www.e-rara.ch

Handbuch der Physik

[Mechanik und Akustik]

Brodhun, Eugen
Braun, Ferdinand
Auerbach, Felix
Czapski, Siegfried
Exner, Josef Karl
Feussner, Wilhelm
Graetz, Leo
Kayser, H.
Melde, Franz
Oberbeck, Anton
Pernet, Johann
Stenger, Fr.
Waitz, Karl

Breslau, 1891

ETH-Bibliothek Zürich

Shelf Mark: Rar 23050: 1

Persistent Link: https://doi.org/10.3931/e-rara-64971

Elasticität der Krystalle.

www.e-rara.ch
Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien – von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material – from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d'imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L'éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes – des débuts de l'imprimerie jusqu'au 20e siècle.

e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

Nutzungsbedingungen Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titelinformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

Terms of Use This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

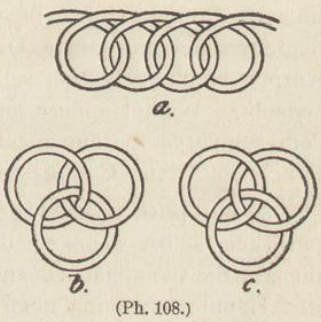
Conditions d'utilisation Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

Condizioni di utilizzo Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]

Visual Library

zwar besonders interessante durch Versuche mit ringförmig geschlossenen Kautschukbändern.

Elasticität zusammengesetzter Körper. Sehr complicirt, aber wegen ihrer Wichtigkeit für die Bau- und sonstige Technik vielfach untersucht sind die Erscheinungen an zusammengesetzten Körpern, z. B. Stabsystemen, Ketten, Geweben, Drahtnetzen u. s. w. Gewebe haben in der Längs- und Querrichtung einen grossen, in der Diagonalrichtung einen kleinen Dehnungsmodul. Ein wie in Fig. 108 *a* geknüpfter Drahtstreifen hat in einem Sinne einen grossen, im andern einen kleinen Biegungs- und Torsionswiderstand. Ein nach Art der Fig. 108 *b* hergestelltes Geflecht ist sehr biegsam (Panzerhemd), ein wie Fig. 108 *c* gearbeitetes fast gar nicht (Rohrstuhl).



(Ph. 108.)

Grenze der Biegungs- und Torsionselasticität. Dieselbe ist erreicht, wenn die Hinzufügung der kleinsten biegenden resp. tordirenden Kraft eine dauernde Biegung resp. Torsion erzeugt. Allgemeines lässt sich hierüber jedoch nicht sagen, da die Lage der Grenze von zahlreichen Factoren bedingt wird; so liegt sie bei hartgezogenen Drähten höher als bei geglühten, nach wiederholten Deformationen rückt sie meist hinauf (in gewissen Fällen aber auch hinab) u. s. w. In vielen Punkten lauten die Resultate verschiedener Beobachter zum Theil nicht übereinstimmend oder gar widersprechend. Ein nahe bis zur Grenze tordirter Draht bekommt nach Mac Ferlane eine dauernde Torsion, wenn er gespannt wird, und ein nahe bis zur Grenze gespannter Draht erfährt eine dauernde Dehnung, wenn er tordirt wird. Andererseits wird nach Wiedemann einem permanent tordirten Draht durch Spannung ein Theil der permanenten Torsion entzogen.

Anwendungen der Elasticität. Die wichtigsten sind folgende: 1) Federn mit der Bestimmung, auf irgend einen Gegenstand einen Druck auszuüben, stets für Herstellung des ursprünglichen Zustandes zu sorgen u. s. w. 2) Spiralförmige Uhrfedern zur Erzeugung (Hauptfeder) und Regulirung (Unruhe) der Bewegung. 3) Federwaagen (s. Art. »Waage«, pag. 135). 4) Federdynamometer zu verschiedenen Zwecken, insbesondere zur Messung der Muskelkraft und der Leistung von Maschinen. 5) Aneroidbarometer, Federmanometer und andere druckmessende Apparate (s. Art. »Luftdruck«).

F. Auerbach.

Elasticität der Krystalle.

Die Elasticität äussert sich bei Krystallen naturgemäss in weit verwickelteren Erscheinungen als bei isotropen Körpern. Die hauptsächlichsten Punkte, welche diese grössere Complication ausmachen, sind folgende:

1) Längszug oder -Druck bringt zwar auch hier ausser der Längsdehnung oder -Verkürzung die Nebenerscheinung der Quercontraction oder Querdilatation hervor; dieselbe ist aber nicht nach allen Querschnittsrichtungen gleich gross, und es wird folglich nicht nur, wie bei isotropen Körpern, die Grösse, sondern

auch die Gestalt des Querschnitts eine andere, z. B. wird aus einem kreisförmigen Querschnitt ein elliptischer, aus einem rechteckigen ein solcher mit gekrümmten Seiten u. s. w.

2) Die durch allseitig gleichen Druck erzeugte kubische Compression ist hier nicht, wie bei isotropen Körpern, eine reine Compression, sondern sie ist, da die linearen Compressionen in verschiedenen Richtungen verschieden sind, mit der Begleiterscheinung einer Deformation, d. h. Gestaltsänderung verknüpft; der Körper bleibt nicht sich selbst ähnlich, die an oder in ihm vorkommenden oder gedachten Winkel ändern sich im allgemeinen. Eine Ausnahme machen nur die dem regulären System angehörigen Krystalle; bei ihnen erzeugt allseitig gleicher Druck eine reine Compression.

3) Bei prismatischen oder cylindrischen, aus Krystallen gebildeten Körpern bewirken, selbst wenn sie doppelt symmetrische Querschnitte haben, Zugkräfte, die auf die Grundflächen ausgeübt werden, ausser der in einer Biegung bestehenden Haupterscheinung noch die Nebenerscheinung einer Drillung, und umgekehrt bringen Drehungsmomente um die Längsaxe ausser der Drillung noch eine Biegung hervor. Man kann diese Erscheinungen als »freie Biegung« und »freie Drillung« bezeichnen; nur in besonderen Fällen gehen dieselben in eine »reine Biegung« resp. »reine Drillung« über.[1])

4) Die Grösse der eintretenden Compressionen, Winkeländerungen, Biegungen und Drillungen hängt, von den wirkenden Kräften abgesehen, nicht bloss von dem Stoffe ab, aus welchem der Körper besteht, sondern auch von der Richtung, in welcher das Stäbchen, Scheibchen oder allgemein das Beobachtungsstück aus dem Krystall herausgeschnitten ist. Es genügt also hier nicht, den Elasticitätsmodul E, den Torsionsmodul T, die Quercontraction μ u. s. w. schlechthin anzugeben, sondern man muss diese Grössen für jede der krystallographischen Hauptrichtungen besonders ermitteln.

5) Das elastische Verhalten der Krystalle ist hiernach nicht, wie bei den isotropen Körpern, durch zwei, sondern durch mehr Constanten besimmt. Bei jenen konnte man hierfür entweder E und μ oder E und T oder die Elasticitätsconstanten, oder Volumen- und Gestaltsmodul wählen; hier, bei den Krystallen, empfiehlt sich am meisten entweder die Angabe der verschiedenen E und T oder die Angabe sämmtlicher Elasticitätsconstanten.

Druckcomponenten.[2]) Dieselben, $X_x\ Y_y\ Z_z\ Y_z\ Z_x\ X_y$, sind 6 homogene lineare Functionen der 9 Differentialquotienten der Verrückungscomponenten $u\ v\ w$ nach den Coordinaten $x\ y\ z$. Die hiernach auftretende Zahl von 54 Constanten verringert sich aber zunächst auf 36 durch Berücksichtigung des Umstandes, dass die Differentialquotienten nur in den 6 Combinationen

$$\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial w}{\partial z},\ \left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right),\ \left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right),\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

oder abgekürzt $x_x,\ y_y,\ z_z,\ y_z,\ z_x,\ x_y$ vorkommen (s. Art. »Elasticität«, pag. 232, Gleichung 28); sodann weiter auf 21 auf Grund der Existenz des elastischen Potentials (pag. 233)

---

[1]) Voigt, Wied. Ann. 16, pag. 273. 1882.

