

www.e-rara.ch

Traité de mécanique

Poisson, Siméon Denis

Bruxelles, 1838

ETH-Bibliothek Zürich

Shelf Mark: Rar 27562

Persistent Link: <https://doi.org/10.3931/e-rara-66363>

Livre sixième.

www.e-rara.ch

Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien – von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material – from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d'imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L'éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes – des débuts de l'imprimerie jusqu'au 20e siècle.

e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

Nutzungsbedingungen Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titelinformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

Terms of Use This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

Conditions d'utilisation Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

Condizioni di utilizzo Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]

LIVRE SIXIÈME.

HYDRODYNAMIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

ÉQUATIONS GÉNÉRALES DU MOUVEMENT DES FLUIDES.

646. Les équations de l'équilibre des fluides que nous avons trouvées dans le n° 583, sont fondées sur la propriété caractéristique commune aux liquides et aux fluides aériformes, de transmettre également en tous sens les pressions appliquées à leur surface, et d'exercer autour de chaque point de leur masse, en vertu de l'action moléculaire, des pressions égales suivant toutes les directions. Cette propriété, comme nous l'avons dit précédemment (n° 577), tient à ce que les molécules d'un fluide qu'on a comprimé ou dilaté reviennent très promptement à une disposition semblable à celle qui avait lieu primitivement autour d'un point quelconque, de telle sorte qu'après sa compression ou sa dilatation, un fluide est un système de points matériels semblable à ce qu'il était auparavant, et seulement construit sur une plus petite ou une plus grande échelle. Le temps de ce retour à un état semblable n'influe pas sur les lois de l'équilibre, que l'on n'observe jamais qu'après qu'il est écoulé; mais, quelque petit qu'il soit, on comprend qu'il peut influer sur les lois de leur mouvement, surtout dans le cas où les vibrations des molécules fluides s'exécutent avec une grande rapidité; de manière que le principe de l'égalité de pression en tous sens peut convenir à l'Hydrostatique, et n'être pas toujours applicable à l'Hydrodynamique, c'est-à-dire, à la partie de la Mécanique qui traite du mouvement des fluides.

Une différence analogue entre l'état d'équilibre

et l'état de mouvement, a déjà été remarquée par Laplace, relativement à la loi de Mariotte. Cette loi exige que la température du fluide soit redevenue la même, après la compression, qu'elle était auparavant; et le principe de l'égalité de pression en tous sens suppose, de même, que les molécules du fluide ont eu le temps de revenir à une disposition respective semblable à leur disposition première. Elle n'a plus lieu, ou doit être modifiée, dans les vibrations très rapides des gaz, où la température primitive n'a pas le temps de se rétablir; et, de même, le principe de l'égalité de pression en tous sens n'est pas rigoureusement et toujours applicable aux mouvements des liquides et des fluides aériformes. On a reconnu dans la vitesse de propagation du son, l'influence de cette modification de la loi de Mariotte; et il y a sans doute aussi des phénomènes du mouvement des fluides, en général, qui dépendent de la non-égalité parfaite de pression en tous sens, résultant de la cause que nous indiquons. Cette circonstance introduit dans les équations générales du mouvement des fluides, des termes qui ne peuvent se déduire de leurs équations d'équilibre; j'y ai eu égard dans le Mémoire déjà cité (n° 577), et je me propose de revenir, par la suite, sur cette importante considération. Mais dans ce Traité, je supposerai, suivant la méthode qu'on suit ordinairement, la propriété de l'égalité de pression en tous sens, commune à l'état d'équilibre et à l'état de mouvement;

et, dans cette hypothèse, les équations de l'Hydrostatique, fondées sur cette propriété, s'étendront immédiatement à l'Hydrodynamique, au moyen du principe de D'Alembert, qui est applicable à tous les systèmes de points matériels.

647. Considérons de nouveau la masse fluide ABCD (fig. 121), dont nous avons déterminés les équations d'équilibre; supposons maintenant qu'elle soit en mouvement, et que toutes les notations du n° 582 répondent à la fin du temps quelconque t , compté depuis l'origine de ce mouvement. Ainsi, la masse fluide est homogène ou hétérogène, liquide ou aériforme; x, y, z , sont, au bout du temps t , les coordonnées d'un élément quelconque dm de cette masse; ρ représente la densité du fluide qui a lieu en ce point et à cet instant; et Xdm, Ydm, Zdm , sont les composantes parallèles aux axes des x, y, z , de la force motrice de dm à ce même instant. Les quantités X, Y, Z , seront des fonctions données de x, y, z , quand elles proviendront d'attractions ou de répulsions qui émanent de centres fixes; ces fonctions données renfermeront le temps explicitement, quand les centres des forces seront en mouvement. Lorsque ces points seront ceux du fluide, X, Y, Z , seront des fonctions de x, y, z, t , dépendantes de sa figure à chaque instant, et de la loi des densités dans son intérieur.

Les coordonnées x, y, z , varieront avec le temps; elles varieront aussi d'un point à un autre du fluide; et si l'on désigne par x', y', z' , leurs valeurs initiales, c'est-à-dire, les coordonnées du point de l'espace qu'occupait l'élément dm à l'origine du mouvement, les coordonnées x, y, z , de ce même élément au bout du temps t , seront des fonctions inconnues de x', y', z', t : la solution complète du problème consisterait à déterminer ces trois fonctions de quatre variables indépendantes.

Si l'on appelle u, v, w , les composantes parallèles aux axes Ox, Oy, Oz , de la vitesse dont l'élément dm est animé au bout du temps t , on aura

$$u = \frac{dx}{dt}, \quad v = \frac{dy}{dt}, \quad w = \frac{dz}{dt}; \quad (1)$$

on pourra regarder u, v, w , comme des fonctions inconnues, soit de t, x', y', z' , soit de t, x, y, z ; c'est sous ce second point de vue que nous considérerons ces trois quantités; et alors, pour avoir leurs accroissemens dans l'instant dt , il faudra les différentier par rapport à t et par rapport aux coordonnées x, y, z . Or, si l'on désigne par q une fonction quelconque de t, x, y, z , et par $q'dt$ sa différentielle prise par rapport à t et aux variables x, y, z , considérées comme des fonctions de t , on aura, par la règle connue de la différentiation des

fonctions de fonctions,

$$q' = \frac{dq}{dt} + \frac{dq}{dx} \frac{dx}{dt} + \frac{dq}{dy} \frac{dy}{dt} + \frac{dq}{dz} \frac{dz}{dt},$$

ou bien, en ayant égard aux équations (1),

$$q' = \frac{dq}{dt} + u \frac{dq}{dx} + v \frac{dq}{dy} + w \frac{dq}{dz}.$$

En désignant les accroissemens de u, v, w , par $u'dt, v'dt, w'dt$, nous aurons donc

$$u' = \frac{du}{dt} + u \frac{du}{dx} + v \frac{du}{dy} + w \frac{du}{dz},$$

$$v' = \frac{dv}{dt} + u \frac{dv}{dx} + v \frac{dv}{dy} + w \frac{dv}{dz},$$

$$w' = \frac{dw}{dt} + u \frac{dw}{dx} + v \frac{dw}{dy} + w \frac{dw}{dz};$$

et, de cette manière, les composantes de la vitesse d'un même élément dm , dans les deux positions qu'il occupe successivement, seront u, v, w , et $u + u'dt, v + v'dt, w + w'dt$.

