

www.e-rara.ch

Elémens de géométrie où par une méthode courte & aisée l'on peut apprendre ce qu'il faut sçavoir d'Euclide, d'Archimède, d'Apollonius, & les plus belles inventions des anciens & des nouveaux géomètres

Pardies, Ignace Gaston

La Haye, 1690

ETH-Bibliothek Zürich

Persistent Link: <https://doi.org/10.3931/e-rara-4833>

Livre septième. Des incommensurables.

www.e-rara.ch

Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien – von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material – from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d'imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L'éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes – des débuts de l'imprimerie jusqu'au 20e siècle.

e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

Nutzungsbedingungen Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titelinformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

Terms of Use This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

Conditions d'utilisation Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

Condizioni di utilizzo Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]



LIVRE SEPTIEME.

Des Incommensurables.

1. **U**N E petite quantité est dite en *mesurer* une autre plus grande, lorsque la petite estant prise un certain nombre de fois, égale précisément la plus grande. Par exemple, supposé qu'une toise contienne six pieds, un pied *mesurera* la toise, parce qu'un pied pris six fois, égale précisément la toise.

2. La quantité qui en mesure une plus grande, s'appelle *Partie* de la grande, & la grande s'appelle *Multiple* de la petite: ainsi un pied est partie de la toise, & la toise est multiple du pied.

3. Si l'on prend une grandeur d'un pas qui contienne deux pieds & demi, & qu'on veuille essayer d'en mesurer la toise, on ne pourra pas le faire, parce que si l'on prend ce pas seulement deux fois, on ne fera que cinq pieds, qui ne valent pas la toise: & si l'on prend ce mesme pas trois fois, on aura sept pieds & demi, qui surpasseront la toise; ainsi
cette

cette quantité de deux pieds & demi ne mesure pas la toise, & n'est pas à proprement parler *partie* de la toise : néanmoins on peut dire que c'en sont *des parties*, parce que cette quantité contient cinq demi-pieds : or un demi-pied est partie de la toise, parce qu'estant pris douze fois il la mesure ; ainsi ce pas contient des parties de la toise, puisqu'il contient cinq demi-pieds, qui sont $\frac{5}{12}$, c'est à dire, cinq douzièmes parties d'une toise.

4. Lorsque deux quantitez sont telles, qu'on peut trouver une troisième quantité qui soit partie de l'une & de l'autre, c'est à dire, qui mesure l'une & l'autre, alors ces deux quantitez sont *commensurables* ; ainsi cette quantité d'un pas d'une part, & une toise de l'autre, sont deux quantitez commensurables, parce que l'on peut donner une troisième quantité, sçavoir un demi-pied, laquelle mesurera la toise & ce pas : car le demi-pied pris cinq fois égale ce pas, & ce mesme demi-pied pris douze fois égale la toise.

5. Mais s'il n'est pas possible de trouver une troisième quantité qui mesure l'une & l'autre, alors ces deux quantitez sont *incommensurables*.

6. Les

6. Les grandeurs commensurables sont *comme nombre à nombre*, c'est à dire, qu'on peut exprimer ces grandeurs par de certains nombres, en sorte que comme une grandeur est à l'autre grandeur, ainsi un certain nombre soit à un autre certain nombre. Par exemple, si une ligne est d'une toise ou de six pieds, & une autre ligne d'un pas de deux pieds & demi, ces deux lignes seront *comme nombre à nombre*: car puisque le demi-pied mesure l'une & l'autre, l'une par cinq, & l'autre par douze, il est clair que l'une contenant cinq demi-pieds, & l'autre en contenant douze, ces deux lignes seront *comme cinq à douze*, & par conséquent *comme nombre à nombre*.

7. Si deux grandeurs ne sont point *comme nombre à nombre*, c'est-à-dire, s'il n'est pas possible d'exprimer leurs grandeurs par deux nombres, elles seront *incommensurables*: cela paroist par la précédente.

8. Il faut donc voir maintenant s'il y a en effet des grandeurs qui soient telles qu'on ne puisse point les exprimer par des nombres: car si cela est, il faudra dire qu'il y a des grandeurs *incommensurables*.

