www.e-rara.ch

Elémens de géométrie où par une méthode courte & aisée l'on peut apprendre ce qu'il faut sçavoir d'Euclide, d'Archimède, d'Apollonius, & les plus belles inventions des anciens & des nouveaux géomètres

Pardies, Ignace Gaston

La Haye, 1690

ETH-Bibliothek Zürich

Persistent Link: https://doi.org/10.3931/e-rara-4833

Livre huitiéme. Des progressions & des logarithmes.

www.e-rara.ch
Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien – von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material – from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d’imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L’éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes – des débuts de l’imprimerie jusqu’au 20e siècle.

e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

Nutzungsbedingungen Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titelinformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

Terms of Use This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

Conditions d'utilisation Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

Condizioni di utilizzo Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]

LIVRE HUITIE'ME.

Des Progressions & des Logarithmes.

1. UNE *Progression* est une suite de quantitez qui gardent entre elles quelque sorte de rapport semblable, & chacune de ces quantitez s'appelle *Terme*.

2. Lorsque les termes qui se suivent ainsi les uns aprés les autres, augmentent ou diminuënt également ; la Progression s'appele *arithmetique*, comme sont les nombres naturels 1. 2. 3. 4. 5. *&c.* ou bien les nombres impairs 1. 3. 5. 7. 9. 11. *&c.* ou bien encore comme 4. 8. 12. 16. ou comme 20. 15. 10. 5. 0.

3. La Progression arithmetique peut augmenter à l'infini, mais non pas diminuër.

4. Si dans une Progression arithmetique on prend quatre termes, dont les deux premiers soient éloignez l'un de l'autre autant que le sont les deux derniers ; ces quatre termes sont dits proportionnels en proportion arithmetique, comme

me dans la Progreſſion des nombres naturels 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. *&c.* Si nous prenons 2 3 ::: 9. 10. (cette marque ::: nous ſervira de ſigne pour la proportion arithmetique) il y aura meſme proportion arithmetique entre 2. & 3. qu'entre 9. & 10. c'eſt-à-dire, que 10. ſurpaſſe 9. de tout autant que 3. ſurpaſſe 2. De meſme 3. 5 ::: 8. 10. ſont en proportion arithmetique. Comme auſſi 1. 5. ::: 5. 9. ou 5. eſtant répeté deux fois, eſt le moyen arithmetique entre 1. & 9.

5 Dans la proportion arithmetique l'aggregé des deux extrêmes eſt égal à l'aggregé des deux moyens, comme dans 2. 3 ::: 9. 10. l'aggregé de 2. & de 10. eſt 12. & l'aggregé de 3. & de 9. eſt auſſi 12. De meſme, dans 3. 5 ::: 8. 10. l'aggregé de 3. & de 10. eſt 13. & l'aggregé de 5. & de 8. eſt auſſi 13. Et la raiſon de ceci eſt aſſez claire d'elle-meſme : car ſi 10. ſurpaſſe 8. auſſi ce qu'on ajoûte à 8. ſçavoir, 5. ſurpaſſe de tout autant ce qu'on ajoûte à 10. ſçavoir 3. ainſi on fait l'égalité.

6. L'aggregé ou la ſomme du premier & du dernier terme eſt égal à la ſomme du 2. & du penultiéme, ou du troiſiéme de l'antepenultiéme, *&c.* comme dans le premier exemple 1. & 9. font 10. & de meſme 2. & 8. ou bien 3. & 7. ou 4. & 6. font

6. font toûjours 10. & il reste au milieu 5. qui estant pris deux fois (comme équivalent à deux, puisqu'il est également éloigné du premier & du dernier) fait aussi 10.

7. Si l'on ajoûte le premier au dernier terme, & que l'on multiplie leur somme par la moitié du nombre des termes, le produit sera égal à l'aggregé de tous les termes ensemble, comme icy ajoûtant 1. à 9. pour avoir 10. & multipliant 10. par 4. & $\frac{1}{2}$, (car il y a 9. termes) on fera 45. qui est la somme de tous les termes depuis 1. jusqu'à 9. Ceci est manifeste par la précedente.

