

www.e-rara.ch

Elémens de géométrie où par une méthode courte & aisée l'on peut apprendre ce qu'il faut sçavoir d'Euclide, d'Archimède, d'Apollonius, & les plus belles inventions des anciens & des nouveaux géomètres

Pardies, Ignace Gaston

La Haye, 1690

ETH-Bibliothek Zürich

Persistent Link: <https://doi.org/10.3931/e-rara-4833>

Livre quatrieme. Du cercle.

www.e-rara.ch

Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien – von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material – from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d'imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L'éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes – des débuts de l'imprimerie jusqu'au 20e siècle.

e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

Nutzungsbedingungen Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titelinformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

Terms of Use This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

Conditions d'utilisation Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

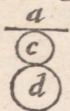
Condizioni di utilizzo Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]



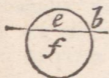
LIVRE QUATRIEME.

Du Cercle.

1. **U**N E ligne est dite *Toucher* un cercle, quand elle le touche sans qu'elle entre dedans, quoi- qu'elle soit prolongée au-delà du point d'attouchement. La ligne *a* touche ici le cercle *c*, comme aussi le cercle *c* touche le cercle *d*: mais en *b* la ligne entre dans le cercle, & le coupe.



2. Une ligne entrant dans un cercle, le coupe en deux parts, qu'on appelle *Segments*. *e* est le *petit* segment, & *f* est le *grand*; & cette ligne qui coupe, s'appelle *Corde*, & les parties du cercle coupées s'appellent *Arcs*. La corde avec l'arc fait aux deux bouts deux angles mixtes, qu'on appelle *Angles du Segment*, comme *e b f*.



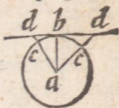
3. Si dans l'arc du segment acb on prend un point c en quelque part que ce soit, & que l'on imagine deux lignes ca, cb ; elles feront un angle acb , qui s'appelle l'angle dans le segment: & on dit que cet angle acb insiste sur l'arc de l'autre segment d'embas.



4. Secteur du cercle est un triangle mixte compris entre deux demi-diametres ab, ac , & un arc du cercle bc . Le secteur est ici marqué par des traits.

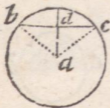


5. Si par l'extrémité d'un demi-diametre ab , on imagine une perpendiculaire bd , elle touchera le cercle en ce seul point b ; & tout autre point imaginable de la ligne bd sera hors le cercle. Par exemple, le point d est dehors; car si on imagine une ligne tirée du centre a d , laquelle coupe le cercle au point c , cette ligne ad sera plus longue que ab , (2. 19.) & par conséquent plus longue que ac , puisque ac est égale à ab : (1. 14.) Donc le point d tombe au-delà du cercle. Ce qu'il falloit démontrer.



6. Une corde bc est divisée en deux égale-

également par une perpendiculaire ad ;



tirée du centre a : car le triangle abc est isoscele, puisque ab est égal à ac : (1. 14.) donc la perpendiculaire ad coupe la base bc en deux également. (2. 16.) L'arc bc est aussi divisé également.

7. Si deux lignes db & dc touchent un cercle, elles seront égales. Car imaginant du centre vers les points d'attouchement



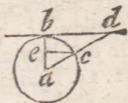
deux lignes ab & ac , celles-ci seront perpendiculaires aux touchantes. (4. 5.) De plus, si on imagine la ligne bc , l'angle abc fera égal à l'angle acb : (2. 15.) donc si de choses égales, c'est-à-dire, des angles droits abd & acd , on ôte les choses égales, c'est à dire, l'angle abc , d'une part, & de l'autre l'angle acb , les angles qui resteront seront égaux, c'est à dire, cbd sera égal à bcd , & par conséquent le costé db fera égal au costé dc . (2. 15.)



8. Deux cordes égales bc , ef , font deux segmens bdc & egf égaux, & les perpendiculaires ao & an seront égales. Ceci est facile à prouver.

9. Soit

9. Soit le demi-diametre ab , la perpendiculaire bd , une autre ligne acd coupant le cercle en c , & la perpendiculaire en d , une autre ligne ce perpendiculaire au rayon ab : toutes ces lignes ont des noms affectez. La ligne bd terminée ainsi par ad , s'appelle *Tangente* de l'arc bc , par exemple de 30. degrez; la ligne ad s'appelle *Secante* du mesme arc de 30. degrez; la ligne ce s'appelle le *Sinus* du mesme arc; & enfin ab , s'appelle le *Sinus-total*, ou simplement le rayon.