Quant à la densité ρ , ce sera une constante donnée, si le fluide est homogène et considéré comme incompressible; s'il s'agit d'un liquide hétérogène, la densité ρ , qui répond à un élément déterminé dm , sera une fonction donnée de ses trois coordonnées initiales x', y', z' ; enfin, si le fluide est compressible, cette densité ρ sera une fonction inconnue de t, x', y', z' , dont la valeur initiale sera seulement donnée. Excepté le cas où ρ est une constante, cette densité, rapportée à la position de dm au bout du temps t , devra toujours être considérée comme une fonction inconnue de x, y, z, t . Si l'on désigne alors par $\rho'dt$, son accroissement pendant l'instant dt , on aura, d'après la formule (2),

$$\rho' = \frac{d\rho}{dt} + u \frac{d\rho}{dx} + v \frac{d\rho}{dy} + w \frac{d\rho}{dz};$$

et dans le cas d'un fluide incompressible, homogène ou hétérogène, cette valeur de ρ' devra se réduire à zéro.

648. Les composantes de la force perdue par l'élément dm pendant l'instant dt , seront

$$(X - u') dm, \quad (Y - v') dm, \quad (Z - w') dm;$$

en substituant donc $X - u', Y - v', Z - w'$, à la place de X, Y, Z , dans les équations (2) du n° 583, il en résultera ces trois équations de son mouvement :

$$\frac{dp}{dx} = \rho (X - u'), \quad \frac{dp}{dy} = \rho (Y - v'), \quad \frac{dp}{dz} = \rho (Z - w');$$

p étant la pression rapportée à l'unité de surface, qui a lieu au bout du temps t , au point qui répond aux coordonnées x, y, z , et qu'on suppose la même suivant toutes les directions.

Si ce point appartient à une paroi fixe, p exprimera la pression normale que cette surface aura à supporter, et qui devra être détruite par sa résistance. Si ce point appartient à la surface libre d'un liquide, il faudra qu'on ait $p = 0$, ou plus généralement, $dp = 0$; en sorte que l'équation différentielle de la surface libre du liquide en mouvement, sera

$$(X - u') dx + (Y - v') dy + (Z - w') dz = 0.$$

D'après la remarque du no 586, il faudra que la valeur de p , quand on l'aura déterminée, soit constamment positive dans l'intérieur de ce liquide, si l'on veut que sa masse ne se divise pas pendant le mouvement : quand elle sera négative en un point d'une paroi, ce qui ne pourra avoir lieu que pour un liquide, cette surface cessera d'être pressée de dehors en dedans, et le liquide s'en détachera.

Au moyen des valeurs de u', v', w' , les équations précédentes deviennent

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} &= X - \frac{du}{dt} - u \frac{du}{dx} - v \frac{du}{dy} - w \frac{du}{dz}, \\ \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} &= Y - \frac{dv}{dt} - u \frac{dv}{dx} - v \frac{dv}{dy} - w \frac{dv}{dz}, \\ \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} &= Z - \frac{dw}{dt} - u \frac{dw}{dx} - v \frac{dw}{dy} - w \frac{dw}{dz}. \end{aligned} \right\} (3)$$

Comme la quantité p qu'elle renferme est, ainsi que chacune des vitesses u, v, w , une fonction inconnue de x, y, z, t , il y faudra joindre une quatrième équation, lorsque la quantité ρ sera une constante donnée, et deux autres équations, dans le cas général où cette quantité est aussi une fonction inconnue de x, y, z, t . Ces équations s'obtiendront de la manière suivante.

649. Chacun des élémens dm de la masse fluide changera de forme pendant l'instant dt , et il changera même de volume, si le fluide est compressible; mais comme sa masse devra toujours rester la même, il s'ensuit que le produit de son volume au

bout du temps $t + dt$, et de sa densité $\rho + \rho' dt$ qui répond au même instant, devra être le même qu'au bout du temps t ; par conséquent, la variation de ce produit dans l'instant dt sera égale à zéro; ce qui fournira une nouvelle équation générale du mouvement.

Pour la former, considérons le parallélépipède rectangle dont le volume était $dx dy dz$, à la fin du temps t , et cherchons la forme que prendra cet élément du fluide à la fin du temps $t + dt$. Soit M (fig. 139) le sommet de ce parallélépipède qui répond aux coordonnées x, y, z ; soient aussi MA, MB, MC , les trois côtés adjacens à ce sommet et respectivement parallèles aux axes Ox, Oy, Oz ; en sorte qu'on ait

$$MA = dx, \quad MB = dy, \quad MC = dz;$$

supposons que D, E, F, G , sont les quatre autres sommets, et que pendant l'instant dt , les huit points M, A, B, C, D, E, F, G , soient transportés en $M', A', B', C', D', E', F', G'$; je dis que le polyèdre dont ces derniers points sont les sommets, sera un parallélépipède obliquangle; et pour le prouver, je vais déterminer et comparer entre elles les longueurs de ses douze côtés $M'A', M'B'$, etc.

Les coordonnées x, y, z , du point M deviennent

$$x + udt, \quad y + vdt, \quad z + wdt,$$

au bout de l'instant dt ; ces quantités sont donc les coordonnées du point M' ; on en déduira celles de tout autre sommet, en y remplaçant x, y, z , par les coordonnées primitives de ce sommet; ainsi, l'on aura les coordonnées de C' , en y conservant x et y , et mettant $z + dz$ à la place de z , parce que $x, y, z + dz$ sont les coordonnées de C . De cette manière, les coordonnées de C' seront

$$\begin{aligned} x + udt + \frac{du}{dz} dz dt, \\ y + vdt + \frac{dv}{dz} dz dt, \\ z + dz + wdt + \frac{dw}{dz} dz dt; \end{aligned}$$

et, en les comparant à celles de M' , on en conclura

$$M'C' = \sqrt{\left(\frac{du}{dz}\right)^2 dz^2 dt^2 + \left(\frac{dv}{dz}\right)^2 dz^2 dt^2 + \left(dz + \frac{dw}{dz} dz dt\right)^2},$$

en extrayant la racine carrée et négligeant les infiniment petits du troisième ordre, on aura donc

$$M'C' = dz + \frac{dw}{dz} dz dt.$$

Les coordonnées de D' se déduiront de celles de M' , et les coordonnées de G' de celles de C' en y mettant $x + dx$ et $y + dy$ à la place de x et y ; par conséquent, la longueur du côté $D'G'$ se déduira de même de celle du côté $M'C'$; ce qui donne

$$D'G' = dz + \frac{dw}{dz} dz dt + \frac{dx}{dz} w dx dz dt + \frac{dy}{dz} w dy dz dt;$$

donc en négligeant les deux derniers termes, qui sont du troisième ordre, la valeur de $D'G'$ sera la même que celle de $M'C'$. On trouvera de la même manière, que les côtés $A'E'$ et $B'F'$ sont égaux au côté $M'C'$, aux quantités près du troisième ordre; en sorte que l'on aura

$$M'C' = A'E' = B'F' = D'G'.$$

Si l'on change z en y , et w en v , dans la valeur de $M'C'$, elle deviendra celle de $M'B'$, savoir :

$$M'B' = dy + \frac{dw}{dy} dy dt;$$

en changeant de même z en x et w en u , on aura la valeur de $M'A'$, qui sera

$$M'A' = dx + \frac{du}{dx} dx dt;$$

et l'on trouvera aussi

$$M'B' = A'D' = C'F' = E'G',$$

$$M'A' = B'D' = C'E' = F'G'.$$

Nous voyons donc que les côtés égaux entre eux dans le parallépipède primitif, sont encore restés égaux après son changement de forme : le parallélisme de ses côtés est une conséquence de leur égalité; par conséquent, l'élément de volume que nous considérons conserve, à la fin de dt , la forme d'un parallépipède, mais qui n'est pas rectangle, comme au commencement de cet instant.