[2]) Für die Druckcomponenten: F. Neumann, Vorl. üb. Elast. pag. 164; mit Rücksicht auf das Potential: Voigt, Wied. Ann. 16, pag. 276. 1882. Für die Potentiale selbst: Kirchhoff, Mechanik, pag. 390; Story, Am. J. Math. 1, pag. 177. 1878.

$$\left.\begin{aligned} P = \tfrac{1}{2}c_{11}x_x^2 + c_{12}x_x y_y + c_{13}x_x z_z + c_{14}x_x y_z + c_{15}x_x z_x + c_{16}x_x x_y \\ + \tfrac{1}{2}c_{22}y_y^2 + c_{23}y_y z_z + c_{24}y_y y_z + c_{25}y_y z_x + c_{26}y_y x_y \\ + \tfrac{1}{2}c_{33}z_z^2 + c_{34}z_z y_z + c_{35}z_z z_x + c_{36}z_z x_y \\ + \tfrac{1}{2}c_{44}y_z^2 + c_{45}y_z z_x + c_{46}y_z x_y \\ + \tfrac{1}{2}c_{55}z_x^2 + c_{56}z_x x_y \\ + \tfrac{1}{2}c_{66}x_y^2 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Durch Differentiation nach x_x u. s. w. erhält man hieraus X_x u. s. w.; die erste verticale und die erste horizontale Columne ergeben die sechs Glieder von X_x, die 2. vert. und 2. hor. Columne die Glieder von Y_y u. s. w.

$$\left.\begin{aligned} X_x &= c_{11}x_x + c_{12}y_y + c_{13}z_z + c_{14}y_z + c_{15}z_x + c_{16}x_y \\ Y_y &= c_{12}x_x + c_{22}y_y + c_{23}z_z + c_{24}y_z + c_{25}z_x + c_{26}x_y \\ Z_z &= c_{13}x_x + c_{23}y_y + c_{33}z_z + c_{34}y_z + c_{35}z_x + c_{36}x_y \\ Y_z &= c_{14}x_x + c_{24}y_y + c_{34}z_z + c_{44}y_z + c_{45}z_x + c_{46}x_y \\ Z_x &= c_{15}x_x + c_{25}y_y + c_{35}z_z + c_{45}y_z + c_{55}z_x + c_{56}x_y \\ X_y &= c_{16}x_x + c_{26}y_y + c_{36}z_z + c_{46}y_z + c_{56}z_x + c_{66}x_y \end{aligned}\right\} \quad (1\,a)$$

Für die einzelnen Krystallsysteme gestalten sich diese Formeln folgendermaassen:

a) Für das allgemeinste Krystallsystem, das trikline, gelten diese Ausdrücke ohne weiteres, d. h. ohne dass Vereinfachungen in ihnen auftreten.

b) Das monokline System hat die Besonderheit, dass die dritte Axe auf der Ebene der beiden ersten senkrecht steht, dass also die letztere, es sei die xy Ebene, eine Symmetrie-Ebene ist.[1]) Es muss hiernach P bei Vertauschung von z mit $-z$ umgeändert bleiben, was, da in diesem Falle y_z und z_x ihr Zeichen ändern, nur möglich ist, wenn die Coefficienten der diese Grössen linear enthaltenden Glieder, also die 8 Constanten c_{14}, c_{15}, c_{24}, c_{25}, c_{34}, c_{35}, c_{46}, c_{56} verschwinden. Es wird also

$$\left.\begin{aligned} X_x &= c_{11}x_x + c_{12}y_y + c_{13}z_z + c_{16}x_y & Y_z &= c_{44}y_z + c_{45}z_x \\ Y_y &= c_{12}x_x + c_{22}y_y + c_{23}z_z + c_{26}x_y & Z_x &= c_{45}y_z + c_{55}z_x \\ Z_z &= c_{13}x_x + c_{23}y_y + c_{33}z_z + c_{36}x_y & X_y &= c_{16}x_x + c_{26}y_y + c_{36}z_z + c_{66}x_y \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Krystalle dieses Systems sind also durch 13 Elasticitätsconstanten charakterisirt.

c) Beim rhombischen System stehen alle drei Axen auf einander senkrecht, sind also alle drei Ebenen Symmetrie-Ebenen; es ist indes nur nothwendig, die Existenz zweier Symmetrie-Ebenen (xy und yz) einzuführen, da die Existenz der dritten dann nothwendig folgt. Es müssen also noch die 4 Constanten c_{26}, c_{36}, c_{45}, c_{16} verschwinden, und es wird:

$$P = \tfrac{1}{2}c_{11}x_x^2 + \tfrac{1}{2}c_{22}y_y^2 + \tfrac{1}{2}c_{33}z_z^2 + c_{23}y_y z_z + c_{13}z_z x_x + c_{12}x_x y_y + \tfrac{1}{2}c_{44}y_z^2 + \tfrac{1}{2}c_{55}z_x^2 + \tfrac{1}{2}c_{66}x_y^2,$$

also:

$$\left.\begin{aligned} X_x &= c_{11}x_x + c_{12}y_y + c_{13}z_z & Y_y &= c_{44}y_z \\ Y_y &= c_{12}x_x + c_{22}y_y + c_{23}z_z & Z_x &= c_{55}z_x \\ Z_z &= c_{13}x_x + c_{23}y_y + c_{33}z_z & X_y &= c_{66}x_y \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Dem rhombischen System entsprechen also nur noch 9 Elasticitätsconstanten.

d) Beim quadratischen System ist das elastische Verhalten nicht, wie beim rhombischen, in jeder der auf einander senkrechten 3 Axenrichtungen ein anderes, sondern es sind zwei derselben, etwa x und y, gleich lang und elastisch

[1]) Der Kürze halber ist hier und im folgenden die Symmetrie und Gleichwerthigkeit immer geometrisch aufgefasst; sie braucht aber im Princip natürlich nur in elastischer Hinsicht vorhanden zu sein.

gleichwerthig, so dass, wenn diese beiden Axen mit einander vertauscht werden, sich nichts ändert.

Es muss daher $c_{11} = c_{22}$, $c_{44} = c_{55}$, $c_{13} = c_{23}$ sein und es wird:

$$P = \tfrac{1}{2}c_{11}(x_x^2 + y_y^2) + \tfrac{1}{2}c_{33}z_z^2 + c_{13}(y_y z_z + z_z x_x) + c_{12}x_x y_y + \tfrac{1}{2}c_{44}(y_z^2 + z_x^2) + \tfrac{1}{2}c_{66}x_y^2,$$

$$\left.\begin{aligned} X_x &= c_{11}x_x + c_{12}y_y + c_{13}z_z & Y_z &= c_{44}y_z \\ Y_y &= c_{12}x_x + c_{11}y_y + c_{13}z_z & Z_x &= c_{44}z_x \\ Z_z &= c_{13}(x_x + y_y) + c_{33}z_z & X_y &= c_{66}x_y \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Dem quadratischen System entsprechen also nur noch 6 Elasticitätsconstanten.

e) Beim regulären System sind alle drei Axen gleich lang resp. gleichwerthig; es muss also $c_{11} = c_{22} = c_{33}$, $c_{13} = c_{23} = c_{12}$, $c_{44} = c_{55} = c_{66}$ sein, und folglich erhält man:

$$P = \tfrac{1}{2}c_{11}(x_x^2 + y_y^2 + z_z^2) + c_{12}(y_y z_z + z_z x_x + x_x y_y) + \tfrac{1}{2}c_{44}(y_z^2 + z_x^2 + x_y^2),$$

$$\left.\begin{aligned} X_x &= c_{11}x_x + c_{12}(y_y + z_z) & Y_z &= c_{44}y_z \\ Y_y &= c_{11}y_y + c_{12}(z_z + x_x) & Z_x &= c_{44}z_x \\ Z_z &= c_{11}z_z + c_{12}(x_x + y_y) & X_y &= c_{44}x_y \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Die Constantenzahl ist hier nur noch gleich 3.

f) Die hemiedrischen Formen obiger 5 Krystallsysteme erfordern zwar, da ihre Symmetrie-Verhältnisse im allgemeinen andere sind, eine gesonderte Untersuchung, führen aber, insbesondere für alle tetraëdrischen und für die regulär-dodekaëdrischen Formen zur unveränderten Anwendbarkeit der obigen bezüglichen Formeln.