10. Si dans une circonference d'un cercle on prend deux points a & b , desquels on tire deux lignes jusques au centre c , & deux autres jusques à un autre point d de la circonference; il se fait deux angles, dont l'un acb s'appelle *Angle au centre*, & l'autre adb , *Angle à la circonference*.



11. L'angle au centre acb est toujours double de l'angle à la circonference adb . 1. Si l'une des lignes, comme bd , passe par le centre c , l'angle acb sera externe à l'égard du triangle acd :



(2. 10.)

(2. 10.) & par consequent il fera égal aux deux angles internes opposez , sçavoir à l'angle adc , plus à l'angle dac : (2. 10.) Or ces deux angles adc & dac sont égaux (2. 15.) puisque les deux jambes ca & cd sont égales : (1. 14.) Donc l'angle acb est double d'un de ces deux , sçavoir



de adc ; ce qu'il falloit prouver. 2. Si aucune des lignes ad ou bd , ne passe par le centre c ; soit imaginé dce , en sorte que e se trouve hors l'arc ab : alors tout l'an-

gle ace sera double de l'angle ade , par ce que je viens de montrer dans la premiere partie de cette proposition ; & de mesme l'angle bce est double de l'angle bde : Donc si de l'angle ace on oste bce & que de l'angle ade , (qui est la moitié de ace) on oste bde , (qui est aussi la moitié de bce) ce qui restera adb fera la moitié de acb : parce que c'est une maxime , que si une quantité est double d'une autre , &



qu'on oste de la grande le double de ce qu'on oste de la petite , ce qui restera de la grande sera encore double de ce qui restera de la petite. 3. Si le

point

point e tombe dans l'arc ab , alors l'angle ace fera double de l'angle ade , & l'angle bce fera aussi double de bde , par ce qui à esté démontré dans la premiere partie de cette proposition: Donc l'angle total acb est double de adb .

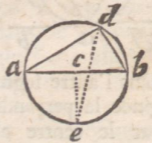
12. Tous les angles qui insistent sur un mesme arc ab sont égaux, en quelque part de la circonference que leur pointe aboutisse. L'angle aeb est égal à l'angle adb , parce que l'un & l'autre est la moitié de l'angle acb , qui se feroit au centre c . (4. 11.)



13. L'angle au centre bce , insistant sur la moitié de l'arc ab , sur lequel insiste un autre angle à la circonference adb , est égal à ce mesme angle de la circonference. (4. 11.)



14. L'angle adb , qui insiste sur la demi-circonference, est droit; car si e partage en deux la demi-circonference aeb , l'angle ace fera égal à l'angle adb par la précédente. Or ace est droit: (1. 15.) Donc aussi adb est droit.



15. L'an-

15. L'angle $a d b$, dans le petit segment, est obtus, parce que l'arc $a e b$ estant plus de la moitié de la circonference, l'arc $b e$, qui est la moitié de l'arc $a e b$, aura plus de 90. degrez. Ainsi l'angle

$a d b$, qui est égal à l'angle $b c e$. (4. 13.) fera de plus de 90. degrez; c'est-à-dire, il sera obtus.



16. L'angle $a d b$ dans le grand segment est aigu: car il est égal à l'angle $a c e$. Or l'arc $a e b$ estant moindre que la demi-circonference, l'arc $a e$, que est la moitié de $a e b$, aura moins de 90. degrez.

17. Si une droite $g a b$ touche le cercle à un point a , & qu'une autre ligne $a e$ coupe le mesme cercle, l'angle $b a e$ sera égal à l'angle dans le segment opposé $a h e$: & l'angle $e a g$ sera égal à l'angle



dans l'autre segment $a f e$. Car soit imaginée la perpendiculaire $a d$, qui passera par le centre c , (4. 5.) l'angle $a e d$ sera droit: (4. 14.) & par conséquent, puisque les trois angles d'un trian-