On aura le volume de ce parallépipède oblique en multipliant l'une de ces faces, par exemple, la face $M'A'D'B'$, par la perpendiculaire $C'P'$, abaissée du point C' sur cette face; l'aire du parallélogramme $M'A'D'B'$ est égale au produit de ses deux côtés $M'A'$ et $M'B'$, multiplié par le sinus de l'angle $A'M'B'$; et la perpendiculaire $C'P'$ se déduit du côté $C'M'$, en le multipliant par $\sin C'M'P'$; par conséquent, le volume du nouveau parallépipède aura pour valeur

$$M'A' \cdot M'B' \cdot M'C' \cdot \sin A'M'B' \cdot \sin C'M'P'.$$

Or, les angles $A'M'B'$ et $C'M'P'$ étaient droits dans le parallépipède primitif; chacun d'eux ne peut donc maintenant différer d'un angle droit, que d'une quantité infiniment petite; le sinus de chacun de ces angles ne différera donc de l'unité, que d'un infiniment petit du second ordre; par conséquent, si l'on néglige les infiniment petits du cinquième ordre, il faudra faire $\sin A'M'B' = 1$ et $\sin C'M'P' = 1$, dans le produit précédent; ce qui le réduit à

$$M'A' \cdot M'B' \cdot M'C'.$$

Donc, en mettant pour chacun des facteurs sa valeur précédente, effectuant la multiplication, et négligeant toujours les infiniment petits du cinquième ordre, ce produit sera

$$\left(1 + \frac{du}{dx} dt + \frac{dv}{dy} dt + \frac{dw}{dz} dt\right) dx dy dz.$$

Tel est donc, à la fin du temps $t + dt$, le volume de l'élément qui était $dx dy dz$, à la fin du temps t . En même temps la densité ρ est devenue $\rho + \rho' dt$; en multipliant donc ce volume par $\rho + \rho' dt$, et retranchant du produit la masse primitive $\rho dx dy dz$, on aura la variation de cette masse pendant l'instant dt ; et cette variation devant être nulle, il en résultera l'équation

$$\rho' + \rho \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right) = 0,$$

en négligeant les infiniment petits du cinquième ordre, et supprimant ensuite le facteur $dt dx dy dz$, commun à tous les termes. Par conséquent, d'après la valeur de ρ' du numéro précédent, la quatrième équation du mouvement qu'il s'agissait de former, sera

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{du}{dx} + \rho \frac{dv}{dy} + \rho \frac{dw}{dz} = 0. \quad (4)$$

650. Cette équation appartiendra aux liquides et aux fluides aëriiformes; mais la quantité ρ' étant nulle, dans le cas des liquides regardés comme incompressibles, cette équation se partagera en deux autres, savoir :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{du}{dx} + \rho \frac{dv}{dy} + \rho \frac{dw}{dz} &= 0, \\ \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

En les joignant aux trois équations (3), on aura un nombre d'équations égal à celui des cinq inconnues ρ, p, u, v, w , qu'elles doivent servir à déterminer en fonction de x, y, z, t . Quand le liquide est homogène, la densité ρ est une constante donnée; ce qui réduit les inconnues à quatre, et fait en même temps disparaître la première équation (5).

Relativement aux fluides élastiques, on n'a aussi que quatre équations, savoir, les équations (3) et (4); mais alors la densité est liée à la pression; ce qui réduit à une seule les deux inconnues ρ et p . Si l'on suppose que la température soit la même dans toute la masse du fluide à l'état de repos, les dilatations ou compressions des éléments de ce fluide, qui auront lieu pendant son mouvement, feront varier cette température, et la pression p ne sera plus proportionnelle à la densité ρ , dans l'état de mouvement, comme elle l'est dans l'état d'équilibre. On verra, dans la suite, comment on peut avoir égard à cette circonstance, dans le cas d'un mouvement très rapide. Maintenant je supposerai qu'il s'agisse d'un mouvement assez lent pour qu'elle n'ait aucune influence sensible; en sorte que l'expression de p en fonction de ρ , soit celle qui convient à l'état d'équilibre, savoir (n° 625),

$$p = h\rho(1 + at); \quad (6)$$

θ désignant la température commune à tous les points du fluide, α le coefficient 0,00375 de la dilatation des gaz, et k une constante relative à la matière du fluide que l'on considère.

Lorsque les valeurs de p , u , v , w , auront été déterminées, soit au moyen des cinq équations (3) et (5), soit d'après les cinq équations (3), (4), (6), on en déduira les valeurs des x , y , z , en fonctions de t , et de leurs valeurs initiales x' , y' , z' , au moyen des équations (1). Les intégrales de toutes ces équations aux différences partielles renfermeront des fonctions arbitraires, qui resteront encore à déterminer, d'après l'état initial du fluide, et au moyen de certaines conditions relatives à sa surface dont il sera question plus bas.

651. Quand la température n'est pas la même dans toute la masse fluide à l'origine du mouvement, elle varie ensuite d'un point à un autre, et, pour un même point, d'un instant à l'autre; en sorte que si l'on désigne, au bout du temps t , par θ , la température qui répond aux points dont x , y , z , sont les coordonnées, cette quantité θ est une fonction inconnue de t , x , y , z , et pour la déterminer il faut joindre une nouvelle équation aux précédentes. Cette équation sera différente dans les deux cas d'un liquide et d'un fluide aériforme, que nous allons successivement considérer.

1^o Supposons qu'il s'agisse d'un liquide homogène, tel que l'eau, pour fixer les idées. La température θ variant d'un point à un autre, la densité ρ variera de même, et sera une fonction déterminée de θ , que je représenterai par ρ^θ . La quantité ρ' ne sera plus nulle, et l'équation (4) ne se décomposera plus dans les deux équations (5). La chaleur spécifique du liquide et la mesure de sa conductibilité seront aussi des fonctions déterminées de θ ; mais si l'on suppose que la communication de la chaleur dans l'intérieur de l'eau, ait lieu comme dans un corps solide, par un rayonnement à distance insensible, l'équation relative au mouvement de la chaleur dans un corps hétérogène, que j'ai trouvée autrefois, s'appliquera à la masse d'eau que nous considérons; car elle fait connaître l'accroissement instantané de température qui a lieu en un point quelconque d'un corps, dans lequel la chaleur spécifique et la conductibilité varient arbitrairement d'un point à un autre; et d'après la manière dont elle a été formée, elle ne dépend pas du mouvement du point matériel que l'on considère, non plus que du mouvement des points circonvoisins. Ainsi, en appelant θ'/dt l'accroissement de θ pendant l'instant dt , on aura **

$$g^\theta = \frac{d\theta}{dx} \cdot h - \frac{d\theta}{dy} \cdot h - \frac{d\theta}{dz} \cdot h \quad (7)$$

* Pour la forme de cette fonction, voyez le *Traité de Physique* de M. Biot, tome 1^{er}, chapitre XI.