g) Das hexagonale System unterscheidet sich von allen übrigen dadurch, dass es nicht drei, sondern vier Axen hat, und dass die Symmetrie eine dreifache mit einem Symmetriewinkel von 60° ist. Drückt man dies in Gleichung (1) aus und wählt man die z-Axe als Hauptaxe, so erhält man:

$$P = \tfrac{1}{2}c_{11}(x_x^2 + y_y^2) + \tfrac{1}{2}c_{33}z_z^2 + c_{13}(x_x + y_y)z_z + c_{12}x_x y_y + \tfrac{1}{4}(c_{11} - c_{12})x_y^2 + \tfrac{1}{2}c_{44}(y_z^2 + z_x^2),$$

$$\left.\begin{aligned} X_x &= c_{11}x_x + c_{12}y_y + c_{13}z_z & Y_z &= c_{44}y_z \\ Y_y &= c_{12}x_x + c_{11}y_y + c_{13}z_z & Z_x &= c_{44}z_x \\ Z_z &= c_{13}(x_x + y_y) + c_{33}z_z & X_y &= \tfrac{1}{2}(c_{11} - c_{12})x_y \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Die Zahl der Elasticitätsconstanten beträgt also hier 5.

h) Das Rhomboëder ist zwar eine hemiedrische Form des hexagonalen Systems, das rhomboëdrische System führt aber doch zu besonderen Formeln. Es ist eine einfach symmetrische Form mit dem Drehungswinkel 120°. Mit Rücksicht hierauf ergiebt sich, wenn durch den Index null die Werthe in (6) bezeichnet werden:

$$P = P^0 + c_{14}[(x_x - y_y)z_x - x_y y_z]$$

$$\left.\begin{aligned} X_x &= X_x^0 + c_{14}z_x, & Y_y &= Y_y^0 - c_{14}z_x, & Z_z &= Z_z^0, \\ Y_z &= Y_z^0 - c_{14}x_y, & Z_x &= Z_x^0 + c_{14}(x_x - y_y), & X_y &= X_y^0 - c_{14}y_z \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Durch Hinzutreten von c_{14} wird also hier die Constantenzahl 6.

Bei diesen Formeln ist die Stetigkeitshypothese der Materie zu Grunde gelegt. Die Poisson'sche Moleculartheorie (pag. 235) reducirt die Constantenzahlen wie bei isotropen Stoffen (von 2 auf 1) so auch hier. Es wird nämlich im regulären System $c_{12} = c_{44}$, also die Constantenzahl 2 statt 3, im rhombischen System $c_{44} = c_{23}$, $c_{55} = c_{31}$, $c_{66} = c_{12}$, die Constantenzahl also 6 statt 9; im hexagonalen und im rhomboëdrischen System $c_{13} = c_{44}$, $c_{11} = 3c_{12}$, die Constantenzahl also 3 statt 5. Diese Beziehungen werden aber durch die Erfahrung im allgemeinen nicht bestätigt; man muss also, wenn man zur Molekular-

theorie neigt, die POISSON'sche durch die VOIGT'sche (pag. 235) ersetzen, d. h. die polare Wirkung der Molekeln auf einander in Betracht ziehen.[1])

Anwendung auf die einzelnen elastischen Erscheinungen.[2])

1) Einseitiger Druck. Die Gleichungen (1a), auf ein willkürliches Coordinatensystem bezüglich, ergeben, wenn das dem Druck unterworfene Prisma die z-Axe zur Längs- und Druckaxe (die aber im allgemeinen keine Hauptaxe ist) hat, also $Z_z = p$, alles Uebrige $= 0$ ist, durch Auflösung nach x_x u. s. w.

$$x_x = p\frac{\Sigma_{31}}{\Pi},\quad y_y = p\frac{\Sigma_{32}}{\Pi},\quad z_z = p\frac{\Sigma_{33}}{\Pi},\quad y_z = p\frac{\Sigma_{34}}{\Pi},\quad z_x = p\frac{\Sigma_{35}}{\Pi},\quad x_y = p\frac{\Sigma_{36}}{\Pi}, \tag{8}$$

wo Π die Determinante jener Gleichungen und Σ_{hk} deren $h$tes Element in der $k$ten Columne ist. Die dritte dieser Grössen ist offenbar die Längscompression resp. Dilatation, und folglich der Elasticitätsmodul

$$E = \frac{\Pi}{\Sigma_{33}}. \tag{9}$$

Ferner wird die Querdilatation resp. die Quercontraction in einer Richtung, welche mit der x-Axe den Winkel ρ bildet

$$\begin{aligned} Q &= x_x \cos^2\varphi + y_y \sin^2\varphi + x_y \cos\varphi \sin\varphi \\ &= \frac{p}{\Pi}(\Sigma_{31}\cos^2\varphi + \Sigma_{32}\sin^2\varphi + \Sigma_{34}\sin\varphi\cos\varphi); \end{aligned}$$

sie ist also rings um die z-Axe variabel, ausser wenn $\Sigma_{34} = 0$ und $\Sigma_{31} = \Sigma_{32}$ ist. Dasselbe gilt natürlich auch von dem Verhältniss der Quercontraction zur Längsdilatation

$$\mu = \frac{\Sigma_{31}}{\Sigma_{33}}\cos^2\varphi + \frac{\Sigma_{32}}{\Sigma_{33}}\sin^2\varphi + \frac{\Sigma_{34}}{\Sigma_{33}}\sin\varphi\cos\varphi. \tag{10}$$

Endlich sind noch die Winkeländerungen zu bestimmen, insbesondere die Aenderung ursprünglich rechter Winkel. Die beiden Ebenen, die diesen Winkel bilden, seien

$$\mu x + \nu y + \pi z = 1 \quad \text{und} \quad \mu_1 x + \nu_1 y + \pi_1 z = 1,$$

also die Cosinus der Richtungswinkel ihrer Normalen

$$a = \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2+\nu^2+\pi^2}},\quad b = \frac{\nu}{\sqrt{\mu^2+\nu^2+\pi^2}},\quad c = \frac{\pi}{\sqrt{\mu^2+\nu^2+\pi^2}}$$

und entsprechend a_1, b_1, c_1, so dass ursprünglich

$$aa_1 + bb_1 + cc_1 = 0$$

ist; die Winkeländerung ist alsdann

$$\eta = 2(x_x aa_1 + y_y bb_1 + z_z cc_1) + y_z(bc_1 + cb_1) + z_x(ca_1 + ac_1) + x_y(ab_1 + ba_1). \tag{11}$$

Die Einsetzung der Werthe (8) in diese Gleichungen und die weitere Ausführung derselben liefert freilich schon für die einfacheren Fälle recht complicirte Formeln. Die Mittheilung derselben kann um so eher unterbleiben, als in ihnen die Elasticitätsconstanten in derselben Combination vorkommen wie bei der Biegung und Drillung (s. u.), Beobachtungen von Winkeländerungen also, da sie heikler sind als Biegungs- und Drillungsmessungen und diesen gegenüber nichts neues liefern, nur ganz ausnahmsweise angezeigt erscheinen werden.

Bei der Anwendung obiger Formeln für einseitigen Druck auf ein bestimmtes Krystallsystem muss man, um die dann eintretende Vereinfachung der Gleichungen

[1]) VOIGT, Gött. Abh. 34, pag. 1. 1887. Anfänge der verallgemeinerten Theorie in POISSON's letzter unvollendeter Arbeit: Mém. Acad. 18, pag. 3. 1842. S. ferner ARON, WIED. Ann. 20, pag. 272. 1883. Minnigerode, Gött. Nachr. 1884, pag. 195.

[2]) F. NEUMANN, Vorl. üb. Elast. pag. 179; VOIGT, WIED. Ann. 16, pag. 273 und pag. 416. 1882; sowie 29, pag. 604. 1886.

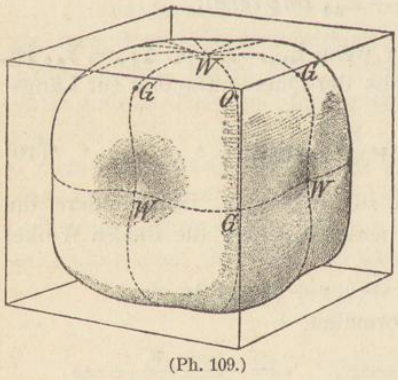
(1a) benutzen zu können, diese auf die Krystallaxen beziehen, daneben aber ein zweites Coordinatensystem einführen, dessen z-Axe die Längs- und Druckaxe ist, und das mit jenem durch die bekannten 9 Cosinus $\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1\ \alpha_2\ \beta_2\ \gamma_2\ \alpha_3\ \beta_3\ \gamma_3$ verknüpft ist; zuweilen genügt es auch, 3 von diesen Grössen, nämlich die Richtungscosinus der Längs- und Druckaxe des Stäbchens in Bezug auf jenes System, die dann kurz $\alpha\ \beta\ \gamma$ heissen mögen, einzuführen.