triangle font égaux à deux droits ,
 (2. 9.) l'angle $e a d$ avec l'angle $a d e$
 fera un droit. Or ce mesme angle $e a$
 d avec $e a b$ fait aussi un droit , puis-
 que $a d$ est perpendiculaire à $a b$: Donc
 l'angle $e a b$ est égal à l'angle $a d e$,
 & par consequent à tout autre angle
 qui insistera sur le mesme arc $a e$, &
 qui aboutira à quelque autre point de
 la circonference , comme à l'angle $e b a$
 puisque tous ces angles sont égaux en-
 tre eux ; (4. 12.) & c'est la premie-
 re partie de cette proposition. Mainte-
 nant il faut prouver que l'angle $e a g$,
 est égal à l'angle $a f e$; ce qui est l'au-
 tre partie. Dans le triangle $a e f$, l'an-
 gle $a f e$ avec $f a e$ & $f e a$, est égal
 à deux droits , (2. 9.) Or l'angle $f e a$
 est égal à $f a b$, par ce qui vient d'estre
 prouvé dans la premiere partie de cet-
 te proposition , car la ligne $f a$ peut
 estre considerée comme coupant le cer-
 cle & la tangente $b a$, auquel cas l'an-
 gle $f a b$ doit estre égal à tout autre
 angle qui seroit fait dans le segment
 opposé $f d h a$. Or l'angle $f e a$ est fait
 dans ce segment , parce qu'il insiste
 sur l'arc $f a$, & que sa pointe e abou-
 tit à un point de la circonference
 $f e d h a$, ainsi cet angle $f e a$, est égal
 à l'angle $f a b$. Donc les deux angles
 $e a f$

$e a f$ & $f a b$, avec $a f e$, sont égaux à deux droits. Mais les mesmes $e a f$ & $f a b$, avec $e a g$ sont aussi égaux à deux droits : (1. 20.) Donc l'angle $e a g$ est égal à l'angle $e f a$; ce qu'il falloit prouver.

18. Une figure rectiligne est dite *Circonscrite* à un cercle,



quand tous les costez de cette figure touchent le cercle sans le couper. Le triangle $a c d$ est circonscrit au

cercle $b g f$, parce que chaque costé de ce triangle touche le cercle en b , en g , & en f .

19. Une figure est *inscrite* au cercle, quand tous les angles aboutissent à la circonférence, comme le triangle $a b c$ de la figure suivante.

20. Tout triangle $a b c$ peut estre



inscrit dans un cercle : car si l'on imagine deux lignes $e i$, & $e h$, qui coupent perpendiculairement, & par le milieu les costez $a b$ & $b c$,

on pourra tirer un cercle du point e comme du centre par le point b . Or je dis que ce cercle passera par les points a & c : Car 1. Les deux triangles

gles $e i b$ & $e i a$ seront tout égaux, puis-
 que le costé $i b$ est égal au costé $i a$
 par l'hypothese, le costé $e i$ est com-
 mun, l'angle vers i est droit de part
 & d'autre: Donc (2. 11.) le costé $e b$
 est égal au costé $e a$. 2. Par mesme
 raison on prouvera que le costé $e c$ est
 égal à $e b$: & par conséquent le cer-
 cle, dont le centre seroit e , & le de-
 mi-diametre $e b$, passeroit par a &
 par c .

21. Tout triangle $a c d$ (fig. de l'art. 18.)
 peut estre circonscrit à un cercle. Car si
 l'on imagine deux lignes $a e$, & $d e$, qui di-
 visent en deux également les angles a &
 d ; & puis des perpendiculaires sur les
 costez du triangle, sçavoir $e b$, $e f$, $e g$:
 je dis que si on tire un cercle du centre
 e par b , ce cercle touchera les trois
 costez du triangle aux points b , f , g .
 Car 1. Les deux triangles $a e b$, $a e f$
 sont tout égaux: Car ils ont un costé
 $a e$ commun, un angle vers b & f
 droit, un autre angle vers a égal
 puisque l'angle $b a f$ a esté divisé en
 deux également: Donc le costé $e b$ est
 égal au costé $e f$. (2. 14.) 2. Par mes-
 me raison on prouvera que $e g$ est égal
 à $e f$. Et comme d'ailleurs ces lignes
 $e b$, $e f$, $e g$, sont perpendiculaires
 sur les costez du triangle, le cercle
 $b f g$

$b f g$ touchera ces costez en ces points.
(4. 5.)

22. Tout quadrilatere $a f e d$ inscrit dans un cercle, a les angles opposez égaux ensemble à deux droits. Car si par le point a on tire une tangente $g a b$, & une diagonale $a e$, l'angle $a f e$ fera égal à l'angle $e a g$, (4. 17.) & l'angle $a d e$ à l'angle



$e a b$: (4. 17.) & par consequent, puisque les deux angles $e a b$ & $e a g$ sont égaux à deux droits, ces deux angles opposez f & d sont aussi égaux à deux droits.

De même maniere on prouvera que les angles $f e d$, & $f a d$ seront égaux à deux droits, si l'on imagine une autre tangente par le point f .

23. La converse de cette proposition est aussi manifeste; sçavoir, que tout quadrilatere, dont les angles opposez sont égaux à deux droits, est inscrit dans un cercle; c'est à dire, qu'il peut y avoir un cercle qui touche tous ces quatre angle.