** *Journal de l'École Polytechnique*, 19^e cahier, page 87.

équation dans laquelle on fera, d'après la formule (2),

$$\theta' = \frac{d\theta}{dt} + u \frac{d\theta}{dx} + v \frac{d\theta}{dy} + w \frac{d\theta}{dz},$$

et où g et h sont des fonctions de θ , qui représentent la chaleur spécifique rapportée à l'unité de masse, et la mesure de la conductibilité. Chacune de ces fonctions est censée connue, ainsi que ρ^θ , de manière que les équations (3), (4), (7), seront en nombre égal à celui des inconnues θ , p , u , v , w , qu'elles renferment. Dans le cas d'un liquide hétérogène, les trois quantités ρ , g , h , relatives au point de la masse dont les coordonnées sont x , y , z , dépendraient de la température θ et de la matière du fluide en ce point, et seraient, par conséquent des fonctions données de θ et des coordonnées initiales x' , y' , z' , de ce même point.

2^o Si le fluide que l'on considère est une masse d'air ou d'un gaz quelconque, dont la température θ varie d'un point à un autre, et que dans l'état de mouvement, la pression soit toujours supposée proportionnelle à la densité, comme dans le n^o précédent, l'équation (6) aura toujours lieu; mais l'équation (7) ne subsistera plus; car elle est fondée sur l'hypothèse que la communication de la chaleur dans l'intérieur du corps se fait par un rayonnement à distance insensible; et, au contraire, la chaleur rayonnante traverse les fluides aériformes, dans de très grandes épaisseurs; en sorte qu'il y a échange de chaleur entre des molécules très éloignées l'une de l'autre. Cette équation devra donc être remplacée par une autre, que l'on joindra aux équations (3), (4), (6), afin d'en avoir un nombre égal à celui des inconnues ρ , p , θ , u , v , w . Dans le problème des vents alisés, par exemple, qui sont produits par les différences de température des couches atmosphériques, on formera cette sixième équation de la manière suivante, qu'il nous suffira maintenant d'indiquer.

La quantité de chaleur reçue pendant l'instant dt , par l'élément quelconque dm de la masse fluide, et qu'on peut supposer proportionnelle à $dm dt$, se compose de la chaleur solaire absorbée par dm pendant cet instant dt , à laquelle il faut d'abord ajouter la chaleur rayonnante que cet élément reçoit, dans ce même instant, d'une partie de la surface de la terre et de la partie de l'atmosphère dont la communication avec dm n'est point interrompue par cette surface, et, en outre, la portion de chaleur qui peut être communiquée à dm par les éléments circonvoisins, comme dans les corps solides. En retranchant de cette somme la quantité de chaleur émise au dehors par l'élément dm , pendant l'instant dt , soit par communication, soit par rayonnement à grande distance, on aura l'augmentation instantanée de la chaleur de dm , que l'on peut représenter par $\Delta dm dt$; Δ étant un coefficient dont je me borne à indiquer l'origine. D'un

autre côté, cette augmentation de chaleur est égale à $g^b dt dm$, en désignant toujours par g et $b^b dt$, la chaleur spécifique rapportée à l'unité de masse, et l'accroissement instantané de température; on aura donc $b^b dm dt = g^b dm dt$, ou $\Delta = g^b$, pour l'équation demandée, qu'on devra substituer à l'équation (7).

652. Avant d'aller plus loin, il y a une remarque importante à faire relativement à l'équation (4).

D'après la manière dont elle a été formée, elle exprime que la masse de l'élément différentiel dm du fluide ne varie pas pendant l'instant dt ; mais c'est pour abrégé que l'on a considéré le volume de cette partie du fluide comme infiniment petit; et si l'on divise le volume total en parties de grandeur finie, mais insensible, dont chacune renferme néanmoins un nombre extrêmement grand de molécules, l'équation (4) exprime réellement que chacune de ces parties renferme toujours les mêmes molécules, et que, par conséquent, sa masse est invariable. C'est pour cela qu'elle est désignée sous la dénomination d'équation de la continuité du fluide. Or, il existe des mouvemens dans lesquels cette continuité n'a pas lieu, et où l'on ne doit plus faire usage de l'équation qui s'y rapporte.

Supposons, par exemple, que de l'eau soit contenue dans un cylindre vertical, ouvert à sa partie supérieure. Si l'on chauffe le liquide par en haut, la température sera croissante, et la densité décroissante, en allant du fond à la surface; la masse fluide s'allongera, les couches horizontales se remplaceront successivement, et l'équation de la continuité s'appliquera à ce mouvement. Mais si le liquide est chauffé par en bas, la densité sera croissante, et la température décroissante de bas en haut: à la rigueur, les couches horizontales pourront encore se remplacer successivement; mais un pareil mouvement ne serait pas stable; et l'observation montre que les molécules d'eau s'élèvent du fond vers la surface, en traversant les couches supérieures. Toutes les parties très petites du liquide ne sont pas constamment formées des mêmes molécules; l'équation (4) n'a donc pas lieu dans ce genre de mouvement; et il est même douteux que les équations (3), fondées sur le principe de l'égalité de pression en tous sens, puissent s'y appliquer; en sorte que, dans l'état actuel de la science, nous n'avons aucun moyen de déterminer le mouvement d'un liquide dont les couches se traversent mutuellement, les unes en montant, les autres en descendant. La même remarque s'applique aux mouvemens verticaux qui peuvent exister dans chaque colonne atmosphérique, dont les couches inférieures, chauffées par le contact avec la terre, et devenues plus légères, s'élèvent en traversant les couches supérieures. La détermination de ces mouvemens, d'un genre différent de ceux qu'on a considérés jusqu'à présent, et leur influence sur les variations diurnes

du baromètre, sont des questions sur lesquelles il importe d'appeler l'attention des géomètres.

653. Dans les mouvemens des fluides que l'on soumet au calcul, on a coutume de supposer que les points qui se trouvent, à une époque déterminée, sur une paroi fixe ou mobile, ou qui appartiennent à la surface libre d'un liquide, demeureront sur cette paroi, ou appartiendront à cette surface, pendant toute la durée du mouvement; en sorte que l'on exclut les mouvemens très compliqués dans lesquels des points d'un fluide, après avoir appartenu à sa superficie, rentreraient dans l'intérieur de la masse, ou réciproquement; et l'on exclut même les cas où des points d'un liquide passeraient alternativement de la surface libre à la surface en contact avec une paroi fixe ou mobile. Ces conditions particulières auxquelles on assujettit les mouvemens que l'on considère, s'expriment par les équations suivantes.

Soient toujours x, y, z , les coordonnées variables d'un point du fluide, et

$$f(x, y, z) = 0,$$

l'équation d'une surface fixe ou mobile qui passe par ce point au bout du temps t , et que nous appellerons S , pour abrégé. Désignons aussi par x', y', z' , les coordonnées initiales du même point; de sorte que x, y, z , soient des fonctions de t, x', y', z' . Si l'on substitue leurs valeurs dans l'équation donnée, elle se changera en

$$F(t, x', y', z') = 0;$$

et tous les points du fluide dont les coordonnées initiales satisferont à cette équation, seront ceux qui appartiennent, au bout du temps t , à la surface S ; par conséquent, pour que ces points soient constamment les mêmes, il faudra que la fonction F ne renferme pas la variable t . Si donc S est la surface libre, ou celle d'une paroi fixe ou mobile, il faudra que la fonction $f(t, x, y, z)$ soit indépendante de t , en y regardant x, y, z , comme des fonctions de ces variables; sa différentielle complète par rapport à t devra donc être nulle; et d'après la formule (2), on aura

$$\frac{df}{dt} + u \frac{df}{dx} + v \frac{df}{dy} + w \frac{df}{dz} = 0, \quad (8)$$

pour exprimer la condition ci-dessus énoncée.

