Théorie des fonctions analytiques

Lagrange, Joseph Louis de

Paris, 1813

Persistent Link: https://doi.org/10.3931/e-rara-61063

Première partie.

PREMIÈRE PARTIE.

EXPOSITION DE LA THÉORIE, AVEC SES PRINCIPAUX USAGES DANS L'ANALYSE.

CHAPITRE PREMIER.

Développement en série d'une fonction d'une variable, lorsqu'on attribue un accroissement à cette variable. Formation successive des termes de la série. Théorème important sur la nature de ces séries.

1. Nous désignerons en général par la caractéristique f ou F, placée devant une variable, toute fonction de cette variable, c'est-à-dire, toute quantité dépendante de cette variable, et qui varie avec elle suivant une loi donnée. Ainsi fx ou Fx désignera une fonction de la variable x; mais lorsqu'on voudra désigner la fonction d'une quantité déjà composée de cette variable, comme x^2, $a+bx$, etc., on renfermera cette quantité entre deux parenthèses. Ainsi fx désignera une fonction de x, $f(x^2)$, $f(a+bx)$, etc. désigneront des fonctions de x^2, de $a+bx$, etc.

Pour marquer une fonction de deux variables indépendantes, comme de x, y, nous écrirons $f(x, y)$, et ainsi des autres.

Lorsque nous voudrons employer d'autres caractéristiques pour marquer les fonctions, nous aurons soin d'en avertir.

Considérons donc une fonction fx d'une variable quelconque x. Si à la place de x, on y met $x+i$, i étant une quantité quelconque indéterminée, elle deviendra $f(x+i)$, et par la théorie des séries, on pourra la développer en une série de cette forme

$$fx + pi + qi^2 + ri^3 + \text{etc.},$$

dans laquelle les quantités p, q, r, etc., coefficiens des puissances de i, seront de nouvelles fonctions de x, dérivées de la fonction primitive x, et indépendantes de l'indéterminée i.

2. Mais pour ne rien avancer gratuitement, nous commencerons par examiner la forme même de la série qui doit représenter le développement de toute fonction fx, lorsqu'on y substitue $x+i$ à la place de x, et que nous avons supposée ne devoir contenir que des puissances entières et positives de i.

Cette supposition se vérifie en effet par le développement des différentes fonctions connues; mais personne, que je sache, n'a cherché à la démontrer *à priori;* ce qui me paraît néanmoins d'autant plus nécessaire, qu'il y a des cas particuliers où elle ne peut pas avoir lieu. D'ailleurs, le calcul différentiel porte expressément sur cette même supposition, et les cas qui font exception, sont précisément ceux où ce calcul a été accusé d'être en défaut.

Je vais d'abord démontrer que dans la série résultante du développement de la fonction $f(x+i)$, il ne peut se trouver aucune puissance fractionnaire de i, à moins qu'on ne donne à x des valeurs particulières.

En effet, il est clair que les radicaux de i ne pourraient venir que des radicaux renfermés dans la fonction primitive fx, et il est clair en même temps que la substitution de $x+i$ au lieu de x, ne pourrait ni augmenter ni diminuer le nombre de ces radicaux, ni en changer la nature, tant que x et i sont des quantités indéterminées. D'un autre côté, on sait par la théorie des équations, que tout radical a autant de valeurs différentes qu'il y a d'unités dans son exposant, et que toute fonction irrationnelle a par conséquent autant de valeurs différentes qu'on peut faire de combinaisons des différentes valeurs des radicaux qu'elle renferme. Donc si le développement de la fonction $f(x+i)$ pouvait contenir un terme de la forme $ui^{\frac{m}{n}}$, la fonction fx serait nécessairement

sairement irrationnelle, et aurait par conséquent un certain nombre de valeurs différentes, qui serait le même pour la fonction $f(x+i)$, ainsi que pour son développement. Mais ce développement étant représenté par la série $fx + pi + qi^2 + \text{etc.} + ui^{\frac{m}{n}} + \text{etc.}$, chaque valeur de fx se combinerait avec chacune des n valeurs du radical $\sqrt[n]{i^m}$; de sorte que la fonction $f(x+i)$ développée, aurait plus de valeurs différentes que la même fonction non développée, ce qui est absurde.

Cette démonstration est générale et rigoureuse, tant que x et i demeurent indéterminées; mais elle cesserait de l'être, si on donnait à x des valeurs déterminées; car il serait possible que ces valeurs détruisissent quelques radicaux dans fx, qui pourraient néanmoins subsister dans $f(x+i)$. Nous examinerons plus bas (chap. IV) ces cas particuliers et les conséquences qui en résultent.

Nous venons de voir que le développement de la fonction $f(x+i)$ ne saurait contenir en général des puissances fractionnaires de i; il est facile de s'assurer aussi qu'il ne pourra contenir non plus des puissances négatives de i.

Car si parmi les termes de ce développement, il y en avait un de la forme $\frac{r}{i^m}$, m étant un nombre entier positif, en faisant $i = 0$, ce terme deviendrait infini; donc la fonction $f(x+i)$ devrait devenir infinie lorsque $i = 0$; par conséquent il faudrait que fx devînt infinie, ce qui ne peut avoir lieu que pour des valeurs particulières de x.

3. Nous étant ainsi assurés de la forme générale du développement de la fonction $f(x+i)$, voyons plus particulièrement en quoi ce développement consiste, et ce que signifie chacun de ses termes.

On voit d'abord que si on cherche dans cette fonction ce qui est indépendant de la quantité i, il n'y a qu'à faire $i = 0$, ce qui la réduit à fx. Ainsi fx est la partie de $f(x+i)$, qui reste lorsque la quantité i devient nulle ; de sorte que $f(x+i)$ sera égale à fx, plus à une quantité qui doit disparaître en faisant $i=o$, et qui sera par conséquent, ou pourra être censée multipliée par une puissance positive de i : et comme nous venons de démontrer que dans le développement de $f(x+i)$, il ne peut entrer aucune puissance fractionnaire de i, il s'ensuit que la quantité dont il s'agit, ne pourra être multipliée que par une puissance positive et entière de i; elle sera donc de la forme iP, P étant une fonction de x et i, qui ne deviendra point infinie lorsque $i=o$.

On aura donc ainsi

$$f(x+i)=fx+iP;$$

donc $f(x+i)-fx=iP$, et par conséquent divisible par i; la division faite, on aura

$$P=\frac{f(x+i)-fx}{i}.$$

Or, P étant une nouvelle fonction de x et i, on pourra de même en séparer ce qui est indépendant de i, et qui par conséquent ne s'évanouit pas lorsque i devient nul. Soit donc p ce que devient P lorsqu'on fait $i=o$, p sera une fonction de x sans i; et par un raisonnement semblable au précédent, on prouvera que $P=p+iQ$, iQ étant la partie de P, qui devient nulle lorsque $i=o$, et Q étant une nouvelle fonction de x et i, qui ne devient pas infinie lorsque $i=o$.

On aura donc $P-p=iQ$, et par conséquent divisible par i; la division faite, on aura

$$Q=\frac{P-p}{i}.$$

Soit q la valeur de Q, en y faisant $i=o$, q sera une fonction de x sans i, et la partie de Q, qui devient nulle lorsque i devient nul, sera comme ci-dessus de la forme iR, R étant une fonction de x et i, qui ne deviendra pas infinie lorsque $i=o$, et qu'on trouvera en divisant $Q-q$ par i, et ainsi de suite.

On aura, par ce procédé,

$$f(x+i)=fx+iP,\ P=p+iQ,\ Q=q+iR,\ R=r+iS,\ \text{etc.};$$

donc, substituant successivement

$$f(x+i)=fx+iP=fx+ip+i^2Q=fx+ip+i^2q+i^3R=\text{etc.};$$

ce qui donnera pour le développement de $f(x+i)$, une série de la forme que nous avons supposée au commencement.

4. Soit, par exemple, $fx=\frac{1}{x}$, on aura

$$f(x+i)=\frac{1}{x+i};$$

donc

$$iP=\frac{1}{x+i}-\frac{1}{x}=-\frac{i}{x(x+i)};\quad P=-\frac{1}{x(x+i)};\quad p=-\frac{1}{x^2};$$

$$iQ=-\frac{1}{x(x+i)}+\frac{1}{x^2}=\frac{i}{x^2(x+i)};\quad Q=\frac{1}{x^2(x+i)};\quad q=\frac{1}{x^3};$$

$$iR=\frac{1}{x^2(x+i)}-\frac{1}{x^3}=-\frac{i}{x^3(x+i)};\ R=-\frac{1}{x^3(x+i)};\quad r=-\frac{1}{x^4};$$

etc.;

ainsi on aura

$$\frac{1}{x+i}=\frac{1}{x}-\frac{i}{x(x+i)}=\frac{1}{x}-\frac{i}{x^2}+\frac{i^2}{x^2(x+i)};$$
$$=\frac{1}{x}-\frac{i}{x^2}+\frac{i^2}{x^3}-\frac{i^3}{x^3(x+i)}=\text{etc.},$$

comme il résulte de la division actuelle.

Prenons encore pour exemple, la fonction irrationnelle $\sqrt{x}$. On aura donc

$$fx=\sqrt{x},\quad f(x+i)=\sqrt{(x+i)}=\sqrt{x}+iP;$$

donc

$$iP=\sqrt{(x+i)}-\sqrt{x}=\frac{i}{\sqrt{(x+i)}+\sqrt{x}};$$

$$P=\frac{1}{\sqrt{(x+i)}+\sqrt{x}};\quad p=\frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$iQ = P - p = \frac{1}{\sqrt{(x+i)}+\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{(x+i)}}{2\sqrt{x}[\sqrt{(x+i)}+\sqrt{x}]}$$
$$= -\frac{i}{2\sqrt{x}[\sqrt{(x+i)}+\sqrt{x}]^2};$$
$$Q = -\frac{1}{2\sqrt{x}[\sqrt{(x+i)}+\sqrt{x}]^2};\quad q = -\frac{1}{8x\sqrt{x}};$$
$$iR = Q - q = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\frac{1}{4x} - \frac{1}{[\sqrt{(x+i)}+\sqrt{x}]^2}\right)$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \frac{i - 2x + 2\sqrt{x}\times\sqrt{x+i}}{4x[\sqrt{(x+i)}+\sqrt{x}]^2}$$
$$= \frac{i}{2\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{(x+i)}+3\sqrt{x}}{4x[\sqrt{(x+i)}+\sqrt{x}]^3};$$
$$R = \frac{\sqrt{(x+i)}+3\sqrt{x}}{8x\sqrt{x}[\sqrt{(x+i)}+\sqrt{x}]^3};\quad r = \frac{1}{16x^2\sqrt{x}};$$

etc.

De sorte qu'on aura, de cette manière,

$$\sqrt{(x+i)} = \sqrt{x} + \frac{i}{\sqrt{(x+i)}+\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{i}{2\sqrt{x}} - \frac{i^2}{2\sqrt{x}[\sqrt{(x+i)}+\sqrt{x}]^2}$$
$$= \sqrt{x} + \frac{i}{2\sqrt{x}} - \frac{i^2}{8x\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{(x+i)}+3\sqrt{x}}{8x\sqrt{x}[\sqrt{(x+i)}+\sqrt{x}]^3}i^3$$
$$= \sqrt{x} + \frac{i}{2\sqrt{x}} - \frac{i^2}{8x\sqrt{x}} + \frac{i^3}{16x^2\sqrt{x}} - \text{etc.}$$

Cette dernière série est celle que l'on trouve par l'extraction actuelle de la racine quarrée ou par la formule du binome.

5. Il serait difficile d'exécuter ces opérations sur des fonctions irrationnelles plus compliquées ; mais en faisant disparaître les irrationnalités par rapport à la quantité i, l'application de la méthode n'aura plus de difficulté.

Ainsi, en reprenant l'exemple précédent, on partira de l'équation

$$\sqrt{(x+i)} = \sqrt{x} + iP,$$

qui étant élevée au carré pour dégager l'i de dessous le signe radical, devient après la division par i,

$$1 = 2P\sqrt{x} + iP^2;$$

faisant $i = 0$, P devient p, et l'on aura

$$1 = 2p\sqrt{x}; \quad \text{d'où} \quad p = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

On fera donc $P = p + iQ$, ce qui étant substitué, on aura, après la division par i,

$$0 = \frac{1}{4x} + 2Q\sqrt{x} + \frac{iQ}{\sqrt{x}} + i^2Q^2.$$

Faisant $i = 0$, Q devient q; donc on aura

$$\frac{1}{4x} + 2q\sqrt{x} = 0;$$

d'où l'on tire

$$q = -\frac{1}{8x\sqrt{x}}.$$

On fera donc $Q = q + iR$, et ainsi de suite.

On peut, à la vérité, trouver les valeurs de p, q, r, etc. d'une manière plus expéditive, en faisant tout de suite l'équation

$$\sqrt{(x+i)} = \sqrt{x} + pi + qi^2 + ri^3 + \text{etc.};$$

l'élevant au carré pour dégager la quantité i de dessous le signe, et comparant ensuite les termes affectés des mêmes puissances de i, pour que cette quantité puisse demeurer indéterminée, comme on le suppose; mais la méthode précédente a l'avantage de ne développer la série qu'autant qu'on veut, et de donner la valeur exacte du reste. En effet, si on voulait, par exemple, s'arrêter au second terme pi, on aurait Qi^2 pour la valeur du reste, et on pourrait déterminer Q par la résolution de l'équation en Q. Dans l'exemple ci-dessus, cette équation est

$$i^2Q^2 + Q\left(2\sqrt{x} + \frac{i}{\sqrt{x}}\right) + \frac{1}{4x} = 0,$$

et pour la résoudre de manière que l'expression de Q ne présente pas la quantité i au dénominateur, il n'y a qu'à faire $Q=\frac{1}{V}$, ce qui réduira l'équation à cette forme,

$$V^2+4V(2x\sqrt{x}+i\sqrt{x})+4xi^2=0,$$

d'où l'on tire

$$V=-4x\sqrt{x}-2i\sqrt{x}\pm 4x\sqrt{(x+i)};$$

et comme Q ne doit pas devenir infini lorsque $i=0$ (art. 5), il faudra que V ne devienne pas nul dans le même cas; par conséquent, il faudra prendre le signe inférieur du radical; on aura ainsi

$$V=-2\sqrt{x}(2x+i)-4x\sqrt{(x+i)},$$

et de là

$$Q=-\frac{1}{2\sqrt{x}(2x+i)+4x\sqrt{(x+i)}}=-\frac{1}{2\sqrt{x}[\sqrt{(x+i)}+\sqrt{x}]^2},$$

comme plus haut. On en usera de même dans tous les cas semblables.

6. Mais le principal avantage de la méthode que nous avons exposée, consiste en ce qu'elle fait voir comment les fonctions p, q, r, etc. résultent de la fonction principale fx, et surtout en ce qu'elle prouve que les restes iP, iQ, iR, etc. sont des quantités qui doivent devenir nulles lorsque $i=0$; d'où l'on tire cette conséquence importante, que dans la série $fx+pi+qi^2+ri^3+$ etc. qui naît du développement de $f(x+i)$, on peut toujours prendre i assez petit pour qu'un terme quelconque soit plus grand que la somme de tous les termes qui le suivent; et que cela doit avoir lieu aussi pour toutes les valeurs plus petites de i.

Car, puisque les restes iP, iQ, iR, etc. sont des fonctions de i qui deviennent nulles, par la nature même du développement, lorsque $i=0$, il s'ensuit qu'en considérant la courbe dont i serait l'abscisse, et l'une de ces fonctions l'ordonnée, cette courbe coupera l'axe à l'origine des abscisses; et à moins que ce point ne soit un point singulier, ce qui ne peut avoir lieu que pour des valeurs particulières de x, comme il est facile de s'en convaincre avec un peu de réflexion, et par un raisonnement analogue à celui de l'article 2, le cours de la courbe sera nécessairement continu depuis ce point; donc elle s'approchera peu à peu de l'axe avant de le couper, et s'en approchera par conséquent d'une quantité moindre qu'aucune quantité donnée; de sorte qu'on pourra toujours trouver une abscisse i correspondant à une ordonnée moindre qu'une quantité donnée; et alors toute valeur plus petite de i répondra aussi à des ordonnées moindres que la quantité donnée.

On pourra donc prendre i assez petit, sans être nul, pour que $i\mathrm{P}$ soit moindre que $\mathrm{f}x$, ou pour que $i\mathrm{Q}$ soit moindre que p, ou pour que $i\mathrm{R}$ soit moindre que q, et ainsi des autres; et par conséquent pour que $i^2\mathrm{Q}$ soit moindre que ip, ou que $i^3\mathrm{R}$ soit moindre que i^2q, etc.; donc, puisque (art. 3),

$$i\mathrm{P}=ip+i^2q+i^3r+\text{etc.},\quad i^2\mathrm{Q}=i^2q+i^3r+\text{etc.},\quad i^3\mathrm{R}=i^3r+\text{etc.},$$

il s'ensuit qu'on pourra toujours donner à i une valeur assez petite pour que chaque terme de la série $\mathrm{f}x+ip+i^2q+i^3r+$ etc. devienne plus grand que la somme de tous les termes suivans; et alors toute valeur de i plus petite que celle-là satisfera toujours à la même condition.

On doit regarder ce théorème comme un des principes fondamentaux de la théorie que nous nous proposons de développer : on le suppose tacitement dans le calcul différentiel et dans celui des fluxions; et c'est par cet endroit qu'on peut dire que ces calculs donnent le plus de prise sur eux, surtout dans leur application aux problèmes géométriques et mécaniques. Les doutes qui pourraient rester sur la démonstration de ce théorème, parce que le procédé que nous avons employé pour trouver les restes $i\mathrm{P}$, $i\mathrm{Q}$, $i\mathrm{R}$, etc. n'est applicable qu'aux fonctions algébriques, seront levés dans le chapitre V, où nous donnerons l'expression générale de ces restes, et la manière d'en déterminer les limites.

7. Il faut remarquer au reste que la méthode que nous venons de donner pour trouver successivement les termes de la série qui

représente une fonction de $x+i$, développée suivant les puissances de i, ne peut s'appliquer en général au développement d'une fonction de x et de i, qu'autant que cette fonction est susceptible d'être réduite en une série qui procède suivant les puissances positives et entières de i. Car le raisonnement de l'article 2, par lequel nous avons prouvé que toute fonction de $x+i$ est, généralement parlant, susceptible de cette forme, ne pourrait pas s'appliquer à une fonction quelconque de x et i. Mais dans les cas où cette réduction est possible, on pourra toujours appliquer à la série résultante du développement suivant les puissances ascendantes de i, la conséquence que nous en avons tirée dans l'article précédent, savoir, que la quantité i pourra être prise assez petite pour qu'un terme quelconque de la série soit plus grand que tous ceux qui le suivent, pris ensemble.

CHAPITRE

CHAPITRE II.

Fonctions dérivées ; leur notation et leur algorithme.

8. Nous avons vu que le développement de $f(x+i)$ donne naissance à différentes autres fonctions p, q, r, etc., toutes dérivées de la fonction principale fx, et nous avons donné la manière de trouver ces fonctions dans des cas particuliers. Mais pour établir une théorie sur ces sortes de fonctions, il faut rechercher la loi générale de leur dérivation.

Pour cela, reprenons la formule générale

$$f(x+i) = fx + pi + qi^2 + ri^3 + \text{etc.},$$

et supposons que l'indéterminée x devienne $x+o$, o étant une quantité quelconque indéterminée et indépendante de i; il est visible que $f(x+i)$ deviendra $f(x+i+o)$, et l'on voit en même temps que l'on aurait le même résultat en mettant simplement $i+o$ à la place de i dans $f(x+i)$. Donc aussi, le résultat doit être le même, soit qu'on mette, dans la série $fx+pi+qi^2+ri^3+$ etc., $i+o$ à la place de i, soit qu'on y mette $x+o$ au lieu de x.

La première substitution donnera

$$fx + p(i+o) + q(i+o)^2 + r(i+o)^3 + \text{etc.};$$

savoir, en développant les puissances de $i+o$, et n'écrivant, pour plus de simplicité, que les deux premiers termes de chaque puissance, parce que la comparaison de ces termes suffira pour les déterminations dont nous avons besoin,

$$\begin{aligned} &fx + pi + qi^2 + ri^3 + si^4 + \text{etc.}; \\ &+ po + 2qio + 3ri^2o + 4si^3o + \text{etc.} \end{aligned}$$

Pour faire l'autre substitution, soient $fx + f'xo +$ etc., $p + p'o +$ etc., $q + q'o +$ etc., $r + r'o +$ etc., ce que deviennent les fonctions fx, p, q, r, etc. en y mettant $x + o$ pour x, et ne considérant dans le développement que les termes qui contiennent la première puissance de o, il est clair que la même formule deviendra

$$\begin{array}{l} fx + pi + qi^2 + ri^3 + si^4 + \text{etc.} \\ + f'xo + p'io + q'i^2o + r'i^3o + \text{etc.} \end{array}$$

Comme ces deux résultats doivent être identiques, quelles que soient les valeurs de i et de o, on aura, en comparant les termes affectés de o, de io, de i^2o, etc.,

$$p = f'x, \quad 2q = p', \quad 3r = q', \quad 4s = r', \text{ etc.}$$

Maintenant, de même que $f'x$ est la première fonction dérivée de fx, il est clair que p' est la première fonction dérivée de p, que q' est la première fonction dérivée de q, r' la première fonction dérivée de r, et ainsi de suite. Donc, si, pour plus de simplicité et d'uniformité, on dénote par $f'x$ la première fonction dérivée de fx, par $f''x$ la première fonction dérivée de $f'x$, par $f'''x$ la première fonction dérivée de $f''x$, et ainsi de suite, on aura

$$p = f'x, \quad \text{et de là} \quad p' = f''x\,;$$

donc $$q = \frac{p'}{2} = \frac{f''x}{2}, \quad \text{et de là} \quad q' = \frac{f'''x}{2}\,;$$

donc $$r = \frac{q'}{3} = \frac{f'''x}{2.3}, \quad \text{et de là} \quad r' = \frac{f^{\text{IV}}x}{2.3}\,;$$

donc $$s = \frac{r'}{4} = \frac{f^{\text{IV}}x}{2.3.4}, \quad s' = \frac{f^{\text{V}}x}{2.3.4}\,;$$

et ainsi de suite.

Donc, substituant ces valeurs dans le développement de la fonction $f(x+i)$, on aura

$$f(x+i) = fx + f'xi + \frac{f''x}{2}i^2 + \frac{f'''x}{2.3}i^3 + \frac{f^{\text{IV}}x}{2.3.4}i^4 + \text{etc.}$$

Cette nouvelle expression a l'avantage de faire voir comment les termes de la série dépendent les uns des autres, et surtout comment, lorsqu'on sait former la première fonction dérivée d'une fonction primitive quelconque, on peut former toutes les fonctions dérivées que la série renferme.

9. Nous appellerons la fonction fx, *fonction primitive*, par rapport aux fonctions $f'x$, $f''x$, etc. qui en dérivent, et nous appellerons celles-ci, *fonctions dérivées*, par rapport à celle-là. Nous nommerons de plus la première fonction dérivée $f'x$, *fonction prime;* la seconde fonction dérivée $f''x$, *fonction seconde*; la troisième fonction dérivée $f'''x$, *fonction tierce*, et ainsi de suite.

De la même manière, si y est supposée une fonction de x, nous dénoterons ses fonctions dérivées par y', y'', y''', etc., de sorte que y étant une fonction primitive, y' sera sa fonction *prime*, y'' en sera la fonction *seconde*, y''' la fonction *tierce*, et ainsi de suite.

De sorte que x devenant $x+i$, y deviendra

$$y + y'i + \frac{y''i^2}{2} + \frac{y'''i^3}{2.3} + \text{etc.}$$

Ainsi, pourvu qu'on ait un moyen d'avoir la fonction prime d'une fonction primitive quelconque, on aura, par la simple répétition des mêmes opérations, toutes les fonctions dérivées, et par conséquent tous les termes de la série qui résulte du développement de la fonction primitive.

Au reste, pour peu qu'on connaisse le calcul différentiel, on doit voir que les fonctions dérivées y', y'', y''', etc. relatives à x, coïncident avec les expressions $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, etc.

CHAPITRE III.

Fonctions dérivées des puissances, des quantités exponentielles et logarithmiques, des sinus, cosinus, et des expressions composées de ces fonctions simples. Équations dérivées.

10. PUISQUE tout se réduit à trouver la première fonction dérivée d'une fonction donnée, nous allons donner des règles générales pour la formation des fonctions dérivées des principales quantités qu'on emploie dans l'analyse.

Par ce que nous venons de démontrer, on voit que la fonction dérivée $f'x$ d'une fonction donnée fx de la variable x, n'est autre chose que le coefficient de i dans le premier terme du développement de cette fonction, après la substitution de $x+i$ à la place de i. Ainsi il ne s'agit que de trouver ce premier coefficient.

Soit donc d'abord $fx = x^m$, on aura

$$f(x+i) = (x+i)^m;$$

or, il est facile de démontrer, soit par les simples règles de l'arithmétique, soit par les premières opérations de l'algèbre, que les deux premiers termes de la puissance m du binome $x+i$, sont $x^m + mx^{m-1}i$, soit que m soit un nombre entier ou fractionnaire, positif ou négatif; ainsi on aura

$$f'x = mx^{m-1}.$$

De là on tirera de la même manière,

$$f''x = m(m-1)x^{m-2}, \quad f'''x = m(m-1)(m-2)x^{m-3}, \quad \text{etc.};$$

de sorte qu'on aura, par la formule générale de l'article 8,

$$(x+i)^m = x^m + mx^{m-1}i + \frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}i^2$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}x^{m-3}i^3 + \text{etc.},$$

ce qui est la formule connue du binome, laquelle se trouve ainsi démontrée par toutes les valeurs de m.

11. Soit en second lieu $fx = a^x$, on aura

$$f(x+i) = a^{x+i} = a^x a^i;$$

ainsi tout se réduit à trouver les deux premiers termes de la série de a^i, développée suivant les puissances de i.

Soit, pour cela, $a = 1 + b$, alors

$$a^i = (1+b)^i = 1 + ib + \frac{i(i-1)}{2}b^2 + \frac{i(i-1)(i-2)}{2.3}b^3 + \text{etc.},$$

par la formule que nous venons de démontrer. Développant les produits de i, $i-1$, $i-2$, etc., et ordonnant les termes suivant les puissances de i, on trouvera que les termes multipliés par i forment cette série $i\left(b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \text{etc.}\right)$.

Donc, faisant pour abréger,

$$A = b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \text{etc.} = a - 1 - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \text{etc.}$$

les deux premiers termes de la valeur de a^i en série, seront $1 + Ai$; on aura par conséquent

$$f'x = Aa^x.$$

On tirera de là, par la même opération répétée,

$$f''x = A \times Aa^x = A^2a^x, \quad f'''x = A^3a^x, \quad \text{etc.}$$

On aura ainsi,

$$f(x+i) = a^{x+i} = a^x\left(1 + Ai + \frac{A^2i^2}{2} + \frac{A^3i^3}{2.3} + \text{etc.}\right).$$

Divisant par a^x, et changeant i en x, on aura la série connue

$$a^x = 1 + Ax + \frac{A^2x^2}{2} + \frac{A^3x^3}{2.3} + \text{etc.}$$

12. Si dans cette formule on fait $x = 1$, on aura

$$a = 1 + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{2.3} + \text{etc.},$$

et si on fait $x = \frac{1}{A}$, on aura

$$a^{\frac{1}{A}} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \text{etc.}$$

Ainsi la quantité $a^{\frac{1}{A}}$ est égale à un nombre constant, qui est la valeur de a, lorsque $A = 1$; et par la série précédente, on trouve

$$a^{\frac{1}{A}} = 2{,}71828\ 18284\ 59045\ldots\ldots$$

C'est le nombre qu'on désigne ordinairement par e; de sorte que la relation entre a et A se trouve exprimée d'une manière finie par l'équation $a^{\frac{1}{A}} = e$, laquelle donne $a = e^A$.

Donc, si $\text{f}x = e^{mx}$, on aura $a = e^m$, $A = m$, et par conséquent

$$\text{f}'x = me^{mx},\quad \text{f}''x = m^2e^{mx},\quad \text{f}'''x = m^3e^{mx},\quad \text{etc.};$$

d'où l'on tirera comme ci-dessus,

$$e^{mx} = 1 + mx + \frac{m^2x^2}{2} + \frac{m^3x^3}{2.3},\ \text{etc.}$$

Or, dans l'équation $y = a^x$, x est ce qu'on appelle le logarithme de y, a étant la base du système logarithmique, c'est-à-dire, le nombre dont le logarithme est l'unité; de sorte que cette équation donne $x = \log y$ pour la base a. Par la même raison, l'équation $a^{\frac{1}{A}} = e$ donnera $\frac{1}{A} = \log e$ pour la base a, et $A = \log a$ pour la base e.

Dans le système des logarithmes ordinaires, la base a a été prise $=10$, parce que ces logarithmes sont plus commodes pour le calcul arithmétique; mais dans l'analyse, on préfère, comme plus simple, le système dont la base est le nombre e; c'est le système des logarithmes de *Neper*, qu'on nomme communément *logarithmes hyperboliques*, parce qu'ils sont représentés par l'aire de l'hyperbole équilatère entre ses assymptotes, et on les désigne par la simple caractéristique l. Ainsi on a $\mathrm{A}=\mathrm{l}a$; par conséquent la fonction prime de la fonction a^x, est exprimée par $a^x \mathrm{l}a$ (art. précéd.).

Au reste, comme $a=e^{\mathrm{A}}$, on aura $a=e^{\mathrm{l}a}$, et par conséquent $a^x=e^{x\mathrm{l}a}$; moyennant quoi on peut réduire toutes les exponentielles à la même base e.

13. Soit donc, en troisième lieu, $\mathrm{f}x=\log x$, on aura, par la nature des logarithmes, $x=a^{\mathrm{f}x}$. Or, x devenant $x+i$, $\mathrm{f}x$ devient

$$\mathrm{f}(x+i)=\mathrm{f}x+i\mathrm{f}'x+\frac{i^2}{2}\mathrm{f}''x+\text{etc.}$$

Faisant, pour abréger, $o=i\mathrm{f}'x+\frac{i^2}{2}\mathrm{f}''x+\text{etc.}$, l'équation $x=a^{\mathrm{f}x}$ deviendra, en y mettant $x+i$ pour x, et $\mathrm{f}x+o$ pour $\mathrm{f}x$

$$x+i=a^{\mathrm{f}x+o}=a^{\mathrm{f}x}\times a^o,$$

et divisant cette équation par la précédente, on aura

$$1+\frac{i}{x}=a^o=1+\mathrm{A}o+\frac{\mathrm{A}^2o^2}{2}+\text{etc. (art. précéd.)}$$

Effaçant l'unité de part et d'autre, et divisant par i, après avoir substitué la valeur de o, on aura, en ordonnant suivant les puissances de i,

$$\frac{1}{x}=\mathrm{A}\mathrm{f}'x+\frac{i}{2}(\mathrm{A}\mathrm{f}''x+\mathrm{A}^2\overline{\mathrm{f}'x}^2)+\text{etc.}$$

La quantité i étant et devant demeurer indéterminée, il faudra que cette équation se vérifie indépendamment de cette quantité; par conséquent tous les termes affectés d'une même puissance de i, devront se détruire d'eux-mêmes, et former autant d'équations à part. On aura donc ainsi

$$\frac{1}{x} = \mathrm{A}f'x, \quad \mathrm{A}f''x + \mathrm{A}^2\overline{f'x}^2 = 0,$$

et ainsi de suite.

Donc, fx étant $= \log x$, on aura en général,

$$f'x = \frac{1}{\mathrm{A}x} = \frac{1}{xla};$$

et de là, par la formule générale de l'article 10, on tirera

$$f''x = -\frac{1}{x^2la}, \quad f'''x = \frac{2}{x^3la}, \quad f^{\text{IV}}x = -\frac{2.3}{x^4la}, \quad \text{etc.},$$

valeurs qui satisfont, comme l'on voit, aux différentes équations trouvées ci-dessus. Ainsi, par la substitution de ces valeurs dans la série $fx + if'x + \frac{i^2}{2}f''x +$ etc., on aura sur-le-champ,

$$\log(x+i) = \log x + \frac{i}{xla} - \frac{i^2}{2x^2la} + \frac{i^3}{3x^3la} - \text{etc.}$$

Faisant $x = 1$, et changeant i en x, on aura la formule connue

$$\log(1+x) = \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \text{etc.}}{la}.$$

Pour les logarithmes hyperboliques où $le = 1$, on aura simplement

$$fx = lx, \quad f'x = \frac{1}{x}, \quad f''x = -\frac{1}{x^2}, \quad \text{etc.}$$

14. Les sinus et cosinus d'angles considérés analytiquement, ne sont que des expressions composées d'exponentielles imaginaires; ainsi on peut déduire leurs fonctions dérivées de celles de ces exponentielles.

Soit donc, en quatrième lieu, $fx = \sin x$: comme on a

$$\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}, \quad \cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2},$$

on

on fera

$$fx = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},$$

et l'on aura (art. 12), en mettant $\pm\sqrt{-1}$ au lieu de m dans e^{mx},

$$f'x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2} = \cos x.$$

De même en faisant

$$fx = \cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2},$$

on trouvera

$$f'x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2}\sqrt{-1} = -\sin x.$$

Connaissant ainsi les fonctions primes des fonctions $\sin x$, $\cos x$, on en déduira facilement toutes les autres fonctions dérivées.

En effet, puisque $fx = \sin x$ a donné $f'x = \cos x$, et que $fx = \cos x$ a donné $f'x = -\sin x$, on aura, pour $fx = \sin x$,

$$f'x = \cos x, \quad f''x = -\sin x, \quad f'''x = -\cos x, \quad f^{\text{IV}}x = \sin x, \text{ etc.};$$

et pour $fx = \cos x$, on aura

$$f'x = -\sin x, \quad f'' = -\cos x, \quad f'''x = \sin x, \quad f^{\text{IV}}x = \cos x, \quad \text{etc.}$$

D'après ces formules, on aura sur-le-champ les séries

$$\sin(x+i) = \sin x + i\cos x - \frac{i^2}{2}\sin x - \frac{i^3}{2.3}\cos x + \frac{i^4}{2.3.4}\sin x + \text{etc.}$$

$$\cos(x+i) = \cos x - i\sin x - \frac{i^2}{2}\cos x + \frac{i^3}{2.3}\sin x + \frac{i^4}{2.3.4}\cos x - \text{etc.}$$

d'où, en faisant $x = 0$, et changeant i en x, on tire les séries connues

$$\sin x = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^6}{2.3.4.5} - \text{etc.}, \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} - \text{etc.}$$

15. Les fonctions x^m, a^x, lx, $\sin x$, $\cos x$ que nous venons de considérer, doivent être regardées comme les fonctions simples

analytiques d'une seule variable. Toutes les autres fonctions de la même variable se composent de celles-là par addition, soustraction, multiplication ou division ; ou sont données en général par des équations dans lesquelles entrent des fonctions de ces mêmes formes. Ainsi connaissant les fonctions primes des fonctions simples que nous venons d'examiner, on trouvera aisément les fonctions primes des fonctions composées, et par les mêmes opérations répétées, on aura successivement les fonctions secondes, tierces, etc.

Soient p, q, r, etc. des fonctions simples de x, dont p', q', r', etc. soient les fonctions primes, connues par les règles précédentes, et qu'on demande la fonction prime y' d'une fonction y composée de p, q, r, etc. ; on considérera que x devenant $x+i$, y devient en général $y+y'i+\frac{y''i^2}{2}+$ etc., (art. 9). Or p, q, r, etc. deviennent en même temps $p+p'i+$ etc., $q+q'i+$ etc., $r+r'i+$ etc., et ainsi des autres. Il n'y aura donc qu'à substituer ces valeurs dans l'expression de y, développer les termes suivant les puissances de i, et le coefficient de i sera la valeur cherchée de y'.

Ainsi, si $y=ap+bq+$ etc., a, b, etc. étant des coefficiens constans quelconques, on aura sur-le-champ

$$y'=ap'+bq'+\text{etc.}$$

Si $y=apq$, la quantité pq deviendra

$$(p+ip'+\text{etc.})\,(q+iq'+\text{etc.})=pq+i\,(p'q+q'p)\;+\;\text{etc} ;$$

donc

$$y'=ap'q+aq'p.$$

Si $y=apqr$, on trouvera de la même manière,

$$y'=ap'qr+aq'pr+ar'pq,$$

et ainsi de suite.

