Mesolabum seu duae mediae proportionales inter extremas datas per circulum ...

Sluse, René-François de

Leodii Eburonum [Liège], 1668

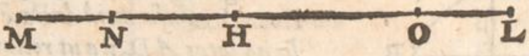
Mesolabum seu duae mediae proportionales inter datas per circulum et ellipsim vel hyperbolam infinitis modis exhibitae.

MESOLABVM

SEU

DUÆ MEDIÆ PROPORTIONALES INTER DATAS PER CIRCULUM ET ELLIPSIM VEL HYPERBOLAM INFINITIS MODIS EXHIBITÆ.

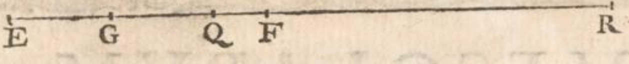
LEMMA PRIMUM.



Si à rectâ M L, auferantur æquales N M, O L, & inter N, & O, sumatur quodlibet punctum H, Dico rectangulum M H L, minus rectangulo M N L, æquale esse rectangulo N H O.

RECTANGULUM enim M H L, æquatur duobus rectangulis, M N in H L, & N H in H L, sed rectangulum N H in H L, est etiam æquale duobus rectangulis N H in H O, & N H in O L; igitur rectangulum M H L, æquatur tribus rectangulis M N in H L, N H in H O, & N H in O L (sive N M, ex hypothesi) hoc est duobus rectangulis NHO, LNM. Igitur, ablato utrimque rectangulo MNL, rectangulum M H L, minus rectangulo M N L, æquale erit rectangulo N H O. Quod erat demonstrandum.

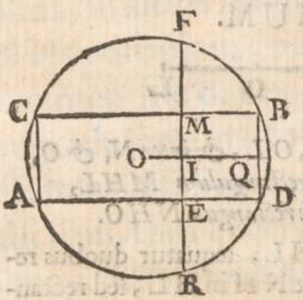
LEMMA SECUNDUM.



In rectâ E R, si fuerit ut R E ad F E, ita Q E, ad G E, erit ut E G, ad E Q, ita rectangulum E F G, ad rectangulum E F in Q R.

CUm enim sit ut R E, ad F E, ita Q E, ad G E, erit permutando, ut R E, ad Q E, ita F E, ad G E, & dividendo, ut R Q, ad Q E, ita F G, ad G E, & convertendo, ac permutando, ut E G, ad E Q, ita F G, ad R Q; hoc est sumtâ communi altitudine EF, ita rectangulum E F G, ad rectangulum ex E F in Q R. Quod erat demonstrandum.

LEMMA TERTIUM.



Si in circulo O A F B, inscriptum, fuerit rectangulum ACBD, sitque ex F puncto in circumferentiâ ducta FE, normalis ad latus A D, ita ut rectangulum D A E. sit æquale quadrato E F; erunt quatuor rectæ, A C, A E, E F, AD, in continuâ analogiâ.

PRoducatur F E, ad circumferentiam in R, & cadat in BD, ex cētro normalis O Q, secans F E in I: Itaque B Q, Q D, erunt æquales, hoc est M I, I E, (ob parallelas) sed sunt etiam æquales R I, I F, Igitur & reliquæ R E, M F, æquales erunt, & rectangulum E F M, æquabitur rectangulo R E F, hoc est rectangulo D E A (ob circulum).

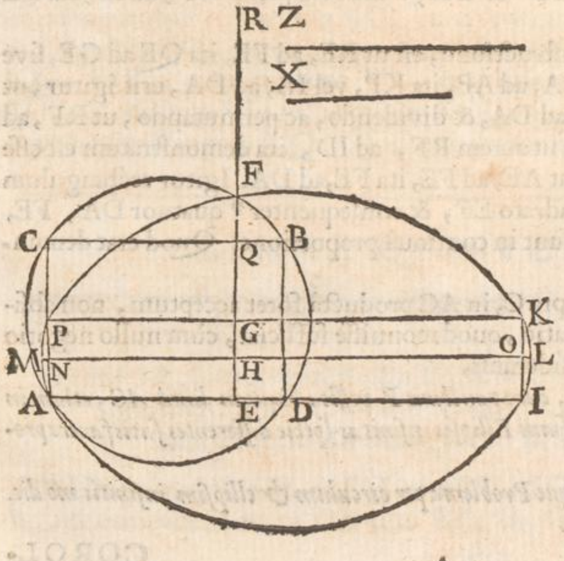
Quoniam autem, ex hypothesi, rectangulum D A E, sive D E A, cum quadrato A E, æquatur quadrato E F, hoc est duobus rectangulis EFM, FEM; ablatis æqualibus DEA, EFM, remanebit quadratum

tum AE, æquale rectangulo FEM, eritque ut EM sive AC, ad EA, ita EA ad EF, sed cùm ex hypothesi rectangulum DAE, sit æquale quadrato, EF, est ut EA, ad EF, ita EF, ad AD. Igitur ut AC, ad EA, ita EA, ad EF, & EF, ad AD. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO PRIMA.

Inter extremas datas, duas rectas medio loco proportionales, per circulum & Ellipsim, infinitis modis, exhibere.

SInt extremæ datæ Z major, X minor. Sumatur AD æqualis Z, eique ad rectos erigatur AC, æqualis X, & perficiatur rectangulum ACBD, circaque illud circulus ADF; Tum sumto in AC (vel eâdem versus C, quantumlibet productâ) quolibet puncto P, ducatur PK, parallela AD, ad quam sit eadem AD, ut AP ad AC, cōpletoque rectangulo APKI, dividantur rectæ PA, KI, bifariam in N, & O, & juncta ON extendatur in L, ita ut rectangulum NLO, ad quadratum OK, eandem habeat rationem quam CA, ad AP; sumtâque NM in directum æquali OL, axe ML, describatur semi-ellipsis MFL, cujus applicatarū quadrata, eam habeat rationem ad rectangula sub partibus axis, quam habet AP, ad AC, transibit illa per P, & K, ex constructione, secabitque circulum, ut patet: sit punctum



ctum sectionis F, ex quo cadat in AD normalis FE, secans parallelas
CB, PK, NO, in punctis Q, G, H.

Dico quatuor AD, EF, EA, AC, esse continuè proportionales.

Producatur EF, & fiat ut EG, ad EQ, ita EF, ad ER.

Nunc quadratum FH, ad quadratum PN, sive GH, est ut rectan-
gulum LHM, ad rectangulum LNM, ob ellipsim; & dividendo,
quadratum FH, minus quadrato GH, (hoc est rectangulũ EFG,) est
ad quadratum GH, sive PN, ut rectangulum LHM, minus rectan-
* per gulo LNM (hoc est ut rectangulũ OHN*) ad rectangulum LNM;
lemma & permutando rectangulum EFG, est ad rectangulum OHN, ut
primũ. quadratum PN, ad rectangulum LNM, sive AP ad AC, vel EG ad
EQ, ex constructione; sed ut EG, ad EQ, ita rectangulum EFG, ad
* per rectangulum ex EF in QR* Igitur, ut rectangulum EFG, ad re-
lemma ctangulum OHN, ita idem rectangulum EFG, ad rectangulum ex
secun- EF in QR, & permutando; sunt itaque æqualia rectangula EF, QR,
dum. & OHN, sive IEA. Cùm vero rectangulum EFQ, sit etiam æquale
rectangulo DEA (ob circulum) erit ablatis utrimque æqualibus, re-
ctangulum ex EF in QR minus rectangulo EFQ (hoc est rectangu-
lum RFE) æquale rectangulo IEA, minus rectangulo DEA (hoc
est rectangulo sub ID & EA): Erit itaque ut RF, ad ID, ita AE
ad EF.

Ulterius, ex constructione, est ut RE, ad FE, ita QE ad GE, sive
CA, ad AP, & ut CA, ad AP, ita KP, vel IA, ad DA, erit igitur, ut
RE, ad FE, ita IA, ad DA, & dividendo, ac permutando, ut RF, ad
ID, ita FE, ad DA: ut autem RF, ad ID, ita demonstratum est esse
AE, ad EF; itaque ut AE, ad FE, ita FE, ad DA. Igitur rectangulum
* per DAE æquale est quadrato EF, & consequenter * quatuor DA, FE,
lemma AE, EQ vel AC, sunt in continuâ proportione. Quod erat demon-
tertiũ. strandum.

Si punctum P supra C, in AC productâ foret acceptum, non absi-
milis esset demonstratio, quod monuisse sufficiat, cùm nullo negotio
sese oblatura sit consideranti,

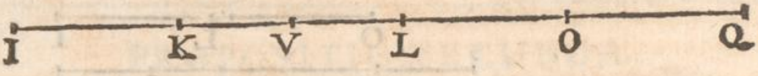
Ex quo evidens est, cum punctum P possit ubique in lineâ AC, etiam in infinitum productâ, sumi Ellipses infinitas specie differentes satisfacere proposito.

Construximus itaque Problema per circulum & ellipsim infinitis modis. Quod erat faciendum.

COROLLARIUM.

PAtet etiam methodus idem problema ſolvendi per duàs ellipſes, cùm enim quælibet earum quas ſuperiori deſcriptione complexi ſumus, ſecet circulum in puncto F, ſequitur duas quaſlibet in eodem puncto ſeſe interſecare.

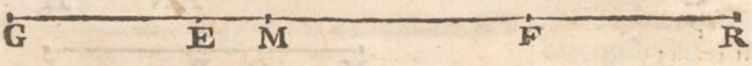
LEMMA QUARTUM.



Si à rectâ IO, auferantur æquales IK, OL, & in eâdem productâ ſumatur quodlibet punctum Q, Dico rectangulum KQL, minus rectangulo KOL, æquari rectangulo IQO.

BIſecetur IO in V. Itaque rectangulum KQL, una cum quadrato VL, erit æquale quadrato VQ, ſed quadratum VQ ſimiliter eſt æquale rectangulo IQO, unà cum quadrato VO, & quadratum VO, eſt pariter æquale rectangulo KOL, unà cum quadrato VL: Igitur rectangulum KQL, una cùm quadrato VL, æquale erit rectangulis IQO, KOL, cum quadrato VL, & ablatis utrimque rectangulo KOL, & quadrato VL; rectangulum KQL, minus rectãgulo KOL, æquabitur rectangulo IQO. Quod erat demonſtrandum.

LEMMA QUINTUM.

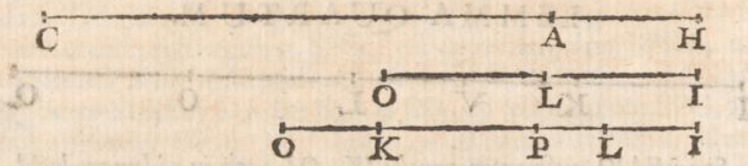


In rectâ GR, ſumptis tribus punctis E, M, F, ſi fuerit ut GE, ad EM, ita EF, ad FR, erit ut GE, ad EM, ita rectangulum GFE, ad duo rectangula EFR, FEM.

CUm enim ſit ut GE, ad EM, ita EF, ad FR; erit permutando & componendo, ut GE cum EF, ſive GF, ad EF, ita ME cum

cum FR, ad FR, Et rurſus permutando, ut GF, ad ME cum FR, ita FE, ad FR; hoc eſt GE ad EM, ex hypotheſi. ſed ut GF, ad EM cum FR, ita (ſumtâ communi altitudine EF) rectangulum GFE, ad duo rectangula MEF, RFE. Igitur ut GE, ad EM, ita rectangulum GFE, ad duo rectangula MEF, RFE. Quod erat &c.

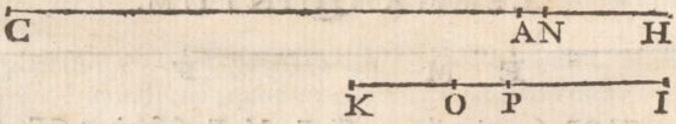
LEMMA SEXTUM.



Si fuerint duæ rectæ, CH ſecta utcumque in A, & altera OI, vel æqualis mediæ inter CA, & AH, vel major quam media, Dico primò OI ita poſſe ſecari in L, ut eadem ſit ratio rectanguli OLI, ad quadratum dimidiæ AH, quæ eſt CA, ad AH,

SIt enim æqualis mediæ, & ſecetur bifariam in L. Cum ſit ut CA, ad OI, ita OI, ad AH, erit ut CA, ad AH, ita quadratum OI, ad quadratum AH, & ſumtis ſubquadruplis, ita rectangulum OLI ad quadratum dimidiæ AH. Quod erat &c.

Sit deindè major, & ex illâ reſecetur IK æqualis mediæ inter CA & AH, quæ bifariam ſecetur in P. patet ita eſſe quadratum PI ad quadratum dimidiæ AH, ut CA, ad AH. Itaque faciendum eſt rectangulum OLI, æquale quadrato PI, quod quidem fieri poterit, cùm IP ſit minor dimidiâ OI, ex hypotheſi. Quod &c.



Si verò OI fuerit minor mediâ. Dico ſecundò AH ita ſecari poſſe in N, ut rectangulum ANH, ad quadratum dimidiæ OI, habeat eandem rationem, quam HA, ad AC.