8. Lorsque les termes de la progression sont continuellement proportionnels ; c'est à dire, que le 1. est au 2. comme celui-ci est au 3. & comme le 4. au 5. *&c.* alors la Progression s'appelle *Geométrique*, comme 1. 2. 4. 8. 16. 32. ou bien 1. 3. 9. 27. 81. ou bien 3. 12. 48. 192. 768. ou bien 8. 4. 2. 1. $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{16}$, *&c.*

9. La Progression geométrique peut augmenter & diminuer à l'infini.

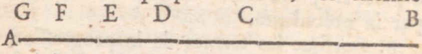
10. Lorsque la Progression commence par 1. le second terme s'appelle *Racine* ou *Costé* : le 3e s'appelle *Quarré* ou 2e degré : le 4e *Cube* ou 3e degré : le 5e

Quarré-

Quarré-Quarré ou 4ᵉ degré, le 6ᵉ *Surſolide* ou 5ᵉ degré, le 7ᵉ *Quarre-Cube*, *&c.*

11. Si l'on prend quatre termes, dont les deux premiers ſoient autant éloignez l'un de l'autre dans la progreſſion, que le ſont les deux derniers, ils ſeront ſimplement proportionnels, & le produit des extrêmes ſera égal au produit des moyens. (6. 28.)

12. Soit la quantité A B diviſée en C, en D, en E, en F, *&c.* en ſorte que A B. A C : : A C. A D : : A D. A E, *&c.* je dis que B C. C D. D E. E F. *&c.* ſeront en progreſſion géometrique continuellement proportionnels, & meſme



que A B. A C : : B C. C D : : C D. D E, *&c.* car puiſque A B. A C : : A C. A D, il ſera *dividendo* A B moins A C. (c'eſt à dire, C B.) A C : : A C moins A D, (c'eſt à dire, D C.) A D. & par conſequent *alternando* C B. D C : : A C. A D. ou : : A B. A C. ainſi de toutes les autres, on prouvera : : D C. E D : : F E : : G F, *&c.*

13. Soit une Progreſſion de quantitez en ligne droite B C, C D, D E, E F, *&c.* ſoit priſe C *d* égale au ſecond terme C D, afin d'avoir *d* B, la difference du premier & plus grand terme au ſecond, & que l'on

l'on faſſe comme B *d* à B C : : ainſi B C. à une 4. ligne, ſçavoir, B A. je dis que ſi le nombre des termes B C, C D, D E, *&c.* eſt fini, pour grand que ſoit d'ailleurs ce nombre, tous ces termes pris enſemble, quand il y en auroit cent mille millions, ſeront plus petits que B A. Que ſi l'on

F E D C *d* B

A————————————————

ſuppoſoit que ces termes fuſſent infinis en multitude ; alors ces termes tous enſemble ſeroient préciſément égaux à B A : car puiſque par l'hypotheſe *B d* (c'eſt-à-dire B C moins C *a* ou C D) eſt à B C : : comme B C. (c'eſt-à-dire A B moins A C) eſt à A B ; on trouvera aiſément que comme B C. C D : : A B. A C : : A C. A D. *&c.* & par conſequent tous les termes C D, D E, E F, *&c.* ſe trouveront toûjours par-deçà le point A, duquel on s'approchera toûjours d'autant plus prés, qu'on augmentera le nombre des termes ; ainſi l'on voit bien que tous ces termes, (qui ſont ce qu'on appelle dans l'Ecole *Parties proportionnelles*) quand ils ſeroient actuellement infinis, ne feront pas une longueur infinie, puiſqu'ils ſont tous renfermez dans B A.

