Christiani Hugenii Zelemii, dum viveret, toparchae opuscula postuma, quae continent dioptricam. Commentarios de vitris figurandis. Dissertationem de corona & parheliis. Tractatum de motu. De vi ...

Huygens, Christiaan

Lugduni Batavorum, 1703

Persistent Link: https://doi.org/10.3931/e-rara-4066

Dioptrica.

DIOPTRICA.

De refractione radiorum.

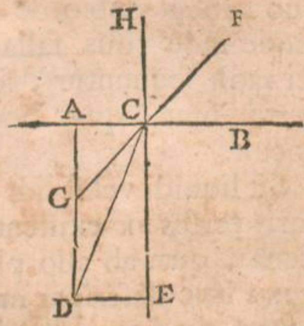
RADIOS lucis in aquam aut alia pellucida corpora incidentes inflecti, cum superficiem eorum attigerint & a via recta detorqueri, jam antiquis temporibus animadversum fuit. Est enim inter Aristotelis Problemata, in quo de remorum apparenti curvitate quæritur. Itemque Archimedis libellus exstitisse fertur de annulo sub aquis viso, in quo procul dubio de flexu isto radiorum agebatur, nataque inde visus fallacia. Leges vero, quas ita affecti radii sequuntur, serius, ac nostro demum ævo repertæ sunt: quas hoc modo sese habere experientia docuit.

Sit liquidi vel solidi diaphani corporis versus FK existentis superficies plana, quæ ab alio plano, in quo figura hæc descripta intelligitur, secetur secundum rectam AB. In hanc incidat radius obliquus DC, qui ad rectam ECK, superficiei propositæ

perpendicularem, faciat angulum DCE; is in aqua vitrove perget secundum CF minori angulo ad CK inclinatam, quam sit angulus DCE; atque ea lege, ut sinus utriusque anguli, hoc est perpendiculares eorum DE, FK ex circumferentia circuli centro C descripti in rectam EK demissæ certam, eandemque semper inter se rationem servent.

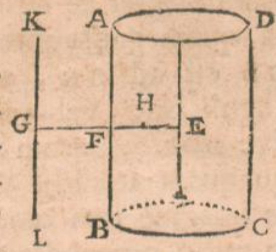
Hæc autem refractionum mensura, non sinuum, sed angulorum ipsorum proportione ab Alhaseno Arabe & Vitellione olim definita fuerat, & experimentis quibusdam utcunque confirmata. Sed cum in majoribus radiorum inclinationibus a vero discrepare proportio illa reperiretur, diligentius sibi Recentiores investigandam existimarunt. In quibus Keplerus, plurimis frustra tentatis †, ipsam quidem rei veritatem non est assecutus; conjecturis tamen suis, variisque molitionibus non parum sequentium studia adjuvit. Post eum vero Willebrordus Snellius, cum jam majus operæ pretium appareret, quippe exorto telescopii invento, multo labore multisque experimentis eo pervenit, ut veras quidem refractionum mensuras teneret, nec tamen, quod invenerat, satis intelligeret. Nam positâ, ex. gratia, aquæ superficie AB, visibili vero sub aqua in D, quod oculo in F posito appareat quasi in recta FC, continuabat hanc FC, donec in G puncto occurreret rectæ DA, ad superficiem aquæ perpendiculari; hisque ita descriptis, statuebat imaginem rei visæ apparere in G, rectæque CD ad CG certam esse rationem, veluti in aqua sesquitertiam. Quæ recta-

† Vide Paralipom. ad Vitellionem.



ctarum inter se ratio vera est, ac convenit prorsus cum ea, quam paulo ante explicuimus, refractionis lege; quia CD est ad CG, ex doctrina triangulorum, ut sinus anguli DGC, vel AGC, seu HCF, ad sinum ang. CDG, sive DCE. Verum ad hanc sinuum proportionem nequaquam attendit Snellius, & usque adeo ab apparente imagine rem omnem pendere existimavit, ut etiam in radio perpendiculari, qualis HC, effectum refractionis, seu, ut falso opinatur, decurtationem radii visorii agnoscat, deceptus eo, quod etiam rectà desuper in vas aqua plenum inspicienti fundus omni parte attolli videtur. Cujus rei vera causa ex radiis ad utrumque oculum tendentibus petenda est. Hæc autem omnia, quæ de refractionis inquisitione volumine integro Snellius exposuerat, inedita mansere; quæ & nos vidimus aliquando, & Cartesium quoque vidisse accepimus, ut hinc fortasse mensuram illam, quæ in sinibus consistit, elicuerit; quâ in explicanda iride & vitrorum figuris investigandis felicissimè est usus. Cujusmodi vero sit illa Refractionis in sinubus proportio, cum radius ex aere in aquam, vitrumve, aut alia corpora diaphana defertur, id vel prismate, ut Cartesius præcipit, inquiri potest, vel aliis modis; quos, qui præcedentia intellexerit, non difficulter inveniet. Nobis hi, quos jam docebo, cæteris faciliores visi sunt; nam si liquida diaphani materia data sit, ea vitreum vas impleatur, quod vel cylindri formam habeat, vel ejusmodi solum, quæ circa axem rotunda sit; quo autem capacius erit, quoque tenuiori vitro, eo melius. Esto illud ABDC, atque ita collocetur, ut axem habeat solaribus radiis, vel ab lumine longinquo venientibus, directe oppositum. Hi igitur radii si cadant in latus DC, concurrent ex parte altera vasis, postquam &

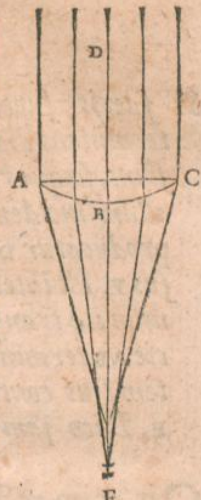
vitrum & aquam eo contentam transierunt, &, si cylindraceum vas fuerit, lineam quandam lucidam signabunt, ut KL in plana superficie vasis lateri parallela. Ea ubi perfectissima contigerit linea minimæque latitudinis, circino capiatur distantia GF qua planum a vase abest, eaque distantia in charta annotetur: atque apponatur deinde semidiameter vasis FE a centro ad extimam superficiem, quæ bifariam secetur in H. Jam proportio refractionis aquæ, vel quicunque liquor fuerit, habebitur ea quæ est EG ad GH, quæ nempe eadem semper in finibus existet, ut superius exposui. Accuratius autem radii post vitrum colligentur, si tantum eos transire sinamus, qui circa medium cylindrum penetrant, lateribus utrinque aliquousque contectis. Ac demonstratio quidem hujus in sequentibus invenietur, propos. 13. nec refractiones quæ in vitro hic accidunt quicquam obesse, quo minus Cylindrus ABCD velut totus aqueus censeatur, patebit ex iis, quæ dicentur propos. 16. & 20. vel ex prop. 22.



Quod si vitri aut Crystalli refractiones simili compendio inquirere libeat, lentem ex ea materia formatam accipe, superficie altera plana, altera convexa, qualis hic est lens ABC. Superficiem planam Soli oppone vel lucernæ procul positæ ut radii incidant ad rectos angulos: post lentem vero adhibe planum aliquod, ac tantum remove, ut in eo radii coëuntes imaginem Solis aut flammæ quam nitidissimam depingant: Esto in E. Tum distantiam hujus imaginis ab lentis convexa superficie metire EB, & quam rationem habet semidiameter convexitatis ABC. puta DB unà cum inventa longitudine

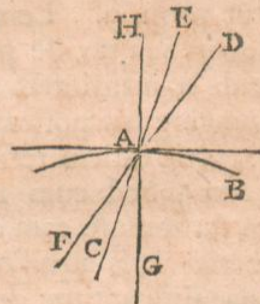
BE,

BE, hoc eſt, tota DE ad hanc ipſam BE, eandem ſcito eſſe refractionis vitri, vel cryſtalli propoſitæ. hoc enim demonſtrabitur prop. 9. Lentem vero circa latera aliquatenus texiſſe proderit, ut imaginem lucidi eo nitidiorem referat. Alios modos adjungere his poſſem operoſiores, quibus proportio eadem refractionis ſubtilius colligatur; Sed cum non multum interſit, tam ſcrupuloſe eam definiri, & in diverſi generis vitris aquiſve, ut jam dixi, diverſa aliquantum deprehendatur, operæ pretium non videtur plura de his præcipere. Aquæ tamen pluviæ refractio, ut hoc addam, accurate dimenſa reperta eſt ut 250 ad 187, paulo ſcilicet major ſeſquitertia; idque ex Iridis amplitudine Carteſius ſubtiliter ſane collegit, Similique ratione, adhibita ſphærula vitrea ſolida, inventaque ex obſervatione ſemidiametro iridis in pluvia vitrea, ſi qua talis caderet, grad. 21:45; proportionem refractionis vitri inde calculo ſubduximus, cujus ratio in iis, quæ de Pareliis, explicabitur, comperimuſque majorem quam 114 ad 76, ſive quam 3 ad 2; minorem vero quam 115 ad 76, ut ſeſquialteram uſurpare abſque errore liceat. Cæterum non ad hanc magis quam ad aliam quamlibet in ſequentibus theorematis reſpeximus, quæque iis definiemus omnia eo modo ſe habitura ſciendum eſt, quæcunque demum fuerit refractionis proportio.



Porro ex lege refractionum modo explicata tria hæc Theoremata facile deducuntur, quorum in cæteris frequens uſus erit.

PROPOSITIO I.

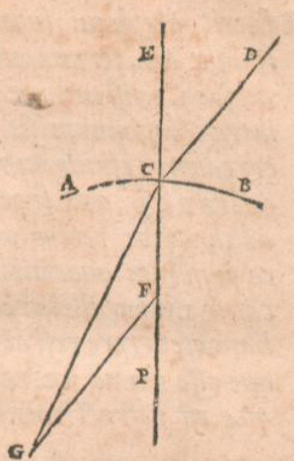


Si fuerit ſuperficies quælibet AB, *terminans diaphanum verſus* C *exiſtens, ſitque radii* DA *extrinſecus in illam incidentis refractio* AC, *&* *producatur* DA *verſus* F, *&* CA *verſus* E. *Et intelligatur deinde diaphanum ita tranſponi, ut eadem ſuperficie* AB *terminetur, ſed exiſtat ad partem ejus contrariam, ubi nempe eſt* E. *Dico jam radii* FA *refractionem fore* AE.

Sit enim recta HAG, quæ penetret ſuperficiem AB ad angulos rectos in A; ſunt ergo in eodem plano per HG ducto tum DA, tum refractio ejus AC. Quia vero radius DA ad perpendicularem HG exiſtente diaphano verſus G, eodem angulo inclinatur, quo radius FA, exiſtente diaphano verſus H, eſt enim DAF, ex hypotheſi, linea recta, etiam refractiones utriuſque cum ipſa HG angulos æquales conſtituent. Radii autem DA refractio AC facit angulum CAG, ergo huic æqualem angulum efficiet refractio radii FA cum ipſa HA, hoc eſt, æqualem angulo HAE, eſt enim CAE linea recta. Sed & in eodem plano per rectam HG ducto ſunt FA & AE, quum ſint in directum ipſis DA, CA. Ergo patet radii FA refractionem fore ipſam AE, quando diaphanum eſt a parte H. Quod erat dem.

PROPOSITIO II.

Si fuerit diaphani superficies quælibet AB, *in quam extrinsecus cadat obliquus radius* DC, *qui refringatur secundum* CG; *sitque recta* ECP *secans diaphani superficiem ad angulos rectos, & sumatur in ea intra diaphanum punctum quodvis* F, *unde ducatur* FG *parallela radio* DC. *Dico hanc occurrere refractioni* CG, *& habere* CG *ad ad* GF *rationem eam, quæ est refractionis.*

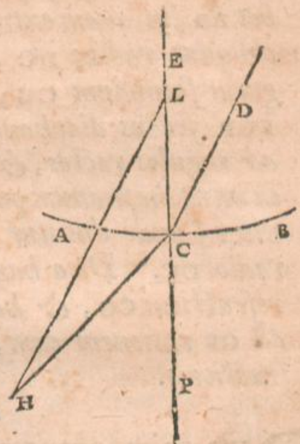


Quia enim propter refractionem angulus FCG minor est quam DCE, idem quoque minor erit, quam PFG, ideoque CG, FG necessario concurrent. Porro, quia secundum refractionum legem superius expositam, sinus anguli DCE ad sinum anguli FCG rationem habet eam, quæ est refractionis. Sinus autem anguli DCE idem est qui anguli DCF seu CFG. Ergo in triangulo CFG habebit sinus anguli CFG ad sinum anguli FCG rationem refractionis. Quare eandem quoque habebit latus CG ad latus GF. Quia nempe in omni triangulo, latera inter se eandem proportionem servant, quam sinus angulorum, quibus illa subtenduntur.

Patet autem & conversæ hujus veritas. Nempe FG parallela existente radio DC, rectæque CG occurrente, fuerit CG ad GF ratio eadem, quæ est refractionis, tunc CG fore refractionem radii DC.

PROPOSITIO III.

Si fuerit diaphani superficies quæcunque AB, *terminans diaphanum versus* L *existens; radius autem intra diaphanum sit* DC, *qui in* C *egrediens refringatur in* CH. *Et ducta* ECP, *quæ superficiem secet ad angulos rectos, sumatur in ea punctum quodvis* L, *unde ducatur* LH *parallela radio* DC. *Dico hanc occurrere refractioni* CH, *atque esse* LH *ad* HC *rationem eam, quæ est refractionis.*

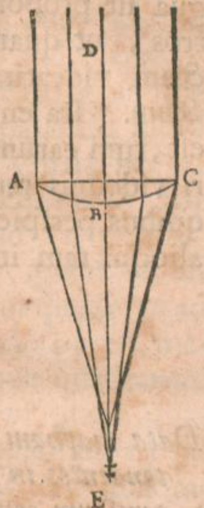


Quia enim radius DC refractus exit a diaphano, erit angulus PCH major angulo LCD, hoc est, angulo CLH. Unde manifestum est rectas CH, LH concurrere.

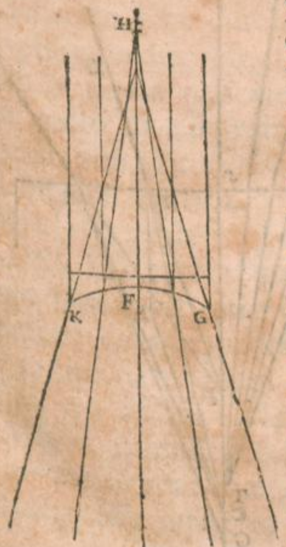
Porro autem, quia secundum legem refractionis, sinus anguli PCH ad sinum anguli LCD sive CLH proportionem refractionis habet. Sinus autem anguli PCH idem est qui sinus anguli LCH, habebit itaque in triangulo LHC, sinus anguli LCH ad sinum anguli CLH proportionem refractionis. Quare eandem quoque habebit latus LH ad latus HC. Quod erat probandum.

Rursus autem & conversa propositionis hujus manifesta est. Nempe si LH parallela existente radio DC, rectæque CH occurrente, fuerit LH ad HC ratio ea quæ refractionis, etiam CH fore refractionem radii DC.

Nunc quomodo puncta ea inveniantur, ad quæ radii, postquam in superficie aliqua plana, convexa, aut cava refracti fuerint, colliguntur, vel ad quæ dispersi respiciunt, deinceps exponemus; quæ quidem puncta concursus vel dispersus vocabimus. Quoniam vero hoc nomine etiam illa puncta designabimus, ad quæ tamen radios omnes refractos non accurate pertinere ostensum fuerit, id quomodo tunc intelligendum sit paucis declarandum est. Ergo si radios parallelos in lentem ABC incidentes omnes post refractionem convenire ostendatur cum axe DBE citra punctum quoddam F, vel omnes ultra idem punctum, verum hoc pacto, ut quo quisque radius axi propinquior fertur eo refractus concurrat propius ad punctum E, idque ad distantiam tandem quavis data minorem, tum quoque



punctum E concursus punctum dicetur. Similiterque in lente cava KFG, si parallelos radios a parte H venientes post refractionem ita spargi ostenderimus, ut retrorsum producti conveniant cum axe FH omnes citra punctum quoddam H, vel omnes ultra, iisdemque etiam conditionibus quas in convexa posuimus, tum punctum H dicetur punctum dispersus. Quin etiam hæc puncta plerumque sic accipiemus, tanquam concursum aut dispersum radiorum exacte determinarent; medias videlicet lentium



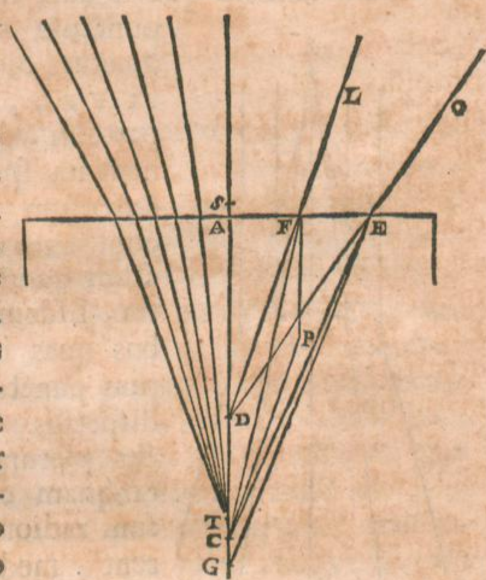
aut superficierum partes respicientes, quarum satis exigua sit proportio ad convexitatis vel cavitatis diametros, ut quantum ad sensum oculorum attinet perfectum videatur, quod geometrica ratione est imperfectum. Ita enim sese habere lentium latitudines certum est, tum earum, quibus in tenebris picturam repræsentari videmus rerum, quæ foris a Sole illuminantur, tum quibus perspicilla seu telescopia constant; neque enim alioqui tam insignes earum effectus cernerentur.

Propositio IV.

Problema I.

Data diaphani superficie plana, & puncto, ad quod radii tendentes in superficiem extrinsecus impingant; Invenire punctum concursus refractorum.

Sit diaphani superficies plana AE, hoc est, in qua est linea recta AE, sitque datum punctum D, ad quod tendentes radii ut LF, OE, superficiei dictæ extrinsecus occurrant. Sit autem DA eidem ad angulos rectos, omnesque lineæ, quæ in schemate apparent, intelligantur in plano per AD ducto. Producatur AD & habeat TA ad AD ra-



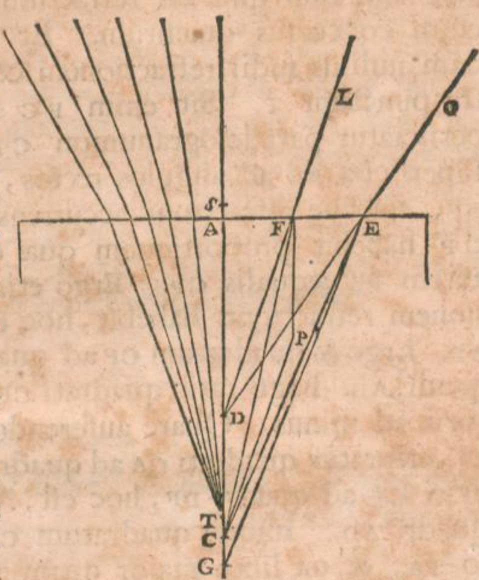
rationem eam quæ eſt refractionis. Dico T fore punctum concurſus quæſitum. Et primo quidem oſtendam nullius radii refractionem concurrere cum AD citra punctum T. Sit enim FC refractio radii LF & perficiatur parallelogrammum CDFP. Erit igitur FP ſuperficiei AE ad angulos rectos, & PC parallela radio LF, ejuſque refractioni occurrens in C. Quare FC ad CP habebit proportionem quæ eſt refractionis †. Eſt autem FD æqualis CP. Ergo etiam CF ad FD proportionem refractionis habebit, hoc eſt, eam, quam TA ad AD. Ergo & quadratum CF ad quadr. DF, ut quadr. TA ad quadr. AD. Ergo ratio quadrati CF ad quadr. DF eſt majoris ad minus. Quare auferendo utrinque quadratum AF, erit ratio quadrati CA ad quadr. AD major quam quadrati CF ad quadr. DF, hoc eſt, quam quadrati TA ad quadr. AD. Itaque quadratum CA majus erit quadrato TA, & CA linea major quam TA : unde apparet refractionem FC convenire cum axe AD ultra punctum T.

† Prop. 11.

Secundo loco oſtendendum eſt radiorum rectæ AD propinquiorum refractiones propius concurrere ad punctum T quam remotiorum. Sit enim radius OE remotior radio LF, & refractio ejus ſit EG. & jungatur EC. Quadratum igitur CE excedit quadr. ED, quantum CF quadratum excedit quadr. DF, quia utrorumque differentia eſt æqualis quadrato CD & duplo rectangulo CDA *. Eſt autem quadratum CE majus quadrato CF. Ergo minor eſt ratio quadrati CE ad quadr. ED, quam quadrati CF ad quadratum FD. Quare & lineæ CE ad ED minor ratio quam CF ad FD. Ut autem CF ad FD ita eſt GE ad ED. Nam ſicut de lineis CF, FD oſtenſum fuit, oſtendi etiam poteſt de lineis GE, ED, habere eas rationem quæ eſt refractionis, quia ſcilicet EG ſtatuitur eſſe refractio radii OE tendentis ad D. Igitur

* Prop. 1v. l. 2. Eucl.

 mi-



minor erit ratio CE ad ED quam GE ad ED: ac proinde GE major quam CE. Unde facile perspicitur AG quoque majorem esse quam CA; adeoque concursum refracti radii OE longius abesse a puncto T quam radii LF.

Denique ostendere oportet aliquos radios refractos convenire cum AD producta in puncto quod dato quolibet intervallo minus distet a puncto T. Sumatur punctum C, dato intervallo propius situm puncto T & ulterius distans ab A, quam ipsum T; & sicut differentia quadratorum TA, AD ad quadr. AD, ita sit differentia quadratorum CA, AD ad quadr. DS. Ergo quia differentia prior minor est posteriore, erit & quadratum AD minus quam quadratum DS: Et linea DA minor quam DS. Ideoque si centro D intervallo DS, circumferentia describatur, ea secabit rectam AF. Secet in F, & jungatur CF, itemque DF, quæ producatur versus L. Quoniam igitur differentia quadratorum TA, AD est ad quadr. AD ut differentia quadratorum CA, AD ad quadratum DS vel DF; erit, componendo, quadratum TA ad quadr. AD ut differentia quadratorum CA, AD una cum quadrato DF ad quadratum DF. Est autem differentia quadratorum CA, AD, hoc est, quadr.

CD cum duplo rectangulo CDA, addita quadrato DF æqualis quadrato CF. Ergo ficut quadr. TA ad quadr. AD, ita quadr. CF ad quadr. DF. Et linea CF ad DF ut TA ad AD. Eft autem ratio TA ad AD ea quæ refractionis. Ergo in triangulo CFD habet latus CF ad FD proportionem refractionis; ac proinde eandem quoque habebit finus anguli CDF vel ADF, ad finum anguli FCD. Eft autem angulus ADF, quo radius incidens LF inclinatur ad perpendicularem, & angulus FCD, quo ad eandem perpendicularem inclinatur linea FC. Ergo conftat radii LF refractionem effe FC. Atque ita oftenfum eft alicujus radii refractionem quolibet intervallo propius concurrere ad punctum T cum axe AD. Erit igitur propter hæc T punctum concurfus quæfitum.

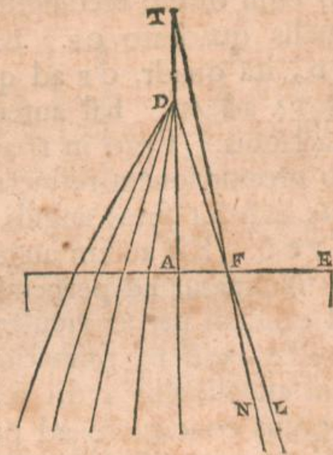
PROPOSITIO V.
Problema 2.

Data diaphani fuperficie plana, & puncto, a quo venientes radii in illam extrinfecus incidant; invenire punctum difperfus refractorum.

Diaphani fuperficies plana fit AE & punctum datum D, ex quo radii in diaphanum procedant ut DF. Sit linea DA fuperficiei AE ad rectos angulos, & producatur, habeatque TA ad AD proportionem refractionis. Dico T fore punctum difperfus quæfitum: Hoc eft radiorum ex D procedentium refractiones, ficut FN eft radii DF, intra diaphanum ita ferri, quafi venirent ex puncto T.

Producatur enim DF verfus L, & jungatur FT. Igitur fi fuperficiem AE, contra quam hîc pofitum eft, terminare imaginemur diaphanum verfus D exiftens,

 ma-



manifeſtum eſt per præced. prop. radiorum ad D tendentium refractiones concurrere ad punctum T: ita ut radii LF refractio futura ſit FT. Eſt autem FD in directum ipſi LF, & FN in directum ipſi TF. Ergo & FN erit hic refractio radii DF †. Itaque radius DF refractus ita fertur quaſi ex puncto T manaret, ideoque erit T punctum diſperſus quæſitum. Patet autem ejuſmodi eſſe, ut radiorum refractiones retro productæ ultra ipſum T, cum recta AD conveniant.

† Prop. 1.

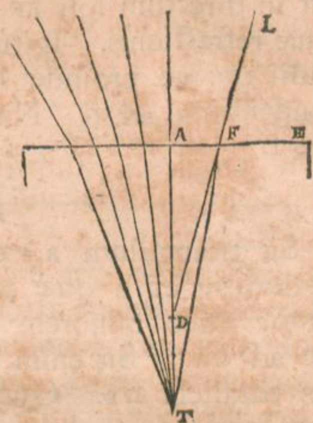
PROPOSITIO VI.

Problema 3.

Data diaphani plana ſuperficie & puncto ex quo manantes radii intrinſecus in eam deferantur; invenire punctum diſperſus refractorum.

Sit plana ſuperficies diaphani AE & punctum T datum, ex quo radii ad ſuperficiem AE ferantur ut TF. Sit TA recta ad ſuperficiem AE perpendicularis, eaque dividatur in D, ita ut TA ad DA habeat proportionem refractionis. Dico D fore punctum diſperſus quæſitum: ut nempe FL refractio radii TF feratur quaſi ex puncto D procederet. Jungatur enim FD. Si igitur LF eſſet radius incidens in ſuperficiem AE, tendenſque ad punctum D, ejus refractio foret FT, ut ex prop. 4. eſt manifeſtum; quia nimirum

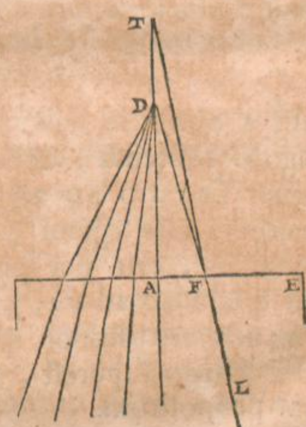
rum TA ad DA eſt proportio refractionis. Igitur viciſſim radii TF refractio erit FL; hæc enim refractionum lex eſt, ut ſupra fuit expoſitum. Igitur D eſt punctum diſperſus quæſitum. Erit autem ejuſmodi ut radiorum refractiones omnes citra D concurrant, hoc eſt ut concurſus earum minus diſtet a ſuperficie A quam punctum D. Quod facile probari poteſt ex iis quæ habentur prop. IV.



PROPOSITIO VII.
Problema 4.

Data diaphani ſuperficie plana, & puncto extra diaphanum ad quod tendentes radii intrinſecus in ſuperficiem ejus incidant, invenire punctum concurſus refractorum.

Superficies diaphani plana ſit AE & punctum extra datum T, quo tendentes radii ut LF, occurrant ſuperficiei AE intrinſecus. Sit TA ſuperficiei ad angulos rectos, eaque ſecetur in D, ut TA ad AD ſit proportio refractionis. Dico D eſſe punctum concurſus quæſitum. Conſtat enim ex prop. V. Si DF ſit radius incidens, ejus refractionem fore FL, quoniam FL eſt



eſt in directum ipſi TF, ratio autem TA ad AD eadem quæ refractionis. Igitur viciſſim hic erit FD refractio radii LF: ac proinde D punctum concurſus radiorum tendentium ad T. Nullus autem radius concurret ultra D.

Lemma 1.

Sit triangulum BAC angulum A obtuſum habens, & ducatur ex B quæ occurrat AC, verſus C productæ in D. Dico minorem eſſe rationem BD ad DA quam BC ad CA. Sit enim ducta CE parallela DB. Quoniam ergo angulus A obtuſus eſt; angulus autem BEC æqualis utriſque ſimul, angulo A & ECA: Erit & BEC angulus

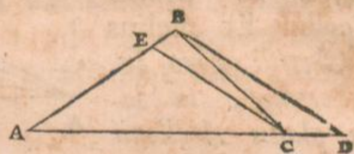
obtuſus, ideoque in triangulo BEC latus BC majus latere EC. quare minor ratio erit EC ad CA quam BC ad CA. ut autem EC ad CA ita BD ad DA. Ergo minor quoque ratio BD ad DA quam BC ad CA. Quod erat propoſitum.

Lemma 2.

Contra autem, poſito, ut ante, triangulo BAC, angulum A obtuſum habente, ſi ducatur BD eidem obtuſo angulo ſubtenſa, occurrenſque rectæ per AC, ita ut minor ſit ratio BD ad DA, quam BC ad CA. Dico DA majorem eſſe quam CA. Si enim DA minor dicatur quam CA, erit per præced. lemma major ratio BD ad DA quam BC ad CA. Ponitur autem minor eſſe. Ergo DA non erit minor quam CA, ſed nec æqualis poteſt eſſe. Ergo ſupereſt, ut DA ſit major quam CA. quod erat propoſitum.

Lem-

Lemma 3.



Sit triangulum ABC angulum B obtusum habens, & ducatur ex B quæ productæ AC versus C occurrat in D. Dico minorem fore rationem AD ad DB quam AC ad CB. Sit enim CE parallela DB. Quoniam ergo trianguli CBE obtusus est angulus B, Erit latus CE majus latere CB: ac proinde minor ratio AC ad CE quam AC ad CB. Ut autem AC ad CE ita est AD ad DB. Ergo minor quoque ratio AD ad DB quam AC ad CB. quod erat propositum.

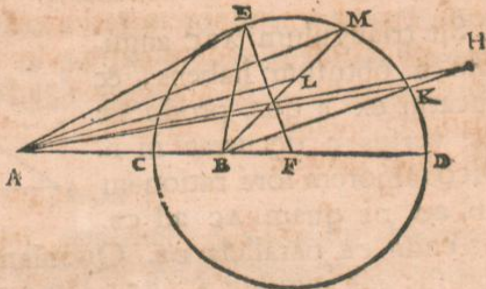
Lemma 4.

Sit denuo triangulum ABC angulo B obtuso, & ducatur BD occurrens rectæ per AC in D, ita ut & angulus ABD existat obtusus, sitque ratio AD ad DB minor ratione AC ad CB. Dico AD majorem esse quam AC. Si enim AD minor dicatur quam AC, sequetur ex lemmate præcedenti, rationem AC ad CB minorem esse quam AD ad DB, hic autem ratio AD ad DB minor ponitur quam AC ad CB. Non est igitur AD minor quam AC. Sed nec æqualis, cum BC, BD diversæ ponantur. Ergo major est AD quam AC, quod erat propositum.

Lemma 5.

Esto linea recta AB divisa in C, ut AC sit major quam CB. Et producatur versus B, habeatque AD ad DB rationem eandem quam AC ad CB: Et describatur circa CD diametrum circulus CED. Si ad quodvis circumferentiæ punctum ut E ducantur rectæ AE, BE.

Dico esse AE ad EB ut AC ad CB. Demonstratum hoc est ab *Eutocio in comm. ad Conica Apoll.* Et melius a *Clariss. Viro Fr. Schotenio, in locis planis Apollonii ab ipso restitutis.* Quod si vero extra descriptum circulum sumatur punctum ut H, ad quod rectæ inflectantur a punctis A, B; Dico AH ad HB minorem rationem habere quam AC ad CB. Ducatur enim AK ad intersectionem circumferentiæ & rectæ BH. Est igitur AK ad KB ut AC ad CB: ideoque AK major quam KB. Quare addita utrique KH, erit AKH ad HB minor ratio quam AK ad KB. Sed HA minor est quam HKA vel ipsi æqualis, si H sumtum fuerit in linea CD versus D prolongata. Ergo & AH ad HB minorem rationem habebit, quam AK ad KB, hoc est, quam AC ad CB. quod erat propositum.



Rursus si intra circulum sumatur punctum ut L, ad quod rectæ inflectantur ex punctis A & B. Dico AL ad LB rationem majorem esse quam AC ad CB. Producta enim BL occurrat circumferentiæ in M. & jungatur AM. Est ergo AM ad MB ut AC ad CB, ideoque AM major quam MB. Sed ALM major est quam AM, vel eidem æqualis, si punctum L sumtum fuerit in linea BD. Ergo ALM quoque major erit quam MB. Quare si utrimque auferatur LM, fiet major ratio reliquæ AL ad reliquam LB quam ALM ad MB. Ratio autem ALM ad MB major est, vel eadem cum ratione AM ad MB. Ergo ratio AL ad LB major utique erit quam AM ad MB. quare constat propositum.

Pa-

Patet autem & converſum utriuſque horum. Nempe ſi AH ad HB minorem rationem habeat quam AC ad CB, punctum H cadere extra circulum CED dicto modo deſcriptum. Si autem AL ad LB majorem habeat rationem quam AC ad CB, punctum L intra eundem circulum cadere.

PROPOSITIO VIII.

Problema 5.

Data diaphani ſuperficie ſphærica convexa, in quam radii paralleli extrinſecus incidant, invenire punctum concurſus refractorum.

Esto ſuperficies convexa diaphani ABP cujus centrum C, in quam incidant radii ut OB, NP paralleli rectæ AC, quæ per centrum ducta eſt. Producatur AC uſque in Q, ut AQ ad QC habeat rationem eam quæ eſt refractionis. Dico Q fore punctum concurſus quæſitum.

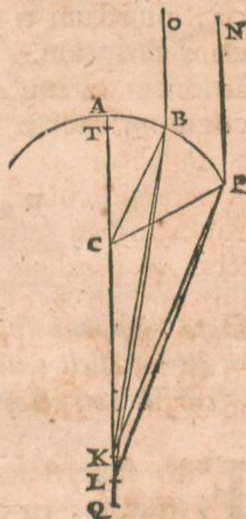
Ac primo quidem demonſtrabitur nullius radii refractionem cum producta AC concurrere ultra punctum Q. Sit enim radii OB refractio BL (quæ neceſſario conveniet cum AC ultra punctum C) & jungatur CB. Quia igitur CB in ſuperficiem AB perpendicularis eſt, BL autem refractio radii OB, cui radio parallela eſt CL, habebit BL ad LC rationem eam quæ eſt refractionis*, hoc eſt eam, quam AQ ad QC. Sed AL major eſt quam BL, quoniam illa per centrum circuli AB ducta eſt. Itaque major ratio AL ad LC quam BL ad LC, hoc eſt, quam AQ ad QC. Et dividendo, major proinde ratio AC ad CL quam AC ad CQ: ideoque CL minor

* Prop. 1 [illegible]

 quam

quam CQ. Ergo refractio radii OB non concurrit cum AC ultra punctum Q.

Secundo loco ostendetur radiorum axi AC propiorum refractiones propius accedere ad punctum Q quam remotiorum. Sit enim radius OB dictæ AC propior quam radius NP, atque hujus refractio sit PK. Et jungantur KP, KB. Eâdem igitur ratione qua modò, & BL ad LC & PK ad KC habebit proportionem refractionis*. Est autem BK major quam PK. Ergo major ratio BK ad KC quam PK ad KC, hoc est, quam BL ad LC. Angulus autem BCL necessario est obtusus, cui utraque linearum BL, BK subtenditur. Ergo major erit CL quam CK†. Atque ita apparet, refractionem radii OB propius concurrere ad punctum Q quam refractionem radii NP.



* Prop. 11.

† Lem. 2.

Denique ostendemus aliquos radios refractos convenire cum AC ad punctum quolibet dato intervallo minus distans a puncto Q. Sit enim primò quilibet radius parallelus incidens NP, & refractio ejus PK, & sumatur inter K & Q, punctum L dato intervallo propinquius puncto Q. quam autem rationem habet CQ ad QA, eam habeat CL ad LT, & jungatur PL. Quoniam igitur angulus PCL obtusus est, & CL major quam CK, erit minor ratio PL ad LC quam PK ad KC†. Est autem ratio PK ad KC eadem quæ refractionis, quia PK ponitur esse refractio radii NP. Ergo cum ratio PL ad LC sit minor quam PK ad KC, eadem quoque minor erit ratione TL ad LC, nam per constr.

† Lem. 1.

est

est TL ad LC ut AQ ad QC, hoc est, ut PK ad KC. Igitur PL minor quam TL. Sed TL minor est quam AL; est enim CT minor quam CA, quia CL minor quam CQ. Ergo circumferentia descripta centro L radio LT, necesse est ut secet circumferentiam AP inter A & P. Secet ergo in B & ducatur BO parallela AC, & jungantur BL, CB. Quia igitur CB ad superficiem AB perpendicularis est, habetque BL hoc est TL ad LC proportionem refractionis, erit BL refractio radii OB, rectæ AC paralleli. Itaque patet & hujus radii, & omnium qui ab axe AC minus distabunt refractiones concurrere ad puncta dato intervallo minus remota a puncto Q. Et ob hæc quidem erit Q punctum concursus radiorum refractorum, quod invenire oportebat.

PROPOSITIO IX.

Problema 6.

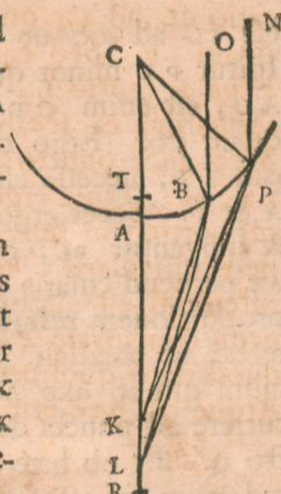
Data diaphani superficie sphærica convexa cui paralleli radii intrinsecus occurrant, invenire punctum concursus refractorum.

Sit superficies convexa AB, centro C, per quod ducta sit CA radiis incidentibus parallela. Producatur ea ad R, & habeat CR ad RA proportionem refractionis. Dico R esse punctum concursus quæsitum.

Primum ergo demonstrabimus nullius refractionem radii convenire cum producta CA ultra punctum R. Sit enim radii OB ipsi CA paralleli refractio BL, & jungatur BC. Ergo cum CB ad superficiem AB perpendicularis sit, & CL parallela radio OB, habebit CL ad LB proportionem refractionis*, hoc est, eam quam CR ad RA. Sed LA minor est quam LB. Igitur CL ad LA

* Prop. III.

 ma-



majorem habebit rationem quam ad LB, hoc est, quam CR ad RA: Et dividendo CA ad AL majorem quam CA ad AR. Ergo AL minor quam AR. patetque radii OB refractionem concurrere citra punctum R.

Porro ostendendum est radiorum rectæ CA propinquiorum refractiones propius pervenire ad punctum R. Sit itaque radius OB quam NP propior CA, & refractio radii NP sit PK; & jungantur BK, CP. Habebit igitur CK ad KP refractionis proportionem *æque ac CL ad LB. quia autem KB minor est quam KP, erit major ratio CK ad KB quam CK ad KP, hoc est, quam CL ad LB. Suntque anguli CBL, CBK uterque necessario obtusi. † Ergo major erit CL quam CK, ex quo propositum patet.

* Prop. III.

† Lem. 4.

Denique est ostendendum, alicujus radii refractionem occurrere CA productæ in puncto, quod dato quolibet propius sit puncto R. Sit aliquis e parallelis radiis NP, cujus refractio PK: Et sumatur punctum L inter K & R, dato intervallo propius puncto R, & habeat CL ad LT rationem refractionis, eandem nempe quam CR ad RA. Quia ergo AL minor est quam AR, erit CA ad AL ratio major quam CA ad AR. Et componendo major ratio CL ad LA quam CR ad RA, hoc est quam CL ad LT; quare LT major erit quam LA. Jungatur LP. Itaque quia angulus CPK est obtusus, & ponitur CL major quam CK, erit quoque obtusus angulus CPL: ac proinde major ratio CK ad KP quam CL ad LP †. Ut autem CK ad KP ita est CL ad LT, nam utraque est ratio eadem quæ refractionis. Ergo major ra-

† Lem. 3.

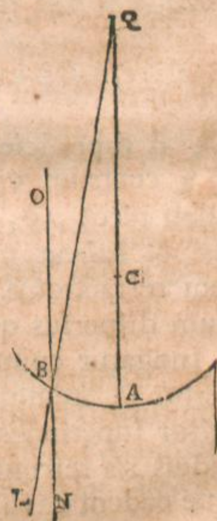
ratio CL ad LT quam CL ad LP, ac proinde LT minor quam LP. Sed eadem LT major est ostensa quam LA. Ergo si centro L, semidiametro LT circumferentia describatur, ea secabit circumferentiam AP inter A & P. Secet in B puncto, & sit BO parallela AC, & jungantur LB, BC. Quia ergo CL ad LT, hoc est, ad LB habet proportionem refractionis, estque CB ad superficiem AB perpendicularis, erit BL refractio radii OB †. Quare ostensum est alicujus radii rectæ CA paralleli refractionem concurrere cum eadem AC producta, in puncto quod dato quolibet intervallo minus absit a puncto R. Atque ob hæc erit R punctum concursus quæsitum.

† Prop. 11.

PROPOSITIO X.

Data diaphani superficie sphærica cava in quam radii paralleli extrinsecus incidant, invenire punctum dispersus refractorum.

Sit superficies cava AB ex sphæra cujus centrum C, incidantque in eam radii rectæ CA paralleli ut OB. Producatur AC, & habeat AQ ad QC proportionem eam quæ est refractionis. Dico Q esse punctum dispersus quæsitum: hoc est, radios ita refractione inflecti ut pergant tanquam ex puncto Q promanantes.



Jungatur enim QB & producatur versus L, & radius OB versus N. Itaque sicut superficie AB convexa existente, id est, diaphano ad partem ubi est C collocato, radii NB refractio

est

* Prop. VIII. † Prop. I. est BQ*: ita hîc ubi diaphanum ad contrariam partem situm est, erit radii OB refractio BL†, quia BO est in directum ipsi NB, & BL ipsi BQ. Sciendum tamen refractionem BL atque omnes alias retro productas non ad ipsum punctum Q concurrere, sed paulo citra, quoniam etiam radii NB in convexam superficiem incidentis refractio citra punctum Q cum axe concurrit*. Verum exiguum discrimen pro nullo hîc habemus, sicut supra jam admonui; quia videlicet illos radios præcipuè respicimus qui proximi sunt axi AC. (* Prop. VIII.)

Manifestum autem est ex propositione hac, radios tendentes ad punctum Q, ut LB, incidentesque intrinsecus in superficiem cavam AB, refractione facta, evadere parallelos axi AC. Nam si radii OB refractio est BL, erit & radii LB refractio BO.

Propositio XI.

Data diaphani superficie sphærica cava, in quam radii paralleli intrinsecus incidant, invenire punctum dispersus refractorum.

Ad superficiem cavam AB cujus centrum C, accidant radii paralleli rectæ AC, ut OB. Producatur CA, & habeat CR ad RA proportionem refractionis. Dico R esse punctum dispersus quæsitum.

Jungatur enim RB & producatur versus L, itemque OB versus N. Si igitur superficies AB esset convexa, radius NB refringeretur in BR*. Itaque eâdem cava existente, erit quo- (* Prop. IX.)

que

que radii OB refractio BL †, quandoquidem OBN, RBL † Prop. I.
sunt lineæ rectæ.

Hinc vero manifestum est radios ad R tendentes ut LB ita refringi ad eandem cavam superficiem AB, ut postea fiant rectæ AC paralleli. Nempe quia BL est refractio radii OB, etiam BO erit refractio radii LB.

DEFINITIO.

Pertinere ad punctum illud radii vel radiorum refractiones dicuntur, ad quod tendunt, vel a quo exeunt, vel ad quod eo modo se habent, ac si inde prodiissent.

PROPOSITIO XII.

Data diaphani sphærica superficie convexa, vel cava, & puncto, ad quod pertinentes radii superficiei dictæ occurrant; si tribus ab illo puncto distantiis quarta proportionalis constituatur in axe, qui per centrum superficiei & punctum ipsum transit; quarum distantiarum prima sit a puncto dato ad illud quo pertinerent refractiones axi parallelorum a contraria parte advenientium; secunda ad superficiem refringentem; tertia ad centrum illius; terminus quartæ distantiæ erit punctum quo pertinebunt radii refracti. Hæc autem quarta distantia in eam dati puncti partem sumenda est, ut vel omnes eodem versus habeantur, vel binæ utrimque.

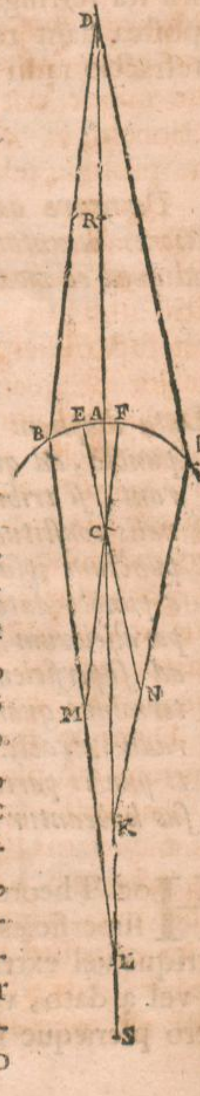
Hoc Theorema in partes octo distribuemus, nam superficies sphærica vel convexa est, vel cava; & utrique vel extrinsecus, vel intrinsecus radii occurrunt; & vel a dato, vel ad datum punctum tendentes. Partes vero pleræque suos casus habebunt.

PARS I.

Cum superficies est convexa, & a puncto venientes radii extrinsecus in eam deferuntur.

Esto diaphani superficies sphærica convexa AB, cujus centrum C, & punctum D a quo venientes radii in illam deferantur ut DB; agatur recta per DC, inque ea signetur punctum R, ita ut CR ad RA habeat proportionem refractionis. Est igitur R punctum concursus radiorum parallelorum a contraria parte venientium *. Punctum autem D aut magis aut minus a convexo distabit quam punctum R; nam si in ipsum R incidit, radii ab illo venientes pro parallelis habentur, ut ex prop. IX. manifestum est; quia nempe, uti diximus, paralleli ex parte C venientes a superficie AB detorquentur ad punctum R. Primò igitur sit punctum D remotius quam R, & quandoquidem DR est prima dictarum distantiarum, DA secunda, DC tertia, fiat ut DR ad DA ita DC ad DS. Dico S fore punctum concursus radiorum ex D procedentium. Nam primùm quidem, nullius radii refractionem cum axe AC ultra punctum S convenire, sic ostendemus. Sit radii cujusvis DB refractio BL, & ducatur CM parallela DB, & producatur versus C quousque occurrat superficiei AB in F. Cum igitur FM per centrum convexi ducta sit parallela radio

* Prop. IX.

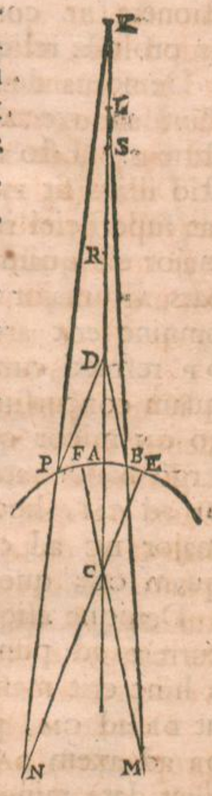


dio

dio DB, sitque refractio hujus BM, constat FM minorem fore quam CR†, & CM proinde minorem quam AR. DB autem major est quam DA. Itaque major ratio DB ad CM, hoc est, DL ad LC, quam DA ad AR; ideoque per conversionem rationis minor ratio LD ad DC quam AD ad DR, hoc est, quam SD ad DC*. Ergo DL minor erit quam DS. Patet igitur radii DB refractionem BL convenire cum axe AC citra punctum S, ac proinde reliquorum quoque omnium. † Prop. IX. * Ex hyp.

Deinceps demonstrabimus radios eos qui minus distant ab axe AC, refractos propius accedere ad punctum S. Esto radius DP remotior quam DB, & refractio illius sit PK. Ducatur CN parallela DP, & occurrat superficiei in E. Angulus itaque ADP, hoc est ACE major est quam ADB sive ACF; sed & circumferentiæ pars AP major est quam AB; itaque arcus EP major omnino erit arcu FB. Quare constat concursum radii DP refracti cum recta ECN propiorem esse centro C quam concursum radii DB refracti cum recta FM*. Ergo CN minor quam CM. Sed DP major est quam DB. Ergo major ratio DP ad CN, hoc est, DK ad KC quam DB ad CM, hoc est, quam DL ad LC. Et dividendo, major DC ad CK, quam DC ad CL. Ergo CK minor quam CL, quod ostendere oportebat. * Prop. VIII.

Denique aliquos radios refractos cum axe AC concurrere ad puncta quolibet intervallo propiora puncto S hinc erit manifestum. Etenim quia DL est ad LC ut DB ad CM, potestque fieri appropinquando radium DB ad axem DAC ut differentia inter DB & DA sit qualibet data minor, ut & ea quæ est inter CM & AR; nam excessus AR super CM eo minor erit quo minor fuerit arcus BF; apparet fieri posse ut ratio DB ad CM, hoc est DL ad LC quam libet proxime eadem evadat quæ DA ad AR; ac proinde per conversionem rationis, ratio LD ad DC quamlibet proxime eadem quæ AD ad DR, hoc est, quæ SD ad DC. Atque ita DL proxime æqualis DS. hoc est, ut punctum L ubi radius DB convenit cum axe AC quamlibet propinquum fiat puncto S. Propter hæc igitur erit S punctum concursus radiorum ex D manantium.



Esto autem nunc punctum D inter A & R datum; & fiat rursus ut DR ad DA ita DC ad DS; accipiatur autem DS non versus C sed versus R. Dico radios ex puncto D in superficiem AB incidentes post refractionem ita inflecti quasi venirent ex puncto S, sive S fore punctum dispersus radiorum refractorum.

Etenim primo ostendemus omnes dictas refractiones retro productas concurrere longius ab A quam sit punctum S. Sit radius incidens DB, ejusque refractio BM, quæ producta retro recurrat axi AC in L. oportet autem DB minorem esse duabus tertiis DC, ut refractio BM retro producta conveniat cum axe AC, nam alioqui vel parallela illi fieret, vel occurreret prorsum producta; ut manifestum est ex demonstratis prop. IX. Ducta igitur CM parallela DB, erit rursus, sicut in casu præcedenti, CM minor quam AR; at DB major quam DA; ideoque major ratio DB ad CM, hoc est, DL ad LC, quam DA ad AR; Et invertendo minor CL ad LD quam RA ad AD; & dividendo minor CD ad DL quam RD ad DA, hoc est, quam CD ad DS. Quare DL

ma-

major quam DS. ideoque occursus L ulterius distat ab A quam punctum S. Sumto autem puncto D valde propinquo ipsi R posset fieri DB major quam CM, & sic refractio radiorum quorundam ab axe remotiorum concurrere simul cum axe ultra punctum C.

Porro quod radiorum axi AC propiorum refractiones retro productæ propius concurrant ad punctum S, demonstratur quemadmodum in casu præcedenti; nisi quod hîc, ubi ostenderimus majorem esse rationem DK ad KC quam DL ad LC, inde sequatur, invertendo & dividendo, rationem CD ad DK minorem esse quam CD ad DL, unde DK major quam DL.

Denique aliquorum radiorum refractiones quolibet intervallo propius concurrere ad punctum S eodem quoque modo ostenditur atque in casu priori. Erit igitur S punctum dispersus radiorum ex D promanantium.

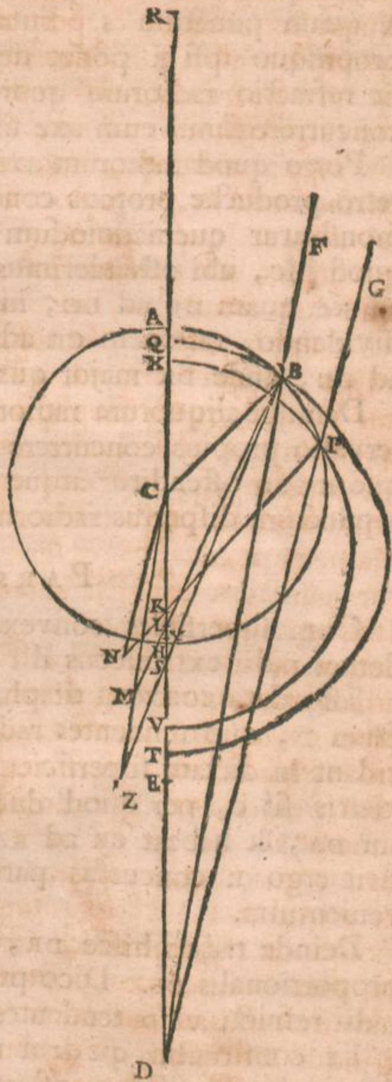
PARS II.

Cum superficies convexa est, & ad punctum tendentes radii extrinsecus illi occurrunt.

Esto data convexa diaphani superficies AB, & punctum D, quo tendentes radii ut FB, GP, exterius incidant in dictam superficiem. Centrum autem convexitatis sit C, per quod ducta sit recta DCA. Producatur DA, & habeat CR ad RA proportionem refractionis. Erit ergo R concursus parallelorum a contraria parte venientium.

Deinde tribus hisce DR, DA, DC, inveniatur quarta proportionalis DS. Dico punctum S esse quo pertinent radii refracti ad D tendentes.

Et constructio quidem universalis est ad omnes casus pertinens; in demonstratione autem triplex spectanda est differentia. Nam DC ad radium CH vel majorem rationem habet, quam sit refractionis ratio, vel minorem, vel eandem. Atque hoc ultimo casu animadversione dignum est radios omnes perfectè coire ad punctum unum S. Ut jam olim adverteram cum ovalem quandam ex iis quas Cartesius excogitaverat ad colligendos radios uno casu circulum fieri admonui; quod suis in Cartesii geometriam commentariis Franc. Schotenius inseruit.



Ut autem tres quos dixi casus ordine persequamur: sit primo punctum D ita positum, ut major sit ratio DC ad CH, ratione refractionis, hoc est, quam CR habet ad RA. Sitque S punctum repertum eo modo quo diximus. Radius autem quilibet ut FB tendens ad punctum D, refractus conveniat cum axe AC in L. Ostendam igitur primo punctum L cadere citra S. Jungatur BS, & producatur, ut & BL, & occurrat utraque rectæ CMZ radio FBD parallelæ, nempe BS in Z, BL in M. Sicut autem DA ad AS ita sit DE ad ES. Quia

Quia ergo ratio DC ad CH ſive ad CA major ponitur quam CR ad RA; & permutando major erit DC ad CR quam CA ad AR. Et componendo DR ad RC major quam CR ad RA. Quare reliquæ DC ad reliquam AC major ratio quam DR ad RC *. Ut autem DR ad RC ita eſt DA ad AS. nam quia ut DR ad DA ita DC ad DS, erit permutando & per converſionem rationis DR ad RC ut DA ad AS. Itaque ratio DC ad CA major quoque quam DA ad AS. Ut autem DA ad AS ita DE ad ES, ideoque duæ ſimul DA, DE ad duas AS, SE, hoc eſt ad AE, ut DA ad AS. Igitur major ratio DC ad CA, ſive ad CH, quam ADE ad AE: Et dividendo major ratio DH ad HC quam duplæ DE ad EA. Et ſumtis conſequentium duplis, major DH ad HA, quam duplæ DE ad duplam EA, hoc eſt, quam DE ad EA. Itaque punctum E cadit extra circulum ABH, ideoque ſi circa EA diametrum circulus deſcribatur, is intra ſe complectetur punctum B. Eſt autem DE ad ES ut DA ad AS. Itaque major erit ratio DB ad BS quam DA ad AS †. Ut autem DB ad BS ita eſt CZ ad ZS, & ut DA ad AS ita DR ad RC, fuit enim hoc antea oſtenſum. Major itaque erit ratio CZ ad ZS quam DR ad RC. Componitur autem ratio DR ad RC ex rationibus DR ad RA & RA ad RC, quarum DR ad RA eſt eadem quæ DC ad CS, quia fecimus ut DR ad DA ita DC ad DS. Ergo ratio CZ ad ZS major quam quæ componitur ex rationibus DC ad CS & RA ad RC. Ratio autem CZ ad ZS eadem eſt compoſitæ ex rationibus CZ ad ZB & ZB ad ZS. Ergo quæ ex duabus hiſce componitur ratio major erit compoſita ex rationibus DC ad CS & RA ad RC. quare ablatis utrinque rationibus æqualibus, hinc DC ad CS, inde BZ ad ZS, major adhuc erit ratio CZ ad ZB quam RA ad RC. Et invertendo ratio BZ ad ZC minor quam CR ad

* 33. V. Elem.

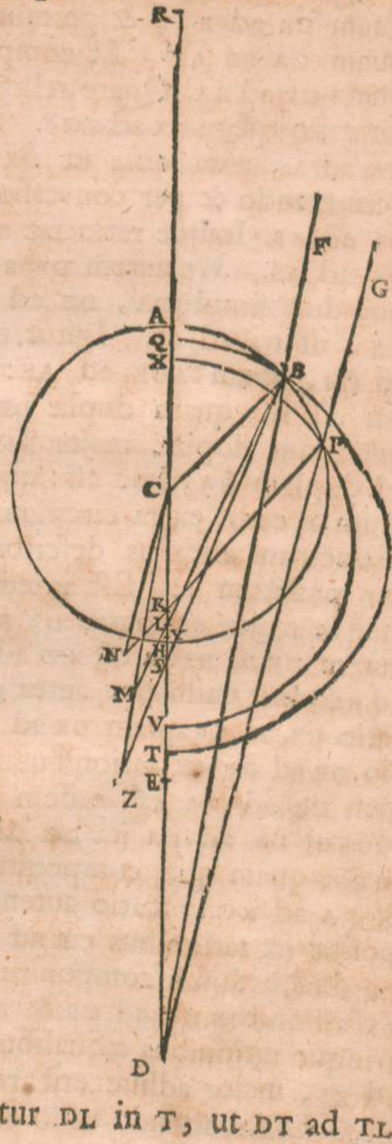
† Lem. 5.

RA.

RA. Sicut autem CR ad RA, quæ eſt ratio refractionis, ita eſt BM ad MC *, quoniam BM eſt refractio radii FB, cui parallela ducta eſt CM. Igitur minor eſt ratio BZ ad ZC quam BM ad MC. Angulus autem BCZ, quoniam æqualis eſt angulo FBC, neceſſario eſt obtuſus; eique utraque linearum BM, BZ ſubtenſa eſt. Ergo CM minor erit quam CZ †, & angulus proinde CBM minor angulo CBZ. Quare & CL minor quam CS. Itaque apparet omnium radiorum ad D tendentium refractiones cum axe AC convenire citra punctum S.

* Prop. 11.

† Lem. 2.



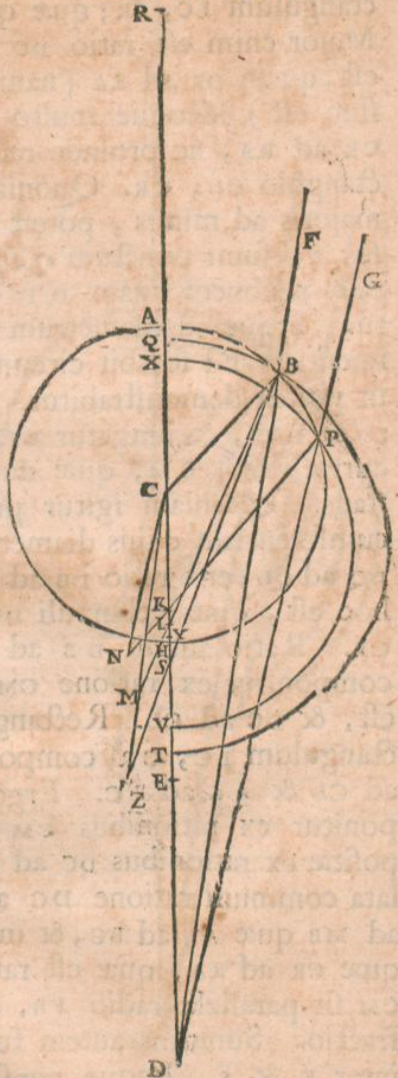
Nunc porro oſtendemus refractiones radiorum axi AC propinquiorum concurrere propius ad punctum S, idque ad intervallum minus quolibet dato. Sit enim radius aliquis GP tendens ad D, inque ſuperficiem AB incidens, qui refringatur in PK. Eſt igitur concurſus K inter C & S ex jam demonſtratis. Porro inter K & S quodvis punctum ſumatur L: & dividatur DL in T, ut DT ad TL ha-

habeat rationem eam quam rectangulum DC, AR ad rectangulum LC, CR; quæ quidem erit majoris ad minus. Major enim eſt ratio DC ad CL quam DC ad CS, hoc eſt, quam DR ad RA (nam has eaſdem eſſe ſupra oſtenſum eſt) ideoque multo major ratio DC ad CL quam CR ad RA, ac proinde rectangulum DC, AR majus rectangulo CL, CR. Quoniam igitur ratio DT ad TL eſt majoris ad minus, poteſt in linea DL continuata verſus L, ſumi punctum Q, ita ut DQ ad QL habeat eandem rationem quam DT ad TL. Eſto itaque inventum, ſitque ad diametrum QT deſcripta circuli circumferentia. Ea ſecabit circumferentiam AP inter A & P, ut poſtea demonſtrabitur. Secet ergo in B, & ducatur recta DBF, & jungatur BL, eaque producatur, & occurrat rectæ CM, quæ ducenda eſt ipſi DBF æquidiſtans. Quoniam igitur punctum B eſt ad circuli circumferentiam cujus diameter TQ, eſtque DT ad TL ut DQ ad QL; erit ratio DB ad BL eadem quæ DT ad TL *, hoc eſt, quæ rectanguli DC, AR ad rectangulum LC, CR. Ratio autem DB ad BL, hoc eſt, CM ad ML componitur ex ratione CM ad MB & MB ad ML, hoc eſt, & DC ad CL. Rectangulum vero DC, AR ad rectangulum LC, CR compoſitam habet rationem ex DC ad CL & AR ad RC. Ergo eadem eſt ratio quæ componitur ex rationibus CM ad MB & DC ad CL, compoſitæ ex rationibus DC ad CL & AR ad RC. Quare ablata communi ratione DC ad CL, erit eadem ratio CM ad MB quæ AR ad RC, & invertendo BM ad MC eadem quæ CR ad RA, quæ eſt ratio refractionis. Ergo cum CM ſit parallela radio FB, erit BLM ejuſdem radii refractio. Sumtum autem fuit punctum L pro arbitrio inter K & S. Itaque conſtat alicujus radii refractionem quolibet dato intervallo propius accedere ad pun-

* Lem. 5.

ctum

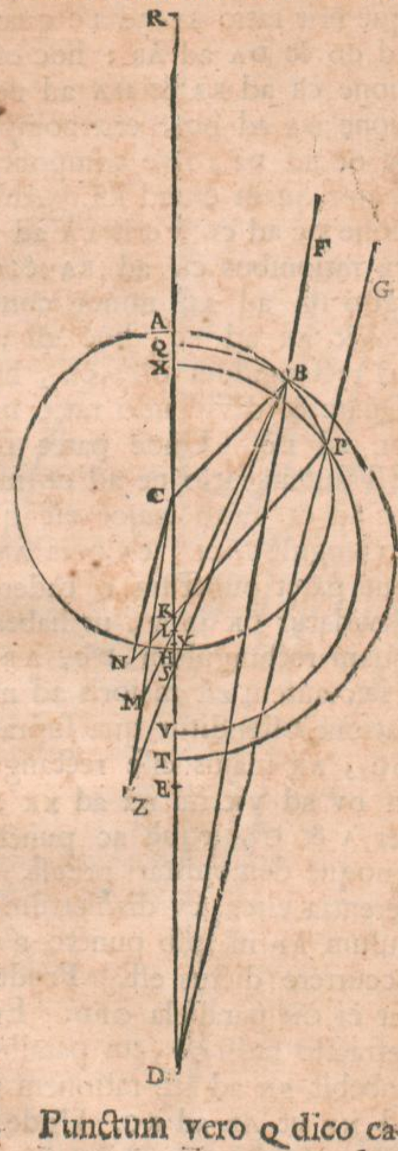
ctum S, in linea CS. Sed & oſtenſum eſt, radium cujus refractio pervenit ad punctum L, propiorem eſſe axi AC, quam cujus refractio ad punctum K concurrit. Ergo conſtat eas refractiones, quæ propius conveniunt ad punctum S, pertinere ad radios axi AC propiores. Cujus converſum quoque verum eſſe liquet, nimirum radiorum axi AC propinquiorum refractiones propius concurrere ad punctum S. Ergo ob hæc erit S punctum concurſus radiorum ex D venientium.