Si $y=\frac{ap}{q}$, la quantité $\frac{p}{q}$ deviendra

$$\frac{p+ip'+\text{etc.}}{q+iq'+\text{etc.}}.$$

Développant le dénominateur en série par les règles connues, on aura

$$(p+ip'+\text{etc.})\left(\frac{1}{q}-\frac{iq'}{q^2}+\text{etc.}\right)=\frac{p}{q}+i\left(\frac{p'}{q}-\frac{q'p}{q^2}\right)+\text{etc.}$$

donc

$$y'=\frac{ap'}{q}-\frac{apq'}{q^2}.$$

16. Soit en général $y=\text{f}p$, en regardant $\text{f}p$ comme une fonction primitive de p, sa fonction prime sera $\text{f}'p$; ensorte que p devenant $p+o$ (j'emploie ici la quantité indéterminée o, à la place de la quantité indéterminée i, qui désignera toujours l'augmentation indédéterminée de x), $\text{f}p$ deviendra $\text{f}p+o\text{f}'p+\frac{o^2}{2}\text{f}''p+\text{etc.}$ (art. 8). Or, p étant une fonction de x, lorsque x devient $x+i$, p devient (*ibid.*) $p+ip'+\frac{i^2p''}{2}+\text{etc.}$; donc faisant $o=ip'+\frac{i^2}{2}p''+\text{etc.}$, $\text{f}p$ deviendra, par la substitution de $x+i$ à la place de x,

$$\text{f}p+ip'\text{f}'p+\frac{i^2}{2}(p'^2\text{f}''p+p''\text{f}'p)+\text{etc.};$$

par conséquent, on aura

$$y'=p'\text{f}'p.$$

D'où résulte ce principe : que la fonction prime d'une fonction d'une quantité qui est elle-même une fonction d'une autre quantité, est égale au produit des fonctions primes des deux fonctions.

Supposons maintenant que y soit une fonction de p et de q, que nous désignerons par $\text{f}(p, q)$, il s'agit donc de substituer $x+i$ à la place de x dans les deux fonctions p et q. Or, il est visible que l'on doit avoir le même résultat, soit qu'on fasse ces deux substitutions à la fois ou successivement, puisque les quantités p et q sont regardées comme indépendantes.

En substituant d'abord $x+i$ à la place de x dans la fonction p, la fonction $\text{f}(p, q)$, regardée seulement comme fonction de p, devient $\text{f}(p, q)+ip'\text{f}'(p)+\text{etc.}$; j'écris simplement $\text{f}'(p)$ pour désigner la fonction prime de $\text{f}(p, q)$, prise relativement à p

seul, q étant regardée comme constante. Substituons maintenant $x+i$ pour x dans q, la fonction $f(p, q)$ deviendra pareillement $f(p, q)+iq'f'(q)+$ etc., où $f'(q)$ représente la fonction prime de $f(p, q)$, prise relativement à q seul, p étant regardée comme constante. Quant au terme $ip'f'(p)$, il est visible que par cette nouvelle substitution, il se trouverait augmenté de termes multipliés par i^2, i^3, etc. Ainsi les deux premiers termes de la série provenant du développement de $f(p, q)$, après la substitution de $x+i$ pour x, seront simplement $f(p, q)+i[p'f'(p)+q'f'(q)]$; de sorte qu'on aura

$$y'=p'f'(p)+q'f'(q).$$

Si y était une fonction de p, q, r, représentée par $f(p, q, r)$, on trouverait de la même manière

$$y'=p'f'(p)+q'f'(q)+r'f'(r),$$

et ainsi de suite.

D'où il est aisé de tirer cette conclusion générale : que la fonction prime d'une fonction composée de différentes fonctions particulières, sera la somme des fonctions primes relatives à chacune de ces mêmes fonctions, considérées séparément et indépendamment l'une de l'autre.

Ce principe, combiné avec le précédent, suffira pour trouver les fonctions primes de toutes sortes de fonctions, ainsi que les autres fonctions dérivées des ordres supérieurs.

Ainsi, en supposant X une fonction quelconque de x, les fonctions primes de X^m, lX, a^X, $\sin X$, $\cos X$, etc. seront $mX^{m-1}X'$, $\frac{X'}{X}$, $a^X X' la$, $X'\cos X$, $-X'\sin X$, etc., et leurs fonctions secondes $mX^{m-1}X''+m(m-1)X^{m-2}X'^2$, $\frac{X''}{X}-\frac{X'^2}{X^2}$, $a^X X'' la+a^X X'^2(la)^2$, $X''\cos X-X'^2\sin X$, $-X''\sin X-X'^2\cos X$, etc., et ainsi de suite.

17. Mais la fonction y pourrait n'être donnée que par une équation quelconque entre x et y.

Représentons cette équation en général par $F(x, y) = 0$, on aura, par la résolution, y égal à une certaine fonction de x, qu'on pourra désigner par fx; de sorte qu'en substituant fx pour y dans la fonction $F(x, y)$, elle deviendra $F(x, fx)$, fonction de x seul que nous désignerons par φx. Cette fonction de φx devra donc être nulle, quelle que soit la valeur de x. Donc elle le sera aussi en mettant $x + i$ pour x, quelle que soit la valeur de i. Mais par cette substitution, φx devient $\varphi x + i\varphi' x + \frac{i^2}{2} \varphi'' x +$ etc.; donc, pour que i puisse être une quantité quelconque, il faudra que l'on ait séparément les équations $\varphi x = 0$, $\varphi' x = 0$, $\varphi'' x = 0$, etc. dont la première est l'équation donnée, la seconde est sa fonction prime, la troisième sa fonction seconde, etc.

Or, puisque $\varphi x = F(x, fx) = F(x, y)$, $\varphi' x$ sera la fonction prime de $F(x, y)$, y étant regardée comme fonction de x, et par le principe établi dans l'article précédent, cette fonction prime sera exprimée par $F'(x) + y'F'(y)$, en désignant par $F'(x)$ et $F'(y)$, les fonctions primes de la fonction $F(x, y)$, prises relativement à x seul et à y seul.

Donc l'équation $F(x, y) = 0$ donnera

$$F'(x) + y'F'(y) = 0;$$

d'où l'on tire

$$y' = -\frac{F'(x)}{F'(y)}.$$

Ayant ainsi la valeur de la fonction prime y' en fonction de x et y, on aura celle de y'', en prenant la fonction prime de cette fonction, et ainsi de suite.

Il résulte de l'analyse précédente, ce principe :

Lorsqu'on a une équation quelconque entre deux variables x, y, l'équation subsistera encore entre les fonctions primes de tous ses termes, ainsi qu'entre leurs fonctions secondes, etc. Nous appellerons ces nouvelles équations, *équations dérivées ;* et en particulier, *équations primes*, *équations secondes*, etc., celles qu'on obtient en prenant les fonctions primes, secondes, etc.

Si l'équation ne contenait qu'une seule variable qui dût demeurer indéterminée, ce qui a lieu dans les équations identiques, le même principe subsisterait, et l'on aurait également une équation prime, une équation seconde, etc. qui seraient aussi identiques.

Les leçons III, IV, V, VI et VII sur le calcul des fonctions, renferment un commentaire sur les principaux points que nous venons de traiter dans ce chapitre; on y trouvera des développemens utiles et importans, et des applications nouvelles.

CHAPITRE IV.

Digression sur la manière de déduire les séries qui expriment les exponentielles, les logarithmes, les sinus, cosinus, et les arcs, de simples considérations algébriques.

18. Les séries qui représentent les quantités exponentielles et logarithmiques, ainsi que les sinus et les cosinus, ont été trouvées d'abord par le calcul différentiel. Halley est, je crois, le premier qui ait imaginé de déduire celles des exponentielles et des logarithmes de la formule de Newton pour les puissances du binome (*Transact. philosoph.*, *n*° 216), en employant la considération de l'infini ou de l'infiniment petit. Cette méthode a été suivie par Euler, et étendue aux sinus et cosinus, dans les chapitres VII et VIII du premier tome de son *Introductio in analysis*, etc. Mais quoiqu'elle puisse être admise en analyse, on ne saurait disconvenir qu'elle n'a pas l'évidence, ni même la rigueur qu'on doit desirer dans les élémens d'une science; et nous croyons qu'on nous saura gré de nous écarter ici un moment de notre marche, pour donner une démonstration des mêmes formules, fondée aussi uniquement sur celle du binome, mais dégagée de toute considération de l'infini. Nous donnerons même à ces formules une généralisation qui servira à rendre les séries aussi convergentes qu'on voudra dans tous les cas.

Considérons l'équation générale $y=a^x$, dans laquelle x est le logarithme de y pour la base a; mettons à la place de a, $1+a-1$, ce qui est la même chose, et ensuite à la place de $(1+a-1)^x$, $[(1+a-1)^n]^{\frac{x}{n}}$, ce qui est encore la même chose que a^x; on aura

$$y=[(1+a-1)^n]^{\frac{x}{n}},$$

n étant une quantité quelconque qui disparaît d'elle-même dans la valeur de y.

Je développe maintenant le binome $(1+a-1)^n$ dans la série

$$1+n(a-1)+\frac{n(n-1)}{2}(a-1)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}(a-1)^3+\text{etc.},$$

et j'ordonne les termes suivant les puissances de n, j'aurai

$$(1+a-1)^n=1+An+Bn^2+\text{etc.},$$

les coefficiens A, B, etc. étant donnés en a; et il est aisé de voir qu'on aura d'abord

$$A=a-1-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}-\text{etc.},$$

cette quantité A étant la même que celle de l'article 11; à l'égard des autres coefficiens, nous n'aurons pas besoin de les chercher, puisqu'ils disparaîtront du calcul, comme on va le voir.

Faisant cette substitution, nous aurons

$$y=(1+An+Bn^2+\text{etc.})^{\frac{x}{n}},$$

et développant à la manière du binome, il viendra

$$y=1+\frac{x}{n}(An+Bn^2+\text{etc.})+\frac{x(x-n)}{2n^2}(An+Bn^2+\text{etc.})^2$$
$$+\frac{x(x-n)(x-2n)}{2.3n^3}(An+Bn^2+\text{etc.})^3+\text{etc.},$$

savoir, en effaçant les puissances de n communes aux numérateurs et aux dénominateurs,

$$y=1+x(A+Bn+\text{etc.})+\frac{x(x-n)}{2}(A+Bn+\text{etc.})^2$$
$$+\frac{x(x-n)(x-2n)}{2.3}(A+Bn+\text{etc.})^3+\text{etc.}$$

Maintenant, comme la quantité n est arbitraire, et doit par la nature même de la fonction y, disparaître de l'expression de cette fonction, il faudra que tous les termes multipliés par chaque puissance de n, se détruisent mutuellement. Ne tenant donc aucun

compte

compte de ces termes qui doivent disparaître d'eux-mêmes, quel que soit n, on aura simplement

$$y = a^x = 1 + xA + \frac{x^2A^2}{2} + \frac{x^3A^3}{2.3} + \text{etc.},$$

comme plus haut (art. 11).

19. Cherchons de la même manière la valeur de x en y. Pour cela, nous mettrons l'équation $a^x = y$ sous la forme

$$(1 + a - 1)^{nx} = (1 + y - 1)^n,$$

qui est identique avec la précédente, et où n est encore une quantité quelconque à volonté, qui ne doit point entrer dans la valeur de x en y.

Développant les deux membres à la manière du binome, on aura

$$1 + nx(a-1) + \frac{nx(nx-1)}{2}(a-1)^2 + \frac{nx(nx-1)(nx-2)}{2.3}(a-1)^3 + \text{etc.}$$
$$= 1 + n(y-1) + \frac{n(n-1)}{2}(y-1)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}(y-1)^3 + \text{etc.};$$

savoir, en effaçant l'unité de part et d'autre, et divisant par n:

$$x(a-1) + \frac{x(nx-1)}{2}(a-1)^2 + \frac{x(nx-1)(nx-2)}{2.3}(a-1)^3 + \text{etc.}$$
$$= y - 1 + \frac{n-1}{2}(y-1)^2 + \frac{(n-1)(n-2)}{2.3}(y-1)^3 + \text{etc.}$$

Or n étant, comme nous l'avons déjà dit, une quantité entièrement arbitraire et qui ne doit pas entrer dans l'expression de x en y, il faudra que les termes multipliés par les différentes puissances de n, se détruisent d'eux-mêmes, ensorte qu'il ne reste que ceux où n n'entrera pas. On aura ainsi, en ne tenant compte que des termes sans n, l'équation suivante, dans laquelle j'emploie, pour abréger, la quantité A déterminée ci-dessus,

$$xA = y - 1 - \tfrac{1}{2}(y-1)^2 + \tfrac{1}{3}(y-1)^3 - \text{etc.};$$

d'où l'on tire

$$x = \log y = \frac{y - 1 - \frac{1}{2}(y-1)^2 + \frac{1}{3}(y-1)^3 - \text{etc.}}{A},$$

formule connue, et qui s'accorde avec celle de l'article 13, A étant $= la$.

20. Mais cette formule n'est convergente que lorsque le nombre y, dont elle donne le logarithme, est peu différent de l'unité. Aussi n'est-elle d'aucune utilité pour le calcul des logarithmes ordinaires. Voici un moyen de la rendre convergente pour tous les nombres.

Il est évident que l'équation fondamentale $y = a^x$ peut se changer en celle-ci $y^m = a^{mx}$, m étant un nombre quelconque entier ou fractionnaire. Employant donc cette dernière formule à la place de l'autre, il n'y aura qu'à changer dans celle-ci y en y^m et x en mx. On aura ainsi en général,

$$\log y = \frac{y^m - 1 - \frac{1}{2}(y^m - 1)^2 + \frac{1}{3}(y^m - 1)^3 - \text{etc.}}{mA},$$

où l'on pourra prendre pour m une fraction $\frac{1}{r}$, telle que $\sqrt[r]{y}$ soit toujours un nombre aussi peu différent de l'unité qu'on voudra.

Supposons, ce qui est toujours possible, que la racine r de y ne contienne que l'unité avant la virgule, et qu'après la virgule, il y ait s zéros, alors si on s'arrête à $2s$ décimales, il est visible que le terme $(y^m - 1)^2$, et à plus forte raison les termes suivans, ne donneront rien; de sorte qu'on aura simplement, dans ce cas,

$$\log y = \frac{y^m - 1}{mA} = r\,\frac{\sqrt[r]{y} - 1}{A}.$$

De la même manière, on aura aussi, sous les mêmes conditions,

$$A = la = r(\sqrt[r]{a} - 1);$$

et par conséquent

$$\log y = \frac{\sqrt[r]{y} - 1}{\sqrt[r]{a} - 1}.$$

C'est par cette formule que *Brigs* a calculé les premiers logarithmes. Il avait remarqué qu'en faisant des extractions successives de racines carrées d'un nombre quelconque, si on s'arrête dans une de ces extractions, à deux fois autant de décimales qu'il y aura de zéros à la suite de l'unité, lorsqu'il n'y a plus que l'unité avant la virgule, la partie décimale de cette racine se trouve toujours la moitié de celle de la racine précédente, ensorte que ces parties décimales ont entre elles le même rapport que les logarithmes des racines mêmes; c'est ce qui résulte évidemment des formules précédentes.

Ainsi, en prenant $r = 2^{60}$, on trouve pour $a = 10$,

$$\sqrt[r]{a} = 1,00000\ 00000\ 00000\ 00199\ 71742\ 08125\ 50527,$$

$$\frac{1}{r} = 0,00000\ 00000\ 00000\ 00086\ 73617\ 37988\ 40354.$$

De sorte que

$$\frac{1}{r} \times \frac{1}{\sqrt[r]{a} - 1} = \frac{86736173798840354}{199717420812550527} = 0,43429\ 44819\ 03251\ldots$$

$$= \frac{1}{A} = \frac{1}{la} = \log e.$$

Si maintenant on veut avoir, par exemple, le logarithme de 3, on fera $y = 3$, et employant de même 60 extractions de racines carrées, on trouvera

$$\sqrt[r]{y} = 1,00000\ 00000\ 00000\ 00095\ 28942\ 64074\ 58932\ldots,$$

et de là

$$\log y = \frac{\sqrt[r]{y} - 1}{\sqrt[r]{a} - 1} = \frac{9528942640745893\ldots}{199717420812550527\ldots}$$

$$= 0,47712\ 12547\ 19662\ldots$$

Cette méthode est, comme l'on voit, très-laborieuse, par le grand nombre d'extractions de racines qu'elle demande pour avoir un résultat en plusieurs décimales; mais la formule générale que nous avons donnée ci-dessus pour l'expression de x en y, sert à la simplifier et à la compléter; car quel que soit le nombre y, il suffira d'en extraire quelques racines carrées, jusqu'à ce qu'on parvienne à un nombre y^m ou $\sqrt[r]{y}$, qui n'ait que l'unité avant la virgule ; alors les puissances de $y^m - 1$ seront des fractions d'autant plus petites, qu'elles seront plus hautes, et par conséquent la série deviendra assez convergente pour qu'il suffise d'en prendre un petit nombre de termes.

21. On peut appliquer la méthode précédente à la recherche des séries qui expriment le sinus par l'arc, ou l'arc par le sinus, et pour lesquelles on emploie aussi (comme l'a fait *Euler* dans le même ouvrage) la considération de l'infiniment petit et de l'infini.

En effet, en partant de la formule connue pour la multiplication des angles $\cos nx + \sin nx \sqrt{-1} = (\cos x + \sin x\sqrt{-1})^n$, on a reciproquement

$$\cos x + \sin x\sqrt{-1} = (\cos nx + \sin nx\sqrt{-1})^{\frac{1}{n}},$$

où le nombre n peut être quelconque.

Maintenant, quelle que soit l'expression de $\sin x$ en série de l'arc x, elle ne peut être que de la forme $Ax + Bx^2 +$ etc.; car, puisque le sinus devient nul lorsque l'arc est nul, il est visible que cette expression ne doit contenir aucun terme sans x. Or, comme $\cos x = \sqrt{[1 - (\sin x^2)]}$, on aura

$$\cos x = \sqrt{(1 - A^2x^2 - 2ABx^3 - \text{etc.})} = 1 - \frac{A^2x^2}{2} + \text{etc.}$$

Les coefficiens A, B, etc. sont censés indépendans de l'arc x ; par conséquent, ils seront les mêmes pour tout autre arc. Substituant donc nx pour x, on aura pareillement

$$\sin nx = nAx + n^2Bx^2 + \text{etc.} \quad \text{et} \quad \cos nx = 1 - \frac{n^2A^2x^2}{2} + \text{etc.}$$

Donc l'équation précédente deviendra

$$\cos x + \sin x\sqrt{-1} = \left[1 + nAx\sqrt{-1} + n^2\left(B\sqrt{-1} - \frac{A^2}{2}\right)x^2 + \text{etc.}\right]^{\frac{1}{n}}.$$

Développons le second membre à la manière du binome, en faisant, pour abréger,

$$X = Ax\sqrt{-1} + n\left(B\sqrt{-1} - \frac{A^2}{2}\right)x^2 + \text{etc.},$$

on aura

$$\cos x + \sin x\sqrt{-1} = 1 + \frac{1}{n}(nX) + \frac{1-n}{n^2}(nX)^2$$
$$+ \frac{(1-n)(1-2n)}{2.3.n^3}(nX)^3 + \text{etc.} = 1 + X + \frac{1-n}{2}X^2$$
$$+ \frac{(1-n)(1-2n)}{2.3}X^3 + \text{etc.}$$

Comme les valeurs de $\sin x$ et de $\cos x$ doivent être indépendantes du nombre arbitraire n, il s'ensuit que tous les termes du second membre qui se trouveront multipliés par une même puissance de n, doivent se détruire d'eux-mêmes. Ne tenant donc compte que des termes où n ne se trouvera pas après le développement, il est aisé de voir que la quantité X se réduira à son premier terme $Ax\sqrt{-1}$, et que les coefficiens des puissances de X se réduiront à $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2.3}$, etc. De sorte que l'on aura simplement

$$\cos x + \sin x\sqrt{-1} = 1 + Ax\sqrt{-1} + \frac{1}{2}(Ax\sqrt{-1})^2$$
$$+ \frac{1}{2.3}(Ax\sqrt{-1})^3 + \text{etc.}$$

En effectuant les puissances de $\sqrt{-1}$, et comparant les parties réelles des deux membres ensemble, et les imaginaires ensemble, on aura

$$\sin x = Ax - \frac{A^3x^3}{2.3} + \frac{A^5x^5}{2.3.4.5} - \text{etc.}$$
$$\cos x = 1 - \frac{A^2x^2}{2} + \frac{A^4x^4}{2.3.4} - \text{etc.}$$

22. Pour avoir de même la valeur de x en sinus et cosinus de x, il n'y aura qu'à reprendre la formule fondamentale

$$\cos nx + \sin nx\sqrt{-1} = (\cos x + \sin x\sqrt{-1})^n,$$

dans laquelle on mettra, à la place de $\sin nx$ et $\cos nx$, leurs valeurs en série $nAx + n^2Bx^2$, etc.; $1 - \frac{n^2A^2x^2}{2} + \text{etc.}$, et on développera la puissance n du second membre. On aura ainsi

$$1+nAx\sqrt{-1}+n^2\left(B\sqrt{-1}-\frac{A^2}{2}\right)x^2+\text{etc.}$$
$$=(\cos x)^n\left[1+n\frac{\sin x}{\cos x}\sqrt{-1}+\frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\sqrt{-1}\right)^2+\text{etc.}\right]^n.$$

Or

$$\frac{\sin x}{\cos x}=\operatorname{tang} x\,,\quad \cos x=\sqrt{(1-\sin x^2)}\,;$$

donc

$$(\cos x)^n=(1-\sin x^2)^{\frac{n}{2}}=1-\frac{n}{2}\sin x^2+\frac{n(n-2)}{2.4}\sin x^4-\text{etc.}$$

Substituant ces valeurs, la quantité n ne se trouvera plus que dans les coefficiens, et ordonnant les termes suivant les puissances de cette quantité, le second membre deviendra de cette forme $1+nP+n^2Q+\text{etc.}$; en faisant pour abréger,

$$P=\operatorname{tang} x\sqrt{-1}-\tfrac{1}{2}(\operatorname{tang} x\sqrt{-1})^2+\tfrac{1}{3}\operatorname{tang} x\sqrt{-1})^3-\text{etc.}$$
$$-\tfrac{1}{2}\sin x^2-\tfrac{1}{4}\sin x^4-\tfrac{1}{6}\sin x^6+\text{etc.},$$
$$Q=\tfrac{1}{2}(\operatorname{tang} x\sqrt{-1})^2+\text{etc.};$$

effaçant l'unité des deux membres, et divisant toute l'équation par n, elle deviendra

$$Ax\sqrt{-1}+n\left(B\sqrt{-1}-\frac{A^2}{2}\right)x^2+\text{etc.}=P+nQ+\text{etc.};$$

et comme elle doit avoir lieu indépendamment de la quantité n, qui doit demeurer indéterminée, il faudra que les termes qui contiennent les différentes puissances de n se détruisent d'eux-mêmes; ce qui la réduira d'abord à $Ax\sqrt{-1}=P$, savoir, en développant les puissances de $\operatorname{tang} x\sqrt{-1}$,

$$Ax\sqrt{-1}=(\operatorname{tang} x-\tfrac{1}{3}\operatorname{tang} x^3+\tfrac{1}{5}\operatorname{tang} x^5-\text{etc.})\sqrt{-1}$$
$$+\tfrac{1}{2}\operatorname{tang} x^2-\tfrac{1}{4}\operatorname{tang} x^4+\tfrac{1}{6}\operatorname{tang} x^6-\text{etc.}$$
$$-\tfrac{1}{2}\sin x^2-\tfrac{1}{4}\sin x^4-\tfrac{1}{6}\sin x^6+\text{etc.}$$

Comme on peut prendre le radical $\sqrt{-1}$ en plus ou en moins, il est visible qu'en le prenant successivement en plus et en moins, et soustrayant les deux équations l'une de l'autre, on aura, après avoir divisé par $2A\sqrt{-1}$,

$$x = \frac{\text{tang}\, x - \frac{1}{3}\text{tang}\, x^3 + \frac{1}{5}\text{tang}\, x^5 - \text{etc.}}{A}.$$

Au reste, il est visible que l'équation trouvée dans l'art. 21,

$$\cos x + \sin x\sqrt{-1} = 1 + Ax\sqrt{-1} + \frac{1}{2}(Ax\sqrt{-1})^2 + \frac{1}{2.3}(Ax\sqrt{-1})^3 + \text{etc.},$$

se réduit directement à celle-ci,

$$\cos x + \sin x\sqrt{-1} = a^{x\sqrt{-1}},$$

par la formule de l'art. 11, en prenant pour a une quantité dépendante de A, comme nous l'avons déterminée dans ce même endroit, c'est-à-dire, ensorte que $a = e^A$, e étant un nombre donné qui est la base des logarithmes hyperboliques.

De cette formule on tire tout de suite, en prenant le radical en plus et ensuite en moins, les expressions connues de $\sin x$, $\cos x$, en exponentielles imaginaires,

$$\sin x = \frac{a^{x\sqrt{-1}} - a^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}, \quad \cos x = \frac{a^{x\sqrt{-1}} + a^{-x\sqrt{-1}}}{2},$$

et passant des exponentielles aux logarithmes,

$$la \times x\sqrt{-1} = l(\cos x + \sin x\sqrt{-1}) = l\cos x + l(1 + \text{tang}\, x\sqrt{-1}),$$

ou bien, en prenant successivement le radical en plus et moins, et soustrayant une équation de l'autre,

$$x = \frac{1}{la} \times \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l.\frac{1 + \text{tang}\, x\sqrt{-1}}{1 - \text{tang}\, x\sqrt{-1}};$$

d'où l'on peut déduire les séries trouvées ci-dessus, en employant les développemens des exponentielles et des logarithmes exposés dans les articles 18 et 19.

Mais il y a ici une remarque importante à faire; c'est que dans les formules que nous venons de trouver, la quantité A, ainsi que a, étant arbitraire, le système de logarithmes peut être pris à volonté, au lieu que dans les formules ordinaires relatives aux arcs de cercle, le module $\frac{1}{A}$ est égal à l'unité, ce qui donne pour la base le nombre e, dont le logarithme hyperbolique est l'unité. Ainsi, celles-ci ne sont qu'un cas particulier de celles que nous avons trouvées, mais cette particularisation est nécessaire pour qu'elles soient applicables au cercle, comme nous l'allons démontrer.

23. Tout se réduit à prouver que dans l'expression de $\sin x$ en série, le premier terme doit être simplement x, au lieu que nous l'avons supposé en général Ax (art. 21). En employant la considération des infiniment petits, cela est évident; car on voit que dans le cercle, le sinus, à mesure qu'il diminue, s'approche de plus en plus de l'arc, jusqu'à s'y confondre dans l'infiniment petit. Ainsi, en supposant l'arc x infiniment petit, on a $\sin x = x$; par conséquent $A = 1$.

Mais comme nous avons cherché à rendre notre analyse indépendante de la considération des infiniment petits, nous devons aussi en affranchir la démonstration du point dont il s'agit.

Pour cela, nous ne supposerons que le principe établi par *Archimède*, que le sinus, qui est la moitié de la corde de l'arc double, est moindre que l'arc auquel il répond, et que la tangente est plus grande que ce même arc. Nous aurons ainsi $\sin x < x$, et $\tang x > x$; or, comme $\tang x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\sqrt{(1 - \sin x^2)}}$, on aura $\frac{\sin x}{\sqrt{(1 - \sin x^2)}} > x$, et de là $\sin x > \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$. Employant donc l'expression de $\sin x$ en série trouvée dans l'art. 21, il faudra que l'on ait, quelque petit que soit l'arc x,

$$Ax - \frac{A^3x^3}{2.3} + \frac{A^5x^5}{2.3.4.5} - \text{etc.} < x, > \frac{x}{\sqrt{(1 + x^2)}}.$$

Donc

Donc aussi, en divisant par x,

$$A - \frac{A^3x^2}{2.3} + \frac{A^5x^4}{2.3.4.5} - \text{etc.} < 1, > \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}.$$

Comme $\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}} = \frac{\sqrt{(1+x^2)}}{1+x^2}$, et que $\sqrt{(1+x^2)} > 1$, il est clair que $\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}} > \frac{1}{1+x^2}$, et en même temps on voit que $\frac{1}{1+x^2} > 1 - x^2$, car la différence est $\frac{x^4}{1+x^2}$; ainsi la quantité qui est plus grande que $\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}$, sera à plus forte raison plus grande que $1 - x^2$, de sorte qu'on pourra réduire l'espèce d'équation d'inégalité ci-dessus, à cette forme

$$A - \frac{A^3x^2}{2.3} + \frac{A^5x^4}{2.3.4.5} - \text{etc.} < 1, > 1 - x^2.$$

Or, en prenant x tel que $\frac{A^2x^2}{2.3}$ soit < 1, il est visible que la série $A - \frac{A^3x^2}{2.3} + \text{etc.}$ sera convergente et $< A$, mais $> A - \frac{A^3x^2}{2.3}$, parce qu'en ajoutant ensemble le second et le troisième terme, le quatrième et le cinquième, et ainsi de suite, on n'aura que des quantités toutes négatives, et qu'au contraire en ajoutant le troisième et le quatrième, le cinquième et le sixième, etc., on n'aura que des quantités toutes positives. Donc x étant supposé $< \frac{\sqrt{6}}{A}$, on aura à plus forte raison,

$$A - \frac{A^3x^2}{2.3} < 1 \quad \text{et} \quad A > 1 - x^2;$$

par conséquent,

$$A > 1 - x^2 \quad \text{et} \quad < 1 + \frac{A^3x^2}{2.3};$$

ce qui devant avoir lieu, quelque petite que soit la valeur de x, il s'ensuit que l'on aura nécessairement $A = 1$. En effet, si $A = 1 + i$, i étant une quantité quelconque très-petite positive, il n'y aurait qu'à prendre x tel que $\frac{A^3x^2}{2.3} < i$, et alors la condition de $A < 1$

$+\frac{A^3x^2}{2.3}$ n'aurait plus lieu. De même, si $A=1-i$, il n'y aurait qu'à prendre $x^2<i$, et l'autre condition $A>1-x^2$ serait en défaut. Donc on a nécessairement $A=1$ dans le cercle; par conséquent $a=e$, nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité (art. 12); ce qui fait rentrer nos formules dans les formules connues pour les fonctions circulaires.

CHAPITRE V.

Du développement des fonctions, lorsqu'on donne à la variable une valeur déterminée. Cas dans lesquels la règle générale est en défaut. Des valeurs des fractions dont le numérateur et le dénominateur s'évanouissent en même temps. Des cas singuliers où le développement de la fonction ne procède pas suivant les puissances positives et entières de l'accroissement de la variable.

24. Les méthodes que nous venons de donner pour le développement de la fonction $f(x+i)$, supposent que ce développement est de la forme

$$fx + if'x + \frac{i^2}{2} f''x + \text{etc.};$$

il est donc nécessaire, avant d'aller plus loin, d'examiner quand et comment cette forme pourrait être en défaut.

Nous avons déjà démontré plus haut (art. 2), que cela ne peut arriver que lorsqu'on donnera à x une valeur déterminée, telle qu'elle fasse disparaître dans la fonction fx et dans toutes ses dérivées, quelques radicaux. Or, un radical ne peut disparaître dans une fonction que de deux manières, ou parce que la quantité qui multiplie le radical devient nulle, ou parce que le radical lui-même devient nul.

Dans le premier cas, il est clair que le radical disparaissant dans fx, il pourra ne pas disparaître dans $f'x$, $f''x$, etc., ou bien que disparaissant à la fois dans fx, $f'x$, il ne disparaîtra pas dans $f''x$, $f'''x$, etc., et ainsi du reste, parce que le radical acquérant des coefficiens différens dans les fonctions dérivées, ces coefficiens ne peuvent pas devenir tous nuls par la même valeur supposée de la variable.

Dans le second cas, au contraire, il est évident que le radical disparaîtra nécessairement dans toutes les fonctions $fx, f'x, f''x$, etc. à l'infini, puisque c'est la quantité radicale elle-même qui est supposée s'évanouir pour une valeur donnée de la variable x. Mais l'évanouissement du radical ne pouvant plus avoir lieu dans la fonction $f(x+i)$, où i est une quantité indéterminée et indépendante de x, il s'ensuit que la série $fx + if'x + \frac{i^2}{2} f''x +$ etc. qui représente le développement de cette fonction, deviendra fautive par l'absence du radical qu'elle doit contenir.

Donc cette série sera légitime dans le premier cas, et ne le sera pas dans le second.

25. Soit $y = fx$, et par conséquent, en prenant les fonctions prime, seconde, etc, $y' = f'x$, $y'' = f''x$, etc. Supposons que pour une valeur donnée de x, il disparaisse dans fx un radical, lequel ne disparaisse pas dans $f'x$; il est clair que pour cette valeur de x, la fonction $f'x$ devra avoir un plus grand nombre de valeurs différentes que la fonction fx, à raison du radical qui se trouve dans $f'x$ et qui a disparu dans fx; d'où il s'ensuit que la valeur de y' ne pourra pas être donnée par une fonction de x et y qui ne contiendrait pas ce radical. Cependant, si dans l'équation $y = fx$ on détruit ce même radical par l'élévation aux puissances, et que l'équation résultante soit représentée par $F(x, y) = 0$, son équation prime donnera généralement, comme nous l'avons vu dans l'art. 17,

$$y' = -\frac{F'(x)}{F'(y)}.$$

Donc cette expression sera en défaut dans le cas où l'on donnerait à x la valeur en question, ce qui ne peut avoir lieu qu'autant que les quantités $F'(x)$ et $F'(y)$ seront l'une et l'autre nulles à la fois. Ainsi, dans le cas dont il s'agit, l'expression de y' deviendra égale à zéro divisé par zéro; et réciproquement, lorsque cela arrivera, ce sera une marque que la valeur correspondante de x aura détruit dans fx un radical, sans le détruire dans f$'x$.

Pour avoir dans ce cas la valeur de y', il ne suffira donc pas de s'arrêter à l'équation prime de $F(x, y) = 0$, laquelle étant $y'F'(y) + F'(x) = 0$, aura lieu d'elle-même, indépendamment de la valeur de y' ; mais il faudra passer à l'équation seconde, qu'on trouvera par les mêmes règles de cette forme

$$y''F'(y) + y'^2F''(y) + 2y'F''(y)(x) + F''(x) = 0,$$

en désignant par $F''(y)$ et $F''(x)$ les fonctions primes de $F'(y)$ et $F'(x)$, prises, la première relativement à y seul, et la seconde relativement à x seul, c'est-à-dire les fonctions secondes de $F(y, x)$, prises relativement aux mêmes variables isolées, et par $F''(y)(x)$ la fonction prime de $F'(y)$, prise relativement à x, ou la fonction prime de $F'(x)$, prise relativement à y (ces deux fonctions étant la même chose, comme il est facile de s'en convaincre, et comme nous le démontrerons plus bas, lorsque nous traiterons des fonctions de plusieurs variables), c'est-à-dire la fonction seconde de $F(y, x)$, prise relativement à y et à x.

Cette équation donne généralement la valeur de y'' ; mais dans le cas proposé, la quantité $F'(y)$ devenant nulle, le terme qui contient y'' disparaîtra, et l'équation restante sera une équation du second degré en y', par laquelle on déterminera la valeur de y', qui sera par conséquent double.

26. Soit, par exemple, f$x = (x-a)\sqrt{(x-b)}$, ensorte qu'on ait l'équation

$$y = (x-a)\sqrt{(x-b)},$$

on aura

$$f'x = y' = \sqrt{(x-b)} + \frac{x-a}{2\sqrt{(x-b)}};$$

faisant $x = a$, on a

$$y = 0, \quad y' = \sqrt{(x-b)} = \sqrt{(a-b)},$$

où l'on voit que le radical disparaît dans la valeur de y, mais non pas dans celle de y', ensorte que la valeur de y est simple, et celle de y' double.