14. Cette démonſtration ſe rend ſenſible dans un exemple d'une progreſſion particuliere, dont les termes ſont en raiſon

ſon double. Par exemple, B C. double de

F E D C d B

A———————————————————————

C D. & C D. double de D E. *&c*: car ſi le nombre des termes eſt fini, quand il y en auroit cent millions, qu'on prenne le dernier & plus petit terme, par exemple F E, ajoûtons à ce dernier F E une autre quantité qui luy ſoit égale, ſçavoir, F A; il eſt clair que E A ſera egal au penultiéme terme E D: car ce penultiéme E D eſt double du denier F E, par l'hypotheſe: or E A eſt auſſi double de F E, puiſque nous poſons F A égal à E F. De meſme A E avec D E, c'eſt-à-dire, A D, ſera égal au ſuivant terme C D: & en ſuite A C ſera égal à B C. De ſorte que l'on voit par là que le premier & plus grand terme eſt toûjours égal à tous les autres enſemble, pourveû qu'on y ajoûte une quantité égale au dernier & plus petit terme: mais que ſi on n'y ajoûte rien, le premier eſt toûjours plus grand que tous les autres pris enſemble. Si l'on ſuppoſe que ces termes ſoient actuellement infinis, alors le plus grand terme B C ſera préciſément égal à tous les autres infinis pris enſemble, C D, D E, E F, *&c.* Car l'on voit bien que plus on ajoûte de termes, plus auſſi on avance vers A, en retranchant toûjours la moitié de ce qui reſte.

Or

Or retranchant ainſi continuellement d'une quantité la moitié, & de ce qui reſte encore la moitié, & puis encore la moitié de ce qui reſte, il eſt manifeſte que ſi l'on ſuppoſoit qu'on euſt retranché actuellement une infinité de fois ainſi la moitié, il ne reſteroit plus rien. Cela ſe peut auſſi démonter par la réduction à l'impoſſible, en montrant que tous ces termes infinis pris enſemble ne ſont ni plus grands, ni plus petits que B A.

15. Par là on peut réſoudre des difficultez que l'on fait dans les Ecoles contre la diviſibilité du continu, & que ceux qui ne ſçavent pas la Geométrie penſent eſtre inſolubles, mais qui au fond ne ſont que de purs paralogiſmes.

16. Si l'on met deux Progreſſions, l'une geométrique, commençant par 1. & l'autre arithmetique, commençant par *o*, en ſorte que les termes de l'une répondent vis-à-vis des termes de l'autre, les termes de l'arithmetique s'appelleront *Logarithmes*, & *Expoſans*, comme

0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8.
1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. 256.

17. Ce qui ſe fait par multiplication & par diviſion dans la Progreſſion geométrique, ſe fait par addition & par ſouſtration dans les logarithmes : Comme ſi ayant les trois nombres 2. & 8 : : 64. on

0. 1. 2.

o. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8.
1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. 256.

veut chercher le quatriéme nombre proportionnel dans la progreſſion geometrique, il faut multiplier le 8. par 64. (qui ſont les deux termes moyens) car le produit 512. ſera égal (6. 28.) au produit de 2. & de cét autre quatriéme nombre, qui doivent eſtre les extrêmes des 4. proportionnels : ainſi pour trouver ce quatriéme nombre, il faut ſeulement diviſer 512. par 2. & l'on aura 256. ainſi 2. 8 : : 64. 256. de ſorte que 64. & 256. ſeront autant éloignez l'un de l'autre dans l'ordre de la progreſſion que le ſont 2. & 8. (8. 11.) mais ſi au lieu des nombres geometriques 2. 8. : : 64. on avoit pris les logarithmes qui leur répondent, ſçavoir, 1. 3. : : : 6. & qu'on euſt voulu trouver le quatriéme logarithme, il auroit fallu ajoûter 3. à 6. pour avoir 9. & oſter 1. de 9. pour avoir 8. qui ſeroit le logarithme qui répond au nombre geometrique 256.

18. De meſme, ſi l'on prend deux nombres geometriques 4. & 8. ſur leſquels répondent les logarithmes 2. & 3. en multipliant 4. par 8, on aura 32. qui ſera ſous le logarithme 5. lequel provient de l'addition de 2. & de 3.

19. De meſme prenant 16. & le multipliant par luy-meſme, on aura 256. qui ſera

ſous

ſous le logarithme 8. lequel provient de 4. ajoûté à ſoy-meſme.

20. Ainſi, ſi l'on veut trouver le nombre geométrique qui ſeroit ſous le logarithme 16. il faudroit prendre 256. qui eſt ſous 8. & le multiplier par ſoy-meſme, & on auroit 65536.

