het getal dat in de Tafel ftaat moet aftrekken, om dat die lijnen kleiner worden als de boog aangroeit.

5°. Dat wanneer men, een *finus* enz. gegeven zijnde, den boog zoekt waartoe hij behoort, de regel om dien boog ook met *fecconden* uittedrukken, het omgekeerde is der voorgaande; te weten, verfchil van de twee *finusfen* in de Tafel tusfchen welke de gegeven *finus* invalt, tot het verfchil van den gegeven en den kleinften, als 60'' tot eene vierde evenredige; welke bij den kleinften boog gevoegd, het gevraagde geeft. Men trekt af, zoo het een *cofinus*, *cotangent*, of *cofecant* is, die gegeven zijn.

6°. Dat het getal 1', of 60'', het welk in die beide regels voorkomt, alleen gebruikt wordt, om dat men Tafels onderftelt die flechts van 1' tot 1' of van 60'' tot 60'' gaan: maar dat men als zij, gelijk die van CALLET, gaan van 10'' tot 10''; als dan moet nemen 10'', het verfchil tusfchen twee bogen in de Tafel, in plaats van 60''.

7°. Dat de beide regels genoegzaam naauwkeurig zijn voor bogen waarvan de *finusfen* enz. zeer weinig verfchillen: maar niet wanneer het verfchil groot is; om dat als dan de onderftelling waarop die regel gevestigd is, te weten dat de Goniometrifche lijnen in dezelfde rede toe- of afnemen als de bogen, niet doorgaat: en derhalve, dat die regel niet geldt wat de *finusfen*, *tangenten*, *fecanten* betreft, voor de vijf eerfte graden; noch voor de vijf laatfte, wat de *cofinusfen*, *cotangen*, *cofecanten* aangaat. Waarom dan ook in de Tafels van CALLET, die gelijk gezegd is, van 10'' tot 10'' gaan, voor de 5 eerfte graden de *finusfen* van graad tot graad, opgegeven worden.

II. OVER DE GUNTER'S- OF LOGARITHMEN-SCHAAL.

1°. Men heeft, gelijk wij reeds gezegd hebben, fchalen vervaardigd, waarop de *choorden*, *finusfen*, *tangenten*, *fecanten* van alle bogen gefneden zijn, voor eenen bijzonderen *radius*: wij hebben ze alle in dit Boek uitgelegd, te weten die der *choorden* Voorftel XII. Aanm. 2, 3, 4; die der *tangenten* Voorft. XXIV. Aanm. 2, 3; die der *fecanten*, Voorft. XXXI. Aanm. 2 Maar er is ook eene fchaal, die naar den uitvinder, GUNTER's (*) fchaal, of *logarithmen-fchaal*, genoemd wordt; waarop de *Logarithmen* der getallen, der *finusfen* en der *tangenten* gevonden worden. Men treft deze fchaal aan, of op pleinfchalen, of ook wel op den *proportionaal-pasfer* gefneden. Men vindt ze op dezen, als de beide bladen geopend, en in ééne regte lijn uitgeftrekt zijn.

2°.

(*) EDMUND GUNTER, Hoogleeraar te Londen, een beroemd Wiskundige, in 1626. overleden.

2°. De GUNTER's fchaal beftaat uit vier lijnen. De eerfte met de letter *n* beftempeld, is de lijn der Logarithmen van de getallen: de tweede, *s* geteekend, is die van de Logarithmen der *finusfen*: en de derde, gemerkt *t*, is die van de logarithmen der *tangenten*. Somtijds is er nog eene vierde (*s. v.*) voor den *finus verfus*.

Op de eerfte ftaan de Logarithmen van alle de getallen: zoo immers de eerfte 2 voor 2 genomen wordt, is de eerfte 9, het getal negen: de eerfte 10 het getal 10, en zoo voorts. Maar zoo de eerfte 2, voor 20 aangezien wordt, zal de eerfte 10 honderd aanduiden, en 70 zevenhonderd: enz. en zoo de eerfte 2, tweehonderd aanduidt, is de eerfte 10, duizend, en 70, is 7000 enz.

3°. Iedere dezer lijnen wordt afzonderlijk en op zich zelve gebruikt: of wel die der *finusfen*, en *tangenten* worden gebruikt veréénigd met die der getallen.

4°. Wanneer nu de eerfte lijn alleen gebruikt wordt, dient zij om, bij enkele afpasfing eenen regel van drieën optelosfen; immers zij $a:b = c:x$; is $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$: en dus Log. a — Log. b = Log. c — Log. x: het verfchil der Logarithmen van a en b is dan gelijk aan dat van c en x. Derhalve indien men de eene punt eens pasfers ftelt op a, de andere op b; is de ruimte door de punten bevat Log. a — Log. b. Zoo men dan nu de eene punt op c ftelt, zal de andere op x vallen, aan de regterhand zoo $b > a$, aan de linker zoo $b < a$, en x wordt bekend.

Op de zelfde wijze dienen de lijnen van *finus* en *tangent* ieder afzonderlijk: en dus indien *fin.* a: *fin.* b = *fin.* c: *fin.* x, is Log. *fin.* a — Log. *fin.* b = Log. *fin.* c — Log. *fin* x; en men gaat op de zelfde wijze te werk.

5°. De tweede en derde lijn worden met de eerfte veréénigd gebruikt, om eene vierde evenredige te zoeken, wanneer twee leden getallen zijn, de twee overige *finusfen*, of *tangenten*.

Zij $a:b$ = *fin.* c: *fin.* x. Dan is Log. a — Log. b = Log. *fin.* c — Log *fin.* x. Men neemt op de lijn der getallen Log. a — Log. b: men ftelt de eene punt des pasfers, welke dat verfchil heeft afgepast, op de lijn der *finusfen* in c: de andere punt valt op x, aan de regter hand indien $b > a$; aan de linker indien $a > b$; en de hoek x is gevonden.

6°. Het gebruik der lijn van *tangenten* gaat op de zelf-

zelfde wijze voort: maar, vermits dezelve op 45°. schijnt te eindigen, zoude men verlegen kunnen staan, als men *tangenten* ontmoet van bogen, of hoeken, die grooter dan 45° zijn. Dit geval moet dus naauwkeurig ontwikkeld worden.