9. Un *nombre plan* est celuy qui peut provenir de la multiplication de deux nombres.

nombres. Par exemple, six est nombre plan, parce qu'il provient de la multiplication de trois & de deux : car deux fois trois font six. De mesme, quinze est un nombre plan, parce qu'il provient de cinq multiplié par trois. De mesme, neuf est un nombre plan, parce qu'il provient de trois par trois.

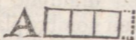
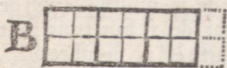
10. Les nombres, qui estant ainsi multipliez l'un par l'autre, produisent un plan, s'appellent *costez* de ce plan, comme 2. & 3. sont les costez de 6. de mesme 3. & 5. sont les costez de 15.

11. Si l'on imagine les unitez comme de petits quarrez, ces quarrez se pourront ranger en rectangle, quand leur nombre sera plan. Par exemple, 12. quarrez se rangent en un rectangle, dont un costé sera six, & un autre costé sera deux; & de mesme 48. sera un rectangle, dont un costé est 12. & l'autre 4. Voyez les figures suivantes B & C.

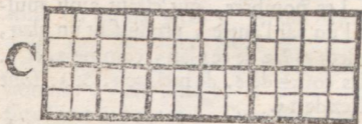
12. *Nombre quarré* est un plan, dont les costez sont égaux, comme 4. provenant de deux multiplié par deux, comme 9. provenant de trois par trois, comme 16. provenant de 4. par 4. &c.

13. Un nombre quarré se peut ranger en quarré; & le nombre qui se peut ranger en quarré, est quarré, & celuy qui ne sçauroit se ranger en quarré, n'est pas nombre quarré.

14. Nombres *Plans semblables* sont



ceux qui peuvent se ranger en rectangles semblables, c'est à dire, en des rectangles dont les costez



sont proportionnels, comme 12. & 48. car les costez de 12. sont 6. & 2. comme l'on voit dans la figure B. & les costez de 48. sont 12. & 4. comme l'on voit dans la figure C. or $6. 2 :: 12. 4.$

15. Tous les nombre quarrez sont plans semblables. (6. 32.)

16. Tout nombres peut se ranger en ligne droite, & en cét estat il peut passer pour plan : de forte que 3. dans la figure A, fera un plan semblable à 12. car les costez du plan de trois sont 3. & 1. parce qu'une fois trois c'est trois, & les costez de 12. sont 6. & 2. or $3. 1 :: 6. 2.$

17. Il y a des nombres qui ne sont pas plans semblables, comme depuis 1. jusqu'à 10. il y a 1. 4. 9. qui sont semblables estant quarrez ; puis il y a 2. 8.

qui

qui ont un costé double de l'autre : les autres ne le sont pas, comme 2. 3. 4. 5. 6. 7.

18. Si un nombre quarré multiplie un autre nombre quarré, il produira un troisiéme quarré. A. 4. &

B. 9. estant nombres quarez, se multiplient, & produisent un nombre C; sçavoir 36. Je dis que ce troisiéme nombre

B

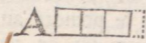
A



est un nombre quarré : car multiplier B par A, c'est prendre B autant de fois qu'il y a d'unitéz dans A. Or je puis considerer tout le nombre B. 9. comme un quarré unique, & puis le prendre autant de fois qu'il y a d'unitéz ou de petits quarez en A : & comme ces unitéz d'A sont rangées en quarré; aussi je pourray ranger en quarré tout autant de quarez B comme autant d'unitéz; de sorte qu'ici il y aura 4. B. qui feront le quarré total C. 36.

19. Si deux nombres plans sont semblables, le grand se peut partager en autant de quarez qu'il y aura d'unitéz dans le petit. A 3. & B 12. sont plans semblables : en sorte que le costé 3. est au costé 6. comme le costé 1. est au costé 2. Je puis partager ce plan B. 12. en trois quarez rangez de mesme que les trois petits quarez du plan A, & chacun de

ces grands quarrez de B en vaudra 4. de ceux d'A. De mesme, si les plans sont 8. & 72. je puis diviser 72. en 8. quarrez, dont chacun en comprendra 9. de ceux du petit plan 8. La mesme chose arrivera encore, bien qu'un de ces nombres, ou mesme tous deux soient rompus, comme si A contient 3. & demi, & B 14. je puis partager 14. en trois quarrez & demi, disposez comme ceux d'A,



comme l'on voit par les petits quarrez ponctués, qui ont esté ajoutés à ces figures.

