

www.e-rara.ch

Euklid's Elemente

Euclides

Halle, 1809

ETH-Bibliothek Zürich

Shelf Mark: Rar 21602

Persistent Link: <https://doi.org/10.3931/e-rara-60980>

Drittes Buch.

www.e-rara.ch

Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien – von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material – from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d'imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L'éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes – des débuts de l'imprimerie jusqu'au 20e siècle.

e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

Nutzungsbedingungen Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titelinformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

Terms of Use This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

Conditions d'utilisation Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

Condizioni di utilizzo Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]

E u k l i d ' s E l e m e n t e

D r i t t e s B u c h .

E r k l ä r u n g e n .

1. **Gleiche Kreise** sind, in denen die Durchmesser, oder die vom Mittelpunkte an den Umkreis gezogenen geraden Linien (die Halbmesser) gleich sind.
2. Von einer geraden Linie wird gesagt, sie **berühre** den Kreis, wenn sie ihn trifft und verlängert ihn nicht schneidet.
3. Von Kreisen sagt man, sie **berühren einander**, wenn sie einander treffen, ohne einander zu schneiden.
4. Im Kreise heißen gerade Linien **gleichweit vom Mittelpunkte entfernt**, wenn die aus dem Mittelpunkte auf sie gefällten Perpendikel gleich sind.
5. **Entfernter** aber heißt diejenige, auf welche der größere Perpendikel fällt.
6. Ein **Kreisabschnitt** ist die von einer geraden Linie, (der Grundlinie) und dem (von ihr abgeschnittenen) Umkreise begränzte Figur.
7. Der **Winkel des Abschnittes** ist der von der Grundlinie und dem Umkreise eingeschlossene.
8. Der **Winkel im Abschnitte** hingegen ist derjenige, welchen die geraden Linien einschließen, die von irgend einem Punkte auf dem Umkreise des Abschnitts nach den Endpunkten der Grundlinie gezogen sind.
9. Wenn aber die den Winkel einschließenden geraden Linien ein Stück des Umkreises (einen Bogen) abschneiden, so sagt man, der Winkel **stehe auf demselben**.

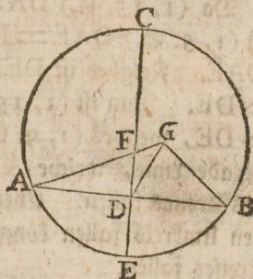
10. Ein

10. Ein **Kreisabschnitt** ist die Figur, welche von den geraden, einen Winkel am Mittelpunkte des Kreises einschließenden, Linien und dem von ihnen abgeschnittenen Bogen begrenzt wird.
11. **Ähnliche Kreisabschnitte** sind, welche gleiche Winkel fassen, oder in denen die Winkel beyderseits gleich sind.

Der 1. Satz. Aufgabe.

Eines gegebenen Kreises, ABC, Mittelpunkt zu finden.

Im Kreise ziehe willkürlich eine gerade Linie AB, halbire sie in D, und errichte auf ihr in D den Perpendikel DC. Verlängere CD bis E, und halbire CE in F: so ist F der gesuchte Mittelpunkt.



Denn wäre F nicht der Mittelpunkt, so sey es irgend ein anderer, etwa G. Ziehe GA, GD, GB. Da $AD = DB$, und GD gemein, auch (1, 15. C.) $AG = GB$: so ist (1, 8. C.) $\angle ADG = \angle GDB$, folglich (1, 10. C.) beyde rechte Winkel. Nun ist auch $\angle CDB = \angle GDB$. Folglich ist (1, 10. C.) $\angle CDB = \angle GDB$, welches (1, 9. C.) unmöglich ist. Demnach ist G nicht der Mittelpunkt des Kreises, und aus eben den Gründen auch kein anderer Punkt außer F. Folglich ist F des gegebenen Kreises Mittelpunkt.

Z u s a t z.

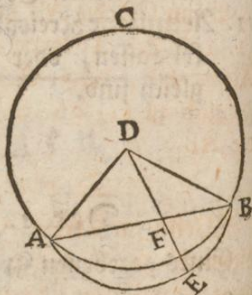
Hieraus erhellet, daß, wenn im Kreise eine gerade Linie von einer andern in der Mitte und unter rechten Winkeln geschnitten wird, in der schneidenden Linie der Mittelpunkt des Kreises sey.

Der

Der 2. Satz. Lehrsat.

Eine gerade Linie, welche zwei beliebige Punkte, A, B, in dem Umringe eines Kreises, ABC, verbindet, fällt innerhalb dieses Kreises.

Ziele diese gerade Linie nicht innerhalb des Kreises, so falle sie außerhalb, wie AEB. Nimm (3, 1. S.) des Kreises Mittelpunkt D, und ziehe DA, DB. Zwischen A, B, nimm in dem Umkreise willkürlich einen Punkt F, ziehe DF, und verlängere sie bis E.



Da (1, 15. S.) $DA = DB$, so ist (1, 5. S.) $DAE = DBE$. Nun ist (1, 16. S.) $DEB > DAE$. Folglich ist $DEB > DBE$, folglich (1, 19. S.) $DB > DE$. Nun ist (1, 15. S.) $DB = DF$. Folglich ist $DF > DE$, welches (1, 9. S.) unmöglich ist. Demnach kann die gerade Linie, welche A und B verbindet, nicht außerhalb des Kreises fallen. Eben so beweiset man, daß sie nicht auf den Umkreis fallen könne. Folglich muß sie innerhalb des Kreises fallen.

Der 3. Satz. Lehrsat.

Wenn im Kreise, ABC, eine durch den Mittelpunkt gehende gerade Linie, CD, eine andere, nicht durch den Mittelpunkt gehende, AB, halbt: so schneidet sie dieselbe unter rechten Winkeln; und wenn sie dieselbe unter rechten Winkeln schneidet: so halbt sie auch dieselbe.

Nimm (3, 1. S.) des Kreises Mittelpunkt E, und ziehe EA, EB.

Erster Theil.

Wenn CD die AB in F halbt: so ist $AF = FB$. Nun ist EF gemein, und (1, 15. S.) $AE = EB$. Folglich



ist (1, 8. G.) $\angle AFE = \angle EFB$, folglich (1, 10. G.) schneidet CD die AB unter rechten Winkeln.

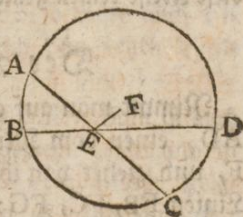
Zweiter Theil.