Beispiel: Reguläres System.[1]) Die drei Elasticitätsconstanten sind hier $c_{11}\ c_{12}\ c_{44}$ (häufig auch ABc oder $AB\varepsilon$ oder $AB\delta$ genannt). Die Dilatationen nach den Krystallaxen ergeben sich

$$\varepsilon_x = \frac{p}{c_{11}-c_{12}}\left(\frac{c_{12}}{c_{11}+2c_{12}} - \alpha^2\right), \quad \varepsilon_y = \frac{p}{c_{11}-c_{12}}\left(\frac{c_{12}}{c_{11}+2c_{12}} - \beta^2\right),$$
$$\varepsilon_z = \frac{p}{c_{11}-c_{12}}\left(\frac{c_{12}}{c_{11}+2c_{12}} - \gamma^2\right),$$

dagegen die Dilatation in der Längs- und Druckrichtung oder gleich ihr $p$ter Theil, also das Reziproke des Elasticitätsmoduls

$$\frac{1}{E} = \frac{c_{12}}{(c_{11}-c_{12})(c_{11}+2c_{12})} - \frac{1}{2c_{44}} - \left(\frac{1}{c_{11}-c_{12}} - \frac{1}{2c_{44}}\right)(\alpha^4+\beta^4+\gamma^4). \quad (12)$$



(Ph. 109.)

Schneidet man also Stäbchen aus regulären Krystallen in den verschiedensten Richtungen heraus, bestimmt man jedes Mal $\frac{1}{E}$ und trägt diese Grösse in der entsprechenden Richtung als Radius auf, so erhält man[2]) eine Oberfläche 4. Ordnung (Fig. 109). In drei Richtungen finden Maxima resp. Minima der Elasticität statt, nämlich senkrecht zur Würfelfläche ein Maximum (oder Minimum), senkrecht zur Oktaëderfläche ein Minimum (oder Maximum), senkrecht zur Granatoëderfläche ein gemischtes Maximum-Minimum; und zwar ist

$$\frac{1}{E_w} = \frac{c_{11}+c_{12}}{(c_{11}-c_{12})(c_{11}+2c_{12})}, \quad \frac{1}{E_o} = \frac{1}{3(c_{11}+2c_{12})} + \frac{1}{3c_{44}},$$
$$\frac{1}{E_g} = \frac{c_{11}}{2(c_{11}-c_{12})(c_{11}+2c_{12})} + \frac{1}{4c_{44}}. \quad (13)$$

Wie man sieht, findet die einfache Beziehung statt:

$$\frac{1}{E_w} + \frac{3}{E_o} = \frac{4}{E_g};$$

die Gleichungen (12) reichen also zur Bestimmung von c_{11}, c_{12}, c_{44} nicht aus. Die Abbildung bezieht sich auf Steinsalz, und zwar nach Versuchen, durch welche Voigt die obigen theoretischen Resultate vollauf bestätigte (s. u.) In ähnlicher Weise lässt sich die Quercontraction und die Winkeländerung verfolgen. Findet der Druck senkrecht zur Würfelfläche oder zur Oktaëderfläche statt, so ergiebt sich μ ringsherum constant und unabhängig von der Richtung der Seitenflächen; und im ersteren Falle wird besonders einfach $\mu = c_{12}/(c_{11}+c_{12})$. Auch die Winkeländerungen werden in bestimmten Fällen gleich null.

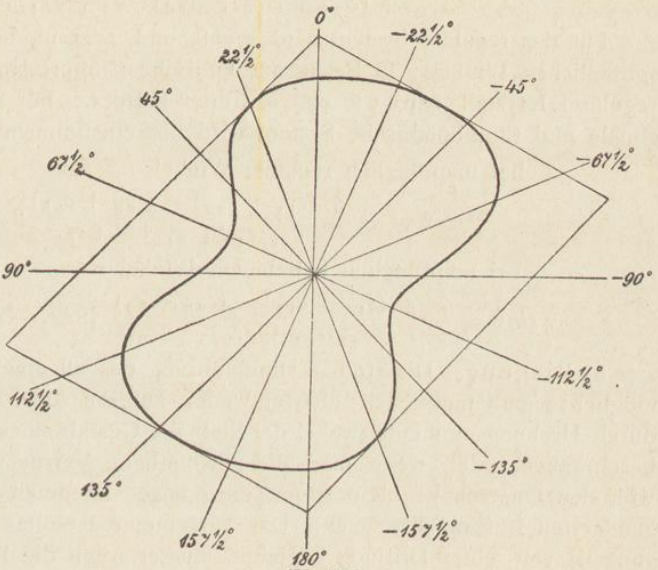
---

[1]) Voigt, Wied. Ann. 35, pag. 642. 1888.

[2]) Voigt, Pogg. Ann. Ergbd. 7, pag. 1 u. 177. 1876 (Fig. 11).

Für die übrigen Krystallsysteme werden die Formeln natürlich complicirter.

Es ist noch zu bemerken, dass die durch Fig. 109 veranschaulichte Darstellung des Verhaltens eines Krystallstäbchens bei Längsdruck zwar die allgemeinste ist, häufig aber durch einfachere ersetzt werden kann. Es genügt nämlich meistens, die Curven anzugeben, in welchen jene Oberfläche von einigen ausgezeichneten Ebenen geschnitten wird; in manchen Fällen und für gewisse Zwecke genügt sogar die Aufzeichnung einer derartigen Curve, z. B. die Curve der Dilatationen bei verschiedener Neigung der Längsaxe des Stäbchens gegen die krystallographische Hauptaxe.[1]) Die Fig. 110 stellt eine solche Curve für einen rhomboëdrischen Krystall, z. B. Kalkspath, dar; die Zahlen geben die erwähnten Neigungswinkel an.[2])



(Ph. 110.)

2) Allseitig gleicher Druck. Die Gleichung (1a) sollen sich jetzt auf die Hauptaxen beziehen, die Determinante heisse jetzt P, und ihr $h \cdot$Element in der $k$ten Reihe S_{hk}. Alsdann findet sich die kubische Dilatation

$$\frac{\delta V}{V} = x_x + y_y + z_z = -\frac{p}{P}[(S_{11} + S_{22} + S_{33}) + 2(S_{23} + S_{31} + S_{12})],$$

und folglich die cubische Compressibilität

$$C = \frac{1}{P}[(S_{11} + S_{22} + S_{33}) + 2(S_{23} + S_{31} + S_{12})];$$

die Umrechnung der S_{11} u. s. w. in die eigentlichen Elasticitätsconstanten c_{11} u. s. w. erfolgt besser in jedem Specialfalle für sich.

Beispiele: a) für das reguläre System wird

$$C = \frac{3}{c_{11} + 2c_{23}}.$$

b) Für das quadratische, hexagonale und rhomboëdrische System wird übereinstimmend

$$C = \frac{c_{11} + 2c_{33} + c_{12} - 4c_{23}}{c_{33}(c_{11} + c_{12}) - 2c_{23}^2}.$$

Die lineare Dilatation wird für jede Richtung eine andere; nur beim regulären System ist sie für alle Richtungen gleich und folglich ein Drittel der obigen kubischen. Für die Aenderung eines ursprünglich rechten Winkels ergiebt sich aus Gleichung (11)

---

[1]) Baumgarten, Pogg. Ann. 152, pag. 369. 1874.

[2]) Eine dritte Darstellungsart hat kürzlich Finsterwalder (Münch. Ber. 1888, pag. 257) angewandt.

$$\eta = -\frac{2p}{P}[(S_{11}+S_{21}+S_{31})aa_1+(S_{12}+S_{22}+S_{32})bb_1+(S_{13}+S_{23}+S_{33})cc_1]$$
$$+\frac{p}{P}[(S_{14}+S_{24}+S_{34})(ab_1+ba_1)+(S_{15}+S_{25}+S_{35})(bc_1+cb_1)$$
$$+(S_{16}+S_{26}+S_{36})(ca_1+ac_1)].$$

Für das reguläre System wird $\eta = 0$, und zwar für beliebige Grösse des ursprünglichen Winkels; in Bezug auf kubische Compression verhält sich also ein regulärer Krystall ganz wie ein isotroper Körper. Für das quadratische, hexagonale und rhomboëdrische System wird übereinstimmend:

bei ursprünglich rechtem Winkel

$$\eta = -\frac{p}{P}\frac{(c_{11}+c_{12})-(c_{33}+c_{23})}{c_{33}(c_{11}+c_{12})-2c_{23}^2}2cc_1,$$

bei ursprünglich beliebigem Winkel φ

$$\eta \sin\varphi = -\frac{p}{P}\frac{(c_{11}+c_{12})-(c_{33}+c_{23})}{c_{33}(c_{11}+c_{12})-2c_{23}^2}[2cc_1-\cos\varphi(c^2+c_1^2)].$$