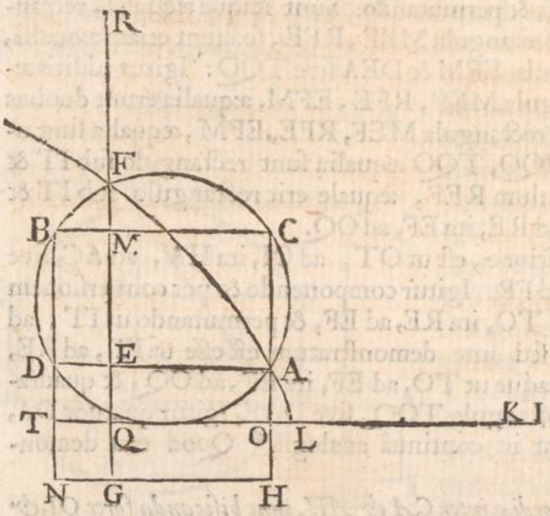
SUmtâ enim, ut prius, IK, mediâ majori OI, & diviſâ bifariam in P, fiat ut quadratum PK ad quadratum dimidiæ OI, ita quadratū

dimi-

dimidiæ AH ad rectangulum ANH, quod quidem fieri poterit cum KI ponatur major OI, ideoque rectangulum ANH futurum sit minus quadrato dimidiæ AH. Igitur erit permutando ut quadratum PK, ad quadratum dimidiæ AH, ita quadratum dimidiæ OI, ad rectangulum ANH, sed ut quadratum PK, ad quadratum dimidiæ AH, ita quadratum IK, ad quadratum AH, sive CA, ad AH. Igitur ut CA, ad AH, ita quadratum dimidiæ OI, ad rectangulum ANH, sive convertendo ut AH, ad CA, ita rectangulum ANH, ad quadratum dimidiæ OI. Quod erat &c.

PROPOSITIO SECUNDA.

Propositum sit easdem rectas, per circulum & Hyperbolam, infinitis modis exhibere.



Sit, ut prius, circa rectangulum ex datis rectis AD, AC, circulus AFD; productâque CA utcũque in H, perficiatur rectangulũ HADN, & divisis AH; DN, bifariam in O, & T, jungatur TO, & producatur in I, ita ut sit eadem ratio TO ad OI, quæ HA, ad AC. Erit igitur OI, vel major mediâ inter CA, AH vel æqualis mediæ vel minor. Sit primo major, & secetur IO in L, ita ut rectangulum ILO, ad quadratum AO, eandem habeat rationem, quæ est CA, ad AH (id enim fieri poterit *) sumtaque IK, æquali LO, axe KT, latere transverso KL, recto verò, quod sit ad KL, sicut HA

* *per lemma ad sextum*

ad AC, deſcribatur ex L vertice, ſemi-hyperbola LAF, tranſibit illa per A, ex conſtructione & ſecabit circulum, ſecet in puncto F: ex quo cadat in HN normalis FG ſecans parallelas CB, AD, OT, in punctis M, E, Q.

Dico quatuor DA, FE, EA, AC, eſſe continuè proportionales.

Fiat ut GE, ad EM, ita EF, ad FR.

Itaque ob hyperbolam, ut quadratum FQ, ad quadratum AO, ita rectangulum KQL, ad rectangulum KOL, & dividendo, ut quadratum FQ, minus quadrato AO, ſive QE (hoc eſt ut rectangulum GFE) ad quadratum AO, ita rectangulum KQL, minus rectangulo KOL (hoc eſt, ita rectangulum IQO *) ad rectangulum KOL: & permutando, ut rectangulum GFE, ad rectangulum IQO, ita quadratum AO, ad rectangulum KOL, ſive latus rectum, ad tranſverſum, vel, ex conſtructione, HA ad AC. ſed ut HA, ad AC, ſive GE, ad EM, ita rectangulum GFE ad duo rectangula MEF, RFE*, Igitur ut rectangulum GFE ad rectangulum IQO ita rectangulum GFE ad duo rectangula MEF, RFE, & permutando. Sunt itaque æqualia, rectangulum IQO, & duo rectangula MEF, RFE, ſed ſunt etiam æqualia, ob circulum rectangula EFM & DEA ſive TQO: Igitur additis æqualibus, tria rectangula MEF, RFE, EFM, æqualia erunt duobus IQO, TQO. ſed tria rectangula MEF, RFE, EFM, æqualia ſunt unico REF, duo verò IQO, TQO æqualia ſunt rectangulo ſub IT & OQ; Igitur rectangulum REF, æquale erit rectangulo ſub IT & OQ, eritque ut IT, ad RE, ita EF, ad OQ.

per lemma quartum.

per lemma quintum.

Nunc, ex conſtructione, eſt ut OT, ad OI, ita HA, ad AC, ſive GE ad EM, vel EF ad FR. Igitur componendo & per converſionem rationis erit ut IT, ad TO, ita RE, ad EF, & permutando ut IT, ad RE, ita TO, ad EF. ſed ante demonſtratum eſt eſſe ut IT, ad RE, ita EF, ad OQ; erit itaque ut TO, ad EF, ita EF, ad OQ, & quadratum FE, æquabitur rectangulo TOQ, ſive DAE, Igitur quatuor DA, EF, AE, AC, erunt in continuâ analogiâ* Quod erat demonſtrandum.

per lemma tertiū.

Si OI eſſet æqualis mediæ inter CA & AH, tunc biſecanda foret OI, & ex puncto biſectionis, ducenda per A, recta quæ utique circulo occurreret in puncto F, quæſito, ut facilè oſtenditur, ſed nec tanto molimine opus eſſet, ſi in punctum H felici caſu incidiſſes, tunc enim ipſæ CA, OI, AH, OT, vel DA, eſſent continuè proportionales, ut patet.

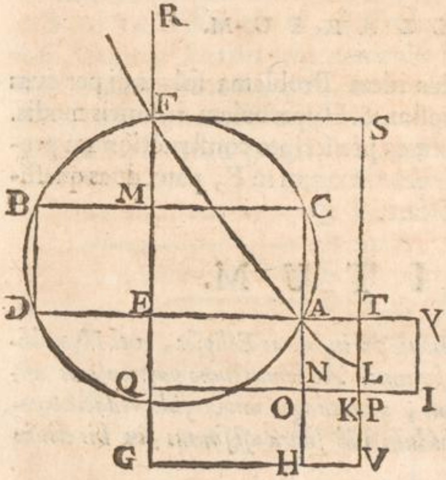
Sit

Sit nunc OI minor quàm media. Secetur bifariam in P, & AH, in N, ita ut sit eadem ratio rectanguli HNA, ad quadratum PO, quæ HA, ad AC (hoc enim rursus fieri poterit. *) Tum in puncto P, erigantur utrimque PL, PK, æquales ON, & perficiatur rectangulum AHVT, itemque AOIY. Deindè axe LT, vertice L, latere transverso KL, describatur semihyperbole LAF, cujus latus transversum ad rectum, eam habeat rationem quam HA, ad AC, transibit illa per A, cùm rectangulum HNA, sive KTL, ad quadratum OP, sive AT, eandem habeat rationem quam HA ad AC (ex constructione;) secabit etiam circulum in puncto F, ex quo demissa normalis FE, in AD, occurrat CB, in M, & productis PO, VH, in Q, & G. *per lemma sextum*

Dico quatuor DA, EF, EA, AC, rursus esse continuè proportionales.

Productâ EF, fiat ut GE, ad EM, ita EF, ad FR, & applicetur FS, ad axem hyperbolæ.

Nunc quadratum FS, sive ET, ad quadratum TA, eandem habebit rationem, quam rectangulum KSL, ad rectangulum KTL, & dividendo quadratum TE, minus quadrato TA (hoc est rectangulum YEA) ad quadratum TA, erit ut rectangulum KSL minus rectangulo KTL (hoc est ut rectangulum VST *) ad rectangulum KTL, & permutando, ut rectangulum YEA, ad rectangulum VST, ita quadratum TA, ad rectangulum KTL, hoc est ita latus rectum, ad transversum, sive CA, ad AH, ex constructione. Igitur convertendo, ut rectangulum VST, sive GFE, ad rectangulum YEA, ita AH, ad AC, sive GE ad EM. Sed ut GE, ad EM, ita idem rectangulum GFE, ad duo rectangula MEF, KFE: Itaque rectangulum YEA, æquale *per lemma quartum.*



 est

eſt duobus MEF, RFE. Sunt autem etiam æqualia rectangula DEA, EFM (ob circulum) Igitur, additis utrimque æqualibus, rectangulum YEA, unà cum rectangulo DEA, æquale erit tribus rectangulis MEF, RFE, FEM. Sed duo rectangula YEA, DEA, æqualia ſunt unico ſub YD, & EA, tria verò MEF, RFE, EFM, unico REF; Igitur rectangulum ſub YD & EA, æquale erit rectangulo REF; eritque ut YD, ad RE, ita EF, ad EA.

Rurſus, ex constructione, eſt ut DA ad AY, ita HA ad AC, ſive GE ad EM hoc eſt EF ad FR, erit igitur componendo, & per converſionem rationis, ut DY ad DA, ita ER, ad EF, & permutando ut DY, ad ER, ita DA, ad EF. Sed ut DY, ad ER, ita oſtenſum eſt eſſe EF, ad EA; erit itaque ut DA, ad EF, ita EF, ad EA, & rectangulum DAE æquabitur quadrato EF. Sunt igitur quatuor DA, EF, EA, AC, continuè proportionales. * Quod erat demonſtrandum.

** per lemma tertiū.*

Unde ſequitur, cùm punctum H poſſit ubilibet in rectâ CA, indefinitè productâ ſumi; infinitas Hyperbolas ſpecie differentes, ſatisfacere propoſito. Conſtruximus itaque Problema per circulum & Hyperbolam infinitis modis. Quod erat faciendum.

COROLLARIUM.

HInc evidens eſt methodus idem Problema ſolvendi per duas Hyperbolas, vel per Ellipſim & Hyperbolam infinitis modis. Cùm enim Ellipſes & Hyperbolæ ex præſcripto constructionum præcedentium deſcriptæ, omnes ſecent circulum in F, patet duas quaſlibet in eodem puncto ſeſe interſecare.

MONITUM.

ET hactenus quidem constructiones per infinitas Ellipſes, vel Hyperbolas, ut propoſitum erat, abſolvimus. Addemus nunc particulares aliquot ejuſdem Problematis effectiones, quas magis univerſales reddere poterit, qui tanti eſſe putaverit, methodum quâ ſupra uſi ſumus, in his etiam experiri. Sit itaque

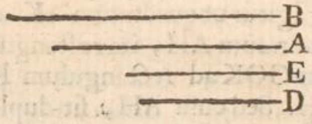
LEMMA SEPTIMUM.

Si fuerint quatuor rectæ, ſitque ratio primæ majoris ad ſecundam, eadē quæ differentiæ ſecundæ & tertiæ, ad differentiam, tertiæ & quartæ. Sit item ut ſecunda ad tertiam, ita differentia primæ & tertiæ, ad differentiam ſecundæ & quartæ; erunt illæ continuè proportionales.

HAbeant quatuor rectæ B, A, E, D, conditiones lemmatis. Dico illas eſſe continuè proportionales.

Cùm enim ſit, ex hypotheſi, ut B, ad A; ita A minus E, ad E minus D, erit permutando & componendo, ut B cum A minus E, ad A minus E, ita A cum E minus D, ad E minus D, & rurſus permutando, ut B cum A minus E, ad E cum A minus D, ita A minus E, ad E minus D, hoc eſt B, ad A, ex hypotheſi. Ulterius cum ex eadem, ſit ut A, ad E, ita B minus E, ad A minus D, erit permutando, & componendo, ut A cum B minus E, ad B minus E, ita E cum A minus D, ad A minus D, & rurſus permutando, ut A cum B minus E, ad E cum A minus D, ita B minus E, ad A minus D, ſed ut A cum B minus E, ad E cum A minus D, ita oſtenſum eſt eſſe B, ad A. Igitur ut B, ad A, ita B minus E, ad A minus D, hoc eſt A, ad E ex hypotheſi. Sunt igitur tres proportionales B, A, E.

Nunc cum ſit ut B, ad A, ita A minus E, ad E minus D, erit ut A, ad E, ita A minus E, ad E minus D, & permutando & dividendo, ut E, ad A minus E, ita D, ad E minus D, & rurſus permutando, ut E ad D, ita A minus E, ad E minus D, hoc eſt A, ad E, ex oſtenſis. Tres igitur A, E, D, ſunt etiam in continuâ proportione, & conſequenter quatuor, B, A, E, D, ſunt continuè proportionales. Quod erat demonſtrandum.

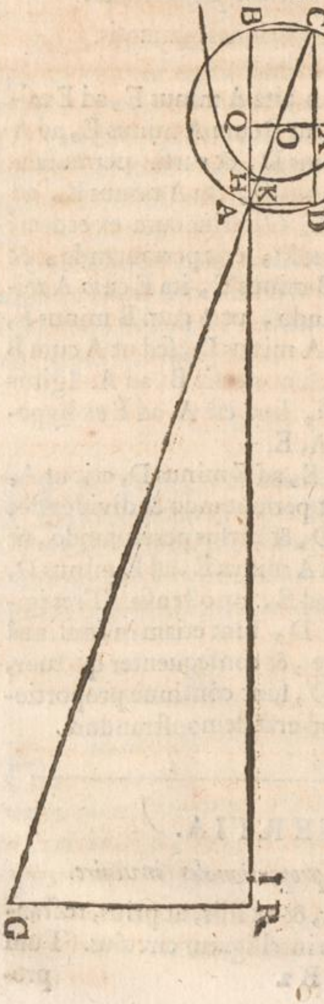


PROPOSITIO TERTIA.

Inter extremas datas duas medio loco proportionales invenire.

SInt datæ rectæ AB major, AD minor, & ex illis, ut prius, rectangulum ABCD, circa quod deſcriptus intelligatur circulus. Tum pro-

producta BA in I, donec AI sit quadrupla AB, secetur AB in H, itaut rectangulum IHA, sit æquale quadruplo rectanguli ABCD: & sumtâ IR æquali AH, erectâque HK dimidiâ AH, jungatur KA, & producatur donec occurrat normali RG in G. Tum latere tranverso GX, vertice K, latere verò recto transversi sub quintuplo describatur Semi-hyperbole FK, cujus applicatæ ad diametrum KG, sint parallelæ KH. Illa utique secabit circulum. Secet in puncto F, ex quo applicetur FO, ac producatur donec occurrat AB in Q; occurret etiam DC in X.