Dans le cas d'une paroi fixe, la fonction f ne renfermera pas explicitement le temps t ; en la représentant par L , de sorte que $L = 0$ soit l'équation donnée par la paroi, l'équation (8) deviendra

$$u \frac{dL}{dx} + v \frac{dL}{dy} + w \frac{dL}{dz} = 0. \quad (9)$$

Si l'on désigne par ξ la résultante des vitesses u, v, w , et par α, ϵ, γ , les angles qu'elle fait avec les directions des x, y, z ; si l'on appelle aussi a, b, c ,

les angles que fait la normale à la paroi avec les mêmes directions, et qu'on fasse

$$\left(\frac{dL}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz}\right)^2 = \lambda^2,$$

on aura, en même temps,

$$u = \zeta \cos \alpha, \quad v = \zeta \cos \epsilon, \quad w = \zeta \cos \gamma,$$

$$\frac{dL}{dx} = \lambda \cos \alpha, \quad \frac{dL}{dy} = \lambda \cos \epsilon, \quad \frac{dL}{dz} = \lambda \cos \gamma;$$

et, en substituant ces valeurs dans l'équation (9), et supprimant ensuite le facteur commun λ , elle deviendra

$$\cos \alpha \cos \alpha + \cos \epsilon \cos \epsilon + \cos \gamma \cos \gamma = 0.$$

Cette équation (9) signifie donc que la vitesse de chaque point de fluide adjacent à une paroi fixe, est normale à cette surface; et, en effet, c'est la condition nécessaire et suffisante pour que ce point ne se détache pas de la paroi, et ne fasse que glisser sur sa surface.

À la surface libre d'un liquide, la pression p est, en général, une quantité constante; mais elle pourrait dépendre de t et être seulement indépendante de x, y, z , si la pression extérieure, commune à tous les points de cette surface, variait avec le temps; en la désignant par T , l'équation de la surface libre sera donc $p - T = 0$; et en mettant $p - T$ à la place de f dans l'équation (8), on aura

$$\frac{dp}{dt} + u \frac{dp}{dx} + v \frac{dp}{dy} + w \frac{dp}{dz} = \frac{dT}{dt}, \quad (10)$$

pour l'équation qui aura lieu en même temps que $p - T = 0$, ou en même temps que l'équation différentielle de la surface libre, qui a été donnée dans le n° 648.

Nous ferons remarquer que les équations (8), (9), (10) auront encore lieu, sans erreur sensible, lorsque les points du fluide ne s'écarteront de sa superficie, que de quantités insensibles. Par conséquent, si l'on considère, comme dans le numéro précédent, une portion du fluide dont les dimensions soient de grandeur finie, mais insensibles, et qui contienne néanmoins un nombre immense de molécules, et si l'on suppose qu'une partie de sa surface appartienne à celle du fluide, à une époque déterminée, ces équations exprimeront, en réalité, que cela aura lieu pendant toute la durée du mouvement. Cette partie commune aux deux surfaces, pourra, d'ailleurs, varier en étendue dans des rapports quelconques; et la petite portion de fluide dont il s'agit, en se déplaçant à la superficie du fluide, pourra s'étendre ou se rétrécir sans que son volume change dans le cas d'un liquide, ou sa masse dans le cas d'un fluide quelconque. Ainsi, par exemple, lorsqu'un liquide pesant oscille dans

un vase ouvert à sa partie supérieure, l'étendue de sa surface libre et celle de sa surface de contact avec les parois du vase varient pendant le mouvement, de sorte que le nombre des points matériels du liquide, qui sont situés à l'une ou l'autre de ces deux surfaces, n'est pas constamment le même; mais les équations (9) et (10) peuvent avoir lieu néanmoins, si l'on considère qu'elles ne répondent pas seulement à des points isolés, mais qu'elles se rapportent à de petites portions du liquide, de grandeur insensible et de forme variable.

Ces équations particulières que Lagrange a introduites dans la théorie des fluides, concourront, dans chaque cas, avec l'état initial du système, à déterminer les fonctions arbitraires qui seront contenues dans les équations du mouvement.

654. Dans un cas très étendu, on peut réduire les trois équations (3) à une équation aux différences partielles du premier ordre, et faire dépendre d'une seule quantité, les trois inconnues u, v, w . Ce cas a lieu, lorsque la formule $u dx + v dy + w dz$ est une différentielle exacte d'une fonction de x, y, z , regardées comme des variables indépendantes, et que le fluide dont on s'occupe est homogène et partout à la même température, dans son état d'équilibre.

Soit alors

$$u dx + v dy + w dz = d\phi;$$

ϕ désignant une fonction inconnue des quatre variables t, x, y, z , mais la différentielle $d\phi$ étant prise seulement par rapport à x, y, z , de sorte qu'on ait

$$u = \frac{d\phi}{dx}, \quad v = \frac{d\phi}{dy}, \quad w = \frac{d\phi}{dz}. \quad (a)$$

D'après la nature des forces X, Y, Z , qui proviennent toujours d'attractions ou de répulsions, dont les centres sont des points fixes ou mobiles, ou les points mêmes du fluide, on a aussi

$$X dx + Y dy + Z dz = dV,$$

et, par conséquent,

$$X = \frac{dV}{dx}, \quad Y = \frac{dV}{dy}, \quad Z = \frac{dV}{dz};$$

V étant une fonction de t, x, y, z , qui n'est différentiée que par rapport à x, y, z . Dans le cas d'un fluide élastique dont la densité est constante

à l'état de repos, l'intégrale $\int \frac{dp}{\rho}$ s'exprimera par

un logarithme, si l'on suppose que la loi de Mariotte ait encore lieu à l'état de mouvement; si l'on tient compte des variations de température qui accompagnent celle de la densité pendant le mouvement, cette intégrale sera une autre fonction de p ; et dans le cas d'un liquide homogène,

elle se réduira à $\frac{1}{\rho}$ p, abstraction faite de la constante arbitraire. Pour comprendre tous ces cas en un seul, je ferai

$$\int \frac{dp}{\rho} = P;$$

il en résultera

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = \frac{dP}{dx}, \quad \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} = \frac{dP}{dy}, \quad \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} = \frac{dP}{dz},$$

et au moyen de ces valeurs et des précédentes, les équations (3) deviendront

$$\frac{dP}{dx} = \frac{dV}{dx} - \frac{d^3 \varphi}{dx dt} - \frac{d\varphi}{dx} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} - \frac{d\varphi}{dy} \frac{d^2 \varphi}{dx dy} - \frac{d\varphi}{dz} \frac{d^2 \varphi}{dx dz},$$

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dV}{dy} - \frac{d^3 \varphi}{dy dt} - \frac{d\varphi}{dx} \frac{d^2 \varphi}{dy dx} - \frac{d\varphi}{dy} \frac{d^2 \varphi}{dy^2} - \frac{d\varphi}{dz} \frac{d^2 \varphi}{dy dz},$$

$$\frac{dP}{dz} = \frac{dV}{dz} - \frac{d^3 \varphi}{dz dt} - \frac{d\varphi}{dx} \frac{d^2 \varphi}{dz dx} - \frac{d\varphi}{dy} \frac{d^2 \varphi}{dz dy} - \frac{d\varphi}{dz} \frac{d^2 \varphi}{dz^2}.$$

Je les ajoute après les avoir multipliées par dx , dy , dz ; il vient

$$dP = dV - d \cdot \frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{2} d \left[\left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy} \right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz} \right)^2 \right];$$

et tous les termes de cette équation étant des différentielles exactes à trois variables x , y , z , on en déduit immédiatement

$$V - P = \frac{d\varphi}{dt} + \left[\left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy} \right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz} \right)^2 \right]. \quad (b)$$

La constante arbitraire qu'on devrait ajouter dans cette intégration, peut être censée contenue dans la quantité inconnue φ , et l'on peut regarder les intégrales V et P comme des quantités entièrement déterminées.