3) Biegung. Die strenge Durchführung des allgemeinen Problems ist nicht möglich; man muss sich also entweder auf die sogen. gleichförmige Biegung durch Drehungsmomente (wobei der Stab die Gestalt eines Kreisbogens annimmt) beschränken, oder, wenn man die gewöhnliche Versuchsanordnung beibehalten will, den Querschnitt klein gegen die Länge annehmen und sich mit einer angenäherten Lösung begnügen. Das allgemeine Resultat ist folgendes: die Biegung ist von einer Drillung begleitet, ausser wenn die Längsrichtung des Stäbchens normal zu einer Symmetrieebene liegt; in diesem Falle erhält man eine reine Biegung, und zugleich bleiben hier ursprünglich ebene Querschnitte eben. Auf ein solches Stäbchen können demgemäss ohne weiteres die Biegungsformeln für isotrope Medien angewandt werden. Die Senkung der Mitte eines an den Enden unterstützten, in der Mitte belasteten Stäbchens wird angenähert

$$s = \frac{pL^3}{48EQk^2},$$

speciell für rechteckigen Querschnitt

$$s = \frac{pL^3}{4EBD^3},$$

mit der von früher bekannten Bedeutung der Zeichen. Der Zusammenhang zwischen E und den Elasticitätsconstanten braucht nicht von neuem untersucht zu werden, da er schon von der Druckelasticität bekannt ist [z. B. für reguläre Krystalle Gleichung (12)].

4) Drillung. Das Problem ist, wie für isotrope Körper, so auch für Krystalle von St. Venant theilweise behandelt und von Voigt für allgemeinere Fälle durchgeführt worden.[1]) Im allgemeinen ist die Torsion zugleich von einer Biegung begleitet; nur wenn die Längsaxe normal zu einer Symmetrieebene ist, findet reine Drillung statt. Der Drillungswinkel eines rechteckigen Prismas lässt sich dann auf die Form bringen:

$$\psi = \frac{ML}{T\left[\frac{4Qn^2}{3}-n^4 f\left(\frac{m}{n}\right)\right]},$$

[1]) Die von Cauchy und Neumann ausgebildete ältere Theorie hat sich in ihren Endformeln als nicht allgemein anwendbar erwiesen, wohl aber die von St. Venant (Mém. Sav. Etr. 14, pag. 370, 1855), welche zuerst dieser selbst und alsdann Voigt auf Krystalle angewandt hat: Wied. Ann. 16, pag. 294, 1882 (angenäherte Formel) und Wied. Ann. 29. pag. 604, 1886 (strenge Formel).

wo M das tordirende Moment, T der Torsionsmodul, L die Länge, Q der Querschnitt, m die halbe grössere, n die halbe kleinere Querdimension und f eine Funktion von m/n ist, die sich in gewissen Fällen zahlenmässig angeben lässt. Bei gemischter Torsion gilt diese Formel nur noch näherungsweise, nämlich wenn n^2 klein gegen m^2 ist; die genaue Formel ist von VOIGT angegeben worden (s. d.) Bei etwas anderer Schreibweise ergiebt sich aus obigem der Torsionsmodul für das reguläre System, wenn die Kanten des Stäbchens in die Symmetrieaxen fallen:

$$T = \frac{3ML}{\psi d^3 b \left(1 - \frac{3}{16}\lambda \frac{d}{b}\sqrt{\frac{T}{T'}}\right)},$$

wo jetzt d die Dicke, b die Breite des Stäbchens, T' der aus T durch Vertauschung der Querdimensionen hervorgehende Werth und λ eine Funktion ist, die, wenn das Verhältniss der Querdimensionen grösser als 3 ist, merklich constant, nämlich gleich 3·361 ist. Mit den Elasticitätsconstanten hängt T durch die Formel

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{P}[S_{44} + 2(2(S_{11} - S_{12}) - S_{44})(\alpha^2\alpha_1^2 + \beta^2\beta_1^2 + \gamma^2\gamma_1^2)]$$

zusammen, wo $\alpha\beta\gamma$ die Richtungscosinus der Längsrichtung, $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ die der grösseren Querrichtung sind (entsprechend für T''). Die Reduktion der S_{11} u. s. w. auf die eigentlichen Elasticitätsconstanten führt zu sehr complicirten Formeln; speciell für das reguläre System wird

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{c_{44}} - 4\left(\frac{1}{2c_{44}} - \frac{1}{c_{11} - c_{23}}\right)(\alpha^2\alpha_1^2 + \beta^2\beta_1^2 + \gamma^2\gamma_1^2);$$

(entsprechend für T''); ist die Längsrichtung normal zur Würfelfläche, so wird

$$\frac{1}{T_w} = \frac{1}{c_{44}} \quad \text{und auch} \quad \frac{1}{T_w'} = \frac{1}{c_{44}};$$

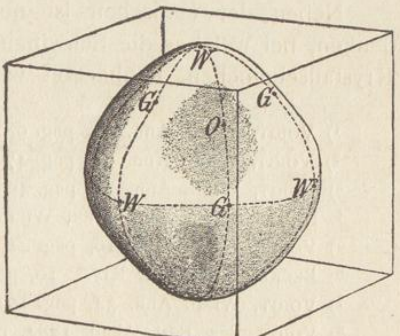
ist die Längsrichtung normal zur Granatoëderfläche, die längere Querrichtung normal zur Würfelfläche, so ist ebenfalls

$$\frac{1}{T_g} = \frac{1}{c_{44}}, \quad \text{dagegen} \quad \frac{1}{T_g'} = \frac{2c_{11} + 3c_{12}}{(c_{11} - c_{12})(c_{11} + 2c_{12})}.$$

Hat das Stäbchen kreisförmigen Querschnitt, so hängt die Torsion nur von der Lage der Längsrichtung gegen die Axen ab,

$$\frac{1}{T} = \frac{2}{c_{44}} + 4\left(\frac{2}{c_{11} - c_{12}} - \frac{1}{c_{44}}\right)(\beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 + \alpha^2\beta^2);$$

man kann alsdann die Torsionsverhältnisse ähnlich wie früher die Elasticitätsverhältnisse durch eine Oberfläche darstellen und erhält, diesmal freilich nur mit angenäherter Gültigkeit, die Fig. 111)[1]. Wie jene Fläche an einen abgerundeten und eingedrückten Würfel, so erinnert diese an ein abgerundetes und eingedrücktes Octaëder. Für die genaue Darstellung, insbesondere nach der neueren, strengeren Torsionsformel, wird man auch hier die Zeichnung ebener Torsionsdiagramme vorziehen.



(Ph. 111.)

[1]) VOIGT, POGG. Ann. Ergbd. 7, Fig. 31.

Aehnliche Formeln gelten für das rhombische[1]), hexagonale[2]) und rhomboëdrische[3]) System.

Beobachtungsmethoden. Dieselben sind im wesentlichen schon oben bei »Zug und Druck« (pag. 237) resp. bei »Biegung und Torsion« (pag. 263 und 269) aufgeführt worden. Am wichtigsten sind einerseits Versuche über kubische Compressibilität, welche zur Kenntniss von C führen, und welche RÖNTGEN und SCHNEIDER[4]) nach der schon erwähnten Piezometermethode angestellt haben, andererseits Versuche über Biegung und Torsion, welche, nach einander an denselben Stäbchen ausgeführt, nicht nur zur Kenntniss von E und T führen, sondern auch zu der aller Elasticitätsconstanten c_{11} u. s. w. führen, mit dem weiteren Vortheil, dass man eine mehr als ausreichende Zahl von Bestimmungen erhält, so dass man entweder Controlwerthe hat oder die geeignetsten Beobachtungen sich auswählen kann; man wird dies in der Weise thun, dass man möglichst viel Daten durch Biegungen und nur den Rest durch Drillungen ermittelt.[5]) Im einzelnen sei noch folgendes bemerkt: Die Dimensionen der Krystallstäbchen resp. der auch zuweilen benutzten Krystallscheibchen[6]) müssen bei ihrer Kleinheit mit besonderer Sorgfalt gemessen werden. Den Querschnitt der Stäbchen nimmt man rechteckig und wählt seine beiden Kanten zur Vereintachung der Theorie (s. o.) einigermaassen verschieden. Ebenso empfiehlt es sich, bei abnehmender Länge der Stäbchen auch Breite und Dicke entsprechend abnehmen zu lassen, weil sonst die gewöhnliche Biegungsformel hinfällig und auch die Anwendbarkeit des WARBURG-KOCH'schen Correktionsgliedes (pag. 271) von VOIGT[7]) bezweifelt wird. Ergeben die Messungen der Dicke an verschiedenen Stellen verschiedene Werthe, so kann man bei den Drillungen einfach die mittlere Dicke, muss aber bei den Biegungen einen anders zu ermittelnden Werth in die Rechnung einführen[8]). In Bezug auf eine Reihe weiterer Vorsichtsmaassregeln, besonders bei der Herstellung, Behandlung und Belastung der Stäbchen, muss auf die betreffenden Untersuchungen verwiesen werden. Die Messung der Biegung selbst geschieht entweder nach der besonders von KOCH[9]) ausgebildeten mikroskopischen Interferenzstreifenmethode oder nach der von VOIGT[10]) ausgebildeten teleskopischen Spiegelungsmethode; die letztere hat den Vortheil, auch gleich zur Messung der Drillungen zu dienen. Die Messungen werden, wenn nur die Hauptwerthe von E und T ermittelt werden sollen, nur an in den Hauptrichtungen geschnittenen Stäbchen ausgeführt, dagegen noch an zahlreichen schiefgeschnittenen, wenn es sich um Zeichnung der Elasticitäts- und Torsionsflächen resp. Curven oder um Ermittelung sämmtlicher Elasticitätsconstanten handelt.