Dico quatuor BA, QF, QA, AD, esse continuè proportionales.

Rectangulum enim GOK, ad rectangulum RQH, rationem habet compositam ex ratione GO, ad RQ (sive ob similitudinem triangulorum ARG, OAQ, KAH) ex ratione KA, ad AH, & ex ratione OK, ad HQ, hoc est ejusdem KA ad eandem AH, hæ verò duæ rationes, componunt rationem quadrati KA, ad quadratum AH. Igitur ut quadratum AK ad quadratum AH, ita rectangulum GOK ad rectangulum RQH. Sed cum AH, sit dupla HK, erit quadratum AH, quadruplum quadrati HK, & consequẽter quadratum AK, quod æquale est utrique AH, HK, erit sesquiquartum quadrati AH; Igitur rectangulum GOK erit etiam sesquiquartum rectanguli RQH sive ut 5 ad 4,

Idem

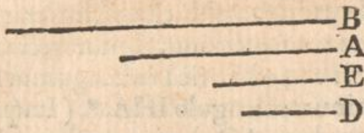
Idem autem rectangulum GOK, ad quadratum OF, est ut latus transversum ad rectum, sive ut 5 ad 1, ex constructione; Igitur rectangulum RQH, ad quadratum OF erit ut 4 ad 1. Sed rectangulum RQH, est æquale rectangulo IQA, minus rectangulo IHA. * (Itaque rectangulum IQA sive IAQ cum quadrato AQ) minus rectangulo IHA, erit quadruplum quadrati OF. Sed rectangulum IAQ, quadruplum est rectanguli BAQ ex constructione, cum AI posita sit quadrupla BA; & quadratum AQ, quadruplum est quadrati QO, cum AQ sit ejusdem dupla, sive ut AH ad HK, similiter rectangulum IHA quadruplum est rectanguli ABCD, ex constructione. Igitur additis & demtis partibus in eadem ratione, rectangulum IQA, cum quadrato AQ, minus rectangulo IHA, quadrupla erunt rectanguli BAQ, cum quadrato QO, minus rectangulo ABCD. Cùm autem ostensum sit rectangulum IQA cum quadrato AQ minus rectangulo IHA, quadruplum etiam esse quadrati OF, sequitur rectangulum BAQ, cum quadrato QO, minus rectangulo ABCD, æquale esse eidem quadrato OF. Sed quadratum OF, æquale est duobus quadratis FQ, OQ, minus rectangulo sub FQ & dupla OQ, hoc est minus rectangulo FQA; Igitur ablato utrimque quadrato OQ, rectangulum BAQ, minus rectangulo ABCD, æquale erit quadrato FQ, minus rectangulo FQA. Est autem rectangulum BAQ minus rectangulo ABCD, æquale rectangulo sub AB, & AQ minus CD; quadratum verò FQ minus rectangulo FQA, æquatur rectangulo ex FQ, in FQ minus AQ, erit igitur ut BA, ad QF, ita FQ minus AQ ad AQ minus AD. Sed cum rectangulum BQA, sit æquale rectangulo QFX (ob circulum) est etiam ut QF, ad QA, ita BQ sive BA minus AQ ad FX, (sive FQ minus OX, vel AB.) Igitur quatuor rectæ BA, QF, QA, AD, habent conditiones lemmatis septimi, suntque continuè proportionales. Quod erat demonstrandum.

* per lemma quartum.

LEMMA OCTAVUM.

Si fuerint quatuor rectæ B, A, E, D, fueritq; ut B, ad A, ita E, ad D. & ut A, ad E, ita B minus E, ad A minus D, erunt illæ in continuâ analogiâ.

CUm enim sit ut B, ad A, ita E, ad D, erit permutando & dividendo ut B minus E, ad E, ita A minus D, ad D, & rursus permutando,



mutando, ut B minus E, ad A minus D, ita E, ad D. Sed ut B minus E, ad A minus D, ita etiam est ex hypothesi A, ad E: Igitur ut A, ad E, ita E, ad D, est autem pariter ex hypothesi ut E, ad D, ita B ad A; itaque ut B ad A, ita A, ad E, & E, ad D. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO QUARTA.

Cubum cubi duplum invenire, sive inter extremas datas in ratione duplâ duas medio loco proportionales exhibere.

Sint datæ rectæ AB, ejusdemque dupla BC, & facto ex iis rectangulo ABCD, descriptoque circa illud circulo, dividantur AB, BC, bifariam in M & P, & jungatur PM occurrens DA productæ in I, & IP producatur in directum, donec eidem sit æqualis PH. Tum ad IH, productâ DC in N; fiat Ellipsis cujus diameter sit IH, una applicatarum DN, quæ utique secabit circulum, secet in E, ex quo cadat normalis EF. Dico quatuor DA, EF, FB, BA, esse in continuâ proportione.

Cadat ex H normalis HK in AD productam, & ducatur MO, parallela BC occurrens EF in O, & ad OM ducatur PQ, parallela AB, tum producatur EF, donec occurrat IH, in G, erit GF applicata ad diametrum IH, ex constructione.

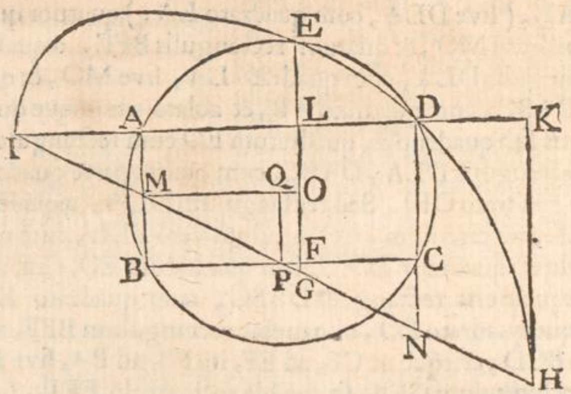
Patet nunc, cum anguli ad A & B, sint recti, & anguli, IMA, BMP, æquales, triangula IAM, BPM, esse æquiangula, Cùm verò BM, sit æqualis MA, rectas BP, IA, fore etiam æquales. Patet etiam ob eandem rationem, triangulum PCN, esse æquiangulum triangulo PBM, & cum PB, PC, sint æquales ex constructione, CN, æquari BM, & PM ipsi PN, cum verò æquales sint etiam IP, PH, demtis æqualibus PM, PN, remanere æquales IM, NH. Cùm autem sit ut IM ad NH, ita IA, ad DK (ob parallelas AM, DN, KH) sequitur rectas AI, DK, etiam esse æquales, & cum AI, sit dupla AM, erit etiam ID, dupla DN, IL dupla LG, & MO dupla OG.

Nunc, ut quadratum DN ad quadratum EG, ita rectangulum INH, ad rectangulum IGH (ob ellipsim) Ratio verò ad rectanguli

guli INH, ad rectangulum IGH, componitur ex ratione NI, ad IG (sive DI, ad IL) & ex ratione HN ad HG (sive KD, ad KL) hæ verò duæ rationes, componunt rationem rectanguli KDI, ad rectangulum KLI; Igitur ut quadratum DN, ad quadratum EG, ita rectangulum KDI, ad rectangulum KLI, & permutando ut quadratum ND, ad rectangulum KDI, ita quadratum EG, ad rectangulum KLI.

Rursus ratio quadrati DN, ad rectangulum KDI, componitur ex ratione DN, ad DI, sive 1 ad 2, & ex ratione ejusdem DN ad DK sive DC, hoc est 3 ad 2, ex his verò rationibus componitur ratio 3 ad 4; Igitur ut 3, ad 4, ita quadratum DN, ad rectangulum IDK, hoc est ita quadratum EG, ad rectangulum ILK. Tria igitur rectangula ILK, æquantur quatuor quadratis EG.

Ulterius cum rectangulum ILK, sit æquale duobus rectangulis DLA, KDI * tria rectangula ILK, æqualia erunt tribus rectangulis *per lemma quartum.*



DLA, unà cum tribus KDI. Sed cum DI sit tripla KD, rectangulum KDI, erit æquale triplo quadrato KD, (sive AB) & triplum rectangulum KDI, 9 quadratis AB, hoc est, cum CB sit dupla BA, quatuor rectangulis DABC, cum quadrato AB: Igitur tria rectangula ILK, æqualia erunt tribus rectangulis DLA, una cum quatuor rectangulis DABC, & quadrato BA. At cum tria rectangula ILK, ostensa sint æqualia quatuor quadratis EG, sequitur tria rectangula

DL

DLA, unà cum quatuor rectangulis DABC, & quadrato BA, æqualia esse eidem quadrato EG quater sumto. Sed quadratum EG, æquatur quadratis GO, & OE, cum rectangulo GOE bis, hoc est cum unico MOE; Igitur quadruplum quadratum EG, æquabitur quatuor quadratis GO (sive unico quadrato MO) cum quatuor quadratis OE, & quatuor rectangulis MOE. Quatuor verò rectangula MOE, æqualia sunt quatuor rectangulis MO, sive BF, in FE, minus quatuor rectangulis MOF, hoc est (cùm MO sit æqualis AL, & AD quadrupla OF, ex constructione) minus rectangulo DAL. Igitur quatuor quadrata EG, æqualia erunt quatuor quadratis EO, cum quadrato MO, & quatuor rectangulis BFE. minus rectangulo DAL. Sed quatuor quadrata EG, ostensa sunt æqualia tribus rectangulis DLA, cum quatuor rectangulis DABC, & quadrato AB, quatuor itaque quadrata EO, cum quadrato MO, & quatuor rectangulis BFE, minus rectangulo DAL, æqualia erunt tribus rectangulis DLA, cum quatuor rectangulis DABC, & quadrato AB. Et addito utrimque rectangulo DAL, (sive DLA, cum quadrato LA,) quatuor quadrata EO, cum quadrato MO, & quatuor rectangulis BFE, æquabuntur quatuor rectangulis DLA, cum quadrato LA, sive MO, & quatuor rectangulis DABC, cum quadrato AB, & ablato utrimque quadrato MO, ac sumtis sub quadruplis, quadratum EO cum rectangulo BFE, æquale erit rectangulis DLA, DABC, cum quartâ parte quadrati AB (hoc est cum quadrato OF). Sed rectangulum DLA, æquale est rectangulo FEL, ob circulum, rectangulum verò FEL, cum quadrato OF, æquale est quadrato EO. Igitur quadratum EO, cum rectangulo BFE, æquale erit rectangulo DABC, cum quadrato EO; & ablato utrimque quadrato EO, remanebit rectangulum BFE, æquale rectangulo ABCD; eritque ut CB, ad EF, ita FB, ad BA, sive FL.

Sed cum rectangulum CFB, sit æquale rectangulo FEL, (ob circulum) est etiam ut EF ad FB, ita CF (sive CB minus BF) ad EL (sive AF minus FL;) Quatuor igitur rectæ CB, EF, FB, FL habent conditiones lemmatis octavi. Sunt igitur in continuâ proportione, & consequenter etiam ipsis æquales DA, EF, FB, BA. Quod erat demonstrandum.

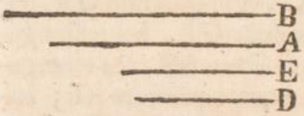
LEM-

LEMMA NONUM.

In quatuor rectis B, A, E, D, si fuerit ut prima cum secundâ, ad secundam cum tertiâ, ita tertia ad quartam, & rursus ut prima minus tertiâ, ad secundam minus quartâ, ita secunda ad tertiam, erunt illæ in continuâ analogiâ.

CUm enim sit ut B cum A, ad A cum E, ita E, ad D, ex hypothesi, erit permutando, & dividendo, ut B cum A minus E, ad E, ita A cum E minus D, ad D, & rursus permutando, ut B cum A minus E, ad A cum E minus D, ita E, ad D.

Ulterius, cum sit etiam ex hypothesi, ut B minus E, ad A minus D, ita A, ad E, erit permutando, & componendo, ut B minus E cum A, ad A, ita A minus D cum E, ad E, & rursus permutando, ut B minus E cum A, ad A minus D cum E, ita A ad E. Sed ut B cum A minus E, ad A cum E minus D, ita ostensum est esse E, ad D; igitur ut A, ad E, ita E, ad D.



Nunc ex hypothesi, est ut B cum A, ad A cum E, ita E, ad D, erit igitur ut B cum A, ad A cum E, ita A ad E: & permutando, ac dividendo, ut B ad A, ita A ad E, sed ut A, ad E, ita est etiam E, ad D. Quatuor igitur B, A, E, D, sunt in continuâ proportione. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO QUINTA.

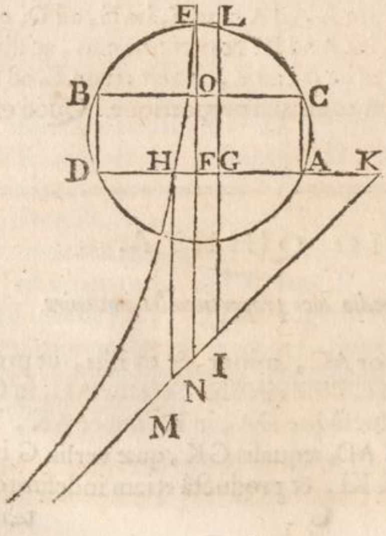
Inter extremas datas duas medio loco proportionales invenire.