Maintenant, si on réduit l'équation proposée à cette forme rationnelle $y^2 = (x-a)^2(x-b)$, et qu'on en prenne l'équation prime, on aura

$$2yy' = 2(x-a)(x-b) + (x-a)^2;$$

d'où l'on tire

$$y' = \frac{2(x-a)(x-b)+(x-a)^2}{2y};$$

faisant $x=a$, on a $y' = \frac{0}{0}$; passant donc à l'équation seconde, on aura

$$2y'^2 + 2yy'' = 4(x-a) + 2(x-b).$$

Ici $x=a$ donne, à cause de $y=0$ dans ce cas,

$$2y'^2 = 2(x-b) = 2(a-b); \text{ donc } y' = \sqrt{(a-b)},$$

comme plus haut.

Il serait possible, au reste, que la même valeur de x qui détruit les termes de l'équation prime, détruisît aussi ceux de l'équation seconde; alors il faudrait passer à l'équation tierce, laquelle, par la destruction des termes qui contiendraient y'' et y''', deviendrait une simple équation en y', mais du troisième degré, et ainsi de suite. Cela dépend de la nature du radical qui aura été détruit dans fx, et qui doit être remplacé par le degré de l'équation d'où dépend la valeur de y'; mais nous n'entrerons dans aucun détail sur ce point, pour ne pas trop nous écarter de notre sujet.

27. Supposons en second lieu que la même valeur de x, qui fait disparaître un radical dans fx, le fasse disparaître aussi dans $f'x$, sans le faire disparaître néanmoins dans $f''x$, alors les valeurs correspondantes de fx et de $f'x$ seront en même nombre; mais celles de $f''x$ seront en nombre plus grand. Si donc on détruit ce radical dans l'équation $y = fx$, la valeur de y'' qu'on en déduira, se trouvera $= \frac{0}{0}$, et il faudra passer aux équations dérivées d'un ordre supérieur pour avoir la valeur de y''.

Soit $y=(x-a)^2\sqrt{(x-b)}$, on aura

$$y'=2(x-a)\sqrt{(x-b)}+\frac{(x-a)^2}{2\sqrt{(x-b)}},$$

$$y''=2\sqrt{(x-b)}+\frac{2(x-a)}{\sqrt{(x-b)}}-\frac{(x-a)^2}{4(x-b)^{\frac{3}{2}}};$$

faisant $x=a$, on a

$$y=0,\ y'=0 \text{ et } y''=2\sqrt{(x-b)}=2\sqrt{(a-b)}.$$

Mais si on réduit l'équation proposée à cette forme rationnelle

$$y^2=(x-a)^4(x-b),$$

on en tirera l'équation prime

$$2yy'=4(x-a)^3(x-b)+(x-a)^4,$$

laquelle donne, lorsque $x=a$,

$$y'=\frac{0}{0},$$

à cause de $y=0$, à moins qu'en substituant la valeur de y, on ne divise le tout par $(x-a)^2$, et qu'ensuite on ne fasse $x=a$, ce qui donnera $y'=0$,

Passant à l'équation seconde, on aura

$$y'^2+yy''=6(x-a)^2(x-b)+4(x-a)^3,$$

faisant $x=a$, on aura $y'=0$ comme ci-dessus. Mais pour avoir la valeur de y'', il faudra avoir recours à l'équation tierce et même à l'équation quarte. Celle-là sera

$$3y'y''+yy'''=18(x-a)^2+12(x-a)(x-b),$$

où tous les termes disparaissent lorsque $x=a$. La suivante sera

$$3y''^2+4y'y'''+yy^{\text{IV}}=48(x-a)+12(x-b).$$

Faisant $x=a$, et par conséquent $y=0$ et $y'=0$, on aura

$$3y''^2=12(x-b),\quad y''=2\sqrt{(x-b)}=2\sqrt{(a-b)},$$

comme plus haut.

Nous ne pousserons pas plus loin cette analyse, qui d'ailleurs n'a plus de difficulté d'après les principes établis. Nous nous contenterons de remarquer que si on construit la courbe dont x serait l'abscisse, et $y = \mathrm{f}x$ l'ordonnée, cette courbe aura ce qu'on appelle un point multiple dans l'endroit correspondant à la valeur donnée de x, qui fera disparaître un radical dans $\mathrm{f}x$, sans le faire disparaître en même temps dans $\mathrm{f}'x$; qu'elle aura un point d'attouchement, si la même valeur de x fait disparaître à la fois le radical dans $\mathrm{f}x$ et dans $\mathrm{f}'x$; que ce sera un point d'osculation, si le radical disparaît en même temps dans $\mathrm{f}''x$, et ainsi de suite. On en verra la raison lorsque nous appliquerons la théorie des fonctions à celle des courbes.

28. A l'occasion de la difficulté que nous venons de résoudre, nous allons donner la théorie de la méthode pour trouver la valeur d'une fraction, dans le cas où le numérateur et le dénominateur deviennent zéro à la fois.

Soit $\frac{\mathrm{f}x}{\mathrm{F}x}$ une pareille fraction, $\mathrm{f}x$ et $\mathrm{F}x$ étant des fonctions de x, telle que la supposition de $x = a$ les rende toutes les deux nulles à la fois, et qu'on demande la valeur de cette fraction lorsque $x = a$.

On fera $y = \frac{\mathrm{f}x}{\mathrm{F}x}$, et par conséquent $y\mathrm{F}x = \mathrm{f}x$. En supposant $x = a$, cette équation se vérifie d'elle-même, indépendamment de la valeur de y, qui demeure par conséquent indéterminée; ainsi elle ne peut servir dans cet état à la détermination de y, lorsque $x = a$. Mais en prenant l'équation prime, on aura

$$y'\mathrm{F}x + y\mathrm{F}'x = \mathrm{f}'x;$$

la supposition de $x = a$ fait disparaître le terme $y'\mathrm{F}x$, et le reste de l'équation donne $y = \frac{\mathrm{f}'x}{\mathrm{F}'x}$. S'il arrivait que les fonctions primes $\mathrm{f}'x$, $\mathrm{F}'x$ devinssent aussi nulles par la même supposition, alors on trouverait par le même principe, en substituant dans l'équation ci-dessus $\mathrm{f}'x$, $\mathrm{F}'x$, pour $\mathrm{f}x$, $\mathrm{F}x$, cette nouvelle expression de y,

$y =$

$y = \frac{f''x}{F''x}$, et ainsi de suite. On pourrait aussi la déduire directement de la même équation prime, en considérant que, comme elle se vérifie de nouveau d'elle-même, elle ne peut pas servir non plus à la détermination de y; que par conséquent, il sera nécessaire de passer à l'équation seconde, laquelle sera

$$y''Fx + 2y'F'x + yF''x = f''x.$$

Comme la supposition de $x = a$ rend nulles les fonctions Fx et $F'x$, les termes qui contiennent y' et y'' s'en iront d'eux-mêmes, et les termes restans donneront $y = \frac{f''x}{F''x}$, comme plus haut.

Il n'est pas à craindre que les fonctions fx, $f'x$, $f''x$, etc., Fx, $F'x$, $F''x$, etc. à l'infini, puissent devenir nulles en même temps par la supposition de $x = a$, comme quelques géomètres paraissent le supposer; car puisque $f(x+i) = fx + if'x + \frac{i^2}{2} f''x$, etc., en faisant $x = a$, on aurait $f(a+i) = 0$, quel que soit i, ce qui est impossible; il en serait de même de $F(x+i)$. Mais il peut arriver que ces fonctions deviennent infinies par la même supposition de $x = a$, ce qui rendra également les fractions $\frac{fx}{Fx}$, $\frac{fx'}{F'x}$, etc. indéterminées : la solution de cette difficulté dépend de l'examen du second cas de l'art. 24, dont nous allons nous occuper.

29. Ce cas a lieu lorsque la supposition de $x = a$ fait disparaître dans fx un radical en le rendant nul, auquel cas elle le fera disparaître de même dans les fonctions dérivées; mais ce radical restant dans la fonction $f(x+i)$, il doit rester aussi dans le développement de cette fonction; par conséquent ne pouvant affecter la valeur de x, il faudra qu'il affecte l'i; d'où il suit que ce développement doit contenir nécessairement des puissances irrationnelles de i. Il est clair, en effet, que si fx contient la quantité $\sqrt[m]{X}$, X étant une fonction de x, qui devient nulle lorsque $x = a$, en mettant $x+i$ à la place de x, X deviendra $X + iX' + \frac{i^2}{2} X'' + \text{etc.}$,

et faisant $x=a$, on aura simplement $iX'+\frac{i^2}{2}X''+$ etc. pour la valeur de X; de sorte que $\sqrt[m]{X}$ deviendra $\sqrt[m]{i\left(X'+\frac{i}{2}X''+\text{etc.}\right)}$; donc la fonction $f(x+i)$ contiendra, dans le cas de $x=a$, le radical $\sqrt[m]{i}$, qui devra par conséquent se trouver dans son développement suivant les puissances de i. Voyons donc ce que donnera alors le développement fautif $fx+if'x+\frac{i^2}{2}f''x+$ etc.

Pour cela, j'observe que les fonctions $f'(x+i)$, $f''(x+i)$, etc. sont également les fonctions primes, secondes, etc. de la fonction $f(x+i)$, soit qu'on les prenne relativement à x, soit qu'on les prenne relativement à i, ce qui est évident, puisqu'en augmentant soit x, soit i d'une même quantité quelconque, on a le même accroissement de la quantité $x+i$. D'où il suit que l'on aura également les valeurs de $f'x$, $f''x$, etc., quel que soit x, en prenant les fonctions primes, secondes, etc. de $f(x+i)$ relativement à i, et faisant ensuite $i=0$.

Or, si on suppose que le développement de $f(x+i)$ doive contenir, lorsque $x=a$, un terme affecté de i^m, tel que Ai^m, A étant une fonction de a, et m n'étant pas un nombre entier positif, en prenant les fonctions primes, secondes, etc. relativement à i, il faudra que les développemens de $f'(x+i)$, $f''(x+i)$, etc. contiennent les termes mAi^{m-1}, $m(m-1)Ai^{m-2}$, etc. (art. 10). Donc faisant $i=0$, on en conclura que les fonctions fx, $f'x$, $f''x$, etc., lorsque $x=a$, contiendront respectivement les termes $A0^m$, $mA0^{m-1}$, $m(m-1)A0^{m-2}$, etc.

Si m est un nombre quelconque négatif, il est clair que tous ses termes seront infinis.

Si m est un nombre positif non entier, soit n le nombre entier immédiatement plus grand que m, il est visible que le terme $m(m-1)\ldots(m-n+1)A0^{m-n}$ sera infini, ainsi que tous les termes suivans, et que tous les précédens seront nuls.

Donc en général la fonction $f^n x$ et toutes les suivantes $f^{n+1}x$, $f^{n+2}x$, etc. à l'infini (n, $n+1$, etc. étant des indices), seront infinies, n étant le nombre entier positif immédiatement plus grand que l'exposant m.

30. On conclura de là que le développement $fx+if'x+\frac{i^2}{2}f''x+$etc. ne peut devenir fautif pour une valeur donnée de x, qu'autant qu'une des fonctions fx, $f'x$, $f''x$, etc. deviendra infinie, ainsi que toutes les suivantes pour cette valeur de x. Alors si n est l'indice de la première fonction qui devient infinie, le développement dont il s'agit devra contenir un terme de la forme i^m, m étant un nombre compris entre $n-1$ et n.

Et si toutes les fonctions fx, $f'x$, $f''x$, etc. devenaient infinies pour la même valeur de x, le développement de $f(x+i)$ contiendrait dans ce cas des puissances négatives de i.

Pour trouver alors la vraie forme du développement suivant les puissances ascendantes de i, il faudra faire d'abord dans la fonction $f(x+i)$, x égal à la valeur donnée, et développer ensuite suivant les puissances croissantes de i par les règles connues, en ayant égard aux puissances fractionnaires ou négatives de i qui se trouveraient dans la fonction même.

Au reste, nous remarquerons qu'en faisant $y=fx$, et prenant x et y pour les coordonnées d'une courbe, cette courbe aura dans le point où l'une des fonctions y, y', y'', etc. devient infinie, ainsi que toutes les suivantes, un rebroussement dont l'espèce dépendra de l'indice n, pourvu que l'exposant fractionnaire m ait pour dénominateur un nombre pair; et l'on déterminera la nature du rebroussement par la forme du développement de $f(x+i)$ dans ce cas.

31. Dans l'exemple de l'art. 27, où $y=(x-a)\sqrt{(x-b)}$, on voit que la supposition de $x=b$ détruit le radical dans y, et doit par conséquent le détruire aussi dans les fonctions dérivées y', y'', etc. Donc le développement $fx+if'x+\frac{i^2}{2}f''x+$ etc., de $f(x+i)$, en supposant $y=fx=(x-a)\sqrt{(x-b)}$, sera fautif dans le cas

de $x=b$. En effet, on aura dans ce cas,

$$y=0\,,\quad y'=\sqrt{(x-b)}+\frac{x-a}{2\sqrt{(x-b)}}=\infty,$$

x étant $=b$, et on trouvera de même

$$y''=\infty,\quad y'''=\infty,\quad \text{etc.}$$

Donc le développement dont il s'agit devra contenir alors un terme de la forme i^m, m étant entre 0 et 1.

Soit en effet, $x=b+i$, fx deviendra $(b-a+i)\sqrt{i}$, de sorte que le vrai développement de cette fonction sera $(b-a)\sqrt{i}+i^{\frac{3}{2}}$.

32. C'est aussi de la même manière qu'on résoudra la difficulté proposée à la fin de l'art. 28, sur les fractions qui demeureraient toujours indéterminées, en prenant à l'infini les fonctions dérivées du numérateur et du dénominateur. Nous y avons vu que cela ne saurait arriver que dans le cas où la même valeur de x rendrait ces fonctions successives infinies. Il faudra donc alors supposer $x=a+i$ (a étant la valeur de x qui rend ces fonctions infinies) dans l'expression générale de la fraction, réduire ensuite cette expression en série, suivant les puissances ascendantes de i, et le premier terme de la série, en faisant $i=0$, donnera la valeur cherchée de la fraction pour le cas de $x=a$.

Ainsi, si l'on avait la fraction $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{(x-a)}}{\sqrt{(x^2-a^2)}}$, qui devient $\frac{0}{0}$ lorsque $x=a$, et dont les fonctions primes, secondes, etc. du numérateur et du dénominateur, deviennent toutes infinies par la même valeur de x, en y mettant $a+i$ au lieu de x, et réduisant le nmérateur et le dénominateur en série, elle deviendra

$$\frac{\sqrt{i}+\frac{i}{2\sqrt{a}}+\text{etc.}}{\sqrt{2ai}+\frac{i\sqrt{i}}{2\sqrt{2a}}+\text{etc.}}=\frac{1}{\sqrt{2a}}+\frac{\sqrt{i}}{2a\sqrt{2}}+\text{etc.};$$

de sorte qu'en faisant $i=0$, on aura $\frac{1}{\sqrt{2a}}$ pour la valeur cherchée de la fraction, lorsque $x=a$.

En effet, si, suivant la méthode de l'art. 28, on prend les fonctions primes du numérateur et du dénominateur, on aura

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{(x-a)}} \quad \text{et} \quad \frac{x}{\sqrt{(x^2-a^2)}},$$

quantités qui deviennent infinies lorsque $x=a$; mais en les multipliant l'une et l'autre par $2\sqrt{(x-a)}$, la nouvelle fraction sera

$$\frac{\frac{\sqrt{(x-a)}}{\sqrt{x}}+1}{\frac{2x}{\sqrt{(x+a)}}},$$

laquelle, en faisant $x=a$, devient $\frac{1}{\sqrt{2a}}$, comme plus haut.

Nous avons donc résolu les difficultés qui peuvent se rencontrer dans le développement de $f(x+i)$; et quoique nous n'ayons considéré que des fonctions algébriques, il n'est pas difficile d'étendre nos solutions aux fonctions transcendantes. Comme ces difficultés n'ont lieu que pour des valeurs particulières de x, il est clair qu'elles n'influent en rien sur la théorie des fonctions dérivées $f'x$, $f''x$, etc.; mais il était nécessaire de les examiner, et de donner les moyens de les lever, pour ne laisser aucun nuage sur cette théorie. Voyez aussi la leçon VIII du *Calcul des Fonctions*.

CHAPITRE VI.

Résolution générale des fonctions en séries. Développement des fonctions en séries terminées et composées d'autant de termes qu'on voudra. Moyen d'exprimer les restes depuis un terme quelconque proposé. Théorème nouveau sur ces séries.

33. Nous avons vu jusqu'ici comment on peut trouver directement tous les termes du développement de la fonction $f(x+i)$, suivant les puissances de i; on peut, de la même manière, développer une fonction quelconque, suivant les puissances ascendantes d'une des variables contenues dans la fonction.

En effet, si on reprend la formule

$$f(x+i) = fx + if'x + \frac{i^2}{2} f''x + \frac{i^3}{2.3} f'''x + \text{etc.},$$

puisque x et i sont deux quantités indéterminées, on y peut substituer $x-i$ à la place de x, ce qui donnera

$$fx = f(x-i) + if'(x-i) + \frac{i^2}{2} f''(x-i) + \text{etc.}$$

De plus, on pourra mettre xz à la place de i, et l'on aura

$$fx = f(x-xz) + xzf'(x-xz) + \frac{x^2z^2}{2} f''(x-xz) + \text{etc.},$$

où z est une quantité arbitraire quelconque.

Ici fx représente, comme l'on voit, une fonction quelconque de x, et $f'(x-xz)$, $f''(x-xz)$, etc. représentent les fonctions primes, secondes, etc. de fx, en y substituant $x(1-z)$ à la place de x. Mais quoique fx ne représente qu'une fonction de x relativement à ses fonctions dérivées, il est clair qu'elle peut représenter en général une fonction quelconque de x et d'autres quantités quelconques, pourvu que ces quantités y soient regardées comme constantes dans la formation des fonctions dérivées $f'x$, $f''x$, etc.

Si dans la formule précédente on fait $z = 0$, l'équation devient identique $fx = fx$, et si on fait $z = 1$, la quantité $x - xz$ s'évanouit; de sorte que si on dénote simplement par f, f', f'', etc. les valeurs des fonctions fx, $f'x$, $f''x$, etc., lorsque $x = 0$, on aura

$$fx = f + xf' + \frac{x^2}{2} f'' + \text{etc.}$$

Ainsi, lorsque fx sera une fonction donnée de plusieurs variables x, y, etc., il n'y aura qu'à chercher par les règles générales, les fonctions dérivées par rapport à x seul, et y faire ensuite $x = 0$, on aura tous les termes du développement de la fonction suivant les puissances ascendantes de x; et il est clair que les valeurs des quantités f', f'', etc., seront des fonctions de y, etc. sans x, toutes dérivées de la fonction primitive, suivant une loi dépendante de la manière dont la quantité x entrera dans cette fonction.

34. On pourrait trouver ce développement d'une manière plus simple, en supposant tout de suite

$$fx = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.},$$

A, B, C, etc. étant des quantités indépendantes de x. Pour les déterminer, on considérera que cette équation devant être identique, doit avoir lieu pour toutes les valeurs de x. Donc, 1°. en faisant $x = 0$, on aura $f = A$; 2°. en prenant les fonctions primes de tous ses termes (art. 10, 17), on aura encore l'équation identique

$$f'x = B + 2Cx + 3Dx^2 + \text{etc.},$$

où, faisant de nouveau $x = 0$, on aura $f' = B$; 3°. en prenant de nouveau les fonctions primes, on aura

$$f''x = 2C + 2.3Dx + 3.4Ex^2 + \text{etc.},$$

où, faisant derechef $x=0$, on aura $f''=2C$. Continuant de la même manière, on trouvera

$$f''' = 2.3D, \quad f^{\text{IV}} = 2.3.4E, \quad \text{etc.};$$

d'où l'on tire

$$A = f, \quad B = f', \quad C = \frac{1}{2}f'', \quad D = \frac{1}{2.3}f''', \quad \text{etc.},$$

ce qui donnera, par la substitution, la même série pour fx que ci-dessus. Mais cette méthode est moins directe que la précédente, et elle suppose déjà la théorie des fonctions dérivées; elle est d'ailleurs moins rigoureuse, en ce qu'elle suppose de plus que la somme de tous les termes affectés de x devient nulle lorsque $x=0$, quoique les coefficiens de ces termes augmentent à l'infini dans les équations dérivées; mais le grand avantage de la méthode précédente, consiste en ce qu'elle donne le moyen d'arrêter le développement de la série à tel terme que l'on voudra, et de juger de la valeur du reste de la série.

Ce problème, l'un des plus importans de la théorie des séries, n'a pas encore été résolu d'une manière générale. On pourrait, à la vérité, le résoudre pour chaque fonction en particulier, par les méthodes exposées dans le chapitre premier; mais il serait impossible de parvenir par cette voie à une solution générale pour une fonction quelconque.

35. Reprenons donc la formule générale trouvée ci-dessus (art. 33),

$$fx = f(x-xz) + xzf'(x-xz) + \frac{x^2z^2}{2}f''(x-xz) + \text{etc.},$$

et supposons qu'on veuille s'arrêter au premier terme $f(x-xz)$. Comme tous les termes suivans sont multipliés par x, nous supposerons

$$fx = f(x-xz) + xP,$$

P

P étant regardé comme une fonction de z, qui devra être nulle lorsque $z=o$, puisqu'alors $f(x-xz)$ devient fx.

Comme cette équation doit avoir lieu, quelle que soit la valeur de z, qui est arbitraire, son équation prime, relativement à z, aura donc lieu aussi (art. 17). On prendra donc les fonctions primes relativement à cette variable, et il est facile de voir que la fonction prime du terme $f(x-xz)$ sera $-xf'(x-xz)$; car on a démontré (art. 16) que si $y=fp$, p étant une fonction de x, on a

$$y'=p'f'p;$$

ainsi en rapportant les fonctions dérivées à la variable z et faisant $p=x-xz$, on aura

$$p'=-x \quad \text{et} \quad y'=-xf'p=-xf'(x-xz).$$

Donc, à cause que fx ne renferme point z, l'équation prime relative à z de l'équation ci-dessus, sera

$$o=-xf'(x-xz)+xP',$$

P' étant la fonction prime de P relativement à z; d'où l'on tire

$$P'=f'(x-xz).$$

On aura donc la valeur de P, en cherchant une fonction de z dont la fonction prime soit égale à $f'(x-xz)$, et qui de plus soit telle, qu'elle devienne nulle lorsque $z=o$. Cette valeur de P ainsi trouvée, si on y fait $z=1$, on aura

$$fx=f.+xP.$$

Supposons, en second lieu,

$$fx=f(x-xz)+xzf'(x-xz)+x^2Q,$$

Q étant une fonction de z, qui devra être nulle, comme l'on voit, lorsque $z=o$.

En prenant, comme ci-dessus, les fonctions primes relativement à z; on aura cette équation prime

$$o=-xf'(x-xz)+xf'(x-xz)-x^2zf''(x-xz)+x^2Q',$$

où les fonctions désignées par f′, f″ sont les fonctions primes et secondes de fx relativement à x, et dans lesquelles on a mis ensuite $x-xz$ pour x. On tire de là, en effaçant ce qui se détruit,

$$Q' = z f''(x - xz);$$

de sorte qu'on aura la valeur de Q en cherchant une fonction de z, dont la fonction prime ait la valeur qu'on vient de trouver pour Q′, et qui ait la condition de devenir nulle lorsque $z=0$. Si ensuite on fait $z=1$, on aura

$$fx = f. + xf'. + x^2 Q.$$

Soit en troisième lieu,

$$fx = f(x - xz) + xzf'(x - xz) + \frac{x^2z^2}{2} f''(x - xz) + x^3 R,$$

R étant une fonction de z, qui s'évanouisse lorsque $z=0$. On trouvera, en prenant les fonctions primes relativement à z, et effaçant les termes qui se détruisent mutuellement,

$$R' = \frac{z^2}{2} f'''(x - xz),$$

la fonction représentée par f‴ étant la fonction tierce de fx relativement à x, transformée par la substitution de $x-xz$ à la place de x.

Il faudra donc, pour avoir la valeur de R, trouver une fonction primitive de z, dont la fonction prime soit la valeur précédente de R′, et qui soit telle, qu'elle s'évanouisse lorsque $z=0$. Cette fonction étant trouvée, on aura, en faisant $z=1$,

$$fx = f. + xf'. + \frac{x^2}{2} f''. + x^3 R,$$

et ainsi de suite.

En continuant ainsi, on aura la formule de l'art. 33,

$$fx = f. + xf'. + \frac{x^2}{2} f''. + \frac{x^3}{2.3} f'''. + \text{etc.}$$

Mais l'analyse précédente a l'avantage de donner la manière d'avoir les restes $x\mathrm{P}$, $x^2\mathrm{Q}$, $x^3\mathrm{R}$, etc. de la série, lorsqu'on veut l'interrompre à son premier, second, troisième, etc. terme.

56. Voilà le problème résolu analytiquement ; mais comme les quantités P, Q, R, etc. ne sont connues que par leurs fonctions primes, il reste encore à remonter de ces fonctions aux fonctions primitives ; ce qui peut être souvent fort difficile, et même impossible.

Cependant, si on connaissait la quantité P, on en pourrait déduire toutes les autres par les simples fonctions dérivées; car la comparaison des valeurs de $\mathrm{f}x$ donne

$$\mathrm{P} = z\mathrm{f}'(x - xz) + x\mathrm{Q},$$

et l'on a trouvé $\mathrm{f}'(x - xz) = \mathrm{P}'$; donc substituant, on aura

$$\mathrm{P} = z\mathrm{P}' + x\mathrm{Q},$$

d'où l'on tire

$$\mathrm{Q} = \frac{\mathrm{P} - z\mathrm{P}'}{x}.$$

On a ensuite

$$\mathrm{Q} = \frac{z^2}{2}\mathrm{f}''(x - xz) + x\mathrm{R},$$

et l'on a trouvé $2\mathrm{f}''(x - xz) = \mathrm{Q}'$; donc $\mathrm{Q} = \frac{z}{2}\mathrm{Q}' + x\mathrm{R}$; d'où l'on tire

$$\mathrm{R} = \frac{\mathrm{Q} - \frac{1}{2}z\mathrm{Q}'}{x}.$$

On trouvera de même

$$\mathrm{S} = \frac{\mathrm{R} - \frac{1}{3}z\mathrm{R}'}{x};$$

et ainsi de suite.

Si on fait $\mathrm{P} = zp$, $\mathrm{Q} = z^2q$, $\mathrm{R} = z^3r$, etc., on aura

$$q = -\frac{p'}{x}, \quad r = -\frac{q'}{2x}, \quad s = -\frac{r'}{3x}, \quad \text{etc.};$$

et la fonction fx deviendra, en remettant i à la place de xz;

$$\begin{aligned}
\mathrm{f}x &= \mathrm{f}(x-i) + ip, \\
&= \mathrm{f}(x-i) + i\mathrm{f}'(x-i) + i^2 q, \\
&= \mathrm{f}(x-i) + i\mathrm{f}'(x-i) + \frac{i^2}{2}\mathrm{f}''(x-i) + i^3 r, \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Ainsi connaissant le premier reste ip, on pourra connaître tous les autres restes $i^2 q$, $i^3 r$, etc., par les simples fonctions dérivées relatives à $z = \frac{i}{x}$; et si on prend simplement les fonctions dérivées relativement à i, on aura

$$q = -p', \quad r = -\frac{q'}{2}, \quad s = -\frac{r'}{3}, \quad \text{etc.}$$

Par exemple, en faisant f$x = \frac{1}{x}$ comme dans l'article 4, on aura $\mathrm{f}(x-i) = \frac{1}{x-i}$, et prenant les fonctions dérivées par rapport à x, on aura

$$\mathrm{f}'(x-i) = -\frac{1}{(x-i)^2}, \quad \mathrm{f}''(x-i) = \frac{2}{(x-i)}, \quad \text{etc.},$$

or on trouve,

$$p = \frac{\mathrm{f}x - \mathrm{f}(x-i)}{i} = -\frac{1}{x(x-i)};$$

de là en prenant les fonctions dérivées par rapport à i, on tirera tout de suite

$$q = -p' = \frac{1}{x(x-1)^2}, \quad r = -\frac{q'}{2} = -\frac{1}{x(x-i)^3}, \quad \text{etc.}$$

Donc si on fait ces substitutions dans les expressions de fx, et qu'on y mette ensuite $x+i$ à la place de x, on aura

$$\frac{1}{x+i} = \frac{1}{x} - \frac{i}{x(x+i)} = \frac{1}{x} - \frac{i}{x^2} + \frac{i^2}{x^2(x+i)} = \text{etc.},$$

comme dans l'article cité.

Soit encore f$x = \sqrt{x}$, on aura $\mathrm{f}(x-i) = \sqrt{x-i}$, et prenant les fonctions dérivées par rapport à x,

$$f'(x-i)=\frac{1}{2\sqrt{x-i}},\quad f''(x-i)=-\frac{1}{4(x-i)^{\frac{3}{2}}},\quad \text{etc.}$$

Ici on aura

$$p=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-i}}{i}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-i}};$$

et de là en prenant les fonctions dérivées relatives à i,

$$q=-\frac{1}{2\sqrt{x-i}\times(\sqrt{x}+\sqrt{x-i})^2},$$

$$r=\frac{1}{8(x-i)^{\frac{3}{2}}\times(\sqrt{x}+\sqrt{x-i})^2}+\frac{1}{4(x-i)\times(\sqrt{x}+\sqrt{x-i})^3}$$

$$=\frac{\sqrt{x}+3\sqrt{x-i}}{8(x-i)^{\frac{3}{2}}\times(\sqrt{x}+\sqrt{x-i})^3},\quad \text{etc.}$$

Par ces substitutions dans les expressions de fx, on aura, en mettant $x+i$ à la place de x,

$$\sqrt{x+i}=\sqrt{x}+\frac{i}{\sqrt{x+i}+\sqrt{x}}=\sqrt{x}+\frac{i}{2\sqrt{x}}-\frac{i^2}{2\sqrt{x}(\sqrt{x+i}+\sqrt{x})^2}$$

$$=\sqrt{x}+\frac{i}{2\sqrt{x}}-\frac{i^2}{8x\sqrt{x}}+\frac{i^3(\sqrt{x+i}+3\sqrt{x})}{8x\sqrt{x}(\sqrt{x+i}+\sqrt{x})^3}$$

$$=\sqrt{x}+\frac{i}{2\sqrt{x}}-\frac{i^2}{8x\sqrt{x}}+\frac{i^3}{16x^2\sqrt{x}}+\text{etc.},$$

comme dans le même article cité.

57. On peut aussi tirer directement de la formule de l'art. 3,

$$f(x+i)=fx+iP,$$

la loi de la série et l'expression des restes, en prenant alternativement les fonctions dérivées par rapport à x et à i; nous marquerons ces dernières par un trait placé au bas.

On a d'abord par les fonctions dérivées relatives à x, $f'(x+i)=f'x+iP'$; ensuite par les fonctions dérivées relatives à i, $f'(x+i)=P+iP_{,}$; car il est visible que relativement à i, la dérivée de $f(x+i)$ est la même que relativement à m. On aura donc

$$f'x+iP'=P+iP_{,};\quad \text{d'où l'on tire}\quad P=f'x+i(P'-P_{,}).$$

Faisons

$$Q = P' - P_{,},$$

on aura, en substituant la valeur de P,

$$f(x+i) = fx + if'x + i^2Q.$$

Prenons de nouveau les fonctions dérivées par rapport à x et par rapport à i, on aura

$$f'(x+i) = f'x + if''x + i^2Q' \quad \text{et} \quad f'(x+i) = f'x + 2iQ + i^2Q_{,},$$

donc

$$f''x + iQ' = 2Q + iQ_{,}, \quad \text{d'où} \quad Q = \frac{f''x + i(Q' - Q_{,})}{2};$$

Donc si on fait

$$R = \frac{Q' - Q_{,}}{2},$$

on aura en substituant,

$$f(x+i) = fx + if'x + \frac{i^2}{2} f''x + i^3R.$$

On trouvera de même, en faisant

$$S = \frac{R' - R_{,}}{3},$$

$$f(x+i) = fx + if'x + \frac{i^2}{2} f''x + \frac{i^3}{2.3} f'''x + i^4S,$$

et ainsi de suite.

Si on fait, par exemple, $fx = \frac{1}{x}$, ce qui donne

$$P = \frac{1}{i}\left(\frac{1}{x+i} - \frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x(x+i)},$$

on aura

$$P' = \frac{1}{x^2(x+i)} + \frac{1}{x(x+i)^2}, \quad P_{,} = \frac{1}{x(x+i)^2};$$

donc

$$Q = \frac{1}{x^2(x+i)};$$

ensuite,

$$Q' = -\frac{2}{x^3(x+i)} - \frac{1}{x^2(x+i)^2}, \quad Q_{,} = -\frac{1}{x^2(x+i)^2},$$

et de là

$$R = -\frac{1}{x^3(x+i)};$$

on trouvera de même

$$S = \frac{1}{x^4(x+i)};$$

et ainsi de suite, ce qui redonnera la série déjà trouvée.

Mais pour notre objet, il importe moins de connaître les restes exacts de la série développée jusqu'à un terme quelconque, que d'avoir des limites de ces restes pour pouvoir apprécier l'erreur qu'on peut commettre en ne tenant compte que de quelques-uns des premiers termes.

38. Pour cela, nous allons établir ce lemme général :

Si une fonction prime de x, telle que $f'x$, est toujours positive pour toutes les valeurs de x, depuis $x = a$ jusqu'à $x = b$, b étant $> a$, la différence des fonctions primitives qui répondent à ces deux valeurs de x, savoir, $fb - fa$, sera nécessairement une quantité positive.

Reprenons la formule $f(x+i) = fx + iP$, dans laquelle P est une fonction de x et i, qui, en faisant $i = 0$, devient $f'x$ (art. 3, 8); il est évident que si $f'x$ est une quantité positive, la valeur de P sera nécessairement positive depuis $i = 0$ jusqu'à une certaine valeur de i, qu'on pourra prendre aussi petite qu'on voudra. Donc lorsque la valeur de la fonction prime $f'x$ est positive, on pourra toujours prendre pour i une quantité positive et assez petite, pour que la quantité $f(x+i) - fx$ soit nécessairement positive.

Mettons successivement à la place de x les quantités a, $a+i$, $a+2i$, $a+3i$, etc., $a+ni$, il en résultera que l'on peut prendre i positif et assez petit pour que toutes les quantités $f(a+i) - fa$, $f(a+2i) - f(a+i)$, $f(a+3i) - f(a+2i)$, jusqu'à $f[a+(n+1)i] - f(a+ni)$, soient nécessairement positives, si les quantités $f'a$, $f'(a+i)$, $f'(a+2i)$, etc. jusqu'à $f'(a+ni)$ le sont. Donc aussi, dans ce cas, la somme des premières quantités, c'est-à-dire, la quantité $f[a+(n+1)i] - fa$ sera positive.

Faisons maintenant $a+(n+1)i=b$, on aura

$$i=\frac{b-a}{n+1},$$

et l'on en conclura que la quantité $\mathrm{f}b-\mathrm{f}a$ sera nécessairement positive, si toutes les quantités $\mathrm{f}'a$, $\mathrm{f}'\left(a+\frac{b-a}{n+1}\right)$, $\mathrm{f}'\left(a+\frac{2(b-a)}{n+1}\right)$, $\mathrm{f}'\left(a+\frac{3(b-a)}{n+1}\right)$, etc. jusqu'à $\mathrm{f}'\left(a+\frac{n(b-a)}{n+1}\right)$, sont positives, en prenant n aussi grand qu'on voudra.

Donc, à plus forte raison, la quantité $\mathrm{f}b-\mathrm{f}a$ sera positive, si $\mathrm{f}'x$ est toujours une quantité positive, en donnant à x toutes les valeurs possibles, depuis $x=a$ jusqu'à $x=b$, puisque parmi ces valeurs se trouveront nécessairement les valeurs a, $a+\frac{b-a}{n+1}$, $a+\frac{2(b-a)}{n+1}$, etc., $a+\frac{n(b-a)}{n+1}$, en prenant n aussi grand qu'on voudra.

39. A l'aide de ce lemme, on peut trouver des limites en plus et en moins de toute fonction primitive dont on connaît la fonction prime.