Ten dien einde zal het noodig zijn te doen opmerken, dat *Logarithmen tangenten* zoodanige getallen zijn, dat Log. *tang. a* zoo veel boven of onder Log. van den *radius*, dat is boven of onder *Log. tang* 45° staat, als die van tang. ($90° - a$) of van *cot. a* er onder of boven is. Immers *tang. a* $= \frac{r^2}{cot.\ a}$ (Voorst. XXVI.): derhalve Log. *tang.* $a =$ 2 Log. r — Log. *cot.* a; of Log. *tang.* a — Log. r $=$ Log. r — Log. *cot* a: en daarom zijn ook op de lijn der *tangenten* dubbelde cijfferletters: van de linker naar de regter hand van 1 tot 45; van de regter naar de linker van 45 tot 50, 60, 70 enz. zoo dat 50 en 40, 60 en 30, 70 en 20 op de zelfde stippen staan: dat is a en complement a.

7°. Dit gesteld zijnde: dat a en b twee getallen zijn op de lijn der getallen, d een gegeven, en x een gezogte boog of hoek: en zij verder

$$a : b = tang.\ d : tang.\ x$$

dan is *Log.* a — *Log.* b $=$ *Log. tang.* d — *Log. tang.* x.

1°. Indien $a > b$: en $d < 45°$: is zeker x ook $< 45°$: en derhalve is die *tangent* onmiddelijk op de schaal te vinden.

2°. Indien $b > a$ en $d > 45°$: is x ook $> 45°$ en dan werkt men door de *cotangenten*, zeggende

$$a : b = \frac{r^2}{cot.\ d} : \frac{r^2}{cot.\ x} = cot.\ x : cot.\ d,$$

en dus Log. b — Log. a $=$ L. *cot.* d — L. *cot.* x: dus wordt *cot.* x onmiddelijk gevonden: en gelijk men voor d het complement van den gegeven hoek genomen heeft, neemt men het complement van x om den begeerden hoek te krijgen:

Maar indien 3°. $a > b$: en $d > 45°$: kan $x < 45°$ zijn: zij dan

$$a : b = \frac{r^2}{cot.\ d} : tang.\ x;\ \text{dan is}$$

L.

$$L.\,a - L.\,b = (L\,r^2 - L.\,cot.\,d) - Log.\,tang.\,x$$
$$= 2\,L.\,r - Log.\,cot.\,d - Log.\,tang.\,x$$
$$= (L.\,r - Log.\,cot.\,d) + (L.\,r - Log.\,tang\,x)$$

en dus

$$(L.\,a - Log\,b) - (L.\,r - Log.\,cot.\,d) = L.\,r - L.\,tang\,x.$$

Men neemt dan eerst op de schaal, met den passer, het verschil van $L.\,a$ en $L.\,b$: men zet de eene punt van den passer op 45°, dat is op $L.\,r$, en men ziet of de afstand van 45° tot d, nemende voor d het complement van den gegeven hoek, kleiner of grooter is dan de opening van den passer, dat is dan $(L.\,a - L.\,b)$. Men laat die tweede punt daar hij komt: en brengt de eerste van 45° op d: dan heeft men eene opening van den passer gelijk aan $(L.\,a - L.\,b) - (L.\,r - L.\,cot.\,d)$, en derhalve gelijk aan $L.\,r - Log.\,tang.\,x$. Men stelt dan de eene punt van die opening op 45°: en ziet waar de andere valt: zoo nu $L.\,r - L.\,cot.\,d > L.\,a - L.\,b$ is $L.\,tang.\,x > L.\,r$, of $tang.\,x > r$, of $x > 45°$: en men neemt het complement der graden waarop de punt valt. Indien $L.\,a - L.\,b > L.\,r - cot.\,d$: is $L.\,tang.\,x < L.\,r$ en $x < 45°$.

8°. Indien dan 4°. $a < b$, en $d < 45°$: zoude in de uitdrukking $a : b = tang.\,d : tang.\,x$, $x > 45°$ kunnen zijn: doch alle twijfeling hoe te handelen zal wegvallen, indien men in plaats van $tang.\,x$ stelt $\frac{r^2}{cot.\,x}$: dan is: $a : b = tang.\,d : \frac{r^2}{cot.\,x}$

$$L.\,b - Log.\,a = L\frac{r^2}{cot.\,x} - Log.\,tang.\,d$$
$$= 2\,L.\,r - L.\,cot.\,x - Log.\,tang.\,d$$
$$= L.\,r - Log\,tang.\,d + L.\,r - L.\,cot\,x$$

en $(L.\,b - Log.\,a) - (L.\,r - Log.\,tang\,d) = L.\,r - L\,cot\,x.$

Men handelt gelijk in Nº. 3: en weet dat $x >$ of $<$ 45° is, naar mate $(L.\,r - Log.\,tang.\,d) >$ of $< (L.\,b - L.\,a)$.

III. OVER DE SCHUIFSCHAAL.

1°. Bij de GUNTER's *schaal* wordt een passer gebruikt, om de noodige afpassing te doen. Bij de schuifschaal is geen passer noodig. Ten dien einde, is er midden in de schaal eene sleuf, waarin zich een liniaal, of eene schuif, beweegt, die het werk des passers waarneemt.

Ten dien einde is er, (om nu niet van de overige lijnen te ſpreken, die zich doorgaans op ſchuifſchalen, even als op pleinſchalen, bevinden,) op de eene zijde, aan den eenen kant langs de ſleuf eene lijn van *tangenten*, aan den anderen eene lijn van *ſinusſen*, welke van den zelfden aard zijn als op de GUNTER's ſchaal.

Op de andere zijde is langs de ſleuf eene lijn van getallen of *num.* even als op de GUNTER's ſchaal.

Op de eene zijde van het liniaal, of van de ſchuif is langs den eenen kant eene lijn van *ſinusſen* en langs den anderen eene van *tangenten*: op de andere zijde, zijn langs de beide kanten lijnen van getallen: alle deze lijnen zijn van den zelfden aard als op de GUNTER's ſchaal.

2°. Indien men de evenredigheid oploſſen wil $a : b = c : x$: ſtelt men het liniaal zoodanig in de ſleuf dat de lijn der getallen op dezelve, langs de lijn der getallen op de ſchaal zelve bewogen worde: men neemt *a* en *b* op het liniaal: ſchuive het tot dat *b* over *c* ſtaat, zoo $b < a$: dan zal het getal dat op de ſchaal over *c* van het liniaal, of van de ſchuif, aan de linker hand ſtaat, *x* zijn: want dan is de afſtand Log. *a* — Log. *b* gelijk aan den afſtand Log. *c* — Log. *x*.

Indien $b > a$: zal men *a* onder *c* brengen, het getal dat aan de regterhand boven *c* ſtaat is *x*.