DAtæ sint extremæ AB, major AC, minor, & ex illis, ut prius rectangulum ACBD, & circa illud circulus Secetur AD, in G, ita ut AG, sit æqualis AC, productâque DA, in K, donec AK, sit æqualis AG, fiat GI, normalis ad AD, æqualis GK, quæ versus G indefinitè producatur, tum junctâ KI, & productâ etiam indefinitè à parte I, ut in M; ſumatur in AD, recta AH, media proportionalis inter DA, & GA vel AC; & circa aſymptotos GI, IM, deſcribatur Hyperbola tranſiens per punctum H, quæ ſecabit circulum à parte G, ut patet, ſecet in puncto E; ex quo cadat in AD, normalis EF, ſecans CB, in O.

Dico quatuor DA, EF, FA, AC, eſſe continuè proportionales.

Producatur EF, ad KI, in N, & eidem parallela ducatur HM: Tum ex puncto E, in IG productam, cadat normalis EL, quæ utique erit parallela & æqualis FG: & cum KG, GI, ſint æquales, ex conſtructione, erunt etiam æquales KF, FN, & KH, HM.

Nunc, cum duo puncta H, & E, ſint in Hyperbolâ, ductæque ſint ad aſymptotos parallelæ HG, EL, itemque HM, EN, erit rectangulum MHG, æquale rectangulo NEL. Sed rectangulum MHG, eſt æquale rectangulo KHG, rectangulum vero NEL, eſt æquale rectangulo NFG (ſive KFG,) una cum rectangulo EFG. Igitur rectangulum KHG, eſt æquale rectangulis KFG, EFG. Et addito utrimque quadrato GA, rectangulum KHG, cum quadrato GA, erit æquale rectangulis KFG, EFG, cum quadrato GA. Sed rectangulum KHG cum quadrato GA, æquale eſt quadrato AH, & rectangulum KFG cum quadrato GA, ſimiliter eſt æquale quadrato AF; Itaque quadratum AH, erit æquale quadrato AF, cum rectangulo EFG, & cum AH, ex conſtructione, ſit media inter DA, AC, ideoque ejus quadratum ęquale ſit rectangulo ACBD; ſequitur rectangulum ACBD, æquale eſſe quadrato AF, & rectangulo EFG: &, addito utrimque rectangulo AGL, rectangulum ACBD cum rectangulo AGL, fore æquale quadrato AF, cum rectangulis AGL, EFG, hoc eſt cum unico rectangulo AFE. Sed cum AG, ſit æqualis AC, ex conſtru-

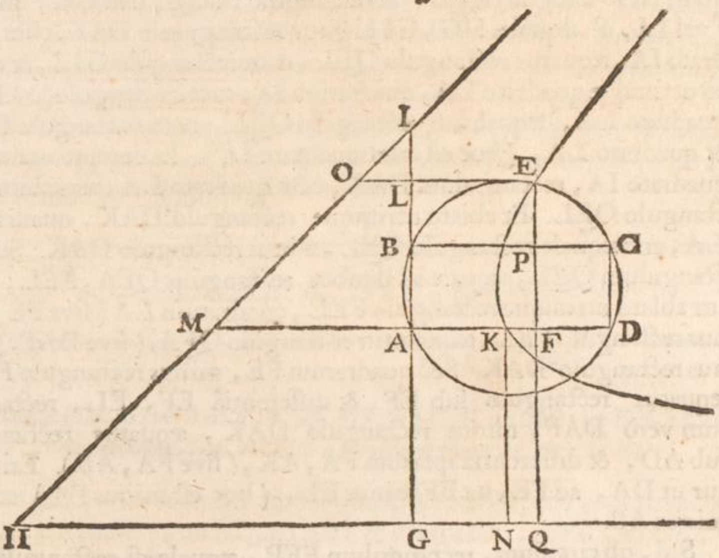


conſtructione, rectangulum ACBD, unà cum rectangulo AGL, æquale erit rectangulo ex AC in AD, cum GL ſive FE, & ſimiliter quadratum AF cum rectangulo AFE, æquale erit rectangulo ex AF, in AF unà cum EF. Igitur rectangulum ex AC, in AD cum FE, æquale erit rectangulo ex AF, in AF cum FE, & conſequenter erit eadem ratio DA cum FE, ad FE cum AF, quæ eſt AF, ad AC.

Sed cum rectangulum DFA, ſit æquale rectangulo FEO, (ob circulum) eſt etiam ut DF (ſive DA minus AF) ad EO (ſive FE minus FO vel AC) ita EF, ad FA. Invenimus igitur in quatuor rectis DA, EF, FA, AC, conditiones lemmatis 9. Sunt itaque continuè proportionales. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO SEXTA.

Idem alio modo efficere.



Sint duæ datæ AD major, AB minor, & rurſus ex illis rectangulum, circa quod deſcribatur circulus ABCD; Tum productâ BA, utrimque in G, & I, donec IA, AG, ſint æquales AD, ducatur GH, parallela AD, & ejuſdem dupla, & jungatur HI, ſumtâque AK, æquali AB, circa aſymptotos HG, HI, deſcribatur Hyperbola tranſiens per punctum K, quæ à parte I, ſecet circulum in E.

Dico, demiſsâ normali EF, ſecante CB in P, quatuor AD, EF, FA, AB, eſſe continuè proportionales.

Cadat ex K, in HG productam normalis KN, & ex E, in IG, normalis EL, quæ producta ſecet HL, in O, & producatur EF, donec occurrat HG, ſimiliter productæ, in Q, & DA, donec HI, occurrat in M. Patet AM, fore ſubduplam GH, hoc eſt æqualem DA, vel GA, vel AI.

Et quoniam EO, KM, itemque EQ, KN, ſunt parallelæ, & ex punctis K & E, in hyperbolâ ſumtis cadunt in aſymptotos, erunt rectangula NKM, QEO, æqualia. Sed rectangulum NKM, æquatur rectangulo NKA (ſive DAK) & rectangulo ſub NK, ſive DA, in AM (hoc eſt quadrato GA, vel AI) rectangulum verò QEO, æquale eſt rectangulo QEL, & rectangulo ex QE, ſive GL, in LO (vel LI, ob æquales HG, GI) Igitur rectangulum DAK, cum quadrato IA, æquatur rectangulo QEL, cum rectangulo GLI, & addito utrimque quadrato LA, quadratum IA, cum rectangulo DAK, & quadrato LA, æquabitur rectangulo QEL, cum rectangulo ILG, & quadrato LA, (hoc eſt cum quadrato IA). Et dempto utrimque quadrato IA, rectangulum DAK, cum quadrato LA, æquabitur rectangulo QEL. Et ablato utrimque rectangulo DAK, quadratum LA, erit æquale rectangulo QEL, minus rectangulo DAK. Sed rectangulum QEL, æquale eſt duobus rectangulis QFA, FEL; Igitur ablato utrimque rectangulo FEL, quadratum LA (ſive FE) minus rectangulo FEL, æquabitur rectangulo QFA, (ſive DAF,) minus rectangulo DAK. Sed quadratum FE, minus rectangulo FEL, æquatur rectangulo ſub EF, & differentiâ EF, EL, rectangulum verò DAF, minus rectangulo DAK, æquatur rectangulo ſub AD, & differentiâ ipſarum FA, AK, (ſive FA, AB). Erit igitur ut DA, ad FE, ita EF minus EL, (hoc eſt minus FA) ad FA minus AB.

Sed, ob circulum, rectangulum FEP, æquale eſt rectangulo AFD, eſtque ut EF, ad FA, ita DF, ſive DA minus AF,) ad EP (hoc eſt eſt EF minus FP, vel AB,) Quatuor igitur rectæ DA, FE, FA, AB,

habent

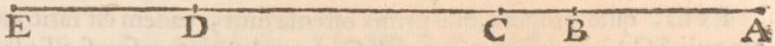
habent conditiones lemmatis 7. ideoque ſunt in continuâ proportione. Quod erat demonſtrandum.

D E

PROBLEMATUM SOLIDORUM CONSTRUCTIONE PER EASDEM LINEAS IISDEM INFINITIS MODIS.

Quomodo æquationum cubicarum varietas ad tres omninò formulas reducatur, jam ab aliis oſtenſum eſt: Affectas ſcilicet ſub latere affirmativè, vel negativè, & amphibolas. Illas per totidem problemata, ſuperiori methodo, conſtruemus, quamvis duarum mediarum inventione, & anguli triſectione, non ignoremus rem fortaſſè brevius abſolvi potuiſſe. Sed methodi varietatem & amplitudinem, ſic oſtendere maluimus; quam qui perceperit, ad aliorum Problematum caſus, etiam in quibus affectio ſub quadrato eſt, non difficulter applicabit.

LEMMA DECIMUM.



In rectâ EA, ſi fuerit ut EA, ad AD, ita CA, ad AB; ut EA, ad AD, ita rectangulum ACE, ad rectangulum ex AC, in BD.

CUm enim ſit ut EA ad AD, ita CA, ad AB; erit permutando, ut EA, ad CA, ita AD, ad AB; & dividendo, ut EC, ad CA, ita DB, ad BA: rectangulum igitur ex DB, in CA, æquale erit rectangulo ex EC, in BA. Sed ut AB ad AC, ita (ſumtâ communi altitudine EC) rectangulum ex BA in EC, ad rectangulum ACE: Igitur ut BA, ad AC, ita rectangulum ex DB in CA, ad rectangulum ACE, sive ut rectangulum ACE, ad rectangulum ex DB in CA, ita CA, ad AB, hoc est, ex hypothesi, EA ad AD. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO SEPTIMA.

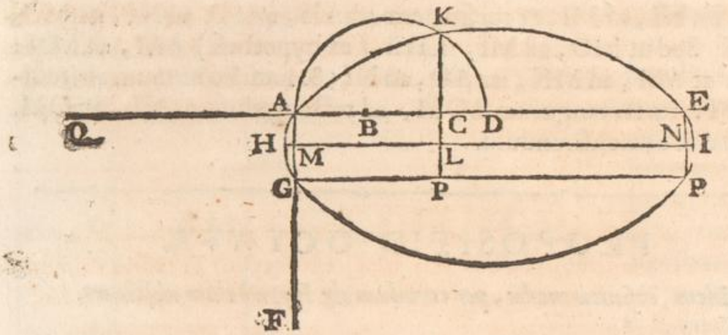
Lineam datam QD, sectam in A iterum secare in C, ut sit eadem ratio quadrati QA, ad quadratum AC, quæ est AC ad CD; per circulum & Ellipsim infinitis modis. Est autem paradigma æquationis cubicæ, affectæ sub latere, affirmativè.

Fiat super AD, semicirculus AKD, & à parte contrariâ erigatur in puncto A, normalis AF æqualis AQ, ac in eâ sumatur quodlibet punctum G, tum producatur AD in E, donec AD, sit ad AE, ut GF, ad FA; & perficiatur parallelogrammum GAER, divisisque AG, ER, bifariam in M, & N, jungatur NM, & producatur in H, ita ut rectangulum NHM, ad quadratum MA, eam habeat rationem, quam habet AF, ad FG, sumaturque NI in directum, æqualis HM. Tum axe HI, latere recto quod ad HI eandem habeat rationem, quæ est FG, ad FA, describatur semi-ellipsis HAKI. Quæ transibit per A, & E, ut patet ex constructione, secabitque circulum in aliquo puncto ut K. Cadat ex illo in AD normalis KC.

Dico ita esse quadratum QA, ad quadratum CA, ut AC, ad CD. Producatur KC, usque dum secet rectas NM, GR, in L & P, fiatque ut EA, ad DA, ita CA ad AB.

Ex iis, quæ propositione primâ ostensa sunt, eadem est ratio rectanguli ECA, ad rectangulum PKC, quæ lateris transversi ellipseos ad rectum, sive AF, ad FG, hoc est EA, ad AD (ex constructione). Sed ex lemmate 10. ut EA, ad AD, ita rectangulum ECA, ad rectangulum ex AC, in BD; rectangulum igitur ex AC in BD, æquale erit rectangulo PKC. Sed rectangulum ex AC, in BD, æquatur duobus rectangulis ACB, DCA; rectangulum verò PKC, æquale est rectangulo PCK, unà cum quadrato CK: duo igitur rectangula ACB, DCA, æqualia sunt rectangulo PCK, cum quadrato CK. Sed rectangulum DCA, est etiam æquale quadrato CK, (ob circulum).

Igitur,

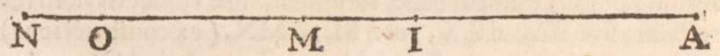


Igitur, demtis æqualibus, remanebunt æqualia rectangula ACB, PCK, eritque ut PC ad CB, ita CA, ad CK. Sed cum sit ut AF, ad FG, ita EA, ad AD, sive CA, ad AB, (ex constructione) erit per conversionem rationis, ut AF, ad AG (sive CP) ita CA, ad CB, & permutando, ut AF, ad CA, ita CP, ad CB. Sed ex ostensis ut CP, ad CB, ita CA, ad CK. Igitur ut AF, ad CA, ita CA, ad CK. Tres igitur AF (sive AQ) AC, CK, sunt in continua proportione. Estque ut quadratum AQ, ad quadratum AC, ita quadratum AC, ad quadratũ CK, hoc est (ob circulum) AC ad CD. Quod erat demonstrandum.

Idem accideret si in rectâ AF, in infinitum productâ ultra F, sumeretur punctum G. Non enim difficilior est demonstratio, quam, ut in propositione primâ, lectoris ingenio relinquimus.

Construximus itaque Problema, per circulum & Ellipsim, infinitis modis. Quod erat faciendum.

LEMMA UNDECIMUM.