Wenn CD die AB unter rechten Winkeln schneidet: so ist (1, 10. G.) $\angle AFE = \angle EFB$. Nun ist, weil (1, 15. G.) $AE = EB$, (1, 5. G.) $\angle EAF = \angle EBF$, auch ist EF gemein. Folglich ist (1, 26. G.) $AF = FB$, das ist, CD halbirte die AB.

Der 4. Satz. Lehrsatz.

Wenn im Kreise, ABCD, zwei gerade Linien, AC, BD, die nicht durch den Mittelpunkt gehen, einander schneiden: so halbiren sie einander nicht.

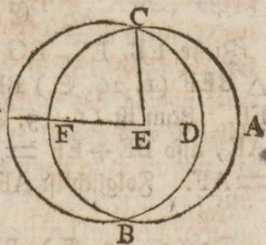
Gesetzt, sie halbiren einander, so daß $AE = EC$, und $BE = ED$: so ist, wenn man des Kreises Mittelpunkt F nimmt, und FE ziehet, (3, 3. G.) FEA sowohl, als FEB ein rechter Winkel, folglich $\angle FEA = \angle FEB$, welches (1, 9. G.) unmöglich ist. Folglich können AC, BD, einander nicht halbiren.



Der 5. Satz. Lehrsatz.

Zwei Kreise, ABC, CDG, die einander schneiden, haben keinen gemeinschaftlichen Mittelpunkt.

Gesetzt, diese Kreise, welche in B, C, einander schneiden, hätten einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt E, so ziehe EC, und willkürlich EF, folglich ist (1, 15. G.) im Kreise, ABC, $EC = EF$, und im Kreise CDG, $EC = EG$, folglich wäre (1, 1. G.) $EG = EF$, welches (1, 9. G.) unmöglich ist. Folglich können diese Kreise keinen gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben.

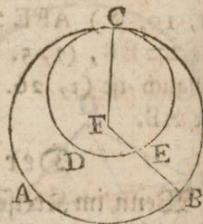


Der

Der 6. Satz. Lehrsatz.

Zwey Kreise, ABC, CDE, deren einer den andern innwendig berührt, haben keinen gemeinschaftlichen Mittelpunkt.

Gesetzt, diese Kreise, welche in C einander berühren, hätten einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt F; so ziehe FC, und willkürlich FEB, folglich ist (I, 15. E.) im Kreise ABC, $FC = FB$, und im Kreise CDE, $FC = FE$, folglich wäre (I, 1. G.) $FB = FE$, welches (I, 9. G.) unmöglich ist. Folglich können diese Kreise keinen gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben.



Der 7. Satz. Lehrsatz.

Nimmt man auf eines Kreises, ABCD, Durchmesser, AD, einen vom Mittelpunkte, E, verschiedenen Punkt, F, und ziehet von ihm an den Umkreis, mehrere gerade Linien FB, FC, FG: so ist die durch den Mittelpunkt, FA, die größte, und das übrige Stück des Durchmessers, FD, die kleinste; unter den übrigen aber immer die der größten, FA, nähere größer als die entferntere. Auch sind von solchen Linien nur je zwey auf beyden Seiten der kleinsten, FD, einander gleich.

Erster Theil.

Ziehe EB, EC, EG: so ist im $\triangle BEF$ (I, 20. E.) $BE + EF > FB$. Nun ist (I, 15. E.) $BE = AE$, also $BE + EF = AE + EF = AF$. Folglich ist $AF > FB$.

Da (I, 15. E.) $BE = CE$, und EF den $\triangle BEF$, $\triangle CEF$, gemein, aber $BEF > CEF$: so ist



(I, 24. S.) $FB > FC$, und aus eben den Gründen $FC > FG$.

Da (I, 20. S.) $GF + FE > EG$, und (I, 15. S.) $EG = ED = DF + FE$: so ist $GF + FE > DF + FE$, folglich (I, 5. S.) $GF > DF$.

Demnach ist FA die größte, FD die kleinste, und unter den Linien FB, FC, FG , immer die der FA nähere größer, als die entferntere.

Zweiter Theil.

An EF setze (I, 23. S.) $FEH = FEG$, und ziehe FH : so ist, weil auch (I, 15. S.) $EH = EG$, und EF gemein, (I, 4. S.) $FH = FG$. Wäre nun außer FH noch irgend eine andere, etwa FK , der FG gleich: so wäre auch $FK = FH$, welches unmöglich, weil nach dem ersten Theile $FK > FH$ ist.

Oder: Wäre $FK = FG$, so ziehe EK . Nun ist auch (I, 15. S.) $KE = EG$, und EF gemein. Folglich ist (I, 8. S.) $KEF = FEG$. Nun war $FEG = FEH$. Folglich wäre $KEF = FEH$, welches (I, 9. S.) unmöglich ist.

Demnach ist an dieser Seite der kleinsten, FD , nur die einzige $FH = FG$.

Der 8. Satz. Lehrsatz.

Nimmt man außerhalb eines Kreises, ABC , einen Punkt D , und ziehet von ihm an den Umkreis mehrere gerade Linien, eine, DA , durch den Mittelpunkt, M , die übrigen beliebig, so ist unter denen, welche den hohlen Umkreis treffen, DA, DE, DF, DC , die durch den Mittelpunkt, DA , die größte; von den übrigen aber immer die der größten, DA , nähere größer, als die entferntere; unter denen hingegen, welche den erhobenen Umkreis treffen, DG, DK, DL, DH , ist die, welche verlängert durch den Mittelpunkt gehet, DG , die kleinste, von den übrigen aber immer

immer die der kleinsten, DG, nähere kleiner, als die entferntere. Auch sind von solchen Linien nur je zwey auf beyden Seiten der kleinsten, DG, einander gleich.

Erster Theil.

Ziehe ME, MF, MC, so ist (1, 20. E.) $DM + ME > DE$. Nun ist (1, 15. E.) $ME = MA$; also $DM + ME = DM + MA = DA$. Folglich ist $DA > DE$.

Da (1, 15. E.) $ME = MF$, und MD gemein, aber $DME > DMF$: so ist (1, 24. E.) $DE > DF$. Und aus eben den Gründen $DF > DC$.

Demnach ist DA die größte, und unter den Linien, DE, DF, DC, immer die der DA nähere größer, als die entferntere.



Zweiter Theil.

Ziehe MK, ML, MH: so ist (1, 20. E.) $MK + KD > MD$, das ist, $> MG + GD$. Nun ist (1, 15. E.) $MK = MG$. Folglich ist $MG + KD > MG + GD$, folglich (1, 3. E.) $KD > GD$, oder $DG < DK$.