24. Tout polygone circonscrit à un cercle est égal à un triangle rectangle, dont une jambe seroit égale au demi-diametre du cercle, & l'autre à toute la circonference du polygone. Soit la

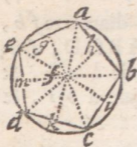
DE GEOMETRIE, Liv. IV. 43

la ligne $F A$ égale au demi-diametre $f h$,
 & la perpendiculaire infinie $A B C D$, &c.
 sur laquelle soit prise $A h$ égale à $a h$, &
 $h B$ égale à $b b$, & $B i$ égale à $b i$, &
 $i C$ égale à $i c$, &c.



afin que toute la ligne $A B C D E A$
 soit égale à toute la circonférence du
 polygone $a b c d e a$. De plus soit
 $F F F$ parallele à $A B$, afin que toutes
 les perpendiculaires $h F, i F, k F$, &c.
 soient égales au demi-diametre $f h$ ou
 $f i$, &c. il est clair que le triangle
 $A F B$ sera égal au triangle $a f b$,
 & le triangle $B F C$ au triangle $b f c$,
 & $C F D$ à $c f d$, &c. Ainsi tous ces
 triangles ensemble seront égaux à tout
 le polygone. Or le triangle $F A A$
 est égal à tous ces triangles ensemble,
 à cause qu'en tirant les lignes $B F, C F,$
 $D F$, &c. Le triangle $F A B$ sera égal
 à $F A B$, & $F B C$ à $F B C$, &c.
 (3. 16.) Donc aussi tout le triangle
 $F A A$ est égal au polygone; ce qu'il fal-
 loit démontrer.

25. Tout polygone régulier est égal
 à



à un triangle rectangle , dont une jambe seroit toute la circonference du polygone , & l'autre ; la perpendiculaire tirée du centre sur un des costez du

polygone. La preuve en est la mesme que celle de la proposition précédente. Car toutes les perpendiculaires fb , fi , fk , &c. sont égales , &c.

26. Tout polygone circonscrit est plus grand que le cercle , & tout polygone inscrit est plus petit. Cela est manifeste , parce que ce qui contient est plus grand que ce qui est contenu.

27. Le Perimetre (où la circonference) de tout polygone circonscrit est plus grand que la circonference du cercle , & le perimetre de tout polygone inscrit est plus petit : cela est aussi manifeste par la 21. du second livre.

28. Si dans un petit segment de cercle abc , on inscrit un triangle isoscele , en sorte que ab soit égal à bc ; ce triangle sera plus grand

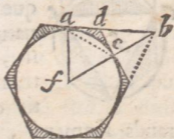


que la moitié du segment. Car si on tire la tangente ebd , qui sera parallele à ac , car elle est perpendiculaire à fb , (4. 5.)

à laquelle l'est aussi ac ; (4. 6.) & si de

de plus on acheve le parallelogramme rectangle $a e d c$; celui - cy fera plus grand que le segment du cercle $a b c$. Or le triangle $a b c$ est la moitié du parallelogramme $a e d c$: (3. 18.) Donc ce triangle $a b c$ est plus grand que la moitié du segment $a b c$.

29. Soit la tangente $a d b$, & la secante $f c b$, & la droite $a c$, & une autre tangente $c d$; je dis que le triangle $d b c$ est plus de la moitié du triangle mixte , compris entre les droites $a b$, $c b$, & la circulaire $c a$: car dans le triangle $d b c$ l'angle en c estant droit , (4. 5.) le costé $d b$ fera plus grand que



$d c$. (2. 17.) Or $d c$ est égal à $d a$: (4. 7.) Donc $d b$ est plus grand que $d a$: Donc le triangle $c b d$ est plus grand que le triangle $c a d$: (3. 17.) Donc il est plus grand que la moitié du triangle total $c b a$. Or ce triangle $c b a$ est plus grand que le triangle mixte compris entre l'arc $a c$, & les droites $b c$, $b a$: Donc aussi le triangle $d b c$ est plus grand que la moitié du triangle mixte $a b c$.