3°. Indien men heeft $a : b = \text{ſin. } a : \text{ſin. } x$ of $a : b = \text{tang. } c : \text{tang. } x$, zal men het liniaal, of de ſchuif, zoodanig in de ſleuf ſtellen, dat de lijn der getallen op de ſchuif, overeenkome met die der *ſinusſen*, of der *tangenten* op de ſchaal, en men werke op de zelfde wijze.

4°. Op de ſchuifſchaal is ook doorgaans eene lijn geteekend S R. of S. *Rumb* beteekenende *ſinus-rumb*: en ſomtijds nog eene andere T. R. of *tang. rumb*: de eene bevat de Logarithmen *ſinus* en de andere de Logarithmen *tangent* der hoeken (genaamd *Rhumb*) of der compasſtreeken: en beide worden alleen gebruikt in verband met de lijn der getallen. Zij dienen den zeelieden om in eene evenredigheid, waarvan de leden uit getallen, en uit *ſinusſen* of *tangenten* van hoeken, die niet in graden en minuten, maar in *ſtreeken*, en gedeelten van dien, opgegeven worden, de vierde evenredige te vinden op de zelfde wijze als men doen zoude met de lijn der *ſinusſen*, of die der *tangenten*, indien de hoeken in graden en minuten opgegeven waren.

IV. AFDEELING.

OVER DE FORMULES VOOR GONIOMETRISCHE LIJNEN.

Men maakt tegenwoordig in de Wiskunde een zeer groot gebruik van de *Goniometrische* lijnen, welke als dan door *formules* worden uitgedrukt, die het gemakkelijk valt in het geheugen te prenten, of zich voor oogen te houden. Verscheide Schrijvers, EULER, CAGNOLI, DE GELDER en anderen, hebben eene menigte opgegeven. Vele derzelve, en welligt alle, kunnen geometrisch, uit de figuur zelve bewezen worden: gelijk, immers voor sommige daarvan, door uitmuntende Schrijvers gedaan is: waar omtrent misschien de meeste eenvoudigheid betracht heeft ROBERTSON in zijne *Elements of Navigation*, Boek IV. §. 169 — § 225. Maar om dat wij de hoofd-*formules* uit geometrische gronden hebben opgemaakt, verkiezen wij nu aantetoonen hoe alle de overige, zonder verder bewijs, uit deze zijn afteleiden. Wij zullen ze, in eenige Voorstellen in behoorlijke orde schikken, op dat men te gemakkelijker die, welke men noodig mogt hebben, zoude kunnen vinden. Alleen zij dit voor uit gesteld, dat in dezelve de eenheid voor den *radius* gesteld is, en derhalve $r = 1$ gehouden wordt.

XXXII. VOORSTEL.

De meest belangrijke uitdrukkingen van *sinussen* en *cosinussen*, in zekere gevallen, zijn in de volgende formules begrepen.

1.	$Sin.\ 0^\circ = 0$	$cos.\ 0 = 1$	Bep. 3. Aanm. en Bep. 4 Aanm.
2.	$Sin.\ 30^\circ = cos.\ 60^\circ = 0.5$		XVI. Gev. 2. (*)
	$Cos.\ 30^\circ = sin.\ 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$		XVII. Gev. 3.
3.	$Sin.\ 45^\circ = cos.\ 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$		XVII. Gev. 2.

4.

(*) De aanhalingen in romeinsche cijffers duiden de Voorstellen aan: die in gewone cijffers de N°. van deze formules.

4.	$Sin.\ 90^\circ = 1 \qquad cos.\ 90^\circ = 0$	Bep. 3. Aanm en Bep. 4. Aanm.
5.	$Sin.\ 180^\circ = 0 \qquad cos.\ 180^\circ = -1$	
6.	$Sin.\ 270^\circ = -1;\ cos.\ 270^\circ = 0$	
7.	$Sin.\ 360^\circ = 0 \qquad cos.\ 360^\circ = 1$	
8.	$Sin.^2\,(B) + cos.^2\,(B) = 1$.	XVII.
9.	$Sin.^2\,(B) = 1 - cos.^2\,(B)$.	XVII. Gev. 1.
	$= (1 - cos.\ B)\,(1 + cos.\ B)$	
	$= sin.\ v.\ B \times sin.\ v.\ sup.\ B$	Bep. 5. Gev.
10.	$Cos.^2\,(B) = 1 - sin.^2\,(B)$.	XVII. Gev. 1.
11.	$Sin.\ (B + C) = sin.\ B\ cos.\ C + sin.\ C\ cos.\ B$	XXI.
12.	$Sin.\ (B - C) = sin.\ B\ cos.\ C - sin.\ C\ cos.\ B$	
13.	$Cos.\ (B + C) = cos.\ B\ cos.\ C - sin.\ B\ sin.\ C$	XXII.
14.	$Cos.\ (B - C) = cos.\ B\ cos.\ C + sin.\ B\ sin.\ C$	
15.	$Sin.\ 2\,B = 2\ sin.\ B\ cos.\ B$ . .	Uit 11 zoo B = C.
16.	$Cos.\ 2\,B = cos.^2\,(B) - sin.^2\,(B)$	Uit 13 zoo B = C.
17.	$Cos.\ 2\,B = 2\ cos.^2\,(B) - 1$.	Uit 16. 9.
18.	$Cos.\ 2\,B = 1 - 2\ sin.^2\,(B)$.	Uit 16. 10.
19.	$Sin.\,(90^\circ + C) = cos.\ C$ . . .	11. 12. 4.
20.	$Cos.\,(90^\circ \pm C) = \mp\ sin.\ C$ . .	13. 14. 4.
21.	$Sin.\,(180^\circ \pm C) = \mp\ sin.\ C$ . .	11. 12. 5.
22.	$Cos.\,(180^\circ \pm C) = -\ cos.\ C$ . .	13. 14. 5.
	Voor $Sin.\ (B + C) + sin.\ (B - C)$	Zie N°. 38. 39. 41. 42.
	$Sin.\ (B - C) - sin.\ (B - C)$	
	$Cos.\ (B + C) + cos.\ (B - C)$	
	$Cos.\ (B - C) - cos.\ (B - C)$	
23.	$Sin.\ (B + C).\ sin.\ (B - C) = sin.^2\,B - sin.^2\,C$	Uit 11 en 12: stellende uit 9 en 10.
	$= cos.^2\,C - cos.^2\,B$	voor $sin.^2B$ en $sin.^2C$ derzelver waarde.
24.	$Sin.\ (B + C).\ cos\ (B - C) = \dfrac{sin.\ 2\,B + sin.\ 2\,C}{2}$	Uit 11 en 14: daarna uit 8 en 15.
25.	$Sin.\ (B - C).\ cos.\ (B + C) = \dfrac{sin.\ 2\,B - sin.\ 2\,C}{2}$	Uit 12 en 13: daarna uit 8 en 15.