Da in den Triangeln MLD, MKD, (1, 21. E.) $MK + DK < ML + DL$, aber (1, 15. E.) $MK = ML$: so ist $ML + DK < ML + DL$, folglich (1, 3. E.) $DK < DL$. Und aus eben den Gründen $DL < DH$.

Demnach ist DG die kleinste, und unter den Linien DK, DL, DH, immer die der DG nähere kleiner, als die entferntere.

Dritter Theil.

An DM setze (1, 23. E.) $DMB = DMK$, und ziehe DB. Nun ist (1, 15. E.) $MB = MK$, auch MD gemein. Folglich ist (1, 4. E.) $DB = DK$. Wäre nun außer DB noch irgend eine andere, etwa DN, der DK gleich, so wäre auch (1, 1. E.) $DN = DB$, welches unmöglich, weil nach dem zweyten Theile $DB < DN$.

Oder:

Oder: Wäre $DN = DK$, so ziehe MN . Nun ist auch $MN = MK$, und MD gemein. Folglich ist (1, 8. S.) $DMK = DMN$. Nun war $DMK = DMB$. Folglich wäre $DMN = DMB$, welches (1, 9. S.) unmöglich.

Demnach ist an dieser Seite der kleinsten DG , nur die einzige $DB = DK$.

Der 9. Satz. Lehrsatz.

Gehen von einem Punkte, D , innerhalb eines Kreises, ABC , an den Umkreis mehr als zwei gleiche gerade Linien, DA, DB, DC : so ist solcher des Kreises Mittelpunkt.

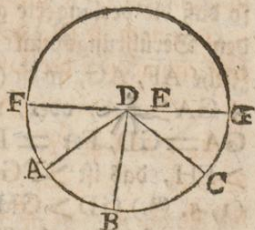
Ziehe AB, BC , und halbire sie (1, 10. S.) in E, F . Ziehe ED, DF , und verlängere sie an beyden Seiten nach G, K, H, L .

Da $AE = EB$, und ED gemein, auch $AD = DB$: so ist (1, 8. S.) $AED = BED$. Folglich (1, 10. S.) jeder dieser Winkel ein rechter.

Demnach wird AB von GK unter rechten Winkeln halbt, folglich ist (3, 1. S.) des Kreises Mittelpunkt in GK ; aus eben den Gründen aber auch in HL . Nun haben GK, HL , nur den Punkt D gemein. Folglich ist D des Kreises ABC Mittelpunkt.



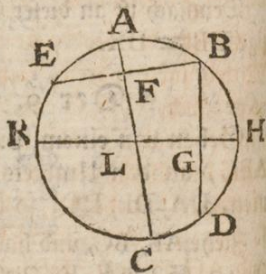
Ein anderer Beweis. Wäre D nicht der Mittelpunkt, so sey es irgend ein anderer, etwa E . Ziehe DE , und verlängere sie an beyden Seiten nach F, G , so wäre also (3, 8. S.) $DC > DB$, und $DB > DA$, gegen das Angenommene $DC = DB = DA$. Demnach kann nicht E der Mittelpunkt seyn; aus eben den Gründen aber auch kein anderer außer D . Folglich ist D des Kreises ABC Mittelpunkt.



Der 10. Satz. Lehrsatz.

Ein Kreis schneidet einen andern, ABC, in nicht mehr als zweyen Punkten.

Gesetzt, der erste Kreis schneide den andern ABC in dreyen Punkten, D, B, E, so ziehe EB, BD, und halbiere sie in F, G. Auf EB, BD, errichte in F, G, die Perpendikel FC, GK, und verlängere sie bis A, H: so ist (3, 1. S.) in CA und KH, folglich in dem einzigen ihnen gemeinschaftlichen Punkte L, des andern Kreises ABC Mittelpunkt. Nun wird eben so bewiesen, daß L auch des ersten Kreises Mittelpunkt sey, welches (3, 5. S.) unmöglich.



Der 11. Satz. Lehrsatz.

Berühren sich zwei Kreise, ABC, ADE, innerhalb: so trifft die gerade Linie, welche beyder Mittelpunkte verbindet, genugsam verlängert, den Berührungspunkt, A.

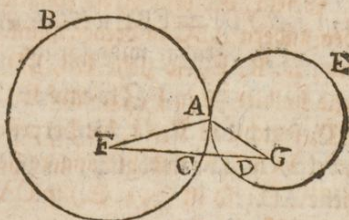
Gesetzt, der beyden Kreise Mittelpunkte wären, wenn es möglich, F, G, so daß die verlängerte gerade Linie FG den Berührungspunkt A nicht trafe. Ziehe AF, AG, so ist (1, 20. S.) $FG + GA > FA$, oder, weil (1, 15. S.) $GA = GD$, $FA = FH$, $FG + GD > FH$, das ist $> FG + GH$, folglich (1, 5. S.) $GD > GH$, welches (1, 9. S.) unmöglich. Dessen nach muß die gerade Linie, welche beyder Kreise Mittelpunkte verbindet, den Berührungspunkt A treffen.



Der 12. Satz. Lehrsatz.

Berühren sich zwei Kreise, ABC , ADE , außerhalb: so geht die gerade Linie, welche beyder Mittelpunkte verbindet, durch den Berührungspunkt, A .

Gesetzt, der beyden Kreise Mittelpunkte wären, wenn es möglich, F , G , so daß die gerade Linie $FCDG$ nicht durch den Berührungspunkt A ginge. Ziehe AF , AG , so ist (1, 15. E.) $AF = FC$,



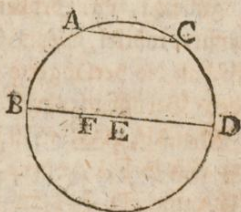
und $AG = GD$, folglich $AF + AG = FC + GD$, folglich $AF + AG < FG$, da doch (1, 20. E.) $AF + AG > FG$. Demnach kann die gerade Linie, welche beyder Kreise Mittelpunkte verbindet, durch keinen andern, als den Berührungspunkt A gehen.

Der 13. Satz. Lehrsatz.

Kreise berühren sich, innerhalb sowohl als außerhalb, in nicht mehr als einem Punkte.

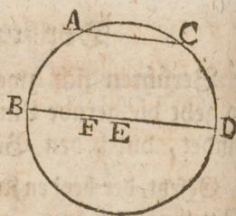
Erster Theil.

Der Kreis $ABCD$ werde inwendig von einem andern in dem Punkte B berührt, auch sey E der Mittelpunkt des ersten, und F der Mittelpunkt des andern Kreises. Ziehet man die gerade Linie EF , so trifft (3, 11. E.) dieselbe verlängert den Berührungspunkt B .