Cette équation, qui remplacera les trois équations (3), fera connaître la valeur de p , quand celle de φ sera déterminée; les équations (a) détermineront aussi les trois inconnues u , v , w ; et quant à la valeur de φ , elle se déduira de l'équation (4), qui devient

$$\frac{d\varphi}{dt} + \frac{d \cdot \varphi}{dx} + \frac{d \cdot \varphi}{dy} + \frac{d \cdot \varphi}{dz} = 0. \quad (c)$$

Dans le cas d'un fluide incompressible, cette équation se réduira à

$$\frac{d^3 \varphi}{dx^2} + \frac{d^3 \varphi}{dy^2} + \frac{d^3 \varphi}{dz^2} = 0;$$

dans le cas d'un fluide aériforme, on y mettra pour ρ sa valeur en fonction de p , et pour p sa valeur tirée de l'équation (b).

655. Pour que la formule $u dx + v dy + w dz$ soit une différentielle exacte pendant toute la durée du mouvement, il faut qu'elle le soit à l'origine, et que les valeurs initiales de u , v , w , qui sont données arbitrairement en fonctions de x , y , z , satisfassent aux conditions d'intégrabilité. Réci-

proquement, on admet qu'il suffit que cette formule soit une différentielle exacte relativement à une valeur déterminée de t , pour qu'elle le soit aussi pour toutes les valeurs de cette quantité; mais cette proposition n'a pas toute la généralité qu'on lui suppose. Voici comment on la démontre.

Soit t_1 une valeur particulière de t ; supposons que pour cette valeur on ait

$$u dx + v dy + w dz = d\varphi_1;$$

φ_1 étant une fonction de x , y , z . Si l'on désigne par ϵ un intervalle de temps infiniment petit, et que le temps t devienne $t_1 + \epsilon$, les quantités u , v , w , varieront aussi; et en supposant que leurs expressions en fonctions de t soient développables, suivant les puissances de ϵ , on aura

$$u = \frac{d\varphi_1}{dx} + u_1, \quad v = \frac{d\varphi_1}{dy} + v_1, \quad w = \frac{d\varphi_1}{dz} + w_1,$$

et, par conséquent,

$$u dx + v dy + w dz = d\varphi_1 + (u_1 dx + v_1 dy + w_1 dz),$$

en désignant par u_1 , v_1 , w_1 , des fonctions de x , y , z . Pour avoir les valeurs des différences partielles $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dw}{dt}$,

qui entrent dans les équations (3), il faudra différencier ces valeurs de u , v , w , par rapport à ϵ ; ce qui donne

$$\frac{du}{dt} = u_1, \quad \frac{dv}{dt} = v_1, \quad \frac{dw}{dt} = w_1.$$

En les substituant avec celles de u, v, w , et de leurs différences partielles relatives à x, y, z , dans ces équations, et supprimant ensuite les termes multipliés par ϵ , il vient

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} &= X - u_1 - \frac{d\phi_1}{dx} \frac{d^2 \phi_1}{dx^2} - \frac{d\phi_1}{dy} \frac{d^2 \phi_1}{dx dy} - \frac{d\phi_1}{dz} \frac{d^2 \phi_1}{dx dz}, \\ \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} &= Y - v_1 - \frac{d\phi_1}{dx} \frac{d^2 \phi_1}{dy dx} - \frac{d\phi_1}{dy} \frac{d^2 \phi_1}{dy^2} - \frac{d\phi_1}{dz} \frac{d^2 \phi_1}{dy dz}, \\ \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} &= Z - w_1 - \frac{d\phi_1}{dx} \frac{d^2 \phi_1}{dz dx} - \frac{d\phi_1}{dy} \frac{d^2 \phi_1}{dz dy} - \frac{d\phi_1}{dz} \frac{d^2 \phi_1}{dz^2}; \end{aligned}$$

d'où l'on tire, d'après les notations précédentes,

$$u_1 dx + v_1 dy + w_1 dz \\ = dV - dP - \frac{1}{2} d \cdot \left[\left(\frac{d\phi_1}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\phi_1}{dy} \right)^2 + \left(\frac{d\phi_1}{dz} \right)^2 \right];$$

et d'où il résulte que la quantité $(u_1 dx + v_1 dy + w_1 dz)\epsilon$, dont s'accroît la formule $u dx + v dy + w dz$ pendant le temps ϵ , sera une différentielle exacte. Par conséquent, cette formule sera une différentielle exacte au bout du temps $t_1 + \epsilon$, puisqu'on suppose qu'elle l'est au bout du temps t_1 ; elle le sera au bout du temps $t_1 + 2\epsilon$, puisqu'elle l'est au bout du temps $t_1 + \epsilon$; et ainsi de suite. Et comme on peut prendre ϵ positif ou négatif, on en conclut que cette formule $u dx + v dy + w dz$ est une différentielle exacte pour toutes les valeurs de t , si l'on s'est assuré qu'elle le soit pour telle valeur qu'on voudra de cette variable.

Mais cette démonstration suppose que les valeurs de u, v, w , qui répondent à $t + \epsilon$, peuvent se développer suivant les puissances de ϵ , ou, ce qui revient au même, elle suppose que les expressions de u, v, w , en fonctions de t , satisfont aux équations du problème et à toutes celles qui s'en déduisent par des différentiations relatives à t . Or, cela n'a pas toujours lieu à l'égard des expressions de u, v, w , en séries d'exponentielles et de sinus ou cosinus, dont les exposants et les arcs sont proportionnels à t ; et la démonstration étant en défaut, la proposition peut aussi être, et elle est effectivement en défaut dans certains cas dont j'ai rencontré des exemples. Dans chaque problème, les expressions de u, v, w , dont il s'agit, satisfont aux équations relatives à la masse et à la surface du fluide en mouvement; en y déterminant convenablement les coefficients des exponentielles et des sinus ou cosinus, elles représentent l'état initial et donné de tous les points du fluide; et si les séries qui en résultent sont d'ailleurs convergentes, cela suffit pour qu'elles renferment la solution de la question, quoiqu'un de leurs caractères particuliers soit de ne pas toujours satisfaire aux équations qui se déduisent de celles du mouvement, par de nouvelles différentiations.

656. La condition d'intégrabilité de la formule $u dx + v dy + w dz$ n'a pas lieu dans le mouvement d'un fluide qui tourne, sans changer de forme, autour d'un axe fixe. En effet, les composantes de la vitesse d'un point quelconque sont alors les mêmes que dans le cas d'un corps solide; en prenant donc l'axe fixe pour celui des z , et désignant par ω la vitesse angulaire de rotation, on aura (n° 388)

$$u = -y\omega, \quad v = x\omega, \quad w = 0;$$

d'où il résulte

$$u dx + v dy + w dz = \omega (x dy - y dx);$$

quantité qui n'est point une différentielle exacte, puisque le facteur ω est indépendant des coordonnées x et y .