26.

26. $\text{Sin.}(B+C)\,\text{cos.}(B+C) = \dfrac{\text{sin.}\,2B\,\text{cos.}\,2C + \text{sin.}\,2C\,\text{cos.}\,2B}{2}$	Uit 11 en 13; dan 8, 15, 16.
27. $\text{Sin.}(B-C)\,\text{cos.}(B-C) = \dfrac{\text{sin.}\,2B\,\text{cos.}\,2C - \text{sin.}\,2C\,\text{cos.}\,2B}{2}$	Uit 12 en 14; dan 15, 16.
28. $\text{Cos.}(B+C)\,\text{cos.}(B-C) = \text{cos.}^2B - \text{sin.}^2C$ $= \text{cos.}^2C - \text{sin.}^2B$	Uit 13, 14 en dan substitueerende uit 9 en 10 voor cos.^2B en voor sin.^2C.
29. $\text{Sin.}^2(\frac{1}{2}B) = \dfrac{1 - \text{cos.}\,B}{2}$ . . .	18.
30. $\text{Cos.}^2(\frac{1}{2}B) = \dfrac{1 + \text{cos.}\,B}{2}$ . .	18.
31. $\text{Sin.}\,\frac{1}{2}(B+C)\,\text{sin.}\,\frac{1}{2}(B-C) = \dfrac{\text{cos.}\,B - \text{cos.}\,C}{2}$	Uit 23 stellende $\frac{1}{2}$ B, en $\frac{1}{2}$ C voor B en C: en dan uit 29.
32. $\text{Cos.}\,\frac{1}{2}(B+C)\,\text{cos.}\,\frac{1}{2}(B-C) = \text{cos.}^2(\frac{1}{2}C) - \text{sin.}^2(\frac{1}{2}B)$ $= \text{cos.}^2(\frac{1}{2}B) - \text{sin.}^2(\frac{1}{2}C)$	Uit 28 en dan uit 30.
33. $\text{Sin.}\,B + \text{sin.}\,C = 2\,\text{sin.}\,\frac{1}{2}(B+C)\,\text{cos.}\,\frac{1}{2}(B-C)$	Uit 24.
34. $\text{Sin.}\,B - \text{sin.}\,C = 2\,\text{sin.}\,\frac{1}{2}(B-C)\,\text{cos.}\,\frac{1}{2}(B+C)$	Uit 25.
35. $\text{Cos.}\,B + \text{cos.}\,C = 2\,\text{cos.}\,\frac{1}{2}(B+C)\,\text{cos.}\,\frac{1}{2}(B-C)$	Uit 23 en dan 30.
36. $\text{Cos.}\,C - \text{cos.}\,B = 2\,\text{sin}\,\frac{1}{2}(B+C)\,\text{sin.}\,\frac{1}{2}(B-C)$ $\text{Cos.}\,C - \text{cos.}\,B$. Zie N°. 48.	Uit 23 en dan 29.
37. $\text{Sin.}\,B\,\text{cos.}\,C = \text{sin.}\,B - 2\,\text{sin.}^2(\frac{1}{2}C)\,\text{sin.}\,B$	Uit 29 gemultipliceerd door *sin.* B.
38. $\text{Sin.}\,B\,\text{cos.}\,C = \frac{1}{2}\text{sin.}(B+C) + \frac{1}{2}\text{sin}\,(B-C)$	Som van 11 en 12.
39. $\text{Sin}\,C\,\text{cos.}\,B = \frac{1}{2}\text{sin.}(B+C) - \frac{1}{2}\text{sin.}(B-C)$	Verschil van 11 en 12.
40. $\text{Cos.}\,B\,\text{cos}\,C = \text{cos.}\,C - 2\,\text{sin.}^2\,\frac{1}{2}B\,\text{cos.}\,C$.	Uit 29 gemultipliceerd door *cos.* C.
41. $\text{Cos.}\,B\,\text{cos.}\,C = \frac{1}{2}\text{cos.}(B+C) + \frac{1}{2}\text{cos.}(B-C)$	Som van 13 en 14.
42. $\text{Sin}\,B\,\text{sin.}\,C = \frac{1}{2}\text{cos.}(B-C) - \frac{1}{2}\text{cos.}(B+C)$	Verschil van 13 en 14.
43. $\text{Sin.v.}\,B = 1 - \text{cos.}\,B$ } Indien $B < 90°$	Bep. V. Gev.
44. $\text{Sin.v.}\,B = 2\,\text{sin.}^2(\frac{1}{2}B)$ }	Uit 43 en 29.

45. $Sin.\ v.\ B = 1 + cos.\ B$ — Uit Bep. V. Gev.

46. $Sin.\ v.\ B = 2\ cos.^2\ (\tfrac{1}{2}\ B)$ — Uit 45 en 30.

(45 en 46:) Indien B > 90°

47. $Sin.\ v.\ B = \dfrac{sin.^2\ (B)}{sin.\ v.\ sup.\ B}$ — altijd het zij B > 90° of B < 90° — Uit XVIII. Gev.

48. $Sin.\ v.\ B - sin.\ v.\ C = cos.\ C - cos.\ B$ — Uit 43.

---

49. $Tang.\ B = \dfrac{sin.\ B}{cos.\ B}$

50. $Cot.\ B = \dfrac{cos.\ B}{sin.\ B}$ — Uit XXV.

50*. $Cot.\ B = cosec.\ B + tang.\ \tfrac{1}{2}\ B$ fout — Zie hier onder 75.

51. $Tang.\ B = \dfrac{1}{cot.\ B}$

52. $Cot.\ B = \dfrac{1}{tang.\ B}$ — Uit XXVI. Gev. 1.

53. $Tang.\ 45° = cot.\ 45° = 1$ — Uit XXV. Gev. 1.

---

54. $Tang.\ B + tang.\ C = \dfrac{sin.\ (B + C)}{cos.\ B\ .\ cos.\ C}$ — Nemende uit 49 de som der breuken *tang.* B en *tang.* C: en reduceerende door 11.

55. $Tang.\ B - tang.\ C = \dfrac{sin.\ (B - C)}{cos.\ B\ .\ cos.\ C}$ — Nemende uit 49 het verschil der breuken *tang.* B en *tang.* C: en reduceerende door 12.

56. $Cot.\ B + cot.\ C = \dfrac{sin.\ (B + C)}{sin.\ B\ .\ sin.\ C}$ — Nemende uit 50 de som van *cot.* B en *cot.* C: en reduceerende door 11.