21. Que ſi encore on veut avoir le nombre geométrique qui devroit répondre au logarithme 23. il faut prendre deux logarithmes, qui joints enſemble faſſent 23. comme 7. & 16. & multiplier les nombres geométriques qui leur répondent l'un par l'autre, ſçavoir, 128. (qui eſt ſous 7.) par 65536. (qui doit eſtre ſous 16.) & le produit 8388608. ſera celuy qui doit eſtre ſous le 23. logarithme, c'eſt-à-dire, qui doit eſtre à la vingt-quatriéme place, aprés le premier nombre 1.

22. D'où l'on voit comment on peut aiſément répondre à la demande qu'on fait ordinairement, à combien reviendroit un cheval qu'on acheteroit à cette condition, que pour le premier clou du fer on donneroit un double, & pour le ſecond clou deux doubles, pour le troiſiéme quatre doubles, pour le quatriéme huit, & ainſi juſqu'au vingt-quatriéme: car le vingt-quatriéme coûteroit 8388608. doubles, c'eſt-à-dire, 69905.

 livres

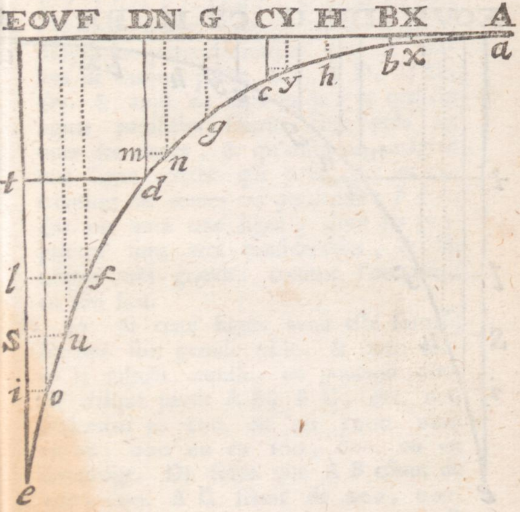
livres 8. doubles, & en doublant cette somme (suivant 8. 14.) on trouvera que tout le cheval aura cousté 139810. livres.

23. Si l'on avoit dans de grandes tables d'un livre deux longues progressions toutes faites, qui se répondissent ainsi, l'une geométrique, & l'autre arithmetique; on s'épargneroit bien de la peine à calculer, pour trouver les nombres geométriques: car si l'on nous donnoit ces trois nombres 32. 64. 128. & qu'on demandast le quatriéme geométrique; au lieu de multiplier 64. par 128. & de diviser le produit par 32. (ce qui est fort ennuyeux dans les grands nombres) il ne faudroit que prendre le logarithme des trois nombres donnez, sçavoir, 5. 6. 7. ajoûter 6. à 7. & du produit 13. oster 5. & il resteroit 8. qui seroit le logarithme du quatriéme geométrique: de sorte que consultant la table pour voir quel nombre répond à 8. je trouverois 256.

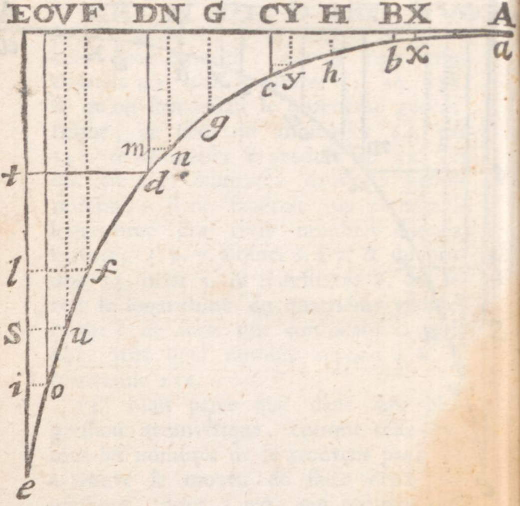
24. Mais parce que dans une progression geométrique, comme celle-cy, tous les nombres ne se trouvent pas, on a trouvé le moyen de faire deux progressions, dont l'une, qui contient tous les nombres 1. 2. 3. 4. 5. *&c.* & qui semble estre la Progression arithmetique, a néanmoins les proprietez de la geométrique;

trique ; & l'autre, qui contient des nombres en apparence plus irréguliers, est néanmoins la Progression arithmetique. Voicy une ligne qui fait comprendre parfaitement tous ces mysteres.