Soit la fonction primitive $\mathrm{F}z$ dont la fonction prime $\mathrm{F}'z$ soit exprimée par $z^m\mathrm{Z}$, Z étant une fonction donnée de z. Soit M la plus grande, et N la plus petite valeur de Z pour toutes les valeurs de z comprises entre les quantités a et b, en regardant comme plus grandes les négatives moindres, et comme moindres les négatives plus grandes, ce qui est conforme à la marche du calcul, puisque, par exemple, $-1>-2$, $-5>-7$, et de même $-2<-1$, et ainsi des autres. Donc les quantités $\mathrm{M}-\mathrm{Z}$ et $\mathrm{Z}-\mathrm{N}$ seront toujours positives depuis $z=a$ jusqu'à $z=b$, et il en sera de même des quantités $z^m(\mathrm{M}-\mathrm{Z})$ et $z^m(\mathrm{Z}-\mathrm{N})$.

Donc, 1°. si on fait $\mathrm{f}'z=z^m(\mathrm{M}-\mathrm{Z})$, on aura par le lemme précédent $\mathrm{f}b-\mathrm{f}a>0$; or $z^m\mathrm{Z}$ étant $\mathrm{F}'z$, sa fonction primitive sera $\mathrm{F}z$, et comme M est une quantité constante, la fonction

tion primitive de Mz^m est $\frac{Mz^{m+1}}{m+1}$; donc on aura

$$fz = \frac{Mz^{m+1}}{m+1} - Fz;$$

et faisant successivement $z = a$ et $z = b$, l'équation $fb - fa > 0$ donnera

$$\frac{Mb^{m+1}}{m+1} - Fb - \frac{Ma^{m+1}}{m+1} + Fa > 0;$$

d'où l'on tire

$$Fb < Fa + \frac{M(b^{m+1} - a^{m+1})}{m+1}.$$

2°. Si on fait $f'z = z^m(Z - N)$, on aura aussi $fb - fa > 0$, et l'on trouvera comme ci-dessus,

$$fz = Fz - \frac{Nz^{m+1}}{m+1};$$

donc faisant successivement $z = a$ et $= b$, l'équation $fb - fa > 0$ donnera

$$Fb - \frac{Nb^{m+1}}{m+1} - Fa + \frac{Na^{m+1}}{m+1} > 0;$$

d'où l'on tire

$$Fb > Fa + \frac{N(b^{m+1} - a^{m+1})}{m+1}.$$

Appliquons ces résultats aux quantités P, Q, R, etc. de l'art. 35.

Comme ces quantités sont regardées comme des fonctions de z, nous supposerons d'abord $P = Fz$, et par conséquent

$$P' = F'z = f'(x - xz);$$

donc, puisqu'on a supposé $F'z = z^m Z$, prenant $m = 0$, on aura

$$Z = f'(x - xz).$$

Faisons maintenant $a = 0$ et $b = 1$, la condition de la fonction

P, qui doit être nulle lorsque $z = 0$, donnera $Fa = 0$, et alors Fb sera la valeur de P répondant à $z = 1$.

Donc, si M et N sont la plus grande et la plus petite valeur de $f'(x - xz)$, relativement à toutes les valeurs de z, depuis $z = 0$ jusqu'à $z = 1$, on aura

$$Fb < M \text{ et } > N.$$

Par conséquent M et N seront les deux limites de la quantité P, en y faisant $z = 1$.

Supposons en second lieu, $Q = Fz$, on aura

$$Q' = F'z = zf''(x - xz);$$

donc faisant $m = 1$, on aura

$$Z = f''(x - xz).$$

Soit pareillement $a = 0$ et $b = 1$, on aura aussi par la condition de la fonction Q, qui doit être nulle lorsque z est nul, $Fa = 0$, et alors Fb sera égale à la valeur de Q, répondant à $= 1$.

Donc, si M_1 et N_1 sont la plus grande et la plus petite valeur de $f''(x - xz)$ pour toutes les valeurs de z, depuis $z = 0$ jusqu'à $z = 1$, on aura

$$Fb < \frac{M_1}{2} \quad \text{et} \quad > \frac{N_1}{2}.$$

de sorte que $\frac{M_1}{2}$ et $\frac{N_1}{2}$ seront les limites de la valeur Q lorsque z y est $= 1$.

Supposons, en troisième lieu, $R = Fz$, on aura

$$R' = F'z = \frac{z^2}{2} f'''(x - xz);$$

donc faisant $m = 2$, $a = 0$, $b = 1$, on trouvera de la même manière que si M_2 et N_2 sont la plus grande et la plus petite valeur de $\frac{1}{2} f'''(x - xz)$, en donnant à z toutes les valeurs depuis zéro jusqu'à l'unité, on aura $\frac{M2}{3}$ et $\frac{N2}{3}$ pour les limites de la valeur de la quantité R, lorsqu'on y fait $z=1$.

Et ainsi de suite.

Maintenant il est clair qu'en donnant à z, dans une fonction de $x(1-z)$, toutes les valeurs depuis $z=0$ jusqu'à $z=1$, les valeurs que recevra cette fonction seront les mêmes que celles que recevrait une pareille fonction de u, en donnant successivement à u toutes les valeurs depuis $u=0$ jusqu'à $u=x$; car faisant $x(1-z)=u$, $z=0$ donne $u=x$, $z=1$ donne $u=0$, et les valeurs intermédiaires de z donneront des valeurs de u intermédiaires entre celles-ci. D'où il est aisé de conclure que les quantités M et N seront la plus grande et la plus petite valeur de de $f'u$, relativement à toutes les valeurs de u, depuis $u=0$ jusqu'à $u=x$; et que par conséquent toute valeur intermédiaire entre M et N pourra être exprimée par $f'u$, en donnant à u une valeur intermédiaire entre o et x. Donc la valeur de la quantité P relative à $z=1$ pourra être exprimée par $f'u$, u étant une quantité entre o et x. On en conclura de même que la valeur de Q répondant à $z=1$, pourra être exprimée par $\frac{1}{2}f''u$, en donnant à u une valeur intermédiaire entre o et x. Et on en conclura pareillement, que la valeur de R relative à $z=1$ pourra être exprimée par $\frac{1}{2.3}f'''u$, en prenant pour u une quantité entre o et x.

Et ainsi de suite.

40. D'où résulte enfin ce théorème nouveau et remarquable par sa simplicité et sa généralité, qu'en désignant par u une quantite inconnue, mais renfermée entre les limites o et x, on peut développer successivement toute fonction de x et d'autres quantités quelconques suivant les puissances de x, de cette manière,

$$\begin{aligned} fx &= f.+xf'u \\ &= f.+xf'.+\frac{x^2}{2}f''u, \\ &= f.+xf'.+\frac{x^2}{2}f''.+\frac{x^3}{2.3}f'''u, \end{aligned}$$

etc.,

les quantités f., f′., f″., etc. étant les valeurs de la fonction fx et de ses dérivées f′x, f″x, etc., lorsqu'on y fait $x=0$.

Ainsi pour le développement de $f(z+x)$, suivant les puissances de x, on aura

$$f.=fz,\quad f'.=f'z,\quad f''.=f''z,\quad \text{etc.},$$

où l'on remarquera que les quantités $f'z$, $f''z$, etc. sont également les fonctions primes, secondes, etc. de fz, ce qui est évident, car il est visible que $f'(z+x)$, $f''(z+x)$, etc. sont également les fonctions primes, secondes, etc. de $f(z+x)$, soit qu'on les prenne relativement à x ou relativement à z, puisque l'augmentation de $z+x$ est la même, en changeant x en $x+i$, ou z en $z+i$.

Prenant donc $f'z$, $f''z$, etc. pour les fonctions dérivées de fz, on aura

$$\begin{aligned} f(z+x) &= fz + xf'(z+u),\\ &= fz + xf'z + \frac{x^2}{2}f''(z+u),\\ &= fz + xf'z + \frac{x^2}{2}f''z + \frac{x^3}{2.3}f'''(z+u),\\ &\text{etc.}, \end{aligned}$$

où u désigne une quantité inconnue, mais renfermée entre les limites o et x.

En changeant z en x et x en i, on aura le développement de $f(x+i)$ suivant les puissances de i; et l'on voit que dans ce développement la série infinie, à commencer d'un terme quelconque, est toujours égale à la valeur de ce premier terme, en y mettant $x+j$ à la place de x, j étant une quantité entre o et i; que par conséquent la plus grande et la plus petite valeur de ce terme, relativement à toutes les valeurs de j, depuis o jusqu'à i, seront les limites de la valeur du reste de la série continuée à l'infini.

Si on fait $fz=z^m$, on aura le développement du binome $(z+x)^m$, et on en conclura que la somme de tous les termes, à commencer d'un terme quelconque

$$\frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots\ldots n} z^{m-n} x^n,$$

sera renfermée entre ces limites

$$\frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots\ldots n} z^{m-n} x^n$$

et $$\frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots\ldots n} (z+x)^{m-n} x^n;$$

car il est évident que la plus grande et la plus petite valeur de $(z+u)^{m-n}$ seront $(z+x)^{m-n}$ et z^{m-n}.

La perfection des méthodes d'approximation dans lesquelles on emploie les séries, dépend non-seulement de la convergence des séries, mais encore de ce qu'on puisse estimer l'erreur qui résulte des termes qu'on néglige ; et à cet égard on peut dire que presque toutes les méthodes d'approximation dont on fait usage dans la solution des problèmes géométriques et mécaniques, sont encore très-imparfaites. Le théorème précédent pourra servir dans beaucoup d'occasions à donner à ces méthodes la perfection qui leur manque, et sans laquelle il est souvent dangereux de les employer.

On trouve dans la leçon IX du *Calcul des Fonctions*, une méthode plus simple d'avoir les limites du développement d'une fonction, avec de nouvelles remarques sur ce sujet. Voyez aussi un Mémoire de M. *Ampère*, dans le tome VI du Journal de l'Ecole Polytechnique.

CHAPITRE VII.

Des Équations dérivées et de leur usage dans l'analyse pour la transformation des fonctions. Théorie générale de ces équations et des constantes arbitraires qui y entrent.

41. JUSQU'A présent nous n'avons considéré les fonctions dérivées, que comme pouvant servir à la formation des séries; mais ces fonctions, considérées en elles-mêmes, offrent un nouveau système d'opérations algébriques, et fournissent des transformations qui sont d'un usage immense dans toute l'analyse.

Nous avons déjà vu (art. 17), que si on a une équation quelconque en x et y, ou simplement en x, laquelle doive avoir lieu quelle que soit la valeur de x, les équations dérivées qu'on obtiendra, en prenant les fonctions dérivées de chaque terme de la proposée, auront lieu aussi. Chacune de ces équations, et même une combinaison quelconque de ces équations, pourra donc tenir lieu de l'équation primitive; et on obtiendra souvent par ce moyen des équations subsidiaires plus simples ou plus faciles à résoudre que les équations principales.

Nous avons nommé *équations primes*, *secondes*, etc., les équations dérivées qu'on obtient en prenant les fonctions primes, secondes, etc. de tous les termes de l'équation primitive donnée; mais nous nommerons en général *équations dérivées du premier ordre*, *du second ordre*, etc., les équations qu'on pourra former par une combinaison quelconque de l'équation primitive et de son équation prime, ou de celles-ci et de l'équation seconde, et ainsi de suite.

Ainsi l'équation primitive contenant x et y, l'équation dérivée du premier ordre contiendra x, y et y', l'équation dérivée du second contiendra x, y, y' et y''; et ainsi du reste.

42. Nous allons montrer, par quelques exemples, l'usage des équations dérivées pour la transformation des fonctions. Et d'abord nous remarquerons que par la combinaison d'une fonction avec sa fonction prime, on peut faire disparaître un exposant quelconque.

Soit l'équation $y = X^m$, X étant une fonction quelconque de x, en prenant les fonctions primes, on aura (art. 16),

$$y' = mX^{m-1}X';$$

donc, divisant cette équation par la précédente, on aura

$$\frac{y'}{y} = \frac{mX'}{X}, \quad \text{savoir}, \quad Xy' - mX'y = 0,$$

équation dérivée du premier ordre où la puissance X^m ne se trouve plus, et qui dans cet état, est bien plus commode pour développer la valeur de y en série, par la méthode usitée des coefficiens indéterminés.

En effet, si on a, par exemple,

$$X = a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.},$$

et qu'on suppose

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.},$$

on aura, en prenant les fonctions primes,

$$X' = b + 2cx + 3dx^2 + \text{etc.},$$
$$y' = B + 2Cx + 3Dx^2 + \text{etc.};$$

donc, substituant et réunissant les termes affectés de la même puissance de x, on aura

$$\begin{aligned} &aB - mbA + [2aC + bB - m(2cA + bB)]\,x \\ &+ [3aD + 2bC + cB - m(3dA + 2cB + bC)]\,x^2 \\ &+ \text{etc.} = 0, \end{aligned}$$

équation qui devant être identique, c'est-à-dire avoir lieu quel que soit x, pour que l'expression supposée de y soit vraie, donnera autant d'équations particulières qu'il y a de différentes puissances de x, et on tirera de ces équations,

$$B=\frac{mbA}{a},$$
$$C=\frac{2mcA+(m-1)bB}{2a},$$
$$D=\frac{3mdA+(2m-1)cB+(m-2)bC}{3a},$$
etc.

On aura ainsi successivement tous les coefficiens B, C, D, etc. par des formules dont la loi est visible, et qu'on pourra par conséquent continuer aussi loin qu'on voudra.

Mais le premier coefficient A demeure indéterminé; il faut, pour le déterminer, recourir à l'équation primitive $y=X^m$; faisant $x=0$, on a d'un côté $X=a$, et de l'autre $y=A$; donc $A=a^m$.

43. On peut de même, par les fonctions dérivées, faire disparaître les logarithmes, les exponentielles et les sinus et cosinus.

En effet, si $y=lX$, on aura l'équation du premier ordre $y'X-X'=0$; si $y=e^X$, on aura celle-ci, $y'-X'y=0$; mais pour faire disparaître les sinus ou cosinus, il faudra aller à une équation du second ordre.

Soit donc $y=\sin X$, X étant toujours une fonction quelconque de x, en prenant les fonctions primes, on aura (art. 14),

$$y'=X'\cos X,$$

et, prenant de nouveau les fonctions primes,

$$y''=X''\cos X-X'^2\sin X;$$

donc, éliminant de ces trois équations sin X et cos X, on aura cette équation dérivée du second ordre,

$$X'y''-X''y'+X'^3y=0,$$

où

où il n'y a plus de transcendantes; on trouvera la même équation en faisant $y = \cos X$.

Si on fait ici pour X et y les mêmes substitutions que ci-dessus (art. 42), et qu'après avoir ordonné les termes suivant les puissances de x, on égale à zéro la somme de tous ceux qui se trouveront multipliés par la même puissance de x, on aura autant d'équations particulières qui serviront à déterminer les coefficiens indéterminés de l'expression supposée de y par les deux qui précèdent. A l'égard des deux premiers, ils demeureront indéterminés; mais il faudra les déterminer de manière que l'équation primitive et l'équation prime aient lieu en faisant $x = 0$. Or l'équation $y = \sin X$ devient alors $A = \sin a$, et l'équation $y' = X' \cos X$ devient $B = b \cos a$.

44. Non-seulement l'équation dérivée du second ordre que nous venons de trouver, peut servir à développer en série la valeur de sin X ou cos X; elle peut servir aussi à trouver une autre transformation de cette valeur, au moyen des exponentielles.

Supposons, en effet, $y = e^V$, e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité (art. 12), et V une fonction indéterminée de x; en prenant les fonctions primes et secondes, on aura

$$y' = V'e^V, \quad y'' = (V'^2 + V'')\, e^V,$$

et ces valeurs étant substituées dans l'équation dont il s'agit, on aura, après la division par la quantité e^V qui en multiplie tous les termes,

$$X'(V'' + V'^2) - X''V' + X'^3 = 0.$$

J'observe qu'on peut satisfaire à cette équation en faisant

$$V' = mX',$$

m étant un coefficient constant, ce qui donne $V'' = mX''$; car substituant ces valeurs, l'équation se réduit à

$$(1 + m^2)\, X'^3 = 0;$$

donc

$$1 + m^2 = 0 \quad \text{et} \quad m = \sqrt{-1}.$$

Ainsi on aura

$$V' = X'\sqrt{-1};$$

et de là, en remontant à l'équation primitive,

$$V = X\sqrt{-1} + a,$$

a étant une constante arbitraire; donc

$$e^V = e^{a+X\sqrt{-1}} = e^a \times e^{X\sqrt{-1}} = Ae^{X\sqrt{-1}},$$

en faisant $e^a = A$ pour plus de simplicité.

On aura donc

$$y = Ae^{X\sqrt{-1}},$$

et comme le radical $\sqrt{-1}$ peut être pris également en plus et en moins, on aura également

$$y = Be^{-X\sqrt{-1}},$$

B étant une autre constante arbitraire; en effet, il est aisé de voir que chacune de ces deux valeurs satisfait à l'équation

$$X'y'' - X''y' + X'^3 y = 0;$$

et on voit aussi facilement que leur somme y satisfait encore, parce que les quantités y, y', y'' n'y sont que sous la forme linéaire. De sorte qu'on aura en général,

$$y = Ae^{X\sqrt{-1}} + Be^{-X\sqrt{-1}},$$

A et B étant de nouveau deux coefficiens indéterminés comme ci-dessus.

Cette expression de y convient également à sin X et à cos X; la différence consiste dans les constantes A et B qui doivent se déterminer par la comparaison des valeurs de y et de y' pour une valeur quelconque de X. Ainsi, puisque sin X doit devenir nul lorsque $X = 0$ par la nature des sinus, il faudra que l'on ait $A + B = 0$; de plus, y' étant $= X' \cos X$, et l'expression précédente de y donnant $y' = X'(Ae^{X\sqrt{-1}} - Be^{-X\sqrt{-1}})\sqrt{-1}$, on aura

$$\cos X = (Ae^{X\sqrt{-1}} - Be^{-X\sqrt{-1}})\sqrt{-1};$$

faisant $X = 0$, on sait que $\cos X = 1$; donc $(A - B)\sqrt{-1} = 1$. Ces deux équations donnent

$$A = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \text{ et } B = -\frac{1}{2\sqrt{-1}};$$

donc enfin,

$$\sin X = \frac{e^{X\sqrt{-1}} - e^{-X\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},$$

On trouvera de la même manière,

$$\cos X = \frac{e^{X\sqrt{-1}} + e^{-X\sqrt{-1}}}{2},$$

expressions connues, et que nous avions déjà trouvées par une autre voie (art. 22).

45. Dans les exemples précédens, nous avons cherché l'équation dérivée, et nous avons ensuite déterminé par cette équation la valeur de la fonction primitive y. Cette dernière opération est, comme l'on voit, l'inverse de celle par laquelle on descend de la fonction primitive aux fonctions dérivées ; elle peut toujours s'exécuter par le moyen des séries, en employant, comme nous l'avons fait, une série avec des coefficiens indéterminés, et faisant des equations séparées des termes affectés de chaque puissance de x. De cette manière, on détermine les coefficiens les uns par les autres, et on a souvent l'avantage d'apercevoir la loi générale qui règne entre ces coefficiens.

Mais on peut aussi trouver immédiatement chaque coefficient par la méthode des art. 33 et suivans ; car il n'y a qu'à chercher successivement les valeurs des fonctions dérivées, et si on désigne par (y), (y'), (y''), etc., les valeurs de y, y', y'', etc. lorsque $x = 0$, on a en général

$$y = (y) + x(y') + \frac{x^2}{2}(y'') + \text{etc.}$$

Cette formule a l'avantage de faire voir la raison pourquoi il reste des coefficiens indéterminés, comme nous l'avons trouvé ci-dessus. En effet, si on veut déterminer la valeur de y par une équation dérivée du premier ordre, cette équation donnera la valeur de y' en x et y, et de là on trouvera une équation du second ordre en y'', y', y, x, une équation du troisième en y''', y'', y', y, x, et ainsi de suite; de sorte qu'en substituant successivement dans ces équations les valeurs de y', y'', etc. données par les équations précédentes, on aura en dernière analyse y', y'', y''', etc. exprimés en x et y. Donc, faisant $x = 0$, on aura (y'), (y''), (y'''), etc. exprimés en (y) qui demeurera indéterminé.

De même, si on ne fait dependre la détermination de y que d'une équation dérivée du second ordre en x, y, y' et y'', on en tirera successivement une équation tierce entre x, y, y', y'', y''', et ainsi de suite; et par des substitutions successives, on aura en dernière analyse, y'', y''', etc., donnés en x, y, y'; de sorte qu'en faisant $x = 0$, on aura les valeurs de (y''), (y'''), (y^{iv}), etc., exprimées en (y) et (y'), ces deux quantités demeurant indéterminées; et ainsi de suite.

Ainsi, lorsqu'on part d'une équation dérivée du premier ordre, il reste une indéterminée (y); lorsqu'on part d'une équation du second ordre, il reste deux indéterminées (y) et (y'), et ainsi de suite; et l'on voit que ces indéterminées sont constantes, puisque ce sont les valeurs de y, y', y'', etc., lorsque $x = 0$.

46. Quoique la conclusion précédente soit fondée sur la théorie des séries, il n'est pas difficile de se convaincre qu'elle doit avoir lieu généralement, quelle que soit l'expression de y, puisqu'on peut toujours regarder une expression en série comme le développement d'une expression finie. Mais comme c'est là une propriété caractéristique des équations dérivées entre deux variables, il est important de l'établir sur la nature même de ces équations.

Considérons donc en général l'équation à deux variables $F(x, y) = 0$, et désignons simplement par $F(x, y)' = 0$ son équation prime, par $F(x, y)'' = 0$, l'équation seconde, et ainsi de suite, en regardant x et y comme variable à-la-fois. Soient

a, b, c, etc. des constantes quelconques contenues dans la fonction $F(x, y)$, ces constantes seront les mêmes dans les fonctions dérivées; ainsi, puisque les équations $F(x,y)=0$ et $F(x,y)'=0$ ont lieu en même temps, on pourra en éliminer une constante a, et l'équation résultante sera une équation du premier ordre entre x, y et y', qui renfermera une constante de moins que l'équation primitive, et qui aura par conséquent lieu en même temps que celle-ci. De même les trois équations $F(x,y)=0$, $F(x,y)'=0$, $F(x,y)''=0$, ayant lieu à la fois, on pourra en éliminer deux constantes a, b; et l'équation résultante sera une équation du second ordre entre x, y, y' et y'', qui renfermera deux constantes de moins que l'équation primitive, et qui aura lieu en même temps qu'elle; et ainsi de suite.

Donc, puisque dans les équations à deux variables, une équation du premier ordre peut renfermer une constante de moins que l'équation primitive, une équation du second ordre peut renfermer deux constantes de moins que l'équation primitive, et ainsi de suite, il s'ensuit réciproquement que l'équation primitive doit contenir une constante de plus que l'équation dérivée du premier ordre, deux constantes de plus que l'équation dérivée du second ordre, et ainsi de suite, constantes qui seront par conséquent arbitraires; et il est visible en même temps qu'elles ne sauraient en contenir davantage, puisqu'on ne pourrait pas les faire disparaître toutes par le moyen des équations dérivées.

Donc, si l'on n'a pour la détermination d'une fonction qu'une équation du premier ordre, ou du second, ou etc., l'équation primitive, prise dans toute sa généralité, devra contenir une constante arbitraire, ou deux, etc., suivant l'ordre de l'équation donnée: et on déterminera ces constantes par des valeurs particulières données de la fonction ou de ses dérivées.

Si donc on trouve d'une manière quelconque une équation en x et y qui satisfasse à une équation donnée d'un ordre quelconque, et qui renferme autant de constantes arbitraires qu'il y a d'unités dans l'indice de cet ordre, on en conclura que cette équation sera l'équation primitive de l'équation donnée, et pourra, dans tous les cas, être employée à la place de celle-ci.

47. Au lieu d'éliminer à la fois les deux constantes a et b des trois équations $F(x,y)=0$, $F(x,y)'=0$, $F(x,y)''=0$, on peut n'éliminer d'abord que la constante b ou a des deux premières; on aura ainsi deux équations du premier ordre, dont l'une ne renfermera que la constante a, et l'autre la constante b. Si maintenant on élimine de chacune de ces équations la constante a ou b par le moyen de son équation prime, on aura deux équations du second ordre sans a ni b, qui devront coïncider avec l'équation résultante de l'élimination simultanée de ces constantes, par le moyen des trois équations $F(x,y)=0$, $F(x,y)'=0$, $F(x,y)''=0$, parce que la valeur de y'' que ces équations du second ordre donneront, et qui sera exprimée en x, y et y', sans a ni b, ne peut qu'être la même, de quelque manière qu'elle soit déduite de l'équation primitive.

D'où l'on peut conclure qu'une équation du second ordre peut être dérivée de deux équations différentes du premier ordre, renfermant chacune une constante arbitraire de plus.

Et l'on prouvera de la même manière, qu'une équation du troisieme ordre pourra être dérivée de trois équations différentes du second ordre, renfermant chacune une constante arbitraire; et ainsi de suite.

En même temps on voit que si pour une équation donnée du second ordre, on en trouve deux du premier ordre qui satisfassent chacune à cette équation, et qui renferment chacune une constante arbitraire a ou b, on en pourra déduire immédiatement l'équation primitive; car il suffira de chasser de ces équations la quantité y', et l'on aura une équation en x et y, avec deux constantes arbitraires a et b.

Il en sera de même pour les équations du troisième ordre; car si on trouve trois équations du second ordre qui satisfassent chacune à une équation du troisième ordre, et qui aient en même temps les constantes arbitraires a, b, c, on aura, en éliminant y' et y'', une équation en x, y et a, b, c, qui sera par conséquent l'équation primitive de l'équation donnée; et ainsi de suite.

48. Mais si pour une équation du second ordre on en trouve

deux du premier ordre qui y satisfassent, et dont une seule renferme une constante arbitraire, alors en éliminant y', on aura une équation en x et y, qui ne renfermera qu'une constante arbitraire, et qui ne sera pas l'équation primitive complète de la proposée du second ordre; mais cette équation satisfera également aux deux du premier ordre, puisqu'elle satisfait à celle du second ordre, qui est également dérivée de ces deux-ci; donc elle pourra être regardée comme l'équation primitive complète de l'équation du premier ordre qui ne renferme point de constante arbitraire. D'où je conclus qu'étant proposée une équation du premier ordre en x, y et y', si on en déduit d'une manière quelconque une équation du second, soit en éliminant une constante ou non, et qu'ensuite on trouve une autre équation primitive du premier ordre, avec une constante arbitraire a, on aura, par l'élimination de y' entre celle-ci et la proposée, une équation en x et y qui contiendra la constante arbitraire a, et qui sera par conséquent l'équation primitive complète de la proposée.

On prouvera de la même manière que si de la proposée du premier ordre on déduit une équation du troisième ordre, et qu'ensuite on trouve pour celle-ci une équation primitive du second, avec une constante arbitraire dans laquelle la proposée ne soit pas renfermée, il n'y aura qu'à éliminer les y'' et y' au moyen de la proposée, et l'on aura une équation en x et y qui renfermera une constante arbitraire, et qui sera par conséquent l'équation primitive complète de la proposée; et ainsi de suite.

On peut appliquer le même raisonnement aux équations des ordres supérieurs au premier, et en tirer des conclusions semblables.

Le sujet de ce chapitre est traité avec plus de détail dans les leçons X, XI et XII du *Calcul des fonctions*, où le lecteur trouvera une analyse complète des sections angulaires.

CHAPITRE VIII,

Où l'on examine les cas simples dans lesquels on peut passer des fonctions ou des équations dérivées du premier ordre aux fonctions ou aux équations primitives. Des équations linéaires des différens ordres, et de celles qu'on peut rendre linéaires.

49. UNE équation du premier ordre en x, y et y' étant donnée, si on peut, par des opérations quelconques, la ramener à la forme $f(x,y)'=o$, où $f(x,y)'$ désigne la fonction prime d'une fonction de x, y, marquée par $f(x,y)$, on aura sur-le-champ l'équation primitive $f(x,y)=a$, dans laquelle a sera la constante arbitraire.

Par exemple, l'équation $y'=o$ donne sur-le-champ $y=a$; l'équation $xy'-y=o$ étant divisée par x^2, se réduit à $\left(\frac{y}{x}\right)'=o$; j'entends par $\left(\frac{y}{x}\right)'$ la fonction prime de la quantité $\frac{y}{x}$ renfermée entre les deux crochets; d'où l'on tire $\frac{y}{x}=a$, ou bien, en divisant la même équation par xy, elle devient

$$\frac{y'}{y}-\frac{1}{x}=o,$$

dans laquelle les variables x, y ne sont plus mêlées; prenant donc la fonction primitive de chaque terme, on aura

$$ly - lx = la,$$

la caractéristique l indiquant les logarithmes hyperboliques; d'où l'on tire $\frac{y}{x}=a$, comme plus haut.

En

En général, si on peut réduire l'équation à la forme

$$\mathrm{f}x + y'\mathrm{F}y = 0,$$

où les variables sont séparées, il n'y aura qu'à prendre les fonctions primitives de $\mathrm{f}x$ et de $y'\mathrm{F}y$, et faire la somme égale à une constante arbitraire a; et la même chose aura lieu si on peut ramener la proposée à cette forme, par une substitution quelconque.

Soit, par exemple, une équation de la forme

$$y' = \mathrm{f}\left(\frac{y}{x}\right);$$

je fais $\frac{y}{x} = u$; donc $y = xu$, $y' = xu' + u$; et l'équation devient, par ces substitutions,

$$xu' + u = \mathrm{f}u,$$

laquelle peut se mettre sous la forme

$$\frac{1}{x} + \frac{u'}{u - \mathrm{f}u} = 0,$$

qui est comprise dans la précédente.

Si on avait l'équation $y = x\mathrm{f}y'$, au lieu de la réduire à la forme précédente, j'en prendrais les fonctions primes, ce qui me donnerait

$$y' = xy''\mathrm{f}'y' + \mathrm{f}y',$$

équation réductible à la forme

$$\frac{1}{x} + \frac{y''\mathrm{f}'y'}{\mathrm{f}y' - y'} = 0,$$

et qui, en faisant $y' = u$, rentre encore dans le cas précédent. Ayant trouvé ainsi une équation primitive entre x et u avec une constante arbitraire, c'est-à-dire entre x et y', on chassera y' par le moyen de la proposée, et l'on aura une équation entre x et y avec la constante arbitraire, laquelle sera, par conséquent, l'équation primitive complète de la proposée. Cette dernière méthode est, comme l'on voit, une application de la théorie de l'article précédent.

50. De cette manière on ramène, comme l'on voit, la recherche des fonctions primitives de deux variables, à celle des fonctions primitives d'une seule variable; mais comme on n'y parvient ordinairement qu'en employant pour x et y d'autres variables, comme t et u, c'est-à-dire en substituant pour x et y des fonctions données de t et u, il faut observer, à l'égard de ces substitutions, que u devenant fonction de t en vertu de l'équation qui a lieu entre x et y, ces deux variables devront être aussi regardées comme fonctions de t. Donc, ayant supposé $y = \mathrm{f}x$, on aura, en regardant maintenant x et y comme fonctions de t, $y' = x'\mathrm{f}'x$ (art. 16); mais lorsqu'on regarde y simplement comme fonction de x, on a $y' = \mathrm{f}'x$, comme nous l'avons fait jusqu'ici; donc, pour passer de cette hypothèse à celle où x et y sont fonctions de t, il faut mettre à la place de y', la quantité $\frac{y'}{x'}$.

Ainsi, ayant à transformer l'équation $y' = \mathrm{F}(x, y)$, on commencera par la changer en $y' = x'\mathrm{F}(x, y)$, ensuite on y substituera pour x, y, x', y' leurs valeurs en t, u et u', où u' sera la fonction prime de u regardé comme fonction de t.

De même, puisque y'' est la fonction prime de y', regardé comme fonction de x, il faudra substituer pour y'' la quantité $\frac{\left(\frac{y'}{x'}\right)'}{x'}$, c'est-à-dire $\frac{y''}{x'^2} - \frac{y'x''}{x'^3}$; et ainsi de suite.

Donc, si dans une équation, au lieu de regarder y comme fonction de x, on voulait réciproquement regarder x comme fonction de y, alors la fonction prime de y deviendrait l'unité, et l'on y substituerait simplement $\frac{1}{x'}$ pour y', $-\frac{x''}{x'^3}$ pour y''; et ainsi de suite.

51. Il y a, au reste, une manière générale de trouver l'équation primitive d'une équation dérivée d'un ordre quelconque; elle con-

siste à rendre le premier membre de l'équation, dont le second est zéro, une fonction dérivée exacte par le moyen d'un multiplicateur. On trouvera dans la leçon XIII du *Calcul des Fonctions*, une démonstration de l'existence de ce multiplicateur, dans toutes les équations dérivées; mais la recherche en est le plus souvent très-difficile, ce qui rend cette méthode plus curieuse qu'utile.

52. Quant à la manière de trouver les fonctions primitives des fonctions d'une seule variable, comme de Fx ou de $y'Fy$, on sait que si Fx est une fonction rationnelle de x, on peut toujours la décomposer en différens termes de la forme x^m ou $\frac{1}{(a+bx)^m}$, m étant un nombre entier positif, et $a+bx$ un facteur du dénominateur de la fonction, s'il en a un. Ainsi la fonction primitive de Fx sera composée d'autant de termes de la forme $\frac{x^{m+1}}{m+1}$ et $\frac{(a+bx)^{1-m}}{b(1-m)}$, ou lx si $m=-1$, et $\frac{l(a+bx)}{b}$ si $m=1$; et il en sera de même de la fonction primitive de $y'Fy$ (art. 52).

Si Fx contient des quantités irrationnelles, on les fera disparaître par des substitutions, ce qui n'est possible en général par les méthodes connues, que pour les radicaux de la forme $\sqrt{(a+bx+cx^2)}$. Quand il y a dans Fx des radicaux plus compliqués, ou même quand il y a plus d'un radical de cette forme, la recherche de la fonction primitive devient impossible en général par les méthodes connues; et on ne peut l'obtenir que par le moyen des séries, soit en faisant disparaître les radicaux par leur résolution en série, soit en employant la méthode générale pour le développement en série de toute fonction de x (art. 33). Pour cela, on supposera $f'x = Fx$; de là on aura

$$f''x = F'x, \quad f'''x = F''x, \quad \text{etc.}$$

Donc la valeur de fx, fonction primitive de Fx, sera représentée ainsi,

$$fx = f. + xF. + \frac{x^2}{2}F'. + \frac{x^3}{2.3}F'', \text{etc.},$$

les quantités f., F., F', etc. étant les valeurs de fx, Fx, F'x, etc., lorsque $x = o$, où l'on voit que f. sera une constante indéterminée.

53. Si, pour une équation proposée d'un ordre quelconque, on parvient à trouver une équation d'un ordre inférieur qui ne renferme point de constantes arbitraires, ou qui n'en renferme pas autant qu'il peut y en avoir, alors cette équation ne pourra pas être regardée comme une équation primitive complète, mais elle ne sera qu'un cas particulier de cette équation, dans lequel on aurait donné aux constantes arbitraires des valeurs particulières.

Mais il y a un cas très-étendu, dans lequel il suffit d'avoir plusieurs valeurs particulières de y en x pour pouvoir en obtenir la valeur complète; c'est celui où l'équation d'un ordre quelconque ne renferme les y, y', y'', etc. que sous la forme linéaire.

Soit, en effet, proposée l'équation

$$\mathrm{A}y + \mathrm{B}y' + \mathrm{C}y'' + \mathrm{D}y''' + \text{etc.} = o,$$

dans laquelle A, B, C, etc. soient des fonctions données de x seul. Soient p, q, r, etc. des fonctions différentes de x, qui, étant substituées pour y, satisfassent chacune en particulier à cette équation, je dis que l'on aura en général

$$y = ap + bq + cr + \text{etc.},$$

a, b, c, etc. étant des constantes arbitraires; ce qui est evident; car cette expression de y étant substituée dans la même équation, y satisfera indépendamment des constantes. D'où il suit que si le nombre des valeurs particulières p, q, r, etc. est égal à celui de l'ordre de l'équation proposée, c'est-à-dire à l'indice de la fonction dérivée $y'''^{\text{etc.}}$ la plus élevée, on aura l'expression complète de y. L'analyse de l'article 44 fournit un exemple de cette méthode.