57. $Cot.\ C - cot.\ B = \dfrac{sin.\ (B - C)}{sin.\ B\ .\ sin.\ C}$ — Nemende uit 50 het verschil van *cot.* C en *cot.* B: en reduceerende door 12.

58. $Tang.\ B + tang.\ C = cot.\ B + cot.\ C$ — Uit 54 en 56.

59. $Tang.\ B - tang.\ C = cot.\ C - cot.\ B$ — Uit 55 en 57.

60. $Tang.^2\ B - tang.^2\ C = \dfrac{sin\ (B - C)\ .\ sin.\ (B + C)}{cos.^2\ B\ .\ cos.^2\ C}$ — Multipl. 54 door 55

61.

61. $$Tang.^2\,B - tang^2\,C = \frac{sin.^2\,B - sin.^2\,C}{cos.^2\,B\,.\,cos.^2\,C}$$ Uit 60 en 23.

$$= \frac{cos^2\,C - sin.^2\,B}{cos.^2\,B\,.\,cos.^2\,C}$$

62. $$Cot.^2\,C - cot.^2\,B = \frac{sin.(B-C)\;sin.(B+C)}{sin.^2\,B\,.\,sin.^2\,C}$$ Multipl. 56 door 57.

63. $$Cot.^2\,C - cot.^2\,B = \frac{sin.^2\,B - sin.^2\,C}{sin.^2\,B\,.\,sin.^2\,C}$$ Uit 62 en 23.

---

64. $$Tang.\,(B+C) = \frac{tang.\,B + tang\,C}{1 - tang.B\,.\,tang.\,C}$$ Divid. 11 door 13: en dan div. door *sin.* B . *cos.* C onder en boven.

65. $$Tang.\,(B-C) = \frac{tang.\,B - tang.\,C}{1 + tang.\,B\,.\,tang.\,C}$$ Divid. 12 door 14: en dan divid. boven en onder door *sin.* B . *cos.* B.

66. $$Cot.\,(B+C) = \frac{1 - tang.\,B\,.\,tang.\,C}{tang.\,B + tang.\,C}$$ Uit 64 en 52.

67. $$Cot.\,(B-C) = \frac{1 + tang.\,B\,.\,tang.\,C}{tang.\,B - tang.\,C}$$ Uit 65 en 52.

68. $$Tang.\,(45^\circ \pm B) = \frac{1 \pm tang.\,B}{1 \mp tang.\,B}$$ Uit 64 en 53.

69. $$Tang.\,2\,B = \frac{2\,tang\,B}{1 - tang.^2\,B}$$ XXVIII. Gev.

---

70. $$Tang.\,\tfrac{1}{2}\,B = \sqrt{\frac{1 - cos.\,B}{1 + cos.\,B}}$$ Divid. 29 door 30.

71. $$Tang.\,\tfrac{1}{2}\,B = \frac{sin.\,B}{1 + cos.\,B}$$ Multipl. 70 boven en onder door 1 + *cos.* B, en dan door 9, en trekkende den wortel.

72. $$Tang.\,\tfrac{1}{2}\,B = \frac{sin.^2\,B}{sin.\,B\,(1 + cos.\,B)}$$ Uit 71.

72*. $\textit{Tang.}\ \frac{1}{2}\,B = \dfrac{1 - \textit{cos.}^2\,B}{\textit{sin.}\,B\,(1 + \textit{cos.}\,B)}$ — Uit 72. en 8.

73. $\textit{Tang.}\ \frac{1}{2}\,B = \dfrac{1 - \textit{cos.}\,B}{\textit{sin.}\,B}$ — Uit 72: div. door $1 + \textit{cos.}\,B$.

74. $\textit{Tang.}\ \frac{1}{2}\,B = \dfrac{1}{\textit{sin.}\,B} - \textit{cot.}\,B$. — Uit 73 en 50.

75. $\textit{Tang}\ \frac{1}{2}\,B = \textit{cosec.}\,B - \textit{cot.}\,B$. — Uit 74: en hier onder 88.

Waaruit $\textit{cot.}\,B = \textit{cosec}\,B - \textit{tang.}\ \frac{1}{2}\,B$.

Zie ook het bewijs van N°. 129.

76. $\textit{Tang.}\,(45^\circ \pm \frac{1}{2}B) = \dfrac{\textit{cos.}\ \frac{1}{2}\,B \mp \textit{sin.}\ \frac{1}{2}\,B}{\textit{cos.}\ \frac{1}{2}\,B \pm \textit{sin.}\ \frac{1}{2}\,B}$ — Stellende 45° voor B en ½ B voor C in 11 en 14: dividerende 11 door 14: en in de reductie lettende op 3.

77. $\textit{Tang.}^2\,(45^\circ \pm \frac{1}{2}B) = \dfrac{1 \pm \textit{sin.}\,B}{1 \mp \textit{sin.}\,B}$. — Brengende N°. 76 in het vierkant en in de reductie lettende op 15.

78. $\textit{Tang.}\ \frac{1}{2}\,(B + C) = \dfrac{\textit{sin.}\,B + \textit{sin.}\,C}{\textit{cos.}\,B + \textit{cos.}\,C}$ — Divid. 33 door 35: en dan door 49.

79. $\textit{Cot}\ \frac{1}{2}\,(B + C) = \dfrac{\textit{sin.}\,B - \textit{sin.}\,C}{\textit{cos.}\,C - \textit{cos.}\,B}$ — Divid. 34 door 36: en dan door 50.

80. $\textit{Tang.}\ \frac{1}{2}\,(B - C) = \dfrac{\textit{sin.}\,B - \textit{sin.}\,C}{\textit{cos.}\,B + \textit{cos.}\,C}$ — Divid. 34 door 35: en dan door 49.

81. $\textit{Cot.}\ \frac{1}{2}\,(B - C) = \dfrac{\textit{sin}\,B + \textit{sin.}\,C}{\textit{cos.}\,C - \textit{cos.}\,B}$ — Divid. 33 door 36: en dan door 50.

82. $\dfrac{\textit{Tang}\ \frac{1}{2}\,(B + C)}{\textit{Tang.}\ \frac{1}{2}\,(B - C)} = \dfrac{\textit{sin.}\,B + \textit{sin.}\,C}{\textit{sin.}\,B - \textit{sin.}\,C}$ — Divid. 78 door 80.

83. $\dfrac{\textit{Cot.}\ \frac{1}{2}\,(B + C)}{\textit{Tang.}\ \frac{1}{2}\,(B - C)} = \dfrac{\textit{cos.}\,B + \textit{cos.}\,C}{\textit{cos.}\,C - \textit{cos.}\,B}$ — Divid. 79 door 80.