Neben der statischen ist noch kurz der dynamischen Methode zu gedenken, bei welcher die Schwingungen, etwa mit der Hilfe der Klangfiguren auf Krystallscheibchen, beobachtet werden, und welche, von SAVART[11]) angewandt,

---

[1]) VOIGT, WIED. Ann. 34, pag. 981. 1888.
[2]) VOIGT, WIED. Ann. 31, pag. 479. 1887.
[3]) VOIGT, WIED. Ann. 31, pag. 495. 1887.
[4]) RÖNTGEN und SCHNEIDER, WIED. Ann. 31, pag. 1000. 1887.
[5]) VOIGT, WIED. Ann. 16, pag. 416. 1882.
[6]) BECKENKAMP, Z. f. Kryst. 10, pag. 41. 1885.
[7]) VOIGT, WIED. Ann. 34, pag. 1023. 1888.
[8]) VOIGT, Ber. Berl. Akad. 1884, pag. 989.
[9]) KOCH, WIED. Ann. 5, pag. 251. 1878; Freib. Verh. 8, Heft 2. 1881; WIED. Ann. 18, pag. 325.
[10]) VOIGT, WIED. Ann. 31, pag. 474. 1887.
[11]) SAVART, POGG. Ann. 16, pag. 206. 1829.

die erste war, durch welche überhaupt die Elasticität der Krystalle, wenn auch nur qualitativ, untersucht wurde.

Resultate. Es bedeutet: E den Elasticitätsmodul, T den Torsionsmodul, dieselben beiden Grössen mit Indices ihre Werthe in bestimmten Richtungen; s_{11} u. s. w. $= S_{11}/P$ sind die indirekten, aber aus den Beobachtungen zunächst sich ergebenden, c_{11} u. s. w. die wirklichen Elasticitätsconstanten (alles in Kilogrammen); C die kubische Compressibilität, bezw. auf Atmosphären; $\alpha\,\beta\,\gamma$ die Richtungscosinus der Längsaxe, $\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1$ die der grösseren, $\alpha_2\,\beta_2\,\gamma_2$ die der kleineren Querdimension.

A. Reguläres System. 1) Steinsalz.[1])

Beobachter	E_w	E_g	E_o	E_w/E_g	E_g/E_o	T_w
Voigt (1876) .	4103	3410	3193	1·20	1·07	—
„ (1884) .	4186	3482	—	1·20	—	1292
„ (1888) .	4187	3490	3026	1·20	1·15	1294
Koch	4033	3395	—	1·19	—	—
Groth . . .	—	—	—	1·19	—	—

$$\frac{1}{E} = [33{\cdot}48 - 9{\cdot}66\,(\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4)] \cdot 10^{-5}$$

(Kreiscylinder) $$\frac{1}{T} = [154{\cdot}58 - 77{\cdot}28\,(\beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 + \alpha^2\beta^2)] \cdot 10^{-5}$$

$C = 4{\cdot}2 \cdot 10^{-6}$ (Voigt); $= 5{\cdot}0 \cdot 10^{-6}$ (Röntgen u. Schneider)[2]),

$c_{11} = 4770$, $c_{12} = 1320$, $c_{44} = 1294$.

Für Steinsalz ist also die Poisson'sche Beziehung $c_{12} = c_{44}$ nahezu erfüllt; nach Voigt ist also die Polarität der Steinsalzmolekeln sehr gering.

2) Sylvin[3]).

$E_w = 4010$, $E_g = 2088$, $E_w : E_g = 1{\cdot}92$ (Koch)

$E_w = 3724$, $E_g = 1960$, $E_w : E_g = 1{\cdot}90$, $T_w = 655$

$\frac{1}{E} = [75{\cdot}1 - 48{\cdot}2(\alpha^4+\beta^4+\gamma^4)] \cdot 10^{-5}$, hieraus ber. $E_o = 1695$ (Voigt)

$c_{11} = 3750$, $c_{12} = 198$, $c_{44} = 655$, $C = 7{\cdot}45 \cdot 10^{-6}$

$C = 5{\cdot}6 \cdot 10^{-6}$ (Röntgen u. Schneider).

3) Flussspath (Voigt)[4]).

$E_w = 14730$, $E_g = 10080$, $E_o = 9100$, $T_w = 3446$

$$\frac{1}{E} = [13{\cdot}05 - 6{\cdot}26\,(\alpha^4 + \beta^4 + \gamma_4)] \cdot 10^{-5}$$

$c_{11} = 16700$, $c_{12} = 4570$, $c_{44} = 3450$; $C = 1{\cdot}20 \cdot 10^{-6}$.

Die Poisson'sche Beziehung ist hier nicht erfüllt; Flussspath muss also nach Voigt stark polar wirkende Molekeln haben.

4) Pyrit (parallelflächige Hemiëdrie) (Voigt)[5]).

$E_w = 35300$, $E_g = 25300$, $E_o = 23100$ (ber.), $T_w = 10750$; $C = 1{\cdot}14 \cdot 10^{-6}$

$c_{11} = 36800$, $c_{12} = -4830$, $c_{44} = 10750$.

---

[1]) Voigt, Pogg. Ann. Ergbd. 7, pag. 1 u. 177. 1876. — Voigt, Ber. Berl. Akad. 1884, pag. 989. — Voigt, Wied. Ann. 35, pag. 651. 1888. — Koch, Freib. Ber. 8 (2), pag. 1, u. Wied. Ann. 18, pag. 325. 1881. — Groth, Ber. Berl. Akad. 1875, pag. 544.

[2]) Röntgen u. Schneider, Wied. Ann. 31, pag. 1000. 1887.

[3]) Koch, a. a. O. — Voigt, Wied. Ann. 35, pag. 655. 1888. — Röntgen u. Schneider, a. a. O.

[4]) Voigt, Ber. Berl. Akad. 1884, pag. 999; Wied. Ann. 35, pag. 645. 1888; s. auch Klang, Wied. Ann. 12, pag. 321. 1881.

[5]) Voigt, Wied. Ann. 35, pag. 649. 1888.

Pyrit hat also einen überaus grossen (den grössten bisher bekannten) Elasticitätsmodul und ausserdem die merkwürdige Eigenschaft, dass eine der drei Elasticitätsconstanten negativ ist; von Erfüllung der Poisson'schen Beziehung kann also hier gar nicht die Rede sein.

5) Chlorsaures Natron (Koch).[1])

$$E_w = 4047, \quad E_g = 3190, \quad E_w : E_g = 1{\cdot}27.$$

6) Alaune (Beckenkamp)[2]).

Kalialaun: $E_w = 1806$, $E_g = 1987$, $E_w : E_g = 0{\cdot}90$.

Chromalaun: $E_w = 1608$, $E_g = 1771$, $E_o = 1832$, $E_w : E_g = 0{\cdot}90$.

Eisenalaun: $E_g = 1861$.

7) Kupfer (Voigt)[3]).

$$E = 12260, \quad T_1 = 4616, \quad T_2 = 3930$$
$$c_{11} = 13420, \quad c_{12} = 6575, \quad c_{44} = 5590.$$

B. Rhombisches System. Fällt die Längsaxe in eine der drei Hauptaxen, so ist der Index 1, 2, 3, fällt sie in eine der drei Hauptebenen unter 45° gegen die beiden betreffenden Axen, so ist der Index 4, 5, 6 beigefügt, der zweite Index giebt die Richtung der grösseren Querdimension an.