In rectâ AN sectâ in punctis I, M, O, si fuerit ut AM, ad MN, ita OM, ad MI, erit ut AM, ad MN, ita rectangulum AOM, ad rectangulum sub NI, & OM.

Cum enim sit ut AM, ad MN, ita OM, ad MI, erit permutando, ut AM, ad OM, ita MN, ad MI, & componendo, ut AO, ad

MO,

MO, ita NI, ad MI, & rurſus permutando, ut AO, ad NI, ita MO, ad MI. Sed ut MO, ad MI, ita eſt (ex hypotheſi) AM, ad MN: Igitur ut AM, ad MN, ita AO, ad NI; & ſumtâ communi altitudine OM, ita rectangulum AOM, ad rectangulum ex NI, in OM. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO OCTAVA.

Idem, infinitis modis, per circulum & Hyperbolam abſolvere.

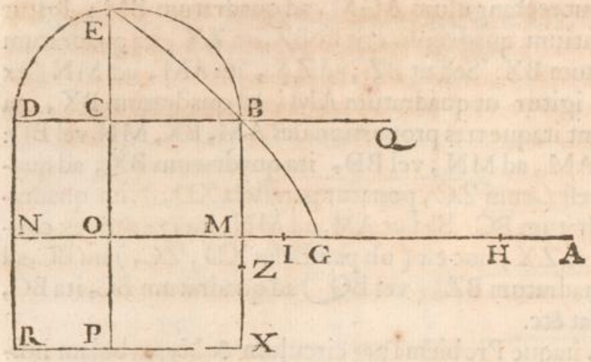
DEtur itaque recta QD, ſecta in B, ita ſecanda in C, ut quadratum QB, ad quadratum BC, habeat rationem BC, ad CD. Fiat rurſus ſuper BD, ſemicirculus, erectaque à parte oppoſitâ, normalis BZ, æqualis BQ, producatur utcumque in X; & perficiatur rectangulum XBDR; ſectiſque BX, DR, bifariam in M, & N, jungatur NM, & producatur in A, itaut ſit eadem ratio NM, ad MA, quæ XZ, ad ZB. Tum (ſiquidem fieri poſſit) recta AM, ſecetur, in G, ut rectangulum AGM, ad quadratum MB, eandem habeat rationem, quam habet BZ, ad ZX; & ipſi MG, ſumatur æqualis AH. Demum, axe HN, vertice G, latere tranſverſo HG, recto verò, quod ad HG, ſit ut XZ, ad ZB, deſcribatur ſemi-hyberbola GBE: tranſibit enim per B, cum ponatur eadem ratio rectanguli AGM, vel HMG, ad quadratum MB, quæ BZ, ad ZX, ſive lateris tranſverſi, ad rectum; ſecabit etiam circulum in E, ex quo cadat in BD normalis EC.

Dico eſſe ut quadratum QB, ad quadratum BC, ita BC, ad CD.

Producatur EC, uſque dum ſecet parallelas MN, XR in punctis O, & P. Tum fiat ut AM, ad MN, ita OM, ad MI.

Ex iis quæ propoſitione 2. oſtenſa ſunt, rectangulum AOM, ad rectangulum PEC, eandem habet rationem, quæ eſt lateris tranſverſi ad rectum; ſive BZ, ad ZX, vel AM, ad MN, (ex conſtructione). Sed eandem etiam rationem habet idem rectangulum AOM, ad rectangulum ſub NI, OM, * Igitur rectangulum ſub NI, & OM, æquale erit rectangulo, PEC. Eſt autem rectangulum ſub NI, & OM, æquale duobus rectangulis NOM, IOM: rectangulum verò PEC, rectangulo PCE, unà cum quadrato CE. Igitur rectangulum NOM, (vel BCD,) cum rectangulo IOM, æquale eſt rectangulo PCE, cum quadrato

** per lemma undecimum.*



quadrato CE. Sed rectangulum BCD, est etiam æquale quadrato CE (ob circulum:) Igitur ablatis hinc inde æqualibus BCD rectangulo, & CE quadrato, remanebunt æqualia rectangula, IOM, PCE. Eritque ut PC, ad OI, ita MO, (vel CB,) ad CE.

Nunc (ex constructione) ut XZ, ad ZB, ita NM ad MA, vel IM, ad MO: erit igitur componendo, ut XB, ad BZ, ita IO, ad MO, & permutando, ut XB, (vel PC,) ad IO, ita BZ, (vel BQ,) ad MO, vel BC.

Sed ut PC, ad IO, ita jam demonstratum est esse CB, ad CE; igitur ut BQ ad BC, ita BC, ad CE, & ut quadratum BQ, ad quadratum BC, ita quadratum BC, ad quadratum CE, hoc est (ob circulum) ita BC, ad CD. Quod erat &c.

Si recta AM, ita secari non posset, quemadmodum in constructione imperatum est, tunc BX, secanda esset, eâdem planè methodo, qua propositione 2. usi sumus, & quam qui intellexerit facilè ad hujus propositionis casum applicabit: ideoque monuisse sufficiat.

Addo tantum, si punctum G, inciderit in medium ipsius AM, Tunc rectam ex puncto G, per B ductam, secturam circulum in puncto E quæsito, ut demonstrationis vestigia repetenti constabit. Solvetur itaque Problema solidum per lineam & circulum. Hoc mirum foret, inquam, si non casu, sed arte, in punctum X incidisses. At illud arte invenire, non minoris est difficultatis quàm ipsum Problema solvere. Experire, & cùm in illud incideris (neglectâ rectâ GBE) junge dumtaxat rectam XD, & ex Z, duc ipsi parallelam, illa enim incurret in punctum C quæsitum. Quod breviter ostendo.

Quoniam punctum G, bisecat rectam AM (ex hypothesi) erit rectangulum AGM, pars quarta quadrati AM. Ponitur autem ita

 esse

esse BZ, ad ZX, ut rectangulum AGM, ad quadratum BM: Igitur sumtis consequentium quadruplis erit ut BZ, ad ZX, ita quadratum AM, ad quadratum BX. Sed ut BZ, ad ZX, ita AM, ad MN (ex constructione): igitur ut quadratum AM, ad quadratum BX, ita AM, ad MN, sunt itaque tres proportionales AM, BX, MN vel BD: Estque rursus ut AM, ad MN, vel BD, ita quadratum BX, ad quadratum BD, hoc est (cum ZC, ponatur parallela XD,) ita quadratum BZ, ad quadratum BC. Sed ut AM, ad MN, ita, rursus, ex constructione, BZ, ad ZX, hoc est (ob parallelas XD, ZC,) ita BC, ad CD. Igitur ut quadratum BZ, (vel BQ) ad quadratum BC, ita BC, ad CD. Quod erat &c.

Construximus itaque Problema per circulum & Hyperbolam infinitis modis. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO NONA.

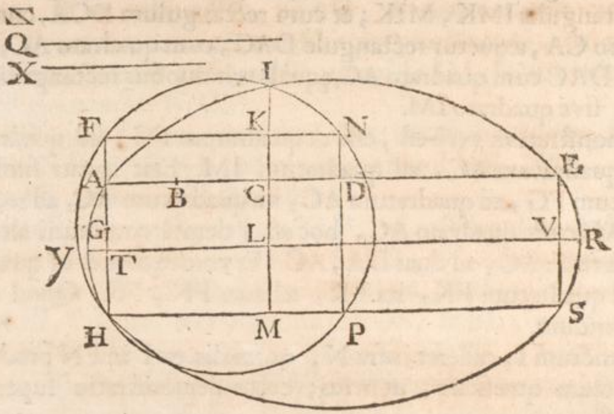
Datis duabus rectis Z, & Q, invenire tertiam ut X, ad cujus quadratum eandem habeat rationem quadratum Z, quæ est ipsius X, ad utramque Q & X. Est autem paradigma æquationis, cubicæ affectæ sub latere negativè.

SUmatur FN, æqualis Q, & erigatur FH, dupla Z, bisecta in G. Tum in rectâ GF, (vel eadem versus F in infinitum productâ) sumto quolibet puncto A, ducatur AD parallela & æqualis FN, & secetur vel producatur in E, ita ut sit eadem ratio AD, vel AE, quæ est AG, ad GH, perfectoque rectangulo HAES, bisecentur rectæ AH, ES, in T, & V, ductaque TV, producatur in R, itaut rectangulum TRV, ad quadratum VE, eandem habeat rationem, quam HG, ad GA, & productâ VT, in Y, donec TY, sit æqualis VR, super axe YR, describatur semi-ellipsis YIR, in quâ ratio lateris transversi ad rectum, sit eadem quæ HG, ad GA; transibit illa per A, & E, (ex constructione) & secabit circulum, vel supra, vel infra N, vel in ipso puncto N. Secet primò supra, in puncto I, & ex I, demittatur in FN, normalis IK.

Dico FK, æqualem esse lineæ X, quæsitæ; sive ita esse quadratum FG, ad quadratum FK, ut FK, ad duas FN, FK.

Produ-

Producatur IK, uſque dum ſecet parallelas AE, TV, HS, in C, L, M. Fiatque ut EA, ad DA, ita CA, ad BA.



Nunc (ob ellipſim) eadem erit ratio rectanguli ECA, ad rectangulum MIC, quæ eſt lateris tranſverſi, ad rectum, ſive HG, ad GA, vel EA, ad DA, (ex conſtructione): Sed ut EA, ad DA, ita rectangulum ACE, ad rectangulum ex AC in BD *: Igitur rectangulum ex AC, in BD, æquale erit rectangulo MIC. Sed rectangulum ex AC, in BD, æquale eſt duobus rectangulis DCA, ACB: rectangulum verò MIC, duobus MIK, & MI in KC. Itaque duo rectangula DCA, ACB, erunt æqualia duobus MIK, & MI in KC; & cùm rectangulum DCA ſive PMH, ſit æquale rectangulo MIK, (ob circulum): ablatis æqualibus, remanebunt æqualia, rectangula ACB, MI, KC: Eritque ut KC, ad CB, ita CA, ad MI.

*per lemma decimū

Nunc, ut HG, ſive FG, ad GA, ita EA, ad DA, & CA, ad AB (ex conſtructione) Igitur per converſionem rationis ut FG, ad FA, (ſive KC), ita CA, ad CB: & permutando, ut FG, ad CA, ita KC, ad CB. Sed ut KC, ad CB, ita oſtenſum eſt eſſe, AC, ad IM; Igitur ut FG, ad CA, ita CA, ad IM; & ut quadratum FG, ad quadratum CA, ita quadratum CA, ad quadratum IM (ſive ad duo rectangula MIK, IMK). Sed ulterius cum tres FG, CA, IM, demonſtratæ ſint proportionales, rectangulum ſub FG, IM, erit æquale quadrato CA, & ſumtis duplis rectangulum ſub duplâ FG (hoc eſt FH vel KM ex

 conſtru-

constructione) in IM, æquabitur duplo quadrato AC, rectangulum vero MIK, æquale etiam est rectangulo DCA, Igitur additis æqualibus rectangulum DCA, cum duplo quadrato AC, æquale est duobus rectangulis IMK, MIK; & cum rectangulum DCA, cum duplo quadrato CA, æquetur rectangulo DAC, cum quadrato AC, rectangulum DAC cum quadrato AC, ęquale erit duobus rectangulis IMK, MIK, sive quadrato IM.

Demonstratum verò est, esse ut quadratum FG, ad quadratum AC, ita quadratum AC, ad quadratum IM. Erit igitur similiter ut quadratum FG, ad quadratum AC, ita quadratum AC, ad rectangulum DAC cum quadrato AC, hoc est (demtâ communi altitudine AC) ita recta AC, ad duas DA, AC. Et consequenter ut quadratum FG, ad quadratum FK, ita FK, ad duas FN, FK. Quod erat demonstrandum.

Si punctum I, caderet infra N, normalis ex I in FN productam, daret rectam quæsitam, ut prius; cujus demonstratio superiori similis est.

Si verò transiret per N, tum ipsa FN esse recta quæsita. Quo casu patet quadratum rectæ GF, subduplum esse quadrati rectæ FN. Itaque ex his datis solvi potest Problema sine ulla constructione. Quod fusius prosequi, nostri non est instituti.

Eadem esset demonstratio si punctum A ultra F, in GF productâ sumtum esset, ut consideranti planum fiet.

Construximus itaque Problema per circulum & Ellipsim infinitis modis. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO DECIMA.

Propositum sit idem per circulum & Hyperbolam infinitis modis absolvere.

SInt, eadem quæ prius, rectangulum HFNP, & circa illud circulus: bisectâque NP, in A, sumatur ultra A, quodlibet punctum G, & perficiatur rectangulum GPHY, bisectisque etiam GP, in B, & YH, in O, jungatur AO, & ita producatur usque ad E, ut sit eadem ratio BE, ad BO, quæ est PA, ad AG: Tum secetur BE, in D, itaut

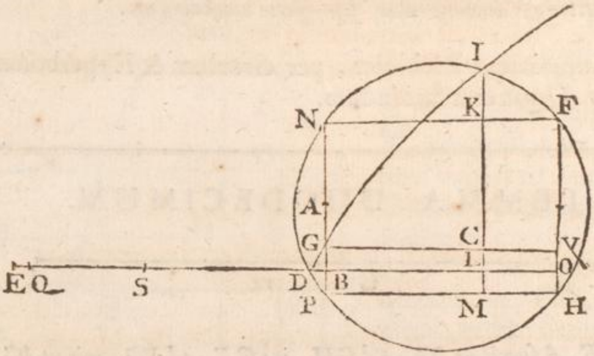
itaut rectangulum EDB, ad quadratum BG, habeat rationem PA, ad AG; & ſumatur EQ, æqualis BD. Demum vertice D, latere tranſverſo DQ, axe DO, deſcribatur Hyperbola, cujus latus tranſverſum ad rectum, ſit in ratione PA, ad AG; & quæ occurrat circulo in puncto I, (occurret enim, & tranſibit per punctum G, ut patet ex conſtructione:) cadat ex I, in HB, normalis IM, ſecans rectas FN, YG, OB, in punctis K, C, L.