25. Soit la ligne droite A E divisée



par parties égales A B, B C, C D, D E, *&c.* Par les points A, B, C, *&c.* soient imaginées les lignes droites *A a*, *B b*, *C c* paralleles entre elles, qui soient en Progression geométrique : par exemple qu'A *a* estant 1. *B b* 10. *C c* soit 100. D *d* 1000. E *e* 10000. *&c.* nous aurons deux Progressions de lignes, l'une arithmetique, & l'autre geométrique : car les



lignes A B, A C, A D, A E, seront en Progression arithmetique, comme 1. 2. 3. 4. & ainsi representeront les logarithmes

rithmes aufquels répondront les lignes geométriques. A *a*, B *b*, C *c*, &c.

26. Chacune des parties E D, D C, &c. soit divisée également en F, G, H, &c. & soient tirées les paralleles F *f*, G *g*, &c. moyennes proportionnelles entre leurs collaterales, c'est-à-dire, E *e*. F *f* :: F *f*. D *d* :: D *d*. G *g*, &c. Derechef soient encore tirées d'autres moyennes proportionnelles par le milieu de chaque partie E F, F D, D G, &c. & ainsi de suite jusqu'à ce que ces lignes paralleles soient fort prés les unes des autres, & qu'enfin on imagine une ligne courbe qui passe par les extrémitez de toutes ces paralleles *e f d g*, &c. on aura une ligne, dont les proprietez sont tres-considerables, & les usages tres-grands, comme l'on verra en son lieu.

27. Si cette figure avoit esté formée sur une fort grande table, & avec toute la justesse requise, on pourroit diviser chaque partie A B, B C, &c. non seulement en 100. ou en 1000. mais en 10, 000 ou en 100, 000. ou en davantage. De sorte que A B estant de 100, 000. A C. seroit de 200, 000. & A D de 300, 000, &c. ce qui est toûjours en Progression arithmetique.

 28. La

28. La ligne E e eſtant ſuppoſée de 10,000 parties, imaginons que par chacune de ces parties ſoient tirées des paralleles à la ligne A E, qui coupent la courbe en autant de points. Par exemple, ſoit la ligne i o tirée par la partie 9,900. de E e qui coupe la courbe au point o. Soit encore la parallele o O, qui coupe la ligne A E, au point O dans la 399, 563. partie, & l'on connoiſtra par là que 399,563. eſt le logarithme de 9,900. De meſme, ſi S u paſſoit par la partie 9,000 de la ligne E e, & que u V coupaſt la ligne A E dans la 395,424. ce nombre-cy ſeroit le logarithme de 9,000. &c.

29. Ainſi l'on pourroit faire une table de logarithmes depuis 1. juſqu'à 10,000. & meſme encore plus avant, ſi l'on vouloit allonger la ligne A E.

30. Remarquez qu'il ſuffit, pour avoir tous ces logarithmes depuis 1. juſqu'à 10,000. de trouver les logarithmes depuis 1,000 juſqu'à 10,000. c'eſt à dire, (aprés avoir tiré la parallele d t) en prenant les logarithmes de toutes les parties depuis t juſqu'à e, dont les logarithmes ſont terminez entre E & D: car avec cela on aura les logarithmes de toutes les autres parties qui ſ~~ont de~~puis t juſqu'à E, & dont

les

les logarithmes sont entre D & A. Par exemple, O *o* estant de 9,900. parties, & son logarithme 399,563. ce mesme nombre servira aussi de logarithme pour *n* N 990. & pour *y* Y 99. en changeant seulement le premier chifre 3. parce que, suivant la composition de cette ligne, O N, ou N Y, doivent estre égales à E D ou D C; ce que chacun pourra aisément démontrer. Ainsi O N, ou N Y contiendront 100,000. & puisque A O est 399,563. ostant O N 100,000. il restera 299,563 pour A N, duquel ostant encore 100,000. il restera 199, 563 pour A Y, & de mesme façon ayant A V 395.424. pour logarithmes de V *u* 9,000. on aura aussi 095.424. pour logarithmes de X *x* 9. ou 195.424. pour logarithmes de 90. ou 295,424. pour logarithmes de 900.