83*. $\textit{Sec.}\,B = \textit{tang.}\,B + \textit{tang.}\ \frac{1}{2}\ \textit{compl.}\,B$ — Uit XXX.

84. $\textit{Sec.}\,B = \dfrac{1}{\textit{cos.}\,B}$ . . . . — Uit XXXI. Gev.

85. $Sec.\ B = \sqrt{1 + tang.^2\ B}$ . . . Uit XXXI.

86. $Sec.\ B = \dfrac{1 + tang.^2\ (\frac{1}{2}\ B)}{1 - tang.^2\ (\frac{1}{2}\ B)}$ (*)

87. $Sec.\ B = 1 + tang.\ B\ .\ tang.\ (\frac{1}{2}\ B)$ (†)

88. $Cosec.\ B = \dfrac{1}{sin.\ B}$ . . . Uit XXXI. Gev. 1.

89. $Cosec.\ B = \sqrt{1 + cot.^2\ B}$ . . . Uit XXXI.

AANMERKING. De voorgaande formules bevatten in zich uitdrukkingen van *sinus* B, *cosinus* B, en *tang.* B, welke dikwerf gebruikt worden, en die het derhalve nuttig zijn zal onder drie Voorstellen hier bij te voegen: zij zijn alle uit CAGNOLI genomen.

XXXIII. VOORSTEL.

De *sinus* van eenen hoek B kan door de volgende formules uitgedrukt worden.

90. $Sin.\ B = \sqrt{1 - cos.^2\ (B)}$ . . Uit 9.

91. $Sin.\ B = cos.\ B\ .\ tang.\ B$ . . Uit 49.

92.

(*) Neem uit 71 de waarde van *tang.* (½ B) dan is $\dfrac{1 + tang^2\ (\frac{1}{2}\ B)}{1 - tang.^2\ (1\ B)} =$

$$\frac{1 + \dfrac{sin.^2\ B}{(1 + cos.\ B)^2}}{1 - \dfrac{sin.^2\ B}{(1 + cos.\ B)^2}} = \frac{(1 + cos.\ B)^2 + sin.^2\ B}{(1 + cos.\ B)^2 - sin.^2\ B} = \frac{1 + 2\,cos.\ B + cos.^2\ B + sin.^2\ B}{1 + 2\,cos.\ B + cos.^2\ B - sin.^2\ B}$$

$$= (8 \text{ en } 10) = \frac{2 + 2\,cos.\ B}{2\,cos.^2\ B + 2\,cos.\ B} = \frac{1 + cos.\ B}{cos.\ B\,(1 + cos.\ B)} = \frac{1}{cos.\ B} = sec.\ B.$$

(†) Uit N°. 86. is $sec.\ B = \dfrac{1 - tang.^2\ (\frac{1}{2}\ B) + 2\ tang.^2\ (\frac{1}{2}\ B)}{1 - tang.^2\ (\frac{1}{2}\ B)} =$

$1 + tang.\ (\frac{1}{2}\ B) \times \dfrac{tang.\ (\frac{1}{2}\ B)}{1 - tang.^2\ (\frac{1}{2}\ B)} =$ (door N°. 69 stellende ½ B voor B)

$= 1 + tang.\ \frac{1}{2}\ B \times \dfrac{tang\ B}{2}$.

92. $\text{Sin. B} = \dfrac{\text{cos. B}}{\text{cot. B}}$ . . . . Uit 50.

93. $\text{Sin. B} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \text{cot.}^2\ \text{B}}}$ . . . Uit 89 en 88 en 84.

94. $\text{Sin. B} = \dfrac{\text{tang. B}}{\sqrt{1 + \text{tang.}^2\ \text{B}}}$ . . . Uit 49 en 85.

95. $\text{Sin. B} = 2\ \text{sin.}\ (\tfrac{1}{2}\ \text{B})\ \text{cos.}\ (\tfrac{1}{2}\ \text{B})$. Uit 15 : stellende $\tfrac{1}{2}$ B voor B.

96. $\text{Sin. B} = \sqrt{\dfrac{1 - \text{cos. 2 B}}{2}}$. Uit 9 en 17.

97. $\text{Sin. B} = \dfrac{2\ \text{tang.}\ (\frac{1}{2}\ \text{B})}{1 + \text{tang.}^2\ (\frac{1}{2}\ \text{B})}$ (*).

98. $\text{Sin. B} = \dfrac{2}{\text{cot.}\ (\frac{1}{2}\ \text{B}) + \text{tang.}\ (\frac{1}{2}\ \text{B})}$ Uit 98: div. door $\text{tang.}\ (\tfrac{1}{2}\ \text{B})$ in 52.

99. $\text{Sin. B} = \dfrac{1}{\text{cot. B} + \text{tang.}\ (\frac{1}{2}\ \text{B})}$. Uit 50* en 73.

100. $\text{Sin. B} = 2\ \text{sin.}^2\ (45^\circ + \tfrac{1}{2}\ \text{B}) - 1$ ⎫
101. $\text{Sin. B} = 1 - 2\ \text{sin.}^2\ (45^\circ - \tfrac{1}{2}\ \text{B})$ ⎭ (†)

102. $\text{Sin. B} = \dfrac{1 - \text{tang.}^2\ (45^\circ - \frac{1}{2}\ \text{B})}{1 + \text{tang.}^2\ (45^\circ - \frac{1}{2}\ \text{B})}$. Uit 77.

103.

(*) Uit 96 is $\text{sin. B} = 2\ \text{sin.}\ (\tfrac{1}{2}\ \text{B})\ \text{cos.}\ (\tfrac{1}{2}\ \text{B}) = \dfrac{2\ \text{sin.}\ (\frac{1}{2}\ \text{B})}{\text{cos.}\ (\frac{1}{2}\ \text{B})} \times \dfrac{1}{\text{cos.}^2\ (\frac{1}{2}\ \text{B})}$
$= \dfrac{2\ \text{sin.}\ (\frac{1}{2}\ \text{B})}{\text{cos.}\ (\frac{1}{2}\ \text{B})\ \text{sec.}^2\ (\frac{1}{2}\ \text{B})} = \dfrac{2\ \text{sin.}\ (\frac{1}{2}\ \text{B})}{\text{cos.}\ \frac{1}{2}\ \text{B}\ (1 + \text{tang.}^2\ (\frac{1}{2}\ \text{B}))} = (49) = \dfrac{2\ \text{tang.}\ (\frac{1}{2}\ \text{B})}{1 + \text{tang.}^2\ (\frac{1}{2}\ \text{B})}$.