Dico NK, eſſe lineam quæſitam; ſive ita eſſe quadratum AN, ad quadratum NK, ut eſt NK, ad utramque ſimul NK, NF,

Fiat ut EB, ad BO, ita LB, ad BS.

Ex ante oſtenſis, rectangulum ELB, ad rectangulum MIC, habet rationem PA, ad AG, ſive EB, ad BO, vel lateris tranſverſi ad rectum. Sed ut EB, ad BO, ita rectangulum ELB, ad rectangulum ſub OS & BL* Igitur rectangulum ſub OS, & BL, æquale eſt rectangulo MIC. Rectangulum verò ſub OS, & BL, æquale eſt rectangulis SLB, & OLB (ſive HMP) rectangulum autem MIC, æquale etiam eſt duobus MIK, & MI in KC. Itaque duo rectangula SLB, HMP æqualia erunt duobus MIK, & MI in KC. Sed rectangula HMP, MIK, etiam æqualia ſunt (ob circulum): Igitur demtis æqualibus, æqualia remanebunt rectangula SLB, MI in KC, eritque ut KC, ad SL, ita BL, ad MI.

* *per lemma undecimum.*



Ulterius, eſt ut PA, ſive NA, ad AG, ita LB, ad BS (ex conſtructione,) erit igitur componendo, ut NG, ad AG, ita LS, ad BS, & per converſionem rationis, ut NG, ſive KC, ad NA, ita SL, ad LB, &

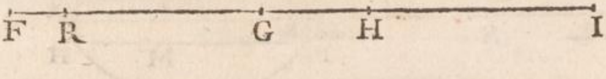
& permutando, ut KC, ad SL ita NA, ad LB. Sed ut KC, ad SL, ita oſtenſum eſt eſſe LB, ad MI; Igitur ut NA, ad LB, ita LB, ad MI; Et ut quadratum NA ad quadratum LB, ita quadratum LB, ad quadratum MI: & cum tres ſint proportionales, rectangulum NA, MI, eſt æquale quadrato LB. Itaque ſumtis duplis rectangulum ſub duplâ NA, in MI (ſive rectangulum KMI,) æquale erit duplo quadrato BL, & additis æqualibus (ob circulum) rectangulis, MIK, BLO; duo rectangula KMI, MIK, (ſive quadratum MI) æqualia erunt rectangulo BLO, cum duplo quadrato BL. Sed rectangulum BLO, cum duobus quadratis BL, æquale eſt rectangulo OBL, & quadrato BL; Igitur quadratum MI, æquatur rectangulo OBL, cum quadrato BL, eſtque eadem ratio BL, ad MI, quæ MI, ad OB cum BL. Et ut quadratum BL, ad quadratum MI, ita BL, ad OB cum BL.

Sed ut quadratum LB, ad quadratum MI, ita demonſtratum eſt ſuperius eſſe quadratum NA, ad quadratum LB; Igitur ut quadratum NA, ad quadratum LB, ita LB, ad duas BL, OB, ſive ut quadratum AN, ad quadratum KN, ita NK, ad duas NK, NF. Quod erat demonſtrandum.

Alios caſus non perſequor, cùm ſcilicet punctum G, cadit ultra P, in lineâ AP, indefinitè productâ. Ex iis enim quæ ante demonſtrata ſunt, illorum conſtructio & demonſtratio ſeſe offeret conſideranti.

Abſolvimus itaque Problema, per circulum & Hyperbolam infinitis modis. Quod erat faciendum.

LEMMA DUODECIMUM.



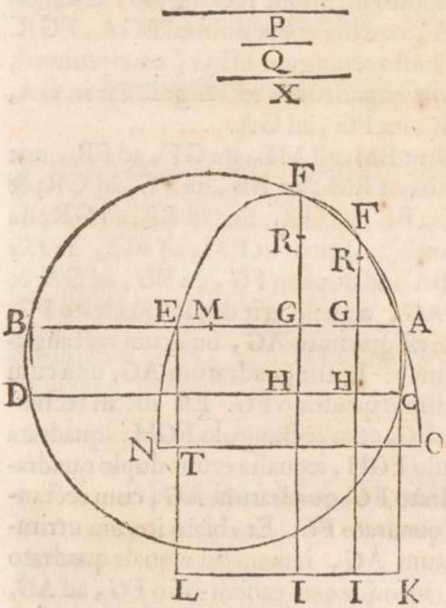
In rectâ IF, ſi fuerit ut IG, ad GH, ita GF, ad FR; erit ut IG, ad GH, ita rectangulum IFG, ad duo rectangula HGF, GFR.

CUm enim ponatur eſſe ut IG, ad GH, ita GF, ad FR, erit permutando & componendo, ut IF, ad GF, ita HG cum FR, ad FR, FR, & rursus permutando ut IF, ad HG cum FR, ita FG, ad FR. Sed ut IF, ad HG cum FR, ita sumtâ communi altitudine FG, rectangulum IFG, ad duo rectangula HGF, RFG, Igitur ut FG, ad FR, sive IG, ad GH (ex constructione), ita rectangulum IFG, ad duo rectangula HGF, RFG. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO UNDECIMA.

Datis duabus rectis P, & Q, invenire tertiam ut X, ad cujus quadratum, quadratum datæ P eandem habeat rationem, quæ est ipsius X, ad excessum X, supra Q. Est autem paradigma æquationis cubicæ, affectæ sub latere, & amphibolæ,

ACcipiatur AB, dupla P, bisecta in M, eique ad rectos AC, æqualis Q: perficiatur rectangulum ACB, & circa illud describatur circulus AFBC. Tum sumto in MB, etiam indefinitè productâ, quolibet puncto E, producatur AC in K, fiatque ut ME, ad MB, ita AC, ad AK, & perficiatur rectangulum AELK. Bisectisque AK, EL, bifariam in S, & T, jungatur ST, & producatur in N, itaut rectangulum SNT, ad quadratum TE, eandem habeat rationem, quam EM, ad MB; sumaturque SO, indirectũ æqualis TN. Tum axe ON, fiat semi-ellipsis, in qua ratio axis ON, ad latus rectum, eadem sit quæ EM, ad MB, transibit illa per puncta, A & E, ut evidens est ex constructione. Si verò occurrat circulo, occurret in uno vel pluri-



pluribus punctis. Occurrat in F, ex quo cadat in AB, normalis FG, quæ producta secet parallelas CD, KL, in punctis H, & I.

Dico FG, esse æqualem X, quæsitæ, sive ita esse quadratum BM, ad quadratum FG, ut FG, ad excessum FG supra AC, vel GH.

Fiat ut BM ad ME, sive IG, ad GH, ita GF, ad FR.

Nunc (ob ellipsim) eadem erit ratio rectanguli EGA, ad rectangulum IFG, quæ est axis ON, ad latus rectum, sive EM, ad BM, hoc est HG, ad GI, ex constructione. Sed ut HG, ad GI, ita duo rectangula HGF, GFR, ad rectangulum IFG *, Igitur duo rectangula HGF, GFR, æqualia sunt rectangulo EGA. Et addito utrimque rectangulo sub BE & GA, tria rectangula HGF, GFR, BE in GA, æqualia erunt duobus rectangulis EGA, & BE in GA, hoc est unico BGA. Sed cum rectæ HG, & FR, æquales sint rectæ HF minus RG, sumtâ communi altitudine GF, erunt rectangula HGF, GFR, æqualia rectangulo HFG, minus rectangulo FGR. Igitur rectangulum HFG, minus rectangulo FGR, unà cum rectangulo BE in GA, æquale erit rectangulo BGA, & addito utrimque rectangulo FGR, duo rectangula HFG, & BE in GA, æqualia erunt duobus BGA, FGR. Sed rectangulum BGA, æquale est rectangulo HFG (ob circulum); Igitur, ablatis æqualibus, æqualia remanebunt rectangula BE in GA, & FGR, eritque ut BE, ad GR, ita FG, ad GA.

** per lemma duodecimum*

Nunc, ex constructione, est ut BM, ad ME, ita GF, ad FR, erit itaque per conversionem rationis, ut BM, ad BE, ita FG, ad GR; & permutando, ut BM, ad FG, ita BE, ad GR. Sed ut BE, ad GR, ita FG, ad GA (ex ante demonstratis); Igitur ut BM, ad FG, ita FG ad GA, & ut dupla BM (sive BA) ad duplam FG, ita FG, ad GA; & per consequens rectangulum BAG, æquale erit duplo quadrato FG, Sed rectangulum BAG, æquale est quadrato AG, unà cum rectangulo BGA (sive HFG, ob circulum): Igitur quadratum AG, unà cum rectangulo HFG, æquale erit duplo quadrato FG. Est autem rectangulum HFG, æquale quadrato FG, cum rectangulo FGH: quadrata itaque AG, FG, cum rectangulo FGH, æqualia erunt duplo quadrato FG, & ablato utrimque quadrato FG, quadratum AG, cum rectangulo FGH, æquale remanebit quadrato FG. Et ablato iterum utrimque rectangulo FGH, quadratum AG, remanebit æquale quadrato FG, minus rectangulo FGH, ideoque erit eadem ratio FG, ad AG, quæ est ipsius AG, ad FG minus GH: & ut quadratum FG ad quadratũ AG, ita FG, ad FG minus GH.

Sed

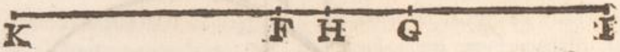
Sed ut FG ad AG, ita oſtenſum eſt eſſe, BM, ad FG, & ut quadratum FG, ad quadratum AG, ita quadratum BM, ad quadratum FG. Igitur ut quadratum BM, ad quadratum FG, ita FG, ad FG minus GH; ſive ita FG, ad exceſſum FG, ſupra AC. Quod erat demonſtrandum.

Determinationem Problematis & numerum radicum lectoris induſtriæ relinquo, cum hæc fusè ab aliis oſtenſa ſint.

Sufficit nunc Problema per circulum & Ellipſim infinitis ut propoſitum eſt modis abſolviſſe. Quod erat faciendum.

LEMMA DECIMUM-TERTIUM.

Sumtis in rectâ IK, tribus punctis G, H, F, ſi fuerit ut GH, ad GI, ita FG, ad GK, erit ut GH, ad GI, ita rectangulum GFH, ad rectangulum KGF, minus rectangulo IGF.



CUm enim ſit ut GH, ad GI, ita FG, ad GK, erit convertendo & permutando, ut FG, ad GH, ita GK, ad GI, & dividendo ut FH, ad HG, ita GK minus GI, ad GI, & rurſus permutando ut FH, ad GK minus GI, ita GH, ad GI. Sed ut FH, ad GK minus GI, ita, ſumtâ communi altitudine FG, rectangulum GFH, ad rectangulum KGF, minus rectangulo IGF. Igitur ut GH, ad GI, ita rectangulum GFH, ad rectangulum KGF, minus rectangulo IGF. Quod erat demonſtrandum.

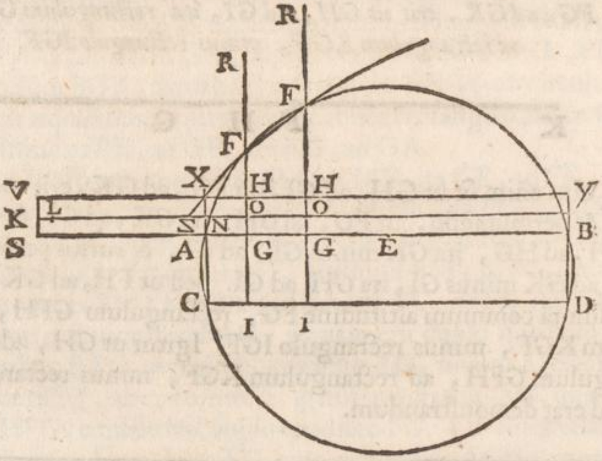
PROPOSITIO DUODECIMA.

Idem per circulum & Hyperbolam iiſdem modis efficere.

SUmtâ rurſus AB, duplâ P, biſectâ in E, & AC normali, æquali Q, fiat rectangulum CABT, & circa illud circulus, productâque

BA quantumlibet in S, producatur item CA, in X, itaut sit CA, ad AX, quemadmodum SE, ad EA, perfectisque rectangulis SAXV, XAYB, secentur XA, VS, bifariam in K, & N, junctaque KN dividatur in Z, itaut rectangulum KZN, ad quadratum NX, eam habeat rationem, quam habet CA, ad AX: sumtâque KL, æquali ZN, vertice Z, axe ZN, latere transverso LZ, recto verò, ad quod illud se habeat ut CA, ad AX, describatur semi-hyperbola ZXF, quæ utique transibit per X, ex constructione, & siquidem occurrat circulo, id fiet in uno, vel pluribus punctis. Occurrat in F, unde demittatur in CT, normalis, FI, secans parallelas XY, KN productam, & AB, in punctis H, O, G.

Dico FG, esse Z quæsitam; sive ita esse quadratum AE, ad quadratum FG, ut FG, ad excessum FG supra AC.



Fiat ut HG, ad GI, ita GF ad GR.

Quoniam itaque punctum F, est ad Hyperbolam, erit ex sæpè ostensis, eadem ratio rectanguli GFH, ad rectangulum KON, quæ est lateris recti, ad transversum, sive XA, ad AC, ex constructione, vel HG, ad GI. Sed ut HG, ad GI, ita idem rectangulum GFH, ad rectangulum RGF, minus rectangulo IGF *: Igitur rectangulum KON,

* per lemma decimũ tertiũ.