Quod autem dictum eſt circumferentiam circa QT diametrum deſcriptam ſecare circulum APH inter A & P, ſic oſtendetur. Primò quia CS major quam CL, erit major ratio AC ad CL quam AC ad CS, & componendo, major AL ad LC quam AS ad SC. Ratio autem AS ad SC componitur ex rationibus AS ad SD & SD ad SC; quarum AS ad SD eadem eſt quæ RC ad CD. quia ex conſtr. eſt DR ad DC ut DA ad DS. Item ratio SD ad SC est eadem quæ DA ad AR. Major itaque erit ratio AL ad LC quam composita ex ratione RC ad CD & DA ad AR: hoc est, quam composita ex ratione CR ad RA & DA ad DC. quare ablata utrinque ratione DA ad DC, erit composita ex ratione AL ad LC & DC ad DA, sive composita ex LA ad AD & DC ad CL major quam CR ad RA. Ablataque rursus utrinque ratione DC ad CL, erit LA ad AD major quam composita ex rationibus CR ad RA & LC ad CD. Et invertendo ratio DA ad AL minor compositâ ex rationibus DC ad CL & AR ad RC; hoc est, ratione rectanguli DC, AR ad rectangulum CL, CR, hoc est, ratione DQ ad QL. Quare & dividendo ratio DL ad LA minor erit ratione DL ad LQ. Unde patet LQ minorem esse quam LA. Est autem ratio DC ad CL major quam DQ ad QL, nam DC ad CL ratio major est quam rectanguli DC, AR ad rectangulum CL, CR quia AR minor est quam CR. Itaque patet punctum Q cadere inter A & C. Jam porro dividatur DK in V, ut habeat DV ad VK rationem eam quam rectangulum DC, AR ad rectangulum KC, CR. Hæc autem est majoris ad minus, siquidem hoc eadem ratione ostenditur qua supra ostensum fuit rectangulum DC, AR majus esse rectangulo LC, CR. Deinde fiat ut DV ad VK ita DX ad XK, cadetque punctum X inter A & C, æquè ac punctum Q, nam hoc similiter quoque demonstrari potest. Sit autem circuli circumferentia circa XV diametrum descripta. Ea secabit circulum AP in ipso puncto P ubi radius GP convexo AB occurrere dictus est. Producatur enim PK, & occurrat ei CN parallela GPD. Ergo quia PK posita est esse refractio radii GP, cui parallela ex centro ducta est CN; habebit PN ad NC rationem refractionis. Est igitur CN ad NP ut AR ad RC. Unde sic porro argumentabimur.

Ratio CN ad NK componitur ex rationibus CN ad NP & NP ad NK, hoc est, & DC ad CK; igitur ratio CN ad NK, hoc est, DP ad PK componitur ex rationibus AR ad RC & DC ad CK, ex quibus componitur quoque ratio rectanguli AR, DC ad rectangulum RC, CK. Igitur DP ad PK erit ut rectangulum AR, DC ad rectangulum RC, CK; ac proinde etiam sicut DV ad VK, nec non ut DX ad XK. Quare circumferentia cujus diameter XV, transibit

* Lem. 5. per punctum P*, ut dicebamus. Jam quia ratio DT ad TL est eadem quæ rectanguli AR, DC ad rectangulum RC, CL; ratio vero DV ad VK eadem quæ rectanguli AR, DC ad rectangulum RC, CK; minor erit ratio DT ad TL quam DV ad VK, quia rectang. RC, CL majus est rectangulo RC, CK. Itaque multo minor ratio DT ad TK quam DV ad VK; nam DK major est posita quam DL. Apparet igitur punctum T cadere inter D & V.

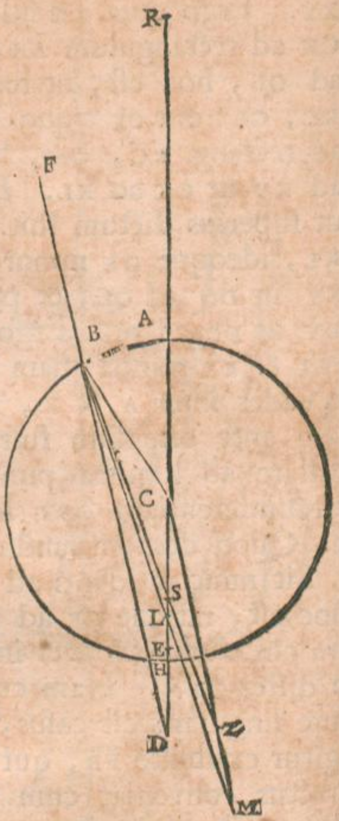


Punctum vero Q dico cadere

dere inter A & X. Sit enim ut DQ ad QL ita DX ad XY. Ergo quia XK ad XD per conſtr. ut rectang. RC, CK ad rectangulum AR, DC; DX autem ad XY ut DQ ad QL, hoc eſt, ut rectang. AR, DC ad rectangulum RC, CL: erit ex æquo XK ad XY ut rectang. RC, CK ad rectang. RC, CL, hoc eſt, ut CK ad CL. Et XK ad KY ut CK ad KL. Eſt autem XK major quam CK, ut ſuperius dictum fuit. Ergo KY major quoque quam KL, ideoque DY minor quam DL. Erat autem DX ad XY ut DQ ad QL, & per converſionem rationis DX ad DY ut DQ ad DL. Ergo quum DY ſit minor quam DL, erit & DX minor quam DQ. Unde neceſſario punctum Q cadet inter A & X, nam quod inter A & C cadat jam ante oſtenſum fuit. Sed punctum T oſtendimus diſtare ab A ultra punctum V. Ergó manifeſtum eſt circumferentiam QBT ſecare circulum APH inter A & P. Quod demonſtrandum ſupererat.

Sit nunc ratio DC ad CH minor ratione refractionis, hoc eſt, ratione CR ad RA. Sitque punctum D vel extra circulum ABH, vel intra, ita tamen ut ultra centrum C diſtet ab A. Nam cum inter A & C poſitum eſt adhuc ſingularis eſt caſus, quem mox videbimus. Radio igitur exiſtente FB, qui tendat ad punctum D, & refractus conveniat cum axe AC in puncto L: Dico L diſtare ab A ulterius quam punctum S. Jungatur enim BS, & ducatur CM parallela FD, quæ occurrat productis BS, BL in Z & M; Et ſicut DA ad AS ita ſit DE ad ES. Si igitur punctum D intra circulum ABH ponatur, cadet neceſſariò & E intra eundem. Si vero D extra dictum circulum ponatur, tamen E punctum intra circulum cadere ſic oſtenditur.

Quia enim minor ratio DC ad CH, vel DC ad CA quam CR ad RA, permutando quoque minor erit DC ad CR quam CA ad AR, & componendo, minor DR ad RC quam CR ad RA; quare reliquæ DC ad reliquam CA minor erit ratio quam DR ad RC, hoc eſt, quam DA ad AS, namque has eaſdem eſſe, ſicut in caſu præcedenti, oſtenditur. Ut autem DA ad AS ita eſt DE ad ES ex conſtr. ideoque & duæ ſimul AD, DE ad duas ſimul AS, SE, hoc eſt, ad AE, ut DA ad AS. Igitur minor ratio DC ad CA, vel DC ad CH, quam ADE ad AE: Et dividendo minor ratio DH ad HC quam duplæ DE ad EA. Sumtiſque conſequentium duplis, minor DH ad HA quam duplæ DE ad duplam EA, hoc eſt, quam DE ad EA. Ergo punctum E cadet intra circulum ABH.

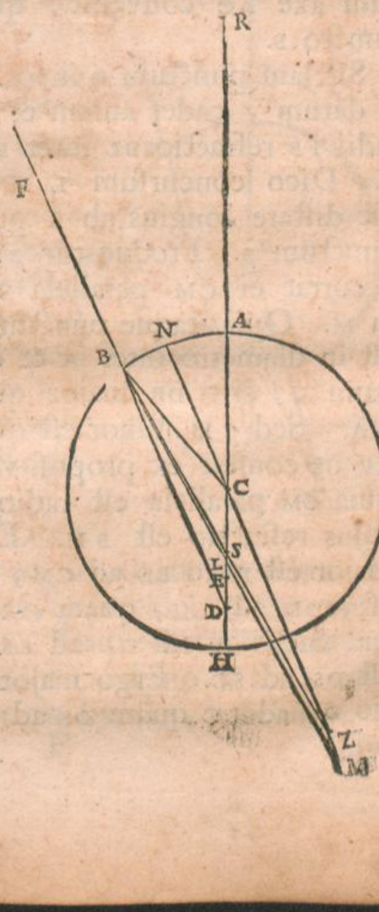


Jam utroque caſu ſic porro argumentabimur. Quoniam E cadit inter A, H, ſi circa AE diametrum circulus deſcribatur, extra eum erit punctum B. Eſt autem ut DA ad AS ita DE ad ES. Ergo erit DB ad BS minor ratio quam
* Lem. 5. DA ad AS*. Ut autem DB ad BS ita eſt CZ ad ZS: & ut DA ad AS ita DR ad RC. Ergo minor eſt ratio CZ ad ZS quam DR ad RC. Ratio autem DR ad RC componitur ex rationibus DR ad RA & RA ad RC, quarum DR ad RA eſt eadem quæ DC ad CS, quia ut DR ad DA ita DC ad DS ex conſtr. Ergo ratio CZ ad ZS minor erit

rit compositâ ex rationibus DC ad CS & RA ad RC. Ratio autem CZ ad ZS eadem est compositæ ex rationibus CZ ad ZB & ZB ad ZS. Itaque ablatis utrinque rationibus æqualibus, hinc BZ ad ZS, inde DC ad CS, minor quoque erit reliqua ratio CZ ad ZB quam RA ad RC: Et invertendo, major BZ ad ZC quam CR ad RA. Sicut autem CR ad RA quæ est ratio refractionis ita est BM ad MC*, quoniam BLM est refractio radii FB, cui parallela ducta est CM. Igitur major est ratio BZ ad ZC quam BM ad MC. Angulus autem BCM, cui utraque BM, BZ subtenditur, necessario est obtusus, quippe æqualis angulo FBC. Ergo CZ minor erit quam CM †, atque angulus proinde CBM major angulo CBZ. Quare & CL major quam CS; quod erat probandum.

* Prop. VIII.

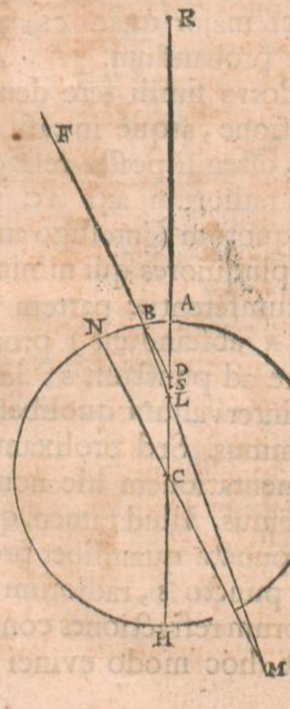
† Lem. 2.



Porro simili fere demonstratione, atque in casu primo, ostendi posset refractiones radiorum axi AC propinquorum (intelligo autem propinquiores qui minimam circumferentiæ partem versus A abscindunt) propius coire ad punctum S, idque ad intervallum quolibet dato minus. Sed prolixam argumentationem hîc non repetemus. Illud tamen, quod ad puncta quamlibet proxima puncto S, radiorum aliquorum refractiones concurrunt, hoc modo evinci potest.

test. Producta MC occurrat circumferentiæ in N. Quoniam ergo propter triangula similia LDB, LCM, sicut DB ad CM, ita DL ad LC; potestque fieri appropinquando radium FB ad axem AC, ut differentia longitudinis linearum DB, DA evadat qualibet data minor, ut & ea quæ est inter CM & AR; (hæc enim differentia eo minor erit quo minor continget arcus BN, ut patet ex prop. VIII. quia nempe ratio BM ad MC est eadem quæ CR ad RA.) apparet hinc fieri posse ut ratio DB ad CM, hoc est, DL ad LC, quamlibet prope eadem efficiatur quæ DA ad AR, hoc est, quæ DS ad SC. atque sic punctum L, quo nempe radius FB refractus cum axe AC convenit, quamlibet propinquum fiat puncto S.

Sit jam punctum D inter A & C datum, cadet autem & hîc radii FB refractio BL inter D & C. Dico concursum L rursus hic distare longius ab A quam punctum S. Producatur BL & occurrat ei CM parallela FBD in M. Quia itaque punctum D est in diametro inter A & centrum C, erit DB major quam DA. Sed CM minor est quam AR ut constat ex propos. VIII. quia CM parallela est radio FB cujus refractio est BM. Ergo major est ratio BD ad CM, hoc est, DL ad LC, quam DA ad AR. Sicut autem DA ad AR ita est DS ad SC. Ergo major ratio DL ad LC quam DS ad SC;

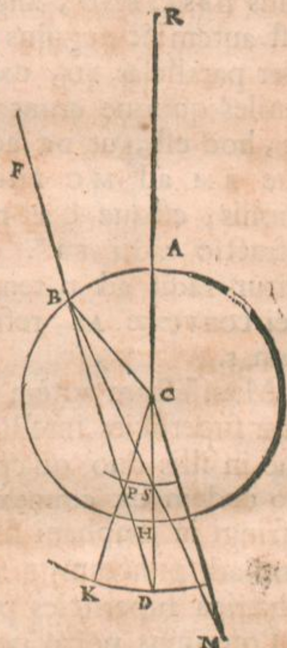


&

& componendo, major DC ad CL quam DC ad CS. Ergo CL minor quam CS. Unde liquet punctum L ulterius quam S distare ab A.

Porro autem, eodem modo quo in casu præcedenti, ostenditur hic quoque radiorum aliquorum refractiones propius concurrere ad punctum S, qualibet data distantia. Erit igitur & hic S punctum concursus radiorum ad D tendentium.

Ultimus casus demonstrandus restat, cum punctum D extra sphæram ABH sic collocatum est, ut DC ad CH habeat rationem eandem, quam CR ad RA, hoc est, rationem refractionis. Quo casu diximus omnium radiorum ad D tendentium refractiones accurate colligi in puncto S: quod nempe invenitur faciendo ut sicut DR ad RA ita sit DC ad DS. Puncto igitur D sicut dictum est posito, sit quilibet radius illuc tendens FBD & ab occursu B ducatur ad punctum S recta BS. Dico radii FB refractionem esse ipsam BS. Producatur enim BS & occurrat ei CM parallela FBD, & jungatur BC.



Quia igitur DC ad CH sive CA, ut CR ad RA, erit quoque tota DR ad RC, ut CR ad RA. Ut autem DR ad RC ita est DA ad AS, quia videlicet ex constr. est, ut DR ad DA ita DC ad DS. Itaque & DA ad AS, ut CR ad RA, hoc est, ut DC ad CH. Ergo si a DA auferatur DC & ab AS, auferatur CH sive CA, habebit & reliqua

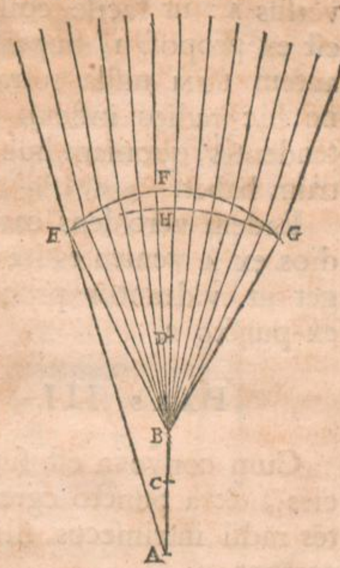
 liqua

liqua CA, ſeu CH, ad reliquam CS eandem rationem quam DC ad CH. Eſt autem CB æqualis CH. Ergo & BC ad CS ut DC ad CB, ideoque trianguli DCB, BCS ſimiles, quoniam & angulum ad C communem habent qui a lateribus proportionalibus comprehenditur. Igitur & latus illius reliquum DB erit ad hujus trianguli latus reliquum BS, ut DC ad CB ſive CH, & angulus SBC erit æqualis angulo BDC. Hinc jam igitur in triangulis DBS, BMC, angulus MBC æquabitur angulo BDS. Eſt autem & angulus BMC æqualis angulo DBS, propter parallelas BD, CM. Igitur dicti trianguli DBS, BMC ſimiles quoque erunt, ac proinde BM ad MC ut DB ad BS, hoc eſt, ut DC ad CH, hoc eſt, ut CR ad RA. Itaque BM ad MC rationem eam habet quæ eſt refractionis; eſtque CM radio FB parallela. Ergo BSM eſt
Prop. 11. refractio radii FB. quod erat oſtendendum. Omnes igitur radii ad D tendentes atque occurrentes ſuperficiei convexæ AB, refracti concurrent ad punctum unicum S.

Manifeſtum autem eſt, ſi circa centrum C duæ ſphæricæ ſuperficies intelligantur ſemidiametris CD, CS; atque in illis duo quæpiam puncta ſumantur K, P, radio eodem CK connexa, omnes radios ad K tendentes refringi in diaphani ſuperficie ABH, ut exactè concurrant ad punctum P: quod quidem nulla alia quam ſphærica ſuperficies præſtare queat.

Poterimus porro per hæc, cum & refractionem vitri penitus cognitam habeamus, ſitque ſphærica ſuperficies expolitu facilis, lentes conficere quæ radios ad datum punctum tendentes ad datum aliud punctum concurrere faciant. Item quæ venientes ex dato puncto ita inflectant quaſi ex alio puncto dato promanent. Dentur enim puncta A, B, oporteatque efficere ut radii

dii tendentes versus A colligantur in B. Dividatur AB in C, ut habeat AC ad CB rationem quæ est refractionis vitri, hoc est, sesquialteram. Deinde producatur AB usque in D, ut sit CD ad DB sicut AC ad CB, & centro D radio autem DC describatur circumferentia EFG; & alia EHG, centro B, radio BH, paulo minori quam est BF. hæc autem priorem circumferentiam necessariò secabit, velut in punctis E, G: & meniscus EFGH figuram quæsitæ lentis per medium sectæ exhibebit. Radii enim tendentes ad A & in superficiem EFG incidentes ibique refracti vergent ad punctum B, secundum ea quæ modo ostensa fuerunt, atque eò quidem pervenient cum nullam amplius patiantur refractionem in superficie EHG, quippe cujus centrum est ipsum B punctum.

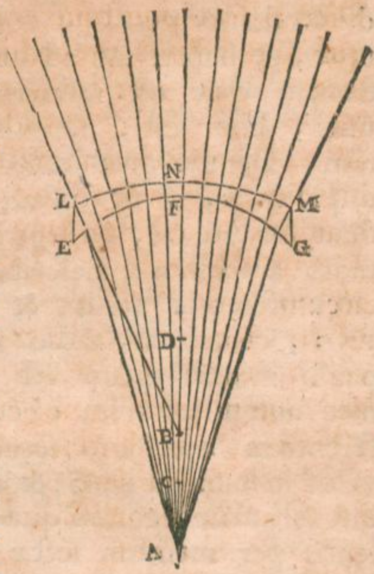


Eadem vero lens efficiet etiam, ut radii ex B venientes inflectantur quasi ex A venirent.

Similiter datis punctis A, B inventaque circumferentia EFG sicuti diximus, si centro B, intervallo autem BN paulo major quam BF, alia circumferentia describatur LNM; figura ELNMGF sectionem alterius lentis referet, quæ efficiet ut radii tendentes ad punctum B dirigantur versus A. Si enim convexa existens vitri superficies EFG radios ad A tendentes deflectere facit ad B, necesse est ut eadem superficies cava existens ut hîc,

 ra-

radios ad B tendentes mittat versus A: ut facile colligere est ex propos. I. Superficies autem LNM nulla refractione hîc radios inflexit ad B tendentes, quoniam hoc centrum habet.



Eadem vero lens cava radios ex A venientes ita franget ut videantur procedere ex puncto B.

PARS III.

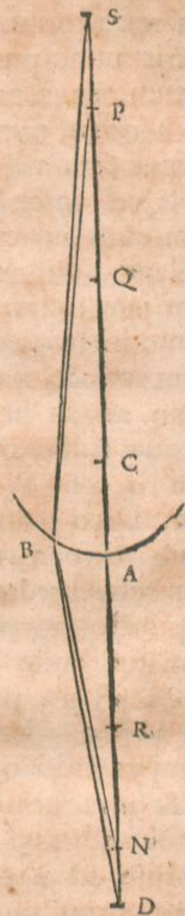
Cum convexa est superficies, & a puncto egredientes radii intrinsecus illi occurrunt.

Sit convexa diaphani superficies AB & punctum S, ex quo in illam perveniant radii ut SB, qui quidem egredientes diaphanum refringentur, nisi S sit idem cum convexi centro C. Est autem præterea quoque duplex casus: Junctâ enim SC, eademque productâ, ac circumferentiam AB secante in A, si fecerimus ut AQ ad QC habeat rationem quæ est refractionis, erit punctum S vel propius puncto A quam punctum Q, vel ulterius remotum. Nam si convenit cum puncto Q, perspicuum est ex propos. I. & VIII. radios post refractionem non concurrere ad punctum aliquod, sed pro parallelis haberi: est enim Q punctum concursus radiorum parallelorum extrinsecus in superficiem AB incidentium.

Sit igitur primo punctum S ulterius distans ab A quam punctum Q. Et fiat ut SQ ad SA ita SC ad SD;

Dico

Dico D fore punctum concursus radiorum refractorum qui a puncto S procedunt ad superficiem AB. Ponatur enim AR æqualis CQ, ita ut A inter R & C cadat. Ergo & CR ad RA proportionem refractionis habebit æquè ac AQ ad QC. Et præterea manifestum est punctum R cadere inter A & D. Nam quia ut SQ ad SA ita SC ad SD, erit permutando & dividendo ut SQ ad QC ita SA ad AD; unde, cum SQ sit minor SA, erit & QC, hoc est, AR minor quam AD. Porro quoniam est SA ad AD ut SQ ad QC, hoc est, AR, erit & reliqua QA, hoc est, CR ad reliquam RD ut SA ad AD *. Et componendo CD ad DR ut SD ad DA, & invertendo & permutando DR ad DA ut DC ad DS. Quare per propos. hujus part. I. radii ex puncto D fluentes in superficie AB ita refringentur ut tendant ad S. ideoque & vice versa, qui veniunt ab S puncto, ad eandem superficiem ita refringentur ut tendant ad D. Igitur D erit punctum concursus quæsitum. Ea nempe ratione qua punctum S in propositionibus antecedentibus. Etenim non perfectè ad D radii hîc concurrent sed omnes citra; quod sic ostenditur. Radius quilibet ex D veniens ut DB atque a superficie AB refractus, convenit cum recta DC citra punctum S *, velut in P. Quare & vicissim radii PB refractio erit BD; Ideoque radii SB refractio puta BN, concurret citra punctum D. quin cum ad idem superfi-



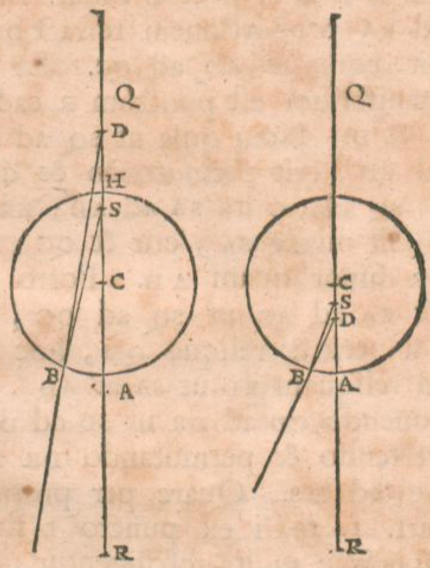
* 19. v.

* p. 1. Prop. hujus.

ciei

ciei punctum tendant radii PB, SB, necesse est ut post refractionem fiat intersectio, ut facilè colligitur ex prima refractionum proprietate.

Sit nunc punctum S datum, ut minus distet ab A quam punctum Q. Erit autem vel inter Q & C vel inter C & A. nam cum in C incidit nullam fieri refractionem jam diximus. Sit primo inter Q & C punctum S; & fiat rursus ut SQ ad SA ita SC ad SD quæ sumatur in partem a centro C aversam. Dico D fore punctum dispersus radiorum refractorum qui ab S puncto egrediuntur.



Sumatur enim, ut ante, AR æqualis CQ. Erit ergo & CR ad RA proportio refractionis, eadem nempe quæ AQ ad QC. Et quoniam SQ ad SA ut SC ad SD, erit & componendo QA, hoc est, RC ad AS ut CD ad DS. quare & utraque simul RC, CD hoc est, DR ad utramque simul AS, DS, hoc est, ad DA ut DC ad DS. Ergo radiorum ad D tendentium & in convexa superficie AB refractorum punctum concursus erit S*. Quare & vicissim radiorum ex puncto S in superficiem eandem AB, sed intrinsecus incidentium, punctum dispersus erit D. Erit autem D punctum dispersus accuratè uno casu, cum nempe ratio AC ad CS erit eadem quæ AQ ad QC, sive quæ refractionis. Si enim ut AQ ad QC ita AC ad

* Prop. hujus p. 2.

CS;

CS; auferendo AC ab AQ & CS ab QC erit & reliquæ CQ ad reliquam QS eadem ratio quæ AQ ad QC. Quia porro QA ad AS ut CD ad DS, uti antea ostensum est, erit & per conversionem rationis AQ ad QS ut DC ad CS. Sed CS ad CA ut CQ ad AQ; ergo erit ex æquo in proportione perturbata DC ad CA sive CH ut CQ ad QS, hoc est, ut AQ ad QC, quæ est proportio refractionis. Cum autem DC ad CH habet proportionem refractionis, estque DR ad DA ut DC ad DS, ut hic esse ostendimus, constat radios omnes ad punctum D tendentes, atque ad superficiem convexam AB refractos, colligi exactè ad punctum S. Ergo & vicissim qui veniunt ex puncto S, ad eandem superficiem ita refringentur, ut a puncto D procedere videantur. Quod si vero minor ratio fuerit AC ad CS quam AQ ad QC, omnium radiorum ex S venientium refractiones retro productæ ultra punctum D concurrent cum axe AC; si autem ratio AC ad CS major fuerit quam AQ ad QC, eædem omnes citra punctum D concurrent, ut ex propos. hujus parte 11 facile colligitur.

Casus denique is quo punctum S inter A & C datum est, eodem modo construitur quo novissime præcedens nec dissimilem demonstrationem habet. Nempe cum sit SQ ad SA ut SC ad SD, erit componendo QA, hoc est, RC ad AS ut CD ad DS. Quare auferendo CD ab RC, & DS ab AS, erit & reliqua DR ad reliquam DA ut DC ad DS. Unde reliqua eodem modo concludemus. Erit autem D punctum dispersus ejusmodi, ut refractiones omnes retro productæ citra ipsum concurrant, hoc est, inter D & A.

PARS IV.

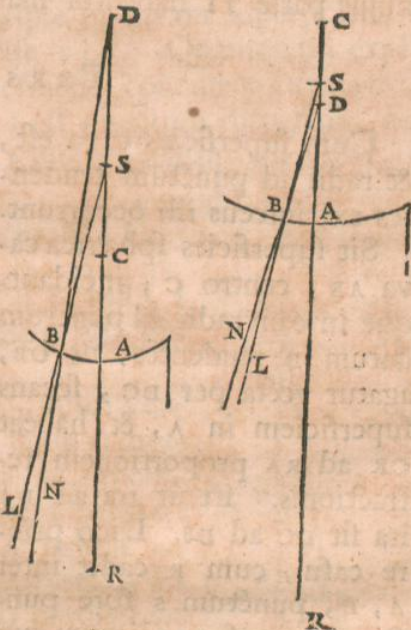
Cum superficies convexa est, & ad punctum tendentes radii intrinsecus superficiei occurrunt.

Esto diaphani convexa superficies AB, & datum punctum S, quo tendant radii, ut LB, intrinsecus superficiei occurrentes, centrum vero convexi sit C. Jungatur SC secetque superficiem in A, & producatur ad Q, ut AQ ad QC habeat proportionem refractionis; & ut SQ ad SA ita sit SC ad SD. Dico D esse punctum concursus radiorum refractorum qui ad S punctum pergunt. Sit enim AR æqualis CQ; Ergo & CR ad RA habebit proportionem refractionis. Et quia SQ ad SA ut SC ad SD, erit dividendo, QA, hoc est, CR ad SA ut CD ad DS. Quare auferendo CD a CR, & DS ab SA, erit & reliqua DR ad reliquam DA ut DC ad DS. Ergo quum radii ex D in convexum AB incidentes refractique habeant punctum dispersus S; vicissim qui ad S tendunt ab eadem superficie inflectentur versus punctum D. Non tamen accurate; sed quia qui ex D veniunt refracti, retroque producti non in ipsum punctum S concurrunt, sed omnes ulterius ab A, idcirco & ii qui tendunt ad punctum S, tantum prope D inter A, D, concurrent ad puncta diversa, quæ eo propiora erunt puncto D, quo radius incidens propior fuerit axi CA.

PARS V.

Cum ſuperficies cava eſt, & radii a puncto venientes extrinſecus ei occurrunt.

Sit ſuperficies ſphærica cava A B, cujus centrum C, incidantque in eam radii a puncto dato D precedentes, ut D B. Jungatur D C, & producta ſecet ſuperficiem in A, & habeat C R ad R A proportionem refractionis. Erit ergo R punctum diſperſus radiorum parallelorum ab oppoſita parte venientium. Jam ſicut D R ad D A ita ſit D C ad D S. Dico S fore punctum diſperſus radiorum ex D egredientium poſtquam in ſuperficie A B refracti fuerint.



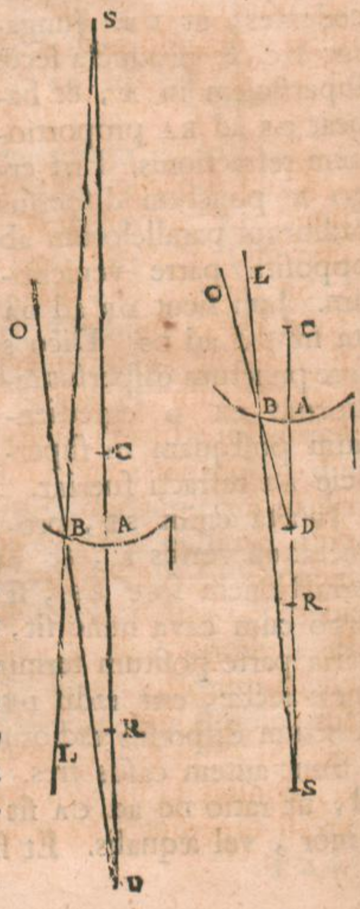
Junctâ enim S B, productâque verſus L, & D B verſus N. conſtat radii N B refractionem fore B S, ſi ſuperficies A B convexa eſſet. Ergo cum cava nunc ſit, hoc eſt, diaphanum ab contraria parte poſitum terminet, cumque N B D, S B L ſint lineæ rectæ, erit radii D B refractio B L *. Itaque erit S punctum diſperſus radiorum ex D manantium. * Prop. hujus p. 4.

Sunt autem caſus tres. Nam punctum D ita datum eſt, ut ratio D C ad C A ſit major ratione C R ad R A, vel minor, vel æqualis. Et ſi quidem eadem eſt ratio D C ad CA quæ CR ad RA, ſive quæ refractionis, erit S punctum quo exacte omnes radii refracti pertinebunt. Si vero ratio DC ad CA major, refractiones omnes retro productæ citra S punctum cum axe AC convenient. Si minor, ultra. Quæ omnia ex iis quæ propoſitionis hujus parte II habentur manifeſta ſunt.

PARS VI.

Cum ſuperficies cava eſt, & radii ad punctum tendentes extrinſecus illi occurrunt.

Sit ſuperficies ſphærica cava AB, centro C; incidantque in eam radii ad punctum datum D tendentes, ut OB, agatur recta per DC, ſecans ſuperficiem in A, & habeat CR ad RA proportionem refractionis. Et ut DR ad DA ita ſit DC ad DS. Dico priore caſu, cum R cadit inter A, D, punctum S fore punctum diſperſus radiorum qui ad D tendebant. Altero verò caſu, cum D cadit inter A, R, eventurum contra ut S ſit punctum eorum concurſus. Si autem D fuerit idem quod punctum R, radii eo tendentes, poſt refractionem fient inter ſe & axi AC paralleli, ut in propoſ. IX & I annotatum fuit.



Ca-

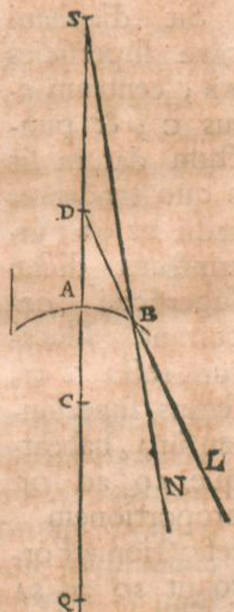
Casus autem hîc propositi demonstrabuntur ductâ SB, eâdemque versus L extensâ. Quia enim rectæ sunt lineæ SBL, DBO, estque superius demonstratum*, radiorum ex D venientium ad superficiem AB convexam refractiones concurrere ad S punctum, ita ut si DB sit radius incidens refractio ejus fiat BS; necesse est hîc radii OB ad D tendentis atque in cavam superficiem AB incidentis refractionem esse BL†. Quamquam exacta ratione tamen radii OB refractio concurret cum AC citra punctum S, quando S est punctum dispersus. Sed ultra, quando contingit S esse punctum concursus.

* Prop. hujus p. I.

† Prop. I.

PARS VII.

Cum superficies cava est & radii a puncto venientes intrinsecus illi occurrunt.



Sit superficies cava AB, cujus centrum C; & punctum S, unde digressi radii ut SB intrinsecus in superficiem ferantur. Ducatur recta per SC, secans superficiem in A, & habeat AQ ad QC proportionem refractionis. Erit igitur punctum Q quo pertinerent radii paralleli a parte contraria advenientes. Quare ut SQ ad SA ita sit SC ad SD. Dico D fore punctum dispersus radiorum ab S manantium: hoc est, si jungatur DB & producatur versus L, futuram BL refractionem radii SB. Si enim & SB producatur versus N, constat radii NB refractionem esse BD, si superficies AB convexa intelligatur*. Itaque hîc,

* Hujus Prop. p. IV.

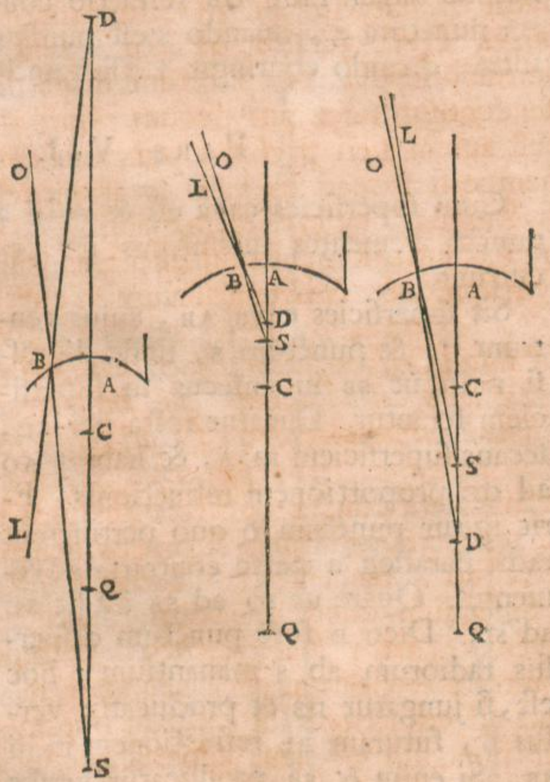
 cum

cum diaphanum ad alteram partem superficiei AB positum sit, erit & BL refractio radii SB *. Ideoque D punctum dispersus radiorum ab S venientium. Est autem ejusmodi ut refractiones omnes citra ipsum cum axe conveniant, hoc est, minus procul a superficie AB.

* pr. 1.

PARS VIII.

Cum superficies cava est, & radii ad punctum tendentes intrinsecus illi occurrunt.



Sit diaphani cava superficies AB; centrum ejus C; & punctum datum sit S quo tendentes radii ut OB, intrinsecus dictæ superficiei occurrant. Ducatur recta SC, secans superficiem in A, habeatque AQ ad QC proportionem refractionis. Porro ut SQ ad SA ita sit SC ad SD. Dico priore casu, cum punctum Q cadit inter A & S, futurum D punctum dispersus radiorum

diorum ad s tendentium. Posterioribus vero duobus quibus s cadit inter A, Q, dico D fore eorundem radiorum punctum concursus. Jungatur DB & versus L producatur. Itaque si superficies AB convexa ponatur, ut diaphanum sit versus C, constat radii SB refractionem esse DB priori casu, duobus verò reliquis in producta DB, hoc est, BL *. Quare è diverso hîc, ubi diaphanum a parte altera superficiei collocatum est, erit radii OB refractio BL in casu primo, in reliquis vero BD *. Quia videlicet OBS, DBL sunt rectæ lineæ. Est igitur priori casu D punctum dispersus radiorum ad S tendentium, reliquis duobus punctum concursus. Potest autem fieri ut fiat D punctum concursus accuratè; nempe si AC ad CS habeat rationem eam quæ est refractionis, hoc est, eandem quam AQ ad QC. Quandocunque autem D fit punctum dispersus semper radii refracti retro producti convenient cum axe citra punctum D.

* Prop. h. p. 3.

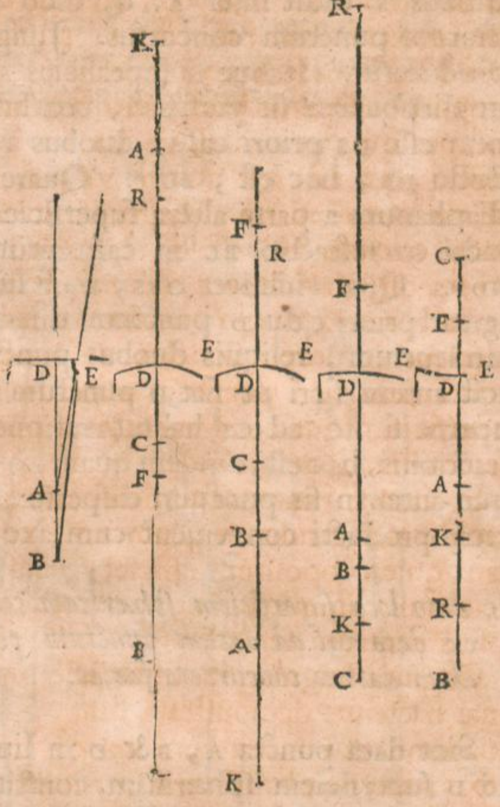
* Prop. E. p. 3.

In dato loco superficiem sphæricam constituere, quæ radios ex dato vel ad datum punctum pergentes, ad punctum aliud datum concurrere faciat.

Sint data puncta A, B & D in linea recta & oporteat ad D superficiem sphæricam constituere quæ radios ex A vel ad A tendentes colligat in puncto B.

Sciendum quod uno casu superficies sphærica non invenitur, sed plana ejus loco. Nempe cum punctum A inter B & D situm est, habetque BD ad DA rationem quæ est refractionis, ut in casu horum primo. Nam si per punctum D plana superficies ducatur diaphanum terminans quod sit a parte A, ea radios versus A punctum tendentes coget ad punctum B, ut supra demonstratum fuit. In cæteris autem casibus hæc erit constructio.

Producatur DA ad K, ut KD ad DA ſit eadem quæ refractionis ratio; & tribus hiſce BK, BA, BD, inveniatur quarta proportionalis BC, ponaturque in eam partem ut vel omnes in eandem tendant, vel binæ in utramque. Jam ſi centro C circumferentia deſcribatur DE, ea ſectionem quæſitæ ſuperficiei exhibebit, diaphanum habentis a parte B. quæ quidem cæteris caſibus convexa, uno vero cava erit, nempe ſi punctum A poſitum fuerit inter D & B, & major ratio BD ad DA ratione refractionis.



Ad demonſtrationem autem, ponatur DF æqualis AK, ut ſimul fiat FA æqualis DK, & habeat CR ad RD rationem quæ eſt refractionis, hoc eſt, quam habet KD ad DA.

Quia igitur BK ad BA ut BD ad BC, erit & BK ad KA ut BD ad DC, & permutando, BK ad BD ut KA ſeu DF ad DC. Quare & KD ſeu AF ad DB, ut FC ad CD; & permutando & invertendo FC ad FA ut DC ad DB.

Por-

Porro quia FA æqualis KD ex constructione, erit FA ad AD ut KD ad DA, hoc est, ut CR ad RD. Igitur & per conversionem rationis, AF ad FD ut RC ad CD. Sed ut FC ad FA ita erat DC ad DB. Igitur ex æquali in proportione perturbata, erit FC ad FD ut RC ad DB. Insuper quia ut FA ad AD ita CR ad RD, erit & dividendo, FD ad DA ut CD ad DR; & permutando, FD ad CD ut DA ad DR. Ergo & FD ad FC ut DA ad AR. & invertendo FC ad FD ut AR ad AD. Sed ut FC ad FD ita ostensa fuit RC ad BD. Igitur & AR ad AD ut RC ad BD; Et permutando AR ad RC ut AD ad BD. Ideoque & proportionales AR, AC; AD, AB. Unde liquet radios ad punctum A pertinentes, ita refringi in superficie DE ut congregentur in puncto B. Quod erat demonstrandum.

Si vero inventæ superficiei altera jungatur centro B, semidiametro minore quam BD; constituent simul lentem, quæ propositum efficiet; nam in posteriori superficie nulla amplius continget refractio, quum radii ad ipsius centrum ferantur.

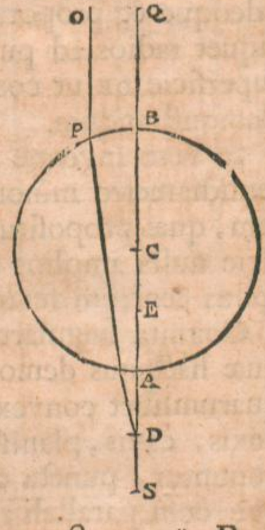
Cognita singularum superficierum refractione ex his quæ hactenus demonstrata sunt, poterimus jam lentium quarumlibet convexarum vel cavarum vel quæ ex convexis, cavis, planisque superficiebus diversimode componuntur, puncta concursus vel dispersus invenire, æquè cum paralleli radii incidunt, atque cum ex dato vel ad datum punctum feruntur: Qua in re sæpe etiam compendia quædam sequi licebit, ut in sequentibus manifestum fiet.

PRO-

PROPOSITIO XIII.

Sphæra data quæ ſit ex materia diaphana, invenire punctum concurſus radiorum parallelorum in illam incidentium.

Eſto ſphæra cujus centrum C axis BA, ſectio per centrum circulus BPA. Incidant autem radii paralleli axi BA, ut OP. Dividatur ſemidiameter CA bifariam in E, & producatur, & habeat CD ad DE proportionem refractionis, eam nempe quæ convenit materiæ ex qua ſphæra componitur. Veluti ſi cryſtallina aut vitrea ſphæra proponatur, oportet rationem CD ad DE eſſe ſeſquialteram proximè, ſi vero ex aqua, ſeſquitertiam. Dico D fore punctum concurſus quæſitum.



Signentur enim in axe AB utrinque producto puncta S & Q, ut tam BS ad SC, quam AQ ad QC habeat proportionem refractionis, hoc eſt, eandem quam CD ad DE: fientque inter ſe æquales CS, CQ. Radii igitur axi BA paralleli, ut OP, in ingreſſu ita frangentur, ut tendant ad punctum S*. Porro autem quia CD ad DE ut BS ad SC, erit & dividendo CE ſive EA ad ED ut BC ſive CA ad CS. Unde & EA ad AD ut CA ad AS. Eſt autem EA dimidia ipſius CA, ergo & AD dimidia erit ipſius AS. Sed & SC eſt dimidia ipſius SQ. Ergo ut SQ ad SC ita SA ad SD, & permutando. Eſt autem Q punctum concurſus radiorum

* Prop. VIII.

rum parallelorum a parte contraria in ſuperficiem AQ incidentium. Itaque erit D punctum concurſus radiorum ad S tendentium atque ad ſuperficiem eandem A refractorum *. Diximus autem radios parallelos poſt primam refractionem in ſuperficie BP tendere ad punctum S. Ergo totâ ſphærâ penetratâ liquet eos concurrere ad punctum D. quod erat demonſtrandum.

* Prop. XII. p. 4.

Sciendum autem eſt de radiis axi BA proximis hæc intelligenda, ut ſuperius quoque plerumque factum eſt. Qui quidem radii & comburendi facultatem habent, ſphærâ Soli expoſitâ; Et rerum imagines pingendi ad diſtantiam AD. Hæc autem erit proximè quarta pars diametri in ſphæra vitrea, in ſphæra aquea vero ſemiſſis. Unde jam artificii ejus ratio manifeſta eſt, quo proportionem refractionis initio inquirere docui. Quoniam hæc demonſtratio ad cylindrum quoque pertinet, vel ad aliud omne vas rotundum cujus ſectio ad axem recta ſit.

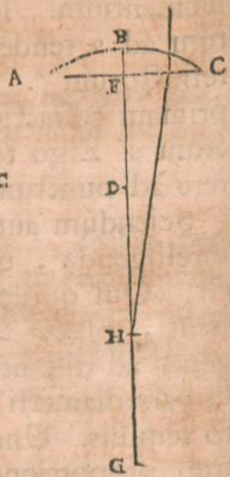
PROPOSITIO XIV.

Data lente quæ ſuperficiem unam planam habeat, alteram convexam, invenire punctum concurſus radiorum axi parallelorum.

Sit data lens cujus ſuperficies convexa ABC, ex ſphæra quæ centrum habeat D, plana autem ſuperficies ſit AFC. Atque hæc primò radiis parallelis oppoſita ſit. Ductâ igitur DBE recta, quæ axem lentis referat, hoc eſt, quæ ſuperficiem AFC ſecet ad angulos rectos, eâque producta ad E, ita ut DE ad EB habeat proportionem refractionis, quæ ſemper data intelligitur: Manifeſtum eſt, E fore punctum concurſus quæſitum. Radii

dii

dii enim axi DF paralleli, cum in superficiem planam AC incidant ad rectos angulos; nullam refractionem ibi patientur. ac proinde paralleli venient ad superficiem ABC. cujus refractione ad E punctum flectentur per prop. IX.



Erit autem BE distantia diametro convexi sive duplæ DB æqualis si lens vitrea fuerit quia ratio DE ad EB est sesquialtera.

Sit nunc superficies convexa ABC radiis opposita. Si igitur axis BD producatur ad G, ut BG ad GD habeat proportionem refractionis, erit punctum G quo tendent radii post primam refractionem in superficie ABC *. Dividatur autem GF in H, ita ut GF ad FH habeat quoque refractionis proportionem. Dico H fore punctum concursus radiorum parallelorum postquam utramque superficiem lentis transierint. Quia enim post refractionem in superficie ABC tendunt ad punctum G, atque ita occurrunt intrinsecus superficiei planæ AFC, hæc eos diriget porro ad punctum H *, quoniam GF ad FH proportio est refractionis.

* Prop. VIII.

* Prop. VII.

Manifestum autem est distantiam FH paulo tantum minorem esse quam BE supra inventam, rationemque ad eam habere quam GF ad GB. Unde, si crassitudo lentis FB pro nulla habeatur, erit FH ipsi BE æqualis, hoc est, diametro sphæræ cujus portio est ABC, si lens vitrea fuerit.

Patebit autem, si concursus radiorum ab hac lente re-

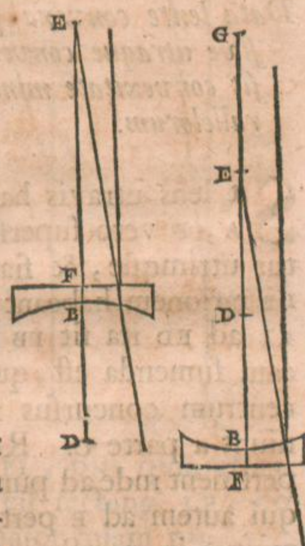
refractorum exactè expendatur atque ad calculos revocetur, accuratius aliquanto eos propiusque ad unum punctum convenire hoc posteriore lentis situ, nempe cum superficies convexa venientibus opposita est radiis, quam si plana ad illos convertatur.

PROPOSITIO XV.

Data lente quæ cavam & planam superficiem habeat, invenire ante ipsam punctum dispersus radiorum parallelorum.

Esto lens ejusmodi cujus cava superficies sit B, centrum cavitatis habens D, plana autem F.

Quod si ergo superficies plana radiis advenientibus obversa est, producatur tantum DB in E, ut DE ad EB sit proportio ea quæ est refractionis; eritque E punctum dispersus quæsitum, uti manifestum est ex prop. XI. Nulla siquidem contingit refractio in superficie plana F quum radii ad angulos rectos in hanc incidere ponantur, ideoque paralleli perveniant in superficiem B.



Si vero aliter conversa fuerit lens, producenda est BD ad G, ita ut BG ad GD sit proportio refractionis; deinde dividenda GF in E ut & GF ad FE proportionem refractionis habeat eandem, atque ita rursus inventum erit dispersus punctum E. Radii enim paralleli refra-

 cti

cti in ſuperficie cava B, habebunt inde punctum diſperſus G, per prop. X. qui vero ex G venientes incidunt in ſuperficiem planam, ſecundò ibi refractionem ſubeunt, perguntque deinceps quaſi ex puncto E procederent, per prop. VI. Itaque E eſt punctum diſperſus quæſitum.

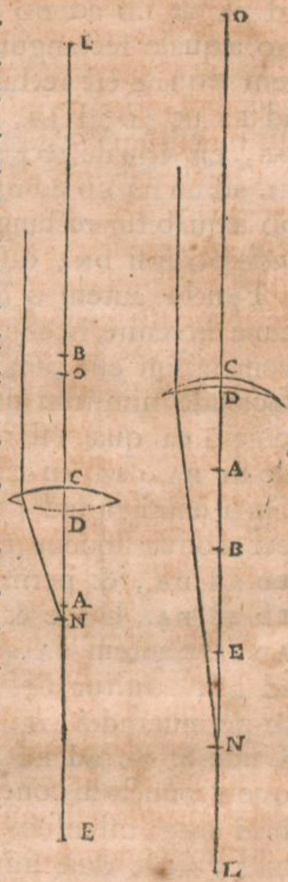
Quia vero GF ad FE ut BG ad GD., eſtque GF major quam BG, erit & FE major quam GD, cui æqualem eſſe conſtat BE in caſu priori. Unde ablata utrinque BF craſſitudine lentis, etiam diſtantia BE in poſteriori caſu major erit quam FE in priori.

PROPOSITIO XVI.

Data lente convexa parium vel diſparium ſuperficierum, ſive utraque convexa ſit, ſive altera cava; ſed cavitas ſit convexitate minor; invenire punctum concurſus parallelorum.

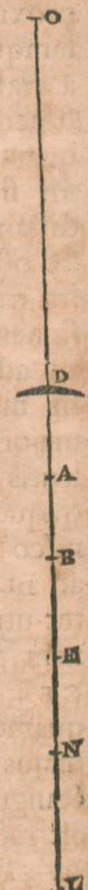
Sit lens utravis harum CD, & ſuperficiei C centrum A, B vero ſuperficiei D. Jungatur AB & producatur utrimque, & fiat ut tam CE ad EA, quam DL ad LB rationem habeant quæ eſt refractionis. Deinde ſicut EL ad ED ita ſit EB ad EN, hæc autem EN in partem eam ſumenda eſt, quam præcipit prop. XII. Eritque N centrum concurſus radiorum axi parallelorum qui veniunt a parte C. Refracti enim primò in ſuperficie C pertinent inde ad punctum E, ut oſtenſum eſt prop. VIII. qui autem ad E pertinent refracti in ſuperficie D colliguntur in puncto N, per part. IV. prop. XII. & in meniſco per part. VIII. prop. XII.

Eadem ratione ſi fiat ut LE ad LC ita LA ad LO, erit O punctum concurſus parallelorum qui adveniunt a parte D. Et notandum quod diſtantiæ DN & CO proximè inter ſe ſunt æquales, cauſamque inæqualitatis oriri tantum a craſſitudine lentis. Et ſi quidem ſuperficies D ſit ex majori ſphæra quam ſuperficies C, hoc eſt, ſi BD ſit major quam AC, erit CO diſtantia major quam DN, quod ſic oſtenditur. Quia ut DL ad LB ita CE ad EA, erit & per converſionem rationis & invertendo ut DB ad DL ita CA ad CE. Eſtque DB major quam CA, ergo & DL major quam CE. In caſu igitur lentis utrinque convexæ, ſi ab utraque harum auferatur DC; in meniſco autem ſi eadem DC addatur ad DL, auferatur vero a CE; patet utrobique majorem fieri rationem LC ad DE, quam ſit LD ad CE, hoc eſt, quam LB ad AE. quamobrem rectangulum LC, AE majus erit rectangulo DE, LB. Rectangulum autem LC, AE æquale eſt rectangulo LE, CO, quia ut LE ad EA ita LC ad CO; & rectangulum DE, LB æquale eſt rectangulo EL, DN, quia ut EL ad LB ita ED ad DN. Ergo majus eſt rectang. LE, CO rectangulo LE, DN, ideoque CO major quam DN.



At ſi craſſitudinem lentis CD pro nulla habeamus, uti fere ſemper in ſequentibus fiet, dico puncta concurſus parallelorum O & N æqualiter a lente remota eſſe. Sit enim nunc punctum medium lentis D pro utriſque

D & C. Quia ergo LE ad LA ut LD ad LO, erit & LE ad EA ut LD ad DO, unde rectang. LE, DO æquale rectangulo EA, LD. huic autem æquale est rectang. DE, LB, quia DE ad EA ut DL ad LB, & rursus rectangulo DE, LB æquale rectang. EL, DN, quia ut EL ad LB ita ED ad DN. Ergo rectang. LE, DO æquabitur rectangulo EL, DN; ac proinde DO ipsi DN; quod erat probandum.

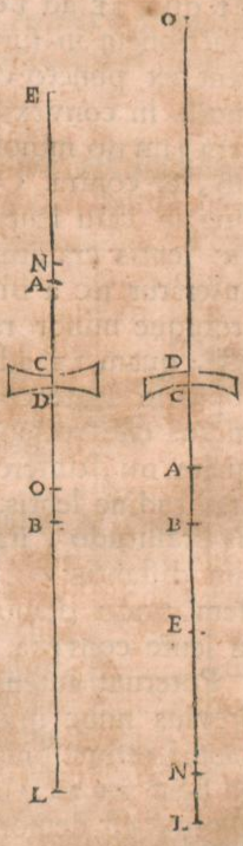


Puncta autem O & N faciliori ratione nunc invenire licebit. Etenim solum inveniendum est punctum L sicut antea, faciendo nimirum ut DL ad LB sit proportio ea quæ est refractionis; ac deinde ut BA, ad AD ita LB ad DN vel DO. Quia enim DL ad LB ut DE ad EA, erit per conversionem rationis LD ad DB ut ED ad DA, & permutando LD ad DE ut BD ad DA. Unde & LE ad ED ut BA ad AD. Ut autem BA ad AD ita fecimus LB ad DN. Igitur LE ad ED ut LB ad DN. & permutando, EL ad LB ut ED ad BN. Unde & EL ad EB ut ED ad EN, ideoque N punctum concursus quæsitum; nam hoc antea ostensum. Itaque in lente vitrea, sicut duæ simul convexitatum semidiametri; in menisco autem ut earum differentia, ad alterutram ipsarum, ita reliqua bis erit ad foci distantiam. fit enim tunc LB dupla radii BD, quia DL ad LB ut 3 ad 2 quæ in vitro est proportio refractionis. Quod si autem superficies utraque fuerit æqualiter convexa, apparet jam foci distantiam semidiametro convexitatis æqualem fore; eandemque etiam in in lente planoconvexa produci a convexitatis ſemidiametro duplo minore.

PROPOSITIO XVII.

Data lente cava duarum ſuperficierum ſphæricarum, punctum diſperſus radiorum parallelorum invenire.

Sit data lens CD quæ ſuperficiem utramque cavam habeat, vel alteram earum convexam, ſed quæ majoris ſit ſphæræ quam cava. Sint autem ſemidiametri ſuperficierum AC, BD, quæ producantur ad L & E; ut tam CE ad EA quam DL ad LB habeat proportionem quæ refractionem metitur. Et ut EL ad ED ita ſit EB ad EN. Dico N fore punctum diſperſus radiorum qui paralleli incident a parte C.



Qui enim paralleli advenientes refringuntur in ſuperficie C, exinde pertinent ad punctum E, per prop. X. quia CE ad EA eſt proportio refractionis. Sed quia ut EL ad ED ita EB ad EN, ideo qui ex E veniunt, refracti a ſuperficie D, habebunt punctum diſperſus N, ut conſtat ex prop. XII. p. 7. & p. 3. Igitur punctum N eſt punctum diſperſus radiorum parallelorum poſt geminam in lente CD refractionem. Oportet autem in lente cavoconvexa, ut ſemidiameter AC tanto ſaltem minor

nor ſit ſemidiametro BD, ut punctum E minus quam L a lente remotum inveniatur. Nam alioqui radii qui ex E tendunt, refracti in ſuperficie D non poterunt diſpergi, ut conſtat ex prop. XII. part. III.

Porro ſi fiat ut LE ad LC ita LA ad LO, erit O punctum diſperſus parallelorum qui adveniunt a parte D. Primum ſiquidem per refractionem ſuperficiei D, pertinebunt radii ad punctum L, per prop. X. & VIII. Et quia LE ad LC ut LA ad LO, ideo poſt alteram refractionem in ſuperficie C, diſpergentur quaſi procederent ex puncto O, per prop. XII. p. VII. & VIII. ſi modo in convexocavâ L magis diſtet quam E. Erit autem jam DO minor quam CN, ſi AC fuerit minor quam BD, & contra. Quia enim BD ad AC ut DL ad CE. Itaque in caſu lentis utrimque cavæ ſi addatur utriſque DC lentis craſſitudo, in caſu vero cavoconvexæ, ſi auferatur DC a DL, eadem vero addatur ad CE, fiet utrobique minor ratio LC ad DE quam LD ad CE, hoc eſt, quam LB ad AE. Unde ſimili argumentatione ac ſupra in lente convexa efficietur rectangulum LE, CO minus eſſe rectangulo LE, DN, ideoque CO minorem quam DN; differentia vero eſt exigua, quæ oritur ex craſſitudine lentis. Namque ſi pro nulla habeatur lentis craſſitudo, ita ut pro punctis D & C ſit unum D, jam diſtantiæ DN, DO inter ſe æquales fient, quod eodem modo demonſtratur atque ſuperiori propoſitione in lente convexa.

Poterunt autem hic rurſus puncta diſperſus O vel N brevius nunc inveniri, faciendo tantum ut DL ad LB habeat refractionis proportionem, ſicut prius; ac deinde ſicut BA ad AD ita BL ad DN vel DO; cujus eadem quoque eſt demonſtratio quæ fuit in lente convexa.

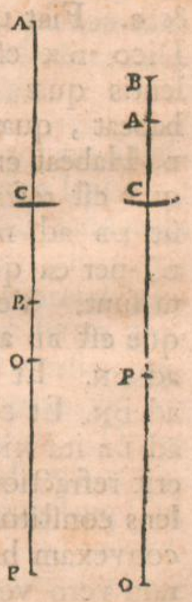
Liquet autem, ſi utraque ſuperficies fuerit æqualiter

ter concava, hoc eſt, ſi AD æqualis DB, quod DN vel DO erit æqualis dimidiæ LB: ac proinde, ſi lens vitrea fuerit, æqualis ipſi AD vel BD ſemidiametro. Eadem ſcilicet ratione qua id in lente convexa de concurſus puncto oſtenſum fuit.

PROPOSITIO XVIII.

Lentem invenire cujus ſuperficies altera convexa ſit eadem datæ, quæque punctum concurſus parallelorum habeat ad datam diſtantiam.

Sit lentis C ſuperficies altera data, hoc eſt ſemidiameter ejus convexitatis AC. deturque diſtantia CO, oporteatque invenire ſuperficiem alteram quæ juncta priori, lentem efficiat quæ radios parallelos cogat ad punctum O.



Producatur AC uſque in P, ut ſit AP ad PC proportio refractionis. Tum ſi quidem diſtantia OC ipſi CP æqualis inveniatur, debebit altera lentis ſuperficies plana eſſe, ut ex prop. XIV. manifeſtum eſt. Si vero OC, CP inæquales fuerint, fiat ſicut differentia earum PO ad OC, ita AC ad CB; quæ accipiatur verſus P, ſi PC major fuerit quam CO; at verſus partem alteram ſi minor PC quam CO. Eritque priore caſu ſuperficies lentis altera convexa a ſemidiametro BC; poſteriore autem cava, adeo ut tunc meniſcus habeatur. Demonſtratio autem eſt hujuſmodi. Quoniam eſt AC ad CB ut PO ad OC, erit componendo in priore caſu, in altero vero per converſionem rationis contrariam ut AB ad BC ita PC ad CO. Eſt autem AP ad PC proportio refractionis. Igitur erit O punctum concurſus radiorum qui paralleli incidunt in lentem C, ut conſtat ex prop. XVI. Patetque lentem, qualis requirebatur, eſſe inventam.

PROPOSITIO XIX.

Datæ lenti inæqualiter convexæ vel meniſco, lentem aliam æquivalentem invenire, quæ convexam & planam ſuperficiem habeat vel utramque convexam æqualiter.

Sit data lens D qualem diximus vel meniſcus. Et centra ſuperficierum ſint A & B. Fiat ut BA ad AD ita BD ad DK. Dico DK eſſe ſemidiametrum convexi, lentis quæ alteram ſuperficiem planam habeat, quæque paria faciat cum lente D. Habeat enim DL ad LB proportionem quæ eſt refractionis, & ut BA ad AD ita ſit LB ad DN. Erit ergo N focus lentis D, per ea quæ in prop. XVI. demonſtrata ſunt. Verum ut BA ad AD, ita quoque eſt BD ad DK; ergo BD ad DK ut LB ad DN. Et permutando BD ad BL ut DK ad DN. Et componendo igitur erit ut DL ad LB ita KN ad ND. quare & KN ad ND erit refractionis proportio. Itaque ſi in D lens conſtituatur quæ ſuperficiem alteram convexam habeat ſemidiametro KD, alteram vero verſus K planam, ejus erit focus punctum N; ut ex prop. XIV. manifeſtum eſt.

Si vero KD duplicetur, habebitur semidiameter convexitatis ad lentem duarum æqualium superficierum, ut patet ex prop. XVI.

PROPOSITIO XX.

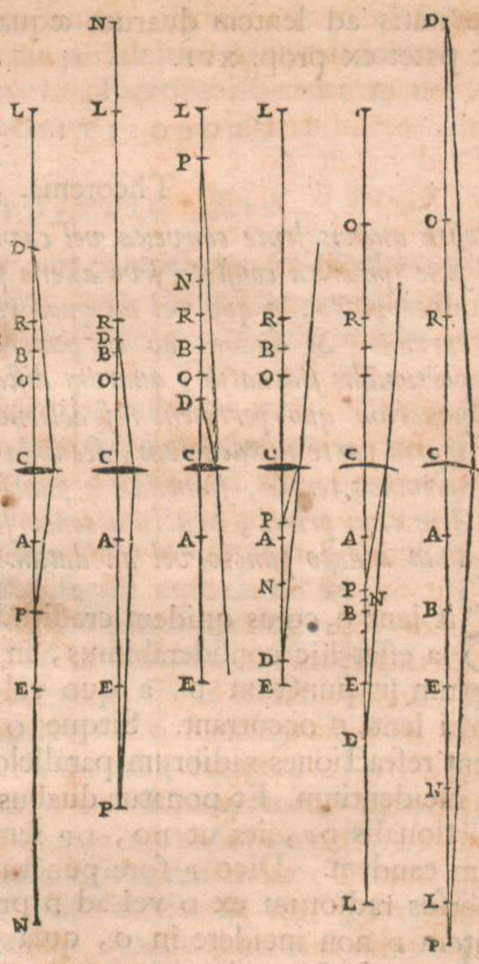
Theorema.

Posita quavis lente convexa vel cava, sive utraque superficie sphærica constet, sive altera plana; datoque in axe ejus puncto, a quo vel ad quod radii tendentes lenti occurrant: Si duabus ab eo puncto distantiis tertia proportionalis statuatur, quarum distantiarum prima sit ad punctum quo pertinent refractiones parallelorum a contraria parte incidentium; secunda ad lentem ipsam; erit terminus tertiæ, sumendæ a puncto dato in partem eandem cum primâ, punctum concursus vel dispersus radiorum à dato puncto vel ad datum tendentium.

Sit lens C, cujus quidem crassitudinem tanquam si nulla esset hic considerabimus, in axe autem lentis AC datum sit punctum D, a quo vel ad quod tendentes radii lenti C occurrant. Sitque O punctum quo pertinent refractiones radiorum parallelorum a contraria parte incidentium. Et ponatur duabus DO, DC tertia proportionalis DP, ita ut DO, DP semper sint versus partem eandem. Dico P fore punctum concursus vel dispersus radiorum ex D vel ad D procedentium. Debet autem D non incidere in O, quia tunc radii ex D venientes refractione lentis non cogentur ad punctum, sed paralleli evadent, ut constat ex prop. I.

Demonstratio autem, quando utraque lentis superficies sphærica est, erit hujusmodi.