(†) Door 11 en 3 $\text{sin.}\ (45^\circ \pm \tfrac{1}{2}\ \text{B}) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\ (\text{cos.}\ \tfrac{1}{2}\ \text{B}) \pm \text{sin}\ (\tfrac{1}{2}\ \text{B})$ en $2\ \text{sin.}^2\ (45^\circ \pm \tfrac{1}{2}\ \text{B}) = \text{cos.}^2\ (\tfrac{1}{2}\ \text{B}) \pm \text{sin.}^2\ (\tfrac{1}{2}\ \text{B}) = \text{cos.}^2\ (\tfrac{1}{2}\ \text{B}) + \text{sin.}^2\ (\tfrac{1}{2}\ \text{B}) \pm 2\ \text{sin.}\ (\tfrac{1}{2}\ \text{B})\ \text{cos.}\ (\tfrac{1}{2}\ \text{B}) =$ (door 8 en 15) $= 1 \pm \text{sin. B}$ waaruit het Voorstel volgt.

103. $Sin.\ B = \dfrac{tang.(45^\circ + \frac{1}{2}B) - tang.(45^\circ - \frac{1}{2}B)}{tang.(45^\circ + \frac{1}{2}B) + tang.(45^\circ - \frac{1}{2}B)}$ Uit 77: en reduceerende door 8 en 15.

104. $Sin.\ B = sin.\ (60^\circ + B) - sin.\ (60^\circ - B)$ Nemende uit 11 de waardij van $sin.\ (60 + B)$ en uit 2 die van $cos.\ 60^\circ$.

XXXIV. VOORSTEL.

De *cosinus* van eenen hoek B kan door de volgende formules uitgedrukt worden.

105. $Cos.\ B = \sqrt{1 - sin.^2 (B)}$ . . Uit 10.

106. $Cos.\ B = \dfrac{sin.\ B}{tang.\ B}$ . . Uit 49.

107. $Cos.\ B = sin.\ B \cdot cot.\ B$ . . Uit 50.

108. $Cos.\ B = \dfrac{1}{\sqrt{(1 + tang.^2\ B)}} = \dfrac{1}{sec.\ B}$ Uit 84 en 85.

109. $Cos.\ B = \dfrac{cot.\ B}{\sqrt{(1 + cot.^2\ B)}}$ . . Uit 50 en 89.

110. $Cos.\ B = cos.^2 (\frac{1}{2} B) - sin.^2 (\frac{1}{2} B)$. Uit 16 stellende ½ B voor B.

111. $Cos.\ B = 1 - 2\ sin.^2 (\frac{1}{2} B)$ . . Uit 18.

112. $Cos.\ B = 2\ cos.^2 (\frac{1}{2} B) - 1$ . . Uit 80.

113. $Cos.\ B = \sqrt{\dfrac{1 + cos.\ 2B}{2}}$ . . Uit 17.

114. $Cos.\ B = \dfrac{1 - tang.^2 (\frac{1}{2} B)}{1 + tang.^2 (\frac{1}{2} B)}$ . . Uit 73 in het vierkant gebragt: en dan reduceer. door 8.

115. $Cos.\ B = \dfrac{cot.\ (\frac{1}{2} B) - tang.\ (\frac{1}{2} B)}{cot.\ (\frac{1}{2} B) + tang.\ (\frac{1}{2} B)}$. Uit 73: nemende $\dfrac{sin.\ B}{1 - cos.\ B}$ voor $cot.\ \frac{1}{2}\ B$: en reduceerende door 8.

116. $Cos.\ B = \dfrac{1}{1 + tang.\ B \cdot tang.\ \frac{1}{2} B}$. Uit 49 en 73.

117. $Cos.\ B = \dfrac{2}{tang.(45^\circ + \frac{1}{2}B) + cot.(45^\circ + \frac{1}{2}B)}$ Op dezelfde wijze uit 76: reduceerende, en eindelijk uit 9 en 16.

118. $Cos.\ B = 2\ cos.\ (45^\circ + \tfrac{1}{2} B)\ cos.\ (45^\circ - \tfrac{1}{2} B)$	Uit 28 ſtellende 45° voor B : $\tfrac{1}{2}$ B voor C en dan door 3.
119. $Cos.\ B = cos.\ (60^\circ + B) + cos.\ (60^\circ - B)$	Uit 41 ſtellende 60° voor B en B voor C en dan door 2.

XXXV. VOORSTEL.

De *tangent* van eenigen hoek B kan door de volgende formules uitgedrukt worden.

120. $Tang.\ B = \dfrac{sin.\ B}{cos.\ B}$ . . .	Zie boven 49.
121. $Tang.\ B = \dfrac{1}{cot.\ B}$ . . .	Zie boven 51.
122. $Tang.\ B = \sqrt{\left(\dfrac{1}{cos.^2\ B} - 1\right)}$ . .	Uit 35 en 84.
123. $Tang.\ B = \dfrac{sin.\ B}{\sqrt{1 - sin.^2\ (B)}}$.	Uit 120 en 105.
124. $Tang.\ B = \dfrac{\sqrt{(1 - cos.^2\ B)}}{cos.\ B}$.	Uit 120 en 90.
125. $Tang.\ B = \dfrac{2.\ tang.\ (\tfrac{1}{2} B)}{1 - tang.^2\ (\tfrac{1}{2} B)}$.	Uit 69: ſtellende $\tfrac{1}{2}$ B voor B.
126. $Tang.\ B = \dfrac{2.\ cot.\ (\tfrac{1}{2} B)}{cot.^2\ (\tfrac{1}{2} B) - 1}$ . .	Uit 125: multipl. door $cot^2\ (\tfrac{1}{2} B)$ en reduc. door 121.
127. $Tang.\ B = \dfrac{2}{cot.\ (\tfrac{1}{2} B) - tang.\ (\tfrac{1}{2} B)}$	Uit 126: divid. door $cot.\ \tfrac{1}{2} B)$ en dan door 121.
128. $Tang.\ B = cot.\ B - 2\ cot.\ 2\ B$ (*)	
129. $Tang\ B = \dfrac{1 - cos.\ 2\ B}{sin\ 2\ B}$ . .	Uis 73: ſtellende B voor $\tfrac{1}{2}$ B.
130. $Tang.\ B = \dfrac{sin.\ (2\ B)}{1 + cos.\ 2\ B}$ . .	Uit 71: ſtellende B voor $\tfrac{1}{2}$ B.
131. $Tang.\ B = \sqrt{\dfrac{1 - cos.\ 2\ B}{1 + cos.\ 2\ B}}$.	Uit 70: ſtellende B voor $\tfrac{1}{2}$ B.
132. $Tang.\ B = \dfrac{tang.\ (45^\circ + \tfrac{1}{2} B) - tang.\ (45^\circ + \tfrac{1}{2} B)}{2}$	Uit 103 en 102.