31. Tout ceci se peut aussi réduire en pratique par le calcul, sans faire en effet ces figures, mais seulement en se les imaginant toutes faites : car par l'arithmetique on peut trouver un nombre moyen proportionnel F *f* entre les deux D *d* & E *e*, & aprés cela encore des moyens entre D *d* & F *f*, ou entre F *f* & E *e*, *&c.* Mais ce que nous venons d'expliquer est suffisant, pour donner

toute la connoiſſance que nous devons avoir de la nature & de l'artifice des logarithmes : car on ne doit pas ſe mettre en peine de les calculer en effet, & de les trouver, puiſque tout cela eſt déja tout fait ; Dieu, pour le bien public, ayant ſuſcité des perſonnes, à qui il a donné aſſez de patience, pour ſurmonter l'ennui d'un travail qui devroit paroiſtre inſupportable : car nous ſçavons que plus de 20. perſonnes gagées pour cela ont paſſé plus de 20. ans à calculer avec une aſſiduité infatigable.

32. Outre ces deux Progreſſions, il y en a une troiſiéme, qu'on appelle *Harmonique*, lorſqu'en prenant trois termes qui ſe ſuivent immediatement, on trouvé que le plus grand eſt au plus petit, comme la difference du plus grand & du moyen eſt à la difference du moyen & du plus petit, comme 30. 20. 15. 12. *&c.* ſont en Progreſſion harmonique ; car en prenant 30. 20. 15. la difference de 30. & de 20. eſt 10. la difference de 20. & 15. eſt 5. or 10. 5 : : 30. 15.

33. Cette Progreſſion peut diminuër à l'infini, mais non pas augmenter.

Tout ce que l'on a dit juſqu'à preſent de cette Progreſſion, n'eſt pas de grand uſage, & je ne veux pas m'engager à dire ici des choſes extraordinaires.

On

On verra dans la suite de cette Geométrie quelques propriétez assez considerables de cette Progression, qui pourront donner quelque éclaircissement, pour entendre ce que nous avons de la Musique des Anciens, dont l'obscurité n'a pas encore esté penetrée. On y démontrera le rapport que l'Hyperbole a avec cette Progression ; car comme l'angle rectiligne sert pour trouver entre deux données tant de moyennes que l'on voudra en raison arithmetique ; & que cette ligne courbe que nous venons de decrire pour les logarithmes, sert pour trouver aussi entre deux données autant de moyennes que l'on voudra en raison geométrique ; de mesme l'on fera voir que l Hyperbole sert pour trouver entre deux données autant de moyennes que l'on voudra en raison harmonique.

34. Il y a encore la Progression des quarrez, & celle des cubes, des quarrequarrez, sursolides, quarrecubes, &c. comme 1. 4 9. 16. 25. 36. &c. qui sont tous le quarrez, dont les racines sont les nombres naturels 1. 2. 3. 4. 5. 6. &c. De mesme, 1. 8. 27. 64. 125. 216. qui sont les cubes des mesmes nombres. De mesme, 1. 16. 81. 256. 625. 1296. qui sont les quarrequarrez des mesmes nombres, &c.

35. Dans la Progression des quarrez mettant o pour premier terme, ainsi o. 1. 4. 9. 16. &c. la somme de tous les

termes eſt plus grande que le tiers du dernier terme multiplié par le nombre des termes ; & cét excés qui eſt au deſſus du tiers, eſt toûjours d'autant plus petit, que le nombre des termes eſt plus grand. De meſme, dans la Progreſſion des cubes, cette ſomme des termes eſt plus grande que le quart ; & dans les quarrequarrez, elle eſt plus grande que la cinquiéme partie, & ainſi conſecutivement des autres. Pour prouver ceci, il ſuffit d'en faire une induction, comme l'on voit dans cette table, où le ſecond