KON, sive SGA, æquale est rectangulo RGF, minus rectangulo IGF. Sed rectangulum BGA est etiam æquale rectangulo IFG (ob circulum); Itaque additis æqualibus, duo rectangula SGA, BGA, sive unicum SB in GA, æquatur rectangulo RGF, minus rectangulo IGF, unà cum rectangulo IFG; & cum rectangulum IFG æquale sit rectangulo IGF unà cum quadrato FG; sequitur rectangulum SB in GA, æquale esse rectangulo RGF, cum quadrato GF, hoc est rectangulo ex RG cum GF, in GF. Est itaque ut SB, ad RG cum GF, ita GF, ad GA.

Nunc ut IG, ad GH, sive CA, ad AX, ita SE, ad AE, ex constructione: Igitur ut SE, ad AE ita RG, ad GF ex eadem. Et componendo ut SE cum AE, sive ut SB, ad AE, ita RG cum GF, ad GF & permutando ut SB, ad RG, cum GF, ita AE ad GF. Sed ut SB, ad RG cum GF, ita ostensum esse GF, ad GA; erit itaque ut AE, ad GF, ita GF, ad GA. Et sumtis antecedentium duplis, ut dupla AE, sive AB, ad GF, ita dupla GF, ad GA. Rectangulum igitur BAG, æquale erit duplo quadrato GF. Sed rectangulum BAG, æquale est rectangulo BGA, cum quadrato AG. Itaque rectangulum BGA, cum quadrato GA, æquale erit duplo quadrato GF. Est autem rectangulum BGA, æquale rectangulo IFG, sive rectangulo IGF, cum quadrato GF; Igitur quadratum GA, unà cum rectangulo IGF, & quadrato GF, æquale erit duplo quadrato GF, sive ablato utrimque quadrato GF, rectangulum IGF, cum quadrato GA, æquabitur quadrato GF, & ablato utrimque rectangulo IGF, quadratum GA, æquale erit quadrato GF, minus rectangulo IGF, hoc est æquale erit rectangulo, ex GF, in GF minus IG. Erit itaque ut GF, ad AG, ita GA, ad GF minus IG.

Sed ut GF, ad GA, ita ostensum est esse AE, ad GF; igitur ut AE, ad GF, ita GF, ad GA, & GA, ad GF minus IG. Et ut quadratum AE, ad quadratum GF, ita GF, ad GF minus IG, hoc est ad excessum GF, supra AC. Quod erat demonstrandum.

Reliqui casus facilè construentur & demonstrabuntur, ex iis quæ propositione secundâ & aliis ostensa sunt. Determinationem verò Problematis, ut prius, lectori relinquimus.

Constat itaque nos id quod propositum erat per circulum & Hyperbolam infinitis modis effecisse. Quod erat faciendum.

 Quoniam

Quoniam verò anguli triſectione, & duarum mediarum inter datas inventione, omne Problema ſolidum ſolvi poteſt; Non alienum ab hac materiâ viſum eſt, anguli triſectionum per circulum & Hyperbolam demonſtrare: ut ad inveſtigandas methodo ſuperiori infinitas Ellipſes & Hyperbolas, quæ cum circulo idem præſtant, lectorem excitemus. Sit itaque

---

PROPOSITIO DECIMA-TERTIA.

Angulum datum ſecare trifariam.

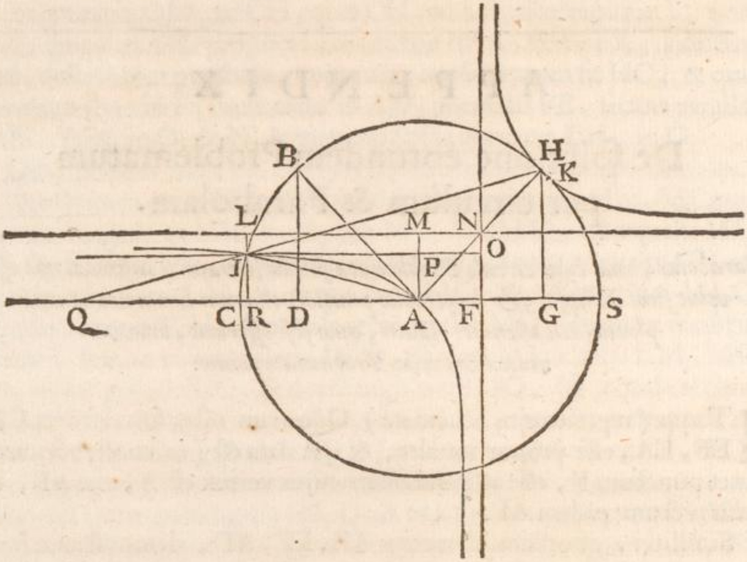
DAtus ſit angulus BAC, ſecandus trifariam. Centro A intervallo quolibet ut AC, deſcribatur ſemicirculus, qui ſecet CA productam in S, & AB, in B. Et ex B, in AC cadat normalis BD, tum ex AS, reſecetur AF, æqualis dimidiæ AD, erectâque FN, æquali dimidiæ DB, & eidem parallelâ, ducatur NL, parallela AD. Demum circa aſymptotos NF, NL, deſcribatur hyperbola tranſiens per punctum A, quæ ſecet circulum I, & jungatur AI.

Dico angulum IAC, ſubtriplum eſſe anguli BAC.

Sumatur AG, æqualis AD, & erigatur ad circulum normalis GH, quæ utique erit æqualis DB, junctiſque HA, HI, producatur HI, donec occurrat lineæ AC productæ, in puncto Q. Tum perficiatur rectangulum FN, MA, & ex puncto I, cadat in AC, normalis IR, quæ producta ſecet NM in L.) Et in FN normalis IO, ſecans MA, in P.

Quoniam igitur duo puncta I, & A, ſunt in eâdem Hyperbolâ, & ex illis ductæ ſunt ad aſymptotos parallelæ IL, AM, & IO, FA, erit rectangulum OL, æquale rectangulo FM: & ablato communi rectangulo OM, additoque utrimque rectangulo AI, rectangulum FI, æquale erit rectangulo AL; Itaque erit eadem ratio LR, ad FR, quæ eſt RI, ad RA; & ſumtis duplis, ut dupla LR, ſive DB, hoc eſt HG, ad duplam FR, ita RI, ad RA. Sed dupla FR, æqualis eſt duplæ AF (hoc eſt AG) & duplæ AR. Igitur dupla RF, æqualis erit GA cum dupla AR, hoc eſt GR cum RA. Erit igitur ut HG, ad GR cum RA, ita RI, ad RA, & permutando ut HG, ad RI, ita GR cum RA, ad RA.

Sed ut HG, ad RI, ita GQ, ad RQ; igitur ut GR cum RA, ad RA, ita



ita GQ, ad RQ, & dividendo, ut GR, ad RA, ita eadem GR, ad RQ. Sunt ergo æquales HR, RQ. Sed anguli ad R sunt recti, & RI communis, igitur æquales quoque sunt rectæ IA, IQ & anguli IAR, IQR, & consequenter angulus externus HIA, duplus est anguli IQC. Sed angulus HIA æqualis est angulo AHI, ob æquales AH, AI; itaque angulus AHI, duplus erit anguli IQC, & cum angulus HAS, sit etiam æqualis duobus AHQ, HQA, erit angulus HAS, triplus anguli IQA vel IAQ. Sed angulus HAS, æqualis est angulo BAC, ex constructione. Constat itaque angulum BAC triplum esse anguli IAC. Quod erat demonstrandum.

Eodem modo descriptâ per punctum H, sectione oppositâ HK, occurrente circulo in K ostendetur (ductâ AK) angulum KAS, esse subtriplum anguli SAB, residui ad duos rectos; sive quod idem est, arcum SK, esse tertiam partem arcus SB; & per consequens arcum KI, esse duas tertias semiperipheriæ; sive tertiam partem integræ circumferentiæ.

APPENDIX

De ſolutione eorundem Problematum per circulum & Parabolam.

Parabolas, quæ cum circulo Problemata ſolida ſolvant, infinitas non eſſe, velut ſunt Ellipſes, & hyperbolæ penitior, illarum linearum contemplatio ſatis oſtendit. Duas, quæ ſeſe offerunt, breviter indicabimus, in Problemate primo.

ITaque (repetito ejus Schemate) Quoniam oſtenſum eſt tres CA, EF, EA, eſſe proportionales, & CA data eſt (ex conſtructione) patet punctum F, eſſe ad parabolam cujus vertex eſt A, axis AF, & latus rectum eadem AF.

Similiter, quoniam etiam tres AE, EF, AD, demonſtratæ ſunt proportionales, & AD data eſt, ſequitur idem punctum F, eſſe ad parabolam, cujus vertex A, axis AD, & latus rectum eadem AD.

Quæ obſervatio ad ſex primas propoſitiones adſtringitur, ſed non difficulter, duas ſaltem parabolas, quæ propoſito ſatisfaciant in propoſitionibus 7. 8. 9. 10. 11. 12. eodem modo reperies.

An verò non aliæ quoque ad hanc effectionem, cum circulo adhiberi poſſunt. Imò aliæ quoque, ſed non infinitè, unam damus in exemplum.

PROPOSITIO DECIMA-QUARTA.

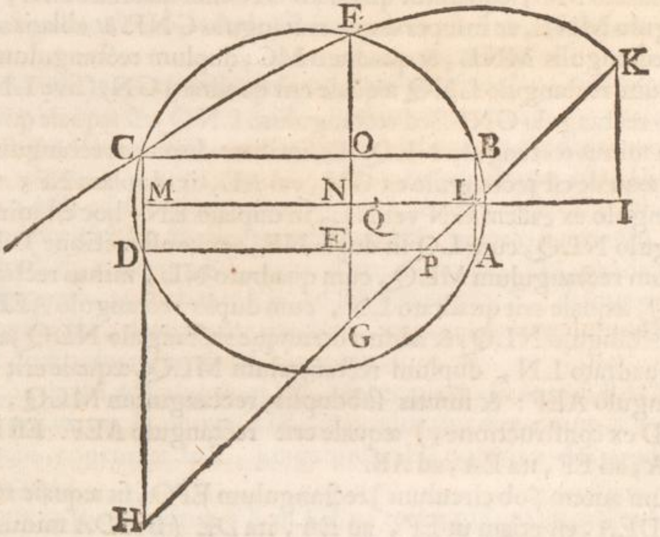
Inter extremas datas, duas medio loco proportionales invenire, per circulum & parabolam.

SInt duæ datæ AD, major, AB minor, & ex iis rectangulum AB CD, ac circa illud circulus. Secentur AB, CD, bifariam in L, & M, & junctâ LM, ſumatur in eâ LQ, æqualis AB: & ſumtâ AP, in AD, æquali LA, jungatur LP, & producatur donec cum CD, pariter productâ, concurrat in H. Tum producatur etiam ML, in I, itaut ſit

ſit eadem ratio QM, ad CH, quæ CH, ad MI, erectâque in I, normali, quæ cum HL productâ, concurrat in K, vertice K, diametro KH, deſcribatur parabola, cujus una applicatarum ſit HC, & quæ circulum ſecet in F; unde cadat in AD, normalis FE, ſecans parallelas BC, LM, in O, & N, & quæ producta occurrat LH, in G.

Dico quatuor AD, FE, EA, AB, eſſe continuè proportionales.

Quadratum enim CH, eſt æquale duobus quadratis HM, MC, unà cum rectangulo ex HM in duplam MC. Sed HM, eſt æqualis ML, & LQ eſt dupla MC, (ex conſtructione;) igitur quadratum CH, eſt æquale quadrato LM, cum quadrato MC, & rectangulo MLQ. Quadratum verò CH, eſt æquale rectangulo IMQ (etiam ex conſtructione) Itaque rectangulum IMQ, eſt æquale quadratis LM, MC, cum rectangulo MLQ. Sed rectangulum IMQ, eſt æquale rectangulo ex IL in MQ, cum rectangulo LMQ, hoc eſt cum quadrato LM, minus rectangulo MLQ:) Igitur rectangulum ex IL, MQ, cum quadrato LM, minus rectangulo MLQ, erit æquale quadratis ML, MC, cum rectangulo MLQ: & ablato utrimque quadrato ML, & addito rectangulo MLQ, rectangulum ILMQ, æquabitur duplo rectangulo MLQ, cum quadrato MC.