30. De ces deux propositions il s'enfuit , qu'en multipliant les costez des poly-

polygones réguliers , on en peut faire de circonscrits & d'inscrits , en sorte que la difference , dont le circonscrit surpassera le cercle , ou dont le cercle surpassera l'inscrit , soit aussi petite que l'on voudra ; parce que si de quelque quantité que ce soit , on oste plus de la moitié , & du *résidu* encore plus de la moitié , & derechef plus de la moitié encore du *résidu* , & ainsi plusieurs



fois , on viendra enfin à laisser un *résidu* aussi petit que l'on voudra : ce qui est naturellement connu. Ainsi , après avoir inscrit un triangle , qui sera plus petit que le cercle de trois

grands segmens , on peut inscrire un hexagone , qui sera plus grand que n'estoit le triangle ; mais qui sera encore plus petit que le cercle de six petits segmens qui sont icy blancs. Or ces six petits segmens tous ensemble ne contiennent pas tant d'espace , que la moitié des trois premiers segmens. (4. 28.) Après quoy on peut encore inscrire un dodécagone , qui sera surpassé par le cercle de douze petits segmens : mais tous ces douze ensemble ne vaudront pas la moitié des six segmens de l'hexagone ; & ainsi on peut , en multipliant les costez des polygones ,

nes , diminuer tant que l'on voudra la difference dont le cercle surpassera ce polygone inscrit. De mesme , après avoir circonscrit un triangle , on peut circonscire un hexagone , & puis un dodécagone , & une figure de vingt-quatre costez , &c.

31. Tout cercle est égal à un triangle rectangle , dont une jambe est le demi-diametre , & l'autre une ligne droite égale à la circonférence du cercle. Car ce triangle fera plus grand que tout polygone inscrit , & plus petit que tout polygone circonscrit : (par la 24. 25. 26. & 27. du 4.) Donc il sera égal au cercle. Car s'il estoit plus grand , pour petite qu'en fust la difference , on pourroit faire un polygone circonscrit , dont la difference avec le cercle seroit moindre que la difference du mesme cercle avec ce triangle rectangle : ainsi ce polygone circonscrit seroit plus petit que ce triangle ; ce qui est absurde. De mesme , si ce triangle seroit plus petit que le cercle , on pourroit faire un polygone inscrit , qui seroit plus grand que ce triangle ; ce qui est impossible.

Cette sorte de démonstration que nous venons d'employer , & qu'on appelle de l'impossible , est une des plus belles in-
ven-

ventions de l'antiquité ; & toute la Geométrie des indivisibles est fondée là - dessus : de sorte qu'il y a sujet de s'étonner , que quelques nouveaux Auteurs l'ayent rejetée comme défectueuse & indirecte. Que si l'on en vient à ce point de délicatesse , que de ne pouvoir souffrir une démonstration , si elle ne prouve directement & positivement ; il sera fort aisé de donner à celle - cy un tour qui la rende régulière & directe : car on n'a qu'à poser pour principe , que si deux quantitez déterminées a & b sont telles , que toute autre quantité imaginable , qui seroit plus grande ou plus petite que b , seroit aussi plus grande ou plus petite que a , ces deux quantitez a & b sont égales. Et ce principe posé , qui est en effet tres-manifeste de soy-mesme , on prouvera directement que ce triangle est égal au cercle , puisque toute figure imaginable (inscrite) plus petite que le cercle , est aussi plus petite que le triangle ; & que toute figure (circonscrite) plus grande que le cercle , est aussi plus grande que le triangle.

C'est ce qu'on appelle la quadrature du cercle , qui ne consiste qu'à faire un quarré , ou bien un triangle , ou une autre figure rectiligne égale au cercle ; ce qu'on feroit , si l'on pouvoit trouver une
ligne

ligne droite égale à la circonférence, comme il paroist en cette proposition; mais cette égalité n'a jamais esté trouvée géométriquement.

32. Une ligne estant disposée en cercle, tiendra plus d'espace qu'en toute autre figure polygone régulière que ce soit. Si la circonférence du cercle $a b c d$ le dispose en quarré, ou en quelque autre polygone régulier, en sorte que tous les costez eg , gh , hi , ie , ensemble soient égaux à la circonférence $a b c d$; je dis que tout ce cercle sera plus grand que le polygone. Car le cercle



est égal au triangle, dont un costé est la circonférence, & l'autre costé est le demi-diametre $f a$; & le polygone est égal au triangle, dont un costé est aussi la mesme circonférence $a b c d$, ou les costez $e g h i$, & l'autre costé est $f o$, (4. 25.) Et comme $f o$ est plus petit que $f a$, tout ce second triangle égal au polygone sera plus petit que le premier triangle égal au cercle: & par conséquent ce polygone sera plus petit que le cercle; ce qu'il falloit prouver.

C'est ce qu'on entend, quand on dit communément, que de toutes les figures Isope-timetres, ou qui ont les circonférences égales, la plus grande est le cercle.