1	0	0	0	
2	1	1	2	$\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$
3	4	5	12	$\frac{5}{12}$ ou $\frac{1}{3} + \frac{1}{12}$
4	9	14	36	$\frac{7}{18}$ ou $\frac{1}{3} + \frac{1}{18}$
5	16	30	80	$\frac{9}{24}$ ou $\frac{1}{3} + \frac{1}{24}$
6	25	55	150	$\frac{11}{30}$ ou $\frac{1}{3} + \frac{1}{30}$
7	36	91	252	$\frac{13}{36}$ ou $\frac{1}{3} + \frac{1}{36}$

rang

rang contient la Progreſſion de quarrez depuis o. Le troiſiéme rang contient les ſommes des termes. Par exemple, l'on y voit que la ſomme depuis o. juſqu'à 9. eſt 14. Le quatriéme rang contient le produit de chaque terme multiplié par le nombre des termes qui ſont depuis o juſqu'à luy ; lequel nombre eſt marqué dans le premier rang, comme 36. eſt le produit de 9. multiplié par 4. Le cinquiéme rang contient des fractions, qui marquent la proportion des nombres du troiſiéme & du quatriéme rang, comme vis-à-vis de 14. & de 36. on trouve $\frac{7}{18}$; ce qui veut dire que 14. eſt à 36. comme 7. à 18. & qu'ainſi la ſomme des termes 14. eſt au produit de 9. multiplié par 4. ſçavoir, à 36. comme 7. à 18. Davantage, dans ce meſme cinquiéme rang, aprés $\frac{7}{18}$ on voit encore ces caracteres ; (ou $\frac{1}{3} + \frac{1}{18}$) ce qui veut dire que $\frac{7}{18}$ valent autant qu'un tiers, & de plus une dix-huitiéme partie, parce qu'en effet $\frac{7}{18}$ valent autant que $\frac{6}{18}$ plus $\frac{1}{18}$, c'eſt à dire que

1	0	0	0	
2	1	1	2	$\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$
3	4	5	12	$\frac{5}{12}$ ou $\frac{1}{3} + \frac{1}{12}$
4	9	14	36	$\frac{7}{18}$ ou $\frac{1}{3} + \frac{1}{18}$
5	16	30	80	$\frac{9}{24}$ ou $\frac{1}{3} + \frac{1}{24}$
6	25	55	150	$\frac{11}{30}$ ou $\frac{1}{3} + \frac{1}{30}$
7	36	91	252	$\frac{13}{36}$ ou $\frac{1}{3} + \frac{1}{36}$

$\frac{1}{3} + \frac{1}{18}$ de ſorte que la ſomme 14. eſt le tiers du produit 36. & outre cela encore il contient de plus une dix-huitiéme partie de 36. De meſme, on trouve que 30. qui eſt la ſomme des termes juſqu'à 16. eſt plus du tiers de 80. qui eſt le produit de 16. par 5. & que l'excés eſt $\frac{1}{24}$: Car $\frac{30}{80}$ valent autant que $\frac{3}{8}$ ou que $\frac{9}{24}$ ou que $\frac{8}{24} + \frac{1}{24}$. ou enfin que $\frac{1}{3} + \frac{1}{24}$ Or $\frac{1}{24}$ n'eſt pas tant que $\frac{1}{18}$; ainſi l'on l'on voit dans la ſuite de cette table que ces excés qui ſont au deſſus du tiers, vont toûjours en diminuant, à meſure que le nombre des termes croiſt: car ces excés ſont $\frac{1}{24}\ \frac{1}{30}\ \frac{1}{36}\ \frac{1}{42}\ \frac{1}{48}$, *&c.* le dénominateur de la fraction augmentant toûjours de ſix.

36. Si l'on fait une table ſemblable pour les cubes, on trouvera que les fractions qui ſeront au deſſus du quart diminuëront toûjours en valeur, leur dénominateur augmentant de 4. à chaque nouveau terme qu'on ajoûtera à la Progreſſion; & de meſme, à l'égard des autres Progreſſions, on trouvera, par de ſemblables tables, ce qui a eſté dit généralement dans la propoſition précedente.

Tout ceci ſera tres-utile dans la ſuite de cette Geométrie, où l'on traitera encore de pluſieurs autres Progreſſions.