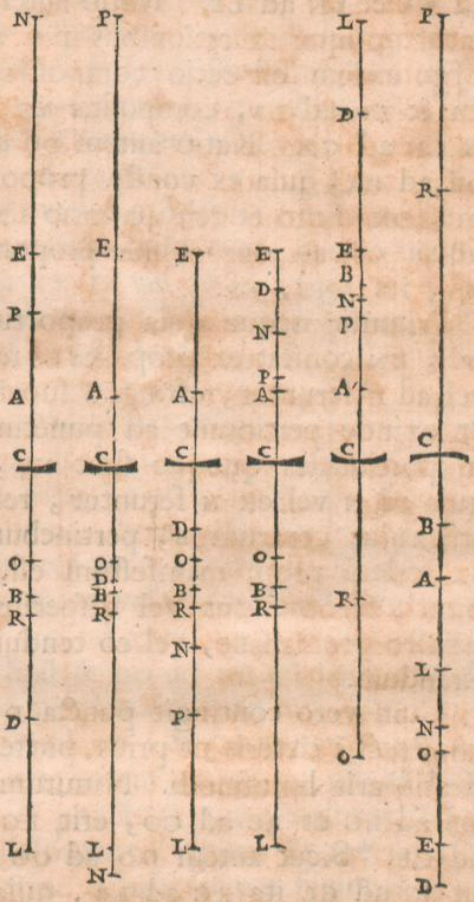
Sit A centrum sphæricæ superficiei cui primum incidentes radii occurrunt; B vero centrum reliquæ. Et inveniantur puncta E & L, ut tam CE ad EA quam CL ad LB habeat proportionem refractionis. Et ponatur ipsi AE æqualis CR ad partem lentis alteram; Unde AR erit ad RC sicut CE ad EA. fiat quoque tribus hisce DR, DC, DA quarta proportionalis DN, sumenda in eam partem ut vel quatuor omnes a puncto D eodem versus habeantur vel binæ utrimque. Quod si D sit idem quod A punctum, etiam N cum hisce coincidere cogitandum est. Si vero R cadat in D, is casus seorsim demonstrabitur. Nunquam vero N cadet in L, cum D diversum sit ab O, uti diximus esse debere.



Quia igitur CE ad EA, item CL ad LB est proportio refractionis, punctumque O quo pertinent refractiones parallelorum; erunt proportionales hæc quatuor LE, LA; LC, LO*. quare & LE ad EA ut LC ad CO, & permu-

* Prop. XVI. & XVII.

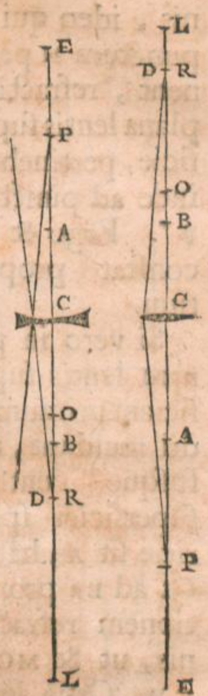
mutando LE ad LC ut EA sive CR ad CO. Unde & LE erit ad EC ut CR ad RO. Quia porro ex constructione proportionales sunt DR, DA; DC, DN, erit & DR ad RA seu EC ut DC ad CN; & invertendo NC ad CD ut EC ad DR. Quare & NE ad RC ut EC ad DR. Sed ut RC ad RO ita diximus esse LE ad EC. Ergo ex æquali in ratione perturbata, erit ut EN ad RO ita LE, DR. Et permutando & invertendo, ut LE ad EN ita DR ad RO. Hinc vero & LE ad LN ut DR ad DO, ac proinde rectang. LE, DO æquale LN, DR. Est autem sicut DO ad OC ita rectang. DO, LE ad OC, LE. Ergo erit DO ad OC ut rectang. LN, DR ad OC, LE, hoc est, ad rectang. LC, RC. dictum enim fuit antea quod LE ad LC sicut CR ad CO. Est autem



ut DO ad OC ita DC ad CP, quia ex constr. proportionales sunt DO, DC, DP. Ergo DC ad CP sicut rectang. LN, DR ad LC, CR. Rectangulum autem LC, CR æquale eſt LB, AR, quia CL ad LB ex conſtr. ut AR ad RC. Ergo DC ad CP rationem habet quam rectang. DR, LN ad LB, AR, hoc eſt, compoſitam ex rationibus DR ad RA & LN ad LB. Ratio autem DC ad CP componitur quoque ex rationibus DC ad CN & CN ad CP. Ergo eadem eſt ratio compoſita ex rationibus DR ad RA & LN ad LB, compoſitæ ex rationibus DC ad CN & CN ad CP. Ratio autem DC ad CN eſt eadem quæ DR ad RA, quia ex conſtr. proportionales ſunt DR, DA; DC, DN. Ergo & reliqua ratio LN ad LB eadem eſt reliquæ CN ad CP. Unde proportionales quoque erunt NL, NB; NC, NP.

Primum itaque quia proportionales ſunt DR, DA; DC, DN conſtat ex prop. XII. radios qui ex puncto D vel ad D feruntur, refringi a ſuperficie cujus centrum A, ut exinde pertineant ad punctum N. At quia porro proportionales quoque ſunt NL, NB; NC, NP; ideo quia ad N vel ex N feruntur, refracti in ſuperficie altera cujus centrum B, pertinebunt ad punctum P, ut ex eadem prop. manifeſtum eſt. Itaque patet P eſſe punctum concurſus vel diſperſus radiorum qui ex D puncto promanant, vel eo tendunt; quod erat demonſtrandum.

Cum vero contingit puncta D & R in unum coire; conſtructis cæteris ut prius, præter punctum N, demonſtratio erit hujuſmodi. Nimirum quia dictum fuit eſſe EL ad LC ut RC ad CO, erit RO ſeu DO ad OC ut EC ad CL. Sicut autem DO ad OC ita eſt DC ad CP, & ut EC ad CL ita RC ad LB, quia ex conſtr. eſt CE ad EA ſive CR ut CL ad LB. Itaque DC ad CP ut RC ſeu DC ad LB. ac proinde CP ipſi LB æqualis. Et addita utrique BC, erit quoque BP æqualis LC. Ergo eadem ratio BP ad LB ſeu PC quæ CL ad LB. hæc autem eſt ra-

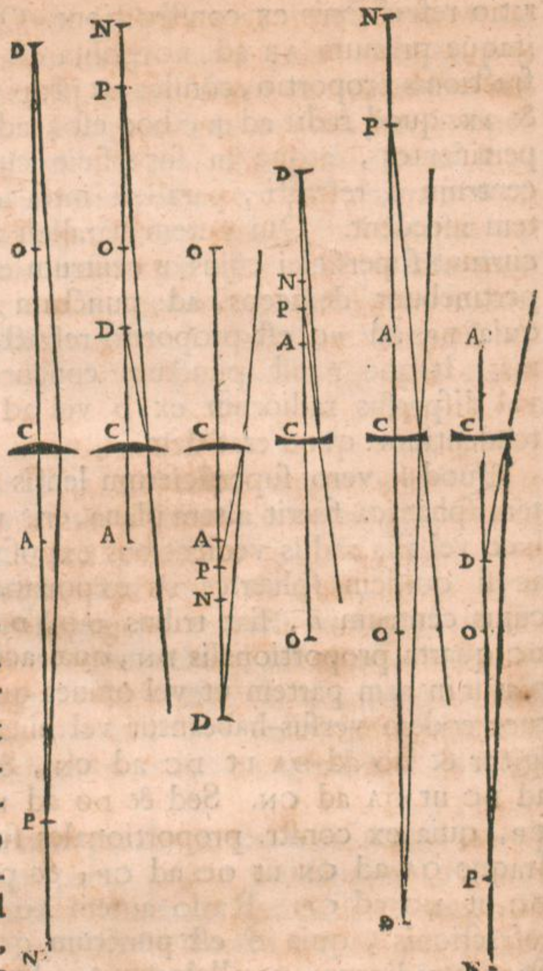


ratio refractionis ex constructione. Quia itaque primum AR ad RC posita est refractionis proportio, constat ex prop. XI. & IX. quod radii ad R, hoc est, ad D pertinentes, atque in superficie cujus centrum A refracti, paralleli intra lentem incedent. Qui autem paralleli occurrunt superficiei cujus B centrum est, pertinebunt deinceps ad punctum P, quia BP ad PC est proportio refractionis. Itaque P est punctum concursus vel dispersus radiorum ex D vel ad D tendentium: quod erat dem.

Quod si vero superficierum lentis altera sphærica fuerit altera plana, erit vel hæc vel illa radiis venientibus exposita, ac si quidem sphærica iis exponatur, cujus centrum A, fiat tribus DO, DA, DC quarta proportionalis DN, quæ accipiatur in eam partem ut vel omnes quatuor eodem versus habeantur vel binæ utrimque. Erit igitur & DO ad OA ut DC ad CN, & permutando DO ad DC ut OA ad CN. Sed & DO ad DC est sicut OC ad CP, quia ex constr. proportionales sunt DO, DC, DP. Itaque OA ad CN ut OC ad CP; & permutando AO ad OC ut NC ad CP. Ratio autem AO ad OC est ea quæ refractionis, quia O est punctum quo pertinent refractiones radiorum parallelorum *. Igitur & NC ad CP erit refractionis proportio. Quia itaque fecimus proportionales DO, DA; DC, DN; apparet radios omnes qui ad D vel ex D feruntur, refringi in superficie cujus centrum A, ut exinde pertineant ad punctum N †. Sed quia NC ad CP rationem habet quæ est refractionis,

* Prop. XIV. XV.

† Prop. XII. p. I.



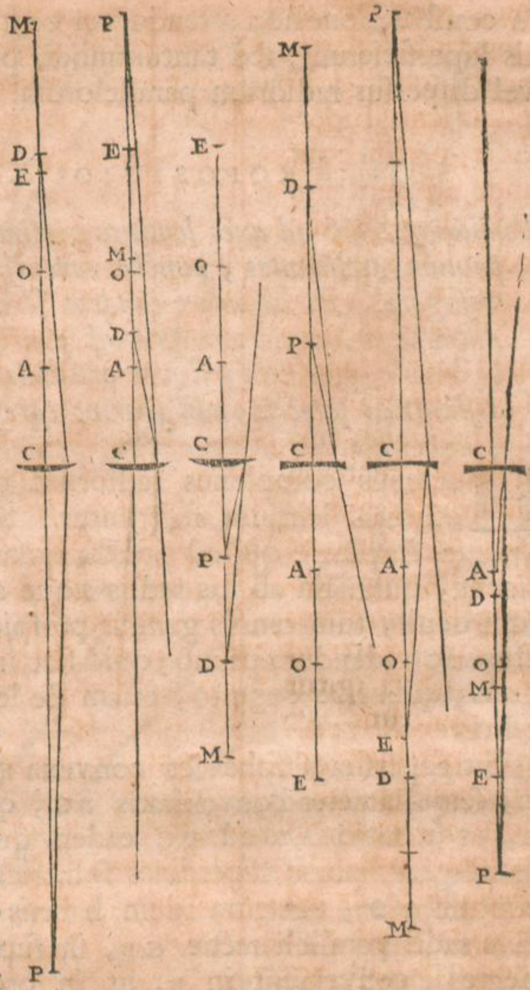
nis, ideo qui ad punctum N pertinent, refracti in plana lentis superficie, pertinebunt inde ad punctum P *. Ergo & hic constat propositum.

* Prop. VII.

Si vero in planam lentis superficiem primum radii incidant, rursusque centrum superficiei sphæricæ sit A; habeat CE ad EA proportionem refractionis, ut & MC ad CD. Quia igitur O punctum est quo pertinent refractiones parallelorum, erit CO æqualis AE †; ideoque & CE ad CO ut CE ad EA, hoc est, ut MC ad CD. Quare & ME ad OD erit ut MC ad CD. Est autem ut OD ad OC ita DC ad CP, quia ex constr. proportionales sunt DO, DC, DP. Igitur ex æquo, ut ME ad OC sive EA ita MC ad CP; ac proinde ut ME ad MA ita MC ad MP. Quia igitur posita est ratio MC ad CD eadem

† Prop. XIV.

eadem quæ refractionis, ideo radii ex D vel ad D tendentes, post refractionem in superficie lentis plana, pertinebunt ad punctum M*. Et * Prop. v. quia proportionales sunt ME, MA; MC, MP, constat † † Prop. XII. p. 3. radios qui ad M punctum pertinent, refractos in superficie, cujus centrum A, pertinere porro ad punctum P. Quod demonstrandum supererat.



Manifestum autem ex his est, quantum ad distantiam punctorum concursus vel dispersus radiorum, a quibusvis vel ad quælibet puncta tendentium, nihil interesse utra lentis alicujus superficies radiis incidentibus obvertatur.

Item diversarum superficierum lentes, quæ puncta concursus vel dispersus parallelorum æque remota habent, etiam ad cætera æquivalentes esse. Nempe quia in constructione non attenduntur centra singularum lentis superficierum, sed tantummodo punctum concursus vel dispersus radiorum parallelorum.

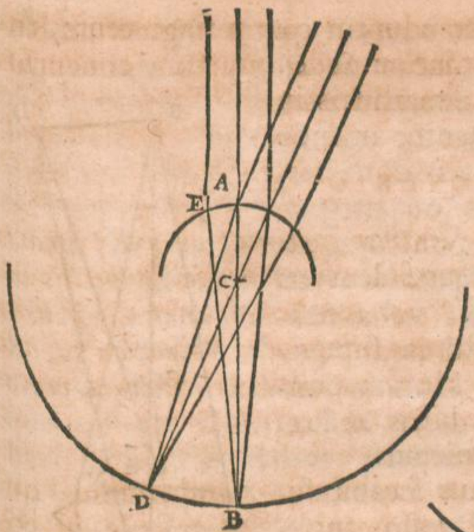
PROPOSITIO XXI.

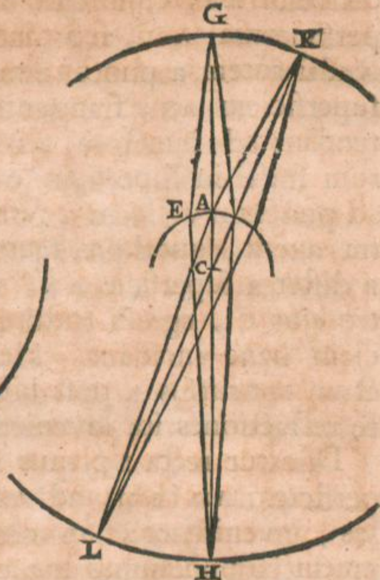
Radiorum, qui ad axes lentium pertinent ab axe primario paulum declinantes, puncta concursus vel dispersus investigare. Et ostendere eandem ferè horum esse a lente distantiam, ac eorum quæ ad puncta radiorum in axe positorum pertinent, si vel paralleli vel ab æque procul distantibus punctis radii fuerint egressi.

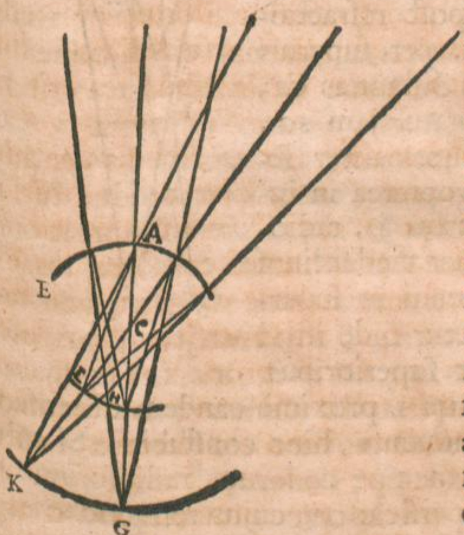
Hactenus complexus radiorum examinavimus qui ad axes lentium referuntur. Sed necesse est eos quoque inspicere qui ad puncta extra axem posita pertinent, quoniam ab his radiis æque ac ab illis pendent tum oculi, tum omnis generis perspicillorum miri effectus, ac videndum primò, quid fiat in superficiebus singulis, quia hoc cognito, etiam de lentibus res erit facilior.

Sit superficies sphærica convexa EA, cujus centrum C, semidiameter convexitatis AC, quæ producatur ad B, ut sit ratio AB ad BC eadem quæ est refractionis. Intelligatur porro superficies sphærica cava, radios exceptura BD; centrum idem habens C. Jam non tantum radii paralleli rectæ CB, in superficiem AE incidentes, convenient in B, ut in prop. VIII. demonstratum est, sed & ii qui rectæ CD, angulum qualemcumque cum CB constituenti, paralleli ferentur, eodem modo ad D concurrent.

Rursus si a puncto vel ad punctum aliquod G tendentes radii fractique in superficie sphærica AE, habuerint





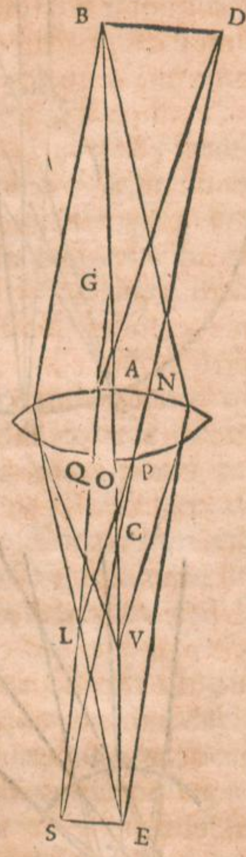


rint punctum concurſus H; hoc autem invenitur per prop. 11. p. 1. & 2. & centro C intelligantur ſuperficies ſphæricæ GK, HL, tunc radii ex K, puncto ſuperficiei GK venientes, vel ad K tendentes, concurrent ſimiliter ad punctum in ſuperficie HL, ut L. atque hæc per ſe manifeſta ſunt in quibuſcunque caſibus.

Ponatur nunc lens

 con-

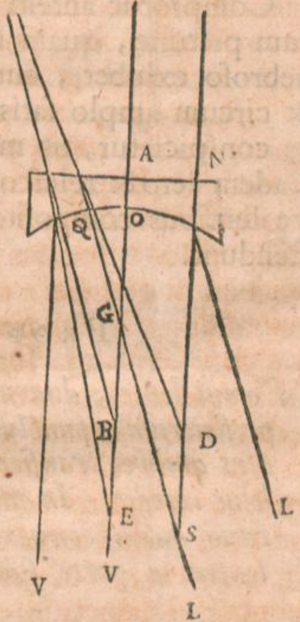
convexa AO, cujus axis BAE, in quo nempe centra superficierum AN, OP ſint C & G. Radii autem a puncto B manantes in ſuperficiem AN, franguntur ut inde tendant ad punctum E: atque iterum fracti in ſuperficie OP pergant ad punctum V. Item a puncto D extra axem, quodque tantundem ac B diſtet a ſuperficie AN, vel a centro ejus C, egreſſi radii in ſuperficiem hanc incidant. Horum punctum concurſus L poſt binas in lente refractiones ita inveniemus.



Ducatur recta DC, quæ ſecabit ſuperficiem AN in N, ad rectos angulos, invenieturque in eadem linea producta punctum S quo concurrunt radii ex D venientes poſt refractionem in ſuperficie AN, per ſuperius expoſita. Et apparet diſtantias CS, CE fore æquales. Jungatur jam SG, quæ ſuperficiem OQ normaliter ſecabit in Q; eritque propterea in ipſa SG punctum concurſus L, radiorum ex prima refractione tendentium ad S, ac rurſus refractorum in ſuperficie OQ, atque invenietur inde iſtud concurſus punctum ex ſuperioribus.

Quod autem punctum L proximè eandem diſtantiam habebit a lente ac punctum V, hinc conſtabit. Si enim puncta E, S, vertices nempe conorum radioſorum æqualiter diſtarent a ſuperficie OQ, cujus refractione mutantur hi Coni in conos quorum vertices L & V; etiam hi hi vertices æqualiter diſtarent ab hac ſuperficie. Sunt autem diſtantiæ QS, OE proximè æquales, quippe minimo quopiam differentes, quanto nimirum GE ſive duæ ſimul GC, CS ſuperant GS. Ergo & diſtantiæ LQ, VO proximè æquales erunt. Rectæ autem quæ puncta B, D, itemque V, L, conjungunt, quia minimæ eſſe cenſentur, & puncta ipſa æqualiter a lente diſtant, poſſunt tanquam ad axem lentis BE perpendiculares haberi.

Hæc autem non difficulter ad cavas quoque lentes, & ad eas quæ alteram ſuperficierum planam habent, omnemque caſuum diverſitatem transferri poſſunt, radios parallelos, tanquam ad punctum infinite diſtans conſiderando. Quod uno etiam exemplo in lente plano concava ſchema alterum explicat.



Hujus enim lentis plana ſuperficies AN radios ad punctum axis B tendentes excipit, itemque alios tendentes ad punctum D, ab axe exiguo diſtans, & æque ac B a ſuperficie AN. Quod ſi jam ponamus eos qui ad B tendebant, poſt alteram refractionem in ſuperficie OQ, fieri parallelos axi AE; ſive ad punctum V in axe infinite diſtans concurrere, fient etiam qui ad D tendunt, ejuſdem ſuperficiei OQ altera refractione, inter ſe paralleli: ſive ad punctum L in linea QGS infinitè diſtans pertinebunt. Quæ linea invenitur eodem modo ac in caſu præcedenti; eademque eſt demonmonſtratio, qua oſtendatur ex poſtrema refractione radios utrobique fieri parallelos, niſi quod hoc caſu, e duabus GE, GS, quæ ut æquales cenſentur, GE nunc pauxillo minor eſt quam GS, quippe cum æquales ſint AE, NS.

Porrò ex his manifeſtum eſt, etiam per binas pluresve lentes tranſmiſſos conos radioſos, tam obliquos quam rectos, æquali diſtantia a lente poſtrema vertices ſuos ultimos habere, ſi ad æque remotos conorum vertices radii primitus ſpectent.

Comprobat autem quæ hic oſtenſa ſunt experimentum picturæ, quam lens foramini oppoſita in loco tenebroſo exhibet, cum non tantum in axe lentis, ſed & circum amplo ſatis ſpatio hæc pictura mirabili nitore conſpiciatur, ut minima quæque diſtinctè exprimat. Eadem vero & teleſcopiorum ex binis, ternis, quaterniſve lentibus compoſitorum egregii effectus vera eſſe oſtendunt.

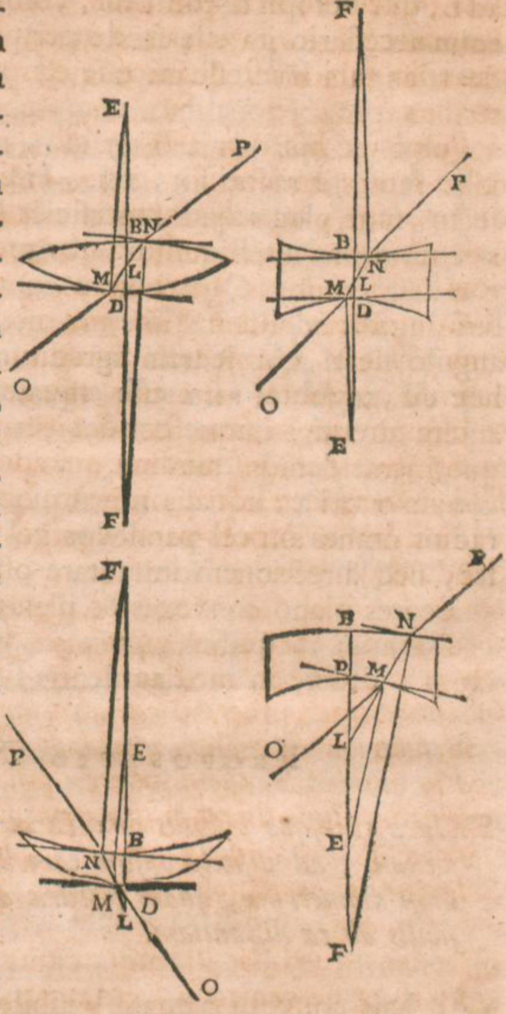
Propositio XXII.

In omni lente, duarum convexarum aut concavarum ſuperficierum, punctum quoddam eſt intus, per quod radius quilibet tranſiens ante & poſt lentem ſibi ipſi parallelus incedit. In meniſco autem, & in illa quæ minori cavo quam convexo conſtat, punctum ejuſmodi extra lentem a parte ſphæræ minoris reperitur.

Sit lens quælibet iſtarum, cujus ſuperficies altera deſcripta ſit centro E, radio ED, altera centro F, radio FB, quorum FB ſit major altero: & jungatur FE, quæ ſecet lentem in D & B.

Quod ſi jam ſicut radius FB ad radium ED ita ponatur

tur BL ad LD; & cadat punctum L; (ſi quidem duarum convexarum vel concavarum ſuperficierum fuerit lens) in ipſa linea BD, quæ lentis craſſitudinem definit; extra lentem vero, verſus ſphæram minorem, in meniſco & caſibus reliquis; dico radium omnem qui lentem penetrat ut PNMO, ita ut pars ejus NM intra lentem contenta tranſeat per punctum L, vel ad ipſum pertineat; ſibi ipſi, ante ingreſſum & poſt egreſſum ex lente, parallelum ferri, hoc eſt partem PN parti MO.



Jungantur enim FN, EM & intelligantur planæ ſuperficies in punctis N & M utraſque lentis ſuperficies ſphæricas tangentes. Quia igitur ut FB ad ED ita BL ad LD; erit & permutando, FB ad BL ut ED ad DL. Unde & BF ſive NF ad FL ut DE ſive ME ad EL. Cum itaque triangula NFL, MEL latera circa angugulos E & F proportionalia habeant, angulosque æquales ad L, qui vel ipsi obtusi sunt, vel reliqui ad M & N (hoc enim necessario ita esse facile perspicitur) similia proinde triangula hæc esse necesse est. Quare & anguli lateribus proportionalibus comprehensi æquales erunt, angulus nempe NFL angulo MEL; ideoque parallelæ inter se rectæ FN, EM. Hæ autem ad angulos rectos sunt planis quæ superficies lentis in punctis N & M contingere intelliguntur. Ergo & plana ista inter se parallela erunt. Quamobrem cum radius NM æqualibus angulis ad illa inclinetur, necesse est eum æquali angulo flecti, ubi lentem egreditur atque ubi intrabat, hoc est, angulum PNM esse æqualem angulo NMO. Sunt autem alterni: itaque constat PN, MO esse parallelas, quod erat demonstrandum. Eadem demonstratio lenti convexo cavæ, æqualis utrimque curvaturæ applicata, radios omnes axi vel parallelos vel obliquos recta transire, nec directionem immutare ostendit.

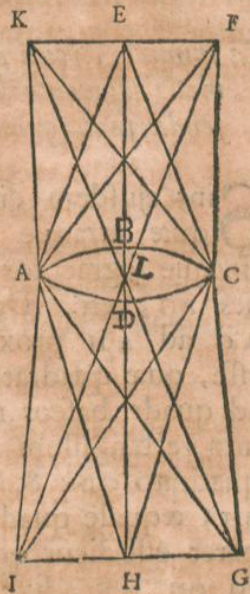
Lentes plano convexas & planoconcavas hic non recensuimus, in quibus tamen per hæc ipsa constat punctum L cadere in mediam lentis superficiem sphæricam.

PROPOSITIO XXIII.

Pictura cujusque visibilis quæ fit in plano post lentem convexam, ad visibile ipsum eam habet rationem, secundum diametrum, quam picturæ distantia a lente ad visibilis ab ea distantiam.

Sit lens convexa ADCB. Visibile vero linea recta KF, quam axis lentis mediam secet, atque ad angulos rectos in E. A punctis igitur K, E, F æque ac ab aliis omnibus, quæ in proposita linea imaginari licet, radii

dii ferantur in totam lentem ABC, qui poſt geminam refractionem, in utraque nimirum lentis ſuperficie, colliguntur in totidem punctis tabulæ IHG; nempe qui ex K in G, qui ex E in H, & qui ex F in I; quatenus quidem diſtinctam ponimus exiſtere hanc picturam. Quum igitur lux a puncto K manans, omnia puncta quæ ſunt intra lentem ABC pervadat, fiet neceſſariò ut aliquis radiorum ex K manantium, atque in G collectorum, tranſeat per punctum lentis L, illud nimirum de quo egimus propoſ. ſuperiori; atque is radius ante & poſt lentem ſibi ipſi parallelus feretur; quumque ſimiliter aliquis tranſeat ab F ad I, apparet utroſque pro lineis rectis haberi poſſe in centro lentis ſeſe interſecantibus; non conſiderata videlicet lentis craſſitudine. Cumque hoc modo duos triangulos iſoſceles ſimiles efficiant, quorum baſes KF & IG; hæ utique eandem inter ſe rationem ſervabunt quam triangulorum ipſorum altitudines; hoc eſt, quam diſtantiæ baſium a lente ABCD. quod erat demonſtrandum.



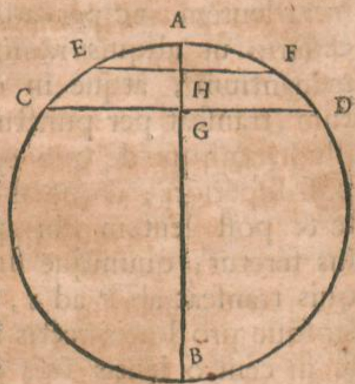
De Aberrationibus ex figurâ.

Duæ in radiis obſervantur aberrationes. Prior ex figura oritur, ex diſſipatione vero poſterior, de qua poſtea. Ad priorem explicandam, præmittuntur ſequentes propoſitiones, ut Lemmata.

PROPOSITIO XXIV.

In minimis circuli ejusdem segmentis, altitudines seu diametri segmentorum eandem inter se rationem habere censendæ sunt, quam quadrata basium.

Sint ejusdem circuli exigua segmenta CAD, EAF, quæ utraque diameter circuli AB bifariam secet, sintque segmentorum altitudines AG, AH. Dico rationem AG ad AH proximè eandem esse, quæ quadrati baseos CD ad quadr. baseos EF. Quia enim rectangulum BGA æquale quadrato GD: & rectangulum BHA æquale quadrato FH; apparet esse sicut quadratum GD ad qu. HF, sive ut qu. CD ad qu. EF ita rectangulum BGA ad rectangulum BHA; Sicut autem rectangulum BGA ad rectangulum BG, HA, quod pauxillo minus est rectangulo BHA, ita est AG ad AH. Ergo & AG ad AH exiguo majorem rationem habet quam quadratum CD ad qu. EF.



Sit AB diameter partium 20000000; arcus CAD $\frac{1}{36}$ circumferentiæ sive 10 graduum; fit DG partium 871557, cujus si FH dimidia ponatur erit ea 435778. At AG est 38053; cujus quarta pars 9513, cui si æqualis esset AH, jam esset eadem ratio AG ad AH quæ quadrati CD ad qu. EF. Nunc autem invenitur AH partium 9500, adeo ut differentia tantum sit $\frac{13}{9500}$ sive $\frac{1}{731}$ ipsius AH, ac tantum $\frac{13}{20000000}$ diametri AB.

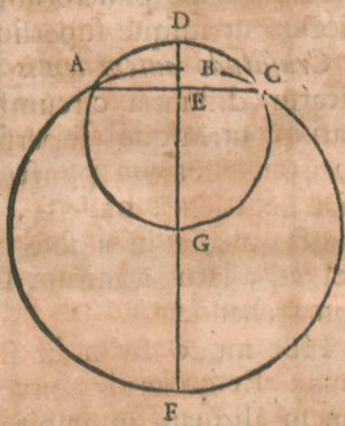
Su-

Superficies vero convexæ aut concavæ lentium quas in ſequentibus conſiderabimus plerumque tantum $\frac{1}{100}$ vel $\frac{1}{200}$ partem circumferentiæ complectuntur, ut poſtea dicetur, in quibus proinde multo minus fallit dicta baſium altitudinumque proportio.

PROPOSITIO XXV.

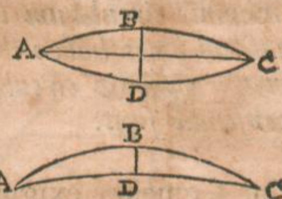
In minimis circulorum inæqualium ſegmentis, æquales vel eaſdem baſes habentibus, altitudines ſegmentorum, diametris ipſorum circulorum, contraria ratione reſpondere cenſendæ ſunt.

Sint ſegmenta exigua inæqualium circulorum, ABC, ADC, eandem baſin AC habentia, ac bifariam diviſa recta DE, in qua diametri circulorum, BF quidem ejus ex quo ſegmentum ABC, DG verò minoris ex quo ſegmentum ADC. Dico ſicut BF ad DG ita proxime eſſe altitudinem DE ad BE. Cum enim rectangula FEB, GED inter ſe æqualia ſint, quippe quæ ſingula æquentur quadrato EC, Erit proinde ut FE ad GE ita DE ad EB. Sed ut FE ad GE ita eſt proxime diameter FB ad diametrum GD, cum partes EB, ED minimæ ponantur totarum diametrorum reſpectu. Ergo etiam ut diameter FB ad diam. GD ita eſt proximè DE ad altitudinem BE.

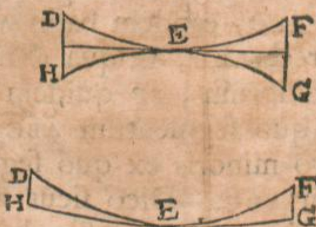


Sit arcus ADC rurſus $\frac{1}{36}$ circumferentiæ ſive 10 gr. & dia-

diameter DG partium 20000000; Erit ED partium 38053. Jam ſi diameter BF diametri DG dupla ſtatuatur, hoc eſt, partium 40000000, invenietur EB partium 19000, quæ debebat eſſe dimidia ED, hoc eſt, partium 19026. Itaque differentia tantum eſt $\frac{26}{19000}$ ſive $\frac{1}{731}$ ipſius EB, nec niſi $\frac{26}{40000000}$ diametri BF. Et ſumto minore arcu ADC, tanto exactius quadrabit dicta altitudinum ac diametrorum contraria proportio.



Craſſitudo lentis convexæ dicatur intervallum quo inter ſe diſtant puncta media utriuſque ſuperficiei, lateribus coeuntibus. Ita lentis ABCD cujus latera in unum circulum AC conveniunt, craſſitudo eſt BD, diſtantia nempe punctorum mediorum utriuſque ſuperficiei.



Craſſitudo autem lentis cavæ dicatur diſtantia circumferentiarum utriuſque ſuperficiei, coeuntibus earum punctis mediis. Ita lentis DEFGH, cujus puncta media in E ſeſe contingunt, craſſitudo eſt DH vel FG, latus nimirum Cylindri utramque ſuperficiem comprehendentis.

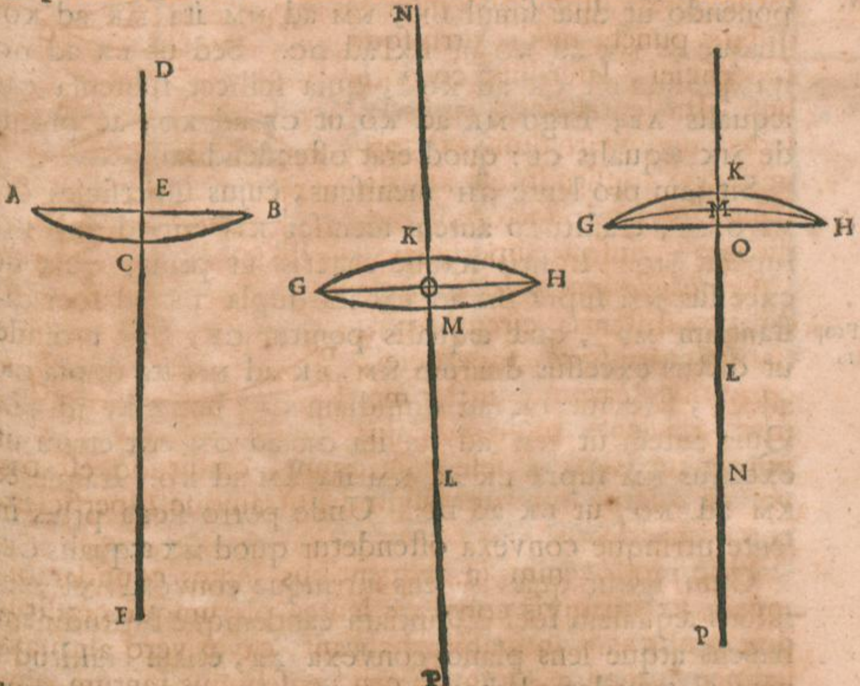
Hoc modo enim in ſequentibus lentes conſiderabimus. Et quamvis convexæ lentes plerumque craſſitudinem aliquam in ambitu habeant, cavæ vero aliquam ſemper in medio. Eam tamen cenſebimus tantum omnium eſſe craſſitudinem, quæ ſupereſſet ſuperficiebus ſe mutuo vel in ambitu vel in medio contingentibus.

PRO-

PROPOSITIO XXVI.

Lentes convexæ eandem foci distantiam habentes, cavæ vero eandem distantiam puncti dispersus, si & latitudinem æqualem habuerint, etiam æquali erunt crassitudine, & contra.

Sit primo lentium altera AB plano convexa, sitque superficiei ACB semidiameter convexitatis DC, crassitu-



do lentis CE, foci distantia CF, quæ erit dupla CD. Lens autem altera utrimque convexa sit GH, cujus latitudo eadem quæ lentis AB, & foci distantia MP æqualis CF. Dico igitur & crassitudinem KM lentis GH æqualem esse EC crassitudini lentis AB.

Sit enim in lente GH superficiei GKH semidiameter convexitatis LK; superficiei vero GMH semidiam. convexitatis MN. rectaque GH secet crassitudinem lentis KM in O.

Quia igitur ut duæ simul LK, NM ad NM ita dupla LK ad foci distantiam MP*. quæ æqualis ponitur CF. Erit proinde ut duæ simul LK, NM ad NM ita dupla LK ad CF, sive ita LK ad dimidiam CF hoc est, ad DC. Quia autem ut LK ad NM ita MO ad OK†. erit & componendo ut duæ simul LK, NM ad NM ita MK ad KO. Itaque & MK ad KO ut LK ad DC. Sed ut LK ad DC ita quoque est CE ad KO*, quia scilicet subtensa GH æqualis AB; Ergo MK ad KO ut CE ad KO; ac proinde MK æqualis CE: quod erat ostendendum.

* Prop. XVI.

† Prop. XXV.

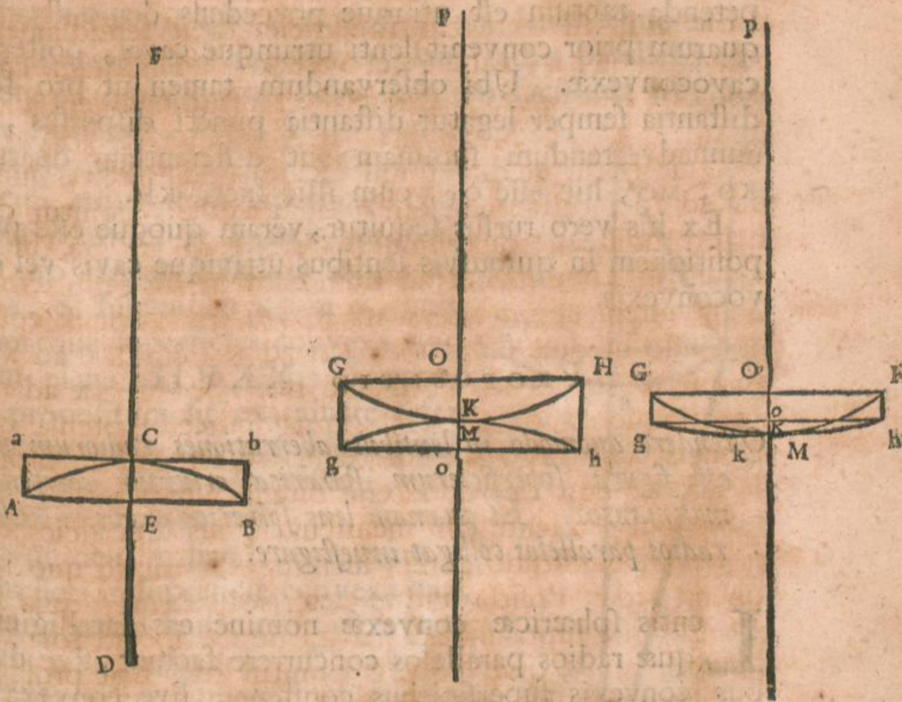
* Prop. XXV.

Sit jam pro lente GH meniscus, cujus superficies cava GMH; crassitudo autem menisci KM erit id quo KO superat MO. Positis itaque cæteris ut prius; quia ut excessus NM supra LK ad NM ita dupla LK ad foci distantiam MP*, quæ æqualis ponitur CF; Erit proinde ut dictus excessus duarum NM, LK ad NM ita dupla LK ad CF, sive ita LK ad dimidiam CF, hoc est, ad DC. Quia autem ut NM ad LK ita OK ad OM erit etiam ut excessus NM supra LK ad NM ita KM ad KO. Itaque & KM ad KO, ut LK ad DC. Unde porro sicut prius in lente utrinque convexa ostendetur quod MK æqualis CE.

* Prop. XVI.

Cum igitur quævis lens utrinque convexa vel meniscus æqualem foci distantiam eandemque latitudinem habens atque lens plano convexa AB, etiam crassitudinem ei æqualem habeat, sequitur & omnes utrimque convexas atque omnes meniscos qui foci distantiam latitudinemque inter se æqualem habuerint, etiam pari crassitudine futuros.

Sit jam etiam lens plano cava ACBba superficie utraque



traque contigua in C; sitque rursus superficiei ACB centrum D, & CF distantia puncti dispersus, quæ est dupla CD; crassitudo autem sit Aa vel CE. Lens autem altera, vel utrimque cava vel cavo convexa sit GKH h M g æqualem ipsi AB latitudinem habens, punctique dispersus distantiam PM æqualem FC. Harum autem lentium superficies utræque sese in puncto medio contingere ponuntur, ita ut puncta K & M in unum conveniant, ac crassitudo lentis sit, vel summa duarum KO, Mo, quæ altitudines utriusque sphæricæ superficiei referunt, vel earum differentia. Quæ crassitudo ut æqualis ostendatur crassitudini CE lentis ACB ba, re-

pe-

petenda tantum eſt utraque præcedens demonſtratio, quarum prior convenit lenti utrimque cavæ, poſterior cavoconvexæ. Ubi obſervandum tamen ut pro foci diſtantia ſemper legatur diſtantia puncti diſperſus, & animadvertendum ſummam aut differentiam duarum KO, MO, hic eſſe Oo, cum illic fuerit KM.

Ex his vero rurſus ſequitur, veram quoque eſſe propoſitionem in quibuſvis lentibus utrimque cavis vel cavoconvexis.

PROPOSITIO XXVII.

Oſtendere quomodo in lentibus aberrationes radiorum quæ ex figura ſuperficierum ſphærica oriuntur compendio inveniantur. Et quænam lens ſphærica convexa melius radios parallelos colligat inveſtigare.

Lentis ſphæricæ convexæ nomine eas intelligimus quæ radios parallelos concurrere faciunt, ſive duabus convexis ſuperficiebus conſtent, ſive convexa & plana, ſive convexa & concava. Harum vero æquales foci diſtantias habentium aliæ aliis perfectius radios parallelos verſus punctum illud quod focus dicitur inclinant, ſumtis nimirum latitudinibus ſeu aperturis lentium æqualibus. Quod licet in Teleſcopiorum rationibus parum referat, propter aliam aberrationem longe majorem atque alterius naturæ, de qua, ubi eo ventum erit, dicemus, habet tamen in Microſcopiorum examine & alibi utilitatem hæc cognitio, eoque non eſt prætereunda. Proportionem autem refractionis vitri ſeſquialteram in his ubique uſurpabimus, quæ quam proximè ejuſmodi invenitur, ut in præcedentibus dictum fuit.

In-

Incipiendo itaque a planoconvexa lente atque eâ illius positione quâ superficies plana radiis parallelis exposita est, ubi calculi ratio omnium facillima est; Sit lens ejusmodi, cujus sectio per axem segmentum circuli KBC, cujus circuli atque item superficiei convexæ centrum sit A, axis vero lentis ABD, secans bifariam arcum KC in B, & subtensam KC in G, conveniatque superficies convexa KBC cum plana KC in lentis margine, & propositum sit examinare refractionem radii HC axi lentis paralleli atque ab eo remotissimi, quæ refractio ponatur esse CD, & constat quidem in hac lente tantum unam fieri in superficie convexa CBK. Focus autem lentis E erit ultra punctum D, ut ostensum est prop. IX. Invenieturque sumendo AE triplam AB, ita enim AE ad EB habebit rationem sesquialteram, quæ hic est proportio refractionis. Inveniendum itaque est spatium DE, intra quod radiorum omnium parallelorum refractiones cum axe lentis conveniunt: etenim tanto quæque propius convenit quanto vicinior radius fuerit axi AB, ut ostensum propos. IX.

Jungatur AC, sitque hæc sive AB $\propto a$, CG $\propto b$, quarum utraque data est. AD vero sit $\propto x$. Quia itaque AD ad DC habet rationem quæ refractiones metitur, erit DC $\propto \frac{3}{2}x$. Et ablato quadrato GC a quadrato CD, fiet quadratum GD $\propto \frac{9}{4}xx-bb$, & GD $\propto \sqrt{\frac{9}{4}xx-bb}$. Rursus ablato eodem quadrato

drato CG a quadrato AC, fiet quadratum GA $= aa-bb$ & AG $= \sqrt{aa-bb}$, qua addita ad GD $= \sqrt{\frac{4}{9}xx-bb}$ fiet tota AD ſive $x = \sqrt{\frac{4}{9}xx-bb} + \sqrt{aa-bb}$. Unde invenitur $x = \frac{3}{5}\sqrt{9aa-9bb} + \frac{3}{5}\sqrt{4aa-9bb}$. Secundum quæ ſi AB ponatur pedum 6, ſive pollicum 72 & GC pollicis 1, invenitur x ſive AD paulo major quam $215\frac{968747}{1000000}$, qua ablata ab AE $= 216$, reliqua ſit DE paulo minor quam $\frac{31253}{1000000}$ unius pollicis. Itaque in lente hujuſmodi cujus foci diſtantia BE eſt 12 pedum, apertura vero KC duorum pollicum, radii omnes intra ſpatium DE cum axe conveniunt.

Dicatur autem intervallum iſtud DE, quo nempe radii extremi in quavis lente concurſus diſtat a foco lentis, *Aberratio radii extremi.*

Hanc porro in propoſita lente, alia quoque faciliori ratione reperiri ſciendum eſt: quandoquidem

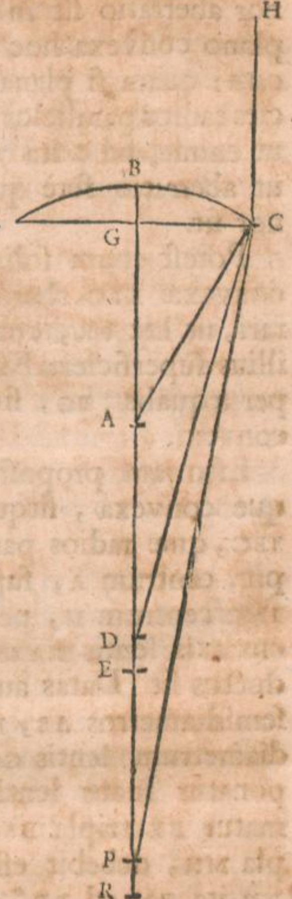
In omni lente planoconvexa cujus plana ſuperficies exterior eſt, aberratio radii extremi eſt quadrupla ſeſquialtera ſive $\frac{9}{2}$ craſſitudinis lentis; Exigua quidem differentiola, ſed quæ in illa lentium latitudine quæ teleſcopiorum uſibus idonea eſt, nullius ſit momenti. Ita, in propoſita lente, ſi ſumatur DE $= \frac{9}{2}$ GB, inveniemus eam $\frac{31252}{1000000}$ unius pollicis proximè, cum ex priori calculo habuerimus $\frac{31253}{1000000}$.

In lente eadem inverſa, ut ſuperficies convexa primum radios inflectat, multo melior radiorum collectio invenietur. Eſt autem calculi ratio hujuſmodi. Primo ſumitur BR tripla ſemidiametri BA, ut fiat R focus ſuperficiei convexæ KBC; deinde ponitur GE æqualis duabus tertiis GR; tumque erit E focus lentis KBC, ut conſtat ex propoſ. XIV. ex qua apparet inſuper foci diſtantiam GE proxime eandem eſſe quæ fuit ſuperiori lentis poſitu. Radius autem extremus HC axi parallelus a ſuperficie convexa KBC primum flectitur verſus

P, ita ut CP ad PA habeat rationem quæ est refractionis, nempe 3 ad 2 *. Deinde ex superficie plana KC egrediens refringitur versus D, ut PC ad CD rursus habeat rationem quæ est refractionis †, ita ut CD proinde æqualis sit AP. Ad inveniendam vero AP, positis ut ante AB $= a$; CG $= b$. AP vero $= x$; erit PC $= \frac{3}{2}x$. a cujus quadrato $\frac{9}{4}xx$ si auferantur quadrata PA $=$, xx & CA $=$, aa, quod restat $\frac{5}{4}xx - aa$ æquabitur duplo rectangulo PAG, hoc est, $2x\sqrt{aa-bb}$. Ex qua æquatione fit $x = \frac{4}{5}\sqrt{aa-bb} + \frac{4}{5}\sqrt{\frac{9}{4}aa-bb}$. Itaque investigatâ secundum hæc AP, cui æqualem diximus CD, aufertur deinde ab hujus quadrato quadratum CG; unde relinquitur quadr. GD. ablata autem GD a GE, restat DE aberratio radii extremi.

* Prop. II.

† Prop. III.



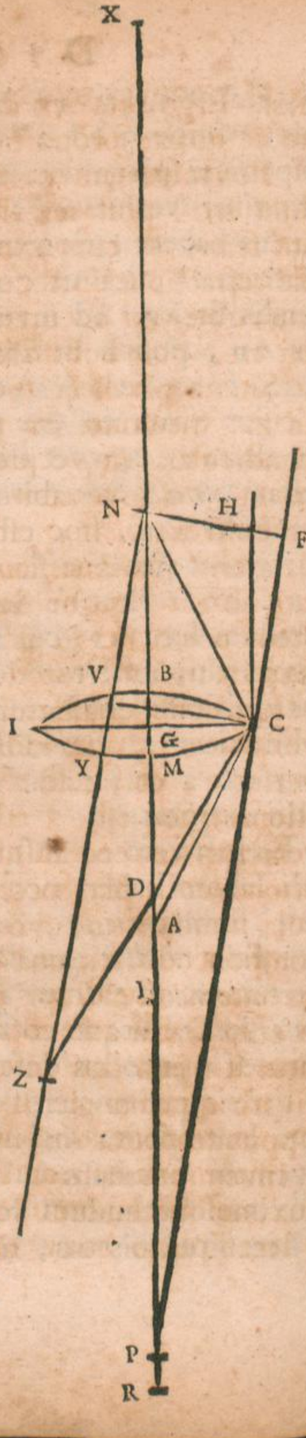
Eadem vero DE absque tanto calculi labore haberi potest, quia *In lente planoconvexa, cujus convexa superficies radios parallelos excipit, aberratio radii extremi est $\frac{7}{6}$ crassitudinis lentis.* atque eo tantum supputandi methodos describimus, ut has regulas veras esse quivis per numeros examinare possit. Et in hac quidem lente posita AB, ut ante, pollicum 72; CG pollicis, invenitur prædicto calculo DE $= \frac{81021}{10000000}$ unius pollicis proximè. Secundum regulam vero, hoc est, sumtâ DE $= \frac{7}{6}$ crassitudinis BG, fit ipsa proxime $\frac{81022}{10000000}$.

Patet autem hinc quanto minor aberratio ſit in eadem lente plano convexa hoc modo collocata, quam ſi plana ejus ſuperficies radios parallelos excipiat, ſicut enim $\frac{7}{6}$ ad $\frac{9}{2}$ ita 7 ad 27, adeo ut aberratio ferè quadruplo minor ſit.

Poteſt etiam ſolius ſuperficiei convexæ KBC aberratio conſiderari, ut hic PR, cum R ſit focus illius ſuperficiei: Eſtque PR ſemper æqualis $\frac{4}{3}$ BG, ſive altitudinis convexi.

Eſto jam propoſita lens utrinque convexa, ſitque ſuperficiei IBC, quæ radios parallelos excipit, centrum A; ſuperficiei vero IMC centrum N, per quæ tranſiens axis lentis NA utrimque productus ſit. Datas autem ponimus ſemidiametros AB, NM, & ſemidiametrum lentis GC. Jam ſi E ponatur focus lentis IC, & ſumatur BR tripla BA, & MX tripla MN, debebit eſſe ut RX ad RN ita RM ad RE *. Dantur autem tres iſtæ priores RX, RN, RM. nam quia AB ſeu AC data eſt itemque CG, dabitur & AG. ſimiliterque propter datas NC, CG dabitur NG. Sed & AR datur, quippe dupla AB, & NX dupla

* Prop. XVI.



NM.

NM. Ergo tota RX data erit, nec non RN & RM. Quare & quarta proportionalis RE data erit.

Ponamus jam porro radium extremum axi parallelum HC, post refractionem primam in superficie IBC ita ferri, ut cum axe concursurus sit in P, altera deinde refractione in superficie CMI flecti secundum rectam CD, quæ axi occurrat in D. Aberratio itaque radii HC est DE, quæ hoc modo invenietur.

Sit NZ parallela CP, atque ei occurrat producta CD in Z. Sit etiam CV perpendicularis ad NZ, & NF perpendicularis in PC productam. Primum itaque ex datis AB, CG invenitur AP, sicut paulo ante in lente plano convexa. Est autem AP ad PC ut 2 ad 3 ergo & PC data erit. Ex datis autem AP & AR, datur PR; qua ablata ab RN, quam datam ostendimus, relinquitur PN. Sicut porro PC ad CG ita PN ad NF sive CV, itaque & hæc dabitur.

Jam consideranda est NZ tanquam axis superficiei convexæ CYI, quæ radium axi parallelum FC ita flectit versus Z, ut NZ ad ZC habeat rationem quæ est refractionis, hoc est, 3 ad 2; Unde ex datis NC & CV invenietur NZ, eodem modo atque superius in prima positione lentis plano convexæ. Jam vero propter triangula similia ZND, CPD, erit ZN ad CP ut ND ad DP; & componendo, ZN una cum CP ad CP ut NP ad PD. datas autem ostendimus ZN, CP, NP: ergo & PD hinc data erit, Datur autem & PR. Ergo & DR, a qua si auferatur RE jam ante inventa, relinquetur DE aberratio radii HC quæsita. Et hæc quidem methodus ad exactam supputationem adhibenda esset.

Invenimus autem & hic Regulam compendiosam qua, absque labore illo, lineam DE, sicut in præcedenti lente plano convexa; atque æque accuratè definire licet. Repertis enim tantummodo BG, GM, ex datis AB, NM, CG; ponendoque totam BM, hoc eſt, lentis craſſitudinem $= q$. ſemidiametrum AB $= a$; NM $= n$. Erit DE $= \frac{27aaq + 6anq + 7nnq}{6\,qu.\,\overline{a+n}}$, hoc eſt, ſicut ſexcuplum quadratum lineæ æqualis duabus AB, NM, ad viginti-ſeptuplum quadratum AB, plus ſexcuplo rectangulo AB, NM, plus ſeptuplo quadrato NM, ita erit craſſitudo lentis BM ad aberrationem radii extremi DE. Quæ regula ut & ſequentes quas dabimus inventa eſt neglectis minimis, ſed neceſſario cum delectu.

Si itaque exempli gratia, lens IC fuerit æqualiter utrinque convexa, hoc eſt, ſi $a = n$, fiet DE $= \frac{5}{3}$ craſſitudinis BM. Unde patet lentem utrimque æqualiter convexam, latitudine & foci diſtantia iiſdem, cum lente plano convexa, cujus convexum exterius ſitum ſit, non æque bene atque illam radios parallelos colligere: talium enim lentium æqualis cum ſit craſſitudo, ut oſtenſum propoſ. XXVI, convenient radii in planoconvexa intra $\frac{7}{6}$ ſuæ craſſitudinis; at in hac æqualiter convexa intra $\frac{5}{3}$ ſuæ, hoc eſt, ejuſdem craſſitudinis: quorum intervallorum proportio eſt ea, quæ 7 ad 10.

Quod ſi ſemidiameter AB ad NM ponatur ut 2 ad 5; hoc eſt, a partium 2, & n partium 5; fiet ex hac regula DE æqualis $\frac{7}{6}q$, ſive craſſitudinis lentis. Adeo ut hujuſmodi lens æquiparanda ſit dictæ plano convexæ. Atque ita facile in quibuslibet inæqualium convexorum lentibus inveſtigari poteſt, quanto quæque melior ſit.

Quæſita vero minimi determinatione, hoc eſt, quænam forma lentis faciat aberrationem DE reliquis minorem, invenio debere eſſe AB ad NM ut 1 ad 6; ac tum quidem fit DE æqualis $\frac{15}{14}$ craſſitudinis; adeo ut hæc lens

lens optima omnium censenda sit, quanquam plano-convexa non multum ei cedat.

Notandum autem semidiametrum AB semper sumi ad eam superficiem pertinere quæ radios parallelos primum excipit. Nam hæc eadem lens optima, si invertatur, multo deterior fit, facitque aberrationem DE æqualem $\frac{145}{42}$ crassitudinis suæ.

Porro si ex data lentis foci distantia, ac semidiametro convexi exterioris invenienda sit aberratio DE radii extremi; ex præcedente regula habebitur alia hoc modo. Nempe si foci distantia sit $= d$, & sicut prius AB $= a$, NM $= n$, crassitudo lentis $= q$. quoniam d est $= \frac{2an}{a+n}$ ut patet ex propos. XVI, erit $n = \frac{ad}{2a-d}$. quo ubique subrogato in locum n in Regula priori $\frac{27aaq + 6anq + 7nnq}{6\,qu.\,\overline{a+n}} =$ ED, fiet $\frac{27aaq - 24adq + 7ddq}{6aa} =$ ED.

In menisco eadem ratio est supputandi, quæ in lente utrimque convexa, sive convexa superficies radios parallelos excipit, sive cava; cujus utriusque casus figuram hic adscripsimus; illud tamen observandum non summam sed differentiam duarum NZ, CP esse hic ad CP ut NP ad PD.

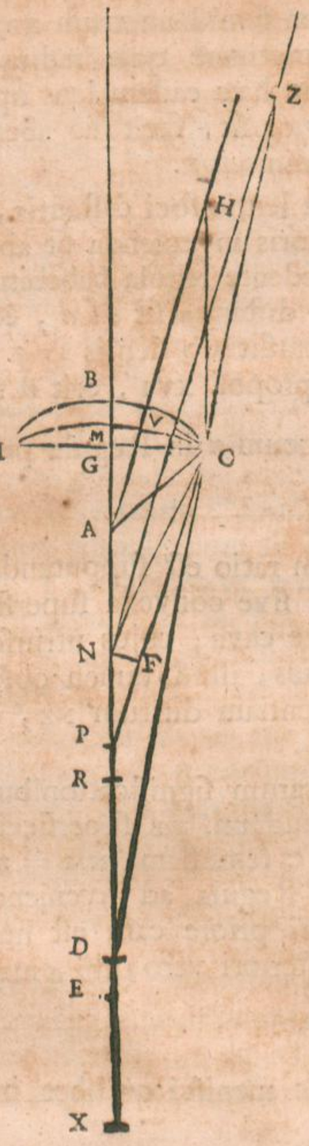
Positis vero literarum significationibus iisdem, quæ prius, ut nempe semidiam. AB superficei exterioris IBC sit a, superficiei IMC semidiam. NM $= n$, & BM crassitudo lentis $= q$. Regula ad inveniendam ED aberrationem radii extremi priore casu est hujusmodi: ED $= \frac{27aaq\; 6anq + 7nnq}{6\,qu.\,\overline{n-a}}$. Posteriori vero, ubi a major quam n, fit

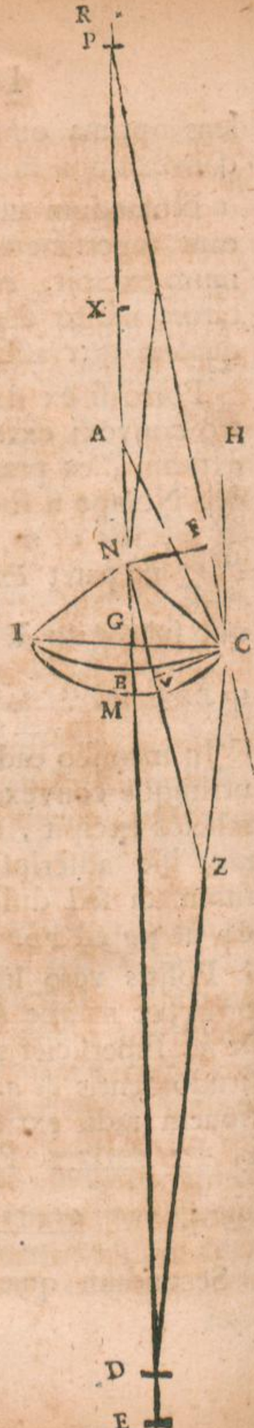
ED $= \frac{27aaq - 6anq + 7nnq}{6\,qu.\,\overline{a-n}}$.

Secundum quæ & menisci quilibet inter se & cum len-

lentibus utrimque convexis comparari possunt. Ut si, exempli gratia, in priore casu, ponatur superficiei cavæ semidiameter NM tripla semidiametri AB, hoc est, $a \;{}^{2}|^{2}\; 1$, $n \;{}^{2}|^{2}\; 3$. fiet ED ${}^{2}|^{2}\; 3q$, hoc est, tripla crassitudinis BM. At in lente optima supra definita, cujus foci distantia ac latitudo eadem esset quæ menisci IBCM, ac proinde eadem quoque crassitudo *; aberratio DE tantum $\frac{11}{14}$ haberet crassitudinis suæ, itaque apparet me-

* Prop. xxvi.





meniſcum hujuſmodi fere triplo deterius radios parallelos colligere quam lens illa omnium optima.

Sed nec ullus meniſcus tantum præſtat quantum lens planoconvexa, cujus ſphærica ſuperficies extrorſum collocatur; & tanto quiſque pejor eſt quanto magis cavam ſuperficiem alteram habuerit, eâdem ſcilicet manente foci diſtantia ac latitudine: quod in priore quidem caſu ſic fiet manifeſtum. Sit rurſus foci diſtantia $= d$. Ergo quia hæc æqualis eſt $\frac{2an}{n-a}$, ut patet ex propoſ. XVI, erit $a = \frac{dn}{2n+d}$, quo ſubſtituto ubique in locum a in Regula harum priori, fiet DE $= \frac{7ddq + 4dnq + 7nnq}{6nn}$, ſive $\frac{7}{6}\frac{ddq}{nn} + \frac{2}{3}\frac{dq}{n} + \frac{7}{6}q$. Ubi facile perſpicitur quo minor ſumetur n, hoc eſt, ſemidiameter NM, eo majorem fore DE. Et quantumlibet magna ſumetur n, ſemper DE majorem fore quam $\frac{7}{6}q$.

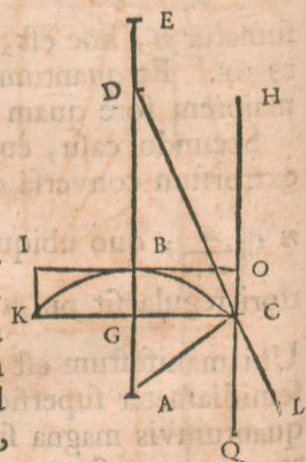
Secundo caſu, cum nempe cava ſuperficies meniſci extrorſum converſa eſt, quia foci diſtantia $d = \frac{2an}{a-n}$, erit $n = \frac{ad}{2a+d}$; quo ubique ſubſtituto in locum n in poſteriori regula fit DE $= \frac{27aaq + 24adq + 7ddq}{6aa}$ ſive $\frac{9}{2}q + \frac{4dq}{a} + \frac{7}{6}\frac{ddq}{aa}$. Ubi manifeſtum eſt, quo minor ſumetur a; hoc eſt, ſemidiameter ſuperficiei cavæ, eo majorem fieri DE. Et quantumvis magna ſumetur a, ſemper DE majorem fore quam $\frac{27}{6}q$ ſive $\frac{9}{2}q$. adeo ut lens planoconvexa, licet plana ſuperficies extrorſum collocetur, ſemper tamen melior ſit meniſco, cujus cavitas itidem extrorſum converſa ſit. Oſtenſum enim eſt eam lentem facere aberrationem DE $= \frac{9}{2}$ craſſitudinis ſuæ.

PROPOSITIO XXVIII.

Concavarum lentium quænam melius radios parallelos dispergant iuvestigare.

Concavarum nomine omnes eas lentes intelligimus quæ radios parallelos dispergere aptæ sunt, etsi alteram superficierum planam, aut etiam convexam habeant. Earum vero tanto melius quæque dispergere radios dicenda est, quanto propius ita eos inclinat ut tanquam ab uno puncto manare videantur, sive ut refractiones eorum retro productæ intra minimum spatium cum axe lentis conveniant.

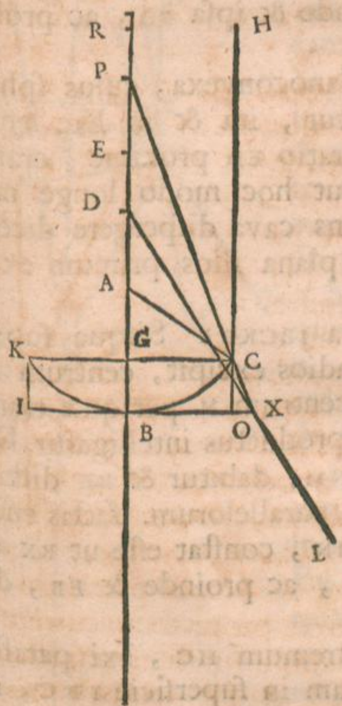
Sit primum lens planoconcava KBCOI, superficie plana OI radios parallelos excipiente, centrum vero superficiei concavæ sit A, axis lentis ABE; radius autem axi parallelus extremus sit HO, qui planam quidem superficiem irrefractus transibit. Ex cava autem egrediens ita frangatur ut pergat secundum CL, quæ retro producta conveniat cum axe in D. Punctum autem dispersus lentis sit E, quod invenitur ponendo BE duplam BA, ut constat ex prop. XI.