Mais il y a plus : on peut alors trouver aussi la valeur complète de y, qui satisfera à l'équation

$$\mathrm{A}y + \mathrm{B}y' + \mathrm{C}y'' + \text{etc.} = \mathrm{X},$$

X étant aussi une fonction quelconque de x.

Comme cette méthode est une des plus utiles dans ce genre d'analyse, je crois devoir l'exposer ici en peu de mots.

54. Supposons que l'équation proposée soit du troisième ordre, on verra aisément que la méthode est générale pour un ordre quelconque. Soit donc l'équation

$$Ay + By' + Cy'' + y''' = X,$$

et soient p, q, r trois valeurs différentes et particulières de y et x, qui satisfassent à l'équation

$$Ay + By' + Cy'' + y''' = 0;$$

ensorte que l'on ait

$$\begin{aligned} Ap + Bp' + Cp'' + p''' &= 0, \\ Aq + Bq' + Cq'' + q''' &= 0, \\ Ar + Br' + Cr'' + r''' &= 0. \end{aligned}$$

Supposons $y = ap + bq + cr$, et regardons a, b, c comme trois fonctions inconnues de x qu'il s'agira de déterminer; en prenant les fonctions primes, secondes et tierces de y, on aura d'abord

$$y' = ap' + bq' + cr' + pa' + qb' + rc'.$$

Je suppose $pa' + qb' + rc' = 0$, j'aurai simplement

$$y' = ap' + bq' + cr'.$$

De là en prenant de nouveau les fonctions primes, j'aurai

$$y'' = ap'' + bq'' + cr'' + a'p' + b'q' + c'r'.$$

Je suppose derechef $a'p' + b'q' + c'r' = 0$, j'aurai simplement

$$y'' = ap'' + bq'' + cr'';$$

d'où je tire, en prenant encore les fonctions primes,

$$y''' = ap''' + bq''' + cr''' + a'p'' + b'q'' + c'r''.$$

Je substitue maintenant les valeurs de y, y', y'' et y''' dans l'équation proposée, il est visible que par la nature des quantités p, q, r, les termes qui contiendront a, b, c se détruiront, et il ne restera que l'équation

$$a'p'' + b'q'' + c'r'' = X,$$

qui étant combinée avec les deux équations supposées

$$a'p + b'q + c'r = o,$$
$$a'p' + b'q' + c'r' = o,$$

servira à déterminer les trois quantités a', b', c', les quantités p, q, r et leurs fonctions primes et secondes étant connues, ainsi que la quantité X.

Supposons donc qu'on ait trouvé $a' = P$, $b' = Q$, $c' = R$, ces quantités P, Q, R étant des fonctions connues de x, il n'y aura qu'à les regarder comme des fonctions primes et en chercher les fonctions primitives, qui contiendront chacune une constante arbitraire qui pourra lui être ajoutée. On aura ainsi les valeurs des inconnues a, b, c, qu'on substituera ensuite dans l'expression de y.

55. Lorsque l'équation n'est que du premier ordre, on n'a besoin que d'une valeur p, et on peut toujours la trouver; car on a alors l'équation $Ap + p' = o$, à laquelle satisfait cette valeur $p = e^{-M}$, M étant la fonction primitive de A, de manière que $M' = A$, et e dénotant toujours le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité; en effet, on aura, en prenant les fonctions primes,

$$p' = - M'e^{-M} = - Ap.$$

Pour les équations d'un ordre supérieur au premier, il n'y a pas de méthode générale pour trouver les valeurs de p, q, etc., à moins que les coefficiens A, B, C, etc. ne soient constans. Mais, dans ce cas, il est aisé de les trouver; car il n'y a qu'à supposer $p = e^{mx}$, m étant une constante indéterminée, on aura

$$p' = me^{mx}, \quad p'' = m^2e^{mx}, \quad \text{etc.};$$

donc l'équation

$$Ap + Bp' + Cp'' + Dp''' + \text{etc.} = 0$$

deviendra

$$A + Bm + Cm^2 + Dm^3 + \text{etc.} = 0,$$

laquelle sera, généralement parlant, d'un degré égal à l'ordre de l'équation proposée. Elle aura donc autant de racines qu'il y a d'unités dans ce degré; et si on désigne ces racines par m, n, etc., on aura

$$p = e^{mx}, \quad q = e^{nx}, \quad \text{etc.};$$

de sorte que dans ce cas, la difficulté est réduite à la résolution des équations.

56. On peut souvent rendre linéaires des équations qui ne le sont pas, par le moyen des substitutions; et comme cette transformation est toujours avantageuse, voici deux cas très-étendus où elle réussit :

Le premier est celui de l'équation

$$y = x\mathrm{f}y' + \mathrm{F}y',$$

qui est plus générale que celle que nous avons traitée ci-dessus (art. 54). J'en prends d'abord les fonctions primes, j'ai

$$y' = xy''\mathrm{f}'y' + \mathrm{f}y' + y''\mathrm{F}'y';$$

je fais $y' = z$, et par conséquent $y'' = z'$, j'ai

$$z = xz'\mathrm{f}'z + \mathrm{f}z + z'\mathrm{F}'z,$$

équation du premier ordre en x et z, où z est censé fonction de x.

Maintenant je regarde x comme une fonction de z; il faudra mettre $\frac{1}{x'}$ à la place de z' (art. 50), et il viendra l'équation

$$x\mathrm{f}'z + (\mathrm{f}z - z)\,x' + \mathrm{F}'z = 0,$$

qui est, comme l'on voit, du premier ordre, et linéaire en x. On pourra donc, par la méthode précédente, en trouver l'équation primitive en x et z; mais la proposée, par la substitution de z au lieu de y', devient

$$y = xfz + Fz;$$

éliminant donc z de ces deux équations, on aura une équation en x et y, qui sera l'équation primitive de l'équation proposée.

Le second cas est celui de l'équation

$$y' + My^2 + N = 0,$$

M et N étant des fonctions de x. Ici je fais $y = \frac{z'}{Mz}$, ce qui donne

$$y' = \frac{z''}{Mz} - \frac{z'^2}{Mz^2} - \frac{z'M'}{M^2z};$$

substituant ces valeurs et multipliant par Mz, l'équation devient

$$z'' - \frac{M'z'}{M} + MNz = 0,$$

qui est, comme l'on voit, du second ordre, mais linéaire par rapport à z.

Supposons qu'on ait trouvé d'une manière quelconque deux valeurs particulières de y en x, c'est-à-dire sans constante arbitraire, que nous dénoterons par p et q. Pour la valeur p, on aura $\frac{z'}{Mz} = p$, d'où l'on tire $z = e^P$, en dénotant par P la fonction primitive de pM; on aura de même pour la valeur q, $z = e^Q$, Q étant la fonction primitive de qM. Ayant ainsi deux valeurs particulières de z, on aura la valeur complète (art. 53),

$$z = ae^P + be^Q,$$

a et b étant deux constantes arbitraires; donc, puisque $y = \frac{z'}{Mz}$ et que $P' = pM$, $Q' = qM$, on aura cette valeur complète de y,

$$y = \frac{ape^P + bqe^Q}{ae^P + be^Q},$$

c'est-à-dire,

c'est-à-dire, en faisant $\frac{b}{a} = c$,

$$y = \frac{p + cqe^{Q-P}}{1 + ce^{Q-P}},$$

où c est la constante arbitraire.

Par exemple, si $N = -mM$, m étant une constante, il est aisé de voir que l'on satisfera à la proposée en y, en faisant $y = \sqrt{m}$; et à cause de l'ambiguité du radical, on aura

$$p = \sqrt{m}, \quad q = -\sqrt{m};$$

donc, nommant L la fonction primitive de M, on aura

$$P = L\sqrt{m}, \quad Q = -L\sqrt{m},$$

et la valeur complète de y sera

$$= \frac{(1 - ce^{-2L\sqrt{m}})\sqrt{m}}{1 + ce^{-2L\sqrt{m}}}.$$

Au reste, dans ce cas, l'équation proposée peut se mettre sous la forme

$$\frac{y'}{y^2 - m} + M = 0,$$

où les variables x et y sont séparées, et dont on peut trouver l'équation primitive, comme nous l'avons montré plus haut.

57. Lorsque l'équation proposée n'est pas linéaire en y, y', y'', etc., ou qu'elle n'est pas comprise sous la forme précédente, je ne connais aucune méthode générale pour compléter les valeurs particulières de y qu'on aurait trouvées; mais on y peut toujours parvenir par le moyen des séries.

Supposons en effet que, pour une équation du premier ordre en x, y et y', la valeur complète de y soit $f(x, a)$, a étant la constante arbitraire. En donnant à a une valeur particulière h, la quantité $f(x, a)$ deviendra une valeur particulière de y, que nous nommerons p, et que nous supposerons connue d'une manière quelconque. Faisons maintenant $a = h + i$, et développons la fonction $f(x, h+i)$ en série ascendante suivant les puissances de i, le premier terme sera $f(x, h)=p$, et les autres termes seront de la forme $qi+ri^2+$ etc., q, r, etc. étant des fonctions de x. Si on substitue cette expression de y dans l'équation donnée du premier ordre, il faudra qu'elle se vérifie, indépendamment de la constante i qui doit demeurer arbitraire.

Soit donc $y'=F(x, y)$ l'équation du premier ordre, à laquelle satisfait la valeur particulière $y=p$, on aura, d'après cette condition,

$$p'=F(x, p).$$

Substituons pour y la série $p+iq+i^2r+$ etc., et développons aussi la fonction $F(x, y)$ en série suivant les puissances de i; si on dénote simplement par $F'(y)$, $F''(y)$, etc. les fonctions primes, secondes, etc. de $F(x, y)$ prises relativement à y seul, et qu'on fasse, pour abréger, $o=iq+i^2r+$ etc., on aura, par la théorie exposée plus haut sur le développement des fonctions,

$$F(x, y)=F(x, p)+oF'(p)+\frac{o^2}{2}F''(p)+\text{etc.}$$

D'un autre côté on aura, en prenant les fonctions primes,

$$y'=p'+q'i+r'i^2+\text{etc.};$$

donc, substituant ces valeurs dans l'équation $y'=F(x, y)$, et ordonnant les termes suivant les puissances de i, on aura, à cause de $p'=F(x, p)$,

$$iq'+i^2r'+\text{etc.}=iqF'(p)+i^2\left[rF'(p)+\frac{q^2}{2}F''(p)+\text{etc.}\right];$$

d'où l'on tire, par la comparaison des termes affectés des mêmes puissances de i, les équations suivantes,

$$q'=qF'(p),\quad r'=rF'(p)+\frac{q^2}{2}F''(p),\quad \text{etc.}$$

qui serviront à déterminer successivement toutes les inconnues q, r, etc.

Comme les quantités $F'(p)$, $F''(p)$, etc. sont des fonctions données de x, il est visible qu'on n'aura pour ces inconnues, que des équations linéaires du premier ordre, susceptibles de la méthode de l'art. 55; il ne sera pas même nécessaire d'avoir les valeurs complètes de q, r, etc., il suffira d'avoir des valeurs quelconques qui satisfassent à ces équations de condition.

Ayant ainsi déterminé les valeurs des quantités q, r, s, etc., on aura cette valeur complète de y,

$$y = p + iq + i^2r + \text{etc.},$$

dans laquelle i sera la constante arbitraire qui manquait à la valeur particulière $y = p$. Cette valeur sera à la vérité exprimée par une série, mais la convergence de cette série ne dépendra que de la valeur de la constante i.

Cette méthode est aussi applicable, avec l'extension convenable, aux équations des ordres supérieurs au premier; mais les équations qu'on trouvera pour la détermination des fonctions inconnues, seront du même ordre, et par conséquent on ne pourra trouver en général les valeurs de ces fonctions que dans le cas où les coefficiens seront constans.

Au reste, cette méthode est le fondement des solutions des principaux problèmes de la théorie des planètes. Comme les excentricités et les inclinaisons qu'on doit regarder comme des constantes arbitraires, sont fort petites, et que l'effet des attractions est aussi très-petit, le cercle fournit d'abord des valeurs particulières, et on complète ensuite ces valeurs par des séries qui procèdent suivant les puissances de ces constantes très-petites.

CHAPITRE IX.

Des valeurs singulières qui ne sont pas comprises dans les équations primitives complètes. Des équations primitives singulières.

58. La méthode que nous venons d'exposer pour trouver l'équation primitive par le moyen des séries, est fondée sur la supposition que toute fonction $F(x, y)$ de deux variables x, y, puisse toujours, par la substitution de $p + qi + ri^2 +$ etc. à la place de y, se développer en une série ascendante, suivant les puissances entières de i; mais comme cette série résulte du développement d'une fonction de $y + o$, en faisant $o = qi + ri^2 +$ etc., et donnant à y une valeur particulière p, il s'ensuit de la théorie que nous avons donnée dans le chapitre V, que ce développement pourrait contenir des puissances fractionnaires ou négatives de o, auquel cas la série dont il s'agit contiendrait nécessairement de pareilles puissances de i. Alors la série qui doit représenter la valeur de y, pourra ne plus avoir la même forme; mais comme $y = f(x, a)$, et qu'on suppose $a = h + i$ et $p = f(x, h)$, le premier terme sera toujours p, et le second pourra encore être supposé de la forme qi; car s'il était de la forme qi^n, n étant un exposant quelconque, il n'y aurait qu'à substituer $i^{\frac{1}{n}}$ à la place de i, et supposer que a devienne $h + i^{\frac{1}{n}}$, ce qui est indifférent, puisqu'on regarde i comme une constante arbitraire; mais les termes suivans pourront être de la forme $ri^m + si^n +$ etc., où m devra être > 1, $n > m$, etc. par l'hypothèse.

Substituant donc, dans $F(x, y)$, pour y, la série

$$p + qi + ri^m + si^n + \text{etc.},$$

et développant suivant les puissances ascendantes de i, on aura une série de cette forme

$$F(x, p) + Pi^{\mu} + Qi^{\nu} + \text{etc.}$$

μ étant différent de l'unité, $\nu > \mu$, etc., et P, Q étant des fonctions données de x. Donc l'équation $y' = F(x, y)$ deviendra, par ces substitutions,

$$iq' + i^m r' + i^n s' + \text{etc.} = Pi^{\mu} + Qi^{\nu} + \text{etc.},$$

laquelle devra se vérifier indépendamment de la valeur de i.

Donc si $\mu > 1$, on pourra faire $q' = 0$, $m = \mu$ et $r' = P$, ensuite $n = \nu$, $s' = Q$, etc. Ainsi on aura d'abord $q =$ à une constante, ou plus simplement $q = 1$; ensuite, comme P ne dépend que de q et de x, on trouvera la valeur de r en prenant la fonction primitive de P; et ainsi de suite.

59. Mais si $\mu < 1$, alors il sera impossible de satisfaire à l'équation, de manière que i demeure une constante arbitraire; et l'on devra en conclure que la valeur particulière p ne pouvant pas être complétée ainsi, ne saurait être contenue dans l'expression générale $f(x, a)$ qui représente la valeur complète de y.

Maintenant il est visible que quel que puisse être le premier terme Pi^{μ} du développement de $F(x, y)$ par la substitution de $p + qi + ri^m + \text{etc.}$ à la place de y, il ne peut venir que des termes $p + qi$, de sorte qu'il sera le même que si on substituait simplement $p + qi$ à la place de y. Donc le développement de $F(x, y)$ par la substitution de $p + o$ à la place de y, sera $F(x, p) + \frac{Po^{\mu}}{q^{\mu}} + \text{etc.}$; donc, puisque la série résultante de ce développement contient un terme affecté de o^{μ}, où μ est > 0 et < 1, il s'ensuit de la théorie donnée dans l'article 29, que la fonction prime $F'(y)$ devra devenir infinie, lorsque $y = p$.

De là on tire cette conclusion, que la valeur particulière p ne pourra pas être contenue dans l'expression complète de y, si cette valeur rend la fonction $F'(y)$ infinie, c'est-à-dire, la fonction $\frac{1}{F'(y)}$ nulle.

Réciproquement donc, l'équation $\frac{1}{F'(y)} = 0$ donnera toutes les valeurs de y, qui, pouvant satisfaire à l'équation $y' = F(x, y)$ comme valeurs particulières, ne seront pas renfermées dans la valeur complète. On pourra appeler ces valeurs, *valeurs singulières*, pour les distinguer des autres; et en général, on pourra appeler *équation primitive singulière*, toute équation en x et y qui satisfera à une équation du premier ordre entre x, y et y', ou à une équation d'un ordre supérieur, et qui ne sera pas comprise dans l'équation primitive complète, c'est-à-dire, qui ne sera pas un cas particulier de cette équation.

60. Nous venons de voir qu'il y a une espèce d'équations qui peuvent satisfaire à des équations d'un ordre supérieur, et qui ne satisfont pas aux équations d'où celles-ci peuvent être dérivées, parce qu'elles ne sont pas renfermées dans les équations complètes d'un ordre inférieur à celles-ci. Ces équations ne forment pas une exception à la théorie générale exposée plus haut (art. 46); mais elles résultent d'une considération particulière dans la manière dont les équations d'un ordre supérieur sont dérivées par l'élimination des constantes. En effet, on y a vu que les deux équations $F(x, y) = 0$ et $F(x, y)' = 0$ donnent, par l'élimination d'une constante a, une équation dérivée du premier ordre entre x, y et y', dont $F(x, y) = 0$ sera l'équation primitive.

Or, il est évident que le résultat de cette élimination serait le même, si la quantité a, au lieu d'être constante, était une fonction quelconque de x; mais dans ce cas, la fonction prime de $F(x, y)$ ne serait plus simplement $F(x, y)'$, elle contiendrait de plus une partie provenant de la variation de a; et si on désigne par $F'(a)$ la fonction prime de $F(x, y)$, prise relativement à la variable a, on aura $a'F'(a)$ pour la partie dont il s'agit, a' étant la fonction prime de a regardé comme fonction de x.

Ainsi, dans le cas où a serait fonction de x, l'équation prime de

$F(x, y) = o$ serait $F(x, y)' + a'F'(a) = o$; donc, pour qu'elle se réduise à $F(x, y)' = o$, comme dans le cas de a constante, il faudra que l'on ait $F'(a) = o$, équation qui servira à déterminer la valeur de a, et qui n'est autre chose, comme l'on voit, que l'équation prime de l'équation primitive, prise relativement à a. D'où il s'ensuit que si on substitue cette valeur de a dans l'équation primitive $F(x, y) = o$, on aura une équation en x et y, qui satisfera également à l'équation du premier ordre, et qui ne sera pas renfermée dans l'équation primitive où a est la constante arbitraire.

On pourra appliquer la même théorie aux équations des ordres supérieurs, et en déduire des conclusions semblables.

61. Pour voir maintenant si l'équation qui résulte de cette considération est la même que l'équation primitive singulière, déduite de l'analyse précédente; supposons, comme plus haut (art. 58), que l'équation du premier ordre soit réduite à la forme $y' = F(x, y)$, et que son équation primitive complète soit $y = f(x, a)$, a étant la constante arbitraire. Pour en déduire l'équation primitive où a est variable, on prendra l'équation prime relativement à a seul; et si on désigne par $\varphi(x, a)$ la fonction prime de $f(x, a)$, prise relativement à a, on aura $\varphi(x, a) = o$; d'où l'on tirera a, qu'on substituera dans $f(x, a)$, et l'on aura une valeur particulière de y, qui satisfera aussi à la proposée du premier ordre. Nous appellerons p cette valeur particulière, comme dans l'article cité.

Maintenant, puisque la valeur complète $f(x, a)$ de y doit satisfaire à l'équation $y' = F(x, y)$, quelle que soit la constante a, il s'ensuit qu'en faisant la substitution, l'équation résultante $f'(x, a) = F[x, f(x, a)]$ devra avoir lieu, quelle que soit la valeur de a. Par conséquent son équation prime, prise relativement à a, regardée comme seule variable, devra avoir lieu aussi, quelle que soit la valeur de a (art. 17).

Puisque $f'(x, a)$ est la fonction prime de $f(x, a)$, prise relativement à x, la fonction prime de celle-ci, prise relativement à a, sera donc la fonction seconde de $f(x, a)$, prise d'abord relativement à x, et ensuite relativement à a, laquelle est la même chose, comme nous le démontrerons plus bas, que la fonction seconde de $f(x, a)$, prise d'abord relativement à a, et ensuite relativement à x. Ainsi, ayant désigné par $\varphi(x, a)$ la fonction prime de $f(x, a)$ par rapport à a, on aura $\varphi'(x, a)$ pour la fonction prime de $f'(x, a)$, prise également par rapport à a, les traits appliqués aux caractéristiques f et φ ne se rapportant qu'à la variable x.

A l'égard de la fonction $F[x, f(x, a)]$, comme elle résulte de la substitution de $f(x, a)$ à la place de y dans $F(x, y)$, sa fonction prime relativement à a, sera exprimée par $F'(y) \times \varphi(x, a)$, (art. 16), puisque nous avons désigné par $F'(y)$ la fonction prime de $F(x, y)$ relativement à y; et par $\varphi(x, a)$ la fonction prime de $f(x, a)$ ou y, relativement à a.

Donc l'équation prime de l'équation $f'(x, a) = F(x, y)$, prise relativement à a, sera

$$\varphi'(x, a) = F'(y) \times \varphi(x, a);$$

d'où l'on tire

$$F'(y) = \frac{\varphi'(x, a)}{\varphi(x, a)}.$$

Or, nous venons de trouver que pour avoir la valeur particulière p, il faut substituer dans $f(x, a)$ la valeur de a, tirée de l'équation $\varphi(x, a) = 0$. Dénotons par X cette valeur de a, qui sera une fonction de x, la fonction $\varphi(x, a)$ aura cette forme

$$\varphi(x, a) = V(X - a)^m,$$

m étant > 0, et V étant une fonction de x, qui ne deviendra ni nulle ni infinie lorsque $a = X$; on tirera de là

$$\varphi'(x, a) = V'(X - a)^m + mVX'(X - a)^{m-1}.$$

Donc on aura

$$F'(y) = \frac{V'}{V} + \frac{mX'}{X - a}.$$

Mais y devient p lorsque $a = X$; donc $F'(y)$ deviendra infini lorsque

lorsque $y=p$, comme dans le cas de l'article 59. Ainsi les deux méthodes des articles 58 et 60 conduisent aux mêmes résultats et donnent les mêmes valeurs singulières ; mais la seconde a l'avantage d'être plus directe et de donner la vraie métaphysique de cette espèce de paradoxe.

62. Supposons, pour donner un exemple, que l'équation primitive soit

$$x^2-2ay-a^2-b^2=0,$$

en prenant les fonctions primes, on aura l'équation prime

$$x-ay'=0;$$

éliminant a par le moyen de l'équation primitive, on aura l'équation du premier ordre

$$x-[-y+\sqrt{(x^2+y^2-b^2)}]y'=0,$$

dont celle-là sera l'équation primitive complète, a étant la constante arbitraire.

Maintenant, si on prend la fonction prime de la même équation $x^2-2ay-a^2-b^2=0$, relativement à la quantité a regardée comme une fonction de x, on aura

$$-2(y+a)a'=0,$$

ce qui donne

$$y+a=0,\quad a=-y;$$

et substituant cette valeur dans la même équation primitive, on aura

$$x^2+y^2-b^2=0.$$

Cette équation satisfera par conséquent aussi à la même équation du premier ordre, ce qui est aisé à vérifier ; car elle donne

$$y^2=b^2-x^2 \quad \text{et} \quad yy'=-x,$$

valeurs qui étant substituées dans la quantité

$$x+yy'-y'\sqrt{(x^2+y^2-b^2)},$$

la rendent identiquement nulle. Ce sera donc l'équation primitive singulière.

En effet, suivant la théorie de l'art. 61, on aura dans le cas présent,

$$F(x,y)=\frac{x}{-y+\sqrt{(x^2+y^2+b^2)}} \quad \text{et} \quad p=\sqrt{(b^2-x^2)};$$

donc en prenant les fonctions primes relativement à y seul, on trouvera

$$F'(y)=\frac{x}{[-y+\sqrt{(x^2+y^2-b^2)}]\sqrt{(x^2+y^2-b^2)}},$$

quantité qui devient infinie, comme l'on voit, par la supposition de $y=p=\sqrt{(b^2-x^2)}$.

63. Supposons maintenant que l'on ait l'équation du premier ordre $y'=Fy$, et que la fonction Fy de y soit telle qu'elle devienne nulle lorsque y est égal à une constante donnée b; il est visible que cette valeur de y satisfera à l'équation; car $y=b$ donne aussi $y'=0$. On demande si cette valeur de y est une valeur particulière comprise dans la valeur complète, ou bien si ce n'est qu'une valeur singulière. On prendra la fonction prime de Fy, et si $F'y$ devient infini lorsque $y=b$, la valeur b ne sera qu'une valeur singulière, sinon elle sera une valeur particulière.

Soit $Fy=K(y-b)^m$, m étant >0 et K une constante, on aura

$$F'y=mK(y-b)^{m-1},$$

quantité qui devient infinie lorsque $m<1$; donc la valeur $y=b$ sera une valeur singulière, si $m>0$ et <1, et une simple valeur particulière, si $m=$ ou >1. En effet, l'équation $y'=K(y-b)^m$ étant divisée par $(y-b)^m$ et mise sous la forme

$$(y-b)^{-m}y'-K=0,$$

a pour équation primitive

$$\frac{(y-b)^{1-m}}{1-m}-Kx=a,$$

a étant la constante arbitraire; d'où l'on tire

$$y = b + [(m-1)(a + Kx)]^{\frac{1}{1-m}}.$$

Donc pour que l'on ait $y = b$, il faudra que la quantité $(a+Kx)^{\frac{1}{1-m}}$ devienne nulle. Or, si $m > 0$ et < 1, l'exposant $\frac{1}{1-m}$ sera positif, par conséquent il sera impossible de donner à a une valeur qui fasse évanouir la quantité dont il s'agit. Mais si $m > 1$, alors l'exposant $\frac{1}{1-m}$ devenant négatif, la quantité $(a + Kx)^{\frac{1}{1-m}}$ deviendra nulle lorsque a sera infinie; car faisant $a = \frac{1}{c}$, cette quantité deviendra

$$\frac{c^{\frac{1}{m-1}}}{(1 + Kcx)^{\frac{1}{m-1}}},$$

laquelle devient zéro lorsque $c = 0$.

La même chose a lieu lorsque $m = 1$, alors l'équation primitive contient des logarithmes ou des exponentielles, car on a

$$y' = K(y - b),$$

et divisant par $y - b$,

$$\frac{y'}{y-b} - K = 0,$$

dont l'équation primitive est

$$l(y-b) - Kx = la, \quad \text{d'où l'on tire} \quad y = b + ae^{Kx},$$

e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité, et a la constante arbitraire. Ici il est évident qu'en faisant a égal à zéro, on aura $y = b$.

Supposons encore $Fy = \sqrt{Y}$, Y étant une fonction de y qui devienne nulle lorsque $y = b$, on aura

$$F'y = \frac{Y'}{2\sqrt{Y}};$$

donc, puisque Y devient nul lorsque $y=b$, si Y' ne devient pas nul en même temps, $F'y$ deviendra alors infini, et la valeur $y=b$ ne sera qu'une valeur singulière. Donc, pour que cette valeur soit une simple valeur particulière, il faudra que Y' devienne nul en même temps que Y, en faisant $Y=b$.

Cette théorie des équations primitives singulières, est présentée d'une manière plus générale et avec de nouveaux détails, dans les leçons XIV, XV, XVI et XVII sur le *Calcul des Fonctions*, auxquelles nous renvoyons les lecteurs qui desireraient approfondir davantage ce point d'analyse.

CHAPITRE X.

De l'emploi des fonctions dérivées dans l'analyse, et de la détermination des constantes arbitraires. Application à la sommation des suites et à la résolution des équations du troisième degré.

64. PAR les principes que nous venons d'établir à l'égard des constantes arbitraires, on voit que ces constantes forment la liaison entre les équations primitives et les équations dérivées : celles-ci sont par elles-mêmes plus générales que les équations d'où elles dérivent, à raison des constantes qui ont disparu ou qui peuvent avoir disparu ; elles équivalent proprement à toutes les équations primitives qui ne différeraient entre elles que par les valeurs de ces constantes.

On peut donc toujours passer d'une équation regardée comme primitive, à une de ses dérivées d'un ordre quelconque, et réciproquement revenir de celle-ci à celle-là, pourvu que cette dernière opération introduise toujours des constantes arbitraires, et qu'on ait soin de déterminer ces constantes d'une manière conforme à l'équation primitive, comme nous en avons déjà donné des exemples (art. 49 et suiv.). Avec cette attention, on pourra employer dans l'analyse les opérations relatives aux fonctions, comme on y emploie les opérations ordinaires d'algèbre.

Ainsi, ayant une équation en x et y, on pourra immédiatement en déduire des équations dérivées d'un ordre quelconque ; mais pour revenir de celles-ci à une équation en x et y, il faudra tenir compte des constantes arbitraires, et les déterminer de manière que les valeurs de y et de ses dérivées y', y'', etc. soient les mêmes pour une valeur donnée de x, comme $x=0$, que celles qui résultent de l'équation donnée.

Si l'équation proposée n'était que du premier ordre en x, y, y', alors cette équation ne pouvant fournir que les valeurs de y', y'', etc. en x et y, ces valeurs, pour $x=0$, contiendraient la valeur indéterminée de y; par conséquent les constantes arbitraires dépendraient alors de cette valeur, qui serait elle-même une constante arbitraire; de sorte que dans ce cas, toutes les constantes arbitraires se réduiraient à une seule. Elles se réduiraient à deux, par la même raison, si l'équation proposée était du second ordre en x, y, y' et y''; et ainsi de suite.

65. Pour faire mieux sentir l'esprit et l'usage de ces opérations, nous allons les appliquer encore à quelques exemples qui serviront en même temps d'exercice de calcul.

Soit proposée la série

$$1+\frac{m}{n}x+\frac{m(m+1)}{n(n+1)}x^2+\frac{m(m+1)(m+2)}{n(n+1)(n+2)}x^3+\text{etc.},$$

dont on demande la somme.

Supposons-la égale à y, ensorte qu'on ait une équation en x et y; je multiplie cette équation par x^{n-1}, ce qui donne

$$yx^{n-1}=x^{n-1}+\frac{m}{n}x^n+\frac{m(m+1)}{n(n+1)}x^{n+1}+\text{etc.}$$

Je prends les fonctions primes de tous les termes, j'ai

$$y'x^{n-1}+(n-1)yx^{n-2}=(n-1)x^{n-2}+mx^{n-1}+\frac{m(m+1)}{n}x^n$$
$$+\frac{m(m+1)(m+2)}{n(n+1)}x^{n+1}+\text{etc.},$$

où l'on voit qu'il a disparu un facteur du dénominateur de chaque terme.

Je multiplie maintenant l'équation précédente par x^{m-n}, j'ai celle-ci,

$$y'x^{m-1}+(n-1)yx^{m-2}=(n-1)x^{m-2}+mx^{m-1}+\frac{m(m+1)}{n}x^{m}+\frac{m(m+1)(m+2)}{n(n+1)}x^{m+1}+\text{etc.}$$

Je fais le premier membre $=p'$, p' étant la fonction prime de p, et je prends l'équation primitive, j'ai

$$p=\frac{n-1}{m-1}x^{m-1}+x^{m}+\frac{m}{n}x^{m+1}+\frac{m(m+1)}{n(n+1)}x^{m+2}+\text{etc.}$$

Je n'ajoute point de constante arbitraire ici, parce qu'elle peut être censée renfermée dans p.

Maintenant, en comparant cette nouvelle série avec la proposée qu'on a supposée égale à y, il est visible qu'on aura l'équation

$$p=\frac{n-1}{m-1}x^{m-1}+x^{m}y;$$

prenant les fonctions primes, et substituant pour p' sa valeur $y'x^{m-1}+(n-1)yx^{m-2}$, on aura cette équation du premier ordre linéaire en y,

$$(n-1)x^{m-2}+y'x^{m}+mx^{m-1}y=y'x^{m-1}+(n-1)yx^{m-2},$$

laquelle se réduit à cette forme,

$$y'+\frac{n-1-mx}{x(1-x)}y=\frac{n-1}{x(1-x)}.$$

Cette équation étant susceptible de la méthode de l'art. 55, on pourra donc trouver la valeur y en x, qui sera par conséquent la somme de la série proposée. Mais cette valeur devra contenir une constante arbitraire, qu'on déterminera de manière que y soit $=1$ lorsque $x=0$, comme il résulte de la série donnée.

Si la série n'avait contenu que des facteurs simples, comme

$$1+\frac{m}{n}x+\frac{m+1}{n+1}x^{2}+\frac{m+2}{n+2}x^{3}+\text{etc.},$$

on eût trouvé, par les mêmes opérations,

$$p = \frac{n-1}{m-1} x^{m-1} + x^m + x^{m+1} + x^{m+2} + \text{etc.}$$

Or, on sait que

$$1 + x + x^2 + \text{etc.} = \frac{1}{1-x};$$

donc on aurait, dans ce cas,

$$p = \frac{n-1}{m-1} x^{m-1} + \frac{x^m}{1-x};$$

et substituant la valeur de p', on aurait

$$y'x^{m-1} + (n-1)yx^{m-2} = (n-1)x^{m-2} + \frac{mx^{m-1}}{1-x} + \frac{x^m}{(1-x)^2},$$

savoir,

$$y' + \frac{(n-1)y}{x} = \frac{n-1}{x} + \frac{m}{1-x} + \frac{x}{(1-x)^2},$$

équation également linéaire du premier ordre.

Cette méthode s'applique à des séries plus compliquées, et peut conduire à des équations linéaires d'un ordre supérieur au premier. J'ai cru devoir au moins l'indiquer, étant presque la seule méthode générale pour la sommation des suites.

66. Soit maintenant proposée l'équation

$$y = Ax + Bx^2 + x^3,$$

dans laquelle on demande l'expression de x et y. Cette expression peut s'obtenir par la formule connue pour la résolution des équations du troisième degré. Voici comment on y peut parvenir par la théorie des fonctions.

En prenant les fonctions primes et secondes, on aura

$$y' = A + 2Bx + 3x^2, \quad y'' = 2B + 6x;$$

si

si donc je forme la quantité

$$y + (m + nx)y' + (p + qx + rx^2)y'',$$

où m, n, p, q, r sont des coefficiens arbitraires, j'aurai un quatrinome qui contiendra les puissances x, x^2 et x^3, et je pourrai faire évanouir les termes multipliés par chacune de ces puissances; j'aurai ainsi une équation du second ordre de la forme

$$y + (m + nx)y' + (p + qx + rx^2)y'' = C,$$

où C sera une quantité constante; et cette équation renfermera encore deux coefficiens indéterminés.

Je pourrai donc encore faire ensorte qu'étant multipliée par $2y'$, elle ait une équation primitive; car pour cela, il suffira de faire $q = 2m$, $r = n$, et l'équation primitive sera

$$y^2 + (p + 2mx + nx^2)y'^2 = 2Cy + a,$$

a étant une constante arbitraire qu'on déterminera, comme nous l'avons dit, en supposant $x = 0$, et mettant pour y et y', leurs valeurs tirées de l'équation proposée. Or elle donne dans ce cas, $y = 0$, $y' = A$; donc, faisant ces substitutions dans l'équation précédente, elle donnera $pA^2 = a$.

Ainsi on aura cette équation en y, du premier ordre,

$$y^2 + (p + 2mx + nx^2)y'^2 = 2Cy + pA^2,$$

où x ne monte qu'au second degré; circonstance sans laquelle on n'aurait rien gagné pour la détermination de x en y.