Nun sey, wenn es möglich, noch ein zweyter von B unterschiedener Berührungspunkt, der aber kein anderer als D , welchen (3, 11. E.) die verlängerte EF trifft, seyn könnte.

Da E der Mittelpunkt des ersten Kreises: so ist (1, 15. E.) $DE = EB$, folglich $DE > FB$, folglich noch vielmehr $DF > FB$. Nun ist F der Mittelpunkt des andern Kreises, folglich (1, 15. E.) $DF = FB$; welches jenem, $DF > FB$, offenbar widerspricht.



Zweiter Theil.

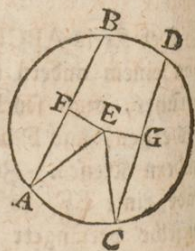
Gesetzt, der Kreis ABCD, würde auswendig von einem andern, wenn es möglich, in zweyen Punkten A, C, berührt. Ziehe AC.

Da A, C, zwey Punkte in der Peripherie des ersten Kreises ABDC, so fällt (3, 2. E.) AC, innerhalb dieses Kreises, folglich (3, 3. E.) außerhalb des andern Kreises. Nun sind A, C, zwey Punkte in der Peripherie des andern Kreises, folglich fällt (3, 2. E.) AC innerhalb des andern; welches dem Obigen offenbar widerspricht.

Der 14. Satz. Lehrsatz.

In einem Kreise, ABDC, sind gleiche gerade Linien, AB, CD, gleich weit vom Mittelpunkte, E, entfernt; und gleich weit vom Mittelpunkte, E, entfernte gerade Linien, AB, CD, einander gleich.

Fälle (1, 12. E.) aus E auf AB, CD, die Perpendikel EF, EG, und ziehe AE, EC.



Erster Theil.

Wenn $AB = CD$ ist. Da EF auf AB senkrecht: so ist (3, 3. E.) $AF = FB$, also $AB = 2 AF$. Aus eben den Gründen ist $CD = 2 CG$. Nun ist $AB = CD$. Folglich ist (1, 7. E.) $AF = CG$, also $\square AF = \square CG$. Auch ist (1, 15. E.) $AE = EC$, also $\square AE = \square EC$. Nun ist, weil bey F, G, rechte Winkel, (1, 47. E.) $\square AE = \square AF + \square EF$, und $\square EC = \square CG + \square EG$.

$\square EG$. Folglich ist (1, 1. G.) $\square AF + \square EF = \square CG + \square EG$, folglich (1, 3. G.) $\square EF = \square EG$, also $EF = EG$. Demnach sind (3, 4. G.) AB, CD , gleich weit vom Mittelpunkte E entfernt.

Zweiter Theil.

Wenn (3, 4. G.) $EF = EG$, also $\square EF = \square EG$. Nun war nach dem ersten Theile $\square AF + \square EF = \square CG + \square EG$. Folglich ist (1, 3. G.) $\square AF = \square CG$, also $AF = CG$. Nun war auch $AB = 2 AF$, und $CD = 2 CG$. Folglich ist (1, 6. G.) $AB = CD$.

Der 15. Satz. Lehrsatz.

In einem Kreise, $ABCD$, ist der Durchmesser, AD , die größte Linie; unter den übrigen aber immer die dem Mittelpunkte, E , nähere, BC , größer als die entferntere, FG .

Fälle (1, 12. G.) aus E auf BC, FG , die Perpendikel EH, EK ; so ist (3, 5. G.) $EK > EH$. Mache daher (1, 3. G.) $EL = EH$. Errichte (1, 11. G.) auf EK in L den Perpendikel LM , und verlängere ihn bis N . Ziehe EM, EN, EF, EG .



Da $EL = EH$: so ist (3, 14. G.) $MN = BC$. Auch ist (1, 5. G.) $AE = EM$, und $ED = EN$, also $AD = EM + EN$. Nun ist (1, 20. G.) $EM + EN > MN$. Folglich ist $AD > BC$.

Da (1, 15. G.) $ME = FE$, und $EN = EG$, aber $MEN > FEG$: so ist (1, 24. G.) $MN > FG$. Nun war $MN = BC$. Folglich ist $BC > FG$.

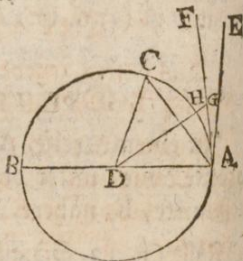
Demnach ist die dem Mittelpunkte nähere BC , größer, als die entferntere FG , und der Durchmesser AD die größte Linie.

Der 16. Satz. Lehrsatz.

Der auf eines Kreises, ABC , Durchmesser, BA , im Endpunkte, A , errichtete Perpendikel, AE , fällt außerhalb des Kreises; und an diesen Punkt, A , fällt zwischen dem Umkreise und dem Perpendikel keine andere gerade Linie. Auch ist der Winkel des Halbkreises, $CHAB$, größer, der übrige vom Umkreise und dem Perpendikel eingeschlossene Winkel, HAE , aber kleiner, als jeder spitze geradlinige Winkel.

Erster Theil.

Ziele solcher Perpendikel nicht außerhalb des Kreises, so falle er, wenn's möglich ist, innerhalb, wie AC , so daß also DAC ein rechter Winkel wäre. Ziehe DC , so ist, weil (1, 15. S.) $DC = DA$, (1, 5. S.) $DCA = DAC$, folglich beide Winkel rechte, welches (1, 17. S.) unmöglich ist.



Demnach kann solcher Perpendikel nicht innerhalb des Kreises fallen; aber aus eben den Gründen auch nicht auf den Umkreis; folglich fällt er außerhalb des Kreises.

Zweiter Theil.

Ziele, wenn es möglich, zwischen dem Umkreise CHA , und dem Perpendikel EA , an den Punkt A , eine gerade Linie, wie FA so falle (1, 12. S.) aus D auf FA den Perpendikel DG . Weil also DGA ein rechter Winkel, DAG aber kleiner als der rechte DAE , so ist $DGA > DAG$, folglich (1, 19. S.) $DA > DG$. Nun ist (1, 15. S.) $DA = DH$. Folglich wäre $DH > DG$, welches (1, 9. S.) unmöglich.

Dritter Theil.

Wäre ein spitzer geradliniger Winkel noch größer, als der vom Durchmesser BA , und dem Umkreise AHC eingeschlossene Winkel; oder noch kleiner, als der vom Umkreise AHC , und dem Perpendikel AE eingeschlossene Winkel: so müßte

müßte zwischen dem Umkreise und dem Perpendikel an den Punkt A eine gerade Linie, wie FA, fallen, welches nach dem im zweyten Theile Erwiesenen unmöglich ist.