Ulterius quoniam duæ CH, FG, sunt applicatæ ad diametrum parabolæ, erit ut quadratum CH, ad quadratum FG, ita HK, ad GK. Sed ut HK, ad GK, ita MI, ad NI (ob parallelas): Igitur ut quadratum CH, ad quadratum GF, ita MI, ad NI, vel sumtâ communi altitudine MQ, ita rectangulum IMQ, ad rectangulum sub IN, MQ, & permutando, ut quadratum CH, ad rectangulum IMQ, ita quadratum GF, ad rectangulum sub INMQ. Est autem quadratum CH, æquale rectangulo IMQ (ex constructione,) Igitur quadratum FG, æquale etiam erit rectangulo INMQ. Sed rectangulum IN MQ, est æquale rectangulis ex ILMQ, & LNMQ: ex ostensis verò rectangulum ILMQ, æquatur duplo rectangulo MLQ, cum quadrato MC. Igitur quadratum FG, æquale erit rectangulo LNMQ, cum duplo rectangulo MLQ, & quadrato MC. Et cum rursus rectangulum LNMQ, æquale sit duobus LNM, LNQ, sequitur duo rectangula LNM, LNQ, cum duplo rectangulo MLQ & quadrato MC, æquari quadrato FG: hoc est duobus quadratis GN, NF cum duplo rectangulo GNF. Est autem quadratum NF, æquale quadrato NO, vel MC, cum rectangulo EFO, (sive MNL ob circulum); Igitur duplum rectangulum MLQ, cum rectangulis LNM, LNQ, & quadrato MC, æquabitur quadrato GN cum quadrato MC, & rectangulo MNL, ac insuper duplo rectangulo GNF: & ablatis utrimque rectangulis MNL, & quadrato MC; duplum rectangulum ML Q, cum rectangulo LNQ æquale erit quadrato GN, (sive LN,) & duplo rectangulo GNF. Sed rectangulum LNQ, est æquale quadrato LN, minus rectangulo NLQ. Et similiter duplum rectangulum G NF, æquale est rectangulo ex GN, vel AE, in duplam EF, minus rectangulo ex eadem GN vel NL, in duplam EN (hoc est minus rectangulo NLQ, cum LQ sit dupla NE, ex constructione). Igitur duplum rectangulum MLQ, cum quadrato NL, minus rectangulo NLQ, æquale erit quadrato LN, cum duplo rectangulo AEF, minus rectangulo NLQ, & addito utrimque rectangulo NLQ, ablatoque quadrato LN, duplum rectangulum MLQ, æquale erit duplo rectangulo AEF: & sumtis subduplis, rectangulum MLQ, (sive ABCD ex constructione,) æquale erit rectangulo AEF. Est igitur ut DA, ad EF, ita EA, ad AB.

Cùm autem (ob circulum) rectangulum EFO, sit æquale rectangulo DEA, est etiam ut EF, ad EA, ita DE (sive DA minus AE) ad ad FO (sive FE minus EO, vel AB). Quatuor igitur rectæ DA, FE, EA, AB, habent conditiones lemmatis octavi, sunt itaque continuè proportionales. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

EX demonstratis evidens est, quomodo duæ mediæ inter datas per parabolam & ellipsim vel Hyperbolam, sæpius infinitis modis inveniantur. Cùm enim tam parabolæ, quàm ellipses & Hyperbolæ, ut præscriptum est, delineatæ, secent circulum in F, patet illas in eodem puncto sibi occurrere.

Addamus aliud exemplum trisectionis anguli per circulum & parabolam illam, ad quam infinitæ ellipses vel Hyperbolæ quæ idem Problema solvunt, (ut ita dicam) referuntur.

PROPOSITIO DECIMA-QUINTA.

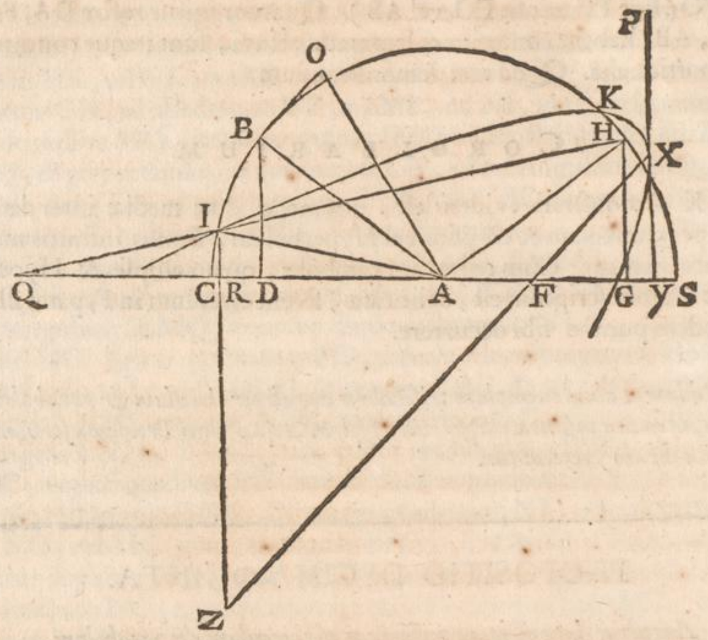
Angulum datum secare trifariam per circulum & parabolam.

SIt rursus, ut in propositione 13. datus angulus BAC, ad centrum semicirculi SBC, & arcui BC, sumatur æqualis SH, demissisque normalibus HG, & BD, bisecetur GA, in F; & in B, ductâ tangente BO, æquali FA, jungatur AO. Tum fiat ut utraque BD, DA, ad AO, ita AO, ad AY, indirectum ipsi DA; & in puncto Y erectâ normali indefinitâ YP, inclinetur ad illam FX, angulo semirecto. Demum ex YP, resecetur XP, quæ ad utramque BD, DA, eandem habeat rationem, quam habet YF, ad FX; & vertice X, diametro XF, latere recto XP, describatur parabola, cujus applicatæ sint parallelæ XP, & quæ occurrat arcui BC in puncto I.

Dico, ductâ AI, angulum IAC, subtriplum esse anguli BAC.

Demittatur ex I, normalis IR, & producatur donec cum XF etiam productâ, concurrat in Z, jungaturque HI occurrens AC productæ in puncto Q.

Nunc ratio rectanguli PX in XZ, ad rectangulum ex utrâque BD,



DA, in YR, componitur ex ratione XZ, ad YR, (hoc eſt FX, ad FY, ob parallelas YX, ZR,) & ex ratione PX, ad utramque BD, DA; hoc eſt YF, ad FX, ex conſtructione, ſed ex his rationibus componitur ratio FX, ad FX, ſive æqualitatis: Igitur rectangulum ex utraque BD, DA, in YR, æquale eſt rectangulo PXZ, hoc eſt quadrato ZI (ob parabolam). Sed rectangulum ex utraque BD, DA, in YR, æquale eſt rectangulo ex iiſdem BD, DA, in AY, (ſive quadrato AO, vel quadratis AB, AF, ex conſtructione,) unà cum rectangulo ex iiſdem BD, DA, in AR; Itaque duo quadrata AB, AF, unà cum rectangulis BDAR, DAR, ęqualia ſunt quadrato IZ: Quadratum verò IZ, æquale eſt quadrato IR, cum quadrato RZ, ſive FR, & duplo rectangulo ZRI, hoc eſt duplo rectangulo FRI. Igitur duo quadrata AB, AF, cum rectangulis BDAR, DAR, æqualia ſunt quadratis IR, FR, cum duplo rectangulo FRI. Eſt autem quadratum FR æquale quadrato AF, cum rectangulo GRA, ſive cum quadrato AR, & rectangulo GAR, vel DAR; Itaque rurſus duo quadrata AB, AF, cum

rectan-

rectangulis BDAR, DAR, æqualia sunt quadratis IR, AF, AR, cum rectangulo DAR, & duplo rectangulo FRI. Et ablato utrimque rectangulo DAR, & quadrato AF, quadratum AB, cum rectangulo BD, AR, est æquale quadratis AR, RI cum duplo rectangulo FRI. Sed duo quadrata AR, RI æqualia sunt quadrato AI, sive AB, Igitur rursus ablatis æqualibus, hinc quadratis AR, RI, inde quadrato AB, remanebunt æqualia rectangulum BD, AR, & duplum rectangulum FRI. Fietque ut BD, sive HG, ad RI, ita dupla FR, ad RA. Sed cum tres GR, FR, AR, sint in propositione arithmeticâ, dupla FR, æqualis est ambabus GR, RA. Igitur ut HG, ad RI, ita GR cum RA, ad RA.

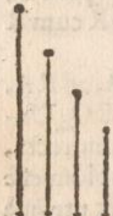
At ut HG, ad RI, ita GQ, ad QR, itaque ut GR cum RA, ad RA, ita GQ, ad QR, & dividendo, ut GR, ad RA, ita GR, ad RQ. Unde sequitur AR, RQ, esse æquales, & cum anguli ad R sint recti, triangulum AIQ, esse isosceles: ideoque angulum HIA, duplum esse anguli IAC. Et cum angulus AHI sit æqualis angulo HIA: & utrique AHI, IQA, sive IAC, æqualis sit externus angulus HAS, evidens est eundem HAS, (sive BAC, ex constructione) anguli IAC, esse triplum. Quod erat demonstrandum.

Non absimili demonstratione ostendi potest, cum parabola etiam occurrat arcui SB in K, SK esse tertiam partem ejusdem arcus SB ut in propositione 13. Quod indicasse sufficiat.

Ostensum est in principio hujus Libri, quomodo Problema de duabus mediis solvatur ope circuli per infinitas quidem ellipses vel hyperbolas, sed non per quamlibet: At idem fieri posse cum qualibet sectione conicâ ostendit Analysis. Ac cum parabola, id præstare etiam pluribus modis, difficile non est; hac itaque omissâ exemplum dabimus in sola Ellipse, sed quod levi negotio ad hyperbolam aptabitur.

LEMMA ULTIMUM.

Si fuerint duæ series quatuor quomodocumque proportionalium, & extremæ ac mediæ unius seriei, sint in eadem ratione cum extremis ac mediis alterius; erunt & reliquæ in iisdem rationibus.



Q B D N

S R P O

SInt quatuor quomodocumque proportionales Q, B, D, N, & aliæ S, R, P, O, sitque ut Q, ad N, ita S, ad O, & ut B, ad D, ita R, ad P; dico esse ut Q ad B, (sive D ad N ex hypothesi,) ita S ad R, (sive P ad O, ex eâdem.)

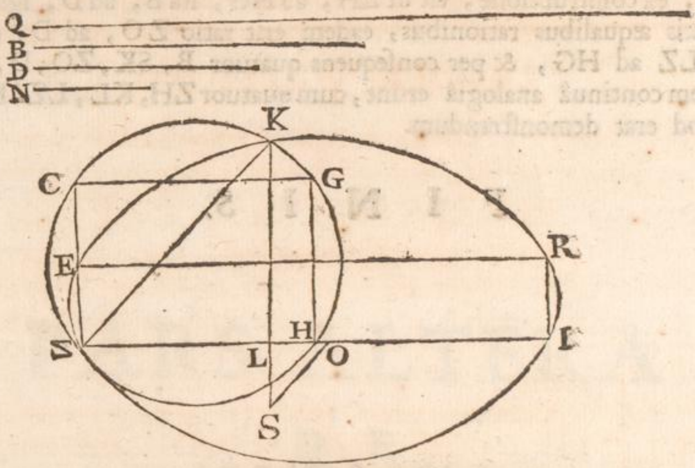
Cùm enim ratio Q ad N, componatur ex ratione Q ad B, & ex ratione B ad D, ac D ad N; hoc est ex duabus rationibus Q ad B (ex hypothesi), & ex ratione B ad D: & similiter ratio S ad O, æqualis rationi Q ad N, componatur eodem modo, ex duabus rationibus S ad R, & ex ratione R ad P, ratio verò R ad P, sit æqualis rationi B ad D; sequitur, ablatis utrimque æqualibus, duas rationes Q ad B, æquales esse duabus S ad R; & sumtis subduplis, rationem Q ad B, sive D ad N, æqualem esse rationi S ad R, sive P ad O. Quod erat &c.

PROPOSITIO ULTIMA.

Datâ qualibet Ellipse, inter extremas datas, ope circuli duas medias proportionales invenire.

DAtæ sint extremæ B, & D, Ellipsis ERIZ, fiat ut quilibet axis ejusdem ad latus rectum, ita Q ad B, & ut Q ad B, ita D ad N. Deindè inscribatur ellipsi rectangulum ZIRE, in quo ratio ZI, parallelæ axi assumto, ad IR, sit eadem quæ Q ad N: tum circa angulum EZI, fiat rectangulum CZHG, æquale priori, in quo ratio ZH, ad HG, sit eadem quæ est B ad D, & circa illud describatur circulus

secans



ſecans ellipſim in K, unde demittatur ad ZI, normalis KL; ex quâ (productâ, ſi opus ſit,) reſecetur HS, quæ ad KL, eandem rationem habeat, quam habet B, ad HZ: deindè, junctâ ZK, ducatur eidem parallela SO, occurrens rectæ ZI in O. Dico duas KS, OZ, eſſe medias inter B, & D.

Nam cùm ſit ut Q ad B, ita D ad N, erunt quatuor proportionales Q, B, D, N; cum verò rectangulum ZIRE, æquale ſit rectangulo ZHGC, eſt ut ZI ad ZH, ita GH ad IR; quatuor igitur ZI, ZH, HG, IR, erunt etiam proportionales. Sed, ex conſtructione, ut Q, ad N, ita ZI, ad IR, & ut ZH, ad HG, ita B, ad D, ex eâdem; Igitur, ex præcedenti Lemmate, eadem erit ratio ZI ad ZH, vel HG ad IR, quæ eſt Q ad B, vel D ad N. Sed, rurſus ex conſtructione, ut Q ad B, vel CZ, ad EZ, ita axis ellipſis ad latus rectum ejuſdem; duæ igitur KL, LZ, erunt mediæ proportionales inter ZH, & HG, ex iis quæ Propoſitione primâ hujus demonſtrata ſunt, & quatuor ZH, KL, LZ, HG, erunt in continuâ analogiâ.

Nunc, factum eſt SK ad KL, ut B ad ZH; erit itaque permutando ut B ad SK, ita ZH ad KL; ut autem ZH ad KL, ita (ob parallelas ZK, SO) ſe habet SK ad ZO, tres igitur B, SK, ZO, ſunt in eadem continuâ analogiâ, cum tribus ZH, KL, LZ.

Sed, ex constructione, est ut ZH, ad HG, ita B, ad D, igitur, ablatis æqualibus rationibus, eadem erit ratio ZO, ad D, quæ est LZ ad HG, & per consequens quatuor B, SK, ZO, D, in eadem continuâ analogiâ erunt, cum quatuor ZH, KL, LZ, HG. Quod erat demonstrandum.

FINIS.

PARS