De mesme, si les plans sont B 12. & D 27. je puis partager 27. non

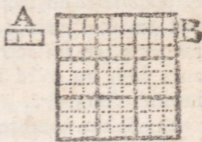
seulement en trois quarrez rangez comme ceux d'A, mais aussi en 12. rangez comme ceux de B; ce que l'on voit ici par les lignes ponctuées. Pour cela il ne faut que partager les costez du grand plan en autant de parties que sont partagez les costez homologues du petit plan. Les figures feront aisément comprendre tout ceci.

20. Les nombres plans qui se peuvent ainsi

ainsi partager , en sorte qu'il y ait autant de quarrez dans le grand plan , que d'unitéz dans le petit , sont semblables : c'est la converse de la précédente.

21. Deux nombres plans semblables multipliez l'un par l'autre produisent un nombre quarré. Car ayant partagé le grand plan en autant de quarrez qu'il y a d'unitéz dans l'autre plan , (7. 19.) on multipliera un plan par l'autre , en prenant les grands quarrez du grand plan autant de fois qu'il y a d'unitéz ou de petits quarrez dans le petit plan , c'est à dire , autant de fois qu'ils sont eux - mêmes. Or multiplier un nombre de quarrez par ce mesme

nombre , c'est faire un quarré de ces quarrez. Par exemple A 3. & B 27. estant plans semblables , je considere

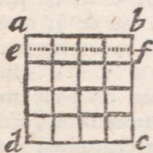


B 27. comme un plan composé de trois grands quarrez , comme A 3. est un plan composé de trois unitéz , ou de 3. petits quarrez. Ainsi si je prens ces trois grands quarrez autant de fois qu'il y a d'unitéz en A , c'est à dire , trois fois , je feray trois fois trois de ces grands quarrez de B , c'est à dire , 9. quarrez , dont chacun en vaudra 9. de ceux qui sont dans A , & tous

ces 9. quarrez de B en vaudront 81. de ceux d'A ; de sorte qu'A 3. multipliant B. 27. produit 81. qui est un nombre de petits quarrez rangez en carré , & par consequent (7. 13.) ce nombre 81. est carré : De mesme , si les plans sont 12. & D. 27. je partage 27. en 12. quarrez , que je multiplie par 12. & il provient 144. grands quarrez rangez en carré , qui en vaudront 324. de ceux du petit plan.

22. Si deux nombres plans sont semblables, de quelque façon que l'on range l'un , on pourra ranger l'autre de mesme. Soient 3. & 12. plans semblables comme dessus. Qu'on range 12. en ligne droite pour faire un rectangle, dont un costé soit 12. & l'autre 1. je dis qu'on pourra ranger 3. en un rectangle semblable, qui aura pour un costé 6. & pour l'autre, la moitié d'un, &c.

23. Si un nombre divise un autre nombre carré, il produira un troisiéme nombre, qui sera plan semblable au diviseur.



Soit le carré ac 16. & qu'on le divise par quelque nombre que ce soit, par exemple, par 8. ce qui se fait en prenant la huitième partie du côté ad , sçavoir ae , & tirant la parallèle ef ; car on aura le plan af , qui

qui sera la huitième partie du carré $a c$.
 Or diviser un nombre ou un plan par 8.
 c'est prendre la huitième partie de ce
 nombre ou de ce plan. Je dis que $a f$ est
 un plan semblable à 8. Car 8. estant
 rangé en ligne droite pour faire un re-
 ctangle, dont un costé soit 8. & l'autre 1.
 le rectangle $a f$ luy sera semblable, puis-
 que $a e$ a esté pris la huitième partie de
 $a d$ ou de $a b$: Donc comme 8. à 1. (qui
 sont les costez du plan 8. diviseur) ainsi
 $a b$ à $a e$: (qui sont les costez du plan
 provenant du carré $a c$ divisé par 8.)
 donc, &c. ce qu'il falloit prouver.

24. Si deux plans se multipliant produi-
 sent un carré, ils sont semblables.

25. Deux nombres plans non-semblables
 se multipliant, ne sçauroient produire un
 nombre carré. Ces propositions sont des
 suites des précédentes.