Ex qua etiam apparet, radios omnes parallelos qui minus ab axe distant quam HO, propius concurrere ad punctum E quam LCD, si nempe similiter refractiones eorum retro producantur. Est itaque lentis hujus aberratio DE, quæ ut inveniatur, eadem est calculi ratio at-

atque in lente planoconvexa. Producta enim HC versus Q, factaque CG perpendiculari ad AB, junctaque CA, si putemus lentem planoconvexam esse KBCG, in quam cadat radius axi parallelus QC, necesse est eum ita refringi in C, puncto superficiei KBC, ut refractio ejus sit in directum refractioni CL radii HC†. Itaque incedet secundum CD. cujus proinde concursus cum axe AE, eodem calculo quo supra in lente plano convexa investigabitur. Quemadmodum igitur illic, ita & hic erit aberratio ED $2|2\frac{9}{2}$ crassitudinis lentis OC, sive BG. quæ crassitudo invenitur, ut illic, ex datis AB, CG.

† Prop. I.



At in eadem lente contrario modo collocata, ut nempe superficies cava KBC radios parallelos excipiat, duæ sunt radiorum refractiones. Radius enim HC, primum in C frangitur, ferturque inde secundum CX, quæ retro producta cum axe conveniat in P, ac rursus ex plana superficie egrediens in X pergit secundum XL, quæ retro producta convenit cum axe citra punctum P, puta in D. Est autem distantia BE puncti dispersus lentis sic positæ dupla rursus BA: Inveniturque aberratio radii extremi ED hoc pacto.

Primum refractio radii HC facta in superficie cava KBC nempe CX in eandem rectam con-

convenit cum refractione radii OC axi lentis paralleli, ſi ſuperficies CBK convexa foret, adeoque invenietur AP intervallum quo diſtat concurſus productæ CX, a centro A, eodem modo, atque ſupra in lente planoconvexa; eſtque hic rurſus AP ad PC ut 2 ad 3. Ergo & PC dabitur. Sicut autem GP ad PC ita BP ad PX. Ergo & hæc data erit, & ex eadem triangulorum ſimilitudine dabitur & BX. Jam vero cum ſecundâ refractione radius CX ita inflectatur in XL, ut concurrente ea cum axe in D, ratio PX ad XD ſit eadem quæ refractiones vitri metitur, nempe quæ 3 ad 2; dataque ſit PX. etiam XD dabitur, a cujus quadrato auferendo quadr. BX, habebitur quadr. BD, unde & ipſa BD, ac proinde & DE.

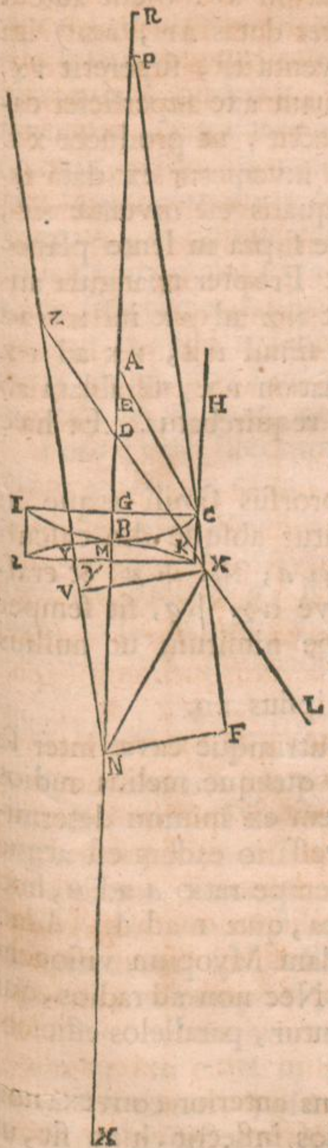
Eſt autem ſicut in lente planoconvexa, cujus ſphærica ſuperficies exterior ponitur, ita & in hac lentis concavoplanæ poſitione aberratio ED proximè $\frac{7}{6}$ craſſitudinis CO ſive GB. Adeo ut hoc modo longe melius radios parallelos hæc lens cava diſpergere dicenda ſit quam cum ſuperficie plana illos primum excipit.

Eſto jam lens utrinque cava IBCKBI. Sitque ſuperficiei IBC, quæ parallelos radios excipit, centrum A; alterius vero ſuperficiei IBK centrum N. per quæ tranſiens axis lentis NA utrimque productus intelligatur. Datis igitur ſemidiametris AB, NM, dabitur & BE diſtantia puncti diſperſus radiorum parallelorum. factis enim BR tripla BA, & MX tripla MN, conſtat eſſe ut RX ad

* Prop. XVII. RN ita RB ad RE *; unde RE, ac proinde & EB, datam eſſe liquet.

Ponamus porro radium extremum HC, axi parallelum, poſt refractionem primam in ſuperficie IBC, ita ferri ſecundum CX, ut retroproductus conveniat cum

axe



axe in P. Altera vero refractione, in ſuperficie I M K, flecti eam ſecundum X L, quæ retro producta conveniat cum axe in D. Aberratio itaque radii extremi H C eſt D E, quam paulo alia ratione hic inveniri oſtendemus, quam in lente utrinque convexa. Sed prius animadvertendum eſt, licet ſuperficies I M K ad X producta intelligatur, atque ita paulo amplius pateat quam ſuperficies I B C, craſſitudinem tamen lentis eam hic ſtatui G γ quæ eſt æqualis C K parti nimirum rectæ H C inter ſuperficiem utramque interceptæ. Sicut & apertura lentis dupla C G cenſenda eſt, non vero diſtantia dupla ab axe puncti X.

Sit jam N Z parallela C P; atque ei occurrat producta X D in Z. ducatur deinde X V perpendicularis ad N Z, & N F ad P X productam.

Primum itaque ex datis A B, C G, inveniuntur A P, P C, ut modo in lente planoconcava. Ex datis autem A P, A R datur P R, qua ablata ab R N, quæ data eſt, relinquitur P N. Porro ſicut P C ad C G, quæ datæ ſunt, ita P N ad N F, cujus quadrato ſubtracto a quadr. NX, reliquuum erit quadratum XF: Sicut autem PC ad PG (quæ data eſt, propter datas AP, AG) ita PN ad PF, a qua ſi auferatur inventa XF, ſupererit PX. Conſideratâ jam rurſus NZ tanquam axe ſuperficiei cavæ XMI, quæ radium CX ita flectit, ut producta XL ad Z, ſit NZ ad ZX ut 3 ad 2, invenietur ex data ſemidiametro NX & VX, quæ æqualis eſt inventæ NF, diſtantia NZ, eodem modo atque ſupra in lente plano-convexa ac poſitione ejus prima. Propter triangula autem ſimilia DPX, DNZ, erit ut NZ ad PX ita ND ad DP, & componendo ut utraque ſimul NZ, PX ad PX ita NP ad PD. qua addita ad datam PR, & ablata ab utriſque RE, ſupererit ED quæ requirebatur. Et hæc quidem calculi ratio exacta.

Verum eadem ED, regulâ prorſus ſimili atque in lente utrinque convexa, invenitur abſque illo calculi labore. Nam poſita ut illic AB $=$ a; NM $=$ n, & craſſitudine lentis quæ hic eſt CK ſive Gγ. $=$ q, fit ſemper ED $= \frac{27aaq + 6anq + 7nnq}{6\,qu.\,a + n}$, tam prope nimirum ut nullius momenti ſit differentia reſpectu ipſius ED.

Secundum hæc omnes lentes utrimque cavæ inter ſe comparari poſſunt, ac quanto quæque melius radios diſpergat reperiri. Optima autem ex minimi determinatione invenietur, quæ hic neceſſario eadem eſt atque in lente utrimque convexa; ut nempe ratio a ad n, hoc eſt, ſemidiametri AB ad NM ſit ea, quæ 1 ad 6. Adeo ut hujuſmodi lens ad corrigendam Myopum viſionem omnium optima cenſeri debeat. Nec non ad radios, qui ad unum aliquod punctum feruntur, parallelos efficiendos.

Sed quoniam in teleſcopiis lens anterior convexa non perfectè ad punctum unum radios inflectit, hinc fit, ut

ſi

ſi cava quæratur quæ optime ad parallelismum eos reducat, atque ita ad oculum tranſmittat, nequaquam illa quam diximus rationis ſeſcuplæ deligenda ſit, ſed aliæ minus perfectæ, quarum nempe vitiis compenſantur ac corriguntur vitia lentis convexæ.

Sunt autem iſta imperfectiora, ſed uſu meliora, quibus ſuperficies altera convexa, altera ex minori ſphæra concava, in quibus calculi methodus eadem plane quæ in lente utrimque cava. Duplex autem caſus, quia vel cava ſuperficies radiis parallelis obvertitur, vel convexa, ut in adjectis ſchematis videre eſt. In quibus obſervandum, non ſummam ſed differentiam duarum ZN, XP eſſe ad XP ſicut NP ad PD.

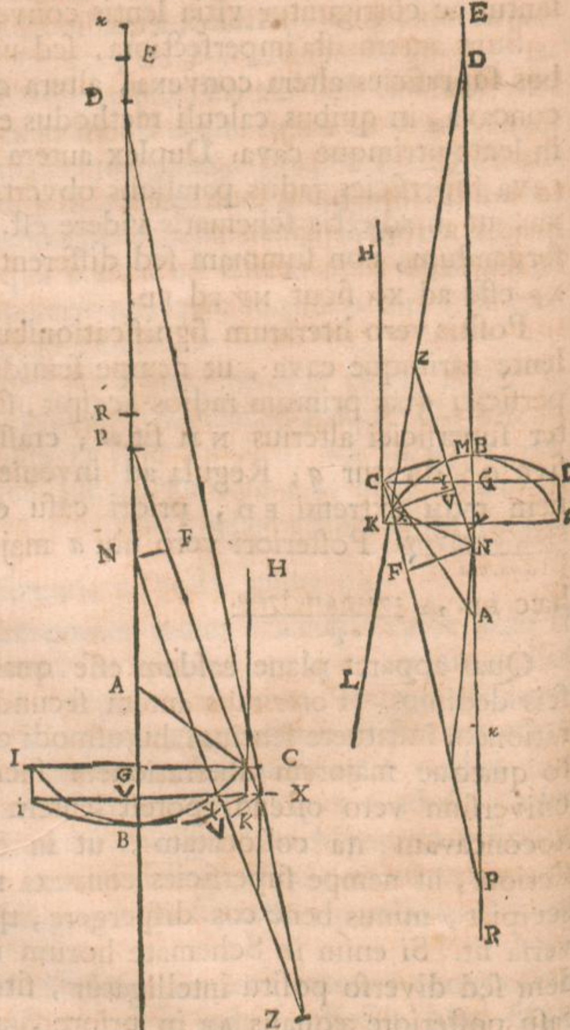
Poſitis vero literarum ſignificationibus iiſdem quæ in lente utrimque cava, ut nempe ſemidiameter AB, ſuperficiei quæ primum radios accipit, ſit a, ſemidiameter ſuperficiei alterius NM ſit n; craſſitudo lentis CK ſive Gγ dicatur q; Regula ad inveniendam aberrationem radii extremi ED, priori caſu erit iſta, ED $2|2$ $\frac{27aaq - 6anq + 7nnq.}{6qu.\, n-a}$ Poſteriori vero ubi a major quam n, erit hæc ED $2|2$ $\frac{27aaq - 6anq + 7nnq.}{6qu.\, a-n.}$

Quas apparet plane eaſdem eſſe quas ante in meniſcis dedimus. Poterimus autem ſecundum has comparationem inſtituere lentium hujuſmodi cavarum & quanto quæque majorem aberrationem faciat definire. In univerſum vero oſtendi poteſt lentem eandem convexoconcavam ita collocatam, ut in caſu horum poſteriore, ut nempe ſuperficies convexa radios parallelos accipiat, minus benè eos diſpergere, quam ſi aliter inverſa ſit. Si enim in Schemate horum utroque lens eadem ſed diverſo poſitu intelligatur, ſitque proinde NM caſu poſteriore æqualis AB in priore, ac utraque dicatur

tur *a*; item AB in posteriore æqualis NM in priori, atque utraque dicatur *n*: manifestum est, posteriore casu fore jam ED $2|2$ $\frac{27nnq - 6anq + 7aaq.}{6qu.\, n-a}$ At priore erat ED $2|2$ $\frac{27aaq - 6anq + 7nnq.}{6qu.\, n-a}$

Ergo cum *n* sit major quam *a* ideoque 27 *nn* + 7 *aa* major quam 27 *aa* + 7 *nn*, apparet ED posteriore casu semper majorem fore quam priori. Atque idem in menisco diversimode collocato obtinere perspicuum est.

Qua porro ratione Meniscus quisque tanto pejus radios colligere ostensus fuit, quanto magis cavam superficiem alteram habuerit, manente eadem foci distantia ac latitudine len-



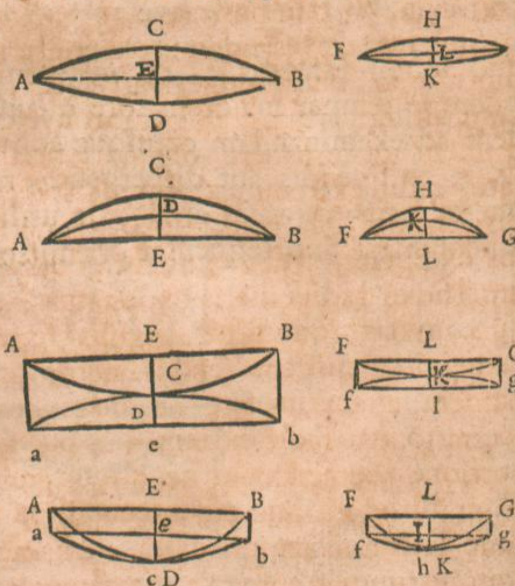
lentis eâdem poterit & hic de lente convexoconcava ostendi, tanto pejus eam radios parallelos dispergere, quanto magis convexam alteram superficiem habuerit. Etenim cum hic, priore casu, sit puncti dispersus distantia ME, quæ dicitur d, æqualis $\frac{2an}{n-a}$ ideoque $a = \frac{dn}{2n+d}$, fiet ex priore regula, substituto ubique $\frac{dn}{2n+d}$ in locum a, DE $= \frac{7ddq+4dnq+7nnq}{6nn}$ sive $\frac{7ddq}{6nn} + \frac{2}{3}\frac{dq}{n} + \frac{7}{6}q$. Ubi patet, quanto minor sumetur n tanto majorem fore DE, ac semper majorem fore, quam $\frac{7}{6}q$.

Rursus secundo casu, cum sit $d = \frac{2an}{a-n}$, erit $n = \frac{ad}{2a+d}$, quo ubique reposito in locum n in posteriore regula, fit DE $= \frac{27aaq+24adq+7ddq}{6aa}$ sive $\frac{9}{2}q + \frac{4dq}{a} + \frac{7}{6}\frac{ddq}{aa}$. Ubi apparet, quo minor sumetur a, eo majorem iterum fieri DE: Eamque semper majorem fore quam $\frac{9}{2}q$. Et hæc quidem ad examinandam cujusque convexæ aut cavæ lentis in colligendis aut dispergendis radiis facultatem ac præstantiam, quorum antequam utilitatem ostendamus, Theoremata duo sequentia præmittenda sunt.

PROPOSITIO XXIX.

In lentibus diverſarum latitudinum, convexis aut concavis, quæ ſuperficies radiis expoſitas ex eadem ſphæra habuerint, itemque adverſas ſuperficies ex eadem ſphæra licet a priori diverſa, vel quæ alteram harum ſuperficierum planam habuerint; Aberrationes radiorum extremorum axi parallelorum ſunt inter ſe ſicut lentium craſſitudines, ſive etiam ut latitudinum quadrata.

Craſſitudines lentium hujuſmodi eſſe inter ſe ſicut quadrata latitudinum, facile oſtenditur ex demonſtratis propoſ. XXIV. Si namque ſint utrimque convexæ, ut primum par hic depictarum, ACBD, FHGK, quarum craſſitudines ſeu axes CD, HK. hic ergo ductis AB, FG, rectis quæ latitudines lentium definiant, ſecentque CD, HK in E & L; conſtat, quia ſegmenta ACBE, FHGL ſunt æqualium circulorum, fore eorum altitudines CE ad HL ut



* Prop. XXIV. quadr. AB ad quadr. FG *; tam prope nimirum in exiguis hujuſmodi circulorum portionibus, ut nullius momenti

menti ſit differentia. Eadem ratione & DE erit ad KL ut quadr. AB ad qu. FG, ac proinde & tota CD ad HK ut quadr. AB ad qu. FG.

In meniſcis autem, qui ſecundo loco hic ponuntur, concludemus & differentiam duarum CE, DE, eſſe ad differentiam duarum HL, KL, hoc eſt, craſſitudinem CD ad HK ut quadr. AB ad quadr. FG.

In lentibus utrimque cavis, quarum ſuperficies ACB, aDb ſeſe contingere ponuntur, itemque FKG, fKg; quarumque craſſitudines Ee & Ll, eadem eſt demonſtratio, quæ in utrinque convexis.

Et in cavoconvexis eadem, quæ in meniſcis.

Quod ſi vero vel convexarum vel cavarum lentium altera ſuperficies plana fuerit, manifeſta ex his, quæ dicta ſunt, eſt demonſtratio.

Supereſt ut oſtendamus aberrationes radiorum extremorum in unoquoque pari eſſe inter ſe ut lentium craſſitudines; quod in planoconvexis & planoconcavis quidem ita ſe habere manifeſtum eſt, cum in his aberratio radii extremi ex ſupraſcriptis ſit vel $\frac{2}{3}$ craſſitudinis lentium, ſi nempe plana ſuperficies radios parallelos excipiat, vel $\frac{7}{6}$ ejuſdem craſſitudinis, ſi ſphærica ſuperficies radiis dictis exponatur. At in lentibus reliquis mixtis, quum ex Regulis ſupra traditis appareat manentibus iiſdem ſemidiametris utriuſque ſuperficiei, eandem etiam manere rationem craſſitudinis lentis ad aberrationem radii extremi, ED; ſequitur eadem proportione aberrationem hanc imminui qua decreſcit lentis craſſitudo; hoc eſt, ſecundum rationem quam habent latitudinum quadrata; Exempli gratia, cum in lente utrimque convexa dixerimus eſſe ſicut ſexcuplum quadratum compoſitæ ex ſemidiametris utriuſque convexitatis ad vigintiſeptuplum quadratum AB, plus ſeptuplo quadrato NM, plus ſexcuplo rectangulo AB, NM, ita craſſitudinem lentis ad aberrationem ED; apparet rationem quæ eſt inter has eandem manere, manentibus ſemidiametris AB, NM iiſdem, ac proinde ſicut craſſitudines lentium talibus convexis præditarum, ita eſſe inter ſe earum aberrationes.

PROPOSITIO XXX.

In lente quavis convexa aut cava aberrationes radiorum axi parallelorum ſunt inter ſe ſicut quadrata diſtantiarum eorundem radiorum ab axe.

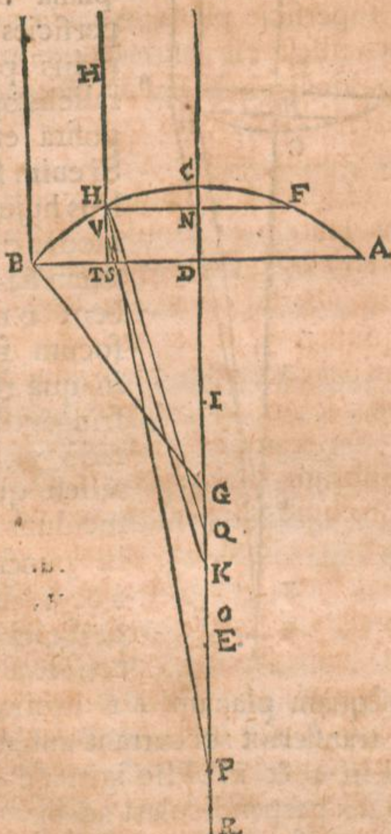
In cavis lentibus facilior hujus rei eſt demonſtratio pendetque a proximè præcedenti. Sit enim lens cava ACBDCF cujus axis CE: punctum diſperſus E: Radiuſque axi parallelus in B punctum incidens ita diſpergatur ut retro productus conveniat cum axe in G; alius vero radius parallelus axi, ſed propinquior incidens in H punctum diſpergatur, ita ut productus retro conveniat cum axe in K. Ut igitur appareat aberrationem EG eſſe ad EK ſicut quadr. diſtantiæ puncti B ab axe, ad quadr. diſtantiæ puncti H; conſiderandum eſt ita ſe rem habere, ac ſi ſint lentes duæ diverſæ DBA, NHF, quarum dimidiæ latitudines ſint dictæ diſtantiæ punctorum B & H ab axe. Cumque ſphæricæ ſuperficies utrique lenti ſint eædem, patet ex prop. præcedenti craſſitudines earum BD, HN, ita eſſe inter ſe ſicut quadrata illarum dimidiarum latitudinum. Sicut autem craſſitudines BD, HN, ita ſunt inter ſe & aberrationes EG, EK, Ergo & harum ratio eadem eſt quæ quadratorum a diſtantiis punctorum B & H ab axe.

Non abſimilis quoque demonſtratio eſt in lente planocon-

noconvexa, cum plana superficies radiis parallelis opposita est. Si enim sit lens hujusmodi ACB, axem habens DE, focum E, in qua refringantur radii paralleli qui incidunt in puncta B & H, superficiei convexæ, postquam planam AB irrefracti transierint: occurrant autem axi in G & K. Hîc igitur ductâ HN perpendiculari ad axem DC, rursus tanquam duæ lentes planoconvexæ considerandæ sunt, quarum crassitudines DC & NC. Sicut autem quadratum BD, ad quadratum HN ita est DC ad NC; & sicut DC ad NC ita aberratio EG ad EK,

 cum

cum EG æquetur $\frac{9}{2}$ DC, & EK, $\frac{9}{2}$ NC. Ergo ſicut quadr. BD ad quadr. NH ita quoque aberratio EG ad EK.



Sit autem nunc eadem lens contraria ratione diſpoſita, ut nempe radii paralleli incidant primum in ſuperficiem convexam ACB, cujus ſemidiameter ſit IC. Focus ergo E invenitur ſumta primum CR tripla CI, ac deinde poſita DE æquali $\frac{2}{3}$ DR. Ponatur radius extremus axi parallelus incidens in B, convenire cum axe in G, adeo ut aberratio ejus ſit EG, radius vero parallelus incidens in punctum H, feratur inde ſecundum rectam HP quæ ſecet ſuperficiem AB in S, ubi facta altera refractione, conveniat cum axe in K, adeo ut aberratio radii hujus ſit EK. Oſtendendum eſt igitur, quod ſicut quadr. BD ad quadr. HN ita aberratio EG ad EK: ducatur HQ parallela SK, atque occurrat axi in Q. Sit etiam HT parallela axi CD, quæ ſuperficiei AB occurrat in T; ac denique producta KS occurat ipſi HT in V.

Quod ſi jam conſideretur tanquam lens alia planc-convexa HCFN, ejus focus O invenietur ſumendo NO æqua-

æqualem $\frac{1}{3}$ NR. Radius autem ejus extremus axi parallelus qui incidit in H, primaque refractione in superficie BCA flectitur versus punctum P, is necessario post secundam refractionem, in superficie plana HN feretur secundum HQ, quia hæc parallela est SK, secundum quam incedit refractus a superficie BD. Esset itaque QO aberratio radii extremi lentis HCFN; quam constat esse ad aberrationem GE radii extremi lentis ACB, sicut quadr. HN ad quadr. BD*. Quare si ostendatur aberrationem EK radii HH, trans lentem ACB missi, æqualem esse aberrationi OQ; patebit etiam esse quemadmodum quadr. BD ad qu. HN ita aberrationem EG ad EK. Illud vero sic ostenditur: quum PS ad SK habeat eandem proxime rationem quam PD ad DK; ratio autem PS ad SK sit ut 3 ad 2†. erit & PD ad DK ut 3 ad 2 proximè. Sicut autem PD ad DK ita est HT ad TV, propter similitudinem triangulorum SPD, SHT, & SKD, SVT. Ergo & HT ad TV proxime ut 3 ad 2; ac proinde HV proxime pars tertia HT. Sed HV æqualis est QK. Ergo & QK similiter pars tertia HT vel ND. Cum vero ex constructione sit RE pars tertia RD; & RO pars tertia RN; erit & differentia duarum RE, RO, nempe OE, pars tertia differentiæ duarum RD, RN, quæ est DN. Itaque apparet OE æqualem esse QK. quare si utrique addatur OK, vel utrinque auferatur (nam & hoc contingere potest) erit & KE æqualis QO; quod ostendendum supererat. Hæc autem intelligenda sunt ita se habere neglectis minimis differentiis quæ respectu ipsarum KE, QO nullius momenti sunt. Qua ratione theorema in cœteris quoque omnibus convexis cavisque lentibus verum erit, ut calculo analytico comperimus.

* Prop. præc.

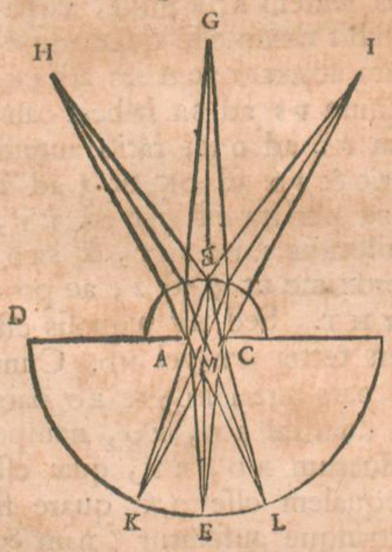
† Prop. 3.

PRO-

PROPOSITIO XXXI.

Oculi constructionem & quæ sit videndi ratio explicare.

Perpensis quæ superius prop. XXI. exposuimus, videatur hoc modo non absurde oculum fabricari potuisse; nempe hemisphærii figuram tribuendo parti ejus exteriori ABC, quæ tota sit pellucida. fundum vero oculi alterum hemisphærium faciendo DEF, priori oppositum, sed idem centrum habens, semidiametrum vero ME triplam ponendo semidiametri MB minoris hemisphærii; ac totam deinde cavitatem DABCFED aqueo humore replendo. Hoc pacto enim radii, a quibuslibet rerum procul positarum punctis manantes ut H, G, I, fractique in superficie ABC, ad totidem puncta cavi hemisphærii DEF collecti fuissent; nempe qui ex G in E, qui ex G in E, qui ex H in L, qui ex I in K. Quoniam autem non satis perfecta est, quæ fit a sphærica superficie, radiorum collectio, nisi eorum tantum qui axi proximi incedunt; oportune remedium ei rei adhiberi poterat obvelando totam hemisphærii minoris basin AC, præterquam circa centrum M, ubi foramen modicum relinquendum erat.

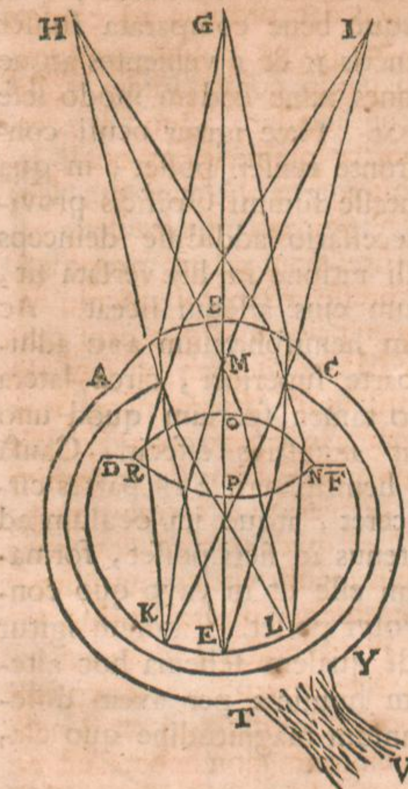


erat; hoc enim multo melius quam ſi exterior ſuperficies A B C contegatur, relicto circa B foramine; quia tunc ſuperficies ABC non æquè bene comparata fuiſſet ad excipiendos radios a punctis H & I venientes atque ad illos ex G, ad quos omnes nunc eodem modo ſeſe habet, facto foramine ad M. Hæc igitur oculi conſtructio non aliena prima fronte cenſeri poſſet; in qua tamen aliqua prudenter mutaſſe ſummi Opificis providentiam, aliqua etiam neceſſario addidiſſe deinceps videbimus, etſi adeo ſubtili ratione in his verſata ſit, ut non in omnibus artificium ejus aſſequi liceat. Ac primum quidem non totum hemiſphærium ABC adhibere voluit, ſed retenta parte ſuperiori, circa latera multum abſtulit, neque eo tamen ſpatium quod uno obtutu viſus comprehendit anguſtius effecit. Cauſa autem auferendi erat ut & hemiſphærii DEF partes circa D & F introrſum reduceret, atque ita oculum ad ſphæræ rotunditatem, quatenus id fieri poſſet, formaret. Volebat enim mobilem eſſe ut in cavo quo continetur quaquaverſum convolvi poſſet. Figuram igitur exteriorem dedit hujuſmodi qualem ſchema hoc alterum exhibet, quod oculum hominis per axem diſſectum refert, duplicata omnium magnitudine quo clarius paterent.

Hic corneæ pars pellucida eſt ABC; reliqua majoris ſphæræ & opaca A T Y C, quæ exteriorem oculi tunicam componit. Intra hanc duas alias Anatomici diſtinguunt, quarum intima ex tenuiſſimis nervi optici V T fibris contexta, ac circa fundum oculi KEL albeſcens, retina dicitur. Cæterum cavitatem oculi non uno liquore, ſed tribus inter ſe diverſis complevit; quorum qui ſpatio ABCFNORDA continetur plane fluidus eſt; qui vero ſpatio DRPNFLKD paulo craſſior in-

 ſtar

ſtar ovi albuminis; tertius autem qui lenticulam conſtituit RONP, ſecundo liquori adhærentem, & filamentis DR, NF circum undique extentis affixam, durus quodammodo, ſicut albumen igni coctum; verum pellucidus plane, uti reliqui duo. Differt autem ab illis etiam refractione, quam aliquanto majorem habet, unde fit ut radii, qui extrinſecus a punctis H, G, I, venientes, atque in corneæ ſuperficie ABC fracti, jam convergebant, exiguam iterum refractionem patiantur in utraque lentis OP ſuperficie, qua quidem paulo magis adhuc convergunt, atque ita ut in totidem punctis L, E, K, in fundo oculi referant illa, unde venerunt, puncta H, G, I. Ac fortaſſe quidem, ſecunda illa refractione in lente RN, ita radii diriguntur ut recipiendæ rerum picturæ apta jam ſit cavitas ſuperficiei KEL, quæ alioqui è majori ſphæra eſſe deberet, ſicut in priori figura effecta fuit. Verum & alia major fuit neceſſitas adhibendæ lentis hujus, nempe ut ejus auxilio æque ad res longinquas, ac in proximò ſitas, oculus adaptaretur; quod in noſtro il-



lo

lo ſuperius expoſito oculo deerat. Hoc autem fieri poteſt duobus modis, ut vel accedat propius ad corneæ ſuperficiem dicta lens cum res prope poſitæ contuendæ ſunt, vel ut in formam paulo convexiorem colligatur; vel etiam ut utrumque accidat. Quod ſi accedit ad corneam, id fieri oportet prementibus oculi latera muſculis, atque una humorem vitreum cui lens RN inhærere dicta eſt. At ſi figuram mutare lens eadem dicatur, rotundiorque fieri cum ad res prope admotas reſpicimus, videntur preſſo a muſculis oculo remitti filamenta DR, NF, quæ prius undique eam tendentia planiorem efficiebant. Poteſt autem, ut jam dixi, & utrumque horum ſimul fieri. Porro pupillæ M locum, non ita ut nos ſupra, in centro convexitatis ADE ſtatuit, ſed propius paulo illi admovit, incertum qua de cauſa, niſi quod & hoc aliquid facere poteſt, quo ſuperficies retinæ KEL, ea qua nunc eſt cavitate, apta ſit recipiendis imaginibus, cum alioqui amplioris ſphæræ eſſe debuiſſet. Diametrum ſphæræ totius AL invenio unciam circiter eſſe pedis noſtri Lugdunenſis, qui pæne idem eſt ac vetus Romanorum; unciæ vero tres quintas habet diameter convexitatis corneæ A B C. Pupillæ M latitudo certam menſuram non habet; eſt enim, uti quivis experiendo explorare poteſt, major cum minor lux oculo affulget: ſoloque lucidæ rei aſpectu contrahitur, vel item, cum ea quæ prope oculo admoventur intueri conamur. Inſigni autem artificio ita fabricata eſt, ut, mutata magnitudine, ſemper ſibi conſtet rotunditas. Sed in hæc inquirere non eſt noſtri inſtituti; multoque minus quomodo, quæ in fundo oculi pictura viſibilium formatur, inde ad cerebrum mentemque noſtram perferatur; cumque inverſa ſit, rectas tamen res nobis videri faciat; utque oculis duobus, non tamen duplices; quæ & obſcuriora omnia arbitror, quam ut mortalium ulli perveſtigari queant.

PROPOSITIO XXXII.

Senum & Myopum oculis auxilium comparare lente vitrea.

Ex his quæ de conſtructione oculi ac videndi ratione explicuimus, facile eſt porro colligere quomodo affecti eſſe debeant oculi eorum, qui tantum remota diſtincte cernunt, ut Senes; vel qui tantum proxima, ut Myopes. Cum enim radiorum e propinquo puncto venientium concurſus neceſſariò longius abſit a ſumma oculi ſuperficie quam eorum qui a longe remoto adfluunt, non poterit & longinquæ rei & propinquæ in eodem oculo perfecta imago depingi, niſi ea facultate præditus ſit, ut humoris cryſtallini vel figuram vel ſitum aliquatenus immutare poſſit, atque ita nunc ad has nunc ad illas res ſe accommodet. Quare quibus ad omnia æque oculi valent, iis tales obtigiſſe certum eſt. Senibus vero ac multis quoque citra ſenectutem rigidiores ſunt, parumque intus mobiles, quibus proinde tantum qui e longinquo veniunt radii, aut certè a duorum vel trium pedum intervallo, accuratè in fundo oculi coguntur. At myopes ſeu luſcitioſi propinqua omnia, dummodo non ultra certum terminum, puta pedis duas tertias aut etiam minus, receſſerint, diſtinctè conſpiciunt; unde parumper forſan formam oculorum accommodare poſſunt diverſis viſibilium diſtantiis, ſed non eouſque ut radios parallelos, ſive a procul diſſita re venientes, in retina ad punctum colligant. Sed ob nimiam convexitatem ante eos colligant quam ad

ocu-

oculi fundum pervenerint. Et hæc quidem ita ſe habere eo ipſo manifeſtum eſt, quod vitium utrumque, admotis oculo certæ figuræ lentibus emendari poteſt. Myopi enim nimiam convexitatem minuit lens cava, Presbytis vero convexa contraria ratione medetur. Quarum itaque lentium figura ut cujuſque oculis quam aptiſſima inveniatur, primum conſtitutio eorum & defectus quantitas hoc modo exploranda eſt.

Si ſeni auxilium quæratur, viſibile aliquod paulatim ab oculis ejus removere oportet, quoad primum diſtincte illud abſque incommodo ſuo cernat; atque eam diſtantiam ſignare, quia viſus conſtitutionem certo determinat. Si enim dicta diſtantia ſit inventa AB, atque is ad quem pertinet poſitus in A, conetur videre punctum propinquum C; fiet, dirigendo oculum utrumque ad C, ut ſimul utrique intrinſecus quidem aliquantum mutentur ab ea diſpoſitione quam habebant ad longinqua conſpiciendum, ſed hoc tantummodo conſequentur ut diſtincte contueantur ea quæ ſunt ad diſtantiam AB. Itaque lente ejuſmodi opus eſt, quæ oculo admota radios ex C puncto venientes inflectat quaſi veniant ex B. Sit igitur ut BC ad CA ita CA ad CO. Eritque tota AO ſemidiameter ſuperficiei lentis vitreæ utrinque æqualiter convexæ, quæ propoſitum efficiet. Vel idem quoque efficiet lens quævis quæ focum ſeu punctum concurſus parallelorum habebit ad diſtantiam AO.

Quia enim ex conſtructione, CO eſt ad CA ut CA ad CB; ſuntque CO & CB ad eandem partem puncti C; O vero punctum concurſus parallelorum lentis in A; ſequitur ex propoſ. XX. radios

dios a C puncto manantes, post refractionem in lente A, ita flecti ac si venirent ex B. Quare oculo illi quem diximus, cuncta intervallo A C remota, ejusmodi lentium ope distincte percipientur.

Rursus si Myopi comparandum sit conspicillum quo longinqua perfectè discernat, quærenda est tantum distantia maxima, ex qua visibile admotum videat distinctè, atque ea ipsa erit longitudo semidiametri sphæræ secundum quam ab utraque parte lentem vitream excavare oportet. Vel si ab altera tantum parte cava, ab altera plana desideretur oportet ejus cavitatis semidiameter sit prioris subdupla. Quævis enim harum lentium oculo admota efficiet ut radii incidentes paralleli (tales enim censentur a longinquis punctis venientes) inflectantur tanquam venirent a puncto dispersus, cujus distantia ab oculo erit eadem, quæ illi distinctè videndi mensura erat, ut apertum est ex propos. XV & XVII.

Propositio XXXIII.

Lentem vitream invenire qua sub aquis positi distincte videant.

Certum est nec pisces ex aqua extractos, nec animalia cœtera sub aquam demersa, distinctè quidquam cernere posse. Urinatores enim sub aqua vident quidem, sed distinctè videre nequeunt; at eo ferè modo quo senex cum lentem valde cavam oculo apponit. In horum namque oculis, quoniam humor aqueus, qui corneæ tunicæ subjacet, fere eandem aquæ refractionem habet, sicut experientia compertum est, necesse est sub aquam mersis nullam in primo oculi introitu fieri radiorum extrinsecus incidentium refractionem;

nem; nec refert quidem an corneæ ipsius refractio diversa sit, quia cum duabus superficiebus constet parallelis, atque utrinque æqualis refractionis diaphano tangatur, radios omnes quasi rectos transmittet. Radii itaque, qui oculo extra aquam posito, ad corneæ superficiem refracti, inde jam convergentes tendebant ad humorem crystallinum, ii nunc in eum paralleli deferentur; neque sufficiet humoris crystallini refractio ad cogendos eos in fundo oculi, sicut solet, sed ulterius situm erit eorum concursus punctum: unde videndi confusio. Piscibus autem extra aquam magna continget in exteriore oculo refractio, quæ sub aquis vel nulla erat, vel certe multo minor; atque ita in eorum oculis concursus radiorum fiet antequam ad fundum pervenerint, unde nihil nisi confuse conspicere eos posse consequitur. Cœterum hominis visus sub aqua ut emendetur, ejusmodi lens invenienda est, quæ oculo admota radios æque convergentes ad humorem crystallinum transmittat, atque a superficie oculi exteriore venire solent extra aquam agentibus. Quod quidem facile est, cum refractionis vitri sub aqua sciamus eam esse proportionem, quæ 9 ad 8 (quæ nempe componitur ex proportione refractionis vitri in aere, quæ est 3 ad 2, & aquæ in aere inversa, quæ est 3 ad 4. Hoc enim cum experientiæ consentit, tum rationi physicæ, quam in libro de Luce exposuimus. Quandoquidem posita celeritate lucis in aqua ad celeritatem ejus in aere, sicut 3 ad 4; itemque celeritate in aere ad celeritatem in vitro, sicut 3 ad 2, sequitur celeritatem in aqua ad celeritatem in vitro esse ut 9 ad 8) cumque & corneæ tunicæ qua diaphana est, convexitatem cognitam habeamus. Est enim sphæricæ superficiei portio cujus diameter $\frac{3}{7}$ unciæ pedis nostratis seu Romani ve-

veteris, ut in oculi deſcriptione annotavimus.

Sit jam igitur A C exterius oculi convexum cujus ſemidiameter A B, & ponatur ratio refractionis humoris aquei eadem quæ eſt aquæ, id eſt, 4 ad 3. Igitur ſumtâ B D triplâ ſemidiametri A B, certum eſt radios parallelos, oculo extra aquam poſito, ita flecti ad ſuperficiem A C ut cogantur ad diſtantiam A D*. Demerſo autem oculo nulla ad A C fit refractio; quare opponenda ibi eſt lens vitrea quæ refractione ſua ſub aqua, radios parallelos axi A B colligat in puncto D. Sit ea lens F A K, ſuperficie una plana, altera vero, quæ proxime oculo admoveatur, convexa ſemidiametro H A. Si igitur hac lente radii paralleli colliguntur ad punctum D, habebit H D ad D A proportionem refractionis, ut conſtat ex propoſ. XIV. Eſt autem proportio hæc, refractionis nempe vitri ſub aqua quæ 9 ad 8. Itaque H D ad D A ut 9 ad 8. & dividendo H A ad A D ut 1 ad 8. Sed D A eſt ad A B ut 4 ad 1, ſive ut 8 ad 2. Ergo exæquo H A ad A B ut 1 ad 2. Erat autem A B $\frac{3}{10}$ unciæ. Ergo H A $\frac{3}{20}$ unciæ, atque ita nota jam eſt forma lentis F A K. Quod ſi vero in locum ejus aliam deſideremus, æqualiter utrinque convexam, apparet ejus ſuperficies utraſque ejuſdem fore convexitatis cujus eſt corneæ ſuperficies A C; hoc eſt, a ſphæra, cujus diameter habeat unciæ $\frac{3}{5}$.

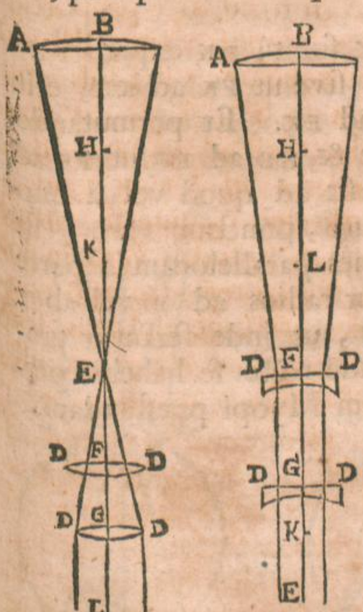
* Prop. VIII.

PRO-

PROPOSITIO XXXIV.

Perſpicillum ex datis duabus lentibus compoſitum cuilibet viſui accommodare.

A punctis ſingulis rei viſæ ad totam oculi pupillam radios manare conſtat: qui quidem pro parallelis habentur cum procedunt a procul remotis. Itaque cum recta oculi conſtitutione gaudentibns ita ſponte ſua diſponantur, ut longinqua diſtinctè cernant, hoc eſt, ut radios parallelos ſibi incidentes colligant in unum retinæ punctum; ſequitur iis ita lentes collocari debere, ut radii a punctis ſingulis rei viſæ venientes, poſtquam utramque lentem penetrarint denuo fiant



paralleli. Quamobrem ſi lens convexa ponatur A B, axem habens B E, & radii a rei viſæ puncto exeuntes ejus refractione cogantur ad punctum E, quod erit in foco lentis A, ſi viſibile longinquum fuerit; ſi vero propinquum, invenietur per prop. XX. fuerit autem lentis alterius DD foci diſtantia GE, ſi convexa ſit; ſi vero cava, diſtantia puncti diſperſus. His inquam poſitis, accipienda eſt dicta diſtantia EG a puncto E verſus lentem A, ponendaque lens cava in puncto G; vel eadem diſtantia accipienda verſus alteram partem a puncto E, atque in termino G ponenda lens convexa. Sic enim utroque casu fiet, ut penetrata lente DD radii paralleli ad oculum perveniant, ut constat ex prop. XVI & XVII. atque ita distincta continget visio ei qui bona est oculi formatione.

Si vero Myopi aptandum sit idem perspicillum, qui visibile ad distantiam FH demum distinctè cernere possit, sumatur FL æqualis distantiæ GE, qua focus suus aut punctum dispersus abest a lente DD, hæc enim data est: Et auferatur quidem FL ab FH si lens DD cava sit, addatur vero si convexa. Et ut HL ad LF ita sit LF ad aliam; dico huic æquale sumendum esse intervallum GF secundum quod minuenda est utroque casu longitudo perspicilli, quæ prius erat GB, ut Myopi conveniat.

Posita enim lente DD in F & sumtâ FK æquali FL quia HL ad LF ut LF, ad FG, sive ut FK ad KE; erit & HF ad FL sive FK ut FE ad EK. Et permutando HF ad FE ut FK ad KE, quare & HE ad EF ut FE ad EK. Cum itaque punctum E sit ad quod vel a quo tendentes radii occurrunt lenti DD, punctum vero K sit illud, quo pertinent refractiones parallelorum a parte opposita venientium *; sequitur radios ad E vel ab E venientes ita flecti a lente DD, ut inde ferantur tanquam egressi a puncto H. Unde recte se habebit perspicillum ad distinctam visionem Myopi præstandam.

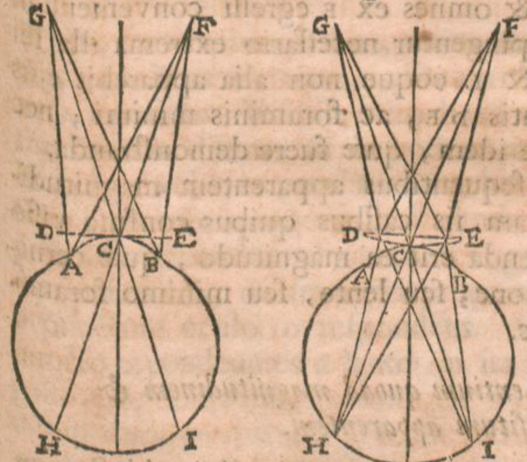
* Prop. XX.

PRO-

PROPOSITIO XXXV.

Quæ vel ob interpositas lentes, vel ratione distantiæ, confusè spectantur, distincta reddi possunt, vel addita lente una juxta oculum, vel opposita ibidem lamina cum foramine minimo; dummodo non in ipso maximæ confusionis puncto oculus positus fuerit. Utracunque vero correctio adhibeatur, eadem magnitudine & positu visibile spectabitur.

Si enim ab unoquoque rei visæ puncto egressi radii ad oculum ferantur, tendantque velut ad punctum post oculum, facile ex supra demonstratis intelligitur cujusmodi cava lente reddantur paralleli. Item si divergentes, ac tanquam ex puncto ante oculum egressi adveniant, quomodo convexa lente ad parallelismum redigantur; utroque vero casu visio efficitur distincta. Sed hoc idem quoque consequemur opposito ad oculum minimo foramine; quia tunc velut uni tantum radiorum, qui a singulis rei visæ punctis innumeri alioqui ad pupillam feruntur, transitus datur. Ponantur enim radii ab extremis rei visæ punctis profecti, ad oculi pupillam A B accidere tanquam ex punctis F, G, venientes. Et objiciatur ante oculum foramen



ramen in lamina exiguum C, nonnisi singulos veluti radios FC, GC admittens, qui occurrant oculi fundo in punctis H & I. Itaque hic pingentur puncta rei visæ singula, unde manarunt radii FA, FC, FB; & GA, GC, GB. Et propter exclusos cœteros radios præter FC, GC, distincta erit pictura, eoque & visio.

Rursus iisdem positis, sed ablatâ lamellâ perforatâ, sit hujus loco lens oculo proxima DE, quæ distinctam visionem efficiat. Dico eadem qua prius magnitudine eodemque positu spectatum iri visibile. Quia enim per mediam lentem DE, cujus crassitudo tanquam nulla censetur, radii FC, GC, rectis lineis penetrant †. manifestum est eos eodem modo intra oculum ferri, atque ante per foramen C transeuntes, atque idcirco oculi fundo in iisdem punctis H, I occursuros. Cum autem ob interpositam lentem DE distincta visio fieri ponatur, necesse est omnes radios ex G venientes ad unum punctum in fundo oculi convenire, atque ita quoque omnes ex F venientes. Igitur omnes a puncto G egressi convenient in I, & omnes ex F egressi convenient in H, atque idcirco pingentur necessario extrema illa rei visæ puncta in H & I. eoque non alia apparebit ejus latitudo objectu lentis DE, ac foraminis minimi; nec non positus quoque idem; quæ fuere demonstranda.

† Prop. XXII.

Itaque cum in sequentibus apparentem magnitudinem definiemus etiam iis casibus quibus confusa visio contingit, intelligenda erit ea magnitudo, quæ cernitur correcta confusione, seu lente, seu minimo foramine, ut jam diximus.

De effectu Lentium quoad magnitudinem & situm apparentem.

Visionis Phænomena ratione magnitudinis objectorum,

situs

ſitus & ſimilium, pro varia poſitione oculi, objecti & lentium ſunt diverſæ. Aliæ autem concernunt viſionem ſimpliciter in unâ vel pluribus lentibus, aliæ vero eandem collatam cum alia viſione. Omnem earum diverſitatem ſequentibus Propoſitionibus includemus.

PROPOSITIO XXXVI.

Oculo conſtituto inter lentem convexam & focum ejus, viſibile quodvis per lentem ſpectatur ſitu recto & auctum magnitudine; habetque magnitudo apparens ad veram, ſi viſibile longinquum eſt, rationem eam quam diſtantia inter lentem & focum ad diſtantiam inter focum & oculum; ſi vero propinquum, rationem compoſitam ex eadem quæ dicta eſt, & ex ratione diſtantiæ inter oculum & viſibile, ad diſtantiam iuter viſibile & punctum dirigens; Si vero in foco lentis oculus ſtatuatur, viſibilia longinqua in infinitum augentur; propinqua vero ſecundum rationem quam habet diſtantia eorum ab oculo ad diſtantiam oculi a lente.

Eſto lens convexa AB, cujus medium punctum ſeu umbilicus A; focus O. Oculus vero D, in axe lentis AO poſitus. Viſibile vero linea NM, lenti parallela, cujuſque medium E ſit in eodem axe; quantum enim linea hæc vel ejus pars EN augebitur trans lentem ſpectata, tantum quoque aliud quodvis viſibile, eo loci poſitum, ſecundum diametrum augeri neceſſe eſt. Porro duabus DO, DA ſit tertia proportionalis DP, eritque P punctum oculo D reſpondens. Quia enim radii ex puncto D prodeuntes a lente AB ita inflectuntur ut pergant inde tanquam venientes ex P, per prop. XX. Viciſſim quoque qui ad P tendentes incidunt in lentem AB concurrunt ad punctum oculi D. Ducatur NP recta ſe-

ſecans lentem in B, (ſecabit enim quia punctum N per eam conſpici ponimus) & jungatur BD. Itaque per punctum lentis B cernetur punctum N, quum radius NB refringatur verſus punctum oculi D, neque alius quiſquam eorum qui ex N promanant. Punctum autem E per medium lentis A apparere manifeſtum eſt, quia cum in axe lentis ſitum ſit radius ED irrefractus ad oculum pervenit.

Patet itaque primùm viſibile NM conſpici ſitu erecto, quum punctum B ſit ad eandem partem axis EAO ac punctum N, quod ibi refertur. Liquet etiam BA ſpatium eſſe quod in lente occupat imago lineæ NE. At vero ducta ND. rectâ quæ ſecet lentem in C, apparet AC fore ſpatium quod occuparet idem viſibile EN in ſuperficie quæ reſractionis expers eſſet. Itaque ratio BA ad CA definit proportionem magnitudinis apparentis ad veram: atque apparet quidem BA ipſa CA majorem eſſe, cum BA ad NE ſit ut PA ad PE; CA vero ad eandem NE ſicut DA ad DE; ratio autem PA ad PE major quam DA ad DE, quia PA ad AE major quam DA ad AE; eſt enim PA major quam DA quia D cadit hic neceſſario inter A & P. Ergo jam & recto ſitu & auctum magnitudine viſibile cerni per hæc conſtat.

Nunc porro oſtendendum, cum viſibile NM longinquum eſt, habere BA ad CA rationem eam quam AO ad OD; cum vero propinquum, rationem compoſitam ex AO ad OD & ex DE ad EP. Prius autem ex poſteriori ſequitur, ac proinde hoc primum demonſtrabimus.

Ra-

Ratio BA ad CA componitur ex ratione BA ad NE & NE ad CA; quarum ratio BA ad NE est eadem quæ PA ad PE: ratio vero NE ad CA eadem quæ ED ad AD. Habet igitur BA ad CA rationem eandem compositæ ex rationibus PA ad PE & ED ad AD, hoc est, rationem quam habet rectangulum PA, ED ad rectangulum PE, AD: hæc autem componitur ex ratione ED ad EP & PA ad AD sive AO ad OD, nam ex constructione cum sit PD ad DA ut AD ad DO, etiam componendo erit PA ad AD ut AO ad OD. Ergo ratio BA ad CA componitur ex ratione AO ad OD & ED ad EP.

Porro cum longinquum intelligitur visibile, ratio ED ad EP est ratio æqualitatis, quæ proinde composita cum ratione AO ad OD, eam nec auget nec diminuit. Itaque tum ratio BA ad CA erit eadem quæ AO ad OD. Atque hæc quidem demonstranda erant oculo inter lentem focumque ejus constituto.

Ponatur autem nunc oculus in ipso foco O, & sit propinquum visibile NM, ducatur NB parallela axi EA, quæ occurrat lenti in puncto B, & jungatur BO, itemque NO secans lentem in puncto C. Quia igitur radius NB parallelus est axi lentis AB, eum necesse est refringi versus focum O, ubi oculus ponitur. Quamobrem punctum N spectabitur per solum lentis punctum B. Sed punctum E medium NM spectatur, uti prius, in centro lentis A. Igitur erectum apparet visibile NM; & magnitudo apparens ad veram rursus eam rationem habet quam BA ad CA. Verum ut BA, hoc est, NE ad CA, ita EO ad AO; ergo auctum cernitur secundum rationem EO ad AO.

Quod si vero longinquum fuerit visibile,

jam

jam ratio EO ad AO, erit tanquam infinitæ inæqualitatis majoris, ac proinde infinita continget ampliatio.

Eſt autem animadverſione dignum, hoc oculi poſitu, eâdem ſemper magnitudine cerni viſibile NM, quantumcunque a lente receſſerit; ſemper enim punctum N in eodem puncto B percipietur.

PROPOSITIO XXXVII.

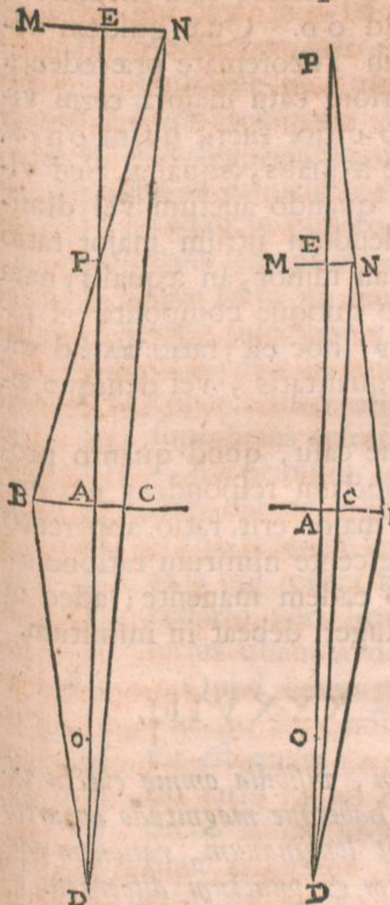
Poſito, oculo in axe lentis convexæ, ſed ita ut ultra focum ab ea diſtet, viſibile ad alteram partem lentis ſitum, ſed citra punctum reſpondens, erectum & majus ſpectatur. Ulterius vero quam punctum reſpondens a lente remotum, videbitur inverſum, & majus vel minus pro diverſa ipſius atque oculi a lente diſtantia. Ratio autem magnitudinis apparentis ad veram ſe habebit eodem modo atque in Theoremate præcedenti.

Ponatur ut ſupra lens AB, & focus ejus O. Oculus autem in puncto axis D, diſtans a lente ultra focum. Et duabus DO, DA ponatur tertia proportionalis DP, ſecundum prop. XX. Erit igitur P punctum oculo reſpondens, quum ſicuti radii ex D procedentes diriguntur a lente verſus punctum P, ita viciſſim qui ex P veniunt dirigantur ad oculum D.

Sit jam viſibile, ut antea, recta MN, quam mediam dividat axis lentis in E, ſitque primo ſitum inter lentem AB punctumque reſpondens P, & ducatur ex P per terminum N recta PNB, lenti occurrens in B, & jungatur BD. Ducatur autem & recta ND ſecans lentem in puncto C. Manifeſtum itaque eſt per punctum lentis B appariturum viſibilis terminum, quod conſpiceretur in C ſi radius ND ſine refractione tranſmitteretur;

pun-

punctum vero E utroque modo per A cerni neceſſe eſt, quia radius ex E ad D nullus pervenit præter EA qui utramque lentis ſuperficiem ſecat ad rectos angulos, ideoque irrefractus permeat.



Conſtat itaque hic viſibile cerni ſitu erecto quum puncta N & B ſint ad eaſdem partes axis PAD. Rurſuſque ratio apparentis magnitudinis ad veram erit ea, quæ BA ad CA. Quare, cum BA ſit major quam CA (nam BA major eſt quam NE, & NE major quam CA) auctum magnitudine conſpicietur viſibile NE.

Porro in caſu altero ſit viſibile MN poſitum ultra punctum correſpondens P, & eadem conſtruantur quæ prius. Igitur per punctum lentis B rurſus aſpicietur punctum N, & E per A. Sed ſi N fuerit reipſa ſuperius puncto E, nunc cernetur inferius, quia ad contrarias partes axis EAD ſita ſunt puncta E & B. Itaque inverſum jam apparebit viſibile MN. Ratio autem apparentis incrementi rurſus, ut in caſu priore, erit ea quæ BA ad CA; ideoque demonſtrandum eſt rationem hanc, cum viſibile propinquum eſt, componi ex rationibus AO ad OD & ED ad EP. Cum vero longinquum, quod tantum posteriore casu locum habet, eandem esse quæ AO ad OD. Quæ quidem demonstratio eadem est quæ in Theoremate præcedenti. Itaque manifestum est posteriore casu majora cerni visibilia longinqua, quando AO major fuerit quam OD, & minora, cum minor, cumque æqualis, æqualia. Sed visibili propinquo, ut sciatur quando auctum vel diminutum spectari debeat, videndum utrum major ratio AO ad OD quam EP ad ED, an minor, an æqualis; nam prout hæc se habuerint, ratio quoque composita ex ratione AO ad OD & ED ad EP, hoc est, ratio BA ad CA erit majoris vel minoris inæqualitatis, vel denique æqualitas ipsa.

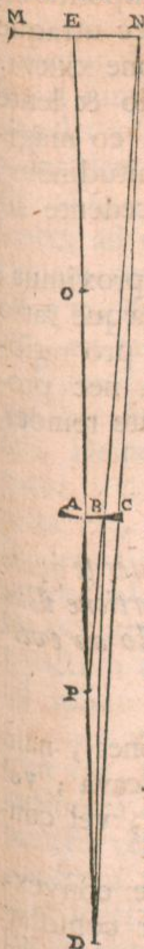
Manifestum autem utroque casu, quod quanto propius accedet visibile ad punctum respondens P, manente oculo & lente, tanto major erit ratio apparentis ad veram magnitudinem; crescente nimirum ratione DE ad EP, at ratione AO ad OD eadem manente; adeo ut positum in puncto ipso P, augeri debeat in infinitum.

Propositio XXXVIII.

Posito oculo post lentem cavam, visibilia omnia erecta videntur, & vero minora; habetque magnitudo apparens ad veram, si visibile fuerit longinquum, rationem eam quam distantia inter lentem & punctum dispergens ad distantiam hujus ab oculo. Si vero propinquum, rationem compositam ex illa quæ dicta est, & ex ratione distantiæ inter oculum & visibile ad distantiam visibilis a puncto directionis.

Esto lens cava AC, cujus axis AO; punctum dispergens O; oculus vero in axe positus sit D. Visibile ve-

vero ad alteram partem lentis MEN, ita situm ut in



Theor. præcedenti. Et fiat duabus DO, DA tertia proportionalis DP, sumenda in partem eandem ac duæ reliquæ. Erit P punctum quo tendentes radii flectuntur a lente AO versus oculum D, quoniam qui veniunt ab D in eandem lentem, ita flectuntur quasi procedant a puncto P *. Ducatur recta NP secans lentem in B, & jungatur BD; ac denique recta ND secet lentem in C. Percipietur ergo punctum N in puncto B, lineaque NE occupabit in lente intervallum BA, quæ occuparet intervallum CA, si loco lentis esset superficies refractionis expers.

* Prop. xx.

Ac primum quidem apparet erectum spectari debere visibile MN, cum punctum ejus N spectetur in lente AC ad eandem partem axis ubi revera situm est; quod quidem necessario fieri liquet eo quod punctum P ulterius quam A distet ab NE.

Quod autem magnitudine diminutum spectabitur sic constabit. Ratio EA ad AP major est quam EA ad AD. Unde et componendo ratio EP ad PA major ratione ED ad DA. Sicut autem EP ad PA ita est NE ad BA, at sicut ED ad DA ita EN ad CA. Ergo major ratio NE ad BA quam NE ad CA; ideoque BA minor quam CA. Ratio autem magnitudinis apparentis ad veram est ea quæ BA ad CA, itaque illam magnitudinem hac minorem esse constat.

Porro quod ratio BA ad CA, cum visibile longinquum est, eadem fiat, quæ distantiæ lentis a puncto dispersus ad distantiam hujus ab oculo, hoc est, quæ

AO ad OD; cum vero propinquum, eadem compositæ ex jam dicta ratione & ex ratione DE ad EP: hæc utraque iisdem verbis demonstrantur ac in Propositione XXXVI.

Manifestum vero hinc est, manente oculo & lente cava, quo magis removebitur ab ea visibile, eo magis diminui rationem apparentis ad veram magnitudinem, quippe ratione DE ad EP magis ac magis accedente ad æqualitatem.

Manifestum quoque si oculus D sit lenti proximus, etiam punctum P proximum fieri, adeo ut æque ratio AO ad OD, ac DE ad EP, tunc habendæ sint pro ratione æqualitatis. Quamobrem nec longinqua nec propinqua tunc minora conspicientur quam lente remota.

PROPOSITIO XXXIX.

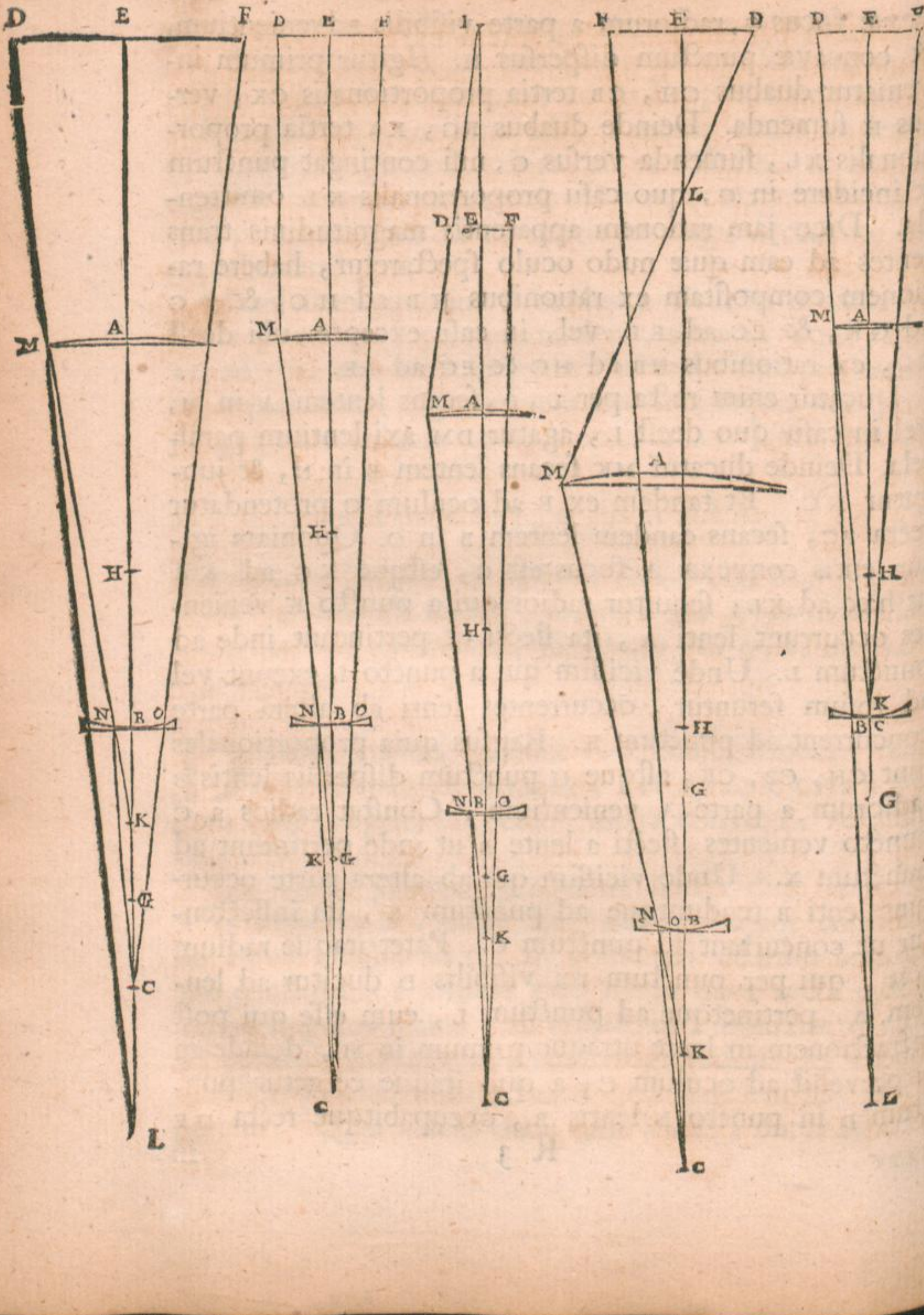
Datis duabus lentibus, & positione earum tam inter se quam inter oculum & visibile, invenire qua proportione illud augeant vel imminuant, & utrum situ erecto an everso referant.