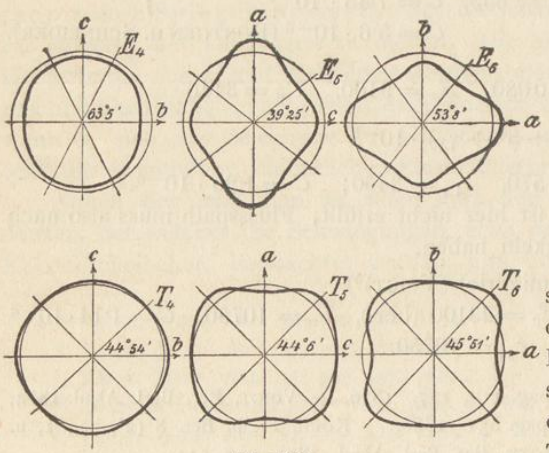
8) Topas (Voigt)[4]).

$E_1 = 23040$, $E_2 = 28900$, $E_3 = 26520$, $E_4 = 26700$, $E_5 = 28930$, $E_6 = 31800$,
$T_{23} = T_{32} = 11040$, $T_{31} = T_{13} = 13530$, $T_{12} = T_{21} = 13360$,

$$\frac{1}{E} = [4{\cdot}341\,\alpha^4 + 3{\cdot}460\,\beta^4 + 3{\cdot}771\,\gamma^4 + 2(3{\cdot}879\,\beta^2\gamma^2 + 2{\cdot}856\,\gamma^2\alpha^2 + 2{\cdot}390\,\alpha^2\beta^2)] \cdot 10^{-}$$

(Kreiscylinder) $$\frac{1}{T} = (14{\cdot}88\,\alpha^4 + 16{\cdot}54\,\beta^4 + 16{\cdot}45\,\gamma^4 + 30{\cdot}89\,\beta^2\gamma^2 + 40{\cdot}89\,\gamma^2\alpha^2 + 43{\cdot}51\,\alpha^2\beta^2) \cdot 10^{-5}.$$

Die Hauptschnitte beider Flächen sind in Fig. 112 gezeichnet.



(Ph. 112.)

$$C = 0{\cdot}61 \cdot 10^{-6}.$$

$$c_{11} = 28700, \quad c_{22} = 35600, \quad c_{33} = 30000$$
$$c_{44} = 11000, \quad c_{55} = 13500, \quad c_{66} = 13300$$
$$c_{23} = 9000, \quad c_{31} = 8600, \quad c_{12} = 12800.$$

Die Poisson'schen Relationen sind hier durchaus nicht erfüllt; die hiernach vorhandene starke Polarität der Topasmolekeln stimmt mit den bekannten pyroelektrischen Eigenschaften des Topases überein.

---

[1]) Koch, a. a. O.

[2]) Beckenkamp, Z. f. Kryst. 1885, pag. 41 u. 1887, pag. 418.

[3]) Voigt, Ber. Berl. Akad. 1883, pag. 961 u. 1884, pag. 1015.

[4]) Voigt, Wied. Ann. 34, pag. 981. 1888. Gött. Nachr. 1887, Nr. 19.

9) Baryt (VOIGT)[1]).

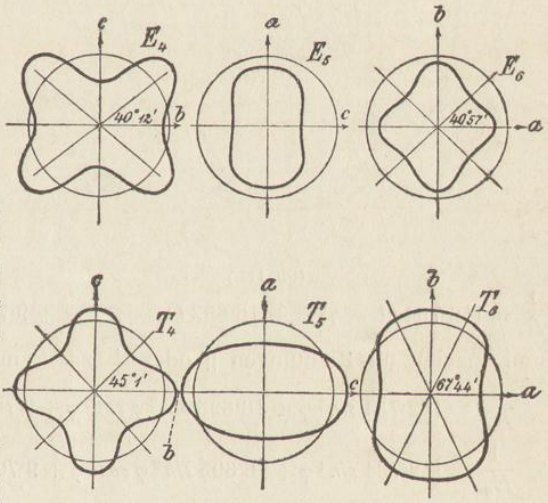
$$E_1 = 6199, \quad E_2 = 5403, \quad E_3 = 9594, \quad E_4 = 3764, \quad E_5 = 7025, \quad E_6 = 7400,$$
$$T_{23} = T_{32} = 1215, \quad T_{31} = T_{13} = 2927, \quad T_{12} = T_{21} = 2828,$$
$$\frac{1}{E} = [16{\cdot}13\alpha^4 + 18{\cdot}51\beta^4 + 10{\cdot}42\gamma^4 + 2(38{\cdot}79\beta^2\gamma^2 + 15{\cdot}21\gamma^2\alpha^2 + 8{\cdot}88\alpha^2\beta^2)] \cdot 10^{-5}$$

(Kreiscylinder) $\frac{1}{T} = [69{\cdot}52\alpha^4 + 117{\cdot}66\beta^4 + 116{\cdot}46\gamma^4 + 2(20{\cdot}16\beta^2\gamma^2 + 85{\cdot}29\gamma^2\alpha^2 + 127{\cdot}35\alpha^2\beta^2)] \cdot 10^{-5}$.

Die Hauptschnitte sind in Fig. 113 dargestellt.

$C = 1{\cdot}93 \cdot 10^{-6}$.

$c_{11} = 9070, \quad c_{22} = 8000,$
$c_{33} = 10740, \quad c_{44} = 1220,$
$c_{55} = 2930, \quad c_{66} = 2830,$
$c_{23} = 2730, \quad c_{31} = 2750,$
$c_{12} = 4680.$



(Ph. 113.)

C. Monoklines System (COROMILAS).[2]) Es sind hier nur die Spaltungsflächen untersucht; es fand sich Grösse und Lage des Maximum und Minimum von E bei

10) Gyps:

$E_{max.} = 8870$ in 21·9° gegen die Hauptaxe,
$E_{min.} = 3130$ „ 75·4° gegen die Hauptaxe.

11) Glimmer: $E_{max.} = 22133$ in der Hauptaxe
$E_{min.} = 15543$ in 45° gegen die Hauptaxe.

D. Hexagonales System. Der Index bedeutet die Neigung der Längsaxe gegen die Hauptaxe.

12) Beryll (Smaragd) (VOIGT)[3]).

$E_0 = 21650, \quad E_{45} = 17960, \quad E_{90} = 23120, \quad T_0 = 6666, \quad T_{90} = 8830$ (letztere Zahl, wenn die kleinere Querdimension in die Hauptaxe fällt). Ferner, wenn φ, φ_1, φ_2 die Winkel der Längs-, Breiten- und Dickenrichtung des Stäbchens gegen die Hauptaxe sind:

$$\frac{1}{E} = (4{\cdot}325\ sin^4\varphi + 4{\cdot}619\ cos^4\varphi + 13{\cdot}328\ sin^2\varphi\ cos^2\varphi) \cdot 10^{-5}$$
$$\frac{1}{T} = (15{\cdot}000 - 3{\cdot}675\ cos^2\varphi_2 - 17{\cdot}536\ cos^2\varphi\ cos^2\varphi_1) \cdot 10^{-5}.$$

In Fig. 114 stellt die Curve E den Werth von $1/E$ bei verschiedenen φ dar,

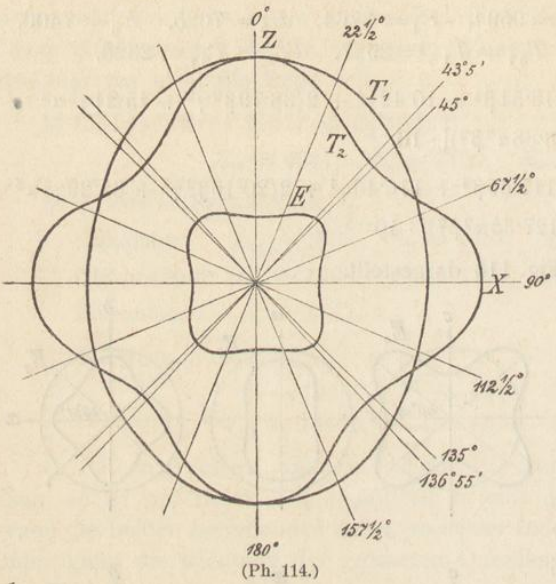
---

[1]) VOIGT, ebenda. Ferner: NIEDMANN, Z. f. Kryst. 1887, pag. 362. Es fand sich: $E_1 = 6500$, $E_2 = 5410$, $E_3 = 8490$, ersterer ziemlich, der zweite Wert gut, der dritte schlecht mit VOIGT überstimmend.