(*) Uit 127 is $cot.\ (\tfrac{1}{2} B) - tang.\ (\tfrac{1}{2} B) = \dfrac{2}{tang.\ B} = 2\ cot.\ B.$

en dus

$tang.\ (\tfrac{1}{2} B) = cot.\ (\tfrac{1}{2} B) - 2\ cot.\ B$, waaruit B voor $\tfrac{1}{2}$ B ſtellende het Voorſtel volgt.

V. AFDEELING.

OVER HET GEBRUIK DER SINUSTAFELS, TER GEMAKKELIJKER BEREKENING VAN EENIGE GROOTHEDEN.

XXXVI. VOORSTEL.

Alle grootheden, die ware breuken zijn, en, welke verandering zij ook ondergaan mogen, altoos ware breuken blijven, kunnen als de *sinus* van eenigen boog aangezien worden: en alle grootheden, die breuken zijn, doch van ware breuken gemengde breuken, of geheele getallen, kunnen worden, zoo ver men wil uitgestrekt, kunnen als *tangenten* worden aangemerkt.

BEWIJS. De eenheid voor den *radius* aangenomen zijnde, zijn immers alle *sinussen* breuken: de *tangenten* zijn breuken tot 45° toe, en vervolgens gemengde breuken, of geheele getallen.

AANMERKING. De *secanten*, die altijd grooter dan de *radius* zijn, zijn geheele getallen, of gemengde breuken.

XXXVII. VOORSTEL.

Alle grootheden, die deze gedaante hebben, $ab - cd = x$, welke ook de grootte van a, b, c, d mogen zijn, zijn zoodanig dat men heeft $\sqrt{\frac{cd}{ab}} = cos.\ A$ en $ab - cd = x = cd\,(tang.\ A)^2$.

CAGNOLI. §. 202.

BEWIJS. $x = ab - cd = cd\left(\frac{ab}{cd} - 1\right)$.

Maar $(tang.\ A)^2 = (sec.\ A)^2 - 1 = \frac{1}{(cos.\ A)^2} - 1$, en dus

indien $\frac{1}{(cos.\ A)^2} = \frac{ab}{cd}$, of $cos.\ A = \sqrt{\frac{cd}{ab}}$,

is $ab - cd = cd\left(\frac{1}{cos.\ A^2} - 1\right) = cd\,(tang.\ A)^2 = x$.

GEVOLG.

Daar men altijd $ab = p^2$ en $cd = q^2$ stellen kan, IV. 9. Gev. 11.) heeft men ook,

indien $x = p^2 - q^2$: en $cos. A = \frac{q}{p}$

$x = q^2 (tang. A)^2$.

XXXVIII. VOORSTEL.

Alle grootheden die deze gedaante hebben, $x = ab + cd$, welke ook de grootte van a, b, c, d zijn moge, zijn zoodanig, dat men stellen kan,

$$\sqrt{\frac{cd}{ab}} = tang. A \text{ en } x = \frac{ab}{(cos. A)^2}.$$

BEWIJS. $x = ab + cd = ab\left(1 + \frac{cd}{ab}\right)$.

Maar $\overline{sec. A}^2 = 1 + \overline{tang. A}^2$ (Voorstel XXXI.)

en dus, indien $tang. A = \sqrt{\frac{cd}{ab}}$, is

$$x = ab + cd = ab\,(sec. A)^2 = \frac{ab}{(cos. A)^2} \text{ (Voorst. XXXI.)}$$

I. GEVOLG.

Men kan ook stellen $cot. A = \sqrt{\frac{cd}{ab}}$ en dan hadt men $x = \frac{ab}{(sin. A)^2}$.

II. GEVOLG.

Indien $ab = p^2$; $cd = q^2$; $tang. A = \frac{q}{p}$: is $x = \frac{p^2}{(cos. A)^2}$

XXXIX. VOORSTEL.

Alle grootheden, die deze gedaante hebben $x = \sqrt{p^2 + q^2}$, zijn zoodanig, dat zoo $tang. A = \frac{q}{p}$; $x = \frac{p}{cos. A}$.

CAGNOLI. §. 206.

BEWIJS. $x = \sqrt{p^2 + q^2} = p\sqrt{1 + \frac{q^2}{p^2}}$

Maar

Maar $\frac{1}{cos.\ A} = sec.\ A = \sqrt{1 + (tang.\ A)^2}$. (Voorst. XXXI.)

Zoo dan $tang.\ A = \frac{q}{p}$: is $x = p \times sec.\ A = \frac{p}{cos.\ A}$.

XL. VOORSTEL.

Alle grootheden, die deze gedaante hebben, $x = \sqrt{p^2 - q^2}$, zijn van dien aard, dat zoo $cos.\ A = \frac{q}{p}$; $x = p \cdot sin.\ A$; of $sin.\ A = \frac{q}{p}$: en $x = p \cdot cos.\ A$.

CAGNOLI. §. 208.

BEWIJS $x = \sqrt{p^2 - q^2} = p\sqrt{1 - \frac{q^2}{p^2}}$

Maar $\sqrt{1 - (sin.\ A)^2} = cos.\ A$; of

$\sqrt{1 - (cos.\ A)^2} = sin.\ A$: (Voorst. XVII. 1. Gev.

dus, zoo $\frac{q}{p} = cos.\ A$, is $x = p \cdot sin.\ A$: en

zoo $\frac{q}{p} = sin.\ A$, is $x = p \cdot cos.\ A$.

XLI. VOORSTEL.

Alle grootheden, die deze gedaante hebben, $x = m \times \left(\frac{a \pm b}{a \mp b}\right)$ zijn zoodanig, dat zoo $tang.\ B = \frac{b}{a}$; $x = m \times tang.\ (45° \pm B)$.

CAGNOLI, §. 209.

BEWIJS. $x = m \times \left(\frac{1 \pm \frac{b}{a}}{1 \mp \frac{b}{a}}\right)$; maar, (Voorstel XXXII. N°. 68.)

$tang.\ (45° \pm B) = \frac{1 \pm tang.\ B}{1 \mp tang.\ B}$:

zoo dan $\frac{b}{a} = tang.\ B$, is

$x = m \times tang.\ (45° \pm B)$.