Duarum lentium quatuor sunt conjugationes, nam vel convexa est utraque, vel utraque cava; vel cava quæ proprior est oculo, altera convexa; vel contra.

Sint igitur primum propositæ lentes duæ convexa A & concava B, ita ut hæc oculo propior consistat. Sit autem oculus ad C, in communi duarum lentium axe constitutus; visibile vero DF sit linea recta eidem axi ad angulos rectos, ab eoque in E bifariam divisa. Et oporteat invenire rationem magnitudinis per utramque lentem conspectæ ad eam quæ sine lentibus perciperetur. Quia autem datæ sunt lentes, datur & convexæ

vexæ focus G, radiorum a parte visibilis advenientium, & concavæ punctum dispersus H. Igitur primum inveniatur duabus CH, CB tertia proportionalis CK, versus H sumenda. Deinde duabus KG, KA tertia proportionalis KL, sumenda versus G, nisi contingat punctum K incidere in G, quo casu proportionalis KL omittenda. Dico jam rationem apparentis magnitudinis trans lentes ad eam quæ nudo oculo spectaretur, habere rationem compositam ex rationibus HB ad HC, & AG ad GK, & EC ad EL. vel, in casu excepto, ubi deest EL, ex rationibus HB ad HC & EC ad AK.

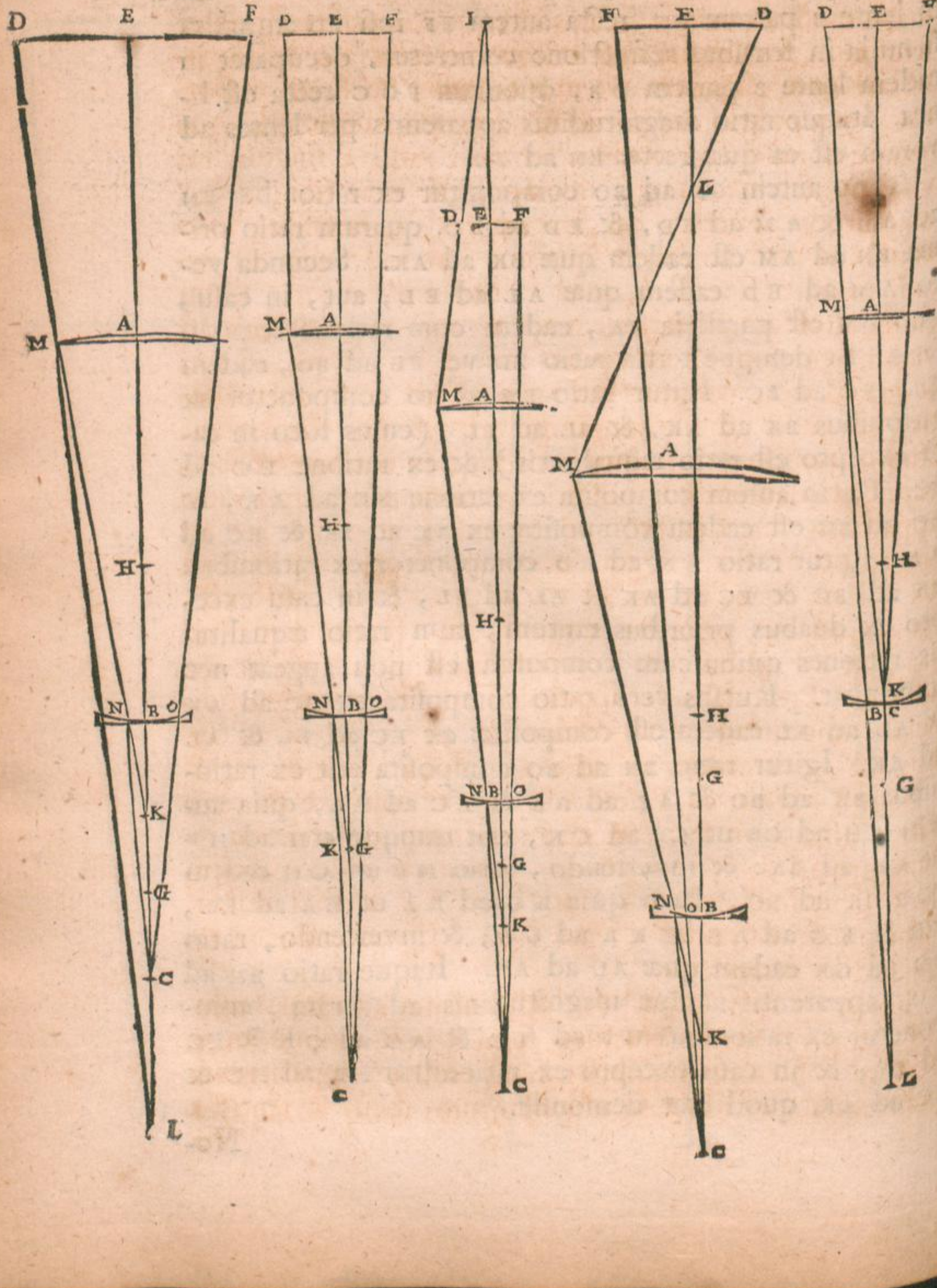
Ducatur enim recta per L, D, secans lentem A in M, vel in casu quo deest L, agatur DM axi lentium parallela. Deinde ducatur MK secans lentem B in N, & jungatur NC. Et tandem ex F ad oculum C protendatur recta FC, secans eandem lentem B in O. Quoniam igitur lentis convexæ A focus est G, estque KG ad KA ut hæc ad KL; sequitur radios qui a puncto K venientes occurrunt lenti A, ita flecti ut pertineant inde ad punctum L. Unde vicissim qui a puncto L exeunt vel ad ipsum feruntur, occurrentes lenti ab altera parte concurrent ad punctum K. Rursus quia proportionales sunt CH, CB, CK, estque H punctum dispersus lentis B radiorum a parte A venientium; Constat radios a C puncto venientes, flecti a lente B ut inde pertineant ad punctum K. Uude vicissim qui ab altera parte occurrunt lenti B tenduntque ad punctum K, ita inflectentur ut concurrant ad punctum C. Patet itaque radium DM, qui per punctum rei visibilis D ducitur ad lentem A, pertinetque ad punctum L, eum esse qui post refractionem in lente utraque primum in M, deinde in N pervenit ad oculum C; a quo itaque cernetur punctum D in puncto N lentis B, occupabitque recta DE


D E F
M A
H
N B O
K
G
C
L
D E F
M A
H
N B O
K G
C
I
D E F
M A
H
H
N B O
G
K
C
F E D
L
M A
H
G
N O B
K
C
D E F
M A
H
K
B C
G
L

in lente B partem BN. recta autem EF ipsi ED æqualis, si nulla in lentibus refractione cerneretur, occuparet in eadem lente B partem OB, quoniam FOC recta est linea. Itaque ratio magnitudinis apparentis per lentes ad veram est ea quæ rectæ BN ad BO.

Ratio autem BN ad BO componitur ex rationibus BN ad AM & AM ad ED, & ED ad BO. quarum ratio prima BN ad AM est eadem quæ BK ad AK. Secunda vero AM ad ED eadem quæ AL ad EL; aut, in casu, quo DM est parallela EA, eadem cum ratione æqualitatis. Et denique tertia ratio ED vel FE ad BO, eadem quæ EC ad BC. Igitur ratio BN ad BO componetur ex rationibus BK ad AK, & AL ad EL, (cujus loco in casu excepto est ratio æqualitatis) & ex ratione EC ad BC. Ratio autem composita ex ratione BK ad AK, & EC ad BC est eadem compositæ ex BK ad BC & EC ad AK. Igitur ratio BN ad BO componetur ex rationibus BK ad BC & EC ad AK & AL ad EL, & in casu excepto ex duabus prioribus tantum, cum ratio æqualitatis rationes quibuscum composita est non augeat nec imminuat. Rursus vero ratio composita ex EC ad AK & AL ad EL eadem est compositæ ex EC ad EL & AL ad AK. Igitur ratio BN ad BO composita erit ex rationibus BK ad BC & AL ad AK & EC ad EL, quia autem CH ad CB ut CB ad CK, erit quoque CH ad HB ut CB ad BK: & invertendo, ratio HB ad CH eadem quæ BK ad BC. Item quia KG ad KA ut KA ad KL, erit & KG ad AG ut KA ad LA; & invertendo, ratio AG ad GK eadem quæ AL ad AK. Itaque ratio BN ad BO, apparentis nempe magnitudinis ad veram, componetur ex rationibus HB ad HC & AG ad GK & EC ad EL; & in casu excepto ex rationibus HB ad HC & EC ad AK. quod erat demonstr.

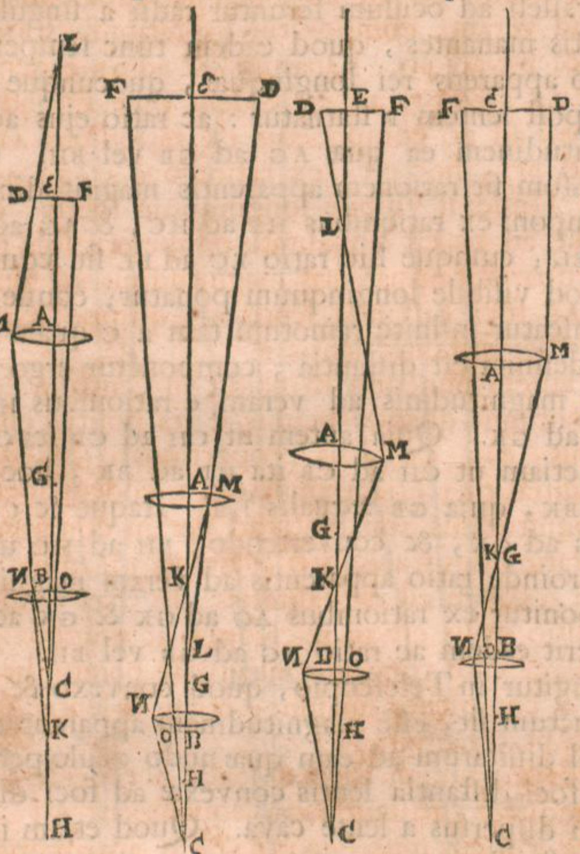
No-


D
E
F
M
A
H
N
B
O
K
G
C
L
D
E
F
M
A
H
N
B
O
K
G
C
I
D
E
F
M
A
H
N
B
O
G
K
C
F
E
D
L
M
A
H
G
N
O
B
K
C
D
E
M
A
H
K
B
C
G
L

Notandum vero, si lens cava B ita posita sit inter lentem A focumque ejus G, ut distantia BG sit æqualis BH quæ est inter lentem B & punctum suum dispersus, quæ positio ordinaria est telescopii hujusmodi, qua nempe paralleli ad oculum feruntur radii a singulis rei visæ punctis manantes, quod eadem tunc semper erit magnitudo apparens rei longinquæ, quocunque loco oculus G post lentem B statuatur: ac ratio ejus ad veram magnitudinem ea quæ AG ad GB vel BH. Cum enim ostensum sit rationem apparentis magnitudinis ad veram componi ex rationibus HB ad HC, & AG ad GK, & EC ad EL; cumque hic ratio EC ad EL sit æqualitatis, eo quod visibile longinquum ponatur; eoque punctum E censeatur infinitè remotum tam a C quam ab L, cujus hic definita est distantia, componetur ergo ratio apparentis magnitudinis ad veram e rationibus HB ad HC & AG ad GK. Quia autem ut CH ad CB ita CB ad CK, Erit etiam ut CH ad CB ita HB ad BK, hoc est, ita GB ad BK, quia GB æqualis HB. Itaque & CH ad HB, ut BG ad GK, & convertendo, BH ad HC ut KG ad GB. Proinde ratio apparentis ad veram magnitudinem componitur ex rationibus AG ad GK & GK ad GB, hoc est, erit eadem ac ratio AG ad GB vel BH.

Constat igitur in Telescopio, quod convexo & cavo vitro instructum sit, esse magnitudinem apparentem rerum procul dissitarum ad eam quæ nudo oculo percipitur, sicut foci distantia lentis convexæ ad foci distantiam puncti dispersus a lente cava. Quod etiam in sequentibus ostendetur.

Porro ex sola inspectione schematum ad casus singulos, apparet utrum erectum cerni debeat visibile an eversum. Nempe omnibus casibus erectum appariturum præterquam in illo casu ubi nimirum focus G lentis A cadit inter ipſam & punctum K, ſimulque viſibile remotum eſt ultra punctum L; ſic enim punctum D ſpectatur per punctum N lentis B quod ad alteram partem axis EB ſitum eſt, ideoque viſibile everſum ſpectari neceſſe eſt.

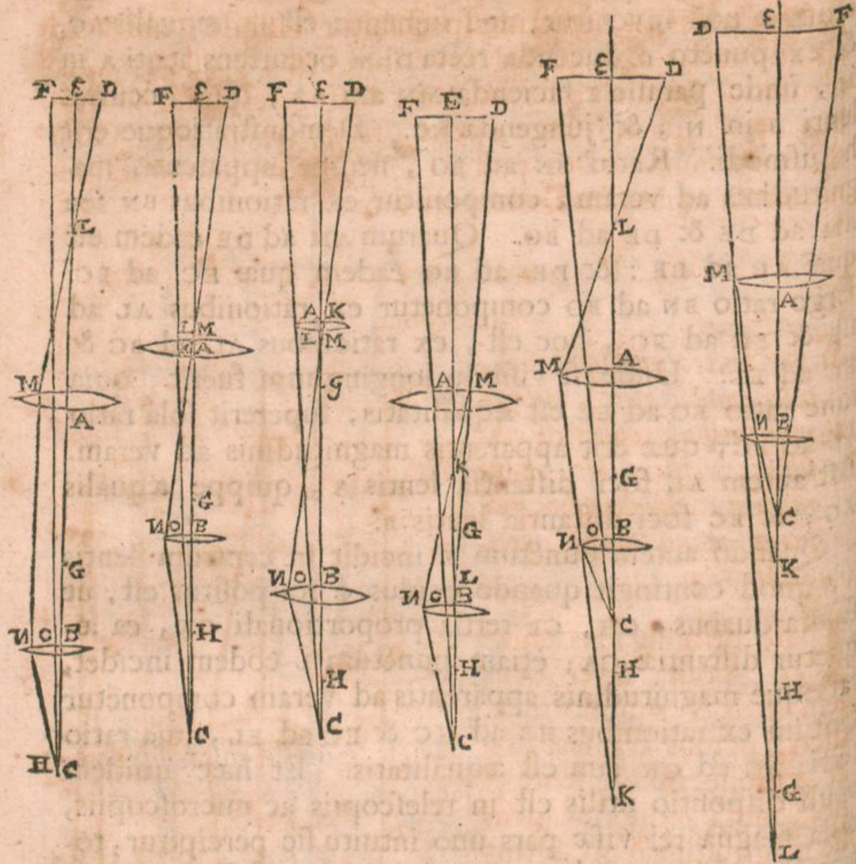


Proponatur nunc convexa lens utraque & rurſus lentis A ſit focus G; lentis vero B focus H, uterque a viſibili FED averſus. Oculus vero in C. Et continuè proportionales CH, CB, CK; itemque KG, KA, KL; & reliqua ſimiliter uti prius construantur. Et omnia quæ modo de convexa & cava lente dicta fuere ad apparentem magnitudinem attinentia, etiam his lentibus convenient, eademque erit demonſtratio. Niſi quod hic poteſt poni oculus C in puncto H, quo caſu punctum

ctum K non invenitur, ſed ſumenda eſt AL æqualis AG, & ex puncto D ducenda recta DLM occurrens lenti A in M, unde parallela facienda MN axi AB, quæ occurrat lenti B in N, & jungenda NC. Demonſtratioque erit hujuſmodi. Ratio BN ad BO, nempe apparentis magnitudinis ad veram, componitur ex rationibus BN ſeu AM ad DE & DE ad BO. Quarum AM ad DE eadem eſt quæ AL ad LE: & DE ad BO eadem quæ EC ad BC. Ergo ratio BN ad BO componetur ex rationibus AL ad LE & EC ad BC, hoc eſt, ex rationibus AL ad BC & EC ad EL. Unde ſi viſibile longinquum fuerit, quia tunc ratio EC ad EL eſt æqualitatis, ſupererit ſola ratio AL ad BC, quæ erit apparentis magnitudinis ad veram. Eſt autem AL foci diſtantia lentis A, quippe æqualis AG; & BC foci diſtantia lentis B.

Quando autem punctum K incidit in centrum lentis A, quod contingit quando oculus C ita poſitus eſt, ut ſumta duabus, CH, CB tertia proportionali CK, ea æquetur diſtantiæ CA; etiam punctum L eodem incidet, ratioque magnitudinis apparentis ad veram componetur tantum ex rationibus HB ad HC & EC ad EL, quia ratio tertia AG ad GK jam eſt æqualitatis. Et hæc quidem oculi diſpoſitio utilis eſt in teleſcopiis ac microſcopiis, quia magna rei viſæ pars uno intuitu ſic percipitur, totam lentem B complente imagine, etiam ſi lentis A minima fuerit apertura.

Quandocunque autem foco G lentis A cadente inter ipſam lentemque B, diſtantia GB æqualis erit BH, qua diſtat a lente B focus ſuus H: erit ratio apparentis ad veram magnitudinem rei longinquæ, ubicunque oculus C in axe lentium ponatur, ea quæ AG ad GB, hoc eſt ea quæ foci diſtantiarum lentis exterioris atque interioris ſive oculo proximæ. Sicut ante in compoſitione



lentis convexæ cum cava oſtenſum eſt. Demonſtratio enim eadem quæ illic habetur etiam huic caſui accommodata eſt. Hæc vero ordinaria eſt teleſcopii ex duabus convexis diſpoſitio, qua nempe fit ut, qui nullo viſus vitio laborant, res remotas diſtincte contueantur.

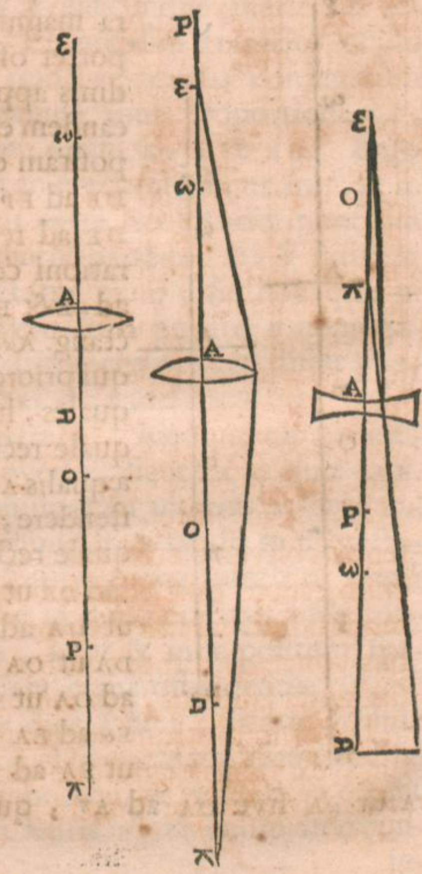
De cætero utrum erecto ſitu an everſo viſibile ſpectetur, ex figuris cujuſque caſus hic quoque manifeſtum eſt. Nempe ubi puncta N & D reperiuntur ad eandem par-

partem axis AB, erectum ſpectabitur viſibile; ubi vero ad contrarias axis partes inverſum erit, atque apparet utrumque horum variis caſibus contingere poſſe, de quibus ſigillatim inquirere operæ pretium non eſt. Cum eadem omnia etiam poſtea abſque tot compoſitarum rationum ambagibus oſtenſuri ſimus.

PROPOSITIO XL.

Theorema.

Si per lentes quotlibet viſibile conſpiciatur, iiſque manentibus oculus & viſibile viciſſim loca permutent. Eâdem hoc quâ prius magnitudine apparebit.



Esto primum lens unica A, poſita inter oculem in D & viſibile in E. dico ſi oculus tranſeat in E & viſibile in D, lente A non mota, quod eadem ſic magitudine ſpectabitur, atque cum oculus erat in D & viſibile in E.

Sit enim O focus lentis A ſeu punctum quo pertinent radii paralleli venientes a partibus E. Et duabus DO, DA ſit tertia proportionalis DP ſumta verſus O. Eſt igitur punctum

P oculo in D conjugatum. Qua propter per Propoſ. XXXVI. aut XXXVII. aut XXXVIII. oculo in D conſtituto ratio magnitudinis apparentis ad veram viſibilis in E, erit ea quæ componitur ex rationibus AO ad OD & DE ad EP. Per hæc eadem, cum oculus ponetur in E & viſibile in D, ſumta Aω æquali AO, & duabus Eω, EA tertia proportionali Eπ, erit ratio magnitudinis apparentis ad veram viſibilis in D, compoſita ex rationibus Aω ad ωE & ED ad Dπ.

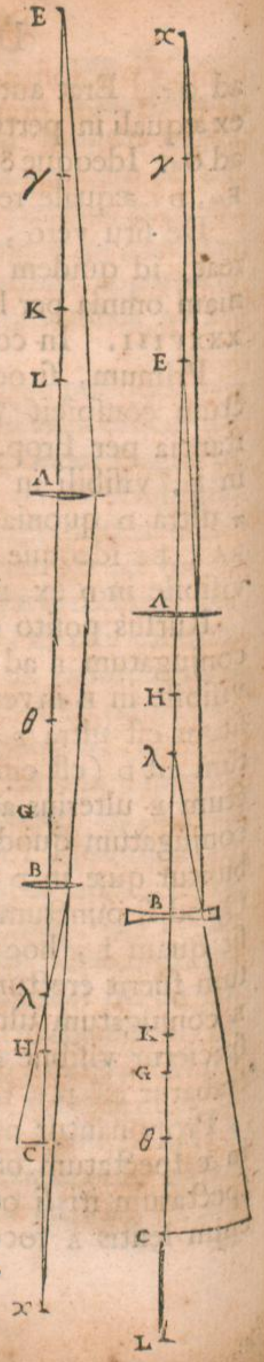
Itaque cum utraque poſitione vera magnitudo ſit prorſus eadem, oportet oſtendere rationem magnitudinis apparentis ad veram utrobique eandem eſſe. Hoc eſt rationem compoſitam ex rationibus AO ad OD & DE ad EP, quæ eſt ratio rectang. AO, DE ad rectang. OD, EP eſſe eandem rationi compoſitæ ex rationibus Aω ad ωE & ED ad Dπ, hoc eſt rationi rectang. Aω, ED ad rectang. ωE, Dπ. Atqui priores termini rationum ſunt æquales, hoc eſt, rectang. AO, DE æquale rectang. Aω, DE, quoniam AO æqualis Aω; Ergo opus tantum eſt oſtendere, quod rectang. OD, EP æquale rectang. ωE, Dπ. Quia ergo DO ad DA ut DA ad DP, erit & DO ad OA ut DA ad AP; & permutando OD ad DA ut OA ſive ωA ad AP; quare & OD ad OA ut ωA ad ωP. Rurſus cum ſit Eω ad EA ut EA ad Eπ erit Eω ad ωA ut EA ad Aπ, & permutando Eω ad EA ut ωA ſive OA ad Aπ, quare & Eω ad ωA, ut OA ad ad $O\pi$. Erat autem ut ωA ad ωP ita OD ad OA. Ergo ex æquali in perturbata proportione erit $E\omega$ ad ωP ut OD ad $O\pi$. Ideoque & $E\omega$ ad EP ut OD ad $D\pi$. Quare rectang. $E\omega$, $D\pi$ æquale rectang. EP, OD, quod erat ostendendum.

De situ vero, quod similis utraque positione appareat, id quidem si lens cava sit manifestum est. Quoniam omnia per hanc spectanti erecta apparent per Prop. XXXVIII. In convexa autem ostendetur hoc modo.

Primum, si oculus in D inter A & O situs fuerit erectum conspicit visibile in E quæcunque fuerit AE distantia per Prop. XXXVI. Et vicissim translato oculo in E, visibili in D, cadet punctum oculo conjugatum π ultra D quoniam in continua sunt proportione $E\omega$, EA, $E\pi$ ideoque πA major quam $A\omega$ sive AO. Ergo visibile in D ex E spectabitur erectum, sicut in E ex D.

Rursus posito oculo in D extra AO, cadet punctum conjugatum P ad alteram lentis partem. Et si quidem visibile in E inversum spectatur ex D, fit hoc quia E situm est ultra P. Tunc vero quia puncto P conjugatum est D (est enim conjugatio reciproca) & distat punctum E ulterius a lente quam P, cadet punctum ipsi E conjugatum quod est π, citra D. Ideoque ex E videbuntur quæ in D sunt situ everso, sicut ex D quæ in E. Quod si punctum ipsi D conjugatum ulterius a lente absit quam E, hoc est, si visibile in E oculo in D spectatum fuerit erectum, cadet simili ratione punctum π ipsi E conjugatum ultra D, atque id circo erectum tunc conspicietur visibile in D ex E, sicut & in E positum spectabatur ex D. Quæ quidem erant ostendenda.

Proponantur nunc lentes duæ A & B, sitque visibile in E spectatum oculo in C. Dico eâdem magnitudine spectatum iri si oculus in E ponatur & visibile in C. Sit enim lentis A focus G & H lentis B, & oculo in C conjujugatum punctum K, pertinens ad lentem B, ut sint videlicet in continua proportione CH, CB, CK. Item puncto K conjugatum punctum sit L pertinens ad lentem A, ut sint in continua proportione KG, KA, KL. Itaque cum ex C conspicitur visibile in E positum, ratio apparentis ad veram magnitudinem est ea quæ componitur ex rationibus HB ad HC, AG ad GK & EC ad EL ut ostensum fuit Propos. XXXIX. Similiter posito oculo in E & visibili in C, & notato γ in foco lentis A & θ in foco lentis B; & puncto κ ipsi E conjugato ad lentem A, ut sint in contin. Prop. Eγ, EA, Eκ, & puncto λ conjugato ipsi κ ad lentem B, ut sint in contin. Prop. $\kappa\theta$, κB, $\kappa\lambda$. Componetur magnitudinis apparentis ad veram ratio, ex rationibus Aγ ad γE, Bθ ad $\theta\kappa$ & CE ad Cλ. Est autem vera magnitudo utraque positione eadem. Igitur ostendendum quod composita ex tribus hisce rationibus eadem est compositæ ex tribus illis. Est autem ratio ex prioribus tribus composita quæ solidi ex HB, AG, EC ad solidum ex HC, GK, EL. At ratio ex tribus posterioribus, ea quæ solidi ex Aγ, Bθ, CE ad solidum ex γE, $\theta\kappa$, Cλ. Estque solidum ex HB, AG, EC æquale solido ex Aγ, Bθ, CE, quum lineæ singulæ singulis sint æquales, nem-



nempe HB ipsi Bθ, & AG ipsi Aγ & CE utrimque eadem. Igitur opus tantum erit ostendere quod solidum ex HC, GK, EL æquale sit solido ex γE, θκ, Cλ. Id vero sic ostendemus. Quoniam est CH ad CB ut CB ad CK, erit & CH ad CB ut HB sive Bθ ad BK, ideoque ut CH ad HB ita quoque Bθ ad θK. Similiter cum sit κθ ad κB, ut κB ad κλ, erit κθ ad κB ut θB sive BH ad Bλ, ideoque κθ ad Bθ ut BH ad Hλ. Erat autem Bθ ad θK ut CH ad BH. Igitur ex æquo in prop. perturbata, erit κθ ad θK ut CH ad Hλ. Quare & θκ ad κK ut CH ad Cλ & permutando θκ ad CH ut κK ad Cλ. Rursus quoniam Eγ ad EA ut EA ad Eκ, erit Eγ ad EA ut γA sive AG ad Aκ, ideoque ut Eγ ad γA ita AG ad Gκ. Similiter quia KG ad KA ut KA ad KL, erit KG ad KA ut GA sive γA ad AL, ideoque ut KG ad AG ita γA ad γL: & erat AG ad Gκ ut Eγ ad γA: Ergo ex æquo in perturbata prop. erit KG ad Gκ ut Eγ ad γL. Quare & KG ad Kκ ut Eγ ad EL, & permutando & invertendo Eγ ad KG ut EL ad Kκ. Ratio autem EL ad Cλ componitur ex rationibus EL ad Kκ, & Kκ ad Cλ; quarum EL ad Kκ eadem est quæ Eγ ad KG; altera vero Kκ ad Cλ eadem quoque ostensa fuit, quæ θκ ad CH. Ergo ratio EL ad Cλ componetur ex rationibus Eγ ad KG & θκ ad CH, ac proinde eadem erit quæ rectang. sub Eγ, θκ ad rectang. sub KG, CH. Ideoque solidum sub EL, KG, CH æquale erit ei quod sub Cλ, Eγ, θκ. quod erat ostendendum.

Propositis vero tribus pluribusve lentibus demonstratio ad præcedentium similitudinem conscribi poterit.

Per hæc igitur quando de apparente visibilium magnitudine & situ inquirere volemus; itemque an distinĉta futura ſit viſio; hæc tria ſimul cognoſcere poterimus, ſi eo modo rationem ineamus ac ſi viſibile in oculi loco fuerit conſtitutum & hic viciſſim in illius locum ſucceſſerit. Omnia enim ex progreſſu flexuque radiorum facile apparent. Ut ex. gr. in fig. propoſit. quum Radii ex ſingulis punĉtis E viſibilis promanantes poſt refraĉtionem in lente A pertineant ad punĉtum ϰ; deinde vero poſtquam lentem B transierint, ad punĉtum λ, facile hinc colligetur utrum oculo in C diſtinĉta ſit futura viſio an ſecus.

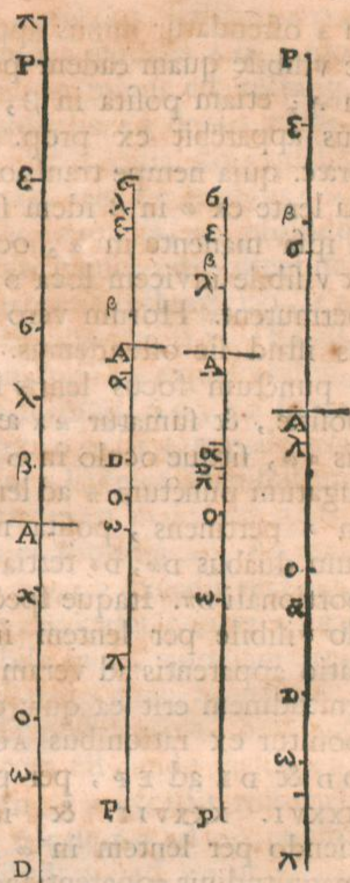
Propositio XLI.

Theorema.

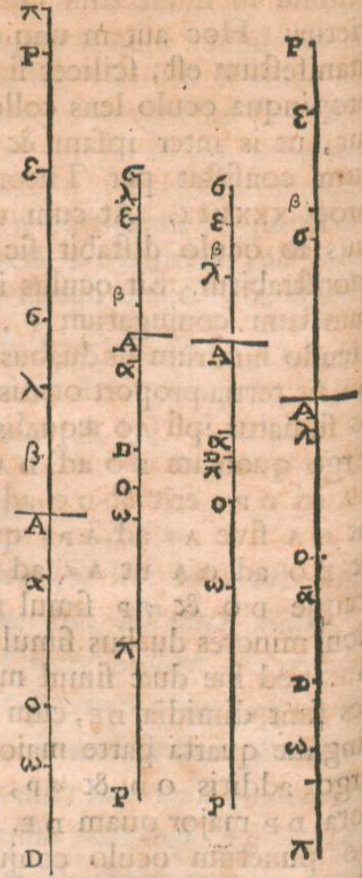
Manente oculo & viſibili, quocunque loco inter utrumque lens convexa ſtatuatur cujus foci diſtantia major ſit quarta parte intervalli quod inter oculum & viſibile, erectum hoc conſpicietur; Et maximum tunc apparebit, cum medio loco inter viſibile & oculum lens ſtatuetur. Si vero foci a lente diſtantia diĉti intervalli quarta parte minor fuerit, etiam inverſum quandoque viſibile conſpicietur; eritque inverſarum ſpecierum minima, cum lens medium intervalli locum tenebit.

Poſitus eſto oculus in D, viſibile in E, & lens convexa quovis loco inter utrumque ut in A, focus autem lentis ſit O, & diſtantia AO primum major quarta parte intervalli DE. Oſtendendum eſt imprimis quod vi-

visibile in E erectum conspicietur. Hoc autem uno casu manifestum est, scilicet si tam propinqua oculo lens collocetur, ut is inter ipsam & focum consistat per Theorem. prop. XXXVII. At cum ulterius ab oculo distabit sic demonstrabitur. Sit oculus in D punctum conjugatum P, faciendo nimirum ut duabus DO, DA sit tertia proportionalis DP. & sumatur ipsi AO æqualis Aσ. Ergo quoniam DO ad DA ut DA ad DP, erit & DO ad DA ut OA sive Aσ ad AP, quare & DO ad OA ut Aσ ad σP; itaque DO & σP simul sunt non minores duabus simul OA, Aσ. Sed hæ duæ simul majores sunt dimidia DE, cum sint singulæ quarta parte majores, ergo additis OD & σP, erit tota DP major quam DE. Ergo punctum oculo conjugatum P cadit ultra visibile in E, ideoque erectum hoc spectari necesse est per Theor. prop. XXXVII.



Porro demonstrandum quod cum locus lentis intervallum DE bifariam dividit maximum apparebit visibile in E. Sit igitur A medium inter D & E, ubi primo lens constituta sit, deinde & alio quovis loco in α posita intelligatur, oculo D propinquior; vel in β tantundem ab oculo remotior. Quod si igitur posita lente

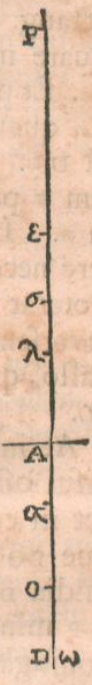


in α oſtendatur minus apparere viſibile quam eadem poſita in A; etiam poſita in β, minus apparebit ex prop. XL. præc. quia nempe tranſponenda lente ex α in β idem ſit ac ſi ipſa manente in α, oculus & viſibile invicem loca D & E permutent. Horum vero prius iſtud ſic oſtendemus. Sit ω punctum focus lentis in α poſitæ, & ſumatur αλ æqualis αω, ſitque oculo in D conjugatum punctum π ad lentem in α pertinens, poſita nimirum duabus Dω, Dα tertia proportionali Dπ. Itaque ſpectando viſibile per lentem in A, ratio apparentis ad veram magnitudinem erit ea quæ componitur ex rationibus AO ad OD & DE ad EP, per prop. XXXVI. XXXVII. & inſpiciendo per lentem in α ratio magnitudinis apparentis ad veram componetur ex rationibus αω ad ωD & DE ad Eπ. Eſt autem vera magnitudo poſitione utrâque eadem, quoniam oculus & viſibile manere dicuntur; Itaque oſtendere oportet majorem eſſe rationem compoſitam ex rationibus AO ad OD & DE ad EP quæ eſt rectang. AO, DE ad rectang. OD, EP; quam compoſitam ex rationibus αω ad ωD & DE ad Eπ, hoc eſt, quam rationem rectang. αω, DE ad rectang. ωD, Eπ. Priores autem

ra-

rationum termini æquales ſunt, rectang. ſcilicet AO, DE, rectang. αω, DE, quoniam Aω æqualis AO. Ergo oſtendendum quod rectang. OD, EP minus eſt rectang. ωD, Eπ. Quoniam igitur AD æqualis AE & AO æqualis Aσ, erit & OD æqualis σE. Item quia AO æqualis αω demtâ vel additâ communi αO erit αA æqualis Oω. Eadem ratione erit λσ ipſi Aα æqualis, ac proinde quoque ipſi Oω. Quoniam ergo paulo ante oſtenſum fuit quod DO ad OA ut Aσ ad σP erit rectang. DO, σP æquale rectang. OA, Aσ, hoc eſt, quadr. OA. Et eſt rectang. DO, σE æquale quadr. OD, quia σE æqualis oſtenſa eſt ipſi DO. Itaque exceſſus rectang. DO, σP ſupra rectang. DO, σE hoc eſt, rectang. DO, EP æquale exceſſui quadr. AO ſupra qu. OD. Etenim manifeſtum eſt quod AO excedit OD, quoniam AO major eſt quarta parte totius ED, ideoque major dimidiâ AD. Et manifeſtum quoque quod rectang. DO, σP excedit rectang. DO, σE, nam ſi O cadit inter A, D, cadet σ inter A, E; & P ante lentem ultraque viſibile in E, quoniam erectum conſpici oſtenſum fuit. Rurſus cum D inter A, O, etiam E inter A, σ, & P cadit poſt lentem. Semper ergo his caſibus E inter σ & P ſitum eſt, unde major σP quam σE, & proinde rectang. OD, σP excedit rectang. OD, σE. Porro quoniam Dω ad Dα ut Dα ad Dπ, etiam Dω ad Dα ut ωα ſive αλ ad απ, unde & Dω ad ωα ut αω ad λπ, Ergo rectang. Dω, λπ æquale qu. ωα. Eſt autem in primo & ſecundo caſu rectang. ωD, Eπ æquale exceſſui rectang. ωD, λπ ſupra rectang. ωD, λE. Ergo idem rectang. ωD, Eπ æquale exceſiui quadrati ωα, h. e. qu. OA ſupra rectang. ωD, λE. In tertio autem & quarto caſu rectang. ωD, Eπ æquale duobus ſimul rectang. ωD, λπ & rectang. ωD, λE; Ergo hic idem rectang ωD, Eπ æquale eſt rectang ωD, λE cum qu. ωα hoc eſt, cum qu. OA. Oſtenſum autem quod rectang. DO, EP æquale exceſſui quadr. OA ſupra qu. OD. Apparet itaque in 3. & 4. caſu quod rectangulo ωD, Eπ minus eſt rectangulum DO, EP, quod erat demonſtr. In 1. autem & 2. caſu ſeparatim idem oſtendetur hoc modo. Quoniam in 1. eſt Dω minor quam DO, erit major ratio ωO ad Dω quam ωO ad DO, hoc eſt, quam σλ ad σE. Oſtenſum enim quod DO 2|2 Eσ. quodque Oω 2|2 σλ. Itaque componendo major ratio OD ad Dω quam λE ad Eσ. Quare majus erit rectang. OD, Eσ h. e. qu. OD quam rectang. Dω, λE. Unde minor eſt exceſſus quad. AO ſupra quad. OD, quam ejuſdem qu. AO ſupra rectang. Dω, λE. Erat autem priori horum exceſſuum æquale rectang. OD, EP. Alteri vero æquale rectang. ωD, Eπ. Ergo illud quam hoc minus eſt. In ſecundo autem caſu, quoniam Dω major eſt quam DO, erit major ratio Dω ad Oω quam DO ad Oω. h. e. quam σE ad σλ. Proinde per converſionem rationis erit minor ratio ωD ad DO quam σE ad Eλ, ideoque rectang. DO, Eσ h. e. qu. DO majus rectang. ωD, Eλ: Unde reliqua ſimiliter concludemus ut in caſu præcedenti. Nempe quod rectang. OD, EP minus eſt rectangulo ωD, Eπ. Quod demonſtrare oportebat.

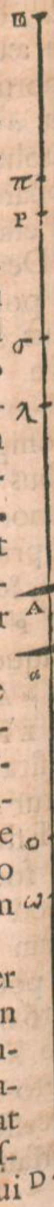
Quinto autem caſu cum O incidit in D, etiam σ cadit in E. Et tum quidem per lentem in A poſitam inſpiciendo apparentis magnit. ad veram ratio eſt ea quæ ED ad DA per prop. XXXVI. hoc eſt, dupla. At inſpiciendo, per eandem tranſpoſitam in α, dicta ratio ut antè, eſt ea quæ rectang. αω, DE ad rectang. ωD Eπ. Eſt autem hic rectang. αω, DE æquale duplo qu. αω, αω, quia DE dupla AO, vel αω. Eſt & rectang. ωD, Eπ æquale rectang. ωD, λπ una cum rectang. ωD, λE, quorum ſolum rectang. ωD, λπ oſtenſum fuit æquale qu. αω. Itaque rectangulum αω, DE minus eſt quam duplum rectang. ωD, Eπ. Et minor proinde jam ratio apparentis ad veram magnitudinem quam dupla; qualis erat poſita lente in A.



Denique ſi ω incidat in D, erit ratio augmenti poſitâ lente in A, ut in præcedentibus, ea quæ componitur ex rationibus AO ad OD & DE ſive ωE ad EP. at lente poſitâ in α ratio augmenti erit ea, quæ Eω ad ωα per prop. XXXVI. Componitur autem ratio Eω ad ωα ex rationibus Eω ad EP & EP ad ωα, quarum EP ad ωα minor eſt quam AO ad OD. Nam oſtenſum fuit in præced. quod Pσ ad σA ſeu ωα ſicut AO ad OD; & eſt PE minor quam Pσ quia E cadit inter P & σ, ut oſtenſum itidem eſt ſuperius. Itaque compoſita ex rationibus Eω ad EP & EP ad ωA minor eſt compoſitâ ex rationibus ωE ad EP & AO ad OD. Hoc eſt ratio augmenti poſita lente in α minor quam cum eadem ponitur in A.

Eſto nunc diſtantia AO quæ eſt inter lentem & focum minor quarta parte intervalli DE, quod inter viſibile & oculum. Itaque primum oſtendere oportet quod lens eo loco poni poteſt ut inverſum conſpiciatur viſibile. Quoniam ergo AO minor eſt quartâ parte DE, ſuperabitur rectang. ſub AO, DE à ¼ quadrati DE hoc eſt a rectang. DAE certo exceſſu. Ponatur autem Aα cujus quadr. iſto exceſſu minus ſit, & conſtituatur lens in α. dico inverſam exhibitum iri viſibilis in E ſpeciem. Sint enim

nim reliqua constructa, ut in casibus prioribus. Quia igitur DE bifariam æqualiter secta est in A & inæqualiter in α, erit quadr. Aα æquale excessui rectang. DAE supra rectang. DαE. Idem vero quadratum Aα minus est excessu rectang. DAE supra rectang. sub DE, AO ex constr. Itaque hic excessus quam ille major est, ideoque rectang. sub DE, AO minus erit rectang. DαE. Quare minor ratio DE ad Eα quam αD ad AO seu αω. Et per conversionem rationis major ratio ED ad Dα quam αD ad Dω. Sed est πD ad Dα ut αD ad Dω. Ergo πD minor est quam ED. Est autem π punctum oculo in D conjugatum ad lentem in α. Itaque per prop. XXXVII. inversum apparere necesse est visibile. quod erat ostendendum. Poterat ergo & ultra medium A lens constitui ut inversam speciem exhibeat, tanto quidem intervallo, quanto citerior esse potest; idque constat per XL.



At in ipso A medio constitutam inversa quoque visui offerre sic fiet manifestum. Quoniam scilicet in continua sunt proport. DO, DA, DP; estque DO major dimidiâ DA, quia AO est minor dimidia DA, erit & DA major dimidia DP, ideoque DP minor quam DE. Est autem P punctum oculo conjugatum ad lentem in A. Ergo & hic inversum exhibet visibile in E positum.

Superest ut ostendatur minus spectari visibile per lentem in A medio positam, quam per eandem in α. De quo constabit si contra quam in præcedentibus ostensum fuerit quod rectang. OD, EP majus est rectang. ωD, Eπ. Quum igitur hîc cadat P inter σ & E erit rectang. OD, EP æquale excessui

ſui rectang. OD, σE ſupra rectang. OD, σP, hoc eſt exceſſui qu. OD ſupra qu. OA; nam rectang. OD, σE ſuperius æquale oſtenſum fuit qu. OD, & rectang. OD, σP æquale qu. AO. Rectang. verò ωD, Eπ, æquale erit exceſſui rectang. ωD, λE ſupra rectang. ωD, $\lambda\pi$; hoc eſt, exceſſui rectang. ωD, λE ſupra qu. AO, nam oſtenſum quoque fuit, quod rectang. ωD, $\lambda\pi$ æquale qu. $\alpha\omega$ ſive AO. Eſt autem qu. OD majus rectang. ωD, λE, nam hoc eodem modo oſtenditur, quo in caſuum præcedentium primo; Ergo exceſſus qu. OD ſupra qu. OA, hoc eſt, rectang. OD, EP majus eſt exceſſu rectang. ωD, λE ſupra quadr. OA, hoc eſt, rectangulo ωD, Eπ: quod erat oſtendendum.

PROPOSITIO XLII.

Theorema.

Manente oculo & viſibili, ſi lens cava inter utrumque conſtituatur, quò propinquior erit loco inter oculum & viſibile medio, eo minorem hujus ſpeciem efficiet; & minimam omnium cum medium tenebit ipſum.

Eſto viſibile in E poſitum, oculus in D, ſitque punctum M intervalli DE medium; Et primum lens cava conſtituatur in A inter M & D, deinde autem in α, inter A, D ita ut diſtantia αM major ſit quam AM. Oportet oſtendere quod minor erit ſpecies viſibilis in E per lentem in A ſpectati, quam per eandem in α. Sit O punctum diſperſus lentis in A. Sed ω cum eſt in α. Et omnia ſimiliter conſtruantur ac in theorem. præcedenti. Itaque eâdem argumentandi ratione devenietur eo, ut oſtendere oporteat rectang OD, EP majus eſſe rectang. ωD, Eπ, cum illic oſtenſum fuerit minus.

Quia ergo DA minor est quam AE, & AO æqualis Aσ; Erit utraque simul DA, AO hoc est DO minor utrâque AE, Aσ, hoc est Eσ. Tres autem hæ Aα, Oω, σλ manifestò inter se sunt æquales, sicut & in præcedentibus. Itemque rectang. DO, σP & rectang. ωD, λπ, ut illic, singula æqualia qu. AO. Est autem hic excessus rectang. OD, σE supra rectang. OD, σP æqualis rectang. OD, EP: & excessus rectang. ωD, λE supra rectang. ωD, λπ æqualis rectang. ωD, Eπ. Ergo ostendendum est quod excessus ille quam hic major est; quod erit manifestum, si ostendatur rectang. OD, σE majus rectang. ωD, λE. cum rectang. OD, σP & ωD, λπ inter se æqualia dicta sint. Quia ergo Dω minor est quam DO, erit major ratio Oω ad ωD quam Oω ad OD. Sed hæc etiam major est quam σλ ad σE; nam dictum est quod σλ æqualis Oω: quodque σE major quam DO. Ergo major ratio Oω ad ωD quam σλ ad σE. Et componendo, major OD ad Dω quam λE ad Eσ. Quamobrem majus quoque rectang. OD, Eσ, rectangulo Dω, λE, quod reliquum erat ostendere.

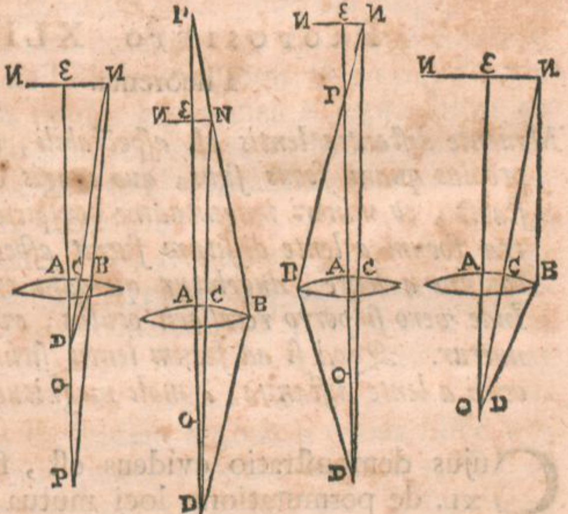
Quod si vero ipsi MA intervallo ad alteram partem puncti medii M æquale sumatur, ac in eo lens constituatur. Eâdem magnitudine cernetur visibile atque per lentem in A, ut ostensum est propos. XL. Proinde constat tanto exilius conspici quanto propior erit lens puncto medio M. Ex quo denique manifestum est, minimum conspici visibile cum in ipso M puncto lens constituitur. Quæ fuere demonstranda.

PRO-

Propositio XLIII.
Theorema.

Manente distantia oculi a lente convexa, si inter lentem & focum oculus situs sit, quo magis visibile removebitur eo minori conspicietur magnitudine. Si vero ultra focum oculus a lente distet, abscedens visibile augebitur, quamdiu erectum apparet; inde vero si porro removeatur decrescet inversa imago. Quod si in foco lentis constitutus fuerit oculus, quacunque visibilis a lente distantiâ, eâdem semper magnitudine cernetur.

Ponantur quæ in præcedenti prop. XXXVI & XXXVII; (nempe in qua de augmento unius lentis convexæ.) Primum itaque quoniam oculo citra focum a lente distante, punctum conjugatum P cadit post lentem & oculum, manifestum est quo magis visibile NN removebitur, eo minorem fore AB; recta enim ducta est NBP. Verum DA distantia oculi a lente eadem manere ponitur; ergo minuitur angulus ADB recedente visibili, quapropter minui speciem ejus necesse est.



Oculo autem ultra focum remoto, quoniam punctum P cadit ante lentem, apparet quandiu visibile NN erectum spectatur, hoc est, quamdiu non ultra P distat; tanto majorem fore AB quanto propius ad P visibile accesserit. Ergo tanto major quoque fiet angulus ADB, quia distantia AD non mutatur.

Sed postquam everso situ spectari ceperit, remotum videlicet ultra punctum P, quanto ulterius ibit, tanto minor fiet AB, ideoque & angulus ADB.

Posito autem oculo in foco lentis ipso, nullum inveniri punctum conjugatum diximus, sed rectam duci NB axi EA parallelam. Igitur quacunque visibilis distantia æquè magna est AB, ideoque & angulus ADB. Quare eâdem ubique magnitudine visibile conspicietur. Quæ fuere demonstranda.

PROPOSITIO XLIV.
Theorema.

Manente distantia lentis ab aspectabili, si fuerit hoc lenti propius quam focus suus; quo magis oculus a lente distabit, eo minori magnitudine conspicietur. Si vero ultra focum a lente dissitum fuerit aspectabile removendo oculum a lente, augebitur quandiu erectum apparebit. Inde vero si porro recesserit oculus, eversa species diminuetur. Quod si ad focum lentis situm sit, quacunque oculi a lente distantia, æquali magnitudine conspicietur.

Cujus demonstratio evidens est, si id quod prop. XL. de permutatione loci mutua inter oculum & rem visam dictum fuerit, applicetur Theoremati.

PRO-

PROPOSITIO XLV.

Theorema.

Si loco conspicilli duarum lentium, ejusmodi adaptetur ex solido materiæ diaphanæ frusto, cujus altera superficies convexa sit, altera cava, eâdem proportione visibilia augebit longinqua, atque conspicillum duarum lentium. Scilicet augmenti ratio ea erit, quæ distantiæ superficiei convexæ a foco suo ad distantiam foci a cava, cui oculus admotus fuit.

Esto talis specilli continui superficies convexa A M, ex sphæra cujus N centrum. Superficies vero B Q cava centro P; Et focus superficiei A M seu concursus parallelorum sit G punctum; at R punctum dispersus superficiei B Q radiorum parallelorum qui intra solidum feruntur. Porro visibile longinquum sit DED. Itaque ostendendum cum oculus superficiei B applicabitur ea proportione visibile DED augeri, quam habet AG ad GB.

Ponatur prius oculus in C non adhuc superficiei B Q prope admotus, & tribus hisce C R, C P, C B ponatur quarta proportionalis C K, secundum prop. XII. p. 5. Ergo quoniam radii ex C puncto si egrederentur, refracti in superf. B Q pertinerent ad punctum K, ideo vicissim qui intra diaphani soliditatem ita feruntur, ut tendant ad K, pertinebunt post refractionem in superficie B ad punctum C. Eadem ratione si tribus hisce KG, KN, KA collocetur quarta proportionalis KS, fiet ut radii ad punctum S tendentes refractique in superficie AM tendant ad punctum K. Jungatur DS secans superficiem AM in M, deinde MK secans superficiem BQ in Q, & connectantur QC. Recta vero DC secet superficiem BQ in

 O.

o. Itaque radiorum ex puncto visibilis D is, qui secundum rectam DM, flectetur ab M versus K, sed iterum refractus in Q perveniet ad oculum in C. Quare constat in puncto Q superficiei BQ spectari punctum D: quod spectaretur in O si loco specilli, una tantum superficies B poneretur refractionis expers. Est igitur ratio magnitudinis apparentis ad veram oculo in C constituto, ea quæ QB ad OB. Ratio autem QB ad OB composita est ex rationibus QB ad MA; & MA ad ED; & ED ad OB, quæ sunt eædem rationibus KB ad KA; SA ad SE; & EC ad BC. Et est ratio composita ex rationibus SA ad SE & EC ad BC eadem compositæ ex rationibus SA ad BC & EC ad SE. Itaque ratio QB ad OB componetur ex rationibus KB ad KA, SA ad BC, & EC ad ES; ratio autem composita ex rat. KB ad KA & SA ad BC est eadem compositæ ex rat. KB ad BC & SA ad KA, reliqua vero EC ad ES est ratio æqualitatis, quoniam visibile DED longinquum ponitur. Ergo ratio QB ad OB composita est ex ratione KB ad BC & SA ad KA. Quia vero ex constr. est CR ad CP ut CB ad CK, erit PR ad RC ut KB ad BC. Item quia KG ad KN ut KA ad KS, erit NG ad GK ut SA ad AK. Igitur ratio QB ad OB componetur ex rat. PR ad RC & NG ad GK, oculo adhuc in C constituto. Cum vero superficiei BQ oculus contiguus ponetur cadet C in B, item K in B, quare tunc erit ratio PR ad RC seu

ſeu RB eadem quæ eſt refractionis, ac proinde eadem rationi AG ad NG. Ratio vero NG ad GK erit NG ad GB. Ergo tunc ratio QB ad OB, quæ eſt ratio magnitudinis apparentis ad veram erit compoſita ex rat. AG ad NG, & NG ad GB, hoc eſt, erit ea quæ AG ad GB; quod erat demonſtr.

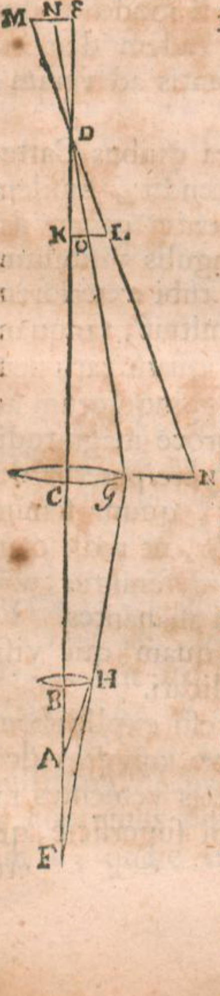
Oportet autem ſuperficiem BN certa ratione cavam eſſe ſi diſtincta viſio requiritur. Nam alioqui etſi magis minuſve cava eſſet, aut plana aut convexa quoque, idem prorſus contingeret augmentum, ſi modo oculus prope admotus ponatur. Nam ſemper eadem demonſtratione oſtendetur magnitudinis apparentis ad veram, eſſe rationem eandem, quæ AG ad GB.

Hiſce vero nequaquam conſentiunt ea quibus Carteſius Teleſcopii inventum explicare contendit, ſimilem huic tubum proponens ſolidum. Vult enim cavam ſuperficiem ejuſmodi eſſe ut radios a ſingulis viſibilium punctis procedentes, & per ſuperficiem tubi exteriorem tranſmiſſos, ita inflectat ac ad oculum mittat, tanquam ſi a propioribus punctis advenirent: Et quam rationem habuerit diſtantia horum punctorum propinquiorum ad diſtantiam ipſius viſibilis, eandem reciproce magnitudinis apparentis ad eam quæ ſolis oculis perciperetur definit. Hoc autem quomodo verum ſit, quum ſenum oculis ea conveniat teleſcopii conſtitutio, ut radii convergentes aut certè paralleli ad oculum deferantur, non autem quaſi ex puncto aliquo propiori manantes. Et notum eſt tamen non minus ſenibus quam qui viſu pollent ſpecierum magnitudines multiplicari.

Porro illud quoque in eâdem Carteſii explicatione abſurdum, quod eam ob cauſam majora omnia videri ait, quoniam ex diverſis rei viſæ punctis venientes radii decuſſentur in exteriori convexa tubi ſuperficie, qui tu-

tubo non adhibito ad pupillam oculi decussarentur; quoniam enim si plana aut concava esset loco convexæ superficiei nihilominus decussatio similis ibi contingeret, efficietur æquè etiam inverso tubo majora omnia conspici debere. Quod iis quæ superius demonstrata fuerunt atque ipsi adeo experientiæ adversatur.

Propositio XLVI.



Dispositis, in linea recta oculum & visibile jungente, lentibus aut superficiebus quotvis & quibuslibet, communem axem habentibus eandem lineam rectam, percipiet oculus post omnium refractiones aliquam visibilis partem, etiamsi veluti ad punctum reductus fuerit, dummodo hoc punctum non sit, quo post refractionem concurrunt radii a puncto visibilis quod in axe est egressi.

Sit recta F E axis communis in quo oculus ad A punctum, lentes ad B & C. Inveniatur porro ex prop. xx. punctum F ad quod pertinentes radii ut G F flectantur refractione lentis B per H A ad punctum oculi A. Itemque inveniatur punctum D, ad quod pertinentes radii ut D G flectantur refractione lentis C in G F; ut pertineant ad punctum F, atque ita porro si plures fuerint lentes superficiesve. Potest autem infinitè distare punctum F vel D, quibus casibus axi paralleli fiunt radii G F vel D G. Quod

Quod si jam visibile ad punctum D positum esset, apparet oculum fore in puncto concursus radiorum e puncto D venientium, eoque unum hoc visibilis punctum tantummodo infinitè tunc expansum cerni. Ponimus autem hic oculum esse extra hoc concursus punctum. Ergo punctum D cadit vel ultra vel citra locum rei visibilis, quæ nempe sit in E vel K.

Quoniam igitur ita duci potest FHG ut quamlibet exigui fiant anguli singuli GFC, GDC, seu EDN, apparet effici posse, ut rectæ FHG, GDN non extra lentes B, C aberrent. Harum vero postrema GDN, necessario partem aliquam rectarum EM vel KL axi perpendicularium intercipiet, velut NE vel KO, quas oculus comprehendet angulo BAH. Itaque aliquam visibilis partem cernet, quod erat dem.

Quod si infinitè distet punctum D, tunc DG axi parallela intercipiet rursus partem rectarum EM vel KL. Si vero F infinite distat fit FG axi parallela, nec id quicquam in demonstratione mutat.

PROPOSITIO XLVII.

Si inter oculum & rem visam quotlibet lentes aut superficies diaphani interjaceant, & a puncto rei visæ quod sit in omnium axe communi manantes radii, trajectis iisdem lentibus aut superficiebus paralleli exeant; quocunque intervallo post ipsas oculus statuatur, eadem apparebit rei visæ magnitudo; idemque positus.

Sit axis communis quotlibet lentium vel superficierum sphæricarum ABC, res visa linea AF, axi ABC perpendicularis in qua punctum F tam propinquum sit ipsi A, ut oculo in K aut C, quibuslibet nempe duobus axis punctis, collocato & ad punctum redacto, in conſpectum venire poſſit: hoc enim poſſibile eſſe ex prop. antecedente conſtat. Dico utroque oculi poſitu, eadem magnitudine apparituram lineam AF. Quum enim a puncto A manantes radii, trajectis interpoſitis diaphanis inter ſe fiant paralleli; etiam ab F puncto egreſſi inter ſe paralleli exibunt*; quorum DC ad oculum in C poſitum pergat, LK ad oculum poſitum in K. Quia igitur inter ſe paralleli ſunt radii DC, LK, æquales erunt anguli BKL, BCD, atqui oculo in K ſpectatur recta AF angulo BKL, oculo vero in C ſpectatur eadem AF angulo BCD. Ergo utrobique æquali angulo, ideoque pari magnitudine. Sed & ad eandem axis partem cadere apparet rectas CD, KL, cum ex punctis C, K parallelæ exeant. Ergo ſive ex C ſive ex K idem poſitus percipietur lineæ AF. Quæ erant dem.

* Per Prop. XXI.

DE

DE TELESCOPIIS.

Primum ac præcipuum eorum, quæ in hac refractionum doctrina tractantur, Telescopiorum est ratio; magni inprimis inventi, cujus præstantiam pro dignitate nemo satis deprædicaverit. Ut enim utilitates cœteras prætercam, de quibus postea dicetur, quantum hoc est in cœlestium contemplatione ad ea viam aperuisse, quæ nulla alia ratione investigari poterant: Unde & rerum naturæ mirabilia multa patuerunt, & totius denique mundi constitutio, ut qua regione tellus hæc nostra, nosque qui eam incolimus positi simus, multò quam ante certius, compertum comprobatumque sit. Qua cognitione nihil mihi majus meliusve hominum solertia perfectum esse videtur. Quod si quis tanta industria exstitisset, ut ex naturæ principiis & Geometriæ hanc rem eruere potuisset, eum ego supra mortalium sortem ingenio valuisse dicendum crederem. Sed hoc tam longe abest, ut fortuito reperti artificii rationem non adhuc satis explicare potuerint Viri doctissimi.

Sunt qui inventionis, sed, uti dixi, fortuitæ, primæ laudem Jacobo Metio Batavo Alcmariæ civi tribuant. Mihi vero certo compertum est ante ipsum telescopia fabricasse Artificem quendam Medioburgensem apud Selandos circa annum hujus sæculi nonum, sive is, fuerit cujus Sirturus meminit, Joh. Lippersheim nomine, sive cui Borellus in libello de vero Telescopii repertore primas defert, Zacharias. Hi tunc non majores sesquipedalibus tubos factitabant. Utroque vero multo prior rudimenta artis tradiderat Joh. Bapt. Porta Neapolitanus, cujus exstant de rebus Dioptricis, & Magia Naturali libri, totis 15. annis ante editi quam in Belgio noſtro teleſcopia exorirentur. In quibus libris de ſpecillis (ut vocat) ſuis memorat res procul poſitas quaſi propinquæ eſſent oſtendentibus, deque conjunctione cavarum & convexarum lentium. Nihil tamen magnopere eum profeciſſe, hoc ipſum probat, quod tanto tempore ars jam cœpta non ultra inclaruit, neque ipſe Porta quidquam in cœlo obſervavit eorum quæ poſtea apparuerunt. Hoc inde eſt quod caſui, fortuitiſque experimentis originem inventi deberi conſtat. Neque enim hic vir licet Mathematicarum aliquatenus gnarus reconditas rationes, quibus ars ea pro fundamentis utitur, comprehenderat, ut meditatione eam eruere poſſet, multoque minus illi, quos ante memoravi, homines opifices ac ſcientiarum rudes. Fortuna vero & caſu eodem perventum nihil mirum eſt, cum frequens uſus eſſet, jam a trecentis atque amplius annis utriuſque generis lentium, quibus ſeorſim adhibitis vitia oculorum emendantur. Ut potius mirandum ſit tamdiu rem obviam latuiſſe.

Cœterum ut primum Teleſcopiorum Belgicorum fama ſparſa erat continuò Galileus ſimilia illis, ac brevi multo præſtantiora effecit, quibus celeberrima illa cœli phænomena omnium primus intuitus eſt: Lunæ montes valleſque, Solis maculas & ex his converſionem ejus in ſemetipſum, Planetas Jovis comites, Phaſes Veneris quales Lunæ, variaſque ad aſpectum magnitudines; Viam lacteam minutis ſtellulis refertam, unde candoris cauſa; Differentiam ſtellarum inerrantium inter & planetarum diametros, atque illarum numerum antiquitus cognito multo majorem. Idem Galileus Saturni quoque phænomena obſervaverat, quà licebat in illa perſpicillorum ſuorum parvitate, veras autem planetæ
ſi-

figuras adſecutus non erat, ſed neque quiſquam alius multis poſt ipſum annis. Etſi enim magnitudine multum creverant tubi, parum tamen virtute & efficacia proceſſerant. Nos autem magis auſpicato rem eandem aggreſſi, cum quæ ad refractiones radiorum attinent jam perſpecta haberemus, ipſique nobis lentes effeciſſemus ac teleſcopia pedes viginti & amplius longa, his Saturni formas non ante viſas deprehendimus, cauſamque earum annulum globo circundatum nullo in cœteris planetis exemplo. Item comitem Saturno planetam exiguum reperimus dierum ſexdecim periodo circumeuntem, quæ omnia ante annos 26. libro ſingulari conſcripta edidimus. Noſtris autem obſervationibus excitati Aſtronomi atque artifices majora ſubinde teleſcopia paraverunt, in quibus optima, quæ a Joſepho Campano Romæ fabricata. Quorum opera feliciter decennio poſt, duos alios præter noſtrum illum Comites apud Saturnum reperit Dom. Caſſinus. Idemque in Jovis ac Martis ſideribus maculas quaſdam obſervavit, ex quarum motu etiam globorum, quibus inerant, converſiones certis periodis definivit.