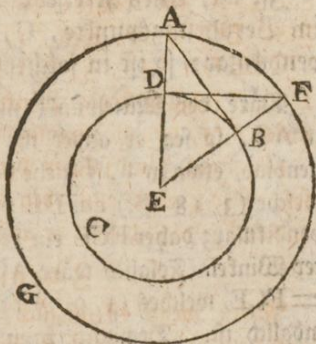
Z u s a t z.

Hieraus erhellet, daß ein auf dem Durchmesser in dessen Endpunkte errichteter Perpendikel den Kreis berührt, und daß eine gerade Linie den Kreis nur in einem Punkte berührt, indem (3, 2. S.) die gerade Linie, welche in zwey Punkten mit ihm zusammentrifft, innerhalb des Kreises fällt.

Der 17. Satz. Aufgabe.

Aus einem gegebenen Punkte, A, an einen gegebenen Kreis, BCD, eine Berührungslinie zu ziehen.

Nimm (3, 1. S.) des Kreises Mittelpunkt E, ziehe EA, und beschreibe aus E, mit EA den Kreis AFG. Errichte (1, 11. S.) auf EA in D den Perpendikel DF. Ziehe EBF, und AB: so ist AB die aus A gezogene Berührungslinie des Kreises BCD.

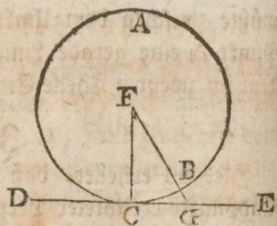


Denn da in den Triangeln, ABE, FDE, (1, 15. S.) $EA = EF$, und $EB = ED$, auch der Winkel AEF gemein: so ist (1, 4. S.) $EBA = EDF$. Nun ist EDF, folglich auch EBA, ein rechter Winkel, das ist, AB perpendicular auf dem Halbmesser EB, in dessen Endpunkte B. Folglich ist (3, 16. Zus.) AB eine Berührungslinie des Kreises BCD.

Der 18. Satz. Lehrsat.

Auf eines Kreises, ABC, Berührungslinie, DE, ist die vom Mittelpunkte, F, nach dem Berührungspunkte, C, gezogene gerade Linie, FC, perpendicular.

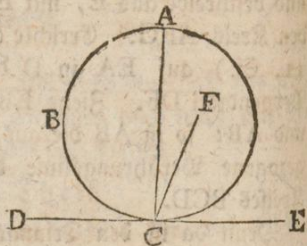
Wäre FC nicht perpendicular auf DE , so sey es eine andere, etwa FG , und daher FGC ein rechter Winkel, also (I, 17. G.) $FCG < FGC$, folglich (I, 19. G.) $FC > FG$. Nun ist (I, 15. G.) $FC = FB$. Folglich wäre $FB > FG$, welches (I, 9. G.) unmöglich ist. Demnach kann FG nicht perpendicular auf DE seyn; aus eben den Gründen aber auch keine andere außer FC . Folglich ist FC auf DE perpendicular.



Der 19. Satz. Lehrsatz.

Ist auf eines Kreises, ABC , Berührungslinie, DE , im Berührungspunkte, C , eine gerade Linie, CA , perpendicular: so ist in solcher des Kreises Mittelpunkt.

Wäre der Mittelpunkt nicht in AC , so sey er außer ihr irgendwo, etwa in F . Ziehe FC , welche (3, 18. G.) auf DE perpendicular; daher FCE ein rechter Winkel. Folglich wäre $ACE = FCE$, welches (I, 9. G.) unmöglich ist. Demnach kann F nicht der Mittelpunkt seyn; aus eben den Gründen aber auch kein anderer außerhalb AC . Folglich muß er in AC seyn.



Der 20. Satz. Lehrsatz.

In jedem Kreise, ABC , ist der Winkel am Mittelpunkte, BEC , doppelt so groß, als der Winkel am Umkreise, wenn beyde auf einerley Bogen stehen.

Es sey zuerst der Winkel am Umkreise BAC . Ziehe AE , und verlängere sie bis F . Da (I, 15. G.) $EA = EB$: so ist

ist (1, 5. S.) $EAB = EBA$, folglich
(1, 32. S.) $BEF = 2 EAB$. Eben
so ist $FEC = 2 EAC$, folglich (1, 2. S.)
 $BEC = 2 BAC$.



Es sey ferner ein anderer Winkel
am Umkreise BDC, daß BD die EC
schneide. Zieheth man nun DE, und
verlängert sie bis G: so wird auf eben
die Art bewiesen: daß $GEC = 2 GDC$, und $GEB =$
 $2 GDB$, folglich (1, 3. S.) $BEC = 2 BDC$.

Der 21. Satz. Lehrsatz.

Die Winkel, BAD, BED, in einerley Kreisabschnitte,
BAED, sind einander gleich.

Nimm des Kreises Mittelpunkt F,
und ziehe BF, FD: so ist (3, 20. S.)
 $BFD = 2 BAD = 2 BED$, folglich
 $BAD = BED$.



Der 22. Satz. Lehrsatz.

Die gegenüberstehenden Winkel einer vierseitigen
Figur im Kreise, ABCD, sind zwey rechten Winkeln
gleich.

Ziehe AC, BD, so ist (3, 21. S.)
 $CDB = BAC$, und $BDA = ACB$,
folglich (1, 2. S.) $ADC = BAC +$
 ACB , folglich wenn ABC hinzukommt,
 $ADC + ABC = BAC + ACB + ABC$
 $= (1, 32. S.) 2 R$. Eben so wird
bewiesen, daß $BAD + DCB = 2 R$.



Der 23. Satz. Lehrsatz.

Auf einerley geraden Linie, AB , können nicht zwey ähnliche, und dabey ungleiche Kreisabschnitte, an einerley Seite errichtet werden.

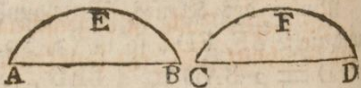
Wäre dies möglich, so seyen die Kreisabschnitte, ACB , ADB , ungleich, und ähnlich. Ziehe willkürlich AD , und verlängere sie bis C . Ziehe CB , AB , DB : so ist, weil die Abschnitte ähnlich, (3, 11. E.) $ADB = ACB$, welches (1, 16. E.) unmöglich ist.



Der 24. Satz. Lehrsatz.

Ähnliche Kreisabschnitte, AEB , CFD , auf gleichen geraden Linien, AB , CD , sind einander gleich.