26. Si deux nombres sont plans sem-
 blables, leurs équi-multiples quelconques,
 & leurs parties-pareilles quelconques, sont
 aussi plans semblables. Soient les plans

$a b c d$ 3. &

A B C D

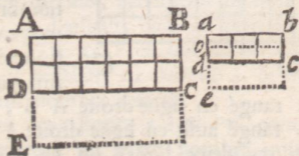
12. sem-

blables, en

forte qu'

$a b$. A B ::

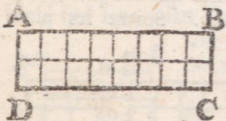
$b c$. B C.



Je dis que si l'on prend le double de l'un & le double de l'autre, (ou tel autre équimultiple qu'on voudra) ces doubles seront semblables : car ayant pris $a e$ double d' $a d$, & $A E$ double d' $A D$, pour avoir le plan $b e$ double du plan $b d$, & le plan $B E$ double du plan $B D$, il est clair que $a d. A D :: a e. A E$. Or $a d. A D :: a b. A B$. donc aussi $a e. A E :: a b. A B$; & par conséquent les plans $b e$ & $B E$ sont semblables. De mesme en sera-t-il, si l'on prend leurs moitez $b o$, $B O$, ou telles autres parties pareilles que l'on voudra.

27. Si deux nombres sont plans non-semblables, leurs équimultiples quelconques, & leurs parties-pareilles quelconques seront aussi non-semblables. Ceci suit de la précédente.

28. Entre deux nombres plans semblables quelconques, il tombe un nombre moyen proportionnel. Soient les nombres plans semblables 2. & 8. je dis qu'il est



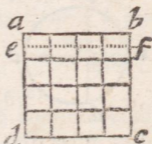
possible de trouver un troisième nombre qui sera moyen proportionnel: car si l'on imagine le plan

8. rangé en ligne droite $A B$, & le plan 2. rangé aussi en ligne droite $A D$, & que de ces deux lignes on en fasse le plan

A

A C 16. ce plan A C 16. proviendra de la multiplication des deux nombres 2 & 8. (6. 17. & suivans) & par consequent le nombre des petits quarrez de tout ce plan A C 16. sera un nombre quarré, (7. 21.) & se pourra ranger en quarré, (7. 13.)

Qu'il soit donc rangé dans le quarré ac ; ainsi

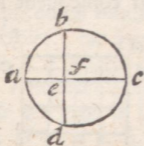


le quarré ac sera égal au plan A C, puisque ce n'est qu'un mesme nombre rangé autrement. Donc (6. 59.) le costé ab 4. sera moyen proportionnel entre A D 2. & A B 8.

29. Entre deux nombres non-semblables, il ne sçauroit tomber un nombre moyen proportionnel. Soient les nombres 4. & 6. rangez chacun en droite ligne, & que se multipliant ils produisent le plan 24. ce plan 24. n'est point un nombre quarré; (7. 25.) & par consequent il ne sçauroit se ranger en nombre quarré. Donc il ne sçauroit y avoir de nombre moyen entre 4. & 6. car ce nombre prétendu moyen multiplié par soy-mesme, produiroit un nombre quarré, & d'ailleurs égal au plan fait de 4. & de 6. (6. 59.) ce qui est impossible, puisque ce plan 24. fait de 4. & de 6. n'est point nombre quarré.

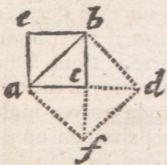
30. Soient deux lignes ae & ec , comme un nombre à un autre nombre non-

semblable : par exemple, comme 1. à 2.
Soit de plus $e b$ moyenne proportionnel-



le, en sorte que $a e . e b :: e b . e c$: je dis que $e b$ est incommensurable aux deux extrêmes $a e$ & $e c$: car $a e$ & $e c$ estant comme 1. & 2. c'est-à-dire, comme nombres non-semblables, (par l'hypothese) aussi-bien que leurs équimultiples quelconques, (7. 27.) il ne sera jamais possible de trouver un nombre moyen proportionnel entre $a e$ & $e c$ (par la précédente) & par conséquent $e b$ ne sera pas à $a e$ ou à $e c$ comme nombre à nombre : Donc elle est incommensurable.