Et hactenus quidem adhuc proceſſit nobile hoc artificium, hæcque ſumma eſt eorum quæ de rebus cœleſtibus terrarum incolis revelavit. Quæ magna ac præclara eſſe quis niſi plane ſtupidus non agnoſcit? Quanta vero ad naturæ contemplationem lux hinc exorta ſit, quis non Philoſophiæ ſtudiis initiatus intelligit? Certe gratari ſæculo huic noſtro poſſumus propter tantarum rerum nunc demum acquiſitam ſcientiam: quam quo non pretio redemiſſent Viri illi eximii, non longo annorum intervallo hinc excluſi Copernicus, Regio-montanus, Braheus. Veteres autem illi ſapientiæ cultores Pythagoras, Democritus, Anaxagoras, Philolaus, Plato, Hipparchus, quas non exteras terras peregrinando pervagati essent hujusmodi naturæ secretorum noscendi amore, utque talibus frui possent spectaculis. Fortasse autem & alia plura ac nova præter ea quæ diximus propediem exspectanda sunt, postquam nupero invento nostro ingens incommodum ex nimia tuborum mole ac pondere ortum, atque adeo ipsos tubos sustulimus, ut nihilo difficilius nunc centenum vel ducentorum pedum telescopia quam antea decempedalia tractentur. Utique cum & expoliendarum amplissimarum lentium artem plures jam excolere cœperint, cujus Nos quoque studium longo tempore intermissum repetiimus, nec pœnitendo successu. Sed jam ad causas proprietatesque factitii hujus oculi pergamus, quas non satis feliciter hactenus expositas habemus.

Quod enim hic præ cœteris requirebatur, ut data lentium forma ac positu ex his modus mensuraque amplificandæ rei visæ definiretur, id hactenus præstitum non est. Nam neque Keplerus hoc docuit, etsi multa laude dignus ob ea quæ in Dioptricis primus explicuit; Neque illo felicior fuit Cartesius, imo ut vere dicam a via potius aberravit in his, quæ de ratione & effectu telescopii demonstranda susceperat. Quod vix credibile de tanto Viro, tamque in his rebus versato, tamen dicendum fuit, ne quis frustra ea intelligere laboret, e quibus nulla sana sententia elici potest. Cum vero alii multi post eum in eodem argumento operam insumserint, nihilo magis tamen idem Problema quod in his omnium præcipuum est absolverunt. Ab eo nunc nos ordiemur idque in singulis telescopiorum generibus expediemus.

Ostendimus autem in superioribus in universum data forma & positu duarum quarumlibet lentium, itemque oculi loco, quomodo augmenti ratio cognoſcatur. At quia nunc illos tantum caſus quos Teleſcopia requirunt exequi volumus, brevius idem conficiemus. Ac primum quidem in illo teleſcopiorum genere quod e convexa & cava lente componitur, omniumque primum fuit inventum. Requirunt vero primo eam lentium poſitionem teleſcopia omnia, ut diſtincta viſio ſequatur. Ut vero auctiora referant quæ ſpectantur, neceſſe eſt in his quæ duabus lentibus conſtituuntur, ut exterior convexa ſit, ejus vero quæ eſt oculo propior e minori ſphæra ſit ſive convexitas ſive cavitas.

PROPOSITIO XLVIII.

Teleſcopium ex convexa & cava lente compoſitum viſibilia longinqua, diſtinctè ac recto ſitu videri facit, amplificatque ſecundum rationem foci diſtantiæ lentis convexæ ad diſtantiam puncti diſperſus lentis cavæ.

Sit utriuſque lentis axis communis AO; lens vero exterior convexa A, cujus punctum concurſus radiorum parallelorum a viſibili longè remoto venientium, ponatur O punctum. Cava autem ſit D, quæ ſic collocetur inter lentem A & focum ejus O, ut punctum diſperſus radiorum parallelorum a parte ea, ubi eſt O, in ipſam incidentium, cadat in idem punctum O. Et huic lenti proximus primo ſtatuatur ſpectantis oculus.

Radii igitur a puncto rei longinquæ egreſſi cenſentur paralleli incidere in lentem A, ii quidem qui ex puncto in axe producto procedunt cogerentur ad punctum O; ſed rurſus paralleli evadent opera lentis D, ita, ut dictum eſt, collocatæ, uti ex ſupra demonſtratis conſtat. Parallelos enim radios ad oculum pervenire volumus, ut

bona

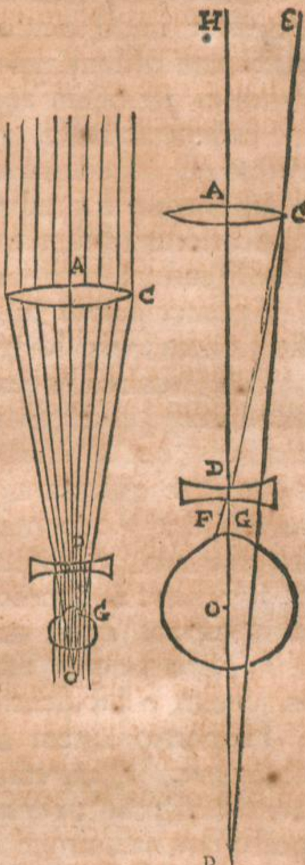
bona oculi constitutione fruentibus telescopium aptetur; Nam de Myope dicemus postea. Similiter vero a punctis longinquis extra axem positis manantes colligerentur quique ad puncta sua prope O, sed & hi lentis D refractione evadent denuo paralleli quamvis ad axem A D obliqui, secundum prop. XXI. quos radios tamen in figura non expressimus, vitandæ confusionis gratia.

Jam ex demonstratis prop. XXXV. patet eandem fore amplificationem & positum manente lente utraque, atque cum loco lentis D foramen exiguum statuetur; tunc vero magnitudinis apparentis ad veram ea est ratio, quæ A O ad O D, ut ostensum prop. XXXVI. Et ex eadem visibile erectum spectatur. Ergo eadem hic fiunt telescopio ex lentibus A, D composito. Quod si vero retrocedat oculus ab lente D, eadem remanet rei visæ magnitudo apparens ex prop. XLVII. nec vera mutatur, quia visibile longinquum ponitur. Ergo eadem quæ prius manet amplificatio. Sed & positus idem ex eadem prop.

Quod si Myopi aptandum sit hujusmodi telescopium, paulo propius admovendam esse constat lenti A lentem ocularem D, unaque oculum spectatoris; quoniam sic fiet ut non jam paralleli ut antea radii perveniant ad oculum, sed divergentes. Hinc vero paulo minus augmentum continget Myopi quam prius, cum punctum O maneat, eoque intervallum D O crescat, ratio vero augmenti sit semper ea quæ AO ad OD.

Et hæc quidem primarii theorematis brevissima est demonstratio. Cujus partem eam quæ ad amplificationem

nem rei visæ attinet aliter quoque demonstrabimus, ut nihil opus sit prop. XXXVI. Positis igitur ut ante lentibus AC & D & puncto O, fiat duabus DO, DA, tertia proportionalis DP, ponenda in eandem partem ac DO. Jam radii quilibet ad punctum P tendentes ut ECP & a lente AC refracti, cogentur ad punctum D lentis hic positæ centrum ex prop. XX. Ponamus istum ECP radium esse unum ex iis qui a dextro lunæ latere egrediuntur, cum centrum Lunæ sit in producto axe DA. Et constat quidem hunc recta linea CDF ad oculi pupillam perventurum, quia per centrum lentis D transit, cujus mediæ crassitudo pro nulla habetur, & duæ ejus superficies ibidem pro parallelis. Diximus autem omnes a puncto illo lunæ procedentes inter se parallelos ad oculum deferri. Itaque sic omnes recipit oculus, ut radio CDF paralleli incedant; ac propterea punctum illud in lunæ latere videt eo loco quo tendit recta DC, quæ cum in eandem partem axis tendat, ad quam situm est punctum lunæ, unde radii advenere, apparet erectas exhiberi res visas. Porro angulus ADC definit semidiametrum lunæ telescopio auctæ. Sed angulus CPA est is quo nudo oculo iste semidiameter comprehenditur, quia radium ECP



a dextro lunæ latere exire diximus, radium vero HAP, a centro ejus, nam ſive e puncto P, ſive ex G luna ſpectetur nudo oculo eodem angulo apparet propter maximam diſtantiam. Itaque amplificatio contingit ſecundum rationem anguli ADC ad APC, quæ cenſetur hic eadem ac rectæ PA ad DA; Sed quia ex conſtructione eſt DO ad DA ut DA ad DP; Erit invertendo & componendo AO ad OD ut PA ad AD. Ergo jam amplificationis ratio eſt quæ AO ad OD; quod erat demonſtrandum.

Apparet autem hic nihil referre quantum ad amplificationem, quo loco poſt lentem oculus conſtituatur.

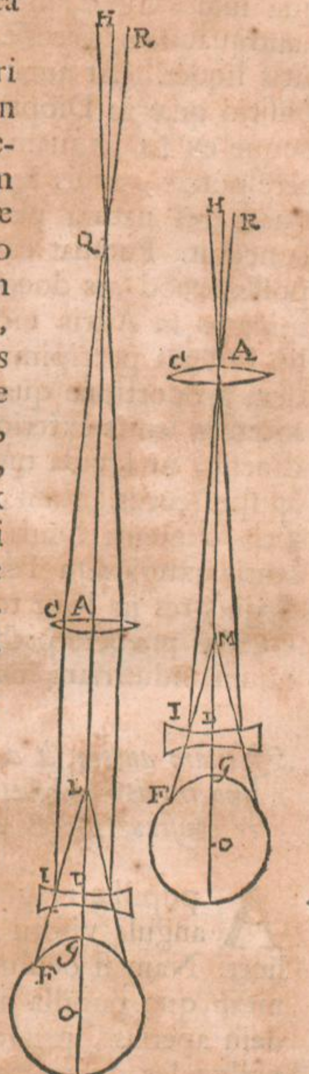
Ponantur rurſus lentes AC & D ut ante, & ſit AQ in axe earum producto æqualis AO. Accipiamus jam ex radiis iis, qui a puncto lateris dextri lunæ adveniunt radium RQC qui per Q punctum tranſiens (aliquis enim eo tranſibit) occurrat lenti AC in C. Is hinc parallelus fiet axi AD, & refractione altera lentis cavæ diverget ac ſi veniret a puncto L, & ad oculum feretur ſecundum rectam LIF, ut, nempe diſtantia LD ſit æqualis DO, quia tunc L eſt punctum diſperſus parallelorum in lentem D incidentium.

Proportio autem auctæ magnitudinis facilè jam hic colligitur. Quia enim radii a puncto in latere Lunæ dextro egreſſi perveniunt paralleli ad pupillam GF, poſtquam utramque lentem pervaſere, omneſque propterea paralleli fiunt radio LIF, quem conſtat eſſe eorum unum; percipietur illud lunæ punctum ſecundum rectam IL, ac proinde angulo ILD ſemidiameter lunæ comprehendetur. At vero angulus, quo ſemidiameter ſpectabitur oculo nudo ſive ex D ſive ex Q, eſt RQH, ſive CQA. Ergo ratio augmenti eſt ea quæ anguli DLI ad AQC, hoc eſt, quæ rectæ AQ ad LD, propter

æqua-

æquales AC, DI. Sed AQ eſt æqualis AO, & LD æqualis DO. Eſt ergo ratio augmenti ea quæ AO ad OD; quod erat oſtend.

Poteſt idem rurſus demonſtrari ex interſectione radiorum quæ in A centro lentis AC contingit, ſequendo nimirum radium RA unum in hac figura eorum qui ex lunæ dextro latere adveniunt, qui recto curſu lentem hanc penetrabit, cum pro nulla habeatur ejus craſſitudo, per prop. XXII. Deinde occurrens lenti cavæ in I ita ejus refractione diverget, ac ſi a puncto M exiret, quod invenitur ponendo duabus AO, AD tertiam prop. AM, ut conſtat ex prop. XX. Itaque rurſus hic radii qui a puncto in latere dextro lunæ adveniunt, quoniam, poſt utriuſque lentis refractionem, paralleli ad oculum feruntur, ut ſupra fuit animadverſum, debebunt omnes ipſi MIF paralleli ferri. Eoque punctum illud conſpici ſecundum rectam FIM. Unde jam intelligitur rationem amplificationis fore eam, quæ anguli DMI ad DAI ſeu HAR. Eſt autem ang. DMI ad DAI reciproce ut AD ad DM, hoc eſt, ut AO ad OD, quia proportionales factæ AO, AD, AM. Itaque rurſus conſtat propoſitum.

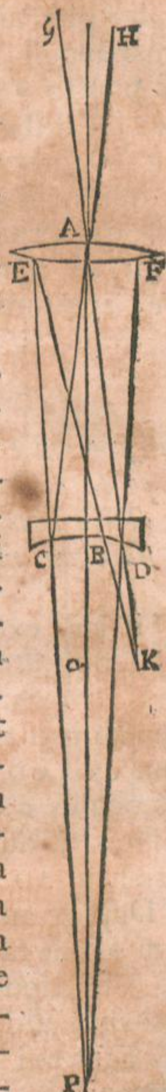


Hac via cauſas Teleſcopii melius inveſtigaſſet Carteſius, quam ex interſectione radiorum quæ fit in ſuperficie lentis exterioris, quâ interſectione ille utendum putabat, quod tamen haudquaquam neceſſe eſſe ex iis quæ hic oſtenſa ſunt ſatis liquet. At nunc multiplici errore laborat ejus expoſitio quæ in Dioptricis legitur, uti & ſchema ipſum, neque ex iis unquam proportionem amplificationis elicere potuit; cujus ignoratione majorem quoque multo quam rei natura patitur, de teleſcopii efficacia ſpem concepit. Putabat enim, ſi artificum induſtria præſtare poſſet quod ars docet, fore, ut res tam particulares & minutas in Aſtris videremus, quam ſunt eæ quas vulgo in terra percipimus. Cum tamen non neſciverit eadem proportione qua res viſæ amplificantur, etiam diametrum lentis exterioris ſuperare debere pupillæ latitudinem, ut lucida omnia teleſcopio æque ac nudo oculo ſpectentur. Nam, licet jam quarta parte hujus claritatis contenti ſimus, invenio tamen aperturam illam lentis exteriorem Terræ diametro majorem eſſe debere, ſi quis res in Jove tanquam 40. pedibus diſtantes ſpectandas præbere poſtulet: Ut appareat aliud quam manuum induſtriam hic requiri.

Quænam autem ſit amplitudo anguli viſorii ſeu ſpatii quod uno intuitu exhibet Teleſcopium ex convexa & cava lente conſtructum ſic definietur.

A pupillæ magnitudine præcipue pendet amplitudo anguli viſorii in hiſce teleſcopiis, idque experiri licet. Nam ſi oculum teleſcopio admotum claudas primum, quo pupilla multum dilatetur, ut in tenebris ſolet, dein aperias, primo intuitu latiori orbe viſibilia comprehendes quam paulo poſt, quia ſtatim contrahetur orbis ob arctatam fulgore lucis pupillam. Quod ſi lamellam

mellam cum exiguo foramine oculo opponas, minori etiam copia rerum visibilium frueris.



Veruntamen si minimum foramen efficias non pro ratione ejus exilitatis, orbis lucidus arctabitur, sed tunc apertura lentis convexæ amplitudinem ejus definit, quæ proinde non ultra certam quantitatem decrescet, nisi & lens convexa amplius coarctetur. Quorum ratio explicatu facilis est. Si enim lens convexa sit EF, cava B, cui applicita pupilla primò latitudinem habeat CD, ducanturque ab oppositis punctis C, D, quæ sunt in pupillæ circumferentia, rectæ CAH, DAG, per centrum lentis convexæ A transeuntes; hæ definient *angulum visorium* GAH, quo, quicquid rerum visibilium comprehenditur, uno obtutu conspicietur: quoniam per centrum lentis A radii a punctis G, H venientes absque inflexione penetrant ad C & D; ideoque aspectabilia intra angulum GAH comprehensa non possunt quin ad oculum radios emittant. Imo etiamsi pupilla pauxillo angustior sit quam DBC; nam ductâ GAK ut AK sit æqualis AO, junctaque EK: dummodo EK in pupillam incidat, cernetur visibile comprehensum angulo GAH; obscurè vero puncta extrema quo tendunt rectæ AG, AH, quia particula tantum radiorum quos in lentem EF mittunt, pupillam ingreditur. Atque hinc fit ut, quantumvis in angustum apertura lentis EF contrahatur, nihil aut minimum tantum diminuatur anguli visorii amplitudo; dummodo pupillæ orbis non coarctetur. Diminuta autem hac pupillæ latitudine, atque ad unum velut punctum redacta, anguli visorii amplitudo fit ea quæ anguli E P F: posita E F apertura lentis convexæ, & puncto P invento, ut in prop. XXXVI, ut nempe BO (ea est distantia lentis cavæ a foco convexæ) BA, & BP sint proportionales. Nulli enim radii, per lentem A transmissi, ad punctum oculi B pervenire possunt, nisi qui priusquam in lentem illam inciderent tendebant ad punctum P. Eorum vero maximus angulus EPF apertura lentis A præfinitur.

PROPOSITIO XLIX.

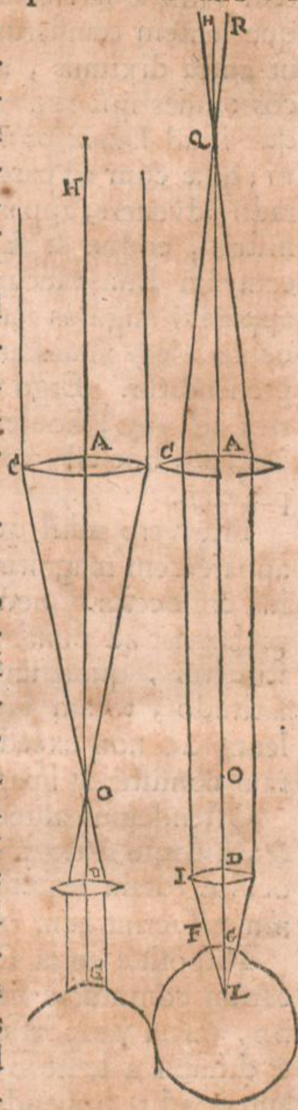
Telescopium e duabus convexis lentibus compositum procul posita distincte, sed eversa ostendit, amplificatque secundum rationem foci distantiæ lentis exterioris ad foci distantiam interioris.

Sit lens exterior convexa A C, interior D, axis communis utrique recta AD, Focus lentis AC sit O. Altera vero convexa D ita collocata intelligatur ut idem punctum O sit ipsi focus seu punctum concursus radiorum axi A D parallelorum qui venirent a parte ea ubi est oculus G. Ostendendum est his positis res longe dissitas distincte & eversas spectari & augeri secundum rationem AO ad OD.

Duplex autem rursus describenda est figura, in quarum altera radii extrinsecus venientes, axi HA paralleli, refractione lentis AC cogantur ad focum ejus O, atque inde ulterius tendentes ad lentem D, denuo paralleli fiant axi A D, atque ita ad oculum in G positum perveniant. Rursus etiam sicut superiori propositione

co-

cogitandum hunc parallelorum complexum ab uno rei procul dissitæ puncto venire, quod sit in axe HAD, velut a centro Lunæ, ab aliis vero punctis ejus similes manare radios parallelos in lentem AC, velut è latere Lunæ dextro, qui ad priores inclinentur, & hinc refracti cogantur ad punctum extra axem juxta O, ubi sese intersecantes, atque ad lentem D delati denuo paralleli evadant, inter se nempe, non autem axi AD, atque ita ad oculum perveniant. Hinc itaque constat visionem distinctam fieri.



Altera porro figura, situm visibilis eversum, & rationem augmenti ostendet. Ubi positis, ut ante, lentibus convexis AC & D, & inter ipsas foco utriusque communi O; sit porro, ut in secundâ demonstr. Telescopii superioris, Distantia AQ æqualis AO. Et reliqua quoque demonstratio ferè eodem modo procedet. Seligatur enim ex radiis qui e puncto in latere lunæ dextro adveniunt, radius RQC qui per punctum Q transit. Is refractione lentis AC ibit per CI parallelam AD, & rursus a lente D refractus tendet secundum rectam IFL ad punctum L, ita sumtum ut distantia DL sit æqualis DO. Quia autem

tem radii a latere lunæ dextro, postquam per utramque lentem transierunt, paralleli perveniunt ad oculum, ut antea diximus, eorum vero unus est IFL, sequitur eos omnes ipsi IFL parallelos in oculum incidere, eoque illud Lunæ punctum percipietur secundum rectam FI; quæ cum ad partem oppositam vergat ejus, unde hi radii advenere, apparet situm lunæ inverti, ut dextra sinistris, eoque & supera inferis mutentur. Porro cum centrum Lunæ secundum rectam DA conspiciatur, erit apparens angulus semidiametri lunæ ILD. Nudo autem oculo idem semidiameter angulo HQR seu AQC comprehenditur. Ergo ratio amplificationis est quæ anguli DLI ad AQC, hoc est quæ AQ ad DL, propter æquales AC, DI, hoc est, ea quæ AO ad OD; quare constat propositum.

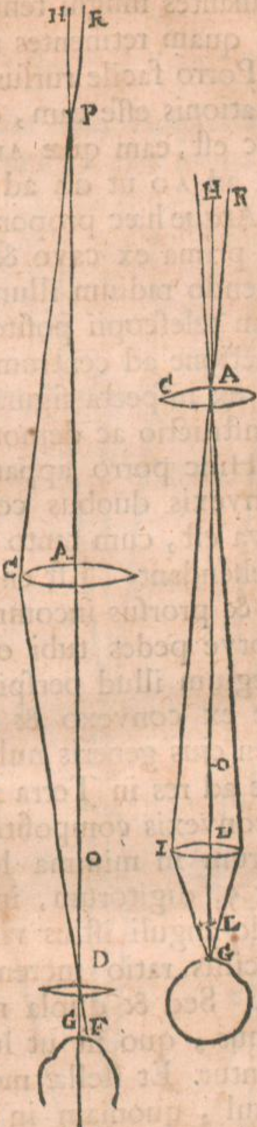
Hic vero nihil quoque referre apparet quantum ad apparentem magnitudinem quo loco post lentem D oculus collocetur. Sed ut multa uno intuitu oculus comprehendat ad punctum L vel prope ipsum optimè constituetur, quoniam apparet etiamsi minima sit pupillæ latitudo, totam tamen lentem D quatenus aperturam lentis AC non excedit, (solet autem intra hanc mensuram consistere) imaginibus plenam spectari.

Ostendemus autem sequenti demonstratione dari punctum paulo ultra L a lente D distans, ubi si collocetur oculus totam lentem D picturatam aspiciet, etiamsi minimæ fuerint tum pupillæ, tum lentis AC apertura.

Dispositis enim sicut ante lentibus AC, D, ut focus earum communis sit punctum O. Statuatur duabus AO, AD, tertia proportionalis AG. Unde punctum G ultra L distabit a lente D, cum DL, DO sint æquales. Erit autem ad G ponendus oculus, ut fiat quod dictum est.

Si enim, ut in tertia demonstratione telescopii ex con-

convexa & cava compositi, sequamur rursus radium R A unum eorum qui ex puncto in dextro rei visæ latere adveniunt, quique incidit in centrum lentis A C, is recta linea hanc penetrabit secundum prop. XXII. cum pro nulla habeatur ejus crassitudo. Deinde lenti D occurrens in I, cogetur hujus refractione ad punctum G, quod est pupillæ medium, propterea quod proportionales sunt AO, AD, AG. Itaque quicquid angulo DAI sive HAR oculo nudo comprehenditur spectabitur in lente D; adeo ut campi (ut vocant) amplitudo jam pendeat a latitudine lentis D, licet aperturæ lentis A & pupillæ sint veluti puncta: atque ita quoque omnino, si utraque magis pateat. Sciendum vero neque lentem D nimis amplam esse adhibendam, propter incommodum colorum ex nimia refractione, de quo in sequentibus dicetur; nec nimis arctandam aperturam lentis AC, ne obscuritas inducatur; certa autem mensura ejus alibi docebitur. Pupilla vero licet apposita lamellæ cum foramine, quantum acus facere potest, in angustum contrahatur, nihil fere lucis aufert quoniam coni radiosi a singulis rei visæ punctis



manantes insigni tenuitate sunt cum incidunt in lentem D, quam retinentes inde paralleli ad oculum pergunt,

Porro facile rursus hic intelligitur proportionem ampliationis esse eam, quæ anguli DGI ad HAR sive DAI, hoc est, eam quæ AD ad DG, sive quæ AO ad OD, quia DA ad AO ut GA ad AD.

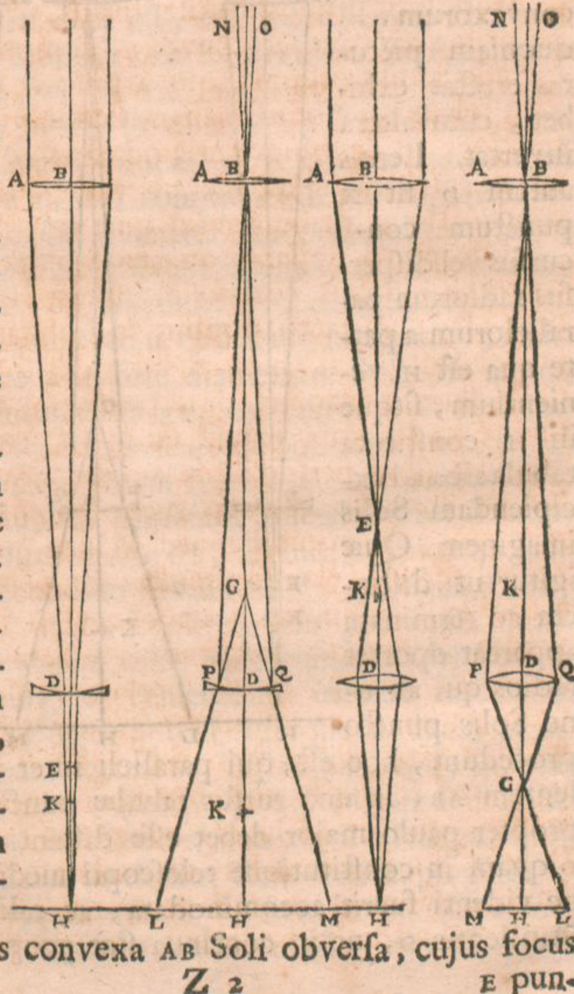
Atque hæc proportio aliter rursus, ut in demonstratione prima ex cavo & convexo, comprobari potest, sequendo radium illum, qui a puncto rei visæ extra axem telescopii posito manans deducitur lentis AC refractione ad centrum lentis ocularis D. Hoc enim patet ex inspecta figura hic adscripta, in qua eadem est constructio ac demonstratio quæ fuit illic.

Hinc porro apparet quanto præstent Telescopia ex convexis duobus composita iis quorum lens ocularis cava est, cum tanto amplius spatium uno intuitu comprehendant. Est enim angustia illa spectaculi injucunda & prorsus incommoda, præsertim si ultra tres quatuorve pedes tubi extendantur. Quare etsi Galilei egregium illud perspicillum ac tot novis repertis celebre ex convexo & cavo fuerit conjunctum, nunc tamen ejus generis nulla, nec ad siderum observationes, nec ad res in Terra spectandas adhibentur, sed tantum e convexis composita. Unicus vero usus cavoconvexorum in minima longitudine relictus est, 4. nempe aut 5. digitorum, in qua brevitate tolerabilis jam latitudo anguli istius visorii reperitur. In hujusmodi perspicillis ratio incrementi facienda est quadrupla circiter. Sed & dupla non majorem utiliter adhibere solemus; quo fit ut lucida etiam intra ædes omnia spectentur. Et stellæ melius quam oculo nudo, multæque simul, quoniam in tali perspicillo apertura exterioris lentis vel ad sesquipollicem patere potest.

PROPOSITIO L.

Constitutionem telescopii ad observandas Solis Eclipses maculasve demonstrare & quanta futura sit ejus imago.

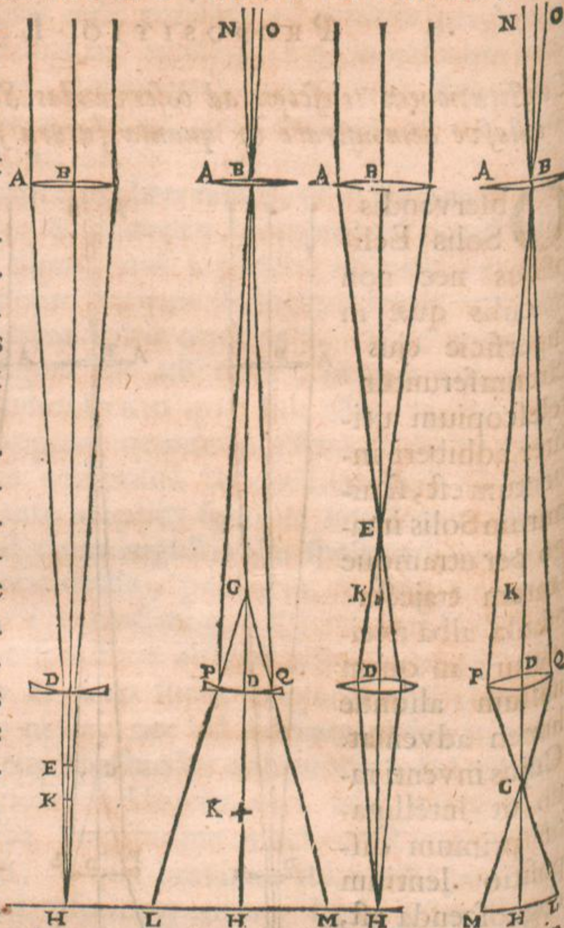
Observandis Solis Eclipsibus nec non maculis quæ in superficie ejus circumferuntur telescopium utiliter adhiberi inventum est, si nimirum Solis imago per utramque lentem trajecta tabulâ albâ excipiatur, in quam nullum aliunde lumen adveniat. Cujus inventi ratio ut intelligatur primum dispositio lentium cognoscenda est, quomodo nempe aptatæ picturam Solis quam nitidissimam efficiant.



Sit igitur lens convexa AB Soli obversa, cujus focus

 E pun-

E punctum. Altera vero in D concava vel convexa, nam utraque teleſcopii forma huic rei idonea eſt, & magis quidem quæ duorum eſt convexorum, quoniam picturas erectas exhibet, cum altera invertat. Lentis autem D ſit K punctum concurſus vel diſperſus radiorum parallelorum a parte qua eſt H venientium, ſitque in H conſtituta tabula alba ad excipiendam Solis imaginem. Quæ igitur ut diſtincta ac terminata appareat oportet radios qui ab uno Solis puncto



procedunt, hoc eſt, qui paralleli inter ſe deferuntur in lentem AB, in uno rurſus tabulæ puncto colligi. Quapropter paulo major debet eſſe diſtantia lentium AB & D quam in conſtitutione teleſcopii media, ſive quæ bene videnti fuerit accommodata; ac talis requiritur poſitio lentis D, ut in continua ſint proportione EK, ED,

EH.

EH. Sic enim fiet ut radii tendentes ad E focum lentis AB, deducantur ad punctum H. At in telescopii constitutione media congruere debet punctum K foco E, ut superius est ostensum. Adeo ut hic distantia lentium augenda sit intervallo EK, quod quidem tanto minus esse necesse est quanto distantia EH fuerit major; nam longitudo DK quæ data est, quippe distantia foci vel puncti dispersus lentis D, ea sic dividitur in E ut sicut HE ad ED ita sit hæc ad EK.

Quanta porro futura sit diameter picturæ Solis in tabula H sic definiemus: ducantur ex centro lentis AB ad lentem D rectæ BP, BQ comprehendentes angulum æqualem ei quo Solis diameter comprehenditur absque telescopio spectantibus; Et sit duabus, BK, BD tertia proportionalis BG, & jungantur GP, GQ, & producantur usque dum tabulæ ad H collocatæ occurrant in punctis L, M. Dico LM fore diametrum Solis in tabula LHM. Producantur enim PB, QB versus O & N. Itaque cum a puncto circumferentiæ Solis dextro radii ferantur ad superficiem totam lentis AB, qui omnes inter se & rectæ OB paralleli censentur, incedet unus istorum radiorum secundum lineam OB, idemque penetrata lente AB, perget secundum lineam BP *, quoniam B centrum est lentis, cujus crassitudinem pro nulla ducimus. Eadem ratione unus radiorum parallelorum e sinistro Solis margine venientium incedet secundum rectam NBQ. Porro autem uterque a lente D inflectetur ut pergant secundum rectas PL, QM, in quas productæ sunt GP, GQ per prop. XX. Quia scilicet in continua proportione sunt BK, BD, BG. Itaque manifestum est punctum in dextro Solis latere pingi in L, punctum vero oppositum in sinistro in M. Quatenus enim distincta totius Solis pictura existit, necesse est ubi

* Prop. XXII.

 unus

unus radiorum a quolibet ejus puncto venientium in tabula sistitur, ibi quoque cæteros colligi ab eodem puncto egressos. Ergo diameter picturæ uti diximus erit L M.

Sciendum vero, quo major erit imago Solis L M, lentibus A B & D iisdem manentibus, eo minus lucidam fore. Etenim si radii omnes a Sole in lentem A B descendentes, occupent rursus in tabula L H M spatium æque latum atque est lens A B, hoc est, si Solem depingant lenti A B, quatenus adaperta est, æqualem, erit hæc imago æque clara ac si nullis interpositis lentibus Sol tabulam illustraret; non habita videlicet ratione eorum radiorum quos lentes reflectunt, vel propter obscuritatem materiæ non transmittunt, quo forte dimidia pars omnium vel amplius intervertitur. Quod si vero major imago fuerit, ut in hujusmodi observationibus exigitur, jam tanto quoque erit obscurior. Experientia vero ostendet quænam amplitudo ad observationem utilissime adhibeatur, tentata alia atque alia tabulæ a telescopio distantia. Ubi illud observandum, ut aucta hac distantia simul tantillum minuatur ea quæ est inter lentes A B & D, ut distincta pictura efficiatur: cujus ratio ex ante dictis intelligitur.

Propositio LI.

Quomodo pro duabus convexis tria adhibendo amplior fiat telescopii prospectus, quo ad sidera spectanda utimur.

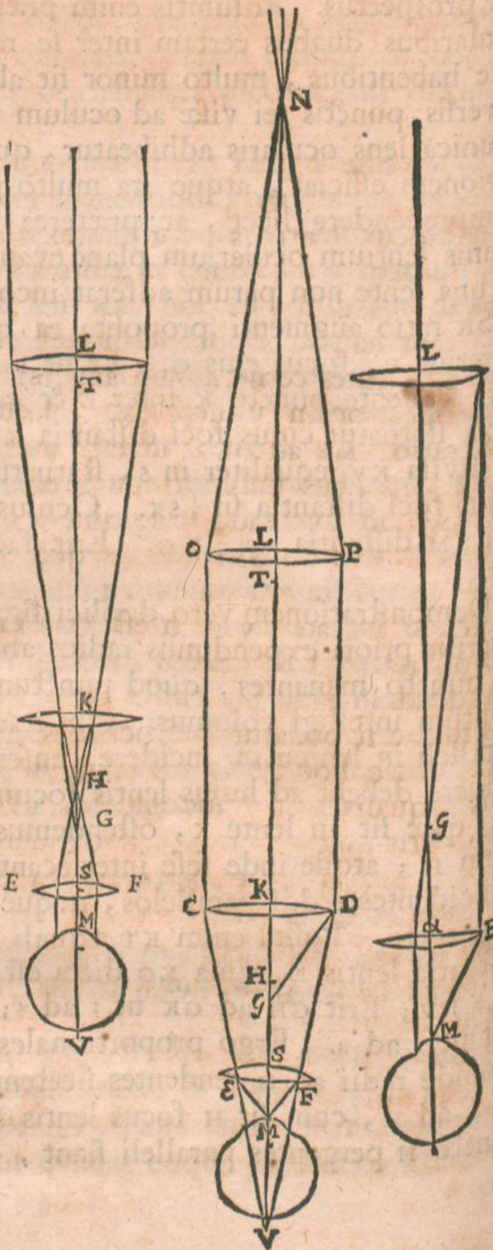
Quanquam lentes non frustra sint multiplicandæ, quod & vitri crassitudine & iteratis reflexionibus non parum lucis depereat; hanc tamen utilitatem præbere potest, ut latior evadat eoque jucundior Telescopii

pii proſpectus. Adſumtis enim præter magnam lentem ocularibus duabus certam inter ſe rationem diſtantiamque habentibus, multo minor fit aberratio radiorum a diverſis punctis rei viſæ ad oculum tendentium, quam ſi unica lens ocularis adhibeatur, quæ eandem amplificationem efficiat, atque ita multo plura unico intuitu comprehendere licet, ac præterea nævi ac impuritas omnis lentium ocularium planè evaneſcit; cum alioqui in una lente non parum adferat incommodi.

Sit ratio augmenti propoſita ea quæ P ad Q. Lens exterior L, focus ejus G. Et ut P ad Q ita ſit LG ad GK, cadente puncto K inter L & G. Et in K lens convexa ſtatuatur cujus foci diſtantia KV ſit tripla ad KG, & diviſa KV æqualiter in S, ſtatuatur ibi lens altera EF cujus foci diſtantia ſit $\frac{1}{2}$ SK. Oculus vero ſit in M, poſita SM diſtantia 2|2 $\frac{1}{2}$ KG. Erit factum quod quæritur.

Demonſtrationem vero duplici figura explicamus. In quarum priori expendimus radios ab uno aliquo rei viſæ puncto manantes, quod punctum in axe teleſcopii poſitum intelligi volumus. Qui itaque radii velut axi paralleli in lentem L incidere cenſentur. Unde porro tendere debent ad hujus lentis focum G. Sed refractione, quæ fit in lente K, oſtendemus eos mitti ad punctum H; atque inde ſeſe interſecantes atque in lentem S incidentes reddi parallelos, itaque ad oculi pupillam M pergere. Poſitâ enim KT æquali KV, quæ erat foci diſtantia lentis K, quia KG dicta eſt eſſe $\frac{1}{3}$ KV; KH vero $\frac{1}{4}$ KV; Erit GH ad GK ut 1 ad 4; ſed & GK ad GT erit ut 1 ad 4. Ergo proportionales GH, GK, GT, ac proinde radii ad G tendentes flectentur refractione lentis K ad H, cum ſit H focus lentis S, faciet hæc ut a puncto H pergentes paralleli fiant, qui proinde oculo ad M occurrentes distinctam visionem efficient, quod unum est eorum quæ demonstrare oportebat.

Jam in altera figura ratio amplificationis eadem datæ ostendetur & amplitudo anguli visorii. Ponatur enim LN in producto axe æqualis foci distantiæ LG. Et a punctis longinquis venientes radii expendantur per punctum N trans euntes atque in lentem L extremam utrimque incidentes, qui sint NO, NP, quos constat refractione ejus effici axi parallelos, atque ita incedant per OC, PD, donec incidant in lentem K. Unde porro



ro ſcimus perrecturos rectis CV, DV ad punctum V, ſed a lente S interceptos ajo detorqueri ad punctum M, ubi oculi pupilla poſita fuit. Quia enim SV eſt $\frac{1}{2}$ KV; & SM 2|2 $\frac{1}{2}$ KG, hoc eſt 2|2 $\frac{1}{6}$ KV; erit SM ad SV ut 1 ad 3, ac proinde VM ad VS ut 2 ad 3. Sed & VS ad VH eſt ut 2 ad 3. Ergo proportionales VM, VS, VH & quia H eſt focus lentis S, conſtat ex propoſ. XX. radios ad V tendentes ita frangi a lente S ut tendant ad punctum M. A punctis igitur E & F, in quibus rectæ CV, DV ſecant lentem S, ducantur rectæ EM, FM. Sic viſibile per lentes cernetur ſub ang. EMF qui ad ONP habet proportionem, ut LG ad KG, id eſt, ut P ad Q. Quia enim ratio EMF ad ONP, id eſt, EMS ad ONL componitur ex rationibus EMS, ad EVS, & EVS ad ONL; ratio vero EMS ad EVS eadem eſt, quæ VS ad MS ſive $\frac{1}{2}$ KG, item ratio EVS ad ONL eadem quæ NL ſive LG ad KV ſive 2 VS. Erit ratio EMF ad ONP compoſita ex 2 VS ad KG, & LG ad 2 VS, id eſt, erit EMF ad ONP ita LG ad KG, ita P ad Q: quod erat dem.

Videndum jam num quid juvet, & an non idem effectus ſit, ac ſi ponatur ſola ocularis α, cujus foci diſtantia Gα 2|2 KG hoc eſt 2|2 $\frac{1}{3}$ KV; quum angulus αMβ ſit futurus æqualis KGD, hoc eſt, SMF; nam KD 2|2 2 SF. Reſp. Erit quidem amplificatio eadem utrobique. Sed lens S majorem feret aperturam quam dimidiam lentis α, tum quia lentis S foci diſtantia eſt $\frac{1}{4}$ KV, eoque major quam $\frac{1}{2}$ foci diſtantiæ lentis α, quæ eſt $\frac{1}{3}$ KV; tum quia radius DF convergens minus colorabitur in tranſitu per lentem S, quam ſi axi parallelus incederet. Sed in D jam aliquem colorem traxit, ſed parum, quia lentis K foci diſtantia eſt KV.

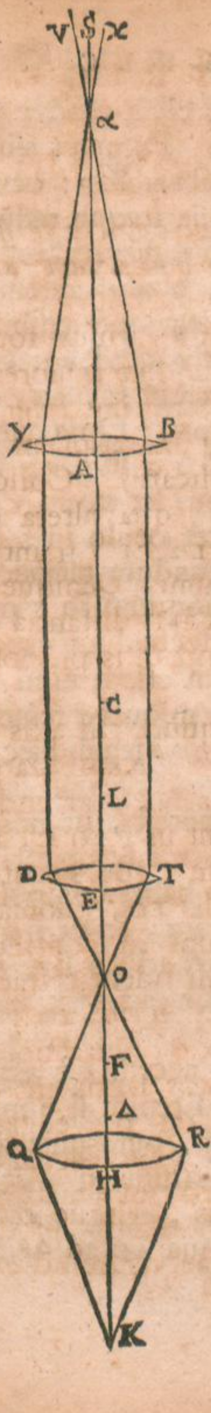
PROPOSITIO LII.

Tribus convexis lentibus distincta & erecta spectare visibilia longinqua & majora secundum datam rationem.

Accipiatur lens major A B, cujus foci distantia sit A C. Deinde vero aliæ duæ minores D T, & Q R, quarum foci distantiæ E L, H F sint inter se æquales & ad quarum utramuis habeat A C rationem eam secundum quam facienda est multiplicatio. Collocentur autem hoc pacto ut distantia C E, qua altera earum abest a foco lentis A, sit dupla E L: Et E H intervallum inter utramque ejusdem E L triplum. Denique ad K punctum constituatur oculus, sumtâ H K distantia ductæ E L vel F H dupla. Quibus sic comparatis propositum dico absolvi.

Sit enim visibile longinquum cui axis lentium communis occurrat in puncto S. Radii itaque ex puncto S ad lentem A B delati ut S B, S Y, habendi sunt pro parallelis, ideoque convenient in foco C, ibique erit eorum intersectio. Est autem L focus lentis D E, & C L subdupla C E, & E F æqualis E C, quoniam E H est tripla F H seu L C; Ergo erunt in continua proportione C L, C E, C F. Quare radii iidem refracti in lente D T ad M & Z denuo convenient in puncto F, * atque inde occurrentes lenti Q R in I & G, refractione ejus efficientur paralleli, quia F est focus lentis H G. Paralleli itaque secundum rectas I P, G N perveniunt ad pupillam oculi quæ est in K, eoque visio fiet distincta. Posuimus autem oculum hoc loco, ut unico intuitu plura simul conspiceret: cujus ratio est, quod si a foco lentis A B intelligantur radii pervenire ad extremas margines

*Prop. XX.



nes lentis A, velut αB, αY, hi per geminam in lentibus A & E refractionem, cum axe convenient poſt lentem in puncto O, quod erit in foco lentis E, quia axi parallelæ ſunt. Itaque OF æqualis erit FH, & HK dupla ad FH, ſicut ſumendam diximus. Punctumque K erit illud quo convenient radii DO, TO, poſtquam tranſierint lentem QR; ac lens tota H duplam habens latitudinem lentis E, imaginibus lucida apparebit, omniaque ſpectanda præbebit quæ angulo BαY ſive VαX comprehenduntur.

Porro erectum ſpectari viſibile ad S poſitum, facile apparet ex ipſis radiorum flexionibus; Si enim oculus ad K puncti inſtar conſideretur, flexiones iſtæ ſunt KQTBαV, KRDYαX, ex quibus manifeſtum fit punctum viſibile V ſpectari in Q, & X in R, ſingula nimirum ad eandem quam obtinent axis partem.

Denique quod ratio incrementi continget ea, quæ est AC ad CL, vel LE vel FH, ostendetur hoc modo. Putemus visibile collocari in K, inque eo notari puncta N & P: oculus autem intelligatur in puncto S. Quia itaque radius ab N puncto fluens perveniet ad oculum S per rectam BS; & qui a puncto P, per rectam YS, oculus autem in longinqua positus est distantia; sequitur ipsi visibile PN auctum videri secundum rationem YB ad PN, quia angulus YSB ad angulum quem facerent SP, SN, eandem rationem habebit quam YB ad PN. Quia autem YB ad MZ ut AC ad CE; MZ vero ad IG sive PN sicut EF, sive ipsa EC, ad FH. Erit igitur ex æquo YB ad PN ut AC ad FH sive EL. Itaque patet oculo in S constituto visibile PN auctum videri secundum rationem AC ad EL, ac proinde & visibile longinquum in S positum, oculo in PN sive ad K translato secundum eandem rationem auctum spectabitur. * Quam etiam nihil mutari liquet etsi oculus a lente QR plus minusve removeatur, quod eædem maneant YB & PN. Atque hæc quidem erant demonstranda.

* per Prop. XL.

Hoc aliter demonstrari potest, ut non opus sit theoremate de transpositione oculi & objecti. Scilicet HKR ad SX sive AαY rationem habet compositam ex HKR ad HOR, id est, ex HO ad HK, & ex HOR sive EOD ad AαY, id est, ex Aα sive AC ad EO sive EL; quia vero HO æqualis HK, erit HKR ad SαX ita AC, ad EL. q. e. d.

Cæterum haudquaquam necesse est æqualiter convexas sumi lentes DT, QR. Etenim si e minori convexo adhibeatur alia pro lente QR, puta quæ foci distantiam habeat æqualem FΔ, ea tantum in Δ collocanda erit, manentibus reliquis ut prius, eritque ratio incrementi major priori, videlicet ea quæ AC ad ΔF. Quod si vero

pro

pro lente DT aliam quamvis convexam accipiamus, eamque ſic collocemus, ut coni radiorum MCZ, MFZ æquales ſint; hoc eſt, ut CE ſit dupla intervalli EL, quo diſtat a lente DT focus ſuus; nihil prorſus ratio incrementi immutabitur. Debet autem ita ſemper diſponi lens QR ut focus ejus incidat in punctum F.

Sciendum vero ea tantum gratia ex pluribus quam duabus lentibus teleſcopia hujuſmodi componi, ut latior fiat uno intuitu proſpectus, cum alioqui certum ſit ea quæ ex convexa & cava lente componuntur magis augere pro ſua longitudine res viſas, atque etiam diſtinctiores efficere, nulliſque colorum pigmentis infectas quod in hac lentium trium compoſitione ægre vitari poteſt. Veruntamen ſi a parte oculi alia adhuc lens vel duæ inſuper addantur evaneſcunt aliquatenus adventitii colores iſti, minuſque diſtortæ apparent rerum imagines, ac plures etiam uno obtutu comprehenduntur; nec longitudo teleſcopii propterea augetur, quoniam ita lentes collocantur, ut non plures quam duæ fiant radiorum interſectiones, ſicut in compoſitione trium. Alii vero aliter lentes oculares in his inter ſe conſociant, ſola experientia duce, quid optimum ſit quærentes. Nec ſane facile foret certa ratione aliquid circa hæc præcipere, quum colorum conſideratio ad geometriæ leges revocari nequeat, nec niſi difficile admodum illa quæ circa latera lentium ſæpe cernitur rectarum linearum incurvatio. Poſſem equidem, quæ ab aliis magno labore hic inveſtigata ſunt, proponendo, aliquot ejuſmodi perſpicillorum conſtructiones docere, ſed cum longè potiora exiſtimem, quæ in ſequentibus proferam, ubi non multiplicatione lentium ſed ſpeculi reflexione viſibilia eriguntur, non videtur diutius in his immorandum.

Ac possunt quidem binæ convexæ lentes parari tales, atque ita inter se componi, ut erecta referant visibilia longinqua; nec tamen quicquam boni inde obtinebitur, quod nec paralleli ad oculum tunc radii pervenire possunt qui e singulis rei visæ punctis emanant, neque eæ multum amplificari, nec magna copia simul conspici, præterquam qnod tubi longitudo sine utilitate multum producenda esset.

Tribus vero lentibus convexis & recto positu & distincta possunt videri, sed non tam lato campo quam quaternis, nisi lens oculo proprior duplam fere aperturæ diametrum habeat ejus quæ in similibus ocularibus requiritur, cum tria adhibentur, quod fieri nequit quin colores iridis circa margines existant.

PROPOSITIO LIII.

E Duabus convexis lentibus telescopium construere quo visibilia erecta spectentur ac magna copia simul uno intuitu comprehendatur.

Convexis duabus recte inter se atque ad oculum comparatis telescopium componi quo insignis visibilium amplitudo uno intuitu apparet propos. XLIX. dixi. Quod ad sidera contemplanda omnium est utilissimum, quia licet inversas rerum imagines referat, exiguum inde aut nullum incommodum nascitur. Sed interdiu ad conspiciendos homines turresve aut naves procul dissitas, situs eversio res agnosci non patitur, atque ideo plures convexæ lentes adhiberi solent, ut imaginem quam duæ invertunt aliæ denuo erigant, de quibus propos. præcedenti egimus. Quia vero hoc fieri nequit, quin simul insigniter augeatur tubi longitudo atque amittatur

tur multum de picturæ amplitudine, excogitavimus rationem hanc qua eversæ species in telescopio duorum convexorum erigantur adjecto ad oculum speculo exiguo, cujus positum locumque sequenti Schemate explicamus.

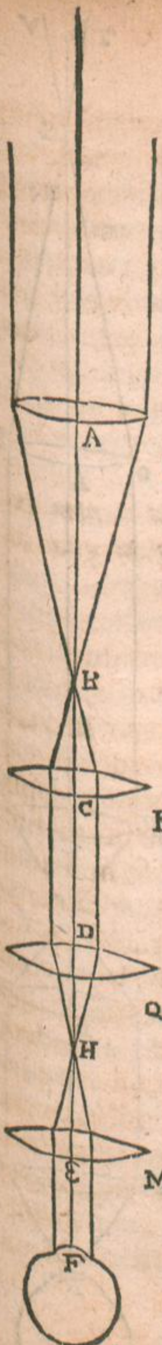
Esto lens AB exterior, CD vero quæ oculo propinquior est, e quibus compositum sit telescopium quale supra exhibitum fuit prop. XLIX. ubi dicimus recte sic collocari oculum in O, ut a lente CD distet circiter quantum focus ejus. Itaque inter lentem hanc punctumque O, ubi alioqui oculus statuendus foret, speculum planum FG interponimus, elliptica forma, longitudine pollicari, e metallo fusum atque accurate expolitum, (nam vitrea ab duplicem superficiem omnino ad hunc usum inepta sunt) anguloque inclinamus semirecto ad axem lentium, aut paulo etiam minore, atque ita tubo includimus, ut quam proxime illi admoveri possit oculus N; qui desuper per foramen, in tubi lamina excavatum, in speculum aciem dirigit, inclinato capite terram versus, atque ita visibilia ad quæ tubus dirigitur & erecta conspicit & eadem copia, ac si nullo interposito speculo, in O constitutus esset. Neque causa ignota esse potest ei qui in speculo planò radios in-

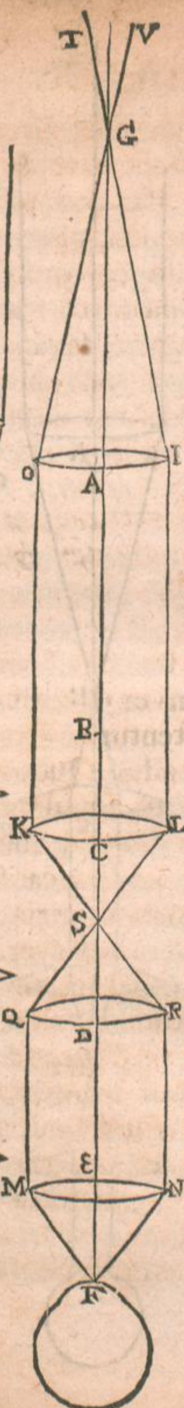
incidendo ac resiliendo æquales angulos facere noverit, quos radios uti hic feruntur in Schemate discernere licet; tum hos qui a medio rei visæ puncto venientes, paralleli incidunt in lentem AB ac denique etiam paralleli ad oculum N deferuntur; tum eos qui ab extremis punctis mittuntur, atque in media lente AB sese intersecantes, inde ad oculum pergunt secundum lineas ECFN, EDGN.

PROPOSITIO LIV.

Telescopii ex quatuor convexis compositi constructionem explicare, quo res visæ erectæ spectantur & magna copia.

Propter inversam positionem rei visæ vix aliter utimur composito e duobus convexis quam ad sidera, quæ non refert quo positu spectentur. Quænam vero tunc proportio servanda dictum est. Quomodo autem erigantur rursus imagines magnaque simul earum copia uno intuitu comprehendatur diversimode quæsitum fuit 3. 4. 5. & pluribus lentibus. Quæ sine causa non sunt multiplicandæ, quod & singularum materia & superficierum reflexiones radiorum partem intervertant. Paucioribus tamen quam quaternis optatum effectum consequi non licet. Etsi enim in eadem telescopii longitudine & situs erectus & eadem amplificatio, & eadem copia simul visorum obtineri potest tribus æquè ac quatuor lentibus, deterior tamen est trium compositio quam quaternarum, quia in illa, lentes oculares aut unam certe earum oculo proximam e majoribus superficiei sphæricæ portionibus constare necesse est ratione diametri aut foci distantiæ, si eadem anguli visorii magnitudo





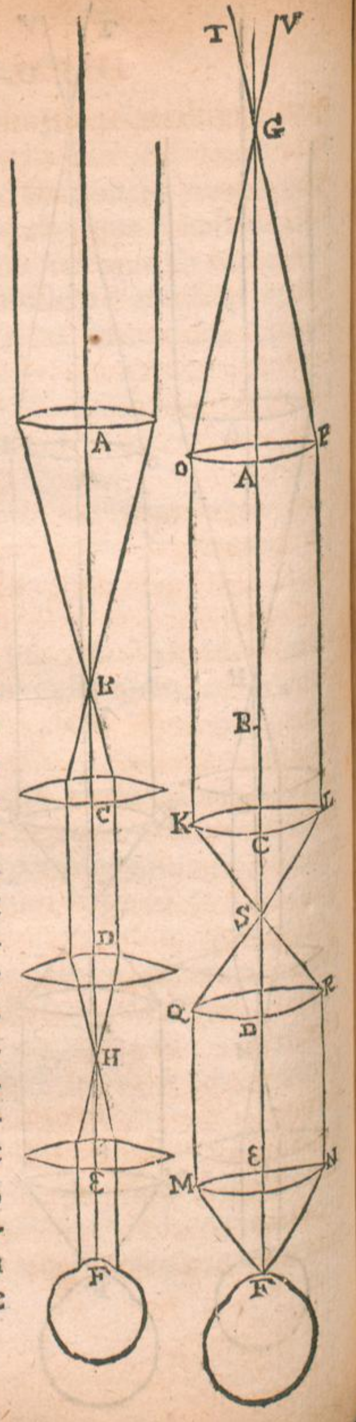
do præstanda sit. Hinc vero colore inficiuntur res visæ & lineæ rectæ circa aperturæ margines curvæ apparent.

Quaternis igitur utendum est, ex quibus telescopium hoc modo componitur.

Lens exterior est A, cujus foci distantia AB, in eodem vero axe positæ sunt lentes oculares tres C, D, E prorsus æquales inter se, quarumque interior intervallo B C quantum est sua foci distantia ultra focum B removetur, ejusque intervalli duplum est a lente C ad lentem D, ac tantundem ab hac ad lentem E, ac denique ab hac ad oculum F rursus, quantum inter B & C.

Rursus autem binis figuris hic opus est, in quarum priore radii ab uno puncto rei longe distantis manantes exhibentur, quos facile apparet, si quis præcedentia perceperit, primum tanquam parallelos incidere in lentem A, inde colligi in B foco ejus, ac inde divergentes in lentem C incidere, quæ denuo parallelos efficiat, mittatque ad lentem D, quæ congreget eos ad focum suum H, qui medium dividit intervallum DE. Tum denique ex H puncto ad lentem E tendentes ab ea tertiò parallelos reddi atque ita ad oculum F accidentes distinctam visionem efficere, cum in fundo ejus ad punctum unum cogantur.

In secunda figura consideratur ratio amplificationis, quæ est ea quæ AB foci distantiæ lentis exterioris, ad foci distantiam BC, unius ex ocularibus. Ac præterea anguli visorii amplitudo hic demonstratur. Positis enim ocularium trium aperturis æqualibus, quæ non majores sint apertura lentis exterioris A, ducantur MQ, NR axi communi parallelæ & aperturæ diametros lentium E & D comprehendentes. Itemque KO, LP eidem axi parallelæ & comprehendentes aperturam lentis KL, & posita AG æquali AB, ducantur rectæ OGV, PGT quæ sese intersecent in G. Jam patet latitudinem rei visæ longinquæ quæ oculo nudo ex puncto G, ideoque & ex F, cerneretur in angulo TGV, hanc oculo per telescopium intuenti, occupare angulum MFN, ideoque augmenti rationem esse eam quæ



quæ anguli MFN ad ang. TGV ſive PGO. hoc eſt, eam quæ intervalli AG ad intervallum EF, cum PO, MN ſint æquales; hoc eſt, eam quæ foci diſtantia AB ad foci diſtantiam BC; quod erat dem.

Apparet porro angulum viſorium MFN eandem quoque viſibilium latitudinem comprehendere ac teleſcopium quod binis lentibus A & C conſtaret, cum res viſa quæ angulo TGV intercipitur, in illo teleſcopio ſpectetur in angulo KSL ipſi MFN æquali.

Hæc egregia lentium compoſitio Romæ neſcio a quo primum fuit inventa, multum tamen adjuta annulo ſeu diaphragmate quod ad H, loco medio inter lentes ED, vel ad B focum communem lentium A & C inſeritur, cujus uſum non ante cognitum explicuimus in libro de cauſis phænomenon Saturni. Eſt vero longe præcipuus cum in metiendis Planetarum diametris ut ibi docui, tum ad alia de quibus agam in ſequentibus. In hiſce vero teleſcopiis circulum apparentium imaginum præciſo ambitu iſte annulus ideo circumſcribit, quod quæ circa H vel B collocantur diſtincte cernuntur oculo F, cum radii ab H vel B egreſſi paralleli ad eum deferantur, ſimul vero colores circa margines ejus opera reſecantur, qui non bene antea vitari poterant.

Ponenda autem apertura annuli ipſarum lentium ocularium aperturis paulo minor, diameterque ejus ad ocularium foci diſtantiam certa ratione referendus, quæ circiter ea eſt, quæ .... ad ...... docente nimirum experientia. Quænam vero ſit ponenda proportio foci diſtantiæ lentis exterioris ad foci diſtantiam ocularium quantaque apertura lucem admittere poſſit lens illa in ſequentibus definietur.

Mirum videtur in hoc teleſcopio colores iridis oriri plurium ocularium refractione, non magis quam cum

una ocularis adhibetur. Sed ratio hæc eſt quod lens QR corrigit & aufert colores quas lens KL produxit. Idem enim accidit radio OKRN per ſuperficies inclinatas ad K ac deinde ad R, tranſeunti, ac ſi per cuneos binos contrarie poſitos SS, TT tranſiret parallelis lateribus, qui colore non inficitur non magis quam ſi per laminam vitream incederet.

Lemma.

Angulos 30. gradus non excedentes proportionales cenſeri ſuis Sinibus.

Hoc jam ante ab aliis quoque Opticorum Scriptoribus aſſumtum fuit, quia exigua prorſus a vero eſt differentia.

PROPOSITIO LV.

Poſito angulo vitri ſolido 19. gradibus minore BAC *ſi duo radii in unum vitri punctum incidant, ita ut ſingulorum inclinatio ſit minor 29. gradibus in partem ab* A *puncto averſam, erit differentia inclinationum radiorum incidentium æqualis differentiæ inclinationum radiorum qui poſt refractionem e vitro exeunt.*

Si ſit angulus BAC, quo duo plana angulum ex vitro ſolidum complectentia inclinantur minor grad. 19. Sitque præterea in plano per ABC etiam recta linea DBV, quæ planum AB normaliter ſecet in B, & ad eam inclinentur radii EB, GB, angulis minoribus quam gr. 29. in partem ab A puncto averſam, quorum interior EB intra diaphanum feratur per BH, atque exeat in HK;

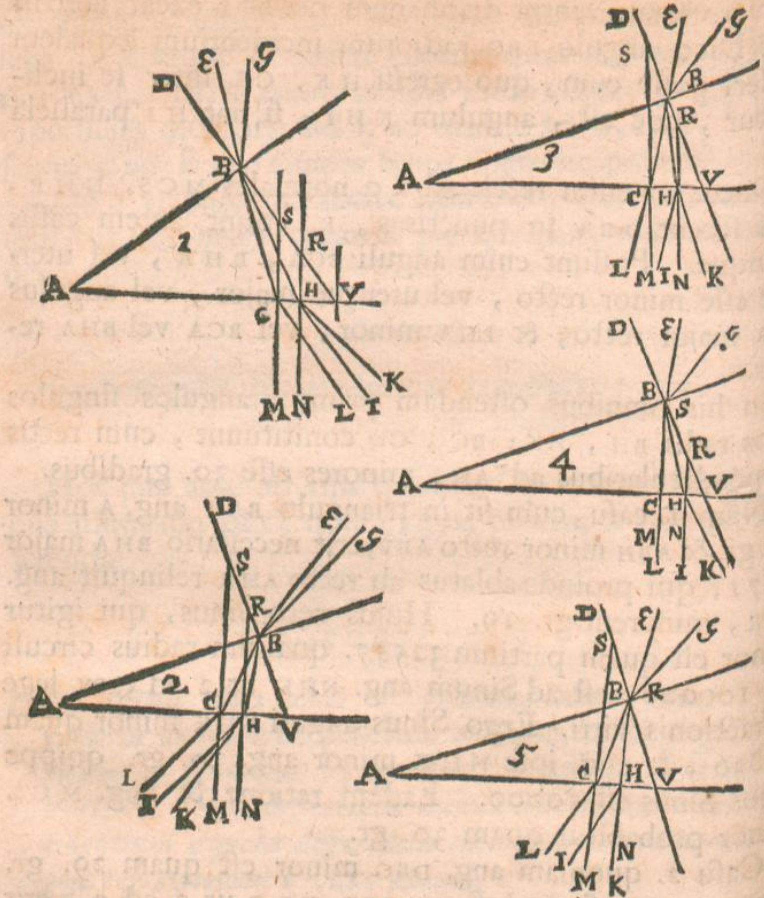
GB vero feratur intra diaphanum per BC, exeat vero in CL; Dico angulo EBG radiorum incidentium æqualem censeri posse eum, quo egressi HK, CL inter se inclinantur, hoc est, angulum KHI; si fiat HI parallela CL.

Ducantur enim rectæ ad AC normales MCS, NHR, quæ secent DBV in punctis S, R. Sunt autem casus quinque. Possunt enim anguli BCA, BHA, vel uterque esse minor recto, vel uterque major, vel angulus BCA major recto, & BHA minor, vel BCA vel BHA rectus.

In his omnibus ostendam primò, angulos singulos quos radii BH, HK; BC, CL constituunt, cum rectis perpendicularibus ad AH, minores esse 30. gradibus.

Nam 1. casu, cum sit in triangulo BAH ang. A minor 19. gr. & ABH minor recto ABV, erit necessario BHA major gr. 71, qui proinde ablatus ab recto AHR relinquit ang. BHR, minorem gr. 19. Hujus vero Sinus, qui igitur minor est quam partium 32557. qualium radius circuli est 100000, est ad Sinum ang. NHK ut 2 ad 3, ex lege refractionis vitri. Ergo Sinus anguli NHK minor quam 48836, & ang. ipse NHK minor ang. 30. gr. quippe cujus Sinus est 50000. Eadem ratione & ang. MCL minor probabitur quam 30. gr.

Casu 2. quoniam ang. DBG minor est quam 29. gr. Sinus vero ipsius ad sinum ang. VBC ut 3 ad 2, erit per lemma præc. angulus VBC minor gradibus $19\frac{1}{3}$. Sed ang. VBC æqualis est summæ ang. BSC & BCS, Ergo BCS omnino minor quam $19\frac{1}{3}$ gr. Et Sinus ejus minor quam partium 33107. Sicut autem 2 ad 3 ita sinus ang. BCS ad sinum ang. MCL minor quam partium 49661. & angulus ipse MCL minor itaque quam gr. 30. Eadem ratione ostendetur ang. NHK minor 30. gr.



Caſu 3. ang. NHK minor oſtendetur 30. gr. eodem modo quo in caſu primo; angulus vero MCL eodem modo atque in caſu ſecundo.

Quarto caſu, de ang. NHK demonſtratur eodem modo atque in caſu primo.

Item Quinto caſu de ang. MCL eodem modo atque in caſu ſecundo.