[2]) COROMILAS, Ueb. d. El.-Verh. im Gyps u. Glimmer. Diss. Tüb. 1877 u. Z. f. Kryst. 1, pag. 407.

[3]) VOIGT, WIED. Ann. 31, pag. 474. 1887. Gött. Nachr. 1886, Nr. 3.

die Curven T_1 und T_2 die Werthe von $1/T$, wenn die Längsrichtung in einem Hauptschnitte variirt und entweder die grössere oder die kleinere Querdimension senkrecht zur Hauptaxe bleibt. Endlich wird:



(Ph. 114.)

$$C = 0{\cdot}747 \cdot 10^{-6}.$$
$$c_{11} = 27460,\quad c_{12} = 9800,$$
$$c_{13} = 6740,\quad c_{33} = 24090,$$
$$c_{44} = 6660.$$

Die Poisson'schen Beziehungen sind hier nahe erfüllt, die Polarität also klein.

E. Rhomboëdrisches System.

13) Bergkrystall (Voigt)[1]).

$$E_0 = 10304,\quad E_{-45} = 13050,$$
$$E_{+45} = 8505,\quad E_{90} = 7853,$$
$$T_0 = 5085,\quad T_{90} = 3481,$$

$$\frac{1}{E} = [12{\cdot}734\,(1-\gamma^2)^2 + 16{\cdot}693\,(1-\gamma^2)\,\gamma^2 + 9{\cdot}705\,\gamma^4 - 8{\cdot}460\,\beta\gamma(3\alpha^2-\beta^2)]\cdot 10^{-5},$$

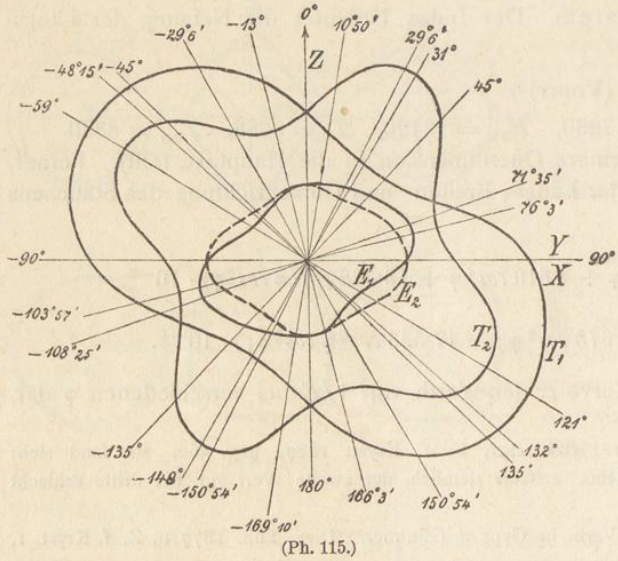
und speciell für Richtungen $\parallel$ oder $\perp$ zur Symmetrieebene:

$$\frac{1}{E_1} = [12{\cdot}734\,sin^4\varphi + 16{\cdot}693\,sin^2\varphi\,cos^2\varphi + 9{\cdot}705\,cos^4\varphi + 8{\cdot}460\,cos\varphi\,sin^3\varphi]\cdot 10^{-5}$$

$$\frac{1}{E_2} = [12{\cdot}734\,sin^4\varphi + 16{\cdot}693\,sin^2\varphi\,cos^2\varphi + 9{\cdot}705\,cos^4\varphi]\cdot 10^{-5}.$$

Ferner:

$$\frac{1}{T} = [19{\cdot}665 + 9{\cdot}060\,\gamma_2^2 + 22{\cdot}984\,\gamma^2\gamma_1^2 - 16{\cdot}920[(\gamma\beta_1 + \beta\gamma_1)(3\alpha\alpha_1 - \beta\beta_1) - \beta_2\gamma_2]]\cdot 10^{-5},$$



(Ph. 115.)

und speciell, wenn die Längs- und die grössere oder kleinere Querdimension in der Symmetrieebene liegt:

$$\frac{1}{T_1} = [19{\cdot}665 + 5{\cdot}746\,sin^2 2\varphi + 8{\cdot}460\,sin 2\varphi\,cos 2\varphi]\cdot 10^{-5}$$

$$\frac{1}{T_2} = [19{\cdot}665 + 9{\cdot}060\,sin^2\varphi - 8{\cdot}460\,sin 2\varphi]\cdot 10^{-5}.$$

Die Elasticitätscurve auf der Basis ist ein Kreis; im übrigen ist das elastische Verhalten des Bergkrystalls durch die vier Curven der Fig. 115 dargestellt. Endlich ist:

[1]) Voigt, Gött. Nachr. 1886, Nr. 3. Wied. Ann. 31, pag. 495 u. 701. 1887.

$$C = 2{\cdot}675 \cdot 10^{-6}.$$

$$c_{11} = 8682, \quad c_{33} = 10745, \quad c_{44} = 5823$$
$$c_{12} = 709, \quad c_{13} = 1438, \quad c_{14} = 1715.$$

14) Kalkspath.

$E_0 = 5010$, $E_{-45} = 4411$, $E_{+45} = 7720$, $E_{90} = 7904$ (BAUMGARTEN [1]).

Die Elasticitätscurve in der Basis ist ein Kreis, die im Hauptschnitt ist schon oben in Fig. 110 dargestellt.

F. AUERBACH.

Stoss.

Allgemeines. Wenn zwei Körper bei ihrer Bewegung mit einander in Berührung kommen, so tritt eine Reihe von Erscheinungen auf, welche man als die Erscheinungen des Stosses zusammenfasst. Bestimmend für dieselben sind die Massen der beiden Körper, ihre Geschwindigkeiten vor dem Stosse nach Grösse und Richtung, ihre Elasticitäts- und zuweilen auch ihre Reibungsverhältnisse, endlich die Lage und Beschaffenheit der Berührungsstellen. Zu ermitteln sind einmal die Geschwindigkeiten nach dem Stosse, und zweitens die Vorgänge und Begleiterscheinungen während der Berührung selbst (Stosszeit, Stossfläche, Stosstiefe, Erwärmung, Schall, dauernde Deformation u. s. w.). Bei Beschränkung auf den ersten Punkt kann man schon durch elementare Betrachtungen (mechanische Theorie) zu Ergebnissen gelangen; dieselben sind aber nur in gewissen Specialfällen erfahrungsgemäss streng richtig, in anderen sind sie es nur näherungsweise, in noch anderen endlich werden sie durch die Beobachtungen widerlegt. Alsdann, und ebenso wenn es sich um Probleme der zweiten Classe handelt, muss die höhere, elastische Theorie zu Grunde gelegt werden, die jedoch ebenfalls, ihrem heutigen Stande nach, die Beobachtung nur in einigen Fällen befriedigend wiedergiebt.

Man unterscheidet zunächst den centralen Stoss, bei welchem im Momente der Berührung die Stossrichtung, d. h. die Verbindungslinie der Schwerpunkte der beiden Körper auf der Tangentialebene senkrecht steht, von dem excentrischen Stoss, bei welchem entweder nur eine oder keine der beiden von den Schwerpunkten nach der Berührungsstelle gezogenen Linien auf der Tangentialebene senkrecht steht. Bei zwei homogenen Kugeln z. B. ist jeder Stoss central, bei Ellipsoiden nur, wenn die Berührung an den Enden der Axen stattfindet u. s. w. Zweitens unterscheidet man den geraden Stoss, bei welchem die vor dem Stosse stattfindenden Bewegungsrichtungen gemeinschaftlich in die Stossrichtung fallen, von dem schiefen Stosse, wo eine oder beide Bewegungsrichtungen mit der Stossrichtung einen Winkel bilden. Beim schiefen excentrischen Stosse können dabei noch verschiedene Möglichkeiten eintreten, auf welche jedoch hier nicht näher eingegangen werden kann. Drittens hat man den Stoss auf einen freien, auf einen drehbaren oder auf einen festen Körper resp. zwischen solchen zu unterscheiden. Endlich werden die Erscheinungen complicirt, wenn die stossenden Körper vor dem Stosse ausser der fortschreitenden auch noch eine drehende (rollende oder kreiselnde) Bewegung haben.

[1]) BAUMGARTEN, Pogg. Ann. 152, pag. 369. 1874. Siehe auch: VATER, Z. f. Kryst. 1886, pag. 549 (auch für Apatit).