Mais avant d'aller plus loin, il faut satisfaire aux conditions nécessaires pour que la quantité $y + (m + nx)y' + (p + 2mx + nx^2)y''$, après la substitution des valeurs de y, y', y'', devienne égale à une constante C. Cette substitution donne la quantité

$$\begin{aligned} &Ax + Bx^2 + x^3 + (m + nx)(A + 2Bx + 3x^2) \\ &+ (p + 2mx + nx^2)(2B + 6x); \end{aligned}$$

développant, ordonnant les termes suivant les puissances de x, et égalant à C le terme sans x, et les autres à zéro, on aura

$$mA + 2pB = C, \quad (1+n)A + 6mB + 6p = 0,$$
$$(1+4n)B + 15m = 0, \quad 1 + 9n = 0,$$

d'où l'on tire

$$n = -\frac{1}{9}, \quad m = -\frac{B}{27}, \quad p = \frac{B^2 - 4A}{27} \quad \text{et} \quad C = \frac{2B^3 - 9AB}{27}.$$

Retenons, pour plus de simplicité, les quantités p et C, et substituons celles de m et n dans l'équation ci-dessus, elle deviendra, en tirant la valeur de y',

$$y' = \frac{3\sqrt{(pA^2 + 2Cy - y^2)}}{\sqrt{\left(9p - \frac{2B}{3}x - x^2\right)}}.$$

Il faut maintenant en déduire l'équation primitive en x et y; mais pour éviter les imaginaires, on doit distinguer deux cas, l'un où les radicaux sont réels, l'autre où ils sont imaginaires; car puisque toute valeur réelle de x donne pour y et y' des valeurs réelles, il est visible que les deux radicaux de l'équation précédente seront réels ou imaginaires ensemble.

Supposons donc en premier lieu que $\sqrt{(pA^2 + 2Cy - y^2)}$ soit une quantité réelle, il faudra donc que $pA^2 + C^2 > (y - C)^2$; par conséquent on pourra supposer

$$y - C = \sqrt{(pA^2 + C^2)} \sin z,$$

ce qui donnera

$$\sqrt{(pA^2 + 2Cy - y^2)} = \sqrt{(pA^2 + C^2)} \cos z,$$

et prenant les fonctions primes,

$$y' = \sqrt{(pA^2 + C^2)}\, z' \cos z$$

substituant ces valeurs dans l'équation précédente, elle deviendra, en divisant par 3,

$$\left(9p - \frac{2B}{3}x - x^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{z'}{3},$$

dont l'équation primitive peut être mise sous la forme

$$x+\frac{B}{3}=\sqrt{\left(9p+\frac{B^2}{9}\right)}\sin\left(\frac{z}{3}+\alpha\right),$$

α étant une constante arbitraire qu'il faudra déterminer, ensorte que $x=0$ donne $y=0$, conformément à la proposée. Soit a la valeur de z lorsque $y=0$, on aura donc les deux équations

$$-C=\sqrt{(pA^2+C^2)}\sin a,$$

et $$\frac{B}{3}=\sqrt{\left(9p+\frac{B^2}{9}\right)}\sin\left(\frac{a}{3}+\alpha\right);$$

par lesquelles on déterminera d'abord a, ensuite α. Après quoi on déterminera z par l'équation

$$\sin z=\frac{y-C}{\sqrt{(pA^2+C^2)}};$$

et l'on aura

$$x=-\frac{B}{3}+\sqrt{\left(9p+\frac{B^2}{9}\right)}\sin\left(\frac{z}{3}+\alpha\right).$$

Et comme au même sinus de z répond aussi l'angle z, augmenté d'une ou de deux circonférences, on aura les trois valeurs de x, en prenant pour z ces trois valeurs z, $z+c$, $z+2c$, c dénotant la circonférence du cercle.

C'est le cas qu'on appelle *irréductible*, et où les trois racines sont réelles.

Supposons en second lieu que le radical $\sqrt{(pA^2+2Cy-y^2)}$ soit imaginaire, il n'y aura qu'à multiplier le numérateur et le dénominateur de l'expression de y' par $\sqrt{-1}$, et l'on aura

$$y'=\frac{3\sqrt{(-pA^2-2Cy+y^2)}}{\sqrt{\left(-9p+\frac{2B}{3}x+x^2\right)}};$$

quantité toute réelle.

Ici j'observe que si on fait

$$X=\frac{B}{3}+x+\sqrt{\left(-9p+\frac{2B}{3}x+x^2\right)},$$

$$Y=-C+y+\sqrt{(-pA^2-2Cy+y^2)},$$

et qu'on prenne les fonctions primes, en regardant toujours y comme fonction de x, on aura

$$X' = X\left(-9p + \frac{2B}{3}x + x^2\right)^{-\frac{1}{2}},$$

$$Y' = y'Y(-pA^2 - 2Cy + y^2)^{-\frac{1}{2}};$$

de sorte qu'on pourra réduire l'équation précédente à cette forme

$$\frac{X'}{X} = \frac{Y'}{3Y};$$

dont les deux membres ont pour fonctions primitives lX et $\frac{1}{3}lY$ On aura donc cette équation primitive

$$lX = \tfrac{1}{3}lY + lb,$$

b étant une constante arbitraire; et passant des logarithmes aux nombres, on aura

$$X = b\sqrt[3]{Y}.$$

Pour déterminer b, on fera de nouveau $x = 0$ et $y = 0$. Or, X devient $\frac{B}{3} + \sqrt{-9p}$, et Y devient $-C + \sqrt{-pA^2}$; donc on aura

$$b = \frac{\frac{1}{3}B + \sqrt{-9p}}{\sqrt[3]{-C + \sqrt{-pA^2}}}.$$

Maintenant, ayant la valeur de X en x, il est aisé d'en tirer x; car en en quarrant l'équation

$$\sqrt{\left(-9p + \frac{2B}{3}x + x^2\right)} = X - \frac{B}{3} - x,$$

on en déduira sur-le-champ

$$x = \frac{(X - \frac{1}{3}B)^2 + 9p}{2X},$$

par conséquent, en mettant pour X la valeur trouvée en y, savoir $b\sqrt[3]{(Y)}$, on aura

$$x = \frac{(b\sqrt[3]{Y} - \frac{1}{3}B)^2 + 9p}{2b\sqrt[3]{Y}}.$$

Cette expression ne peut donner, comme l'on voit, qu'une seule valeur réelle de x; c'est le cas où l'équation a deux racines imaginaires.

Si on fait $B = 0$, les formules qu'on vient de trouver dans les deux cas, se simplifient beaucoup, et se réduisent aux formules connues pour la résolution des équations du troisième degré, privées du second terme; mais nous ne nous arrêterons pas davantage sur ce problème, qui appartient proprement à l'algèbre, et que nous n'avons traité ici qu'en passant, et pour montrer, par différentes applications, la manière d'employer l'algorithme des fonctions.

CHAPITRE XI,

Où l'on donne l'équation primitive d'une équation du premier ordre, dans laquelle les variables sont séparées, mais où l'on ne peut point obtenir directement les fonctions primitives de chacun des deux membres. Propriétés remarquables de ces fonctions primitives.

67. PRENONS pour dernier exemple l'équation du premier ordre

$$y' = \frac{\sqrt{(A + By + Cy^2 + Dy^3 + Ey^4)}}{\sqrt{(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4)}},$$

en la divisant par le radical en y, on aurait une équation où les variables x et y seraient séparées; mais il serait impossible d'obtenir ainsi l'équation primitive, parce que les deux membres ne sont point réductibles en particulier à des fonctions primes.

Voici néanmoins comment on y peut parvenir par le moyen des fonctions dérivées.

Je suppose d'abord que x et y soient fonctions d'une autre variable t, il faudra pour cela substituer $\frac{y'}{x'}$ à la place de y' (art. 50); x' et y' seront alors les fonctions primes de x et y, regardées comme fonctions de t. En supposant que x soit une fonction quelconque de t, l'équation donnera pour y une fonction déterminée de t; ainsi je puis supposer que x soit une telle fonction de t, que l'on ait l'équation

$$x' = \sqrt{(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4)},$$

l'équation précédente, où l'on a mis $\frac{y'}{x'}$ pour y', donnera pareillement

$$y' = \sqrt{(A + By + Cy^2 + Dy^3 + Ey^4)}.$$

Qu'on fasse disparaître les radicaux dans ces deux équations, qu'ensuite on prenne les fonctions primes, on aura, après avoir divisé l'une par x', l'autre par y',

$$2x'' = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3,$$
$$2y'' = B + 2Cy + 3Dy^2 + 4Ey^3.$$

Faisons $x + y = p$, $x - y = q$, ce qui donne

$$x = \frac{p+q}{2}, \quad y = \frac{p-q}{2};$$

les deux équations précédentes ajoutées et retranchées, donneront

$$p'' = B + Cp + \frac{3D}{4}(p^2 + q^2) + \frac{E}{2}(p^3 + 3pq^2),$$
$$q'' = Cq + \frac{3D}{2}pq + \frac{E}{2}(3p^2q + q^3).$$

De plus, comme $p'q' = x'^2 - y'^2$, si on substitue les valeurs de x' et de y', tirées des premières équations, on aura

$$p'q' = Bq + Cpq + \frac{D}{4}(3p^2q + q^3) + \frac{E}{2}(p^3q + pq^3).$$

Maintenant je fais cette combinaison:

$$qp'' - p'q' = \frac{D}{2}q^3 + Epq^3,$$

multipliant les deux membres par $\frac{2p'}{q^3}$, ils deviennent les fonctions primes de $\frac{p'^2}{q^2}$ et de $Dp + Ep^2$; de sorte que j'aurai d'abord cette équation primitive du premier ordre

$$\frac{p'^2}{q^2} = Dp + Ep^2 + a,$$

où a est une constante arbitraire.

Pour la déterminer, soit m la valeur de y lorsque $x = 0$, on aura dans ce cas, par les équations ci-dessus,

$$x'=\sqrt{A},\quad y'=\sqrt{(A+Bm+Cm^2+Dm^3+Em^4)},$$

je fais cette dernière quantité $=n$, pour abréger.

Ainsi, puisque $p=x+y$, $q=x-y$, $p'=x'+y'$, $q'=x'-y'$, on aura, lorsque $x=0$,

$$p=m,\quad q=-m,\quad p'=\sqrt{A}+n,\quad q'=\sqrt{A}-n.$$

Faisant ces substitutions dans l'équation qu'on vient de trouver, on aura

$$a=\frac{(\sqrt{A}+n)^2}{m^2}-Dm-Em^2,$$

où l'on voit que puisque m est une quantité indéterminée, la constante a demeure aussi indéterminée; mais les déterminations précédentes seraient utiles, si par d'autres combinaisons on trouvait de nouvelles équations primitives avec des constantes arbitraires.

Nous avons donc l'équation

$$p'=q\sqrt{(a+Dp+Ep^2)},$$

qui, quoique du premier ordre, peut néanmoins donner tout de suite l'équation primitive en x et y de la proposée, puisque la valeur de p', qui est $x'+y'$, est déjà connue en x et y. En effet, substituant les valeurs de p, q et p', on aura

$$\sqrt{(A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4)}+\sqrt{(A+By+Cy^2+Dy^3+Ey^4)} \\ =(x-y)\sqrt{[a+D(x+y)+E(x+y)^2]},$$

où a est la constante arbitraire.

Cette équation en x et y est, comme l'on voit, sous une forme assez simple, et la méthode par laquelle nous y sommes parvenus est fort remarquable; mais cette équation n'est pas la seule qu'on puisse obtenir par les formules que nous venons de trouver.

En effet, si on substitue la valeur précédente de p' dans l'équation

tion trouvée plus haut, qui donne la valeur de $p'q'$, on en tirera

$$q'=\frac{B+Cp+\frac{1}{3}D(3p^2+q^2)+\frac{1}{2}E(p^3+pq^2)}{\sqrt{(a+Dp+Ep^2)}}.$$

Ici remettant pour p et q leurs valeurs $x+y$ et $x-y$, et pour q' sa valeur $x'-y'=\sqrt{(A+Bx+Cx^2+Dx^3+Dx^4)}-\sqrt{(A+By+Cy^2+Dy+Ey^4)}$, on aura une nouvelle équation en x et y avec la constante arbitraire a, qui sera également l'équation primitive de la proposée, mais qui ne sera qu'une transformée de l'équation précédente.

68. L'équation du premier ordre dont nous venons de trouver l'équation primitive, peut toujours, par des transformations convenables, se réduire à la forme

$$z'=\frac{\sqrt{(A+B\cos z)}}{\sqrt{(A+B\cos u)}},$$

z étant ici une fonction de u. Comme cette équation, traitée directement de la même manière, est susceptible d'une analyse beaucoup plus simple et plus élégante, j'ai cru qu'on ne serait pas fâché de la trouver ici.

On regardera u et z comme fonction d'une autre variable t; et après avoir substitué en conséquence, $\frac{z'}{u'}$ à la place de z' (art. 50), on fera ces deux équations séparées,

$$u'=\sqrt{(A+B\cos u)},\quad z'=\sqrt{(A+B\cos z)};$$

après les avoir carrées, on en prendra les fonctions primes, on aura, en divisant l'une par u' et l'autre par z', ces deux-ci du second ordre,

$$2u''=-B\sin u,\quad 2z''=-B\sin z.$$

Soit maintenant $z+u=2p$, $z-u=2q$, les deux équations précédentes, ajoutées et retranchées, deviendront par les théorèmes connus,

$$2p''=-B\sin p\cos q,\quad 2q''=-B\cos p\sin q.$$

Il est d'abord visible que si on ajoute ces deux équations après avoir multiplié la première par q', et la seconde par p', le premier membre deviendra la fonction prime de $2p'q'$, et le second la fonction prime de $-\text{B}\sin p\sin q$; de sorte qu'on aura d'abord cette équation primitive du premier ordre,

$$2p'q' = -\text{B}\sin p\sin q + a,$$

a étant la constante arbitraire.

Pour la déterminer, supposons que $u=0$ donne $z=m$, on aura donc dans ce cas,

$$u'=\sqrt{(\text{A}+\text{B})},\quad z'=\sqrt{(\text{A}+\text{B}\cos m)},\quad p=q=\frac{m}{2},$$

$$p'=\frac{z'+u'}{2},\quad q'=\frac{z'-u'}{2};$$

donc

$$2p'q'=\frac{z'^2-u'^2}{2}=\frac{\text{B}(\cos m-1)}{2};$$

$$\sin p\sin q=\left(\sin\frac{m}{2}\right)^2=\frac{1-\cos m}{2};$$

de sorte que l'on aura

$$a=2p'q'+\text{B}\sin p\sin q=0.$$

On aura donc simplement l'équation

$$2p'q'=-\text{B}\sin p\sin q;$$

d'où l'on peut conclure que cette équation primitive ne renfermant point de constante arbitraire, doit être comprise dans les équations du premier ordre en z et u, d'où nous sommes partis. En effet, ces équations donnent, en substituant les valeurs de p et q,

$$2p'q'=\frac{z'^2-u'^2}{2}=\frac{\text{B}}{2}(\cos z-\cos u)=-\text{B}\sin p\sin q.$$

Divisons maintenant par cette équation du premier ordre, les deux équations ci-dessus du second en p et q, on aura ces deux-ci,

$$\frac{p''}{p'q'} = \frac{\cos q}{\sin q}, \quad \frac{q''}{p'q'} = \frac{\cos p}{\sin p},$$

dont la première étant multipliée par q', et la seconde par p', donneront ces équations primitives,

$$\mathrm{l}p' = \mathrm{l}\sin q + \mathrm{l}a, \quad \mathrm{l}q' = \mathrm{l}\sin p + \mathrm{l}b,$$

ou bien, en passant des logarithmes aux nombres,

$$p' = a\sin q, \quad q' = b\sin p,$$

a et b étant des constantes arbitraires, qu'on déterminera par les mêmes suppositions que ci-dessus; d'où l'on aura

$$a = \frac{\sqrt{(\mathrm{A}+\mathrm{B}\cos m)} + \sqrt{(\mathrm{A}+\mathrm{B})}}{2\sin\frac{m}{2}};$$

$$b = \frac{\sqrt{(\mathrm{A}+\mathrm{B}\cos m)} - \sqrt{(\mathrm{A}+\mathrm{B})}}{2\sin\frac{m}{2}}.$$

Les deux équations qu'on vient de trouver, pourraient donner chacune une équation primitive en u et z par la substitution des valeurs de p, q, p', q'; on aurait ainsi,

$$\sqrt{(\mathrm{A}+\mathrm{B}\cos z)} + \sqrt{(\mathrm{A}+\mathrm{B}\cos u)} = 2a\sin\frac{z-u}{2},$$

$$\sqrt{(\mathrm{A}+\mathrm{B}\cos z)} - \sqrt{(\mathrm{A}+\mathrm{B}\cos u)} = 2b\sin\frac{z+u}{2}.$$

Comme les valeurs de a et b renferment l'indéterminée m, chacune de ces valeurs pourra être regardée aussi comme indéterminée en particulier; ainsi dans chacune de ces équations à part, on pourra regarder a ou b comme constante arbitraire; mais si on voulait faire une combinaison quelconque de ces équations, il faudrait employer les valeurs de a et b trouvées ci-dessus, et alors la quantité m serait la seule constante arbitraire.

Ces dernières équations étant compliquées de radicaux, il sera à propos de chercher encore une autre équation primitive d'après les mêmes équations du premier ordre

$$p' = a \sin q, \quad q' = b \sin p;$$

or, en divisant l'une par l'autre, on a

$$\frac{p'}{q'} = \frac{a \sin q}{b \sin p};$$

et multipliant en croix,

$$bp' \sin p = aq' \sin q,$$

d'où l'on tire tout de suite l'équation primitive

$$b \cos p = a \cos q + c,$$

c étant une nouvelle constante arbitraire qu'il faudra déterminer comme ci-dessus. Or, en faisant $u = 0$ et $z = m$, on a

$$p = q = \frac{m}{2};$$

donc l'équation précédente donnera

$$c = (b - a) \cos \frac{m}{2} = -\frac{\sqrt{(A+B)} \cos \frac{m}{2}}{\sin \frac{m}{2}}.$$

Substituant les valeurs de a, b, c, ainsi que celles de $p = \frac{z+u}{2}$ et $q = \frac{z-u}{2}$ dans la même équation, et faisant les réductions des sinus et cosinus, elle prendra cette forme très-simple,

$$\cos \frac{z}{2} \times \cos \frac{u}{2} + \sin \frac{z}{2} \times \sin \frac{u}{2} \times \frac{\sqrt{(A + B \cos m)}}{\sqrt{(A+B)}} = \cos \frac{m}{2};$$

c'est l'équation primitive de la proposée du premier ordre en u, z et z', et l'angle m en est la constante arbitraire.

69. On peut regarder les angles $\frac{z}{2}$, $\frac{u}{2}$ et $\frac{m}{2}$ comme les trois côtés d'un triangle sphérique; il est visible qu'alors, dans l'équation précédente, la quantité $\frac{\sqrt{(A + B \cos m)}}{\sqrt{(A+B)}}$ sera le cosinus de l'angle com-

pris entre les côtés $\frac{z}{2}$ et $\frac{u}{2}$, et par conséquent opposé au côté $\frac{m}{2}$, par les formules connues de la trigonométrie sphérique; c'est la valeur de z' lorsque $u=0$ et $z=m$. Ainsi cet angle sera constant en même temps que le côté $\frac{m}{2}$, tandis que les deux autres varient.

Soit M cet angle constant, on aura donc

$$\frac{\sqrt{(A+B\cos m)}}{\sqrt{(A+B)}}=\cos M,$$

d'où l'on tire

$$\frac{A}{B}=\frac{\cos M^2-\cos m}{\sin M^2}=2\left(\frac{\sin\frac{m}{2}}{\sin M}\right)^2-1.$$

Si on fait cette substitution dans l'équation proposée en u, z et z', et qu'on suppose, pour abréger, $\frac{\sin M}{\sin\frac{m}{2}}=\mu$, elle se réduira à cette forme

$$z'=\frac{\sqrt{1-\mu^2\left(\sin\frac{z}{2}\right)^2}}{\sqrt{1-\mu^2\left(\sin\frac{u}{2}\right)^2}},$$

dont l'équation primitive sera la relation entre les côtés $\frac{z}{2}$, $\frac{u}{2}$ et $\frac{m}{2}$ d'un triangle sphérique, dans lequel μ sera le rapport des sinus des angles aux sinus des côtés opposés, rapport qu'on sait être le même pour tous les angles et les côtés opposés; de sorte que ce rapport seul étant donné, il restera l'angle ou le côté pour arbitraire.

La considération du triangle sphérique peut servir à faire voir plus facilement comment l'équation entre ses trois côtés satisfait à l'équation précédente du premier ordre. Cette équation étant

$$\cos\frac{z}{2}\cos\frac{u}{2}+\cos M\sin\frac{z}{2}\sin\frac{u}{2}=\cos\frac{m}{2},$$

si on prend les fonctions primes, en regardant z comme fonction de u, et m, M comme constantes, on aura

$$\left(\cos M \cos\frac{z}{2}\sin\frac{u}{2} - \sin\frac{z}{2}\cos\frac{u}{2}\right)z'$$

$$+\cos M \sin\frac{z}{2}\cos\frac{u}{2} - \cos\frac{z}{2}\sin\frac{u}{2} = 0;$$

substituons à la place de cos M, sa valeur tirée de la même équation, il viendra celle-ci,

$$\frac{\cos\frac{z}{2}\cos\frac{m}{2} - \cos\frac{u}{2}}{\sin\frac{z}{2}}\,z' + \frac{\cos\frac{u}{2}\cos\frac{m}{2} - \cos\frac{z}{2}}{\sin\frac{u}{2}} = 0.$$

Maintenant, si dans le même triangle sphérique, dont $\frac{u}{2}$, $\frac{z}{2}$; $\frac{m}{2}$ sont les trois côtés, et M l'angle opposé au côté $\frac{m}{2}$, on désigne par V et Z les angles opposés aux côtés $\frac{u}{2}$ et $\frac{z}{2}$, on aura également

$$\cos\frac{u}{2} = \cos\frac{z}{2}\cos\frac{m}{2} + \cos V \sin\frac{z}{2}\sin\frac{m}{2},$$

et

$$\cos\frac{z}{2} = \cos\frac{u}{2}\cos\frac{m}{2} - \cos Z \sin\frac{u}{2}\sin\frac{m}{2};$$

je donne à cos Z le signe $-$, parce que je suppose l'angle Z obtus. Donc, faisant ces substitutions, et divisant toute l'équation par $\sin\frac{m}{2}$, elle deviendra

$$z'\cos V - \cos Z = 0, \quad \text{d'où} \quad z' = \frac{\cos Z}{\cos V}.$$

Mais par la propriété générale des triangles sphériques, on a

$$\frac{\sin V}{\sin\frac{u}{2}} = \frac{\sin Z}{\sin\frac{z}{2}} = \frac{\sin M}{\sin\frac{m}{2}} = \mu;$$

donc

$$\sin V = \mu\sin\frac{u}{2}, \quad \sin Z = \mu\sin\frac{z}{2},$$

et de là,

$$\cos V = \sqrt{1-\mu^2\left(\sin\frac{u}{2}\right)^2}, \quad \cos Z = \sqrt{1-\mu^2\left(\sin\frac{z}{2}\right)^2};$$

substituant ces valeurs, on aura la même équation du premier ordre en u et z.

Si l'angle Z que nous avons supposé obtus, était aigu, ainsi que l'angle V, alors au lieu de l'équation $z' = \frac{\cos Z}{\cos V}$, on aurait celle-ci $z' + \frac{\cos Z}{\cos V} = 0$, qui ne diffère que par le signe de z', et dont l'équation primitive sera la même.

70. Voici encore une considération essentielle sur ces sortes d'équations : l'équation de l'art. 68 étant mise sous cette forme

$$\frac{z'}{\sqrt{(A + B\cos z)}} = \frac{1}{\sqrt{(A + B\cos u)}},$$

supposons que $\text{f}u$ soit la fonction primitive de $\frac{1}{\sqrt{(A + B\cos u)}}$, $\text{f}z$ sera pareillement la fonction primitive de $\frac{z'}{\sqrt{(A + B\cos z)}}$, z étant regardé comme une fonction de u dont z' est la fonction prime. Ainsi, en repassant aux fonctions primitives, on aura sur-le-champ cette équation primitive

$$\text{f}z = \text{f}u + k,$$

k étant la constante arbitraire.

Cette équation devra donc coïncider avec l'équation primitive que nous avons trouvée dans l'article 68, et où la constante arbitraire est m; par conséquent sa constante arbitraire ne pourra être qu'une fonction de la constante arbitraire m. Soit donc $k = \text{F}m$, on aura

$$\text{f}z = \text{f}u + \text{F}m;$$

mais m est la valeur de z lorsque $u = 0$, supposant donc, pour plus de simplicité, que la fonction $\text{f}u$ soit prise de manière qu'elle soit nulle lorsque $u = 0$, il faudra qu'en faisant $u = 0$, on ait aussi $z = m$, par conséquent on aura $\text{f}m = \text{F}m$; donc l'équation primitive qu'on vient de trouver deviendra

$$\text{f}z = \text{f}u + \text{f}m,$$

à laquelle satisfera cette relation algébrique,

$$\cos\frac{z}{2}\cos\frac{u}{2}+\sin\frac{z}{2}\sin\frac{u}{2}\sqrt{\left(\frac{A+B\cos m}{A+B}\right)}=\cos\frac{m}{2}.$$

Ainsi, quoiqu'on ne puisse pas trouver la forme algébrique des fonctions fu, fz, fm, on peut néanmoins trouver une relation algébrique entre trois quantités z, u, m, telle que l'on ait

$$fz = fu + fm.$$

Donc aussi, si dans l'équation précédente on change z en y, et u en z, on aura

$$\cos\frac{y}{2}\cos\frac{z}{2}+\sin\frac{y}{2}\sin\frac{z}{2}\sqrt{\left(\frac{A+B\cos m}{A+B}\right)}=\cos\frac{m}{2},$$

$$\text{et}\quad fy = fz + fm.$$

En changeant encore y en x, z en y, ce qui donnera

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}+\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\sqrt{\left(\frac{A+B\cos m}{A+B}\right)}=\cos\frac{m}{2},$$

on aura de même

$$fx = fy + fm;$$

et ainsi de suite.

On aura donc successivement

$$fz = fu + fm,\quad fy = fu + 2fm,\quad fx = fu + 3fm,\quad \text{etc.};$$

et les relations entre y, u et m; entre x, u et m, etc. se tireront des relations précédentes, en éliminant d'abord z, ensuite y, etc.

On peut appliquer cette théorie à la forme générale de l'équation que nous avons considérée dans l'art. 67, et en tirer des conclusions semblables; mais si on rapporte, comme dans l'art. 69, les formules précédentes aux triangles sphériques, il en résulte une construction élégante que voici :

Soit formé un triangle sphérique, dont les trois côtés soient z, u, m (pour éviter les fractions, je substitue les quantités $2z$, $2u$, $2m$ à la place de z, u, m dans les formules de l'article cité), et et où l'angle entre u et m soit obtus ; l'angle compris entre les deux côtés u et z demeurant constant, qu'on transporte alternativement la base m le long de ces mêmes côtés prolongés, de manière qu'il en résulte une suite de triangles, dont chacun ait toujours un côté commun avec le triangle précédent, et qui aient tous la même base m, et l'angle commun M au sommet ; alors, si les côtés qui comprennent cet angle sont successivement pour ces différens triangles u et z, z et y, y et x, etc., on aura

$$\mathrm{f}z = \mathrm{f}u + \mathrm{f}m, \quad \mathrm{f}y = \mathrm{f}u + 2\mathrm{f}m, \quad \mathrm{f}x = \mathrm{f}u + 3\mathrm{f}m, \quad \text{etc.},$$

$\mathrm{f}u$ étant la fonction primitive de la fonction $\frac{1}{\sqrt{(1-\mu^2 \sin u^2)}}$, dans laquelle $\mu = \frac{\sin \mathrm{M}}{\sin m}$, et ainsi des autres fonctions semblables en z, y, etc.

Par cette construction, on peut trouver facilement les valeurs des côtés y, x, etc. des nouveaux triangles ; car en considérant les triangles isoscèles qui ont pour côtés la base m transportée alternativement, les perpendiculaires abaissées de leurs sommets sur leurs bases respectives, couperont ces bases en deux parties égales, et les triangles rectangles formés par ces perpendiculaires et par les côtés qui comprennent l'angle commun M, donneront tout de suite, par l'analogie connue pour les triangles rectangles, ces équations

$$\begin{aligned} &\operatorname{tang} \frac{u+y}{2} = \cos \mathrm{M} \operatorname{tang} z, \\ &\operatorname{tang} \frac{x+z}{2} = \cos \mathrm{M} \operatorname{tang} y, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Et si on fait $u = m$, ensorte que le premier triangle soit isoscèle, ayant z pour base, on aura de plus l'équation

$$\operatorname{tang} \frac{z}{2} = \cos \mathrm{M} \operatorname{tang} m,$$

et l'on aura alors

$$\mathrm{f}z = 2\mathrm{f}m, \quad \mathrm{f}y = 3\mathrm{f}m, \quad \mathrm{f}x = 4\mathrm{f}m, \quad \text{etc.}$$

Nous remarquerons ici que cette construction est pour les triangles sphériques, ce que la construction du problème 29 des questions géométriques de l'Arithmétique de Newton, est pour les triangles rectilignes.

En effet, si on rend rectilignes les triangles sphériques dont les côtés sont u, z, y, etc., et les bases m, les équations ci-dessus deviennent

$$z = 2m\cos M, \quad u + y = 2z\cos M, \quad x + z = 2y\cos M, \quad \text{etc.};$$

et il est facile de prouver qu'alors la fonction $\mathrm{f}u$ devient proportionnelle à l'angle dont le sinus est $\frac{u \sin M}{m}$, parce que $\sin u$ et $\sin m$ se changent en u et m; de sorte qu'en prenant la base m pour le sinus de l'angle opposé M, on aura, à cause de $u = m$,

$$z = \sin 2M, \quad y = \sin 3M, \quad \text{etc.}$$

71. Nous nous sommes un peu étendus sur les propriétés des fonctions de la forme $\mathrm{f}u$, parce que les géomètres s'en sont beaucoup occupés, et que ces fonctions se présentent dans la solution de plusieurs problèmes.

Si on demande, par exemple, le mouvement d'un pendule qui oscille d'une manière quelconque, et qu'on nomme r la longueur du pendule, ψ l'angle dont il est éloigné de la verticale dans un instant quelconque, α la plus grande valeur de ψ, β la plus petite, en prenant l'unité pour la gravité, et faisant

$$\sin u = \sqrt{\left(\frac{\cos\beta - \cos\psi}{\cos\beta - \cos\alpha}\right)},$$

$$\mu = \sqrt{\left(\frac{\cos\beta^2 - \cos\alpha^2}{(\cos\beta + \cos\alpha)^2 + \sin\alpha^2}\right)},$$

$$\lambda = \sqrt{\left(\frac{2(\cos\beta + \cos\alpha)}{(\cos\beta + \cos\alpha)^2 + \sin\alpha^2}\right)},$$

on aura $\lambda\sqrt{r} \times \mathrm{f}u$ pour l'expression du temps depuis le point le plus bas, dans laquelle on suppose comme ci-dessus,

$$\mathrm{f}'u = \frac{1}{\sqrt{(1 - \mu^2 \sin u^2)}}.$$

La vîtesse angulaire de rotation autour de la verticale, sera exprimée par

$$\frac{\sqrt{2}\,.\sin\alpha\sin\beta}{\sqrt{r}\times\sin\psi^2\times\sqrt{(\cos\alpha+\cos\beta)}},$$

et sera par conséquent nulle lorsque le pendule passera par la verticale, dans lequel cas on a $\beta=0$; c'est le cas des oscillations ordinaires.

72. On peut appeler *analyse directe* des fonctions, la manière de trouver les fonctions et les équations dérivées, parce qu'elle n'est fondée en effet que sur des méthodes directes, et qu'elle n'emploie que des opérations qu'on peut toujours exécuter par les règles que nous avons exposées. Mais la manière de revenir de ces fonctions et de ces équations à celles d'où elles peuvent être dérivées, et qu'on peut regarder comme leurs primitives, forme une autre partie de l'analyse des fonctions, qu'on peut appeler *analyse inverse*, parce qu'elle dépend des mêmes méthodes et des mêmes règles, mais prises inversement, et qui, par cette raison, ne s'appliquent pas toujours avec la même facilité ni le même succès. Il en est de ces deux parties de l'analyse des fonctions, comme de celles de l'arithmétique et de l'algèbre qui ont pour objet les opérations directes de la multiplication et de l'élévation aux puissances, et les opérations inverses de la division et de l'extraction des racines. Les opérations de la première espèce sont toujours possibles par les règles connues, et donnent toujours des résultats exacts; celles de la seconde espèce, au contraire, ne le sont que dans certains cas, au moins rigoureusement, et dans tous les autres, elles ne peuvent donner que des résultats approchés.

L'analyse directe des fonctions est donc renfermée dans les règles que nous avons données pour trouver les fonctions dérivées, du moins pour ce qui regarde les fonctions d'une seule variable. Quant à l'analyse inverse, elle dépend aussi des mêmes règles; mais la difficulté consiste dans leur application aux différens cas.

Nous avons indiqué les méthodes connues pour les principales formes de fonctions ou d'équations, et nous nous sommes surtout appliqués à bien établir les principes généraux de cette analyse inverse.

Comme notre dessein n'est pas d'en donner un traité complet, nous n'ajouterons point ici d'autres détails ; mais ceux qui savent le calcul différentiel, ne peuvent manquer d'apercevoir la conformité de l'analyse des fonctions avec ce calcul, et la correspondance des analyses directes et inverses avec les deux parties de ce calcul qu'on appelle *calculs différentiel et intégral.* Ainsi, il leur sera aisé, s'ils le jugent à propos, de transporter aux fonctions les différentes méthodes d'intégration trouvées jusqu'à présent.

CHAPITRE XII.

Du développement des fonctions de deux variables. De leurs fonctions dérivées. Notation de ces fonctions et conditions auxquelles elles doivent satisfaire. Loi générale qui règne entre les termes du développement d'une fonction de plusieurs variables, et ceux qui résultent du développement de ces termes eux-mêmes.

73. Nous n'avons encore traité que des fonctions d'une seule variable; il n'est pas difficile d'étendre la théorie de ces fonctions aux fonctions de deux ou de plusieurs variables.

Soit $f(x, y)$ une fonction quelconque de deux variables x et y, qu'on regarde comme indépendantes l'une de l'autre. Si, dans cette fonction, on met à la fois $x+i$ à la place de x, et $y+o$ à la place de y, i et o étant deux quantités indéterminées, qu'ensuite on développe la nouvelle fonction $f(x+i, y+o)$, suivant les puissances ascendantes de i et o, il est clair que le premier terme, sans i ni o, sera $f(x, y)$; et que les autres seront de nouvelles fonctions de x et de y, multipliées successivement par i, o, i^2, io, o^2, i^3, etc.; ces fonctions dérivent de la fonction primitive $f(x, y)$, et c'est la loi de cette dérivation qu'il s'agit de déterminer.