His

His ostensis sic procedet demonstratio. Omnibus casibus anguli DBG duabus tertiis æquari censendus angulus VBC, quia hæc est Sinuum ipsorum ratio. Itemque anguli DBE duabus tertiis angulus VBH. Ergo & anguli EBG duæ tertiæ censebitur angulus HBC. Rursus tribus casibus prioribus anguli MCL duabus tertiis æqualis censendus ang. SCB. itemque ang. NHK duabus tertiis æqualis ang. RHB. Quare & casu 1. & 2. duabus tertiis differentiæ angulorum MCL, NHK, quæ differentia est angulus KHI (nam HI parallelam duximus CL) æqualis censebitur differentia angulorum SCB, RHB. Casu 3. vero, duabus tertiis summæ angulorum MCL, NHK, quæ summa rursus est angulus KHI, æqualis censebitur summa angulorum SCB, RHB. Atqui hoc casu summam hanc facile apparet æquari angulo HBC. Casibus vero 1. & 2. differentiam eorundem angulorum SCB, RHB æquari eidem angulo HBC. Ergo his tribus casibus angulus HBC æqualis censendus duabus tertiis anguli KHI. Idem vero ang. HBC æqualis census fuit duabus tertiis anguli EBG. Ergo angulus KHI æqualis censendus ang. EBG, quod erat dem.

Casu vero 4, ubi ang. BCA est rectus, incidit CL in CM, & HI in HN; cumque angulus HBC sit æqualis censendus $\frac{2}{3}$ ang. EBG, ex ante demonstratis. Et angulus BHR qui æqualis HBC, æqualis censendus $\frac{2}{3}$ anguli IHK. Sequitur & hic æquales esse censendos angulos IHK, EBG.

Denique casu 5. ubi HK cadit in HN. apparet rursus angulum BCS æqualem censendum duabus tertiis ang. MCL seu KHI: idem vero BCS seu ipsi æqualis CBH census fuit duas tertias facere anguli EBG. Igitur apparet rursus æquales censendos angulos KHI, EBG. quæ supererant demonstranda.

Quod

Quod si radii EB, GB vel ipsis paralleli, incidant in ipsum velut angulum diaphani A, manifestum est ad eundem verticem A conventuros angulos duos æquales, quos bini incidentes radii ac bini refracti efficient.

Facile autem perspicitur quomodo idem hoc Theorema ad quamlibet refractionis proportionem accommodari possit.

Sciendum etiam, quia cum in sequentibus eo utemur, tam angulus BAC, quam cæteri quibus radii incidentes & refracti inclinantur ad rectas superficiei refringenti perpendiculares longe minores plerumque erunt iis quos hic definivimus; itemque anguli radiorum incidentium EBG semper exigui, eò propius ad horum perfectam æqualitatem accessuros angulos seu inclinationes radiorum e vitro egredientium, quia tanto propius angulorum ratio sinuum rationi respondet.

De Lentium Aperturis.

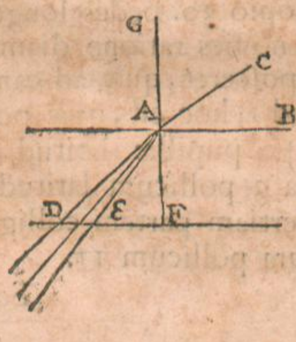
Cum ratio augmenti in duarum lentium telescopiis ea esse ostensa sit, quæ foci distantiæ lentis exterioris, ad ocularis foci distantiam; aut si hæc cava lens fuerit, ad distantiam puncti dispersus, videatur forsan quamvis brevi telescopio quantum libet aucta visibilia spectari posse. Sed duplex causa est quæ hoc impediat. Altera quod, manente eadem lentis exterioris apertura, quanto magis res visas amplificarit telescopium, adhibita oculari lente acutiori, tanto quoque obscuriores videri faciet. Altera quod & minus distinctas eas referet. Si vero augenda apertura remedium quæratur, eo magis augebitur confusio. Quæ ad lucem obscuritatemque attinent intelligentur si attendamus ad picturam illam rei visæ quæ in fundo oculi formatur; quæ quanto to major efficietur, ſive id refractione lentium fiat, ſive ſolum propius accedendo, tanto majore copia a ſingulis rei punctis radii intra oculum recipiendi ſunt, ut eadem claritas maneat. Si enim nudo oculo intuens duplo propius ad viſibile accedas, fit ejus pictura in fundo oculi duplo quam fuerat major ſecundum diametrum, quadruplo ſecundum aream. Sed & quadruplo plures radii pupillam ingrediuntur ab uno quoque ejus puncto manantes, quia coni radioſi angulus duplus fit. Itaque eadem lux picturæ in utraque diſtantia percipitur, idque ita natura comparatum eſt. Si vero teleſcopium parandum ſit decuplo augens viſibilia ratione diametri, quodque tam lucida omnia referat atque cum nudo viſu ſpectantur, debebit & in lente exteriori diameter aperturæ ad pupillæ diametrum decupla eſſe, etiamſi nec repercuſſu ſuperficierum utriuſque lentis, nec vitri colore pars nulla radiorum intercipietur. Sic enim cum rei viſæ ſuperficies centuplo augeatur, habebitur & lux centupla ejus quam nuda pupilla admittebat.

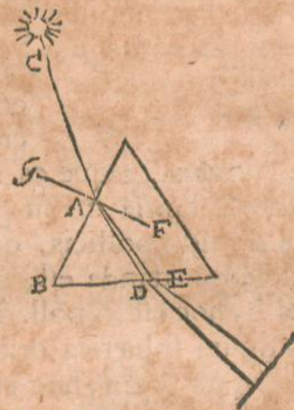
Sed multo minor lucis menſura teleſcopiis ſufficit. Nam quibus interdiu utimur, non nimis obſcura ſunt, ſi modo ſextam vel ſeptimam partem habeant claritatis quæ ſolet oculis percipi. Longiora vero, quibus Luna ac Planetæ ſpectantur, duplo minori adhuc luce indigent, quod oculi per tenebras minore luce moveantur quam interdiu. Ita in teleſcopio 30. pedes longo, quod Planetas amplificat centies novies ratione diametri, eoque latitudinem aperturæ poſceret, quæ ad eam, quæ pupillæ, ſe haberet, ut 109 ad 1; hoc eſt, quæ pollicum eſſet fere 11, poſitâ nempe pupillæ latitudine $\frac{1}{10}$ poll. ſufficere invenitur apertura 3 pollicum latitudine, quæ minus quam decimam tertiam partem colligit ejus lucis quæ contingeret apertura pollicum 11.

Sed nec pupillæ latitudo certa eſt aut ſemper eadem, nec præciſe definiri poteſt, quæ claritas ſufficiat. Et planetis remotioribus atque eo obſcurioribus aliquanto amplior danda eſt, quam Soli propioribus ob cauſam in ſequentibus dicendam.

Illud vero omnino quærendum eſt, quomodo dato uno teleſcopio, quod experientia docente rectè ſit ordinatum, cujuſque lentium duarum foci diſtantiæ datæ ſint, & apertura lentis exterioris quantam maximam pati poteſt; quomodo inquam ex hoc alia quotvis quarumcunque longitudinum definiantur, ita ut viſibilia æque lucida, & æque diſtincta exhibeant. Hinc enim cognoſcitur, quid, quantumque longitudine teleſcopiorum producenda profici poſſit. Item an recte elaborati expolitique ſint orbes vitrei an ſecus.

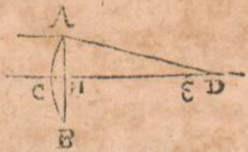
Diſtinctæ vero viſionis ratio ut habeatur, ſciendum eſt ex duplici cauſa eam vitiari; quarum altera eſt, quod ſphærica lentium convexitas non ad punctum unum cogat radios a puncto rei viſæ manantes, ſed aliquantulum aberrare faciat, ut in ſuperioribus oſtenſum fuit: Altera, quod radius in ſuperficiem denſioris diaphani oblique incidens, ac tanquam recta linea habitus, poſtquam refractus fuerit non amplius in linea feratur, ſed velut in plures ſpargatur exiguis angulis diſſidentes, coloribuſque infectos. Veluti ſi in ſuperficiem vitri AB incidat radius CA is refractus ſpargetur angulo exiguo DAE, cujus latus AD a perpendiculo GAF magis recedens colorem rubrum deferet, alterum extremum AE violaceum obſcurum; inter D & E vero appare-





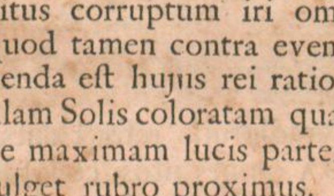
rebunt flavus, viridis, cæruleus, eodem ordine ut in Iride spectari solent. Hoc ita esse & quidnam ex eo sequeretur, pridem advertit V. Cl. If. Neutonus; ac prismate vitreo radios Solis refractos in loco obscuro excipiens observavit ea lege hanc radii dissipationem contingere ac si variæ essent variè coloratorum radiorum refractiones, aliæ aliis majores, radiusque CA omnes istos contineret. Extremos autem in AD, AE ita refringi, ut quidem Sinus anguli GAC, ad sinum anguli FAD, esset ut 68 ad 44. ad Sinum vero anguli FAE ut 69 ad 44.

Atque hinc porro collegit, in quavis lente vitrea, ut AB, cujus axis CD, si radiorum extremorum axi parallelorum KA, LB pars levius refracta ac rubrum vel coccineum colorem deferens conveniat cum axe in D; maximè vero refracta ac violacea in E, tunc esse ED æqualem $\frac{1}{50}$ CD, ac proinde si producantur AE, BE donec occurrant in F & G, rectæ per D ductæ ac lenti AB parallelæ, fieri GF, diametrum circelli aberrationis æqualem parti quinquagesimæ diametri AB. Unde & ang. DAF censebitur efficere $\frac{1}{50}$ ang. ADC.



Est autem aberratio hæc & alius naturæ & plerumque longiſſime ſuperat eam quæ ratione figuræ ſphæricæ contingit. Nam ſi ſit ex. gr. lens AB, cujus altera ſuperficies plana ſit, altèra convexa, atque ea radiis incidentibus expoſita. Foci vero diſtantia CD ſit pedis unius ſeu poll. 12. Apertura AB dimidii pollicis, quanta circiter huic lenti in pedali teleſcopio danda eſt; ſit HC craſſitudo lentis, $\frac{1}{192}$ poll. cujus $\frac{7}{6}$, hoc eſt $\frac{1}{164}$ poll. definit aberrationem totam DE, quæ ex figura ſphærica oritur. Sed ex Neutoniana aberratione erit DE $\frac{1}{50}$ CD, hoc eſt $\frac{12}{50}$ pollicis. Quæ itaque ad priorem ſe hic habet ut 39 ad 1. Quo longiora vero teleſcopia, eo ma-jor erit hæc aberrationum differentia.

Quia autem tanto refractionis vitio videri poſſet penitus corruptum iri omnem teleſcopiorum effectum, quod tamen contra evenire experimur; omnino exponenda eſt hujus rei ratio. Sciendum itaque Imaginem illam Solis coloratam qualem Neutonus obſervavit, longe maximam lucis partem colligere ubi flavus color effulget rubro proximus. Eandem vero multo fieri obſcuriorem qua parte ad violaceum tendit. Nec dubitandum, quin ſi ab alia quam a Solis luce radii adveniant major pars aberrantium ſentiri nequeat. Ita fit ut qui a ſingulis viſibilium punctis manant, lentis convexæ opera picturam rei procul poſitæ ſatis diſtinctam ac circumſcriptam in foco exhibeant, etſi luce quadam, veluti nebula, aſperſam, quæ ab iſta aberratione ſeu radiorum ſingulorum diſperſu oritur.



Notandum autem Propoſ. LV. ad radios in varios colores diſſipatos, extendi poſſe. Ex ea enim ſequitur, eandem obſerſervari legem in radiis diſſipatis, quæ in puris; ex gr. SD radius diſſipetur in DO colorem rubrum & DR violaceum; itemque radius ND in rubrum DB & violaceum DF, ſequitur inquam, ex hac prop. LV. angulos BDO a radiis coloris rubri & FDR a radiis coloris violacei deſcriptos ſingulos fore æquales angulo SDN.

Unde non incommode & illud ad modum Lemmatis deduci poteſt,

Aberrationem NDM per radium incidentem BD productam, forè æqualem aberrationi BDF genitæ per refractum ND.

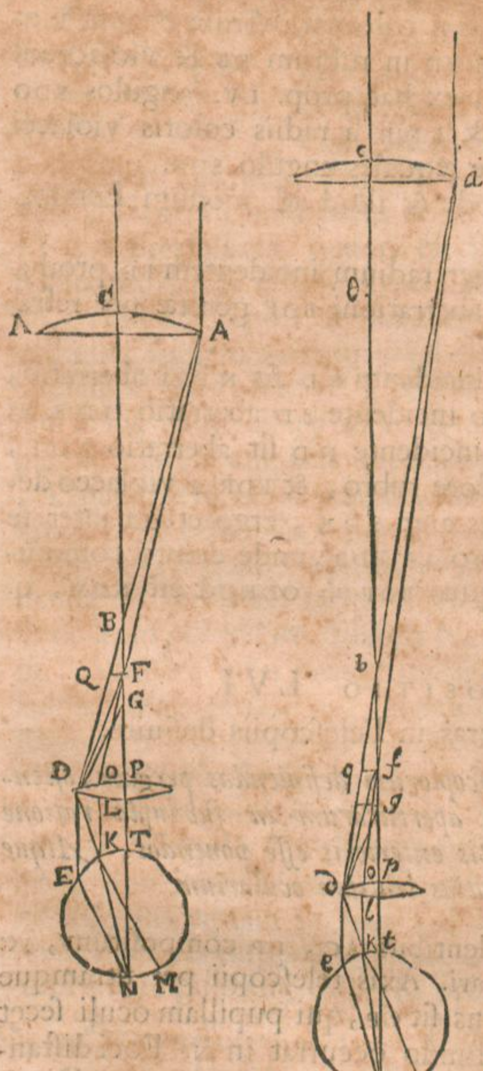
Quia enim a radio incidente BD fit NDM aberratio, vel quod idem eſt, ab incidente SD aberratio ODR 2|2 NDM, rurſus quia ex incidente ND ſit aberratio BDF, erunt anguli BDO a colore rubro, & FDR a violaceo deſcripti, ſinguli æquales ang. SDN, ergo etiam inter ſe æquales, id eſt, ang. BDO 2|2 FDR, unde demto communi ang. FDO, erit reliquus BDF 2|2 ODR id eſt NDM, q. e. d.

PROPOSITIO LVI.

Lentium aperturas in Teleſcopiis definire.

Nunc ad aperturas teleſcopiorum definiendas pergam, oſtendamque, Diametros aperturarum in ſubdupla ratione foci diſtantiarum lentis exterioris eſſe ponendos; Atque ita quoque foci diſtantias lentium ocularium.

Sit teleſcopium ex lentibus AC, DP compoſitum, AC exteriori, DP oculari. Axis teleſcopii per utramque mediam lentem tranſiens ſit CP, qui pupillam oculi ſecet in T puncto, ejuſque fundo occurrat in N. Foci diſtantia lentis AC ſit CF, lentis DP foci diſtantia PF. Dimidiæ aperturæ latitudo ſit AC. Ponatur vero teleſcopium hoc



hoc recte ordinatum, quantum ad lucem ac distinctam visionem attinet, ut nec majorem aperturam in exteriori lente ferre possit, nec acutiorem lentem ocularem; Jamque aliud sit construendum longius ac majoris amplificationis, cujus lens ac habeat foci distantiam cf, datæ rationis ad CF, quæraturque hinc diameter aperturæ aa, itemque foci distantia lentis ocularis pf, quibus fiat æque lucidum hoc telescopium, & æque distincte res visas exhibens, atque illud ex lentibus AC, PD.

Sint omnia ejusdem nominis sed diversæ figuræ literis utrobique notata, & constructio eadem.

Intelligatur nempe F esse punctum concursus radiorum axi parallelorum qui rubrum

brum colorem adferunt, tam in lentem AC extrinsecus advenientium, quam qui in lentem PD caderent e regione oculi. Sed B esse concursum parallelorum lentis AC, qui violaceum exhibent; G concursum parallelorum qui colorem hunc ducunt per lentem PD. Oculi vero ea sit constitutio, ut radios rubros axi parallelos excipiens perducat ad punctum unum fundi sui. Aberrationem, quæ ex figura sphærica oritur pro nulla hic habemus, quippe quæ ut jam diximus nullius momenti sit ad hanc quæ fit ex coloribus, ac proinde si ab extrema apertura AA ducantur rectæ ABD, AFO quæ lenti PD occurrant in D & O, eæ referent radios coloratos extremos quos ex uno axi parallelo radio fecit refractio lentis AC. Jungantur DF, FA, DG, & productus axis CP secet oculi pupillam in puncto T, ejusque fundo incidat in N. Sitque recta DE axi parallela a lente oculari ad pupillam ducta, & jungatur EN. Cæterum angulus BDF, a cujus magnitudine pendere ostendimus aberrationem in fundo oculi, vocetur angulus aberrationis.

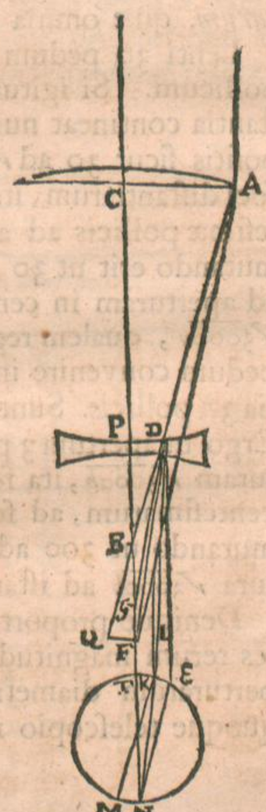
Quum igitur radius qui ex G in D ferretur violaceo colore tinctus abiturus sit in DE axi parallelam, non poterit radius hujus coloris ABD in DE refringi, sed ex propos. LV. interius feretur ad pupillam per DK, ut fiant anguli æquales BDG, EDK. Sit KL axi parallela, quia itaque ea est oculi constitutio ut radii rubri paralleli DE, LK, conveniant in fundo ad punctum N, non conveniet eodem radius DK etiamsi ruber, ac minus etiam cum sit violaceus, sed interior feretur secundum KM, ut angulus NKM ad DKL seu sinus ad sinum certam rationem habeat, quæ cujusmodi sit scire nihil interest. Sed in utroque telescopio æquales esse oportet angulos NKM, ut æque distincta visio existat; quia sic

a-aberratio quoque NM in fundo oculi utrobique æqualis erit. Conſtat enim radium rubrum AFO penetrata lente PD, futurum axi parallelum, eoque deſcenſurum ad punctum in oculi fundo N. Oportet itaque & angulos DKL, ſeu KDE, ſeu BDG, utrobique æquales eſſe, ſive etiam angulos BDF; Tunc enim & anguli BDG pro æqualibus rectè habebuntur, quia utrobique minimi ſunt horum reſpectu, (licet inæquales inter ſe) anguli FDG. Sicut enim CF ad FB ita eſt PF ad FG, ex natura hujus aberrationis; unde permutando ut CF ad FP ita FB ad FG. Atqui CF ſuperat longiſſimè FP, ut in teleſcopio ex. gr. pedum 30, ſit earum ratio quæ 109 ad 1. Ergo ita quoque FB ſuperat FG, & ita fere angulus BDF angulum FDG.

Ex his jam calculum proſequemur hoc modo. Sit in priore Teleſcopio CF $= b$, FP $= c$; AC $= a$, in poſteriore cf $= d$, fp $= y$; ac $= x$. Et fiat ſicut CF ad FP ita linea θf ad fp, eritque θf $= \frac{by}{c}$; quia igitur ratio augmenti in priore Teleſcopio eſt ea quæ CF ad FP, ſeu θf ad fp; in poſteriore vero ea quæ cf ad fp. Erunt in utroque magnitudines apparentes ſecundum diametrum inter ſe ut θf ad cf. quam eandem rationem habere debet AC ad ac; quia æque lucidum eſſe volumus teleſcopium utrumque: quod ita fiet, ſi quanto magis alterum res viſas auget, tanto majori apertura radios colligat ab earum ſingulis punctis profectos. Eſt igitur AC ad ac, hoc eſt, a ad x, ut θf ad cf, hoc eſt, ex antedictis, ut $\frac{by}{c}$ ad d. Unde fit y ſeu fp $= \frac{adc}{bx}$.

Ducatur FQ axi perpendicularis, quæ rectæ DA occurrat in Q. Quia itaque ut CB ad BF ita cb ad bf (nam utrobique BF eſt $\frac{1}{50}$ CB, ex ſupra expoſitis); erit & CA ad FQ ut ca ad fq. Et permutando CA ad ca ut FQ ad fq. Quia ve-

vero, ut dictum fuit, æquales debent esse anguli aberrationis BDF, bdf, erit DF ad FQ ut df ad fq, sive PF ad FQ ut pf ad fq, cum utrobique pro iisdem haberi possint PF & DF, propter minimam differentiam; proinde & permutando PF ad pf ut FQ ad fq, hoc est, ut CA ad ca. Est autem PF $\propto c$; pf $\propto \frac{adc}{bx}$; CA $\propto a$. Ergo ca sive $x \propto \frac{aad}{bx}$. Et $bxx \propto aad$. hoc est, xx ad aa ut d ad b. sive x ad a in subdupla ratione d ad b. quod erat ostendendum.



Quod autem & lentium PD, pd, foci distantiæ sunt sicut aperturarum diametri AA, aa, hinc ita probatur. Cum dictum fuerit esse a ad x ut $\frac{by}{c}$ ad d. Erit & aa ad xx ut $\frac{bbyy}{cc}$ ad dd. Erat autem aa ad xx ut b ad d. Ergo $\frac{bbyy}{cc}$ ad dd ut b ad d. Unde $byy \propto ccd$. Et cc ad yy ut b ad d, hoc est ut aa ad xx; ac proinde etiam c ad y ut a ad x. hoc est, ratio foci distantiarum FP, fp eadem quæ semidiametrorum aperturæ AC, ac.

In Telescopiis ex convexa & cava lente compositis eadem ostendi possunt, simili planè demonstratione; nisi quod distantia puncti dispersus in lente cava tunc erit quod hic fuit convexi ocularis foci distantia. Sed cavorum in compositione jam nullus fere est usus, propter angustiam spatii, quam telescopiorum prospectui relinquunt.

Cæterum ad inveniendas tum aperturas, tum lentes oculares cuique lenti exteriori convenientes, ex jam dictis & semel constituto 30 pedum telescopio hanc effecimus Regulam. *Foci distantia lentis exterioris, quem numerum pedum habebit, is numerus ducatur in 3000; facti radix erit diameter aperturæ quæsitæ in centesimis pollicum. Eadem si augeatur decima sui parte, dabit foci distantiam lentis ocularis iisdem centesimis expressam. Apparentes vero rei visæ latitudines sunt sicut diametri aperturarum.* quæ omnia sic probantur.

Lenti 30 pedum experimur convenire aperturam 3 pollicum. Si igitur proponatur lens alia cujus foci distantia contineat numerum pedum b, erit ex supra expositis sicut 30 ad $\sqrt{30b}$, quæ est ratio subdupla rationis foci distantiarum, ita 3 pollices aperturæ, sive 300 centesimæ pollicis ad aperturam lentis quæsitam; vel permutando erit ut 30 ad 300, hoc est, 1 ad 10 ita $\sqrt{30b}$ ad aperturam in centesimis pollicum, quæ itaque erit $\sqrt{3000b}$, qualem regula statuit. Lenti quoque eidem 30 pedum convenire invenimus ocularem, cujus foci distantia $3\frac{3}{10}$ pollicis. Sunt autem foci distantiæ sicut aperturæ. Ergo ut apertura 3 poll. seu 300 centesimarum ad aperturam $\sqrt{3000b}$, ita foci distantia $3\frac{3}{10}$ pollicum, sive 330 centesimarum, ad foci distantiam quæsitam. Sive permutando ut 300 ad 330, hoc est, ut 1 ad $1\frac{1}{10}$ ita apertura $\sqrt{3000b}$ ad istam foci distantiam.

Denique proportionem amplificationis, seu apparentes rerum magnitudines telescopiis perceptas esse ut aperturarum diametros, sic manifestum fiet. In uno quoque telescopio magnitudo apparens ad veram, sive quæ nudo oculo percipitur, eſt ea quæ foci diſtantiæ lentis exterioris ad foci diſtantiam ocularis. Ergo in teleſcopio altero propoſitionis hujus erit hæc magnitudinum ratio quæ CF ad FP, ſeu b ad c. In altero vero quæ cf ad fp, hoc eſt, quæ d ad $\frac{adc}{bx}$, ſeu $\frac{bx}{a}$ ad ad c. Sed magnitudo vera utrobique eſt eadem. Ergo magnitudo apparens in teleſcopio priore ad eam quæ in altero ſe habebit ut b ad $\frac{bx}{a}$, hoc eſt, ut a ad x, ſive ut aperturarum diametri, quod erat probandum.

Quare ex amplificatione quæ eſt in 30 pedum teleſcopio ut 109 ad 1, cæteræ omnes ex proportione aperturarum repertæ ſunt & in Tabulam ſequentem relatæ.

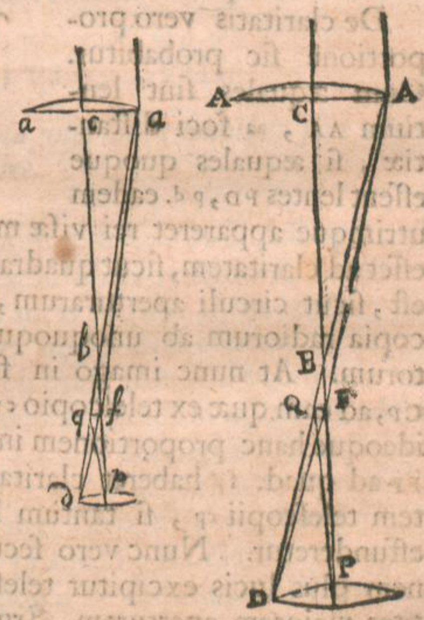
Foci diſtantia vitri objectivi, ſive Longitudo Teleſcopii.	*Diameter aperturæ vitri objectivi.*	*Foci diſtantia lentis Ocularis.*	*Amplificatio ſecundum diametrum*
Pedes Rhenoland.	*Decimæ & centeſimæ pollicum.*	*Dec. Cent. poll.*	
1	0. 55	0. 61	20
2	0. 77	0. 85	28
3	0. 95	1. 05	34
4	1. 09	1. 20	40
5	1. 23	1. 35	44
6	1. 34	1. 47	49
7	1. 45	1. 60	53
8	1. 55	1. 71	56
9	1. 64	1. 80	60
10	1. 73	1. 90	63
13	1. 97	2. 17	72
15	2. 12	2. 33	77
20	2. 45	2. 70	89
25	2. 74	3 01	100
30	3. 00	3. 30	109

Foci distantia vitri objectivi, sive Longitudo Telescopii.	Diameter aperturæ vitri objectivi.	Foci distantia lentis Ocularis	Amplificatio secundum diametrum
Pedes Rhenoland.	Decimæ & centesimæ pollicum.	Dec. Cent. poll	
35	3. 24	3. 56	118
40	3. 46	3. 81	126
45	3. 67	4. 04	133
50	3. 87	4. 26	141
55	4. 06	4. 47	148
60	4. 24	4. 66	154
65	4. 42	4. 86	161
70	4. 58	5. 04	166
75	4. 74	5. 21	172
80	4. 90	5. 39	178
85	5. 05	5. 56	183
90	5. 20	5. 72	189
95	5. 34	5. 87	194
100	5. 48	6. 03	199
110	5. 74	6. 31	209
120	6. 00	6. 60	218
130	6. 25	6. 88	227
140	6. 48	7. 13	235
150	6. 71	7. 38	244
160	6. 93	7. 62	252
170	7. 14	7. 85	259
180	7. 35	8. 09	267
190	7. 55	8. 31	274
200	7. 75	8. 53	281
220	8. 12	8. 93	295
240	8. 48	8. 33	308
260	8. 83	9. 71	321
280	9. 16	10. 08	333
300	9. 49	10. 44	345
320	9. 80	10. 78	356
340	10. 10	11. 11	367
360	10. 39	11. 43	378
380	10. 68	11. 75	388
400	10. 95	12. 05	398

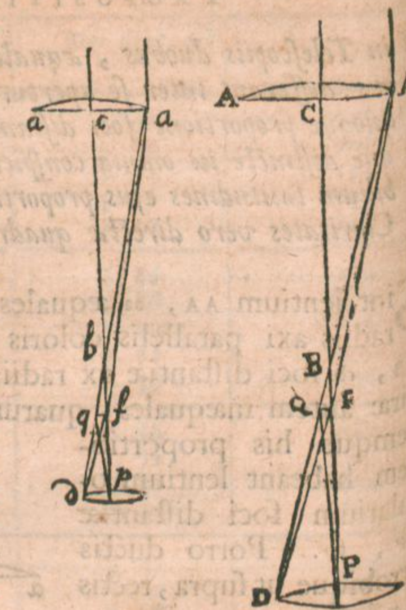
Propositio LVII.

Si in Telescopiis duobus, æquales exteriores lentes habentibus, differant inter se aperturarum diametri, & eadem quoque proportione foci distantiæ lentium ocularium; æquè distinctè iis omnia conspicientur; apparentesque visibilium latitudines ejus proportionis contrariam habebunt; Claritates vero directæ quadruplicatam.

Sint lentium AA, aa æquales foci distantiæ CF, cf ex radiis axi parallelis coloris rubri, itemque æquales CB, cb foci distantiæ ex radiis coloris violacei. Aperturæ autem inæquales, quarum diametri AA, aa. Eandemque his proportionem habeant lentium ocularium foci distantiæ FP, fp. Porro ductis utrobique ut supra, rectis ABD, AF, FD, FQ, jungatur etiam QP. Quia ergo tam CB quam BF sunt utrimque æquales, ex natura aberrationis, de qua agimus; erit FQ ad fq ut AA ad aa. Sed ita quoque est ex hypothesi FP ad fp. Ergo æquales erunt anguli FPQ, fpq. a quibus nihil differre censentur FDQ, fdq. quia anguli PFD, pfd minimi esse intelliguntur. Ex hac vero æ-



æqualitate angulorum FDQ, fdq conficitur, ſicut prop. præcedenti, eandem utrobique in oculi fundo fieri aberrationem, & æque diſtinctam utroque teleſcopio cerni rei viſæ imaginem.



Porro ſecunda pars propoſitionis ex ſupra demonſtratis manifeſta eſt, nempe latitudines rei viſæ fore in proportione contraria foci diſtantiarum quæ in lentibus ocularibus, quia nempe lentes exteriores utrobique eædem.

De claritatis vero proportione ſic probabitur. Cum æquales ſint lentium AA, aa foci diſtantiæ, ſi æquales quoque eſſent lentes PD, pd. eadem utrimque appareret rei viſæ magnitudo. Claritas autem eſſet ad claritatem, ſicut quadratum ex AA ad qu. ex aa, hoc eſt, ſicut circuli aperturarum, quia hanc rationem habet copia radiorum ab unoquoque viſibilis puncto receptorum. At nunc imago in fundo oculi ex teleſcopio CP, ad eam quæ ex teleſcopio cp eſt, ut qu. fp ad quad. FP; ideoque hanc proportionem inverſam, hoc eſt, quam qu. FP ad quad. fp haberet claritas teleſcopii CP ad claritatem teleſcopii cp, ſi tantùm lux æqualis in utramque effunderetur. Nunc vero ſecundum eandem proportionem plus lucis excipitur teleſcopio CP quam cp, propter majorem aperturam. Ergo claritas imaginis per hoc in-

intromissa erit ad alteram, in ratione quadratoquadratorum AA ad aa. quod ostendendum supererat.

Si ergo positis foci distantiis æqualibus CF, cf, aperturæ diameter AA sit dupla aa, itemque foci distantia FP dupla fp, erit telescopii CP claritas sexdecupla ejus quæ telescopii cp.

Quod autem de distincta visione utrobique æquali demonstratum est, non exactè ita experimento conveniet, sed in majori claritate majus erit nebulæ incommodum quæ ex aberratione oritur. Et hoc quidem ita invenietur si utroque telescopio, sive eodem cum diversis aperturis idem visibile inspectetur. Quod si ad visibilia diversæ claritatis eadem apertura adhibeatur, rursus ex illa causa major nebula orietur ubi major erit lux; ac propterea obscurioribus Planetis paulo major apertura quam illustrioribus danda videtur.

PROPOSITIO LVIII.

Tabulæ præcedentis Telescopia visibilibus omnibus sive diurnis sive nocturnis applicare.

Quæ in Tabulâ superiore exhibentur Telescopia, ad siderum observationes adhiberi sciendum. Dixi vero non multo antè, plus lucis requiri in iis quibus interdiu utimur, quia scilicet multa diei claritate præstinctis oculis atque inde telescopio admotis obscurum videtur, quod per noctis tenebras lucidum esset. Eadem itaque telescopia quæ in Tabula descripta sunt cum ad diurnas observationes adhiberem, experiendo comperi, mutandas in iis oculares lentes, appositis quarum foci distantiæ duplæ circiter sint priorum, ita claritas fiet quadrupla, quia eadem proportione diminuentur imagines ra-

ratione ſuperficiei; manebit enim eadem radiorum quantitas, ob nihil mutatam aperturam lentis exterioris, ac proinde clarius efficient anguſtius ſpatium. Quod ſi non mutata oculari lente apertura augeatur, augebitur quidem claritas, ſed fiet nebula major ex majori aberratione, eoque hoc remedio non eſt utendum.

Hinc tamen quæri poteſt, cum ſubſtituta lente oculari minus acutâ, minuatur aberratio ea, quam hactenus examinavimus, cur non ſimul eouſque augeri queat apertura lentis exterioris quoad eadem rurſus aberratio exiſtat, quæ ſecundum tabulam ordinato teleſcopio inerat. Sic enim plus lucis accreſcet, nec tamen quidquam decedet viſioni diſtinctæ per præced. propoſ. LVII. Reſponſum vero inde petendum quod ſuperius jam attigi, nebulam nempe illam ex aberratione Neutoniana magis nocere ſi lucidior in fundo oculi imago pingatur; ſimul enim & nebulæ lux increſcet; & hoc reipſa experimur ſimul ac augetur diurnorum hujuſmodi Teleſcopiorum apertura nebulam ex aberratione in lucidiore viſibili nocere incipere. Itaque nihil mutandæ ſunt aperturæ.

Rurſus quæri poteſt, Si Teleſcopium Saturni obſervationibus aptum ad Lunam convertatur, quæ centuplo lucidior eſt (non tota inquam ſed partibus ſingulis) quippe decuplo Soli propinquior, an non utiliter aperturæ latitudo imminui poſſit, ſimulque eadem proportione lentis ocularis foci diſtantia; ut fiat regionum Lunæ claritas non major quam quæ erat in Saturno, amplificatio vero multo major evadat. Velut in teleſcopio 30 pedum, ſi diameter aperturæ 3 pollicum reducatur ad $\sqrt{\frac{9}{10}}$ pollicis, quæ paulo minus efficiunt quam partem tertiam prioris, ſimulque foci diſtantia lentis ocularis eadem proportione diminuatur; hic enim idem viſibile reſpicienti eſſet claritatis proportio quadrudruplicata ejus quæ 3 ad $\sqrt{\frac{9}{10}}$, ex propoſ. LVII. hoc eſt, ea quæ 100 ad 1; cumque Lunæ regiones ſint centuplo clariores quam Saturni, maneret eadem claritas in Luna, quæ prius fuerat in Saturno. Sed ex eadem prop. & aberratio quoque in fundo oculi utrobique æqualis erit, & amplificatio in Luna quam Saturno major ſecundum rationem 3 ad $\sqrt{\frac{9}{10}}$, quæ major eſt tripla. Itaque plurimum profutura hæc aperturæ & ocularis lentis reductio videtur. At reipſa ſecus accidit. Igitur cauſa cur ita fiat dicenda eſt; quam duplicem eſſe ajo. Prima enim quod melius accuratiuſque cernantur partes minimæ quæque in orbe Lunari, ſi tota lux teleſcopio relinquatur, quam ſi centuplo minor fiat, etſi non pro hac tanta ratione differentiæ. Altera eſt, quod nimium arctata apertura pereat nitida imaginum circumſcriptio, quod diligenter eſt notandum, & quinam hic a natura conſtituti ſint termini noſcendum. Fit nempe ut quanto magis contrahitur apertura, tanto exiliori cylindrulo ad oculum accidant radii ab uno quopiam rei viſæ puncto manantes, cujus cylindruli ſemidiameter in fig. prop. LVI. eſt PO. Quod ſi duplum ejus ſive diameter totus ſit intra $\frac{1}{7}$ vel $\frac{1}{6}$ lineæ, hoc eſt, minor quam $\frac{1}{60}$ vel $\frac{1}{72}$ pollicis deperit illa imaginum circumſcriptio, ob cauſam in oculi naturali conſtitutione latentem, ſive ea in choröide aut retina quærenda ſit, ſive in ipſis oculi humoribus. Namque & ad nudum oculum oppoſitâ laminâ cum foramine quod ſit infra $\frac{1}{7}$ aut $\frac{1}{6}$ lineæ minus diſtincti viſibilium termini apparere incipiunt, ac tanto confuſiores quanto ulterius minuetur foramen. Facile vero oſtendetur in adducto exemplo juſto anguſtiorem fieri cylindrulum ad oculum. Fit enim ex regula aperturarum, foci diſtantia lentis ocularis $\frac{11}{10}\sqrt{\frac{9}{10}}$ lineæ. Sicut autem foci diſtantia lentis exterioris ad interioris, hoc eſt, ſicut in fig. prop. LVII. CF ad FP, ita eſt diameter aperturæ AA ad duplam PD, ſeu ad diametrum iſtius cylindruli, hoc eſt, ſicut 30 ped. ſeu 360 poll. ad $\frac{11}{10}\surd\frac{9}{10}$ unius pollicis ita ſunt $\surd\frac{9}{10}$ ad non totam $\frac{1}{30}$ unius lineæ, longe nempe minorem quam $\frac{1}{6}$. Sed in priore atque ordinaria Teleſcopii conſtitutione, erat ſicut 360 poll. ad pollices $3\frac{1}{10}$ ita 3 poll. ad $\frac{11}{400}$ pollicis, ſeu ferè $\frac{1}{3}$ lineæ, cylindruli diametrum, cujus itaque nequaquam ea eſt anguſtia quæ nocere poſſit. Non multo amplius vero quam tertia ſui parte diameter aperturæ ac ſimul lentis ocularis foci diſtantia diminui poſſent, quia jam hinc fit latitudo ad oculum quæ vix excedat $\frac{1}{5}$ lineæ; idque in omni teleſcopii longitudine locum habet; quandoquidem in Tabula noſtra ita ordinata ſunt ut in omnibus Latitudo iſta ad oculum ſit eadem, ut paulo poſt demonſtrabo.

Etiamſi igitur a Saturno ad Venerem convertere teleſcopium velimus, cujus claritas major eſt 225 vicibus, non tamen ulterius contrahenda eſt apertura quam parte tertia; Sed ſi nimia claritas ſuperſit ea leviter infecto fuligine vitro eſt auferenda.

Nocet enim alia quoque ratione diminutio aperturæ, quod nimirum nævi & bullæ quæque exiguæ quæ lenti oculari inſunt magis apparent, quippe totam cylindruli, de quo diximus, latitudinem vel partem ejus intercipientes, eoque & particulam rei viſæ.

Quod autem dixi latitudinem cylindruli radioſi oculo incidentis in omnibus Tabulæ noſtræ Teleſcopiis eandem reperiri, paucis oſtendi poteſt. Sunt enim in Schemate prop. LVI. ejuſmodi cylindrulorum in duobus diverſæ longitudinis teleſcopiis ſemidiametri PO, PO. Cumque ſit ut FC ad CA ita FP ad PO, erit PO 2¦2 $\frac{ac}{b}$. Ac

fi-ſimiliter cum ſit ut fc ad ca ita fp ad po; fc vero ſit $\propto d$: ca vero $\propto x$, Et fp ſit inventa $\propto \frac{adc}{bx}$, fiet $po \propto \frac{ac}{b}$, ideoque æqualis po, quod erat oſtendendum.

Atque hinc denique concludo nihil obſtare, quin ſervatis Tabulæ ſuperioris legibus quouſque lubet Teleſcopiorum longitudines producamus, idque ſemper majore cum effectu. Quandoquidem & claritas & diſtinctio eadem ubique manet; ut patet ex prop. LVI. quam Tabula pro fundamento habet; & hoc quoque poſterius incommodum, ex anguſtia radiationis ad pupillam, peræque abeſt.

Priuſquam vero a Teleſcopiis diſcedamus, oſtendam quomodo obſervari poſſint ſtellulæ exiguæ ac præcipue Satellites Jovis ac Saturni, aucta inſigniter ac præter ſolitum apertura exterioris lentis, ſimulque ocularis foci diſtantia. Quia enim velut puncta tantum apparent hæc ſidera, licet teleſcopio ſpectata, nihil prodeſt eorum diametros augeri, ſed oportet ut quanta poſſunt luce clareſcant. Hoc autem præcipue hic fit auctis aperturis. Duplicatâ enim apertura ſecundum diametrum, quadrupla lux a ſidere profluens colligitur. Quod ſi ſimul lentis ocularis foci diſtantia duplicetur, orietur diſtinctio eadem quæ ab initio, non tamen fiet claritas ſexdecupla, quanta ex ſuperiore ratiocinio, ſed quadrupla manebit; quoniam, ut jam dixi, imago ſideris in fundo oculi eſt inſtar puncti, eoque tantùm lucis quantitas in ipſum derivata ſpectanda eſt; quæ quanto major, tantò clarius faciliuſque ſidus ipſum conſpicietur. Quod aliter eſt ſi lunam aut planetarum primariorum aliquem hoc teleſcopio intueamur, quorum partes ſingulæ ſexdecuplam lucem accipient. Poterimus autem hac aperturæ ampliatione plurimum augere vim teleſcopii in deprehendendis ſtellis minimis aut Saturni Comitibus, ac forſan 30 pedibus longo cum apertura ſolitæ dupla ſeu 6 poll. lata tantundem efficere quantum alias teleſcopio pedum 120, cui in ſuperiore Tabula tanta aperturæ latitudo attributa fuit.

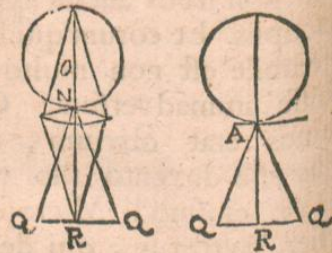
DE MICROSCOPIIS.

Lentibus vitreis etiam vel solis, vel binis ternisve certa ratione conjunctis, Microscopia parantur, quibus corpuscula quælibet minima, partesque eorum non secus auctæ apparent, quam res longinquæ telescopiis. Et eorum quidem, quæ simplici lente constant, credibile est non multo post inventa telescopia usum fuisse animadversum. Compositorum vero artificium minus erat obvium, quod decennio circiter posterius esse invento illo videtur. Nondum enim Anno 1618. ejusmodi Microscopia extitisse apparet, quod Hier. Syrturus, qui de origine & fabrica Telescopiorum eo anno librum edidit, non fuerit silentio præteriturus tam insigne inventum, si jam tum cognitum fuisset. Franc quidem Fontana ab ipso Ao. 1618 id sibi arrogat in libro Observationum edito in lucem Ao. 1646. Sed testimonium Hier. Syrsalis quod adducit non est antiquius Anno 1625. Anno autem 1621 apud Drebelium nostratem conspecta fuisse Microscopia hujusmodi Londini in Britannia, ipsi qui adfuerant sæpe mihi narraverunt, ipsumque primum auctorem eorum tunc habitum. Nihil vetat autem, quin ambo ex varia lentium compositione huc devenerint, etsi causarum in his rebus & omnis Geometriæ ignari.

Cæterum simplicia quæ dixi Microscopia, cum ante hac minoris fierent haud pridem eo perducta fuere, ut cæteris omnibus in augendis virtutibus antecellant. Fiunt autem vel lenticula una convexa, vel sphærula vitrea prope ad oculum admota, quorum utriusque rationes causasque hic primum exponemus.

PROPOSITIO LIX.

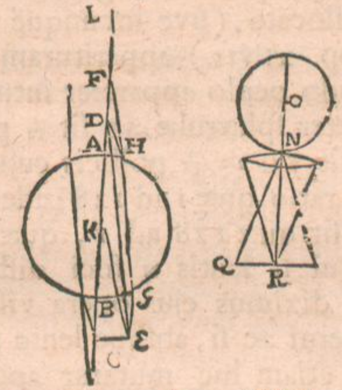
Simplicium Microſcopiorum rationes & uſus exponere & quomodo ſphærulæ & exiguæ lentes parentur.



Lenticulæ effectus ex iis facile intelligitur, quæ de amplificatione convexæ lentis in univerſum ſcripſimus prop. XXXVI. Sit enim lens N, res viſa ad R focum nempe ejus. Oculus O proxime lenti admotus; Jam radii ex R egreſſi ac refracti mittentur ad oculum O paralleli, diſtinctamque viſionem efficient. Viſibile autem QRQ eadem magnitudine cernetur ac ſi lens N abeſſet, & in locum ejus lamina cum exiguo foramine conſtitueretur, nempe angulo QAQ. Ut proinde nihil aliud hic præſtet interpoſita lens, quam ut diſtincta fiat viſio, quæ abſque lente confuſa foret. Sed cum nudo oculo ita demum fiat diſtincta ſi ſpatio aliquo, puta 8 pollicum, oculus diſtet; tanto nunc auctior imago apparens dici poterit, quanto 8 pollices iſti majores ſpatiolo NR, ſeu foci diſtantiâ lenticulæ N, quæ ſi pollicis quintam partem æquet, erit augmentum velut 40 ad 1 ratione diametri. Quanto igitur minor erit foci diſtantia lenticulæ N, tanto major erit effectus ejus in dalatanda rei minutæ ſpeciei; quanquam obſtacula quædam hic ſeſe offerunt in ſequentibus memoranda, quæ ultra certos terminos progredi vetant. Atque idem in ſphærulis accidit quæ ut diximus pro lentibus hic adhiberi poſſunt; quas alioqui quantumvis exiguas facile parare licet. Hæ vero hoc

hoc uno lenticulis cedunt si utræque sint vitreæ, quod in pari amplificatione triplo amplius a visibili lenticulæ distent, eoque spatium relinquant, quo lateralis lux immittatur, sic enim rerum colores conspicere licet, cum alioqui directæ luci obvertendum sit Microscopium, & tantum quæ tenuitate sua pellucent intuenda.

Effectus vero sphærulæ, atque hoc quod diximus de triplo minore distantia sic demonstrantur.



Sit sphæra vitrea cujus centrum K; axis AB, in quo utrimque producto statuatur oculus ad D; visibile ad C; positis distantiis singulis AD, BC diametri AB quadrantibus. Est ergo punctum C concursus radiorum axi AB parallelorum qui incidunt in superficiem AH; quare visibile in C positum, mittet radios ex refractione sphæræ parallelos ad oculum in D, eoque fiet visio distincta. Producta autem BD ad L, ut AL sit diametro AB æqualis, si fiat secundum propos. XII. part. I. ut DL ad DK, ita DA ad DF, erit in puncto D concursus radiorum intra sphæram euntium & ad punctum F pertinentium, qualis GH. Sicut autem æquales DL, DK; ita quoque erunt DA, DF. Sit jam GE axi parallela, atque intercipiat rei visæ lineam CE, ac ducatur recta ED. Radius ergo EG, fractus ad G, incedit secundum GH, & rursus fractus ad H, pergit ad oculum in D. Quamobrem linea CE, spectatur angulo ADH, quæ nudo oculo occuparet ang. CDE. quem dico illius esse dimidium.

Quia

Quia enim AF dupla ad AD, erit angulus ADH duplus AFH. Eſt autem DE parallela FG, quia GE & parallela eſt FD, & huic ipſi ſive rectæ BC æqualis cenſenda; quia CE linea velut minima habetur ratione ſphæræ diametri. Erit ergo anguli quoque CDE duplus ADH; qui æqualis proinde angulo CKE. Unde liquet oculo ad D collocato, (ſive utcunque alibi in producto axe BA per prop. XLVII.) apparituram lineam CE angulo eodem quo nudo oculo appareret intuenti ex puncto K. Unde ſi diameter ſphæruiæ AB ſit $\frac{1}{12}$ pollicis, qualibus uti ſolemus, fit KC 2|2 $\frac{1}{16}$ pollicis cujus ad diſtantiam 8 pollicum ea eſt ratio quæ 1 ad 128; adeo ut amplificationis ratio tunc ſit quæ 128 ad 1, quæ ſane inſignis admodum. Atqui ſi lentis N foci diſtantia NR æqualis ſit rectæ KC, diximus ejus opera viſibile RQ, eadem magnitudine cerni ac ſi, abſque lente in N oculus poneretur; neque etiam hic mutatur apparens magnitudo ubicunque in axe producto RN oculus ſtatuatur. Ergo ſequitur eandem multiplicationem, eundemque prorſus effectum præſtari lente N & ſphæra AB. Et conſtat porro diſtantiam RN triplam eſſe BC, quæ fuerant demonſtranda.

Hic craſſitudinem lentis N pro nulla habuimus, qualis cenſeri poteſt, cum foci diſtantia NR pollicaris eſt vel non multo minor; Sed quum uſu præſtent exiles lenticulæ, velut quæ utrinque formantur cavo ſphærico, cujus $\frac{1}{2}$ diameter duodecimam pollicis non excedit, neceſſario relinquenda eſt iis craſſitudo aliqua, ne ob nimiam parvitatem intractabiles fiant, neve minus bene ſphæricam formam induant. Hinc vero minuitur illa quam dixi diſtantia vitri a ſubjecto viſibili. Velut ſi ſit lenticula ST, cujus ſuperficies plano ſecta faciat arcus SXT, SVT circumferentiæ trientes, nempe de-

ſcri-

ſcriptos centris x, v, radio x v. Hæc ut idem præſtet augendo viſibili ac ſphærula A B; debet x v radio K B & quartæ ejus parti æqualis poni; unde oritur foci diſtantia v y dupla B C, ſeu $\frac{2}{3}$ N R.

Quomodo autem ſphærulæ & exiguæ lentes parentur atque uſui aptentur nunc exponendum erit.

Sphærulæ quo minores eo facilius conficiuntur, hoc modo. Fragmina vitri minima ad imam lucernæ flammam, qua parte cæruleus color conſpicitur, admoventur ut candeſcant atque ita filo ferreo, quantum tenuiſſimum duci poteſt, excepta, ac porro dextrè verſata, in globulos abeunt, qui ſatis magni ſi granum ſinapi æquaverint. Ex pluribus ita paratis aliquos probos reperies, idque experieris poſtquam lamellæ æreæ eos incluſeris. Quod ita fit. Lamellam ex ære tenuiſſimo digiti latitudine, longitudine duplâ complicabis, tum medium hoc rectangulum acus cuſpide perforabis; foramina oppoſita coticula lævigabis ne quid ſcabri circa margines adhæreat & flammæ fuligine inficies, ne quid fulgidum intus remaneat. Inde ſphærulam adhuc filo ferreo hærentem intra lamellam atque ad ipſa foramina inſeres; preſſamque continebis adactis circum æneis tribus claviculis ex filo deſectis malleoque firmatis. Sic levi opera plura microſcopia efficies, ex quibus quæ optima ſeliges.

Horum, uti dixi, præcipuus eſt uſus ad pellucida quæque corpuſcula inſpicienda. Imponuntur vero machinulæ ita conſtructæ ut cochleolæ converſione accedant recedantque a viſibili, atque ita ad requiſitam diſtantiam deducantur, fiatque diſtincta viſio. Cui porro plurimum conducit, ut lux nimia coërceatur, nec niſi per foramen admittatur, quod circiter quaternis ſuis diametris a viſibili diſtet. Etenim hoc pacto melius apertura ſphærulæ conveniens definitur quam latitudine foraminis contigui, quod hic arctari nihil neceſſe eſt. Oculus ſphærulæ proxime admovendus eſt, quo majus ſpatium complectatur.

Cæterum quæ viſui proponuntur corpuſcula aut liquorum guttulæ orbiculo vitreo plano imponuntur, qui inter aſpiciendum in omne latus mobilis ſit oportet. Sunt & qui vitreis tubulis liquorem attrahant, tam anguſtis ut vix pilos ſingulos admittant; quæ ratio ſuos quoque uſus habet. Lenticulis autem, quas diximus, utendo, ac lente aliâ a latere appoſitâ, lucem rei viſæ deſuper affundendo curandum eſt, ut aperturæ minimum foramen exactè temperetur, experiendo quantum patere poſſit ſine diſtinctæ viſionis detrimento. Radiant enim hic corpuſculorum puncta; quod aliter eſt in pellucidis quæ per ſphærulas ſpectantur, ubi lucem intercipit res objecta, non emittit.

Mirabilis autem eſt lenticularum ac ſphærularum ejuſmodi effectus, ut ex editis in publicum experimentis cognoſcere licet, quibus naturalium rerum cognitio plurimum lucis accepit. In his eſt obſervatio manifeſta circularis motus ſanguinis, quem, monſtrante A. Lewenhoekio noſtro, diligentiſſimo horum inveſtigatore, in anguillæ cauda ſumma cum voluptate conſpeximus. Eſt enim perlucida; ac ſanguis globulis ſubrubentibus conſtans, celeri motu per canaliculos arteriarum, qui venis continuantur, diſcurrit. Quod haud dubie in cæteris quoque animalibus animadverteretur, ſed non facile partes luci perviæ in his reperiuntur.

An-

Anguillulam vivam in tubum vitreum demiſerat aqua ſemiplenum, cui extrinſecus microſcopium applicabat ea parte qua cauda extrema vitrum tangebat.

Jucunda etiam eſt animalculorum obſervatio aquæ guttulis innatantium, in quam zinziber, piper aut aliud odoris acrioris diebus aliquot demerſum fuerit.

Variæ ſunt formæ aliæque aliis minores, miri etiam motus pro modulo ipſorum ſatis celeres, quorum inſtrumentum nullum animadverti poteſt, cum pedibus branchiiſque careant, nec corpora ut piſces inflectant. Nam anguillulæ aceti, quæ iſtis longe majores ſunt, eadem ratione ac fluviatiles natant; in quibus hoc mirum quod ex ſe fœtus generent. Vidi enim quæ parvulas quaternas intra ſe contineret (ſunt enim perlucidæ totæ) cumque in tubulo aſſervaretur, poſt horas aliquot eas enixa eſt, quæ ſeorſim quæque natabant.

Sed iſta quæ dixi in aqua diſcurrentia animalcula veriſimile eſt ex aere in aquam allici propter odorem. Variis enim rebus in aqua maceratis eædem formæ eorum reperiuntur. At clauſo vaſculo nulla apparent. Facile autem ob inſignem parvitatem in aere ſuſtinentur, cum minimis pulviſculis multo minora ſint. Ita multa ipſorum millia forſan in pulmones dimittimus ignari. Nec inutile eſſet obſervare quibus anni tempeſtatibus plura appareant, & num aëre vitiato augeantur.

Lac exiguis globulis pellucidis conſtare apparet in liquore item pellucido ſed diverſæ refractionis natantibus; hinc album videtur, cum tamen non aliam materiam quam prorſus diaphanam contineat, coloreque carentem.

Mitto inſectorum minimorum tot mirabiles formas. Alas papilionum & culicum, plumulis exiguis obſitas.

Pulvisculos in mediis florum apicibus inhærentes, qui nil aliud sunt quam folliculi transparentes materia ea pleni ex qua ceram apes conficiunt, quamque pedibus suis affixam in alvearia deferunt. Omnium vero mirabilissimum ac præcipuum putandum, quod in semine animalium marium est observatum, nempe in eo animalculorum immensam multitudinem pisciculorum more natare, ejus ferè formæ quam ranæ habent nuper natæ ac nondum pedibus auctæ. Quæ animalcula, intrare ova fœminarum, atque esse ipsorum animalium inde excludendorum initia, vix mihi dubitandum videtur. Plurima enim hoc suadent, nec multum obstat quod e tanta multitudine sæpe vel pauca vel unum duntaxat in animal excrescant, cum eadem abundantia ac superflua foecunditas in plerisque arborum & herbarum seminibus conspiciatur, velut abietis, papaveris &c.

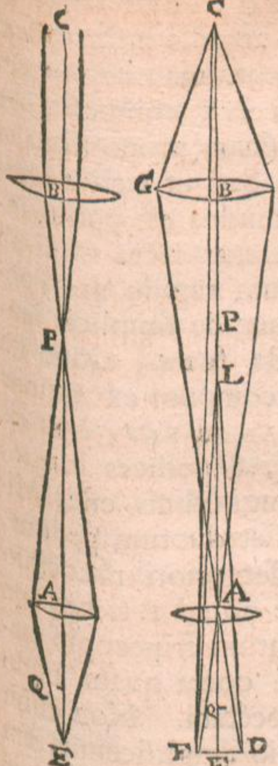
Hæc vero animalcula propter miram parvitatem (nam vel decem millia eorum exiguum arenæ granum non æquant) globulis istis vitreis inspicienda sunt, quorum in augendo præcipua est virtus.

PROPOSITIO LX.

Microscopiorum compositorum rationes explicare.

Nunc de compositis Microscopiis dicemus, quorum opera spectantur quæ lucem non transmittunt, verique eorum colores apparent, idque melius commodiusque quam lenticulis singulis.

Sint lentes Microscopii A minor, & B major. Cur autem ita ponendæ causam postea demonstrabimus. Sitque B oculo propior, qui sit ad C punctum; A vero ad rem visam obversa, quæ sit ad E, axis communis



nis lenti utrique A B C. Duplex autem adhibenda eſt obſervatio, quam duplici Schemate deſignamus. In priore radii ex uno rei viſæ punčto E manantes in lentem HA, conveniunt hujus refractione ad punčtum P, atque ibi ſeſe interſecantes, atque in lentem B pergentes, hujus opera paralleli redduntur atque ita ad oculum in C perveniunt, eoque diſtincta fit viſio. Oportet itaque diſtantiam AE, majorem eſſe quam ſit AQ foci diſtantia lentis A. Et proportionales eſſe debent EQ, EA, EP. Lens vero B ita collocanda ut ejus focus qui verſus A, cadat in ipſum punčtum P, quæ omnia ex ſupra demonſtratis manifeſta ſunt. Altera figura radios ſingulos exhibet a diverſis rei viſæ punčtis fluentes DAG, FAH, EAB. Eſt autem punčtum A medium lentis, ponunturque AP, AB, AC proportionales, ad definiendum oculi locum C; ita enim fit ut quam libet exiguo foramine pateat lenticula A, tota tamen lens B imagine rei viſæ impleatur, quoniam radii ex A in totam lentem B cadentes coguntur ad punčtum C.

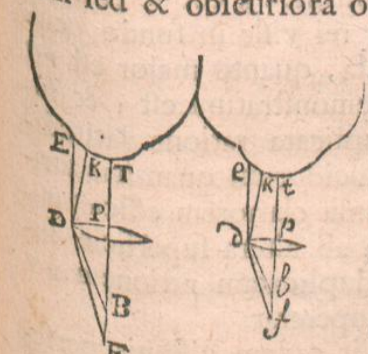
Proportio autem magnitudinis apparentis ad veram cognoſcetur ductâ in ſecunda figura rectâ CF. Erit enim ea quam habet angulus BCH ad angulum ECF, quæ ratio componitur ex ratione anguli BCH ad angulum BAH & anguli BAH ſeu EAF ad angulum ECF. Sed prior harum

rum est eadem quæ rectæ A B ad B C, & posterior ea quæ C E ad E A, quia in exiguis angulis hisce eadem censetur ratio angulorum quæ tangentium. Ergo ratio apparentis ad veram magnitudinem erit composita ex rationibus AB ad BC seu AP ad PB (nam proportionales sunt AP, AB, AC) & CE ad EA. Sed ut rectius æstimetur Microscopii effectus, comparandus est potius angulus BCH cum angulo, quo cerneretur recta EF si ab oculo 8 pollices distaret, hoc est, cum angulo ELF; positâ LE pollicum 8. secundum ea quæ de simplicis lenticulæ multiplicatione superius dicta fuere; atque ita ratio amplificationis censenda hic componi ex ratione anguli BCH ad BAH, & BAH seu EAF ad ELF; hoc est ex ratione AP ad PB, & lineæ EL, 8 pollices longæ, ad rectam E A. Si enim tantæ longitudinis esset Microscopium, ut ex. gratia, C E esset duorum pedum, hoc est, tripla L E; Repertaque esset priori ratiocinio magnitudo apparens ad veram, quæ 90 ad 1. tamen non nisi 30 ad 1 censenda esset quia tantum trigecuplo major appareret lineæ E F microscopii opera quam nudo oculo ex octo pollicum distantia spectata. Non enim considerandum quantum microscopio amplificemus rem duobus pedibus distantem, sed quanto major efficiatur quam cum ex eo spectatur intervallo, quo solemus oculum admovere cum curiosius intueri cupimus.

De Microscopiorum luce & aperturis.

Sicut antea de Telescopiorum aperturis inquisivimus, ita nunc ea quoque expendemus quæ Microscopiorum lenticulis ad res visas obversis conveniunt; unde omnis eorum pendet vis & effectus, adeo quidem ut hinc discendum sit quousque visibilium amplificatio perduci possit: quod hactenus a nemine, quod sciam, fuit defifinitum. Invenietur autem & hic progreſſus quidam infinitus qualis in Teleſcopiis oſtenſus fuit, non quidem in ſimplici unius lenticulæ Microſcopio, ſed in iis quæ ex binis componuntur.

Si ſingulis lentibus microſcopia conſtituantur, ſciendum eſt in iis, quæ circiter ſemipollicarem habent aut majorem foci diſtantiam, nihil opus eſſe moderanda apertura diſtinctam viſionem efficere; quoniam ipſa pupillæ anguſtia radios nocituros quantum opus eſt excludit, atque ita prorſus ac ſi non majori foramine lens adaperta foret. *In minoribus vero lenticulis ubi aperturarum circumſcriptio neceſſaria eſt*, oportet harum diametros eandem rationem ſervare quæ eſt foci diſtantiarum, ut æque diſtinctè res viſas referant. Claritas vero tunc erit in eadem ratione duplicata, ut proinde quo acutiores lenticulæ adhibebuntur, eo majora quidem ſed & obſcuriora omnia videri faciant.



Sit Lenticula P, cujus axis TBF, ſemidiameter aperturæ PD, quantam maximam experientia ferri poſſe oſtendit, eaque pupillâ minor, focus extremus radiorum rubrorum qui ab axi parallelis procedunt, in F puncto, ubi & viſibile collocatum ſit; focus violaceorum ab iiſdem axi parallelis procedentium, in B. Poſitis item iiſdem omnibus in minore lenticula p, cujus aperturæ ſemidiameter pd ſit ad foci diſtantiam pf ſicut in majore; Dico utraque æque diſtincte viſibile conſpici.

Cum enim utrobique ſi radius ED axi parallelus in lentem P incidat, idem ſpargatur per angulum FDB, ita

ita ut rubrum colorem extremum deferat ad F, violaceum extremum ad B; fiet viciſſim ut radius a viſibili manans FD, ſpargatur per angulum EDK, ita ut angulus EDK ſit æqualis FDB, ex propoſ. LV. Eſt itaque utrobique aberrationis angulus FDB a quo pendet aberratio radiorum in oculi fundo, ut oſtenſum cum de Teleſcopio agebatur. Quia vero ex natura aberrationis hujus, ut PF ad FB, ita eſt pf ad fb; itemque ex hypotheſi, PD ad PF ut pd ad pf, manifeſtum eſt æquales eſſe tam angulos PFD, pfd, quam PBD, pbd, quare & differentia priorum æqualis differentiæ poſteriorum, hoc eſt ang. FDB æqualis angulo fdb, ac proinde aberrationes in fundo oculi utrimque æquales, eoque viſio æque diſtincta.

Porro quia anguli PFD, pfd æquales, apparet eandem quantitatem radiorum utrobique a punctis rei viſæ F, f & aliis quibuſvis ad lentes manare, eoque & ad oculi pupillam. Latitudo vero rei viſæ in fundo oculi tanto major fit minori lenticula, quanto major eſt PF quam pf, ut in ſuperioribus demonſtratum eſt; & ſuperficies apparentes ſunt in duplicata ratione latitudinum. Ergo eadem radiorum lucidorum quantitas utrique ſuperficei illuſtrandæ impenſa clariorem efficiet minorem ſecundum rationem qua ab altera ſuperficie ſuperatur, hoc eſt, ſecundum duplicatam rationem PF ad pf, quod demonſtrandum ſupererat.

Cum itaque ſervari non poſſit eadem viſionis perfectio in acutioribus lenticulis quæ reperitur in majoribus, quin creſcat obſcuritas, ſequitur non licere amplificando quouſque libet progredi, niſi lux major illuſtrando viſibili aliunde arceſſatur. Nec ſic quoque multum proficimus, quoniam latitudo ad pupillam, ſeu cylindrulus radioſus a ſingulis rei viſæ punctis affluens,

fluens, de quo prop. LVIII. in teleſcopiorum explicatione dictum fuit, quique hic ipſam aperturæ latitudinem habet, non infra quintam ſextamve lineæ partem contrahi poteſt, adeo ut undique terminus præſcriptus ſit harum lenticularum efficaciæ.

Jam porro quid binis lentibus componendis fieri poſſit inveſtigabimus, atque inprimis oſtendemus plus præſtari poſſe brevioribus quam longioribus Microſcopiis. Quin etiam infinitum quendam ampliationis progreſſum dari demonſtrabimus, niſi obſtaret lenticularum parvitas, quæ continuo tanta fit, ut nec veras ſphæræ ſuperficies iis inducere, nec ſatis commode ipſas tractare poſſimus, quippe quæ & viſum denique effugiant.