Bringe AEB auf CFD , und lege A auf C , und AB auf CD : so fällt (weil $AB = CD$) B auf D . Zielen

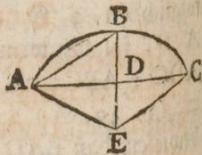


nun nicht auch die Kreisbogen, AEB , CFD , auf einander, so müßte der eine entweder ganz über den andern fallen, oder ihn irgendwo noch in einem dritten Punkte schneiden. Das Erste ist gegen (3, 23. E.), das Zweyte gegen (3, 10. E.). Demnach müssen auch die Kreisbogen auf einander fallen, folglich die ähnlichen Kreisabschnitte AEB , CFD , sich decken, also einander gleich seyn.

Der 25. Satz. Aufgabe.

Den Kreis, wovon ein Abschnitt, ABC , gegeben ist, zu vollenden.

Halbire (1, 10. E.) AC in D , und errichte (1, 11. E.) auf AC in D den Perpendikel DB . Ziehe AB , so ist ABD entweder größer oder eben so groß, oder kleiner als BAD .



Erster

Erster Fall.

Ist $\angle ABD > \angle BAD$, so setze in A an BA (1, 23. S.) $\angle BAE = \angle ABD$, verlängere BD bis E, und ziehe EC.

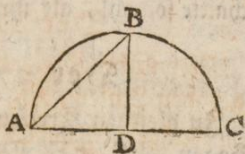
Hiernach ist (1, 6. S.) $BE = EA$. Nun ist, weil $AD = DC$, und DE gemein, auch bey D rechte Winkel, (1, 4. S.) $AE = EC$. Folglich ist (1, 1. S.) auch $BE = EC$ und (3, 9. S.) E des verlangten Kreises Mittelpunkt.

Auch ist klar, daß in diesem Falle der Kreisabschnitt ABC kleiner als der Halbkreis sey, weil der Mittelpunkt außerhalb desselben liegt.

Zweiter Fall.

Ist $\angle ABD = \angle BAD$, so ist (1, 6. S.) $AD = DB = DC$. Folglich ist (3, 9. S.) D des verlangten Kreises Mittelpunkt.

In diesem Falle ist augenscheinlich der Abschnitt ABC ein Halbkreis.

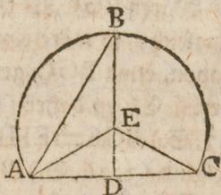


Dritter Fall.

Ist $\angle ABD < \angle BAD$, so setze in A an BA (1, 23. S.) $\angle BAE = \angle ABD$, und ziehe EC.

Hier wird, wie beym ersten Falle, bewiesen, daß $AE = EB = EC$, und daher E des verlangten Kreises Mittelpunkt sey.

In diesem Falle fällt der Mittelpunkt innerhalb des Abschnitts ABC, welcher also offenbar größer als der Halbkreis ist.

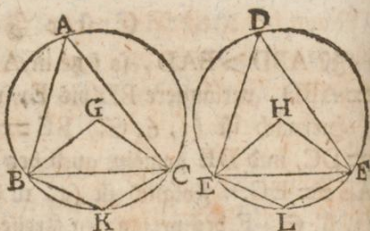


Der 26. Satz. Lehrsatz.

In gleichen Kreisen, ABC, DEF, stehen gleiche Winkel am Mittelpunkte, BGC, EHF, sowohl, als gleiche Winkel am Umkreise, BAC, EDF, auf gleichen Bogen, BKC, ELF.

Ziehst

Zieheth man BC , EF , so ist (3, 1. S.), weil die Kreise gleich sind, $BG = EH$, und $GC = HF$. Nun ist auch $BGC = EHF$. Folglich ist (1, 4. S.) $BC = EF$. Da die Win-

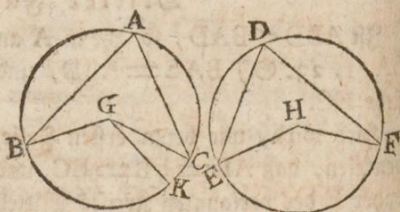


kel bey A , D , gleich sind, so sind in den vierseitigen Figuren $ABKC$, $DEL F$, (3, 22. S.) auch die Winkel K , L , gleich, also (3, 11. S.) die Abschnitte BKC , $EL F$, ähnlich. Nun war auch $BC = EF$. Folglich sind (3, 24. S.) diese Abschnitte sowohl, als ihre Bogen BKC , $EL F$, gleich.

Der 27. Satz. Lehrsatz.

In gleichen Kreisen, ABC , DEF , sind die auf gleichen Bogen, BC , EF , stehenden Winkel am Mittelpunkte, BGC , EHF , sowohl als am Umkreise, BAC , EDF , einander gleich.

Wären BGC , EHF , ungleich, so wäre einer davon, etwa BGC , größer. Es sey daher (1, 23. S.) $BGK = EHF$, folglich (3, 26. S.) $BK = EF$. Nun ist ange-



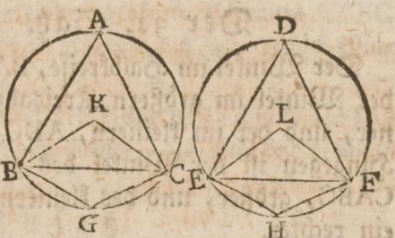
nommen $BC = EF$. Folglich wäre $BK = BC$, welches (1, 9. S.) unmöglich ist. Demnach ist $BGC = EHF$, also (3, 20. S.) auch $BAC = EDF$.

Der 28. Satz. Lehrsatz.

In gleichen Kreisen, ABC , DEF , schneiden gleiche gerade Linien, BC , EF , gleiche Bogen ab: daß nämlich die größern Bogen, BAC , EDF , so wie die kleinern, BGC , EHF , einander gleich sind.

Nimm

Nimm der Kreise Mittelpunkte, K, L, und ziehe die Halbmesser BK, KC, EL, LF; so ist (3, 1. §.), weil die Kreise gleich, $BK = EL$, und $KC = LF$. Nun ist auch $BC = EF$.



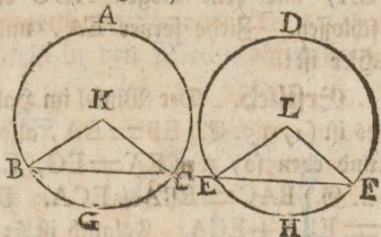
Folglich sind (1, 8. §.)

die Winkel bey K, L, also (3, 20. §.) auch bey A, D, also (3, 22. §.) auch bey G, H, gleich. Folglich sind (3, 26. §.) die Bogen BAC, EDF, sowohl, als die Bogen BGC, EHF, einander gleich.

Der 29. Satz. Lehrsatz.