31. Le diametre d'un quarré $a b$ est incommensurable au costé $a c$. Car prenant $a d$ double d' $a c$, & faisant le triangle $a b d$



qui sera semblable à $a b c$, à cause que $c d$ estant égal à $c b$, l'angle $c d b$ est égal à l'angle $c b d$; (2. 15.) ainsi l'angle $c d b$ est la moitié d'un droit, aussi-bien que $c a b$: donc $a b d$ est droit, &c. Ainsi $a c . a b :: a b . a d$. Donc $a b$ est moyenne proportionnelle entre $a c$ 1. & $a d$ 2., & par conséquent (par la précédente) incommensurable.

32. On

32. On appelle *Puissance* d'une ligne le quarré que l'on fait sur cette ligne. La puissance de $a c$ est le quarré $a c b e$, & la puissance de la ligne $a b$ est le quarré $a b d f$. Et l'on dit que la ligne $a b$ peut deux fois la ligne $a c$, (*bis potest lineam* $a c$) qui est une façon de parler prise du Grec & receüe en Géométrie.

33. Le diametre $a b$ est commensurable en puissance au costé $a c$, c'est-à-dire que le quarré $a b d f$ est commensurable au quarré $a c b e$, l'un estant double de l'autre.

34. Mais si l'on prend $a o$ moyenne proportionnelle entre $a b$ & $a c$, cette moyenne $a o$ sera incom-
 a -----
 mensurable en puissance, c'est-à-dire, que le quarré d' $a o$ sera incommensurable au quarré d' $a c$, ou au quarré d' $a b$: car le quarré d' $a c$ au quarré d' $a o$ est en raison doublée d' $a c$ à $a o$, (6. 29.) c'est-à-dire, comme $a c$ à $a b$, (6. 30.) Or $a c$ est incommensurable à $a b$: (7. 31.) Donc aussi le quarré d' $a c$ est incommensurable au quarré d' $a o$.

35. *Seconde puissance* d'une ligne est le cube, qui a pour costé cette ligne.

36. Si l'on prend $a n$ & $a m$, deux moyennes proportionnelles entre $a c$ & $a b$, en sorte que
 a ----- n
 $a c . a n :: a m . a b$. la ligne a ----- m
 $a m$ sera incommensurable en

seconde puissance à ac , c'est-à-dire, que le cube d' ac sera incommensurable au cube d' an , parce que le cube d' ac est au cube d' an en raison triplée du costé ac au costé an , c'est-à-dire, comme ac à ab . Or ac & ab sont incommensurables, &c. Mais aussi ac & am sont commensurables en seconde puissance, car le cube d' am est double du cube d' ac .

37. Il est aisé d'appliquer aux nombres solides ce qui a esté dit des nombres plans. On appelle *nombres solides* ceux qui proviennent de la multiplication d'un nombre plan par quelque nombre que ce soit : Par exemple, 18. est nombre solide fait de 6. (qui est un nombre plan) multiplié par 3. ou de 9. multiplié par 2.

38. Nombres *solides semblables* sont ceux dont les petits cubes peuvent se ranger, en sorte qu'ils fassent des parallelepipedes rectangles semblables.

39. Nombres *cubiques* sont ceux qui se peuvent ranger en cubes, comme 8. ou 27. dont les *costez* sont 2. & 3. les *bases* sont 4. & 9.

40. Tout nombre cubique multipliant un autre nombre cubique, produit un troisiéme nombre cubique.

41. Entre deux nombres solides semblables, il tombe deux nombres moyens proportionnels.

On n'a qu'à appliquer aux solides ce qui a esté démontré à l'égard des plans.

42. Ces démonstrations par lesquelles on prouve qu'il y a des lignes & des grandeurs incommensurables, prouvent aussi que le *Continu* n'est pas composé de points finis : car si le diametre aussi-bien que le costé d'un quarré estoient composez de points finis, le point mesureroit le costé & le diametre : car le point se trouveroit un certain nombre de fois dans le costé, & un autre certain nombre de fois dans le diametre ; ce qui est impossible (par les démonstrations précédentes.)