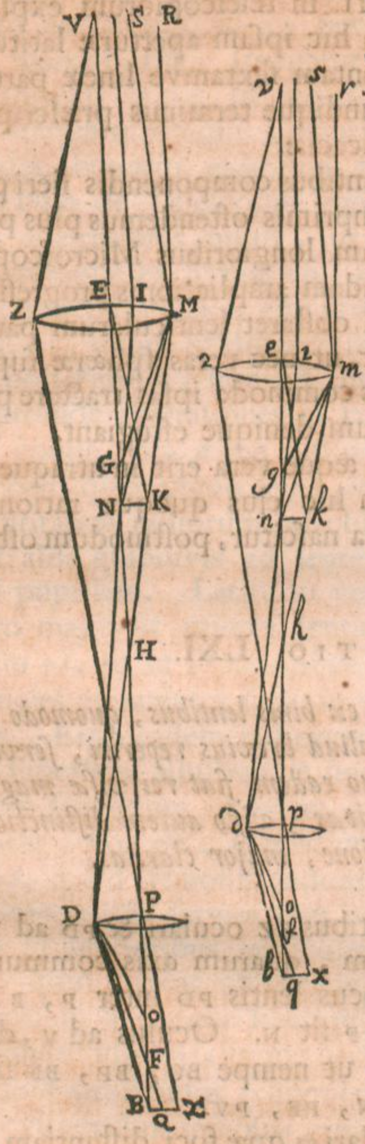
Sequens vero propoſitio æque vera erit in utraque radiorum aberratione. Nam hic ejus quoque rationem habendam eſſe quæ ex figura naſcitur, poſtmodum oſtendemus.

PROPOSITIO LXI.

Dato quocunque Microſcopio ex binis lentibus, quomodo diximus, compoſito, poteſt aliud brevius reperiri, ſervata eadem lente oculari, in quo eadem fiat rei viſæ magnitudo apparens, eadem claritas, viſio autem diſtinctior; vel ſervata eadem diſtinctione, major claritas.

Sit Microſcopium ex lentibus EZ oculari & PD ad viſibile obverſa compoſitum, quarum axis communis VEPB; Sit viſibile ad B; focus lentis PD inter P, B ſit O, focus lentis EZ inter E, P ſit N. Oculus ad V, diſpoſitio autem qualis ſupra, ut nempe BO, BP, BN ſint proportionales, itemque PN, PE, PV.

Porro adſumta lente oculari EZ quæ foci diſtantiam EN



æqualem habeat EN, jungatur ei lens altera pd, cujus foci diſtantia po minor ſit quam PO. Sicut autem PO ad po, ita ſit PN ad pn, & ita quoque PB ad pb. Itaque quemadmodum radii a puncto rei viſæ B manantes, refractione lentis PD conveniunt in N, ita quoque qui a puncto b veniunt, refractione lentis pd convenient in n, atque inde refractione lentis ez fient paralleli atque ita ad oculum ferentur qui ſit in v, poſitis proportionalibus pn, pe, pv. unde fiet ut totam lentem ez imagine rei viſæ plenam ſpectet, per ea quæ ſuperius explicata ſunt prop. XLIX.

Dico jam utroque microſcopio apparentes rei viſæ magnitudines fore æquales.

Quod ſi & aperturæ lentium PD, pd, proportionales ponantur ipſarum foci diſtantiis, Dico utroque microſcopio eandem haberi claritatem, ſed breviori omnia diſtinctius cerni, ſive angulum aberrationis in oculo hic minorem fieri.

Sint

Sint rei visæ latitudines lineolæ BX, bx, axibus perpendiculares & inter se æquales, & per centra lentium P, p, ducantur rectæ XPZ, xpz, lentibus EZ, ez occurrentes in Z, z, atque hinc ducantur ZV, zv, ad puncta oculi. Spectabuntur itaque lineolæ æquales BX, bx, angulis EVZ, evz, qui si inter se æquales esse ostendantur, hoc est, si eadem sit ratio VE ad EZ quæ ve ad ez, erit utrobique magnitudo apparens eadem.

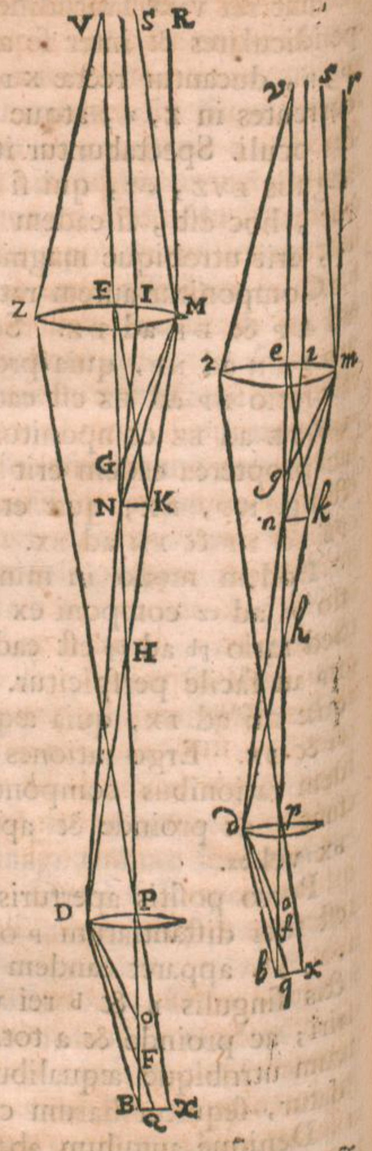
Componitur autem ratio VE ad EZ ex rationibus VE ad EP & EP ad EZ. Sed ratio VE ad EP est eadem quæ EN ad NP, quia proportionales sunt VP, EP, NP. Et ratio EP ad EZ est eadem quæ PB ad BX. Ergo ratio VE ad EZ componitur ex EN ad NP & PB ad BX, ac propterea eadem erit quæ rectang. EN, PB ad rectang. NP, BX; quæ etiam componitur ex rationibus PB ad NP & EN ad BX.

Eodem modo in minore microscopio ostenditur ratio ve ad ez componi ex rationibus pb ad np & en ad bx. Sed ratio pb ad np est eadem ex hypothesi quæ PB ad NP ut facile perspicitur. Itemque ratio en ad bx eadem quæ EN ad BX, quia æquales inter se en & EN itemque bx & BX. Ergo rationes VE ad EZ, & ve ad ez ex iisdem rationibus componuntur, eoque inter se æquales sunt; ac proinde & apparentes magnitudines lineolæ BX vel bx.

Porro positis aperturis PD, pd in eadem ratione, quæ est foci distantiarum PO, po, hoc est, quæ rectarum PB, pb, apparet eandem radiorum quantitatem ex punctis singulis B & b rei visæ microscopio utroque hauriri; ac proinde & a tota ipsarum superficie; quæ lux cum utrobique æqualibus in oculo imaginibus impendatur, sequitur harum claritatem æqualem fieri.

Denique angulum aberrationis a diffusione radii minorem esse in breviori microscopio facile quoque ostenditur. Si enim aberrationes istæ sint BF, bf, radiorum ex N & n venientium, facilè intelligitur eas fore inter se sicut distantiæ BP, bp quam eandem rationem quoque habent aperturæ sive earum dimidiæ PD, pd. Unde junctis FD fd, apparet triangula similia fieri BDF, bdf eorumque angulos ad D & d æquales. Cum igitur radii ND, nd, refractione lentium PD, pd ita dissipentur, ut DB, db rubrum colorem deferant; DF, df vero violaceum, ac proin vicissim violacei FD, fd abirent in DN, dn; fiet ut qui in radiis BD, bd violacei continentur, abeant in DM, dm, ita ut anguli MDN, mdn sint æquales angulis BDF, bdf *. Hi autem duo inter se æquales sunt, ergo etiam æquales anguli MDN, mdn. Cumque PN sit major quam pn. (sunt enim inter se ut foci distantiæ PB, pb) si ducantur axi perpendiculares NK, nk, rectis DM, dm

* per prop. LV.



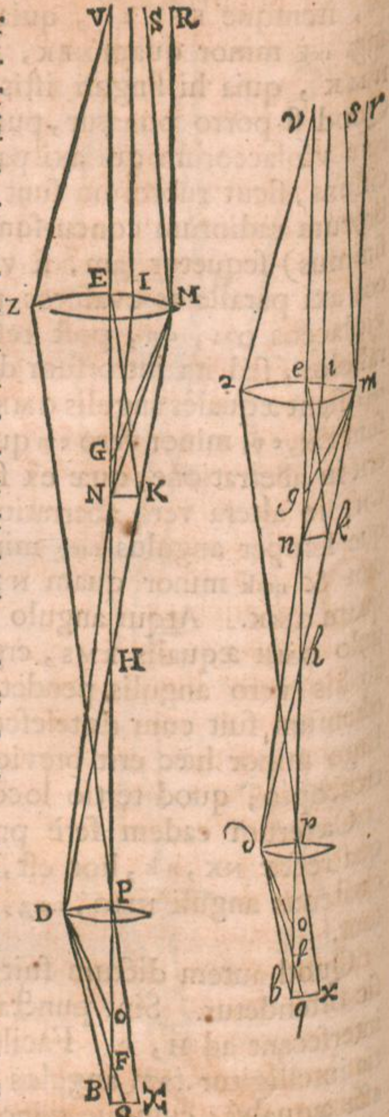
ac-occurrentes, erit major NK quam nk; & junctis NM, nm, itemque KE, kc, quia æquales sunt NE, nc, erit ang. nck minor quam NEK, ideoque & nmk minor quam NMK, quia hi singuli istis singulis æquales censentur. Quod si porro ponatur, puncta G, g, esse focos radiorum violaceorum qui axi paralleli in lentes EQ, cq incidunt, sicut rubrorum sunt foci N & n; (nam per rubrorum radiorum concursum semper foci distantias definimus) sequetur jam, si violacei per GM, gm ferantur eos axi parallelos evasuros puta in MR, mr, ac proinde violaceos DM, dm, post refractionem non fore axi parallelos, sed ita introrsum declinaturos, ut anguli RMS, rms fiant æquales angulis GMK, gmk. Quia autem æquales sunt EN, cn, minor vero cm quam EM, ut mox ostendemus, erit in aberratione, quæ ex figura oritur, minor gn quam GN, in altera vero aberratione hæ erunt æquales. Itaque semper angulus nmg minor quam NMG. Erat autem & nmk minor quam NMK, ergo totus gmk minor quam GMK. Atqui angulo gmk æqualis erat rms, & angulo GMK æqualis RMS, ergo & rms minor quam RMS; ab his vero angulis pendet aberratio intra oculum uti ostensum fuit cum de telescopiorum aperturis ageremus. Ergo minor hæc erit breviori huic quam longiori microscopio; quod tertio loco erat demonstrandum.

Cæterum eadem ferè proportione sese superabunt, qua rectæ NK, nk, hoc est, qua foci distantiæ PO, po, quatenus anguli NMG, nmg, ob parvitatem negligi possunt.

Quod autem dictum fuit minorem esse cm quam EM, sic ostendetur. Sint puncta quibus rectæ DM, dm axes intersecant ad H, h. Facile itaque ex superius expositis intelligitur tam angulos NDP, ndp, quam HDP, hdp, esse æquales: cumque minor sit dp quam DP, erit & ph mi-

minor quam PH. Eademque proportione hn minor quam HN. Sed ne est æqualis NE, ergo he minor quam HE. Et quia anguli æquales ehm, EHM erit em minor quam EM, quod ostendendum supererat.

Cum autem magis distincta visio breviori hoc microscopio obtingat quam longiori, sitque claritas in utroque eadem, sequitur aperturam lentis pd aliquantum augeri posse, donec aberrationis angulus rms fiat æqualis RMS, atque ita cæteris paribus, clarius fieri brevius microscopium.



Est ergo progressus claritatis hic infinitus, quippe quæ eo magis augetur quo acutior ponetur lenticula pd.

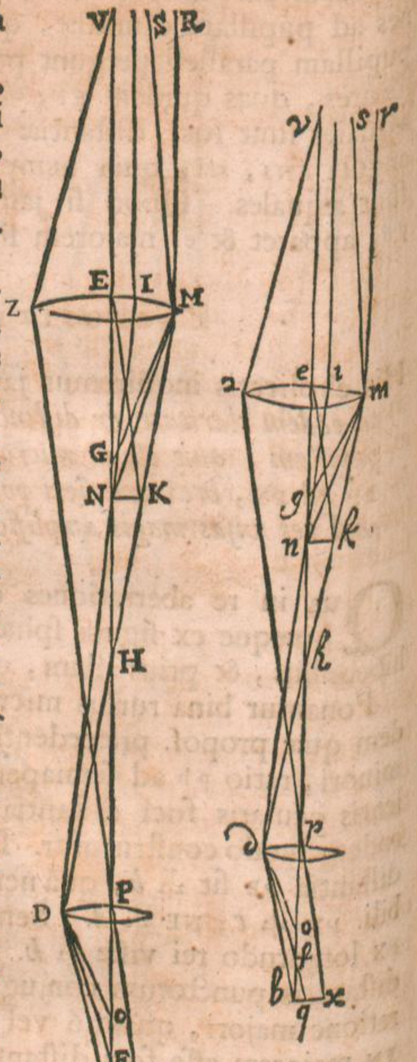
Neque vero obstabit latitudo ad Pupillam superius explicata, sed contra hæc quoque in brevioribus augebitur. Primum enim positis ut ante aperturis proportionalibus ad foci distantias, productisque rectis DN, dn, donec lentibus EZ, ez occurrant in punctis I, i. Erunt EI, ei, latitudines ad pupillam dimidiæ, quia a punctis I, i radii ad pupillam paralleli pergunt per BD, DI & bd, di, advenientes, quas quidem EI, ei æquales esse constat, quia æquales sunt foci distantiæ NE, ne, itemque æquales anguli ENI, eni; quia nempe ipsis oppositi DNP, dnp sunt æquales. Quod si jam igitur latior fiat apertura pd, apparet & ei majorem fieri quam EI.

PROPOSITIO LXII.

His explicatis inquiremus jam porro. *Quomodo servata eadem claritate & distinctione, itemque latitudine ad pupillam, quæ est in microscopio dato; nec non ratione* BP *ad* PN, *breviora fieri possint microscopia, quæque simul res visas magis amplificent.*

Qua in re aberrationes quæ ex dissipatione radii, quæque ex figura sphærica oriuntur, seorsim adhibebimus, & prius illam, quæ ex dissipatione.

Ponantur bina rursus microscopia, atque omnia eadem quæ propos. præcedenti, nisi quod incerta sit in minori, ratio pb ad semiaperturam pd; itemque incerta lentis ocularis foci distantia ne. Cætera vero omnia eodem modo construantur. Porro in majori microscopio distantia PB sit 2|2 *b*, quâ nempe lenticula P abest a visibili. PN 2|2 *c*; NE 2|2 *d*. Semiaperturæ latitudo PD 2|2 *a*. BX longitudo rei visæ 2|2 *h*. NK 2|2 *n*. Ponamus autem distantias punctorum conjugatorum PN ad PB, esse in ratione majori, quam 6 vel 7 ad 1, & foci distantiam EN majorem esse foci distantiâ PO, quemadmodum hæc in hujusmodi microscopiis rectè statui solent. At in minori microscopio assumatur distantia pb 2|2 *f*, semiaperpertura quæsita P d 2|2 x. Erit autem P n 2|2 $\frac{cf}{b}$, quia proportionales ponimus B P, P N; b p, p n. Quod si fuisset ut B P ad P D ita b p ad p d, apparet futuram p d 2|2 $\frac{fa}{b}$, & angulum aberrationis b d q, radii ex n venientis in lentem p, æqualem futurum angulo aberrationis B D Q radii ex N venientis in lentem P: Quia sicut prop. præcedenti ita hic quoque ut N P ad n p, ita P B ad p b, & ita quoque foci distantia P O ad p o. Nunc vero quia semiaperturam p d pono 2|2 x, non autem 2|2 $\frac{fa}{b}$, Erit ut $\frac{fa}{b}$ ad x ita angulus B D Q ad angulum b d q. Semper enim, ex lege aberrationis quam hic consideramus, b q ad p d eandem rationem servat, ac proinde quoque censetur angulus b d q proportionaliter crescere aut minui, cum apertura p d. Rursus si æquales essent anguli N D K, n d k, censeretur esse N K ad n k ut P N ad p n. Nunc vero

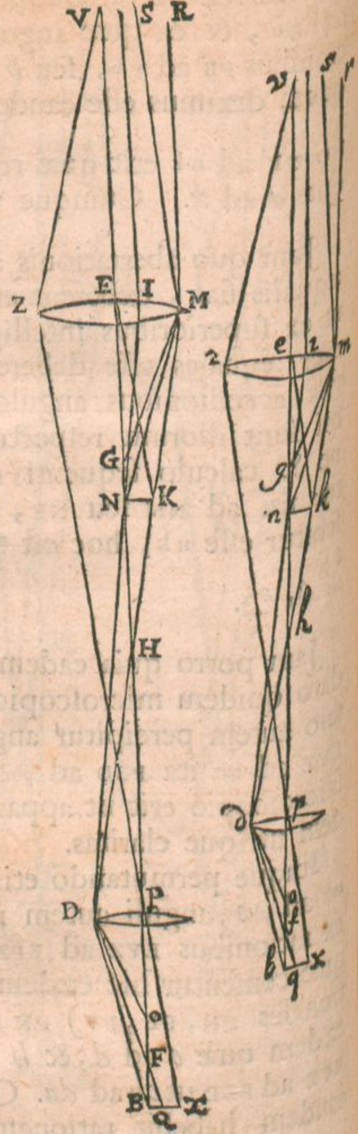


ro ratio NK ad nk componi censebitur ex rationibus PN ad pn, & ea quæ anguli NDK ad ndk, hoc est, ex rationibus PB ad pb, seu b ad f, & anguli BDQ ad bdq. quam diximus esse eandem quæ $\frac{fa}{b}$ ad x; ac proinde ratio NK ad nk erit quæ rectanguli fa ad rectang. fx. seu quæ a ad x. Cumque NK sit $2|2\ n$. Erit nk $2|2\ \frac{nx}{a}$.

Jam quo aberrationis angulus utrobique intra oculum æqualis fiat, deberent esse æquales anguli KMG, kmg; ut ex superioribus intelligi potest. Sed pro his ponemus æquales esse debere angulos KMN, kmn, neglectis accessionibus angulorum NMG, nmg; quia minimi sunt illorum respectu, ut apparebit in descriptione & calculo sequenti microscopii nostri. Sicut igitur NK ad NM seu NE, hoc est, sicut n ad d, ita censebitur esse nk, hoc est $\frac{nx}{a}$, ad nm seu ne, quæ itaque ne $2|2\ \frac{dx}{a}$.

Jam porro quia eadem longitudo lineolæ BX, bx in dato quidem microscopio spectatur angulo EVZ, in altero autem percipitur angulo evz; debet esse ut angulus EVZ ad evz ita PBD ad pbd; sic enim lux hausta utroque microscopio erit ut apparens magnitudo; ac proinde eadem utrique claritas.

Itaque permutando etiam erit angulus EVZ ad PBD ut evz ad pbd; anguli autem EVZ ad PBD ratio componitur ex rationibus EVZ ad EPZ sive BPX, & BPX ad PBD; quæ censentur hic eædem ac PE ad EV, sive (ob proportionales PN, PE, PV) PN ad NE, & BX ad PD, hoc est, eædem quæ c ad d, & b ad a; ac proinde erit angulus EVZ ad PBD ut ch ad da. Quare & angulus evz ad pbd hanc eandem habebit rationem. Atqui ratio anguli evz ad pbd, componitur ex rationibus ang. evz ad epz, sive bpx, & bpx ad pbd; quæ censentur hic eædem ac pe, ad eu, sive pn ad ne, & bx ad pd, hoc est, eædem quæ $\frac{cf}{b}$ ad $\frac{dx}{a}$, & h ad x, ac proinde ratio composita ex $\frac{cf}{b}$ ad $\frac{dx}{a}$ & h ad x, hoc est, ratio $\frac{cfh}{b}$ ad $\frac{dxx}{a}$, erit eadem quæ ch ad da. Unde fit $xx \; 2|2 \; \frac{aaf}{b}$; & $x \; 2|2 \; a\sqrt{\frac{f}{b}}$.



Invenitur itaque hic, sicut in Telescopiis, ut si maneat eadem claritas, eademque aberratio ex dissipatione, prodeant aperturæ lentium quæ rei visæ obvertuntur, in subduplicata ratione foci distantiarum, nam ut $\sqrt{b}$ ad $\sqrt{f}$, ita hic aperturæ semidiameter a ad x, sunt autem b & f foci distantiæ PO & po.

Porro quoniam, sicut magnitudines apparentes in utroque microscopio, hoc est, sicut angulus ZVE ad zve, ita diximus esse angulum

lum DBP ad dbp ſequitur ſi multiplicatio duplo major poſtuletur in microſcopio ex lentibus e & p compoſito quam in altero; debere angulum dbp duplo majorem eſſe quam DBP, ut eadem in utroque ſervetur claritas. Ac proinde cum BP ſit ad PD, ut b ad a, fore bp ad pd, hoc eſt f ad $a\sqrt{\frac{f}{b}}$ ut b ad $2a$. Unde fit $f = \frac{1}{4}b$, atque hinc x ſive $\sqrt{\frac{aaf}{b}} = \frac{1}{2}a$. Et foci diſtantia ne quæ erat $\frac{dx}{a} = \frac{1}{2}d$.

Sic poſito microſcopio quale eſt noſtrum, in quo lenticulæ foci diſtantia PO eſt $\frac{7}{10}$ partium, qualium pollex eſt 1, lentis ocularis foci diſtantia EN $= 2$, diſtantiæ NP $= 7$; ac proinde diſtantia rei viſæ PB $= \frac{7}{9}$ ex propoſ. XX, quia nempe ad lentem P, conjugata ſunt puncta N & B. Item EV $= \frac{18}{7}$, diſtantia nempe oculi a lente E, quia ad eam conjugata ſunt puncta P & V. Item ſemidiameter aperturæ PD $= \frac{1}{20}$. His inquam poſitis, fiet hinc aliud duplo magis res viſas amplians microſcopium ſervata eadem claritate ac diſtinctione, in quo po erit $\frac{7}{40}$; en $=$ 1: diſtantia np $= \frac{7}{4}$: pb $= \frac{7}{36}$: ev $= \frac{11}{7}$, pd $= \frac{1}{40}$, cujus itaque longitudo tota vb circiter $4\frac{1}{2}$ pollicum cum noſtri longitudo VB ſit circiter $12\frac{1}{3}$ poll. eoque fere triplo major.

Eſt autem in noſtro amplificatio ratione diametri, ea quæ 36 ad 1, ut nempe ſecundum ea, quæ propoſ. LX. diximus, tanto auctior appareat rei viſæ latitudo, quam ſi ab octo pollicum diſtantia nudo oculo ſpectaretur; quoniam, ut ibi oſtenſum, fuit proportio hæc componitur ex rationibus PN ad NE, & ea quæ longitudinis 8 poll. ad PB, hoc eſt, ex rationibus 7 ad 2 & 8 ad $\frac{7}{9}$, quæ efficiunt rationem 36 ad 1.

Latitudo ad pupillam, de qua insuperioribus, in utroque microscopio eadem esse probatur. Quia cum in majore sit, ut NP 2|2 c ad PD 2|2 a, ita NE 2|2 d ad EI. Erit EI latitudo ad pupillam 2|2 $\frac{ad}{c}$. At in minore similiter, quia ut np hoc est $\frac{cf}{b}$, ad pd hoc est, $a\sqrt{\frac{f}{b}}$, ita ne 2|2 $d\sqrt{\frac{f}{b}}$, ad ei, invenitur & hæc 2|2 $\frac{ad}{c}$.

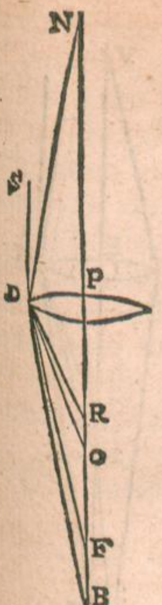
Hæc itaque sic se habebunt si tantum aberrationis ejus quæ ex dissipatione ratio ineunda sit, eritque progressio velut infinita ad majores microscopiorum effectus obtinendos, quoniam poni poterat f ad $a\sqrt{\frac{f}{b}}$ ut b ad aliam quamlibet. Sed verò examinandum est, an non altera aberratio, quæ ex figura oboritur, aliquid turbare possit. Quem in finem oportet ut utriusque aberrationis angulum in nostro illo, quod diximus microscopio, ubi neutram adhuc nocere scimus, primum calculo investigemus.

Præmittimus vero Lemma hujusmodi.

Sit lentis convexæ PD *axis* NPB, *focus in* O, *radius axi parallelus* SD, *qui itaque ex refractione dissipatus mittit radium rubrum in* DO, *sed violaceum extremum ponamus convenire cum axe in* R. *Quod si jam a puncto in axe* N, *feratur in lentem eandem radius* ND, *qui ex refractione dissipatus mittat radium rubrum in* B, *violaceum extremum in* F. *Dico angulum* BDF *æqualem censeri posse angulo* ODR, *tantoque propius quanto inclinatio superficierum lentis in* D *erit minore angulo, quantoque minus distabunt puncta* B, O.

Cum enim radius ruber qui inest incidenti radio SD, eat in DO; ruber vero qui in radio ND eat in

DB;



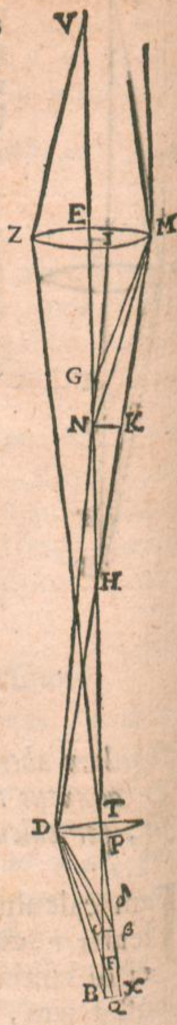
DB; Erit ex propos. LV. angulus BDO proxime æqualis SDN. Similiterque cum radius violaceus qui inerat in SD abeat in SR; itemque violaceus qui in ND, abeat in DF; censebitur ex eadem prop. LV. ang. FDR æqualis SDN; Itaque æquales inter se censentur & BDO, FDR, & ablato communi FDO, erunt similiter æquales BDF, ODR ac tanto propius quanto & angulus inclinationis superficierum lentis in D erit minoris anguli, & rectiores radii SD, ND in superficies illas incident, radiique ipsi minorem intercipient ang. SDN, ut ex iis intelligitur quæ ad prop. LV. supra dicta fuerunt. Patet autem tanto minorem esse SDN, quanto punctum B minus distat ab O, tanto enim major PN, quia proportionales sunt BO, BP, BN ex prop. XX.

PROPOSITIO LXIII.

Angulum aberrationis ex dissipatione in dato microscopio, & quantus in Telescopiis & Microscopiis nocere non possit, per calculum inquirere.

Jam calculum quem diximus sic prosequemur. Erat lentis P, cujus crassitudinem pro nulla habemus, foci distantia PO 2|2 $\frac{7}{10}$ poll. PD vero $\frac{1}{20}$. Jungatur DO. Constat jam, si radius axi parallelus desuper in D incidat, eum spargi debere angulo ODβ, qui sit $\frac{1}{50}$ anguli DOP, uti diximus cum radii dissipationem exponeremus. Sit Oβ axi perpendicularis quem secet Dβ in δ. Igitur

tur $o\beta$ censebitur $= \frac{1}{50}$ PD, sed PD erat $\frac{1}{20}$ poll. Ergo $o\beta = \frac{1}{1000}$, & OD seu OP, quæ erat $\frac{7}{10}$, erit ad $O\beta$, ut 700 ad 1. Sed per lemna præmissum, radius incidens ND dissiparetur angulo qui esset æqualis $OD\beta$, isque angulus esset BDQ, quandoquidem ND ponitur mittere radium per DB. Itaque ang. BDQ $=$ $OD\beta$. Quia vero vicissim radius incidens BD dissipatur angulo NDK, æquali BDQ, ex causa in superioribus explicata, hoc est, angulo $OD\beta$; erit & DN, seu PN ad NK, ut DO seu PO ad $O\beta$, hoc est, ut 700 ad 1. Sed EN est ad NP ut 2 ad 7, sive ut 200 ad 700. Ergo EN seu MK ad NK ut 200 ad 1, hoc est, ut radius tab. 100000 ad 500 tangentem 17′: 12″; ac proinde angulus aberrationis hujus NMK erit in nostro microscopio proximè 17′: 12″.



Idemque erit in breviori illo pollicum $4\frac{1}{2}$, & in omnibus deinceps diminutis, quia hæc conditio aberrationis æqualis in investigatione posita fuit. Quod si angulo NMK addamus ang. NMG, quem ibi ob parvitatem neglegimus, fiet hic ang. aberrationis 17′: 42″ circiter.

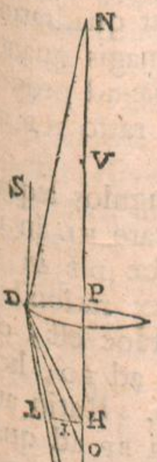
Sed in Telescopiis si quæramus quantus aberrationis hujus angulus ferri possit, inveniemus in nocturnis quidem $31\frac{1}{3}$′ circiter, in diurnis vero dimidium sive $15\frac{2}{3}$′, quod ab illis 17′: 42″ non multum discrepat. Etenim in Figura propos. LVI. posita lentis AC foci distantia CF pedum

30,

30, diximus CA esse $\frac{3}{2}$ poll. Unde FQ 2|2 $\frac{1}{50}$ CA, hoc est, $\frac{3}{100}$ poll. Sed QD seu foci distantia FP tunc erat $3\frac{3}{10}$ poll. Ergo QD ad QF ut $3\frac{3}{10}$ ad $\frac{3}{100}$, hoc est, ut 110 ad 1, hoc est, ut semidiameter circuli 100000 ad 909 tangentem anguli 31′: 20″, qui est proximè angulus aberrationis QDF, quantum esse diximus.

Ex his intelligitur cur nec in nostro Microscopio neque in alio quamlibet breviori eoque magis amplificante, quod secundum inventam regulam ex nostro ordinatum fuerit, hæc aberratio ex radii dissipatione nocitura sit. Nunc vero de aberratione quæ ex figura lentium sphærica oritur examen instituamus.

Ubi rursus lemma præmittendum est hujusmodi.



Sit lentis convexæ PD *axis* NPB. *Focus in* O. *Radius axi parallelus* SD, *qui refractus eat per* DH, *faciens aberrationem* OH, *a puncto autem in axe* N, *feratur ad lentem eandem radius* ND, *qui refractus conveniat cum axe in* F, *sitque* B *punctum conjugatum ipsi* N, *adeoque radii* ND *aberratio* FB. *Dico* HO *ad* FB, *fore proxime ut quadratum* PO *ad quadratum* PB, *tantoque magis quanto distantia* NP *ad* PO *comparata major erit. Angulos etiam aberrationis* HDO, FDB *esse æquales.*

Sumatur enim PV in axe æqualis PO, sitque HL axi perpendicularis & PO sive PV sit 2|2 c, PD 2|2 a; NP 2|2 d, HO 2|2 n. Jam quia proportionales sunt NV, NP; PO, PB ex prop. XX, erit PB 2|2 $\frac{dc}{d-c}$. Quia vero

an-

angulus LDH æqualis cenſetur SDN ex propoſ. LV., hoc eſt, angulo DNP, erit proxime ut NP $2|2$ d, ad PD $2|2$ a, ita DL quæ cenſetur æqualis PH, hoc eſt, $c-n$, ad LH, quæ erit $\frac{ac-an}{d}$. Et quia DP ad LH ut PF ad FH, erit DP minus LH, hoc eſt $\frac{da-ac+an}{d}$ ad DP $2|2$ a, ut PH $2|2$ $c-n$ ad PF, quæ erit $\frac{dc-dn}{d-c+n}$, quæ ſubtracta a PB $2|2$ $\frac{dc}{d-c}$, fit FB $2|2$ $\frac{ddn}{dd-2dc+cc+dn-cn}$ quæ ad HO $2|2$ n, ut dd ad $dd-2dc+cc+dn-cn$. Hæc autem ratio eadem cenſeri poteſt, quæ dd ad $dd-2dc+cc$, quia quantitas n minima eſt cæterarum reſpectu. Sicut autem dd ad $dd-2dc+cc$, hoc eſt, ut quadratum NP ad quadratum NV ita eſt quadratum PB ad quadratum PO; quia diximus eſſe ut NV, ad NP, ita PO ad PB; Ergo erit FB ad HO proxime ut quadratum PB ad quadratum PO, ac tanto quidem magis quanto angulus SDN minor erit, ut patet ex iis quæ ad propoſ. LV. annotavimus; hoc eſt, quanto major ratio NP ad PO. Itaque patet propoſitum.

Hinc vero ſequitur, ductis DO, DB, angulos æquales fore HDO, FDB. Ponatur enim DO ſecare HL in I, & FE axi perpendicularem occurrere rectæ DB in E. Quia ergo ratio BF ad OH componitur ex rationibus BF ad FE, & FE ad HI, & HI ad HO. Hoc eſt, ex rationibus BP ad PD, & FE ad HI, & PD ad PO; hoc eſt, ex rationibus FE ad HI, & BP ad PO. Ratio autem eadem BF ad OH eſt ea quæ quadrati BP ad quadratum PO, ex ante demonſtratis; neceſſe eſt rationem FE ad HI eandem eſſe quæ BP ad PO, ſive quæ FP ad PH, quia FB & HO ſunt minimæ; ſive quæ FD ad HD. Unde angulus FDE cenſetur æqualis HDI propter paritatem angulorum DFP, DHP.

PRO-

PROPOSITIO LXIV.

Angulum aberrationis ex figura eodem modo ut in præcedenti propositione per calculum investigare.

Hinc ad calculum accedimus, in quo jam crassitudo lenticulæ P consideranda est, quæ sit TP, in figura superiori. Habet autem lenticula hæc in nostro Microscopio superficiem alteram planam quæ deorsum conversa est. Cumque foci distantia PO sit $\frac{7}{10}$ pollicis, eademque æqualis censeri possit diametro convexitatis superficiei TD; erit ut PO, sive $\frac{7}{10}$ ad PD = $\frac{1}{20}$, ita hæc ad TP, quæ fiet $\frac{1}{280}$. Hujus vero $\frac{7}{6}$ æquantur aberrationi $O\delta$, quam facit radius axi parallelus in D incidens, quia lenticulæ plana superficies in partem alteram obversa est. Ergo $O\delta$ = $\frac{7}{1680}$ sive $\frac{1}{240}$. Sicut autem δP seu OP ad PD, hoc est, sicut $\frac{7}{10}$ ad $\frac{1}{20}$, sive ut 14 ad 1, ita est δO ad $O\beta$. Ergo fit $O\beta$ = $\frac{1}{3360}$: & DO seu PO ad $O\beta$ ut $\frac{7}{10}$ ad $\frac{1}{3360}$ sive ut 2352 ad 1. Sed per Lemma præcedens radius incidens ND faceret angulum aberrationis BDQ æqualem $OD\beta$: ac proinde vicissim radius BD faciet angulum aberrationis NDK æqualem BDQ seu $OD\beta$. Ergo ut DO seu PO, ad $O\beta$, hoc est, ut 2352 ad 1, ita erit DN, seu PN ad NK. Sed ut 2 ad 7, sive ut 672 ad 2352, ita est EN ad NP. Ergo ex æquo EN ad NK seu MK ad NK, ut 672 ad 1, hoc est, ut in Tabulis semidiameter 100000 ad 149, tangentem anguli 5′: 8″, qui est angulus NMK.

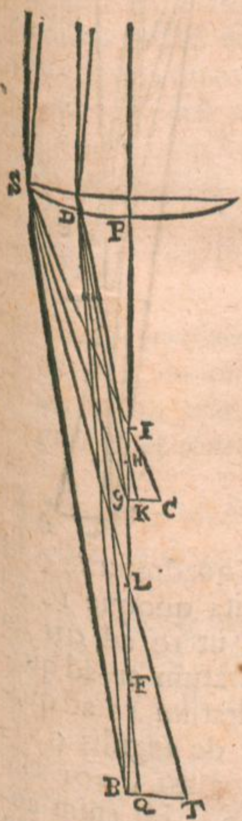
Hic igitur in microscopio nostro est angulus aberrationis ex figura. Quo majorem ferri posse absque visionis incommodo inde apparet, quod inversâ lenticulâ PD, ut pars convexa deorsum spectet, quadruplo fere major ſit iſte aberrationis angulus; quia tunc aberratio radii qui parallelus axi incideret in D, æquat $\frac{9}{2}$ craſſitudinis PT, ex propoſ. XXVII. quæ aberratio hic erat tantum $\frac{7}{6}$ PT, hoc eſt, fere pars quarta tantum iſtius. Unde & angulus aberrationis NMK fere quadruplus tunc invenitur ejus qui nunc inventus eſt 5′. Atqui ſic inversâ lenticulâ, vix percipitur aliquid diſtinctæ viſioni decedere. Itaque 20 circiter ſcrupulorum primorum ferri poteſt angulus iſtius aberrationis; accedente licet angulo aberrationis quæ ex diſſipatione, qui erat fere 18′. Semper enim hanc aberrationem alteri ſuperaddi facile intelligi poteſt.

Quod ſi in breviori illo $4\frac{1}{2}$ pollicum microſcopio, quæramus eodem modo angulum aberrationis quæ ex figura, inveniemus eum quoque 20′ circiter; qui proinde vix quoque nocere poterit; ut proinde eximius futurus ſit ejuſmodi perſpicilli effectus. Si vero breviora etiam, ac magis amplificantia moliamur ex præſcripto Regulæ ſuperius inventæ; creſcet ſemper iſte aberrationis angulus; adeoque hæc cauſa impedit quo minus Regulam iſtam ſequentes, infinito progreſſu microſcopiorum virtutem augere poſſimus. Sed quod mirum fortaſſe videbitur, aliam ſuppetere oſtendemus Regulam, per quam ejuſmodi progreſſus concedatur. Præmittimus autem Lemma ejuſmodi.

Lemma.

Lemma.

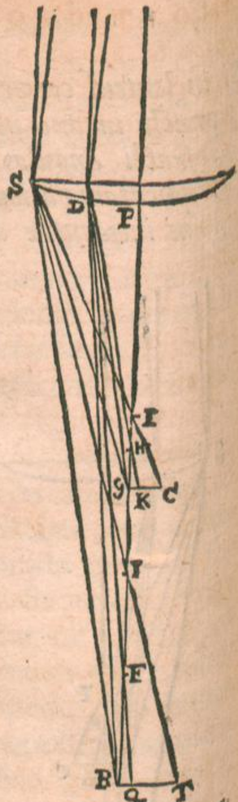
Si in lentem convexam radii incidant axi paralleli, vel a puncto in axe ultra focum distante manantes, efficient ii refracti angulos aberrationis ex Figura, qui proximè triplicatam rationem habeant ejus, quam distantiæ punctorum incidentiæ ab axe.



Primo vero de parallelis ostendemus.

Sit lens PS axis PB, focus G, radiorum nempe axi parallelorum ab eoque minimo distantium. Lentis crassitudo pro nulla habeatur, quia tota PS valde exigua intelligitur ad PB comparata. Porro radius parallelus qui in D punctum incidit feratur in DH, faciens aberrationem GH; qui vero in S incidit parallelus feratur in SI, faciens aberrationem GI. Junctis igitur DG, SG, erunt anguli aberrationis quos hic intelligimus GSI, GDH. Quos dico proximè triplicatam rationem habere ejus quæ SP ad DP.

Sit enim GC ad axem perpendicularis, cui occurrant productæ DH, SI in K & C. Censentur igitur anguli GSC, KDG eam habere rationem quæ CG ad GK, cum DP, SP sint minimæ respectu PG. Est autem ratio CG ad KG eadem compositæ ex rationibus CG ad GI, & GI ad GH & GH ad GK; quarum prima ratio CG ad GI, eadem est quæ SP ad PI, vel quæ SP ad ad PG, quia IG minima eſt reſpectu PG. Item ratio altera GI ad GH eſt eadem quæ quadrati PS ad qu. PD, per prop. XXX. Et tertia GH ad GK eadem quæ HP ad PD, hoc eſt, quæ GP ad PD, quia HG eſt minima reſpectu GP. Itaque ratio CG ad KG, componetur ex rationibus SP ad PG, & PG ad PD, & quadrati PS ad quadratum PD. Sed harum priores duæ efficiunt rationem SP ad PD, Ergo ex tribus compoſita erit eadem quæ cubi SP ad cubum PD. Itaque oſtenſum eſt rationem CG ad KG, ſive anguli aberrationis CSG ad KDG, proxime eſſe eam quæ cubi SP ad cubum PD, hoc eſt, triplicatam rationis SP ad PD.



Ponamus jam radios incidentes in D & S, venire a puncto cui conjugatum ſit punctum B, atque eſſe radii in D cadentis aberrationem BF; ejus vero qui in S cadit, aberrationem BL.

*Pag. 247. Cum igitur ex lemmate ultimo ſit ut quadratum PG ad quadratum PB, ita GH ad BF; atque ita quoque IG ad LB. Erit permutando & convertendo, ut IG ad GH ita LB ad BF. Sed IG erat ad GH ut quadratum SP ad quadratum DP, ergo & LB ad BF ut quadratum SP ad quadratum DP. Unde jam, ſicut ante de angulis GSI, GDH, oſtendetur eadem ratione angulos BSL, BDF eſſe in ratione triplicata diſtantiarum SP, PD. Hi enim anguli, ſive BST, BDQ cenſentur eſſe inter ſe ut BT ad BQ, quia DP, SP ſunt minimæ reſpectu BP. Eſt autem ra-

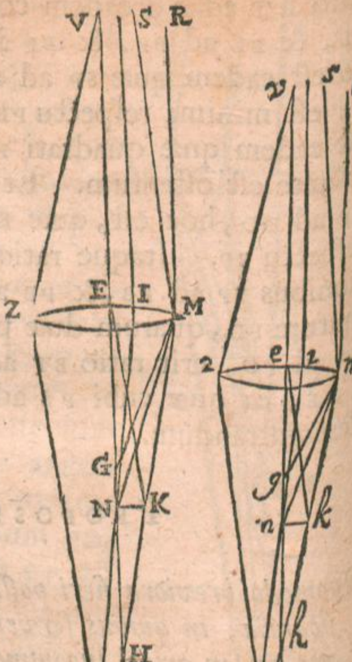
ratio BT ad BQ eadem compositæ ex rationibus TB ad BL, & BL ad BF, & BF ad BQ. Quarum prima TB ad BL est eadem quæ SP ad PL, seu quæ SP ad PB, quia LB est minima respectu PB. Item ratio altera BL ad BF est eadem quæ quadrati PS ad quadratum PD, ut paulo ante est ostensum. Et tertia BF ad BQ est eadem quæ FP ad PD, hoc est, quæ BP ad PD, quia FB est minima respectu BP. Itaque ratio BT ad BQ componetur ex rationibus SP ad PB, & PB ad PD, & quadrati PS ad quadratum PD, quarum duæ priores cum efficiant rationem SP ad PD, erit ratio BT ad BQ, hoc est anguli BSL ad BDF, ea quæ cubi PS ad cubum PD, quod supererat demonstrandum.

PROPOSITIO LXV.

Quomodo breviora fieri possint microscopia & magis amplificantia, in quibus servetur eadem claritas & distinctio, nec tamen priori incommodo a majori aberratione ex figura fiant obnoxia.

Ponantur bina rursus microscopia, atque omnia eadem quæ propositione LXI, nisi quod incerta sit in minori ratio pb ad semiaperturam pd; itemque incerta lentis ocularis foci distantia ne. Cætera vero omnia eodem modo construantur. Porro in majori microscopio distantia PB sit 2|2 *b*, quâ nempe lenticula P abest a visibili. PN 2|2 *c*; NE 2|2 *d*. Semiaperturæ latitudo PD 2|2 *a*. BX longitudo rei visæ 2|2 *h*. NK :|: *n*. Ponamus autem distantias punctorum conjugatorum PN ad PB, esse in ratione majori, quam 6 vel 7 ad 1, & foci distantiam EN majorem esse foci distantiâ PO, quemadmodum hæc in hujusmodi microscopiis rectè statui solent. At in minori microscopio assumatur distantia $pb = f$, semiapertura quæsita $pd = x$. Erit autem $pn = \frac{cf}{b}$, quia proportionales ponimus BP, PN; bP, pn. Quod si fuisset ut BP ad PD ita pb ad pd, apparet futuram $pd = \frac{fa}{b}$, & angulum aberrationis bdq, radii ex n venientis in lentem P, æqualem futurum angulo aberrationis BDQ radii ex N venientis in lentem P: Quia sicut prop. præcedenti ita hic quoque ut NP ad np, ita PB ad pb, & ita quoque foci distantia PO ad po. Nunc vero quia semiaperturam pd pono $= x$, non autem $= \frac{fa}{b}$, erit ex lemmate præmisso ut cubus $\frac{fa}{b}$, hoc est, ut $\frac{f^3a^3}{b^3}$ ad x^3 ita angulus BDQ ad angulum bdq.

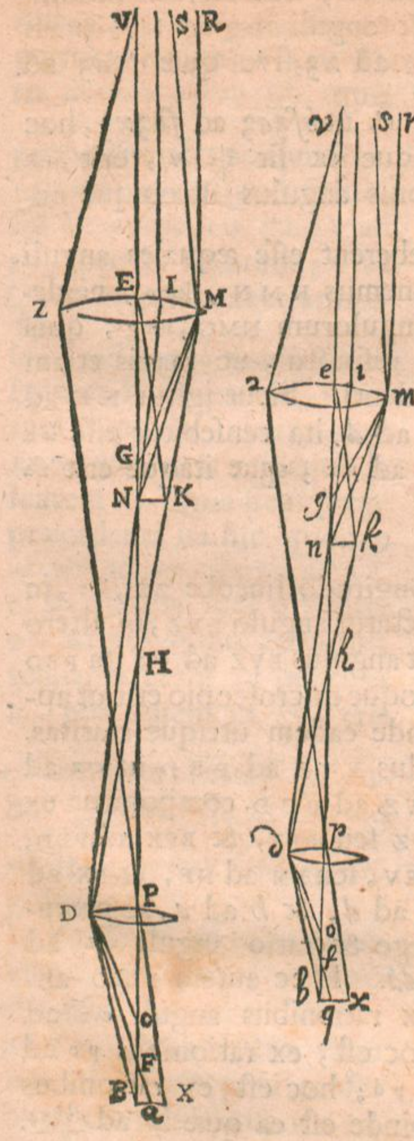
Rursus si æquales essent anguli NDK, ndk, censeretur esse NK ad nk ut PN ad pn. Nunc vero ratio NK ad nk componi censebitur ex rationibus PN ad



pn, & ea quæ anguli NDK ad ndk; hoc eſt, ex rationibus PB ad pb ſeu b ad f, & anguli BDQ ad bdq; quam diximus eſſe eandem quæ $\frac{f3a3}{b3}$ ad $x3$, ſive quæ $f3a3$ ad $b3x3$, ac proinde erit NK ad nk ut $bf3a3$ ad $fb3x3$, hoc eſt, ut $ffa3$ ad $bbx3$. Cumque NK ſit 2/2 n, erit nk 2/2 $\frac{nbbx3}{ffa3}$. Jam quo aberrationis angulus utrobique intra oculum æqualis fiat, deberent eſſe æquales anguli KMG, kmg; ſed pro his ponemus KMN, kmn, neglectis ut ſupra acceſſionibus angulorum NMG, nmg, quia exigui prorſus ſunt illorum reſpectu, ac magis etiam quam in diſquiſitione præcedenti. Sicut igitur NK ad NM ſeu NE, hoc eſt, ſicut n ad d, ita cenſebitur eſſe nk ad nm ſeu ne, hoc eſt, $\frac{nbbx3}{ffa3}$ ad ne, quæ itaque erit 2/2 $\frac{dbbx3}{ffa3}$.

Jam porro quia eadem longitudo lineolæ BX, bx, in dato quidem microſcopio ſpectatur angulo EVZ, in altero autem angulo evz; debet eſſe ut angulus EVZ ad evz ita PBD ad pbd. Sic enim lux hauſta utroque microſcopio erit ut apparens magnitudo, ac proinde eadem utrique claritas. Ergo & permutando, angulus EVZ ad PBD ut evz ad pbd. Ratio autem anguli EVZ ad PBD componitur ex rationibus anguli EVZ ad EPZ ſeu BPX, & BPX ad PBD; hoc eſt ex rationibus PE ad EV, ſeu PN ad NE, & BX ad PD; hoc eſt, ex rationibus c ad d, & h ad a, ac proinde eſt ea quæ ch ad da. Ergo & ratio anguli evz ad pbd debet eſſe ea quæ ch ad da. Hæc autem ratio anguli evz ad pbd componitur ex rationibus anguli evz ad epz ſeu bpx, & bpx ad pbd; hoc eſt, ex rationibus pe ad ev, ſeu pn ad ne, & bx ad pd; hoc eſt, ex rationibus $\frac{cf}{b}$ ad $\frac{dbbx3}{ffa3}$, & h ad x, ac proinde eſt ea quæ $\frac{hcf}{b}$ ad $\frac{dbbx4}{ffa3}$.

Igi-



Igitur eadem ratio *ch* ad *da* quæ $\frac{hcf}{b}$ ad $\frac{dbbx^4}{ffa^3}$. Unde fit $x^4 = \frac{f^3a^4}{b^3}$: Et $x = \frac{a\sqrt{\sqrt{f^3}}}{\sqrt{\sqrt{b^3}}}$

Quod ſi jam velimus ut microſcopium inventum duplo magis amplificet res viſas quam quod erat datum: oportet ob cauſam, quam expoſuimus in præcedenti inquiſitione, ut angulus dbp duplo major ſit quam DBP, cumque BP ad PD ſit ut *b* ad *a*, debebit eſſe bp ad pd, hoc eſt, *f* ad $\frac{a\sqrt{\sqrt{f^3}}}{\sqrt{\sqrt{3b}}}$ ut *b* ad 2*a*. Unde fit $f = \frac{1}{16}b$, atque hinc x ſive $\frac{a\sqrt{\sqrt{f^3}}}{\sqrt{\sqrt{b^3}}} = \frac{1}{8}a$. Et foci diſtantia en, quæ erat $\frac{dbbx^3}{ffa^3} = \frac{1}{2}d$.

Secundum quæ ex noſtro microſcopio, cujus menſuras in priori diſquiſitione poſuimus, fiet aliud duplo magis amplificans ratione diametri (ſervata eadem claritate ac diſtinctione,) in quo po erit $\frac{7}{160}$ poll. en $=$ 1. diſtantia

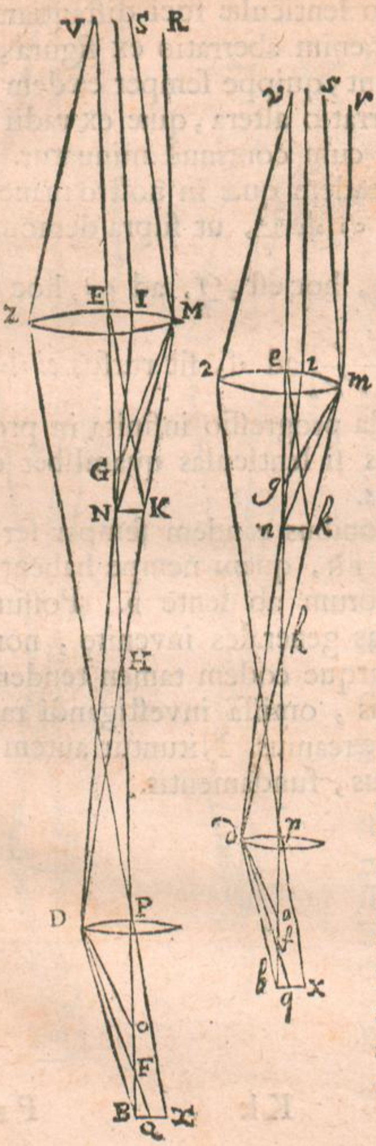
np

$np = \frac{7}{16}$, $pb = \frac{7}{144}$, $cv = \frac{23}{7}$, ſemidiameter aperturæ $pd = \frac{1}{160}$, atque ita ulterius progredi licet ex hujus regulæ præſcripto, ponendo lenticulæ foci diſtantiam po quamlibet exiguam, nec enim aberratio ex figura, nec obſcuritas unquam nocebunt, quippe ſemper eædem manentes. Neque etiam aberratio altera, quæ ex radii diſſipatione oritur, obſtabit, cum continuè minuatur. Latitudo vero ad pupillam eadem quæ in noſtro manebit; erat enim ibi iſta latitudo $ei = \frac{ad}{c}$, ut ſupra demonſtratum. Hic vero quia ut np, hoc eſt, $\frac{cf}{b}$, ad pd, hoc eſt, $\frac{a\sqrt{\sqrt{f^3}}}{\sqrt{\sqrt{b^3}}}$, ita ne, hoc eſt, $\frac{d\sqrt{\sqrt{f}}}{\sqrt{\sqrt{b}}}$ ad ei, fit rurſus $ei = \frac{ad}{c}$.

Eſt igitur ex hac Regula progreſſio infinita in propagandis microſcopii viribus ſi lenticulas quamlibet exiguas parari poſſe ponamus.

In hiſce vero diſquiſitionibus eandem ſemper ſervari ſtatuimus rationem BP ad PN, quam nempe habent diſtantiæ punctorum mutuorum ab lente P. Poſſumus autem & abſque eo regulas generales invenire, nonnihil à prioribus diverſas, atque eodem tamen tendentes, quas breviter perſcribemus, omiſſa inveſtigandi ratione, ne nimis diu hic obhæreamus. Nituntur autem iiſdem, quæ jam expoſuimus, fundamentis.

PROPOSITIO LXVI.

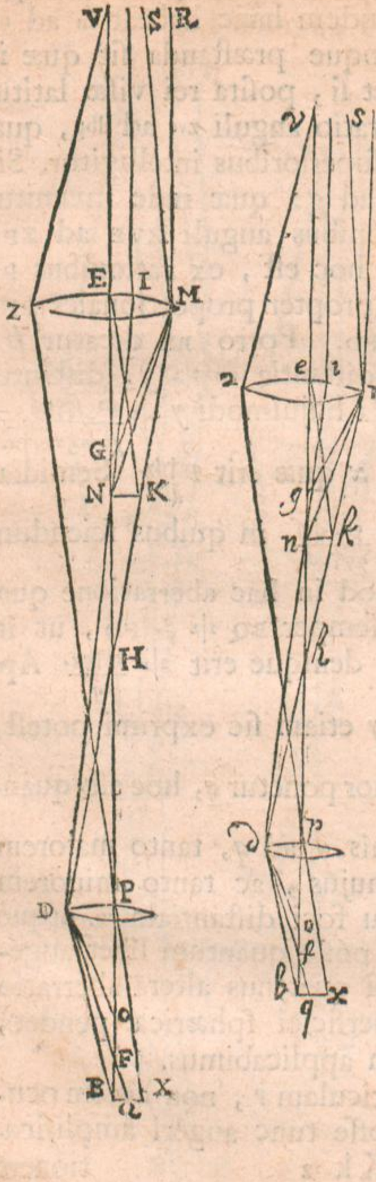


Si microscopium è duobus convexis E *&* P *compositum quæratur, quod datam habeat lentis ocularis* E *foci distantiam, itemque datam amplificationem, & in quo angulus aberrationis ex dissipatione radii, ut & claritas sit eadem quæ in alio dato microscopio ex lentibus* E *&* P *composito; invenietur foci distantia lenticulæ inferioris* P, *ejusque positus & apertura hoc modo.*

Sit lentis ocularis E foci distantia EN data æqualis *d* lineæ, postuletur vero ut magnitudo apparens sit ad eam quæ ex certa distantia, puta 8 pollicum, spectaretur, (quæ distantia vocetur ω) ut ω ad *q* lineam datam. Angulus vero aberrationis, quem diximus esse nmk, requiratur æqualis angulo NMK, in altero dato microscopio; quem definimus proportione

tione lineæ KM ad KN ſeu EN ad KN, quæ ſit ea quæ ω ad datam s, ut nempe eandem hanc habeat en ad nk. Claritas denique eadem quoque præſtanda ſit quæ in microſcopio dato, quod fiet ſi, poſita rei viſæ latitudine bx $=$ BX, eadem ſit ratio anguli zve ad dbp, quæ anguli ZVE ad DBP, ut ex ſuperioribus intelligitur. Sit autem hæc ratio ea quæ ω ad g: quæ inde invenitur quod compoſita ſit ex rationibus anguli ZVE ad ZPE ſeu BPX, & BPX ad PBD; hoc eſt, ex rationibus PE ad EV, ſeu PN ad NE, (propter proportionales PN, PE, PV) & ratione BX ad PD. Porro BX dicatur h; lenticulæ vero quæſitæ foci diſtantia po $= y$: diſtantia rei viſæ pb $= x$. Eritque regula hujuſmodi $y = \frac{50 \cdot sqqdd}{gh \text{ in qu. } \overline{q \dagger d}}$. Cognita vero y invenietur & x quæ erit $\frac{qy \dagger dy}{d}$. Semidiameter vero aperturæ pd erit $\frac{50 \cdot dqs}{\omega q \dagger \omega d}$ in quibus ſciendum eſt numerum 50 inde eſſe quod in hac aberratione quæ ex diſſipatione eſt, ponitur ſemper BQ $= \frac{1}{50}$ PD, ut in ſuperioribus dictum fuit; pn denique erit $= \frac{dy \dagger qy}{q}$. Apparet autem quia hic valor y etiam ſic exprimi poteſt, $y = \frac{50 \cdot sdd}{gh + \frac{2ghd}{q} + \frac{ghdd}{qq}}$ quanto minor ponetur q, hoc eſt, quanto major ratio multiplicationis ω ad q, tanto majorem fore diviſorem quantitatis hujus, ac tanto minorem proinde longitudinem y, ſeu foci diſtantiam po. atque ita, diminuenda lenticula P, poſſe quantum libet augeri microſcopii virtutem, niſi quatenus altera aberratio obſtabit, quæ ex figura ſuperficiei ſphæricæ pendet, cui paulo poſt aliam regulam applicabimus.

Sed ſi datam ponamus lenticulam P, non autem ocularem c, inveniemus non poſſe tunc augeri amplifica-

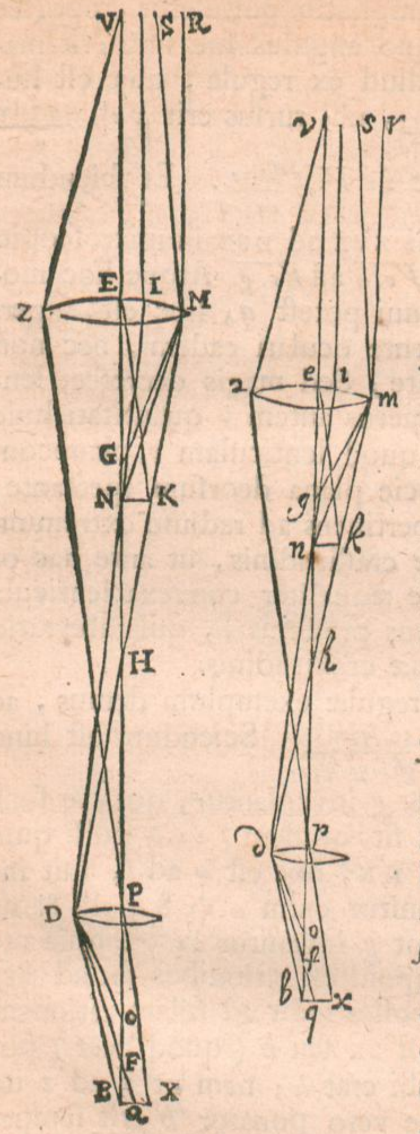


tionem nisi paulò tantum. Si enim foci distantia data po vocetur r, cæteris eadem, quæ prius, significantibus, invenitur $xx = \frac{50 \cdot qqrs}{gb}$. ubi apparet, quanto minor ponetur q, hoc est, quo major ratio amplificationis ω ad q, eo minorem fieri x; atqui x seu pb, debet esse major quam r seu po. Ergo si in hujusmodi microscopio ponatur ab initio pb minor quam dupla po; (ut omnino faciendum, & in nostro superius descripto est pb ad po tantum ut 10 ad 9.) non poterit q duplo minor quam prius adsumi; hoc est, non poterit duplicari ampliatio, quia x fieret dimidia prioris, ac proinde minor quam r.

Omnis igitur microscopii hujusmodi perfectio in lenticulæ inferioris parvitate quærenda est; computando ex præscripto regulæ modo traditæ, quoad aberratio ex figura non oberit; hoc est, quoad ejus angulus NMK infra 20

corconsistet. Sed si major ampliatio postuletur, oportet ex dato microscopio in quo angulus hic non erit major quam 20′; invenire aliud ex regula, quæ est hujusmodi, $y = \frac{6d4q4f}{7gh3,\ in\ qu.qu.\ \overline{q+d}}$, ubi rursus erit $x = \frac{qy \mp dy.}{d}$ $pn = \frac{dy+qy}{q}$, sed pd fit hic $= \sqrt{c.\ \frac{6}{7}\ \frac{fqdy2}{\omega q + \omega d}}$. Et sciendum est insuper rationem anguli ZVE ad DPB in microscopio dato eam nunc poni, quæ $\sqrt{c.\ \omega}$ ad $\sqrt{c.\ g}$. Atque hoc modo quousque lubet diminui potest q, hoc est, augeri amplificatio, manente lente oculari eadem, nec non distincta visione & claritate; Sed magis decrescet lenticulæ foci distantia. Numerus autem $\frac{6}{7}$ quantitati huic præpositus inde oritur, quod lenticulam P planoconvexam ponimus, superficie plana deorsum spectante; cujus aberratio ex figura pertinens ad radium extremum axi parallelum, est $\frac{7}{6}$ suæ crassitudinis, ut ante hac ostensum. Sic si utrimque æqualiter convexa lenticula P poneretur, esset numerus præfixus $\frac{3}{5}$, quia aberratio ejusmodi lentis efficit $\frac{5}{3}$ suæ crassitudinis.

Cæterum ut utriusque regulæ exemplum demus, ac primo prioris, ubi $y = \frac{50.fqqdd}{gh\ in\ qu\ \overline{q+d}}$. Sciendum est hinc incipiendum, ut lineæ f & g inveniantur, quantæ sunt in microscopio dato; ac fit quidem $f = \frac{1}{25}$ poll. quia ibi ratio EN seu MK ad NK, hoc est ω ad f, fuit inventa quæ 200 ad 1. Ponitur enim $\omega = 8$ poll. & ut 200 ad 1, ita 8 ad $\frac{1}{25}$; at g invenitur $= \frac{16}{7}$, quia ratio ω ad g dicta fuit componi ex rationibus PN ad NE, & BX ad PD; quæ composita redit ad solam rationem PN ad NE, sive 7 ad 2, si BX seu h (quod licet) ponatur æqualis PD, quæ ibi erat $\frac{1}{20}$; nam ut 7 ad 2 ita est 8 ad $\frac{16}{7}$. Quæcunque vero ponatur h erit semper quantitas gh eadem in dato microscopio. Quod si jam



d eandem esse ponamus in eo quod quærimus, quæ erat in nostro, nempe *d* 2|2 2; sed rationem amplificationis ω ad *q* eam velimus esse quæ 72 ad 1. hoc est, duplo majorem quam in nostro, unde *q* fit 2|2 $\frac{1}{9}$; Ex his jam secundum regulam, invenietur *y* 2|2 $\frac{70}{361}$. Et reliqua prout fuere in expositione regulæ definita. Quod si his iisdem positis, statuatur *d* 22 1 poll. invenietur *y* 2|2 $\frac{7}{40}$ & pd 2|2 $\frac{1}{40}$, prorsus ut in priori disquisitione, ubi servabatur ratio eadem BP ad PN; quod veritatem regulæ hujus comprobat.

In posteriori regula ubi *y* 2|2 $\frac{6d4q4ſ}{7gh3 \text{ in qu. qu. } d+q}$ quæsitis prius *ſ* & *g* quantæ sunt in dato microscopio, habita ratione aberrationis ex figura, invenitur quidem *ſ* 2|2 $\frac{1}{84}$ poll. quia ibi ratio EN seu MK ad NK, hoc est, ω ad *ſ*, fuit inventa quæ 672 ad 1; nam ut 672 ad 1 ita ω seu 8 ad $\frac{1}{84}$. At *g* invenitur 2|2 $\frac{64}{343}$, quia ra-

ratio $\sqrt{c.\,\omega}$ ad $\sqrt{c.\,g}$ hoc eſt, ratio anguli ZVE ad DPB, dicta fuit componi ex rationibus PN ad NE & BX ad PB, quæ compoſita redit, ut paulo ante, ad rationem ſolam PN ad NE, ſeu 7 ad 2. Ut autem 7 ad 2 ita $\sqrt{c.\,\omega}$ ſeu 2, ad $\frac{4}{7}$, quod ergo æquale $\sqrt{c.\,g}$, ideoque $g \; 2|2 \; \frac{64}{343}$. Quæcunque vero ponatur h, erit hic ſemper in microſcopio dato eadem quantitas gh^3. Quod ſi jam d eandem eſſe velimus in microſcopio quæſito, ac in dato noſtro, nempe $d \; 2|2 \; 2$ poll. rationem vero amplificationis ω ad q duplam noſtræ, hoc eſt, quæ 72 ad 1; erit $q \; 2|2 \; \frac{1}{9}$: Et ex his jam ſecundum hanc regulam invenietur y proxime $2|2 \; \frac{1}{19}$. & reliqua ut fuere in expoſitione regulæ definita. Quod ſi his iiſdem poſitis, ſtatuatur $d \; 2|2 \; 1$ poll. invenietur $y \; 2|2 \; \frac{7}{160}$ & pd $2|2 \; \frac{1}{160}$ prorſus ut in ſecunda ſuperiori diſquiſitione, ubi ſervabatur ratio BP ad PN; quod poſterioris hujuſce regulæ veritatem comprobat.

F I N I S.