In gleichen Kreisen, ABC, DEF, sind die geraden Linien, BC, EF, welche die Endpunkte gleicher Bogen, BGC, EHF, verbinden, einander gleich.

Nimm die Mittelpunkte K, L, und ziehe die Halbmesser BK, KC, EL, LF, welche (3, 1. §.) gleich sind. Nun sind, weil $BGC = EHF$, (3, 27. §.) auch die Winkel bey K, L, gleich.

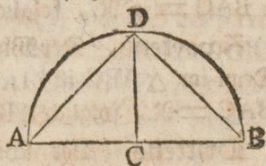


Folglich ist (1, 4. §.) $BC = EF$.

Der 30. Satz. Aufgabe.

Einen gegebenen Kreisbogen, ABD, zu halbiren.

Ziehe AB, und halbire sie (1, 10. §.) in C. Errichte (1, 11. §.) auf AB in C den Perpendikel CD, und ziehe AD, DB: so ist ADB in D halbirt.



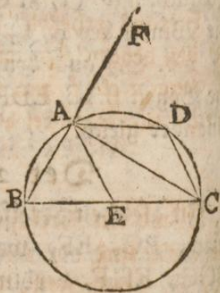
Denn da $AC = CB$, CD gemein, und bey C rechte Winkel: so ist (1, 4. §.) $AD = DB$; folglich sind (3, 28. §.) auch die Bogen AD, DB gleich.

Der

Der 31. Satz. Lehrsatz.

Der Winkel im Halbkreise, BAC , ist ein rechter; aber der Winkel im größern Kreisabschnitte, ABC , ist kleiner, und der im kleinern, ADC , größer als ein rechter. Hingegen ist der Winkel des größern Kreisabschnittes, $CABC$, größer, und des kleinern, $CADC$, kleiner, als ein rechter.

Des Kreises $ABCD$ Mittelpunkt sey E , sein Durchmesser BC . Nimm im Umkreise über BC willkürlich zwey Punkte A, D , und ziehe die geraden Linien BA, AC, AD, DC : so wird der Halbkreis von BC , und dem Bogen $BADC$; der größere Abschnitt von CA , und dem Bogen ABC ; der kleinere von CA , und dem Bogen ADC eingeschlossen. Ziehe ferner EA , und verlängere BA nach F . Hier ist:



Erstlich. Der Winkel im Halbkreise $BAC = R$. Denn es ist (1, 15. G.) $EB = EA$, also (1, 5. G.) $EAB = EBA$, und eben so, weil $EA = EC$, $EAC = ECA$; folglich (1, 2. G.) $BAC = EBA + ECA$. Nun ist (1, 32. G.) $FAC = EBA + ECA$. Folglich ist (1, 1. G.) $BAC = FAC = R$. (1, 10. G.) **Oder:** Es ist (1, 32. G.) $AEC = 2 BAE$, und $AEB = 2 EAC$, folglich $AEC + AEB = 2 BAC$. Nun ist (1, 13. G.) $AEC + AEB = 2 R$. Folglich ist $2 BAC = 2 R$, folglich $BAC = R$.

Zweytens. Der Winkel im größern Abschnitt $ABC < R$. Denn im $\triangle ABC$ ist (1, 32. G.) $ABC + BAC < 2 R$, aber $BAC = R$, folglich $ABC < R$.

Drittens. Der Winkel im kleinern Abschnitt $ADC < R$. Denn in der vierseitigen Figur $ABCD$ ist (3, 22. G.) $ABC + ADC = 2 R$, aber $ABC < R$, folglich $ADC > R$.

Vier

Viertens. Der Winkel des größern Abschnitts $CABC > R$. Denn er ist offenbar größer, als der rechte Winkel CAB .

Fünftens. Der Winkel des kleinern Abschnitts $CADC < R$. Denn er ist offenbar kleiner, als der rechte Winkel CAF .

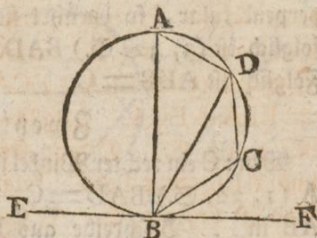
Z u s a ß.

Hieraus erhellet, daß, wenn in einem Triangel ein Winkel den beyden übrigen gleich ist, er ein rechter sey; weil sein Nebenwinkel (1, 32. S.) denselben beyden Winkeln gleich ist, gleiche Nebenwinkel aber (1, 10. S.) rechte sind.

Der 32. Satz. Lehrsatz.

Wird ein Kreis, $ABCD$, von einer geraden Linie, EF , berührt, und von einer andern aus dem Berührungspunkte, B , gezogenen, BD , geschnitten: so sind die Winkel, DBF , DBE , welche die schneidende Linie mit der berührenden macht, den Winkeln in den Wechselabschnitten des Kreises gleich.

Errichte (1, 11. S.) auf EF in B den Perpendikel BA . Im Bogen BD nimm willkürlich einen Punkt C , und ziehe AD , DC , CB : so ist zu beweisen, daß $DBF = DAB$, und $DBE = DCB$.



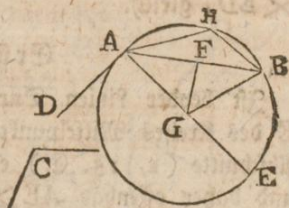
Erstlich. Im Perpendikel BA ist (3, 19. S.) des Kreises Mittelpunkt, folglich (3, 31. S.) $ADB = R = ABD + BAD$. Nun ist $ABF = R = ABD + DBF$. Folglich ist (1, 1. S.) $ABD + BAD = ABD + DBF$. Folglich (1, 3. S.) $BAD = DBF$.

Zweytens, in der vierseitigen Figur $ABCD$ ist (3, 22. S.) $BAD + DCB = 2 R = DBF + DBE$. Nun ist erwiesen, daß $BAD = DBF$. Folglich ist (1, 3. S.) $DCB = DBE$.

Der

Dritter Fall.

Wenn C ein stumpfer Winkel ist. An A setze (1, 23. S.) $BAD = C$. Auf DA errichte in A (1, 11. S.) den Perpendikel AE . Halbire AB in F , und errichte den Perpendikel FG . Ziehe GB , so ist, weil $AF = FB$, auch FG gemein, und bey F rechte Winkel, (1, 4. S.) $AG = GB$. Aus G beschreibe mit GA , oder GB , den Kreis AEB . Nimm in dem Bogen AB willkürlich den Punkt H , und ziehe AH , AB : so ist $AHB = C$.