Il en résulte que pour déterminer la pression p en un point quelconque, il faudra recourir, dans cet exemple, aux équations (3). Or, en y mettant les valeurs de u, v, w , et considérant ω comme une quantité constante par rapport à t , aussi bien que par rapport à x, y, z , il vient

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = X + \omega^2 x, \quad \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} = Y + \omega^2 y, \quad \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} = Z;$$

d'où l'on tire

$$\frac{1}{\rho} dp = X dx + Y dy + Z dz + \omega^2 (x dx + y dy);$$

équation qui coïncide avec celle qu'on a trouvée dans le n° 590, par la considération de l'équilibre des forces données qui agissent sur tous les points du fluide, et de leurs forces centrifuges résultant de son mouvement de rotation.

CHAPITRE II.

DE LA PROPAGATION DU SON.

657. Il n'entre pas dans le plan de cet ouvrage, de faire connaître les résultats nombreux qui ont été déduits des équations générales du mouvement des fluides qu'on vient de donner; je me contenterai d'indiquer les ouvrages dans lesquels on peut les trouver. Dans le chapitre suivant, je déterminerai le mouvement d'un fluide qui s'écoule dans un vase, d'après une hypothèse particulière et approximative, généralement suffisante pour la pratique; et, dans celui-ci, je prendrai pour exemples de l'application des équations générales, les cas les plus simples de la théorie du son.

1° On trouvera, dans les tomes II et V de la *Mécanique céleste*, tout ce qui est connu jusqu'à présent sur les oscillations de la mer et de l'atmosphère, produites par les attractions de la lune et du soleil.

2° Le tome II de la *Mécanique analytique* renferme la détermination, par le moyen de séries convergentes, du mouvement d'un liquide pesant, soit dans un canal très étroit, soit dans un vase très profond.

3° Relativement aux oscillations de ce liquide dans un vase d'une profondeur quelconque, je renverrai au Mémoire que j'ai inséré, sur ce sujet, dans le tome XIX du Journal de M. Gergonne.

4° Pour le problème de la propagation des ondes à la surface et dans l'intérieur d'une eau stagnante, je renverrai de même à mon Mémoire inséré dans le tome I^{er} de l'Académie des Sciences.

5° Sur l'écoulement des fluides élastiques dans les vases et dans les tuyaux, on pourra consulter le Mémoire de M. Navier, qui fait partie du tome IX de cette Académie.

6° Enfin, pour tout ce qui concerne la théorie du son, et, généralement, la propagation du mouvement dans un milieu élastique ou dans plusieurs milieux superposés, j'indiquerai les Mémoires que j'ai écrits sur ce sujet, et qui font partie du 14^e cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, et des tomes II et X de l'Académie des Sciences.

658. Pour donner une application des équations générales, considérons un fluide élastique homogène, dont la température et la densité soient partout les mêmes dans son état d'équilibre, et qu'on

ait écarté un tant soit peu de cet état, de sorte que pendant tout le mouvement qui en résultera, les vitesses de ses différens points soient très petites, et les condensations ou dilatations dont elles seront accompagnées soient aussi de très petites fractions. Nous négligerons, en conséquence, les carrés et les produits de ces quantités; ce qui réduira les équations du mouvement à la forme linéaire, et permettra d'en obtenir les intégrales sous forme finie. Nous ferons aussi les forces X, Y, Z , égales à zéro, afin que la densité du fluide, dans l'état d'équilibre, soit constante, comme nous le supposons.

Soit D cette densité; ρ étant celle qui a lieu dans l'état de mouvement, au bout du temps t et au point dont les coordonnées sont x, y, z , on aura

$$\rho = D (1 + s),$$

en désignant par s une fraction positive ou négative, qu'on suppose très petite. Soient aussi h et gmh la hauteur et la pression barométriques qui répondent à la densité D ; g représentant la gravité et m la densité du mercure. Dans l'état de mouvement, la pression p , qui répond à la densité ρ , serait $gmh (1 + s)$, d'après la loi de Mariotte, si la température du fluide était invariable; mais, à raison de la condensation positive ou négative s , la température augmente ou diminue; et si le mouvement est assez rapide pour que le fluide n'ait pas le temps de revenir à sa température primitive, la pression variera dans un plus grand rapport que la densité. Nous supposons donc qu'on ait, en général,

$$p = gmh (1 + s + \sigma);$$

σ désignant une quantité de même signe que s , et qui en est une certaine fonction. A cause de la petitesse de s , on peut supposer cette quantité σ proportionnelle à s , et faire

$$\sigma = \epsilon s;$$

ϵ étant un coefficient positif et indépendant de s .

Au moyen de ces valeurs, on aura

$$dp = gmh (1 + \epsilon) ds;$$

et il en résultera

$$\int \frac{dp}{p} = a \log(1 + s),$$

en supposant que l'intégrale s'évanouisse avec s , et faisant, pour abréger,

$$\frac{gmh(1 + \epsilon)}{D} = a^2.$$

Si l'on néglige le carré de s et qu'on prenne cette intégrale pour la valeur de la quantité P comprise dans l'équation (b) du n° 654, on aura

$$P = a^2 s;$$

en négligeant aussi les carrés des vitesses $\frac{d\phi}{dx}, \frac{d\phi}{dy}, \frac{d\phi}{dz}$,

et supprimant le terme V qui provient des forces X, Y, Z , cette équation (b) deviendra

$$s = -\frac{1}{a^2} \frac{d\phi}{dt}; \quad (1)$$

et en la joignant aux équations (a), savoir,

$$u = \frac{d\phi}{dx}, \quad v = \frac{d\phi}{dy}, \quad w = \frac{d\phi}{dz}, \quad (2)$$

ces quatre équations feront connaître la condensation, la grandeur et la direction de la vitesse du fluide, au bout du temps t et au point dont les coordonnées sont x, y, z , lorsque la fonction ϕ aura été déterminée en fonction des x, y, z, t .

Si les déplacements des points du fluide sont aussi supposés très petits, c'est-à-dire, si les points du fluide ne font que de très petites oscillations, et n'ont pas un mouvement commun de translation ou de rotation, les variables x, y, z , différeront très peu des coordonnées initiales x', y', z' , du point auquel elles répondent; on pourra les regarder comme égales à x', y', z' , en intégrant les valeurs de $u dt, v dt, w dt$, pour en déduire, à un instant quelconque, les déplacements de ce point suivant les trois axes des coordonnées; et alors, on aura

$$x - x' = \int u dt, \quad y - y' = \int v dt, \quad z - z' = \int w dt;$$

les intégrales étant prises de manière qu'elles s'évanouissent quand $t = 0$.

Quant à la quantité ϕ , pour obtenir l'équation dont elle dépend, je mets $D(1 + s)$ à la place de p dans l'équation (c) du numéro cité; et en négligeant les produits de s et de $\frac{d\phi}{dx}, \frac{d\phi}{dy}, \frac{d\phi}{dz}$, il vient

$$\frac{ds}{dt} + \frac{d^2 \phi}{dx^2} + \frac{d^2 \phi}{dy^2} + \frac{d^2 \phi}{dz^2} = 0,$$

ou bien, en substituant pour s sa valeur précé-

dente,

$$\frac{d^3 \phi}{dt^2} = a^2 \left(\frac{d^2 \phi}{dx^2} + \frac{d^2 \phi}{dy^2} + \frac{d^2 \phi}{dz^2} \right). \quad (3)$$

Ces équations (1), (2), (3), sont celles de la théorie du son dans un air dont la température et la densité sont constantes. Elles supposent que la formule $u dx + v dy + w dz$ soit une différentielle exacte; ce qui a lieu, effectivement, dans les deux cas particuliers auxquels nous allons les appliquer.