Pour y parvenir de la manière la plus simple, on commencera par supposer qu'il n'y ait que la variable x qui devienne $x+i$, la variable y demeurant la même. Dans ce cas, désignant, comme on l'a fait jusqu'ici, par f', f'', f''', etc. les fonctions primes, secondes, tierces, etc. relativement à x seul, on aura

$$f(x+i,y)=f(x,y)+if'(x,y)+\frac{i^2}{2}f''(x,y)$$
$$+\frac{i^3}{2.3}f'''(x,y)+\text{etc.}$$

Substituons maintenant partout $y+o$ à la place de y, on aura

$$f(x+i,y+o)=f(x,y+o)+if'(x,y+o)+\frac{i^2}{2}f''(x,y+o)$$
$$+\frac{i^3}{2.3}f'''(x,y+o)+\text{etc.}$$

Or, si on désigne par $f_{,}$, $f_{,,}$, $f_{,,,}$, etc. les fonctions primes, secondes, tierces, etc. relativement à y, il est clair que la fonction $f(x,y+o)$, considérée comme fonction de $y+o$, et indépendamment de x, deviendra

$$f(x,y)+of_{,}(x,y)+\frac{o^2}{2}f_{,,}(x,y)+\frac{o^3}{2.3}f_{,,,}(x,y)+\text{etc.}$$

De même, en supposant toujours que les traits appliqués au bas de la lettre f, indiquent les fonctions primes, secondes, etc. relativement à y, des fonctions déjà désignées par f', f'', etc., on aura

$$f'(x,y+o)=f'(x,y)+of'_{,}(x,y)+\frac{o^2}{2}f'_{,,}(x,y)+\text{etc.}$$
$$f''(x,y+o)=f''(x,y)+of''_{,}(x,y)+\frac{o^2}{2}f''_{,,}(x,y)+\text{etc.},$$

et ainsi de suite

Faisant donc ces substitutions, et ordonnant les termes par rapport aux puissances et aux produits de i et o, on aura

$$f(x+i,y+o)=f(x,y)+if'(x,y)+of_{,}(x,y)$$
$$+\frac{i^2}{2}f''(x,y)+iof'_{,}(x,y)+\frac{o^2}{2}f_{,,}(x,y)+\frac{i^3}{2.3}f'''(x,y)$$
$$+\frac{i^2o}{2}f''_{,}(x,y)+\frac{io^2}{2}f'_{,,}(x,y)+\frac{o^3}{2.3}f_{,,,}(x,y)+\text{etc.},$$

où la forme générale des termes est

$$\frac{i^m o^n}{(1.2.3\ldots.m)(1.2.3\ldots.n)}\overset{m}{\underset{n}{f}}(x,y).$$

74. Dans le procédé que nous venons de suivre pour avoir le

développement de $f(x+i, y+o)$, nous avons commencé par substituer dans $f(x, y)$, $x+i$ pour x, et nous avons développé suivant i, nous avons ensuite substitué dans tous les termes de ce développement, $y+o$ pour y, et nous avons développé suivant o. Or, il est visible qu'on aurait identiquement le même résultat, si on commençait par la substitution de $y+o$ pour y, et par le développement suivant o, et qu'on fît ensuite la substitution de $x+i$ pour x, et le développement suivant i. De cette manière, on aurait d'abord les fonctions primes, secondes, etc. relativement à y, savoir, $f_{,}(x, y)$, $f_{,,}(x, y)$, etc.; ensuite on aurait les fonctions primes, secondes, etc. de celles-ci relativement à x, qui, suivant la notation que nous venons d'établir, seraient représentées par $f'_{,}(x, y)$, $f'_{,}(x, y)$, etc., $f'_{,,}(x, y)$, $f''_{,,}(x, y)$, etc.; et on obtiendrait ainsi la même formule que ci-dessus, comme cela doit être. Or, dans le premier procédé, la fonction $f'_{,}(x, y)$ s'obtient en prenant d'abord la fonction prime de $f(x, y)$ relativement à x, ce qui donne $f'(x, y)$, et ensuite la fonction prime de celle-ci relativement à y; et dans le second procédé, la même fonction s'obtient en prenant d'abord la fonction prime de $f(x, y)$ relativement à y, ce qui donne $f_{,}(x, y)$, et ensuite la fonction prime de celle-ci relativement à x.

D'où il suit qu'il est indifférent dans quel ordre se fasse la double opération nécessaire pour passer de la fonction primitive $f(x, y)$ à la fonction dérivée $f'_{,}(x, y)$; et comme on doit dire la même chose des autres fonctions marquées par des traits placés au haut ou au bas de la caractéristique f, on en peut conclure en général que les opérations indiquées par ces traits, sont absolument indépendantes entre elles et qu'elles conduisent aux mêmes résultats, quelqu'ordre qu'on suive en prenant les fonctions primes relativement à x et à y, indiquées par chacun des traits supérieurs ou inférieurs. Ainsi, par exemple, on aura également la valeur de $f''_{,}(x, y)$, en prenant la fonction seconde de $f(x, y)$ relativement à x, et ensuite la fonction prime de celle-ci relativement à y, ou en prenant d'abord la fonction prime de $f(x, y)$ relativement à y, et ensuite la fonction seconde de celle-ci relativement à x, ou bien en prenant la fonction prime de $f(x, y)$ relativement à x, ensuite la fonction prime de celle-ci relativement à y, et enfin la fonction prime de cette dernière relativement à x; et ainsi des autres.

Il est évident que cette conclusion a lieu en général, quelles que soient les variables x, y, indépendantes ou non.

75. Soit, par exemple,

$$f(x, y) = x\sqrt{(2xy + y^2)},$$

on aura la fonction prime, relativement à x,

$$f'(x, y) = \sqrt{(2xy + y^2)} + \frac{xy}{\sqrt{(2xy + y^2)}},$$

et sa fonction prime relativement à y sera

$$f_{,}(x, y) = \frac{x^2 + xy}{\sqrt{(2xy + y^2)}};$$

ensuite la fonction prime de $f'(x, y)$ relativement à y, sera

$$f'_{,}(x, y) = \frac{x + y}{\sqrt{(2xy + y^2)}} + \frac{x^2y}{(2xy + y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

et la fonction prime de $f_{,}(x, y)$ relativement à x sera

$$f'_{,}(x, y) = \frac{2x + y}{\sqrt{(2xy + y^2)}} - \frac{(x^2 + xy)y}{(2xy + y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Quoique ces deux expressions de $f'_{,}(x, y)$ paraissent différentes, elles sont cependant identiques; car elles se réduisent l'une et l'autre à

$$\frac{3x^2y + 3xy^2 + y^3}{(2xy + y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ensuite, en prenant la fonction prime de $f'(x, y)$ relativement à x, c'est-à-dire la fonction seconde de $f(x, y)$ relativement à x, on aura

$$f''(x, y) = \frac{2y}{\sqrt{(2xy + y^2)}} - \frac{xy^2}{(2xy + y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{3xy^2 + 2y^3}{(2xy + y^2)^{\frac{3}{2}}};$$

et prenant maintenant la fonction prime de celle-ci relativement à à y, on aura, après les réductions,

$$\mathrm{f}''_{,}(x,y) = \frac{3x^2y^2 + 3xy^3}{(2xy + y^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

De même, en prenant la fonction prime de $\mathrm{f}'_{,}(x,y)$ relativement à x, on trouvera

$$\mathrm{f}''_{,}(x,y) = \frac{3x^2y^2 + 3xy^3}{(2xy + y^2)^{\frac{5}{2}}};$$

et ainsi de suite.

Il résulte de là qu'afin que des fonctions données de x et y puissent être prises pour des fonctions dérivées d'une même fonction primitive, il faut qu'elles satisfassent à certaines conditions.

Ainsi, si $\mathrm{F}(x,y)$ et $\varphi(x,y)$ représentent des fonctions données de x, y; pour qu'on puisse supposer $\mathrm{F}(x,y) = \mathrm{f}'(x,y)$, et $\varphi(x,y) = \mathrm{f}_{,}(x,y)$, il faudra que l'on ait

$$\mathrm{f}'_{,}(x,y) = \mathrm{F}_{,}(x,y) = \varphi'(x,y).$$

Et en général, pour qu'on puisse supposer $\mathrm{F}(x,y) = \mathrm{f}^m_n(x,y)$ et $\varphi(x,y) = \mathrm{f}^p_q(x,y)$, il faudra que l'on ait

$$\mathrm{f}^{m+p}_{n+q}(x,y) = \mathrm{F}^p_q(x,y) = \varphi^m_n(x,y).$$

Par exemple, si $\mathrm{F}(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$, $\varphi(x,y) = -\frac{x}{x^2+y^2}$, on pourra supposer $\mathrm{F}(x,y) = \mathrm{f}'(x,y)$, $\varphi(x,y) = \mathrm{f}_{,}(x,y)$; car on trouve $\mathrm{F}_{,}(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \varphi'(x,y)$; mais on ne pourrait pas supposer $\mathrm{F}(x,y) = \mathrm{f}'_{,}(x,y)$ et $\varphi(x,y) = \mathrm{f}''(x,y)$; car alors il faudrait que $\mathrm{F}'(x,y) = \varphi_{,}(x,y)$, ce qui n'est pas.

76. En général, quel que soit le nombre des variables qui entrent dans une fonction, si on donne un accroissement à chacune de ces variables, et qu'on développe la fonction suivant les dimensions formées par ces différens accroissemens, qu'on développe ensuite de la même manière les fonctions produites par le premier développement, et ainsi de suite, il règne entre ces différens dévelop-

pemens, une loi que nous allons exposer d'une manière générale, parce qu'elle peut être utile dans quelques occasions.

Soit $f(x, y, z\ldots)$ une fonction de plusieurs variables indépendantes x, y, z, etc.; supposons que par la substitution de $x+\alpha$, $y+\beta$, $z+\gamma$, etc., à la place de x, y, z, etc., et par le développement suivant les puissances et les produits de α, β, γ, etc., cette fonction devienne

$$f(x, y, z\ldots)+f(1)+f(2)+f(3)+\text{etc.}$$

Je dénote par $f(1)$ la somme de tous les termes où les quantités α, β, γ, etc. seront à la première dimension, par $f(2)$, la somme de tous les termes où ces mêmes quantités formeront deux dimensions, et ainsi de suite.

Supposons de plus qu'en faisant la même substitution et le même développement dans les fonctions $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, etc.; elles deviennent

$$\begin{array}{l} f(1)+f(1,1)+f(1,2)+f(1,3)+\text{etc.},\\ f(2)+f(2,1)+f(2,2)+f(2,3)+\text{etc.},\\ f(3)+f(3,1)+f(3,2)+f(3,3)+\text{etc.},\\ \text{etc.}, \end{array}$$

où je dénote par $f(1,1)$, $f(1,2)$, etc., les rangs successifs des termes du développement de $f(1)$, de manière que, puisque les quantités α, β, γ, etc. sont à la première dimension dans $f(1)$, elles formeront deux dimensions dans $f(1,1)$, trois dimensions dans $f(1,2)$; et ainsi des autres. Par cette notation, on voit qu'en général la quantité désignée par $f(m,n)$ renfermera tous les termes du développement de $f(m)$, où les quantités α, β, γ, etc. formeront $m+n$ dimensions.

Cela posé, si on substitue d'abord $x+\alpha$, $y+\beta$, $z+\gamma$, etc. dans la fonction $f(x, y, z\ldots)$, elle deviendra

$$f(x, y, z\ldots)+f(1)+f(2)+f(3)+\text{etc.};$$

et si on substitue ensuite dans cette quantité, $x+m\alpha$, $y+m\beta$,

$z+m\gamma$, etc. à la place de x, y, z, il est clair qu'elle deviendra

$$\begin{aligned}
f(x,y,z\ldots) &+ f(1) + f(2) + f(3) + \text{etc.},\\
&+ mf(1) + m^2f(2) + m^3f(3) + \text{etc.},\\
&+ mf(1,1) + m^2f(1,2) + m^3f(1,3) + \text{etc.},\\
&+ mf(2,1) + m^2f(2,2) + m^3f(2,3) + \text{etc.},\\
&+ mf(3,1) + m^2f(3,2) + m^3f(3,3) + \text{etc.},\\
&+ \text{etc.}
\end{aligned}$$

D'un autre côté, il est visible que ces deux substitutions successives équivalent à une substitution unique qu'on ferait dans la fonction $f(x,y,z\ldots)$, en mettant

$$x+(1+m)\alpha,\quad y+(1+m)\beta,\quad z+(1+m)\gamma,\quad \text{etc.}$$

à la place de x, y, z, etc., et qui donnerait, par le développement,

$$f(x,y,z\ldots)+(1+m)f(1)+(1+m)^2f(2)+(1+m)^3f(3)+\text{etc.}$$

Ainsi, il faudra que ces deux développemens soient identiques, et que par conséquent les termes qui renferment les mêmes dimensions α, β, γ, etc. soient égaux de part et d'autre, quelle que soit d'ailleurs la quantité m. On aura donc les comparaisons suivantes :

$$\begin{aligned}
&f(1)+mf(1)=(1+m)f(1),\\
&f(2)+m^2f(2)+mf(1,1)=(1+m)^2f(2),\\
&f(3)+m^3f(3)+m^2f(1,2)+mf(2,1)=(1+m)^3f(3),\\
&f(4)+m^4f(4)+m^3f(1,3)+m^2f(2,2)+mf(3,1)=(1+m)^4f(4);
\end{aligned}$$

et ainsi de suite.

Et comparant encore les termes affectés des mêmes puissances de m, on tirera ces valeurs

$$\begin{aligned}
&f(1,1)=2f(2),\\
&f(1,2)=3f(3),\quad f(2,1)=3f(3),\\
&f(1,3)=4f(4),\quad f(2,2)=6f(4),\quad f(3,1)=4f(4),\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Donc par les termes du premier développement général, on pourra avoir immédiatement ceux de tous les développemens partiels suivans.

77. A l'imitation de ce que nous avons pratiqué pour les fonctions d'une seule variable, si on regarde z comme une fonction de x et y, on pourra dénoter par z', $z_{\prime}$, z'', $z'_{\prime}$, $z_{\prime\prime}$, etc. ces différentes fonctions dérivées, en appliquant à la lettre z les mêmes traits qu'on appliquerait à la caractéristique f de la fonction $f(x, y)$ qu'on suppose représenter la valeur de z, et on nommera ces fonctions de la même manière.

Ainsi, x devenant $x+i$, et y devenant $y+o$, la quantité z, fonction de x, y, deviendra (art. 73),

$$z+iz'+oz_{\prime}+\frac{i^2}{2}z''+ioz'_{\prime}+\frac{o^2}{2}z_{\prime\prime}+\frac{i^3}{2.3}z'''+\frac{i^2o}{2}z''_{\prime}+\frac{io^2}{2}z'_{\prime\prime}+\frac{o^3}{2.3}z_{\prime\prime\prime}+\text{etc.};$$

le terme général de cette série étant, comme dans l'endroit cité,

$$\frac{i^m o^n}{(1.2.3\ldots m)\,(1.2.3\ldots n)}\,z^m_n.$$

A l'égard de la manière de trouver ces différentes fonctions, il est clair qu'il n'y a qu'à suivre les mêmes règles que pour les fonctions d'une seule variable; les traits supérieurs de la caractéristique indiquant l'ordre de la fonction dérivée relativement à x seul, et les traits inférieurs indiquant l'ordre de la fonction dérivée relativement à y seul.

Ainsi, en prenant les fonctions primes de z, selon x et y, on aura les valeurs de z' et $z_{\prime}$; et de là, en prenant encore les fonctions primes relativement à x et à y, on aura les fonctions dérivées du second ordre z'', $z'_{\prime}$, $z_{\prime\prime}$; et ainsi de suite.

Il est bon de remarquer ici que pour les fonctions de deux variables, il y a deux fonctions dérivées du premier ordre z' et $z_{\prime}$, trois du second ordre z'', $z'_{\prime}$, $z_{\prime\prime}$, etc., de sorte que pour l'ordre $m^{ième}$, il y aura un nombre $m+1$ de fonctions dérivées.

Comme nous distinguons ces fonctions dérivées par des traits supérieurs qui se rapportent à l'une des variables x, et par des traits inférieurs qui se rapportent à l'autre variable y, nous nommerons fonctions *primes*, *secondes*, etc., selon x ou y, les fonctions marquées par de seuls traits supérieurs ou inférieurs, et nous nommerons simplement fonctions *primo-primes*, *secundo-primes*, *primo-secondes*, les fonctions marquées à la fois par des traits supérieurs et inférieurs, en énonçant le trait supérieur le premier et l'inférieur le second.

On trouvera plus de détails sur ce sujet, dans la leçon XIX du *Calcul des Fonctions*.

CHAPITRE XIII,

Où l'on donne la manière de développer les fonctions d'un nombre quelconque de variables en séries terminées, composées d'autant de termes qu'on voudra, et d'avoir la valeur des restes.

78. PAR une méthode analogue à celle du chapitre VI, on peut aussi avoir le développement d'une fonction quelconque de x et y suivant les puissances de x et y, et déterminer les restes de la série lorsqu'on veut l'arrêter à des termes quelconques. En changeant dans la formule de l'article 73, x et y en $x-i, y-i$; ensuite i et o en xz, yz, on aura

$$\begin{aligned} f(x,y) = {} & f(x-xz, y-yz) + xzf'(x-xz, y-yz) \\ & + yzf_{,}(x-xz, y-yz) + \frac{x^2z^2}{2} f''(x-xz, y-yz) \\ & + xyz^2f'_{,}(x-xz, y-yz) + \frac{y^2z^2}{2} f_{,,}(x-xz, y-yz) + \text{etc.}, \end{aligned}$$

où z sera une quantité quelconque indéterminée qui étant supposée égale à zéro, rendra l'équation identique, et qui étant faite $= 1$, donnera

$$f(x, y) = f. + xf.' + yf._{,} + \frac{x^2}{2} f.'' + xyf.'_{,} + \frac{y^2}{2} f._{,,} + \text{etc.},$$

formule générale du développement de la fonction $f(x, y)$, suivant les puissances de x et y, dans laquelle les quantités désignées par f., f.', f.,, etc. dénotent les valeurs des fonctions dérivées suivant x et y, en faisant $x = 0$ et $y = 0$.

Supposons maintenant qu'on ne veuille faire ce développement que par parties, et arrêtons-nous d'abord au premier terme, nous ferons

$$f(x, y) = f(x - xz, y - yz) + P,$$

P étant une fonction de z qui devra être évidemment nulle lorsque $z = 0$. Puisque la quantité z peut être quelconque, nous pouvons prendre l'équation prime relativement à z, et par les principes et la notation établis, il est facile de voir que la fonction prime de $f(x - xz, y - yz)$, prise relativement à z, sera

$$-xf'(x - xz, y - yz) - yf_{,}(x - xz, y - yz);$$

donc, désignant par P' la fonction prime de P, prise aussi relativement à z, on aura, pour la détermination de P, l'équation du premier ordre

$$P' = xf'(x - xz, y - yz) + yf_{,}(x - xz, y - yz).$$

Considérons, en second lieu, les trois premiers termes du développement de $f(x, y)$, et faisons

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(x - xz, y - yz) + xzf'(x - xz, y - yz) \\ & + yzf_{,}(x - xz, y - yz) + Q, \end{aligned}$$

Q sera une fonction de z qui devra, par la nature même de cette équation, devenir nulle lorsque $z = 0$. A cause de l'indétermination de z, on pourra prendre l'équation prime relativement à z; et désignant par Q' la fonction prime de Q, on trouvera, après avoir effacé les termes qui se détruisent dans l'équation prime, cette équation du premier ordre pour la détermination de Q,

$$\begin{aligned} Q' = & x^2zf''(x - xz, y - yz) + 2xyzf'_{,}(x - xz, y - yz) \\ & + y^2zf_{,,}(x - xz, y - yz); \end{aligned}$$

et ainsi de suite.

Pour déduire de ces équations les valeurs de P, Q, etc., il faudrait chercher les fonctions primitives des quantités P', Q', etc. relativement à z, et les prendre telles qu'elles soient nulles lorsque $z = 0$. Mais comme nous n'avons pas besoin des expressions générales de ces quantités, mais seulement de leurs valeurs relatives à $z = 1$, que même il suffit d'avoir des limites de ces valeurs, on pourra faire usage de la méthode employée dans le chapitre cité, pour parvenir à des conclusions semblables à celles de l'article 39.

Ainsi, en désignant par λ un nombre indéterminé, ou plutôt inconnu, toujours compris entre o et 1, et qui devra être partout le même dans la même fonction, mais qui pourra être différent dans les différentes fonctions, on trouvera les expressions suivantes:

$$P = x\mathrm{f}'(\lambda x, \lambda y) + y\mathrm{f}_{,}(\lambda x, \lambda y),$$
$$Q = \tfrac{1}{2}[x^2\mathrm{f}''(\lambda x, \lambda y) + 2xy\mathrm{f}'_{,}(\lambda x, \lambda y) + y^2\mathrm{f}_{,,}(\lambda x, \lambda y)];$$

et ainsi des autres.

Donc, enfin, substituant ces valeurs de P, Q, etc. dans les développemens de $\mathrm{f}(x, y)$, et faisant $z = 1$, on aura ces formules générales qui renferment une extension du théorème de l'art. 40.

$$\begin{aligned}
\mathrm{f}(x, y) &= \mathrm{f}. + x\mathrm{f}'(\lambda x, \lambda y) + y\mathrm{f}_{,}(\lambda x, \lambda y), \\
&= \mathrm{f}. + x\mathrm{f}.' + y\mathrm{f}._{,} + \frac{x^2}{2}\mathrm{f}''(\lambda x, \lambda y) \\
&\quad + xy\mathrm{f}'_{,}(\lambda x, \lambda y) + \frac{y^2}{2}\mathrm{f}_{,,}(\lambda x, \lambda y); \\
&= \mathrm{f}. + x\mathrm{f}.' + y\mathrm{f}._{,} + \frac{x^2}{2}\mathrm{f}.'' + xy\mathrm{f}.'_{,} + \frac{y^2}{2}\mathrm{f}._{,,} \\
&\quad + \frac{x^3}{2.3}\mathrm{f}'''(\lambda x, \lambda y) + \frac{x^2y}{2}\mathrm{f}''_{,}(\lambda x, \lambda y) \\
&\quad + \frac{xy^2}{2}\mathrm{f}'_{,,}(\lambda x, \lambda y) + \frac{y^3}{2.3}\mathrm{f}_{,,,}(\lambda x, \lambda y), \\
&= \text{etc.}
\end{aligned}$$

Donc, si l'on a la fonction $\mathrm{f}(x + i, y + o)$ à développer suivant les puissances de i et de o, il n'y aura qu'à mettre i et o à la place de x et y dans les formules précédentes, et les quantités $\mathrm{f}.$, $\mathrm{f}.'$, $\mathrm{f}._{,}$, etc. deviendront $\mathrm{f}(x, y)$, $\mathrm{f}'(x, y)$, $\mathrm{f}_{,}(x, y)$, etc., où les fonctions dérivées peuvent être prises relativement à x et y, puisque la fonction $\mathrm{f}(x + i, y + o)$ est telle que ses dérivées relativement à x et y, sont les mêmes que les dérivées relativement à i et o. Ainsi, on aura

f(x

$$
\begin{aligned}
f(x+i,y+o) &= f(x,y) + if'(x+\lambda i, y+\lambda o) \\
&\qquad + of_{\prime}(x+\lambda i, y+\lambda o), \\
&= f(x,y) + if'(x,y) + of_{\prime}(x,y) \\
&\quad + \frac{i^2}{2} f''(x+\lambda i, y+\lambda o) + iof'_{\prime}(x+\lambda i, y+\lambda o) \\
&\quad + \frac{o^2}{2} f_{\prime\prime}(x+\lambda i, y+\lambda o) \\
&= f(x,y) + if'(x,y) + of_{\prime}(x,y) \\
&\quad + \frac{i^2}{2} f''(x,y) + iof'_{\prime}(x,y) + \frac{o^2}{2} f_{\prime\prime}(x,y) \\
&\quad + \frac{i^3}{2.3} f'''(x+\lambda i, y+\lambda o) + \frac{i^2 o}{2} f''_{\prime}(x+\lambda i, y+\lambda o) \\
&\quad + \frac{io^2}{2} f'_{\prime\prime}(x+\lambda i, y+\lambda o) + \frac{o^3}{2.3} f_{\prime\prime\prime}(x+\lambda i, y+\lambda o), \\
&= \text{etc.}
\end{aligned}
$$

La quantité λi répond, comme l'on voit, à la quantité que nous avons désignée par j dans l'article 40 ; nous préférons ici l'expression λi, parce que le même coefficient λ se trouve dans la quantité λo. De ces formules qu'il serait maintenant aisé d'étendre aux fonctions de trois ou d'un plus grand nombre de variables, on peut déduire la conclusion suivante :

Lorsque dans le développement d'une fonction suivant les puissances et les produits de certaines quantités, on veut s'arrêter aux termes d'un ordre donné, c'est-à-dire, dans lesquels ces quantités forment des dimensions d'un degré égal à l'exposant de cet ordre, on peut supposer le reste du développement égal aux seuls termes de l'ordre suivant, mais en y conservant ces mêmes quantités sous les fonctions, et les multipliant toutes par un coefficient λ dont la valeur sera entre les limites 0 et 1, et qui sera la même dans la même fonction, mais qui pourra être différente dans les différentes fonctions.

79. Au reste, on pourrait aussi appliquer au développement de la fonction $f(x+i, y+o)$ la méthode de l'article 37, en pre-

nant les fonctions dérivées par rapport à i et o. En effet, soit

$$f(x+i, y+o) = f(x, y) + iP + oQ.$$

En prenant d'abord les fonctions dérivées par rapport à x et y, on aura

$$f'(x+i, y+o) = f'(x, y) + iP' + oQ',$$
$$f_{,}(x+i, y+o) = f_{,}(x, y) + iP_{,} + oQ_{,}.$$

Ensuite si on prend les fonctions dérivées par rapport à i et o, et qu'on les désigne par des traits placés au haut et au bas, mais en arrière des lettres, on aura aussi

$$f'(x+i, y+o) = P + i\,{}'P + o\,{}'Q,$$
$$f_{,}(x+i, y+o) = Q + i\,{}_{,}P + o\,{}_{,}Q;$$

puisqu'il est évident que les fonctions dérivées de $f(x+i, y+o)$ sont les mêmes par rapport à x et i, et par rapport à y et o. De là on aura

$$P = f'(x, y) + i(P' - {}'P) + o(Q' - {}'Q)$$
$$Q = f_{,}(x, y) + i(P_{,} - {}_{,}P) + o(Q_{,} - {}_{,}Q).$$

Donc si on fait

$$R = P' - {}'P, \quad S = Q' - {}'Q + P_{,} - {}_{,}P, \quad T = Q_{,} - {}_{,}Q,$$

on aura, en substituant ces valeurs,

$$f(x+i, y+o) = f(x, y) + if'(x, y) + of_{,}(x, y)$$
$$+ i^2R + ioS + o^2T,$$

et l'on pourra de la même manière pousser le développement aussi loin qu'on voudra ; de sorte qu'en connaissant les expressions analytiques des premiers restes P, Q, on trouvera tous les suivans par les simples fonctions dérivées de ces restes.

80. Puisque les fonctions dérivées de deux variables se forment de la même manière, et par les mêmes règles que celles d'une seule variable, en considérant chaque variable séparément et successivement, il s'ensuit que tout ce que nous avons démontré sur les

fonctions d'une seule variable, peut s'appliquer de même aux fonctions de deux variables.

Ainsi, il sera facile d'étendre aux fonctions de deux variables, les remarques que nous avons faites dans le chapitre V, sur le développement des fonctions, lorsqu'on donne aux variables des valeurs déterminées, et d'en déduire des conséquences et des résultats semblables.

Enfin, il est visible qu'on pourra traiter aussi par les mêmes principes, les fonctions de trois ou d'un plus grand nombre de variables, puisqu'il ne s'agira que de répéter les mêmes opérations séparément pour chaque variable.

CHAPITRE XIV.

Des équations dérivées d'une équation entre trois variables. Des fonctions arbitraires qui entrent dans les équations primitives complètes entre trois variables.

81. LORSQU'UNE fonction z n'est donnée que par une équation entre x, y, z, on considérera que comme cette équation doit avoir lieu, quelles que soient les valeurs de x et y, il s'ensuit qu'elle aura lieu aussi en y mettant $x+i$ et $y+o$ à la place de x et y, quelles que soient les quantités i et o; de sorte qu'en développant, après cette substitution, l'équation suivant les puissances et les produits de i et o, il faudra que les termes multipliés par une même puissance ou produits de i et o, forment des équations séparées. Mais nous venons de voir que dans le développement d'une fonction de x et y, les termes multipliés par i donnent la fonction prime selon x, ceux multipliés par o donnent la fonction prime selon y, ceux multipliés par $\frac{i^2}{2}$ donnent la fonction seconde selon x, etc. Donc, ayant une équation quelconque entre x, y, z, et regardant z comme une fonction de x et y donnée par cette équation, on pourra, en prenant les différentes fonctions dérivées de tous ses termes, en déduire autant d'équations dérivées de différens ordres, qu'on appellera de même, *équations primes, secondes,* etc. selon x ou y, *équations primo-primes, secundo-primes,* etc., et en général, *équations dérivées du premier ordre, du second ordre,* etc. Ces équations serviront à trouver les valeurs de z', $z_{,}$, z'', $z'_{,}$, $z_{,,}$, etc.

Si donc on représente par $F(x, y, z) = 0$ l'équation proposée pour la détermination de z, et qu'on désigne simplement par $F'(x)$, $F'(y)$, $F'(z)$ les fonctions primes de $F(x, y, z)$, prises relativement à x, y, z, considérées séparément, et comme des variables indépendantes, il est aisé de voir, par les principes établis pour les fonctions d'une seule variable, que $i[F'(x) + z'F'(z)]$ sera le terme affecté de i, et $o[F'(y) + z_{,}F'(z)]$ le terme affecté de o dans le développement de $F(x, y, z)$, après la substitution de $x + i$ et $y + o$ pour x et y, z étant regardé comme fonction de x et y.

Ainsi, $F'(x) + z'F'(z)$ sera la fonction prime relative à x, et $F'(y) + z_{,}F'(z)$ la fonction prime relative à y de $F(x, y, z)$; de sorte qu'on aura ces deux équations primes

$$F'(x) + z'F'(z) = 0, \quad F'(y) + z_{,}F'(z) = 0;$$

d'où l'on tire

$$z' = -\frac{F'(x)}{F'(z)}, \quad z_{,} = -\frac{F'(y)}{F'(z)}.$$

Ayant ainsi les valeurs de z' et $z_{,}$, on en déduira celles de z'', $z'_{,}$, $z_{,,}$, etc., en prenant de nouveau les fonctions primes de celles-ci relatives à x et y; et ainsi de suite.

82. On peut aussi rappeler immédiatement cette théorie à celle des fonctions d'une variable, en regardant z comme donné en x et y, et y comme une fonction indéterminée de x. Ainsi, en regardant d'abord y et z comme fonctions de x, la fonction prime de $F(x, y, z)$ sera,

$$F'(x) + y'F'(y) + z'F'(z);$$

mais z étant considéré comme fonction de x et y, et y comme fonction de x, la fonction prime de z sera représentée par $z' + y'z_{,}$; mettant cette valeur à la place de z', on aura

$$F'(x) + z'F'(z) + y'[F'(y) + z_{,}F'(z)]$$

pour la fonction prime de $F(x, y, z)$.

Donc, ayant l'équation $F(x, y, z) = 0$, on aura l'équation prime

$$F'(x) + z'F'(z) + y'[F'(y) + z_{,}F'(z)] = 0.$$

Mais y étant regardé comme une fonction indéterminée de x, l'équation précédente doit avoir lieu, quelle que soit la fonction y'; elle se décomposera donc en ces deux-ci,

$$F'(x) + z'F'(z) = 0, \quad F'(y) + z_{,}F'(z) = 0,$$

comme plus haut.

On pourrait trouver de la même manière les équations dérivées des ordres supérieurs.

83. Cela posé, considérons en général l'équation

$$F(x, y, z) = 0;$$

elle donne les deux équations primes

$$F'(x) + z'F'(z) = 0 \quad \text{et} \quad F'(y) + z_{,}F'(z) = 0,$$

qui auront par conséquent lieu en même temps que la proposée. Donc une combinaison quelconque de ces trois équations aura lieu aussi, et pourra par conséquent tenir lieu de l'équation primitive.

Soient a et b deux constantes quelconques contenues dans la fonction $F(x, y, z)$, ces constantes seront les mêmes dans les fonctions dérivées $F'(x)$, $F'(y)$, $F'(z)$; ainsi on pourra, au moyen des trois équations dont il s'agit, éliminer ces deux constantes, et l'équation résultante sera une équation du premier ordre entre x, y, z, z' et $z_{,}$ qui renfermera deux constantes de moins que l'équation primitive. Donc, réciproquement, si on n'a pour la détermination de z en x et y qu'une équation du premier ordre entre x, y, z, z' et $z_{,}$, l'équation primitive entre x, y et z devra contenir deux constantes arbitraires.

Ceci est analogue à ce que nous avons vu relativement aux fonctions d'une seule variable (art. 46); mais nous avons vu aussi (art. 60) que la quantité arbitraire qui doit se trouver dans l'équation primitive, peut n'être pas constante, et donner cependant par l'élimination, la même équation du premier ordre. La même chose peut donc avoir lieu ici; et il est aisé de concevoir qu'on aura encore la même équation du premier ordre par l'élimination des deux arbitraires a et b, quoiqu'elles ne soient pas constantes, pourvu que les deux équations primes soient encore de la même forme.

Désignons simplement par $F'(a)$ et $F'(b)$ les fonctions primes de $F(x, y, z)$, prises relativement aux quantités a et b contenues dans cette dernière fonction; il est aisé de voir par les principes établis, que si a et b sont regardés comme des fonctions de x et y, la fonction prime de $F(x, y, z)$ relative à x, devra être augmentée, à raison des deux nouvelles variables a et b, de la quantité $a'F'(a) + b'F'(b)$, et que la fonction prime, relative à y, devra être augmentée pareillement de $a_{,}F'(a) + b_{,}F'(b)$.

Supposons $b = fa$, on aura, en prenant les fonctions primes relativement à x et y,

$$b' = a'f'a \qquad b_{,} = a_{,}f'a;$$

donc les quantités à ajouter aux deux fonctions primes seront

$$a'[F'(a) + f'a \times F'(b)] \quad \text{et} \quad a_{,}[F'(a) + f'a \times F'(b)];$$

par conséquent, elles disparaîtront à la fois en prenant a telle qu'elle satisfasse à l'équation

$$F'(a) + f'a \times F'(b) = 0;$$

la fonction fa de a, qu'on a prise pour b, demeurant absolument arbitraire.

De là résultent donc ces conclusions importantes :

1°. Que l'équation primitive qui satisfait en général à une équation du premier ordre, doit renfermer une fonction arbitraire;

2°. Que si pour une équation donnée du premier ordre, on trouve une équation primitive $F(x, y, z) = 0$, qui renferme deux constantes arbitraires a et b, il n'y aura qu'à faire $b = fa$, et prendre a de manière qu'elle satisfasse à l'équation

$$F'(a) + f'a \times F'(b) = 0;$$

la fonction désignée par fa sera la fonction arbitraire;

3°. Qu'ayant une équation quelconque entre x, y, z qui renferme une fonction donnée, on en peut déduire une équation du premier ordre où cette fonction ne se trouve plus. En effet, si φp est la fonction qu'on veut faire disparaître, p étant une fonction donnée de x, y, z, il n'y aura qu'à prendre les deux équations primes, suivant x et suivant y, de l'équation proposée, on aura trois équations qui renfermeront φp et $\varphi' p$, en désignant par $\varphi' p$ la fonction prime de φp prise relativement à p; d'où, éliminant ces deux fonctions, il résultera une équation du premier ordre où la fonction φp ne se trouvera plus.

84. Soit, par exemple, $z - ax - by - c = 0$ une équation donnée; les deux équations primes seront

$$z' - a = 0, \quad z_{,} - b = 0;$$

éliminant a et b de ces trois équations, on aura l'équation du premier ordre

$$z - xz' - yz_{,} - c = 0,$$

dont $z - ax - by - c = 0$ sera l'équation primitive, a et b étant les constantes arbitraires.

Maintenant, en supposant $z - ax - by - c = \mathrm{F}(x, y, z)$, on aura

$$\mathrm{F}'(a) = -x, \quad \mathrm{F}'(b) = -y.$$

Donc, faisant $b = \mathrm{f}a$, l'équation pour déterminer a sera

$$-x - y\mathrm{f}'a = 0; \quad \text{d'où l'on tire} \quad \mathrm{f}'a = -\frac{x}{y};$$

ce qui donne

$$a = \varphi\left(\frac{x}{y}\right),$$

φ désignant la fonction inverse de f'. Ainsi la fonction f étant indéterminée, la fonction φ le sera aussi; donc a et b seront deux fonctions indéterminées de $\frac{x}{y}$, ou plutôt dépendantes d'une même fonction indéterminée de $\frac{x}{y}$; et $b + \frac{ax}{y}$ sera par conséquent une fonction

fonction indéterminée de $\frac{x}{y}$. Désignant donc cette fonction simplement par $\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$, l'équation primitive deviendra

$$z-y\varphi\left(\frac{x}{y}\right)-c=0.$$

Si on prend les deux équations primes de celle-ci, on aura

$$z'-\varphi\left(\frac{x}{y}\right)=0, \quad \text{et} \quad z_{,}-\varphi\left(\frac{x}{y}\right)+\varphi\left(\frac{x}{y}\right)\times\frac{x}{y}=0.$$

Eliminant de ces trois équations les deux inconnues $\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ et $\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)$, on aura, comme plus haut,

$$z-xz'-yz_{,}-c=0$$

pour l'équation dérivée du premier ordre, délivrée de la fonction $\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$.