43. Comme dans un triangle rectangle le quarré du grand costé est égal aux deux quarez faits sur les deux autres costez, (6. 61.) on s'est toujours servi de ce triangle pour trouver des incommensurables : car si tous les trois costez sont commensurables, ils pourront estre tous trois exprimez par trois nombres, & alors le quarré du plus grand nombre sera égal aux quarez des deux autres nombres. Comme si le grand costé est de 5. pieds, le petit de 3. le mediocre de 4 ; le quarré de 5. sera 25. & les autres quarez seront 9. & 16. & ces deux ensemble 9. & 16. font le troisiéme 25. Mais si le petit costé est 2. & le mediocre 3. le grand costé ne pourra point s'exprimer par nombres, parce
que

que le quarré du petit costé 4. joint avec le quarré du médiocre 9. fait 13. qui exprime le quarré fait sur le grand costé : or comme ce nombre 13. n'est point nombre quarré, aussi ne scauroit-il avoir de costé ou de racine exprimée par aucun nombre.

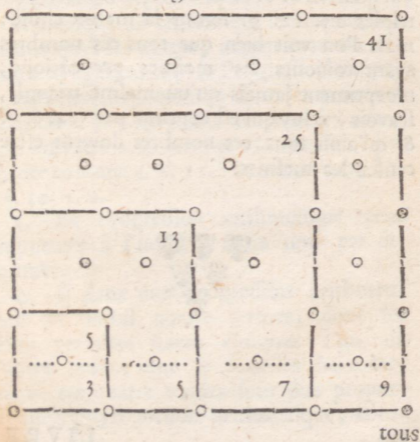
44. De tout temps on s'est appliqué à rechercher quelque methode pour trouver divers nombres propres à exprimer tous les trois costez du triangle rectangle, pour estre assés que tous ces trois costez sont commensurables. Voici une methode par laquelle on trouve tous les nombres possibles propres à cet effet.

45. Si l'on prend deux nombres quelconques, (mesme l'unité) qui ne different que de l'unité, & qu'on joigne ensemble les deux quarrés de ces deux nombres; on aura un nombre qui sera racine d'un quarré égal à deux quarrés, & ce nombre exprimant le grand costé d'un triangle rectangle, le costé médiocre sera exprimé par un nombre moindre de l'unité; & le petit costé par les deux premiers nombres joints ensemble. Par exemple, ayant pris 1. & 2. & quarré l'un & l'autre, pour avoir 1. & 4. je joins ensemble ces deux quarrés 1. & 4. & je fais 5. je dis que 5. pourra exprimer le grand costé, & 4. le mediocre, & 3. le petit, en sorte que 25. quarré du grand costé sera égal

égal à 16. & à 9. quarrez des deux autres costez. De mesme, si je prens 2. & 3. & que joignant leurs quarrez 4. & 9. je fasse 13. je dis que j'auray 13. & 12. & 5. pour costez d'un triangle rectangle, en sorte que 169. quarré de 13. sera égal à 144. & 25. quarrez de 12. & de 5. De mesme, prenant 3. & 4. & joignant leurs quarrez 9. & 16. je fais 25. je dis que 25. sera le grand costé du triangle, 24. le costé mediocre, & 7. le petit.

Tout cela se trouve plus facilement en cette sorte.

46. Si l'on range les unitez en sautoir,



tous les nombres qui feront une figure quarrée feront des nombres propres à exprimer le grand costé. Le petit costé sera le nombre compris dans les deux premiers rangs de la figure quarrée, & le costé mediocre sera d'une unité moindre que le plus grand.

47. Cette figure continuée donnera tous les nombres possibles : mais il faut remarquer que les équimultiples des trois nombres trouvez auront le mesme effet ; comme ayant trouvé 5. 4. & 3. leurs doubles 10. 8. & 6. représenteront les trois costez du triangle, en sorte que 100. quarré de 10. est égal à 64. & 36. quarrés de 8. & de 6. & de mesme leurs triples 15. 12. 9. feront la mesme chose : mais l'on voit bien que tous ces nombres ayant toujours les mesmes proportions, n'expriment jamais qu'un mesme triangle, sçavoir, celui qui est exprimé par 5. 4. & 3. & qu'ainsi tous ces nombres doivent estre censez les mesmes.