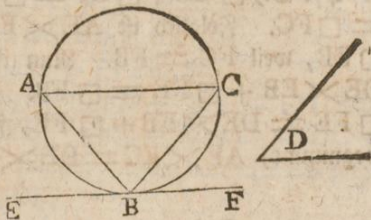


Denn hier ist wieder DA (3, 16. S.) eine Berührungslinie, folglich (3, 32. S.) BAD , das ist $C = AHB$.

Der 34. Satz. Aufgabe.

Von einem gegebenen Kreise, ABC , einen Abschnitt wegzunehmen, der einen dem gegebenen geradlinigen Winkel, D , gleichen Winkel fasse.

Ziehe an B (3, 17. S.) die Berührungslinie EBF . An FB setze in B (1, 23. S.) $FBC = D$. Im Umkreise nimm jenseits willkürlich den Punkt A , und ziehe AB , AC : so ist $BAC = D$.



Denn da EF eine Berührungslinie, so ist (3, 32. S.) FBC , das ist $D = BAC$.

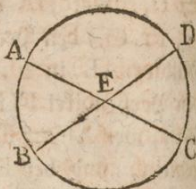
Der 35. Satz. Lehrsatz.

Schneiden einander in einem Kreise, $ABCD$, zwei gerade Linien, AC , BD : so ist das unter den Abschnitten der einen, AC , enthaltene Rectangel, $AE \times EC$, dem unter

unter den Abschnitten der andern, BD , enthaltenen, $BE \times ED$, gleich.

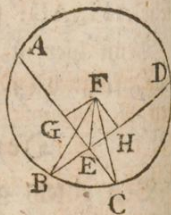
Erster Fall.

Ist beyder Linien Durchschnittspunkt E des Kreises Mittelpunkt: so sind die Abschnitte (1, 15. B.) einander gleich, und daher offenbar $AE \times EC = BE \times ED$.



Zweiter Fall.

Ist E aber nicht der Mittelpunkt des Kreises, so sey solcher F . Aus F fälle auf AC BD die Perpendikel FG , FH , und ziehe FB , FC , FE : so ist (3, 3. B.) $AG = GC$, folglich (2, 5. B.) $AE \times EC + \square GE = \square GC$, folglich, wenn $\square GF$ hinzukommt, (1, 2. B.) $AE \times EC + \square GE + \square GF = \square GC + \square GF$. Nun ist, weil bey G rechte Winkel, (1, 47. B.) $\square GE + \square GF = \square FE$, und $\square GC + \square GF = \square FC$. Folglich ist $AE \times EC + \square FE = \square FC = \square FB$, weil $FC = FB$. Nun ist aus eben den Gründen $DE \times EB + \square FE = \square FB$. Folglich ist $AE \times EC + \square FE = DE \times EB + \square FE$, folglich, wenn man $\square FE$ wegnimmt, $AE \times EC = DE \times EB$.



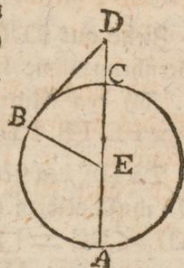
Der 36. Satz. Lehrsatz.

Gehen von einem außerhalb eines Kreises, ABC , genommenen Punkte, D , zwey gerade Linien an den Umkreis, von denen ihn die eine, DCA , schneidet, die andere, DB , berührt: so ist das unter der ganzen schneidenden Linie, DCA , und ihrem außerhalb des Kreises befindlichen Abschnitte, DC , enthaltene Rectangel dem Quadrate der Berührungslinie, DB , gleich.

Erster

Erster Fall.

Die schneidende Linie DA gehe durch den Mittelpunkt E. Ziehe EB, so ist (3, 18. §.) EBD ein rechter Winkel, und daher (1, 47. §.) $\square ED = \square DB + \square BE$. Nun ist, weil $CE = EA$, (2, 6. §.) $AD \times DC + \square CE = \square ED$, oder, (weil $CE = BE$) $AD \times DC + \square BE = \square ED$. Folglich ist $AD \times DC + \square BE = \square DB + \square BE$, folglich, wenn man $\square BE$ wegnimmt, $AD \times DC = \square DB$.



Zweiter Fall.

Die schneidende Linie DA gehe nicht durch den Mittelpunkt E. Aus E falle auf AC (1, 12. §.) den Perpendikel EF, und ziehe EB, EC, ED: so ist (3, 3. §.) AC in F halbirte, folglich (2, 6. §.) $AD \times DC + \square FC = \square FD$, folglich, wenn $\square FE$ hinzukommt, (1, 2. §.) $AD \times DC + \square FC + \square FE = \square FD + \square FE$. Nun ist, weil bey F rechte Winkel, (1, 47. §.) $\square FC + \square FE = \square EC = (1, 15. §.) \square EB$, und $\square FD + \square FE = \square DE = (1, 47. §.) \square DB + \square EB$. Folglich ist $AD \times DC + \square EB = \square DB + \square EB$, folglich, wenn man $\square EB$ wegnimmt, $AD \times DC = \square DB$.

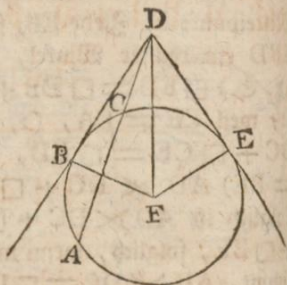


Der 37. Satz. Lehrsatz.

Gehen von einem außerhalb eines Kreises, ABC, genommenen Punkte, D, zwei gerade Linien an den Umkreis, von denen die eine, DCA, ihn schneidet, die andere, DB, an ihn fällt; und ist das unter der ganzen schneidenden Linie, DCA, und ihrem außerhalb des Kreises befindlichen Abschnitte, DC, enthaltene Rectangel dem Quadrate

der an den Umkreis fallenden Linie, DB, gleich: so ist letztere eine Berührungslinie des Kreises.

Ziehe aus D (3, 17. S.) die Berührungslinie DE. Nimm (3, 1. S.) den Mittelpunkt F, und ziehe FE, FB, FD.



Da DE den Kreis berührt, und DA ihn schneidet: so ist (3, 36. S.) $AD \times DC = \square DE$. Nun ist angenommen, $AD \times DC = \square DB$. Folglich ist $\square DB = \square DE$, und daher $DB = DE$. Nun ist auch (1, 15. S.) $FB = FE$, auch FD gemein. Folglich ist (1, 8. S.) $\angle FBD = \angle FED$. Nun ist $\angle FED$ ein rechter Winkel. Folglich ist auch $\angle FBD$ ein rechter Winkel, also BD auf FB perpendicular, folglich (3, 16. Zus.) BD eine Berührungslinie.

Eben so wird auch der Beweis geführt, wenn des Kreises Mittelpunkt F in DA ist.