CHAPITRE XV.

Formule remarquable pour le développement en série d'une fonction quelconque de l'inconnue z de l'équation $z = x + y\mathrm{f}.z$.

85. Cette propriété des équations primes de pouvoir servir à faire disparaître une fonction quelconque, est très-utile dans beaucoup d'occasions, et surtout pour les développemens en série.

Pour en donner un exemple, soit proposée l'équation

$$z = x + y\mathrm{f}z$$

pour la détermination de z, $\mathrm{f}z$ étant une fonction quelconque de z, et supposons qu'on demande la valeur de z en série suivant les puissances de y; il est visible que les deux premiers termes seront $x + y\mathrm{f}x$; et si, pour trouver les termes suivans, on suppose $z = x + y\mathrm{f}x + Ay^2 + By^3 +$ etc., il faudra développer la fonction $\mathrm{f}z$ suivant les puissances de y, et comparer ensuite les termes pour pouvoir déterminer les valeurs de A, B, etc.; mais, de cette manière, on n'aurait pas la loi de ces valeurs; il y aura donc de l'avantage à employer, au lieu de l'équation proposée, une équation du premier ordre où la fonction $\mathrm{f}z$ ne se trouve pas.

Prenant donc les équations primes suivant x et suivant y, on aura

$$z' = 1 + y\mathrm{f}'z \times z', \quad \text{et} \quad z_{,} = \mathrm{f}z + y\mathrm{f}'z \times z_{,},$$

en dénotant par $\mathrm{f}'z$ la fonction prime de $\mathrm{f}z$ relativement à z; d'où éliminant $\mathrm{f}'z$, on tire d'abord

$$z_{,} - z'\mathrm{f}z = 0.$$

Mais l'équation primitive donne

$$\mathrm{f}z = \frac{z-x}{y};$$

donc, substituant cette valeur dans la dernière équation, on aura cette équation du premier ordre, délivrée de $\mathrm{f}z$,

$$z'(z-x)-yz_{,}=0.$$

Comme le premier terme de l'expression de z en série de y est évidemment x, nous supposerons en général,

$$z=x+Ay+By^2+Cy^3+\text{etc.},$$

A, B, C, etc. étant des fonctions de x, nous aurons

$$z'=1+A'y+B'y^2+C'y^3+\text{etc.},$$

A', B', etc. étant les fonctions primes de A, B, etc., regardées comme fonctions de x; ensuite

$$z_{,}=A+2By+3Cy^2+4Dy^3+\text{etc.});$$

donc on aura, en substituant ces valeurs,

$$(1+A'y+B'y^2+C'y^3+\text{etc.})(A+By+Cy^2+\text{etc.})$$
$$-A-2By-3Cy^2-\text{etc.}=0;$$

savoir,

$$(AA'-B)y+(BA'+AB'-2C)y^2$$
$$+(CA'+BB'+AC'-3D)y^3+\text{etc.}=0;$$

d'où l'on tire tout de suite

$$B=AA',\quad C=\tfrac{1}{2}(AB'+BA'),$$
$$D=\tfrac{1}{3}(AC'+BB'+CA'),\quad \text{etc.}$$

Ici la quantité A demeure indéterminée; mais nous avons déjà vu que les deux premiers termes de z dans l'équation proposée sont $x+y\mathrm{f}x$, par conséquent, on aura $A=\mathrm{f}x$, et de là

$$A'=\mathrm{f}'x,\quad B=\mathrm{f}x\mathrm{f}'x,\quad B'=\mathrm{f}x\mathrm{f}''x+(\mathrm{f}'x)^2;$$

donc

$$C=\tfrac{1}{2}(2\mathrm{f}x\mathrm{f}'x^2+\mathrm{f}x^2\mathrm{f}''x),\quad \text{etc.}$$

Mais en examinant les expressions de B, C, etc., on voit d'abord qu'elles peuvent se mettre sous cette forme,

$$B=\left(\frac{A^2}{2}\right)', \quad C=\frac{1}{2}(AB)',$$

$$D=\frac{1}{3}\left(AC+\frac{1}{2}B^2\right)', \quad E=\frac{1}{4}(AD+BC)', \quad \text{etc.},$$

en dénotant en général, par le caractère $(\ )'$, la fonction prime selon x, de la quantité renfermée entre les deux crochets; et si on fait les substitutions successives, on trouve que ces expressions sont réductibles à celles-ci plus simples,

$$B=\frac{1}{2}(A^2)', \quad C=\frac{1}{2.3}(A^3)'', \quad D=\frac{1}{2.3.4}(A^4)''', \quad \text{etc.},$$

en marquant par un trait, deux traits, etc. les fonctions primes, secondes, etc. des quantités renfermées entre les crochets, relativement à la variable x; de sorte qu'en substituant la valeur de A, on aura enfin

$$z=x+yfx+\frac{y^2}{2}(fx^2)'+\frac{y^3}{2.3}(fx^3)''+\frac{y^4}{2.3.4}(fx^4)'''+\text{etc.}$$

où les exposans de x indiquent des puissances de fx.

86. Supposons maintenant qu'on demande la valeur d'une fonction quelconque φz de z, développée de même suivant les puissances de y; on fera $u=\varphi z$, et prenant les équations primes pour faire disparaître la fonction φ, on aura

$$u'=\varphi' z\times z' \quad \text{et} \quad u_{,}=\varphi' z\times z_{,},$$

d'où l'on tire

$$\frac{u'}{u_{,}}=\frac{z'}{z_{,}}.$$

Substituant la valeur de $\frac{z'}{z_{,}}$, tirée de l'équation $z'(z-x)-yz_{,}=0$ de l'article précédent, on aura cette équation du premier ordre

$$u'(z-x)-yu_{,}=0.$$

Supposons ici

$$u=P+Qy+Ry^2+Sy^3+\text{etc.},$$

P, Q, R, etc. étant des fonctions de x : substituant cette valeur, ainsi que celle de z trouvée ci-dessus, on aura

$$(P'+Q'y+R'y^2+S'y^3+\text{etc.})\left(fx+\frac{y}{2}(fx^2)'+\frac{y^2}{2.3}(fx^3)''+\text{etc.}\right)$$
$$-Q-2Ry-3Sy^2-\text{etc.}=0;$$

d'où l'on tire

$$Q=P'fx,\quad 2R=Q'fx+\frac{P'}{2}(fx^2)',$$
$$3S=R'fx+\frac{Q'}{2}(fx^2)'+\frac{P'}{3.2}(fx^3)'';$$

et ainsi de suite.

Or, en substituant successivement les valeurs de Q, R, etc., il est aisé de reconnaître que les expressions de ces quantités peuvent se réduire à cette forme simple

$$Q=P'fx,\quad R=\frac{1}{2}(P'fx^2)',\quad S=\frac{1}{2.3}(P'fx^3)'',\quad \text{etc.}$$

La fonction P demeure indéterminée, à cause de l'élimination de la fonction φ; mais puisque $u=\varphi z=\varphi(x+yfx+\text{etc.})$, il est visible qu'on aura $P=\varphi x$, et par conséquent $P'=\varphi' x$.

Donc enfin, on aura

$$\varphi z=\varphi x+y\varphi' xfx+\frac{y^2}{2}(\varphi' xfx^2)'+\frac{y^3}{2.3}(\varphi' xfx^3)''+\text{etc.},$$

formule très-remarquable, et d'un grand usage dans l'analyse, surtout pour le retour des suites.

87. On pourrait parvenir immédiatement à ce dernier résultat par la formule de l'art. 33; car il n'y aurait qu'à regarder u comme une fonction de y, et chercher les fonctions primes, secondes, etc. de u relatives à y, c'est-à-dire les valeurs de $u_{\prime}$, $u_{\prime\prime}$, etc.; Faisant ensuite $y=0$, on aurait

$$u,\quad u_{\prime},\quad \frac{1}{2}u_{\prime\prime},\quad \frac{1}{2.3}u_{\prime\prime\prime},\quad \text{etc.}$$

pour les coefficiens P, Q, R, S, etc. de la série.

Tout se réduit donc à trouver ces fonctions dérivées, et à les mettre sous une forme simple et régulière. Pour cela, nous reprendrons les deux équations primes trouvées ci-dessus (art. 85, 86),

$$z_{,} - z'\mathrm{f}z = 0 \quad \text{et} \quad \frac{u'}{u_{,}} = \frac{z'}{z_{,}},$$

lesquelles donnent celles-ci,

$$u_{,} = u'\mathrm{f}z \quad \text{et} \quad z_{,} = z'\mathrm{f}z.$$

On aura donc, 1°.

$$u_{,} = u'\mathrm{f}z;$$

2°. en prenant les fonctions primes selon y,

$$u_{,,} = u'_{,}\mathrm{f}z + u'z_{,}\mathrm{f}'z,$$

$\mathrm{f}'z$ dénote la fonction prime de z relativement à z; or, de la première équation, on tire aussi cette équation prime relative à x,

$$u'_{,} = u''\mathrm{f}z + u'z'\mathrm{f}'z;$$

donc, substituant, on aura

$$u_{,,} = u''\mathrm{f}z^2 + 2u'z'\mathrm{f}'z\mathrm{f}z = (u'\mathrm{f}z^2)';$$

3°. en prenant encore les fonctions primes relatives à y, on aura

$$u_{,,,} = (u'\mathrm{f}z^2)_{,}; \quad \text{or} \quad (u'\mathrm{f}z^2)_{,} = u'_{,}\mathrm{f}z^2 + 2u'z_{,}z\mathrm{f}z;$$

substituant les valeurs de $u'_{,}$ et de $z_{,}$, données ci-dessus, on aura

$$(u'\mathrm{f}z^2)_{,} = u''\mathrm{f}z^3 + 3u'z'\mathrm{f}'z\mathrm{f}z^2 = (u'\mathrm{f}z^3)';$$

donc, prenant les fonctions primes relatives à x, on aura

$$(u'\mathrm{f}z^2)'_{,} = (u'\mathrm{f}z^3)'' = u_{,,,};$$

et ainsi de suite.

Donc, puisque $u = \varphi z$, on aura $u' = z'\varphi'z$, par conséquent,

$$u_{,} = z'\varphi'z\mathrm{f}z, \quad u_{,,} = (z'\varphi'z\mathrm{f}z^2)', \quad u_{,,,} = (z'\varphi'z\mathrm{f}z^3)'', \quad \text{etc.},$$

$\varphi'z$ étant la fonction prime de φz relativement à z seul, et les exposans de z indiquant les puissances de $\mathrm{f}z$.

Faisons maintenant $y=0$, l'équation proposée $z=x+y\mathrm{f}z$ donnera $z=x$; donc

$$z'=1,\quad \varphi z=\varphi x,\quad \varphi' z=\varphi' x \quad \text{et} \quad \mathrm{f}z=\mathrm{f}x;$$

donc enfin

$$\mathrm{P}=\varphi x,\quad \mathrm{Q}=\varphi' x\mathrm{f}x,\quad \mathrm{R}=\frac{1}{2}(\varphi' x\mathrm{f}x^2)',\quad \mathrm{S}=\frac{1}{2.3}(\varphi' x\mathrm{f}x^3)'', \quad \text{etc.}$$

comme ci-dessus.

Pour montrer, par une application, l'usage de cette formule, soit proposée l'équation

$$z=x+yz^m,$$

x et y étant des quantités données, et qu'on demande la valeur de z^n en série suivant les puissances de y; on fera donc

$$\mathrm{f}z=z^m,\ \varphi z=z^n;$$

donc aussi

$$\mathrm{f}x=x^m,\quad \varphi x=x^n,\quad \varphi' x=nx^{n-1},$$

et l'on aura sur-le-champ

$$\mathrm{P}=x^n,$$

$$\mathrm{Q}=nx^{m+n-1},$$

$$\mathrm{R}=\frac{n}{2}(x^{2m+n-1})'=\frac{n(2m+n-1)}{2}x^{2m+n-2},$$

$$\mathrm{S}=\frac{n}{2.3}(x^{3m+n-1})''=\frac{n(3m+n-1)(3m+n-2)}{2.3}x^{3m+n-3},$$

etc.;

de sorte qu'on aura

$$z^n=x^n+nx^{m+n-1}y+\frac{n(2m+n-1)}{2}x^{2m+n-2}y^2$$
$$+\frac{n(3m+n-1)(3m+n-2)}{2.3}x^{3m+n-3}y^3+\text{etc.}$$

Voyez aussi sur ce sujet, la note XI du Traité de la résolution des équations numériques, seconde édition.

CHAPITRE XVI.

Méthode générale pour trouver l'équation primitive d'une équation du premier ordre entre plusieurs variables, lorsque les fonctions dérivées sont linéaires; et pour trouver l'équation primitive d'une équation quelconque du premier ordre entre trois variables.

88. NOUS avons vu comment on peut faire disparaître une fonction arbitraire contenue dans une équation donnée, au moyen de ses équations primes; mais il y a, pour y parvenir, un moyen plus simple à quelques égards, fondé sur la considération que nous avons employée plus haut (art. 82).

Considérons en général l'équation $F(x, y, z, \varphi p) = 0$, dans laquelle p soit égale à $f(x, y, z)$, les deux fonctions désignées par les caractéristiques F et f étant données, et la fonction marquée par la caractéristique φ étant arbitraire; on peut supposer y une fonction de x, telle que la fonction prime de p soit nulle; alors p pourra être traitée comme constante dans la fonction $F(x, y, z, \varphi p)$, pourvu qu'on détermine y' par la condition que la fonction prime de $f(x, y, z)$ soit nulle.

Désignons simplement par $F'(x)$, $F'(y)$, $F'(z)$, et de même par $f'(x)$, $f'(y)$, $f'(z)$ les fonctions primes de $F(x, y, z, \varphi p)$, et de $f(x, y, z)$, prises relativement à x, y, z isolées et regardées comme indépendantes, on aura, comme dans l'endroit cité, les deux équations primes

$$F'(x) + z'F'(z) + y'[F'(y) + z_{,}F'(z)] = 0,$$
$$f'(x) + z'f'(z) + y'[f'(y) + z_{,}f'(z)] = 0,$$

dont

dont la première contiendra φp, et dont la seconde ne contiendra point p; celle-ci servira à éliminer l'inconnue y'; la première, jointe à son équation primitive, servira à éliminer l'inconnue φp.

Cette méthode a l'avantage de pouvoir s'appliquer aux équations qui contiendraient plusieurs fonctions arbitraires de la même fonction p.

En effet, si l'on avait l'équation $(x, y, z, \varphi p, \psi p) = 0$, on trouverait d'abord, comme ci-dessus, une équation du premier ordre sans la fonction φp, mais qui contiendrait encore la fonction ψp; ensuite, appliquant à cette équation le même procédé, et éliminant de nouveau la fonction y' qui paraîtra dans son équation prime par la même équation ci-dessus, on aura une équation du second ordre qui contiendra ψp, et d'où on éliminera cette fonction par le moyen de l'équation du premier ordre; et ainsi de suite, quel que puisse être le nombre des fonctions arbitraires de la même quantité p.

Mais si l'équation proposée contenait les fonctions φp et ψq, p et q étant des fonctions différentes de x, y, z, on ne pourrait pas parvenir à une équation du second ordre, débarrassée des fonctions φp et ψp, et de leurs dérivées; il faudrait alors passer à des équations d'un ordre supérieur.

89. Considérons les équations du premier ordre qui peuvent résulter de l'élimination d'une fonction arbitraire φp, et supposons, pour plus de simplicité, ce qui est toujours possible, que l'équation primitive soit de la forme

$$F(x, y, z) = \varphi p, \quad p \text{ étant} = f(x, y, z),$$

on aura alors les deux équations primes

$$F'(x) + z'F'(z) + y'[F'(y) + z_{\prime}F'(z)] = 0,$$
$$f'(x) + z'f'(z) + y'[f'(y) + z_{\prime}f'(z)] = 0,$$

qui seront délivrées de φp; et il ne s'agira plus que d'éliminer y'.

Le résultat de cette élimination est

$$\frac{F'(x) + z'F'(z)}{f'(x) + z'f'(z)} = \frac{F'(y) + z_{\prime}F'(z)}{f'(y) + z_{\prime}f'(z)}.$$

d'où résulte cette équation de premier ordre

$$F'(x)\times f'(y)-F'(y)\times f'(x)+z'[F'(z)\times f'(y)-F'(y)\times f'(z)]$$
$$+z_{,}[F'(x)\times f'(z)-F'(z)\times f'(x)]=0,$$

qui ne contient que x, y, z avec les fonctions primes z' et $z_{,}$.

Cette équation pourra donc être mise sous cette forme

$$z'+Mz_{,}+N=0,$$

en faisant

$$M=\frac{F'(x)\times f'(z)-F'(z)\times f'(x)}{F'(z)\times f'(y)-F'(y)\times f'(z)},$$

$$N=\frac{F'(x)\times f'(y)-F'(y)\times f'(x)}{F'(z)\times f'(y)-F'(y)\times f'(z)},$$

d'où l'on peut conclure,

1°. Que toutes les équations du premier ordre entre x, y, z' et $z_{,}$ qui ne seront pas réductibles à la forme précédente, ne pourront pas être dérivées d'une équation primitive entre x, y, z et φp, p étant une fonction de x, y, z;

2°. Que toutes les équations du premier ordre réductibles à la forme précédente, pourront toujours avoir pour équation primitive une équation de la forme supposée $F(x, y, z)=\varphi p$, p étant $=f(x, y, z)$.

Car les valeurs des coefficiens M et N étant données en fonctions de x, y, on aura deux équations par lesquelles on pourra déterminer les deux fonctions marquées par les caractéristiques F et f; et la fonction marquée pour φ demeurera arbitraire.

Ce problème étant l'un des plus intéressans de la théorie des fonctions, je vais en donner ici une solution directe.

90. Regardons, ce qui est permis, y et z comme des fonctions de x, dont les fonctions primes soient y' et z', et considérons les deux quantités $z'+N$ et $Mz'+Ny'$; ces quantités deviendront, par la substitution des expressions précédentes de M et de N,

$$\frac{f'(y)[F'(z)z'+F'(x)]-F'(y)[f'(z)z'+f'(x)]}{F'(z)\times f'(y)-F'(y)\times f'(z)},$$

$$\frac{F'(x)[f'(z)z'+f'(y)y']-f'(x)[F'(z)z'+F'(y)y']}{F'(z)\times f'y-F'(y)\times f'(z)}:$$

Si on ajoute et qu'on retranche en même temps du numérateur de la première, la quantité $F'(y) \times f'(y)y'$, et du numérateur de la seconde, la quantité $F'(x) \times f'(x)$, et qu'on fasse attention que $F'(x) + F'(y)y' + F'(z)z'$ est la fonction prime de $F(x, y, z)$, que nous dénoterons simplement par $F(x, y, z)'$, que de même $f'(x) + f'(y)y' + f'(z)z'$ est la fonction prime de $f(x, y, z)$, que nous dénoterons pareillement par $f(x, y, z)'$, on aura

$$z' + N = \frac{f'(y) \times F(x, y, z)' - F'(y) \times f(x, y, z)'}{F'(z) \times f'(y) - F'(y) \times f'(z)},$$

$$Mz' + Ny' = \frac{F'(x) \times f(x, y, z)' - f'(x) \times F(x, y, z)'}{F'(z) f'(y) - F'(y) \times f'(z)};$$

Donc si on fait les deux équations

$$z' + N = o, \quad Mz' + Ny' = o,$$

ces équations seront équivalentes à ces deux-ci

$$F(x, y, z)' = o, \quad \text{et} \quad f(x, y, z)' = o,$$

dont les équations primitives sont évidemment

$$F(x, y, z) = A, \quad f(x, y, z) = B,$$

A et B étant des constantes arbitraires; de sorte que ces équations primitives seront complètes à cause des deux constantes arbitraires A et B.

Mais il est possible qu'en cherchant les équations primitives des équations

$$z' + N = o, \quad Mz' + Ny' = o,$$

où M et N sont des fonctions données de x, y, z, on ne les trouve pas sous la forme précédente. Cependant, sous quelque forme qu'elles puissent se présenter, si elles renferment deux constantes arbitraires a et b, elles doivent être comprises dans les précédentes, et les constantes A et B ne pourront qu'être fonctions des constantes a et b. Si donc on tire de ces équations primitives les valeurs des constantes a et b en x, y, z, et que ces valeurs soient P et Q, ensorte que les équations dont il s'agit soient réduites à la forme $P = a$, $Q = b$, il s'ensuit que les fonctions $F(x, y, z)$ et $f(x, y, z)$ ne pourront être aussi que des fonctions de P et Q. Donc, puisque l'équation primitive d'où l'équation du premier ordre $z' + Mz_{,} + N = o$ est dérivée, est de la forme

$$F(x, y, z) = \varphi p = \varphi[f(x, y, z)],$$

cette équation primitive deviendra

$$\text{fonct.}(P, Q) = \varphi(\text{fonct. } P, Q),$$

la fonction marquée par φ demeurant arbitraire : d'où il résulte que P sera une fonction quelconque de Q ; de sorte que l'équation primitive de l'équation du premier ordre

$$z' + Mz_{,} + N = o,$$

pourra être réduite en général à cette forme très-simple,

$$P = \varphi Q,$$

la fonction marquée par la caractéristique φ étant arbitraire. Cette méthode réduit, comme l'on voit, la détermination de la fonction de deux variables à celle de deux fonctions d'une seule variable ; et elle est surtout remarquable par la simplicité et la généralité du résultat.

91. La méthode précédente peut s'étendre aussi aux fonctions de plus de deux variables. Ainsi, si u est une fonction de trois variables x, y, z, déterminée par l'équation

$$F(x, y, z, u) = \varphi(p, q),$$

p et q étant des fonctions données de x, y, z, u, et $\varphi(p, q)$ étant une fonction quelconque de p, q, on trouvera, par une analyse semblable à celle de l'art. 89, et regardant y et z comme des fonctions de x, dont on déterminera les fonctions primes y' et z', par la supposition que p et q demeurent constantes; on trouvera, dis-je, une équation du premier ordre, dérivée de la fonction φ, de la forme suivante,

$$u' + \mathrm{L}u_{,} + \mathrm{M}_{,}u + \mathrm{N} = 0,$$

L, M, N étant des fonctions données de x, y, z, u, et $u', u_{,}, {}_{,}u$ étant les fonctions primes de u relativement à x, y et z; de sorte que toute équation entre x, y, z, u et les fonctions primes de u, qui ne serait pas de cette forme, ne pourra pas être dérivée d'une équation primitive de la forme ci-dessus.

Pour les équations du premier ordre réductibles à la forme précédente, on trouvera aussi, par une analyse semblable à celle de l'article précédent, que si on regarde y, z, u comme des fonctions de x déterminées par ces trois équations du premier ordre

$$u' + \mathrm{N} = 0, \quad \mathrm{L}u' + \mathrm{N}y' = 0, \quad \mathrm{M}u' + \mathrm{N}z' = 0,$$

et qu'on en cherche les équations primitives qui devront renfermer trois constantes arbitraires a, b, c, qu'ensuite on tire de ces équations les valeurs de ces constantes, de manière que l'on ait

$$a = \mathrm{P}, \quad b = \mathrm{Q}, \quad c = \mathrm{R},$$

P, Q, R étant des fonctions données de x, y, z, u, on aura sur-le-champ

$$\mathrm{P} = \varphi(\mathrm{Q}, \mathrm{R})$$

pour l'équation primitive de l'équation proposée, dans laquelle $\varphi(\mathrm{P}, \mathrm{Q})$ sera une fonction arbitraire de P et Q.

Cette méthode est présentée d'une manière plus simple et plus directe dans la leçon XX du *Calcul des Fonctions*, à laquelle nous nous contentons de renvoyer.

92. Mais si l'on avait, pour la détermination de z en fonction de x et y, une équation quelconque du premier ordre entre x, y, z, z' et $z_{,}$ non réductible à la forme de l'article 89, la même

méthode ne servirait plus. Cependant on peut toujours, quelle que soit la forme de l'équation proposée, la ramener à la forme de l'art. 91, en y introduisant une variable de plus.

Soit donc proposée l'équation

$$z' = F(x, y, z, z_{,}),$$

la fonction indiquée par la caractéristique F étant donnée; je suppose $z_{,} = u$, et comme z est fonction de x, y, il est clair que u sera aussi fonction de x, y; donc prenant les fonctions primes relativement à x seul, on aura $z'_{,} = u'$. Maintenant l'équation proposée deviendra

$$z' = F(x, y, z, u);$$

prenant les fonctions primes relativement à y seul, et observant que z et u sont fonctions de x, y, on aura

$$z'_{,} = F'(y) + z_{,}F'(z) + u_{,}F'(u),$$

où les quantités $F'(y)$, $F'(z)$, $F'(u)$ dénotent les fonctions primes de $F(x, y, z, u)$, prises relativement aux variables isolées y, z, u, ainsi que nous l'avons pratiqué jusqu'ici; donc, substituant u et u' pour $z_{,}$ et $z'_{,}$, on aura l'équation

$$u' = F'(y) + uF'(z) + u_{,}F'(u),$$

dans laquelle les quantités $F'(y)$, $F'(z)$, $F'(u)$ seront des fonctions données de x, y, z et u.

Cette équation serait donc susceptible de la méthode précédente, si u était une fonction des variables x, y, z, regardées comme indépendantes entre elles; mais rien n'empêche de les regarder comme telles, et de regarder en même temps u comme une simple fonction de x, y, z, pourvu qu'on exprime, d'une manière conforme à cette supposition, les fonctions primes u' et $u_{,}$ qui se rapportent aux seules variables x et y.

Qu'on dénote par u', $u_{,}$ et ${}_{,}u$ les fonctions primes de u relativement à x, y, z, il est facile de voir, par les principes établis pour la formation des fonctions primes, que, puisque z est essentiellement une fonction de x et y, dont z' et $z_{\prime}$ sont les fonctions primes relativement à chacune de ces variables isolées, la valeur complète de la fonction prime de u relativement à x, sera $u'+{}_{\prime}uz'$, et que la valeur complète de la fonction prime de u relativement à y, sera $u_{\prime}+{}_{\prime}uz_{\prime}$; ces valeurs sont celles qui, dans l'équation ci-dessus, sont représentées simplement par u' et $u_{\prime}$; mais on a supposé $z_{\prime}=u$, et par l'équation proposée, on a $z'=\mathrm{F}(x,y,z,u)$; donc les valeurs à substituer à u' et $u_{\prime}$ seront $u'+{}_{\prime}u\mathrm{F}(x,y,z,u)$ et $u_{\prime}+{}_{\prime}uu$. Faisant donc ces substitutions, dans la dernière équation en u, u', $u_{\prime}$, et ordonnant les termes suivant les quantités u', $u_{\prime}$ et ${}_{\prime}u$, on aura

$$u'-u_{\prime}\mathrm{F}'(u)+{}_{\prime}u[\mathrm{F}(x,y,z,u)-u\mathrm{F}'(u)]-\mathrm{F}'(y)-u\mathrm{F}'(z)=0,$$

équation qui, étant comparée à la formule générale de l'art. 91, donne

$$\mathrm{L}=-\mathrm{F}'(u),\quad \mathrm{M}=\mathrm{F}(x,y,z,u)-u\mathrm{F}'(u)$$

et
$$\mathrm{N}=-\mathrm{F}'(y)-u\mathrm{F}'(z);$$

de sorte que les trois équations par lesquelles il faudra déterminer y, z, u en fonctions de x, seront

$$u'-\mathrm{F}'(y)-u\mathrm{F}'(z)=0,$$
$$u'\mathrm{F}'(u)+y'[\mathrm{F}'(y)+u\mathrm{F}'(z)]=0,$$
$$u'[\mathrm{F}(x,y,z,u)-u\mathrm{F}'(u)]-z'[\mathrm{F}'(y)+u\mathrm{F}'(z)]=0.$$

Ainsi la difficulté est réduite à trouver les équations primitives d'où celles-ci peuvent être déduites; mais il suffira d'en trouver une, et il serait même inutile de trouver les deux autres.

93. En effet, supposons qu'on ait trouvé les trois équations primitives avec les trois constantes arbitraires a, b, c, et soient P, Q, R les valeurs de ces constantes qui en résultent, on aura $\mathrm{P}=\varphi(\mathrm{Q},\mathrm{R})$ pour la forme générale de l'équation primitive en u (art. 91).

Cette équation, où la caractéristique φ désigne une fonction arbitraire, satisfera dans toute son étendue à l'équation du premier ordre en u, dans laquelle u est regardée comme fonction de x, y, z; mais u a été supposée égale à $z_{,}$, et z doit être, d'après l'équation proposée, une fonction de x et y; donc l'équation $P = \varphi\,(Q, R)$ est trop générale, et il faudra encore chercher les limitations qu'on doit donner à la fonction arbitraire relativement aux deux quantités P et Q, pour que cette équation réponde exactement à l'équation proposée.

Mais, sans entrer dans cette recherche, j'observe que, quelle que puisse être la vraie forme de la fonction arbitraire, on peut la supposer égale à une constante; de sorte que $P = a$, c'est-à-dire, une des équations primitives des trois équations ci-dessus, avec une constante arbitraire, donnera une valeur de u, qui satisfera à l'équation en u.

Maintenant, en remettant $z_{,}$ pour u dans cette équation, on aura une équation du premier ordre entre x, y, z et $z_{,}$, dans laquelle z devra être regardée comme fonction de x et y; mais puisque cette équation ne contient que la fonction prime $z_{,}$, relative à y, on pourra regarder x comme constante, et z comme une simple fonction de y; on trouvera donc son équation primitive par l'analyse des fonctions d'une seule variable, et puisque x est regardée comme constante, la constante arbitraire qui entrera dans cette équation primitive pourra être aussi une fonction quelconque de x, que nous nommerons p.

On aura ainsi une valeur de z en x et y avec les deux quantités a et p, qui satisfera à l'équation proposée. La constante a demeurera arbitraire; mais la fonction p devra être déterminée conformément à cette équation. Pour cela, il n'y aura qu'à y substituer l'expression de z dont il s'agit; tous les termes qui renfermeront y se détruiront, et il ne restera que des termes qui contiendront x, p et p'; de sorte que l'on aura de nouveau une équation du premier ordre entre les variables x et p, dont l'équation primitive donnera la valeur de p en x, avec une nouvelle constante arbitraire b.

De cette manière, on aura enfin une valeur de z en x et y,

avec

avec deux constantes arbitraires a et b, qui satisfera à la proposée indépendamment des constantes. Cette valeur ne sera que particulière; mais on pourra, par la méthode de l'article 83, trouver la valeur générale de z, qui contiendra une fonction arbitraire.

En effet, si $f(x, y, z, a, b) = 0$ est l'équation trouvée pour la détermination de z, on fera $b = \varphi a$, et on égalera à zéro la fonction prime de $f(x, y, z, a, \varphi a)$, prise relativement à la quantité a, regardée comme seule variable; on aura une équation qui servira à déterminer a, et l'équation $f(x, y, z, a, \varphi a) = 0$ sera l'équation primitive cherchée de la proposée du premier ordre, la fonction marquée par la caractéristique φ demeurant arbitraire.

J'ai cru devoir exposer cette méthode avec tout le détail nécessaire pour la faire bien entendre, parce qu'elle est nouvelle et qu'elle réduit toute l'analyse inverse des fonctions de deux variables qui ne passent pas le premier ordre, à l'analyse des fonctions d'une seule variable.

94. Pour éclaircir cette méthode par un exemple dont le calcul soit assez simple, supposons que l'équation proposée soit de cette forme

$$z' = Ay + Bz + f(x, z_{,}),$$

A et B étant des constantes, et $f(x, z_{,})$ une fonction quelconque donnée de x et de $z_{,}$. En rapportant cette équation à la formule générale de l'article précédent, on aura

$$F(x, y, z, z_{,}) = Ay + Bz + f(x, z_{,});$$

donc

$$F(x, y, z, u) = Ay + Bz + f(x, u),$$

et de là, en prenant les fonctions primes relativement à y et z,

$$F'(y) = A, \quad F'(z) = B;$$

de sorte qu'en faisant ces substitutions dans les trois équations du premier ordre entre x, y, z, u, la première d'entre elles deviendra

$$u' - A - Bu = 0;$$

laquelle ne contenant que la variable u, qu'on suppose fonction de x, aura une équation primitive indépendamment des deux autres. En effet, si on multiplie cette équation par e^{-Bx}, e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité, son premier membre deviendra la fonction prime de $ue^{-Bx} + \frac{Ae^{-Bx}}{B}$, comme il est aisé de s'en assurer, en cherchant la fonction prime de cette quantité par les formules du chapitre III.

Ainsi, comme le second membre est nul, on aura, en passant aux fonctions primitives $\left(u + \frac{A}{B}\right) e^{-Bx} = a$, a étant une constante arbitraire. Cette équation donnera donc

$$u = -\frac{A}{B} + ae^{Bx},$$

et substituant pour u sa valeur $z_{,}$, on aura l'équation prime

$$z_{,} = -\frac{A}{B} + ae^{Bx};$$

dans laquelle $z_{,}$ étant la fonction prime de z relativement à y seul, on pourra regarder x comme constante, et z comme fonction de y. Ainsi, comme le second membre ne contient ni y ni z, sa fonction primitive dans cette supposition sera simplement $\left(-\frac{A}{B} + ae^{Bx}\right)y$; donc, passant des fonctions primes relatives à y seul, aux fonctions primitives, on aura l'équation primitive

$$z = \left(-\frac{A}{B} + ae^{Bx}\right)y + p,$$

p étant une fonction quelconque de x qui peut être ajoutée comme constante, puisque sa fonction prime relativement à y est nulle.

De cette expression de z on tirera celles des deux fonctions primes z' et $z_{,}$ relatives à x et y; et l'on aura

$$z' = aBe^{Bx}y + p',$$
$$z_{,} = -\frac{A}{B} + ae^{Bx};$$

ces valeurs étant substituées dans l'équation proposée, elle deviendra

$$aBe^{Bx}y + p' = Ay + B\left(-\frac{A}{B} + ae^{Bx}\right)y + Bp + f\left(x, -\frac{A}{B} + ae^{Bx}\right),$$

laquelle se réduit à

$$p' = Bp + f\left(x, -\frac{A}{B} + ae^{Bx}\right),$$

où l'on voit que les y ont disparu, de manière qu'on pourra déterminer p en fonction de x seul.

Qu'on multiplie cette équation par e^{-Bx}, et qu'on suppose

$$e^{-Bx} f\left(x, -\frac{A}{B} + ae^{Bx}\right) = F'x,$$

elle deviendra

$$(pe^{-Bx})' = F'x,$$

et passant aux fonctions primitives, on aura

$$pe^{-Bx} = Fx + b,$$

b étant une constante arbitraire. De là on tire

$$p = e^{Bx}(Fx + b);$$

donc, substituant cette valeur dans l'expression de z trouvée ci-dessus, on aura

$$z = \left(-\frac{A}{B} + ae^{Bx}\right)y + (Fx + b)\,e^{Bx}.$$

Cette valeur de z n'est que particulière, mais comme elle contient les deux constantes arbitraires a et b, elle donnera la valeur générale, si on fait $b = \varphi a$, et qu'on détermine a par l'équation

$$y + F'(a) + \varphi' a = 0;$$

en désignant par $F'(a)$ la fonction prime de Fx prise relativement à a.

Si $B = 0$, le calcul devient plus simple, et l'on trouvera, en faisant $f(x, Ax+a) = F'x$, les deux équations

$$z = (Ax+a)y + Fx + \varphi a,$$
$$y + F'(a) + \varphi' a = 0,$$

d'où il faudra éliminer a.

95. Cette dernière méthode est néanmoins sujette à quelques difficultés que nous avons résolues complettement dans la même leçon XX déjà citée, où cette matière est envisagée d'une manière plus générale que nous ne l'avons fait ici.

Nous ne nous étendrons pas davantage sur ce qui regarde les fonctions de plusieurs variables. Ceux qui connaissent le calcul qu'on appelle *aux différences partielles*, pourront aisément le rapprocher de l'analyse de ces fonctions, et donner par là à cette analyse les développemens qu'on y pourrait encore desirer.

Notre objet, dans cette première partie, n'a été que d'établir la théorie des fonctions et des équations dérivées, d'une manière purement analytique et indépendante de toute supposition ou considération étrangère.