659. Supposons, d'abord, que l'air soit contenu dans un tuyau cylindrique, et que ses points se meuvent parallèlement à l'axe, qui sera horizontal, afin que la pesanteur ne fasse pas varier la densité. En prenant l'axe des x dans cette direction, on aura $v = 0$ et $w = 0$; la quantité ϕ ne sera fonction que de x et t ; et l'équation (3) se réduira à

$$\frac{d^2 \phi}{dt^2} = a^2 \frac{d^2 \phi}{dx^2}.$$

On en déduira les mêmes conséquences que de l'équation (1) du n° 495, relative aux vibrations longitudinales d'une verge élastique. Quand le tuyau se prolongera infiniment, a sera la vitesse de la propagation du son suivant sa longueur; quand il sera terminé, et d'une longueur l , le nombre des vibrations du fluide, dans l'unité de temps, correspondant au son le plus grave, sera en raison inverse de l ; quand le ton s'élèvera, ce nombre croîtra dans le même rapport que celui des nœuds de vibrations; et en désignant par λ la distance comprise entre deux nœuds consécutifs, et par n le nombre correspondant des vibrations, on aura

$$n = \frac{a}{2\lambda}.$$

En ces points, la vitesse des molécules d'air est nulle, et la condensation s ne l'est pas; il y a, au contraire, d'autres points où cette condensation est zéro, et où le fluide est en mouvement. Les distances qui séparent ces autres points sont les mêmes que pour les premiers, comme on peut le voir par les formules du n° 496. Ils jouissent d'une propriété qui sert à les déterminer par l'expérience, et qui n'appartient qu'à eux. Si l'on fait une ouverture à la paroi du tuyau en l'un de ces points où la condensation est nulle, et qu'on établisse la communication avec l'air extérieur, le mouvement du fluide intérieur n'est aucunement changé, non plus que le ton qu'il fait entendre. En prenant pour λ la distance de deux de ces points consécutifs, et pour n le nombre correspondant au ton observé, l'équation précédente fera connaître la valeur de a , et par suite celle de la quantité ϵ contenue dans l'expression de cette vitesse. L'usage, pour cet objet, du ton élevé qui répond à une partie aliquote de l , est préférable à celui du ton

fondamental, qui peut être influencé par le mode d'insufflation du tuyau et par les circonstances relatives à l'embouchure. C'est de cette manière que M. Dulong a déterminé, pour l'air et différents gaz, les valeurs de la quantité γ du n° 638; laquelle quantité est égale à $1 + \epsilon$, comme on le verra tout à l'heure.

660. Pour second exemple, je supposerai que la masse d'air s'étende indéfiniment en tous sens, et qu'elle soit ébranlée semblablement, suivant toutes les directions, autour d'un point fixe que je prendrai pour origine des coordonnées. Si l'on appelle r , au bout du temps t , le rayon vecteur du point qui répond à x, y, z , et ξ sa vitesse, elle sera dirigée suivant ce rayon, et sa grandeur sera une fonction de r et t , ainsi que la condensation s ; car il est évident que tout doit être symétrique autour de l'origine des coordonnées, pendant toute la durée du mouvement. On aura

$$u = \frac{\xi x}{r}, \quad v = \frac{\xi y}{r}, \quad w = \frac{\xi z}{r};$$

et à cause de

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \quad xdx + ydy + zdz = rdr;$$

il en résultera

$$udx + vdy + wdz = \xi dr;$$

en sorte que cette formule sera la différentielle exacte d'une fonction de r et t . Cette fonction étant la quantité ϕ , déterminée par l'équation (3), on aura

$$\xi = \frac{d\phi}{dr},$$

pour la résultante des vitesses u, v, w .

En la différentiant par rapport à x, y, z , on aura aussi

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{d\phi}{dr} \frac{x}{r}, \quad \frac{d\phi}{dy} = \frac{d\phi}{dr} \frac{y}{r}, \quad \frac{d\phi}{dz} = \frac{d\phi}{dr} \frac{z}{r};$$

en différentiant une seconde fois, il vient

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{d^2\phi}{dr^2} \frac{x^2}{r^2} + \frac{d\phi}{dr} \frac{y^2 + z^2}{r^3},$$

$$\frac{d^2\phi}{dy^2} = \frac{d^2\phi}{dr^2} \frac{y^2}{r^2} + \frac{d\phi}{dr} \frac{z^2 + x^2}{r^3},$$

$$\frac{d^2\phi}{dz^2} = \frac{d^2\phi}{dr^2} \frac{z^2}{r^2} + \frac{d\phi}{dr} \frac{x^2 + y^2}{r^3};$$

et, d'après ces valeurs, l'équation (3) devient

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = a^2 \left(\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\phi}{dr} \right),$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\frac{d^2 \cdot r\phi}{dt^2} = a^2 \frac{d^2 \cdot r\phi}{dr^2}. \quad (4)$$

Son intégrale complète est (n° 485)

$$r\phi = f(r + at) + F(r - at);$$

f et F désignant les deux fonctions arbitraires. Si donc on fait

$$\frac{dfz}{dz} = f'z, \quad \frac{dFz}{dz} = F'z,$$

pour une variable quelconque z , on déduira de cette intégrale

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{1}{r} [f'(r + at) + F'(r - at)] \\ &\quad - \frac{1}{r^2} [f(r + at) + F(r - at)], \\ s &= \frac{1}{ar} [F'(r - at) - f'(r + at)]; \end{aligned} \right\} (5)$$

et ces formules feront connaître la vitesse et la condensation en un point et à un instant quelconques, après qu'on aura déterminé les fonctions f et f' pour toutes les valeurs de $r + at$, qui est une variable positive, et les fonctions F et F' pour toutes les valeurs positives ou négatives de $r - at$.

661. Tout étant semblable, par hypothèse, autour de l'origine des coordonnées, il faut que le centre de l'ébranlement du fluide demeure immobile pendant toute la durée du mouvement; il est donc nécessaire que la première formule (5) s'évanouisse avec r ; ce qui exige que, quand ce rayon est infiniment petit, on ait

$$\begin{aligned} f'(r + at) + F'(r - at) &= Tr, \\ f(r + at) + F(r - at) &= T; \end{aligned}$$

T désignant une fonction inconnue de t . En faisant le rayon r tout-à-fait nul dans la première de ces équations et dans sa différentielle par rapport à at , savoir,

$$f'(r + at) - F'(r - at) = \frac{r}{a} \frac{dT}{dt},$$

et mettant z au lieu de at , on aura donc

$$fz + F(-z) = 0, \quad f'z - F'(-z) = 0, \quad (6)$$

mais seulement pour les valeurs positives de z . Ces équations feront connaître les valeurs de $F(-z)$ et $F'(-z)$, d'après celle de fz et $f'z$; en sorte qu'il ne restera plus qu'à déterminer les valeurs de fz , $f'z$, Fz , $F'z$, pour toutes les valeurs positives de z .

Pour cela, soient ψr et $\frac{1}{a} \Psi r$ les valeurs initiales

de ξ et s , de sorte que ψr et Ψr désignent des fonctions données depuis $r = 0$ jusqu'à $r = \infty$, dont la première devra être nulle pour $r = 0$, et qui sont toutes deux de certaines vitesses. En faisant $t = 0$,

dans les équations (5), nous aurons

$$\begin{aligned} \psi r &= \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} fr \right) + \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} Fr \right), \\ r \psi r &= \frac{dFr}{dr} - \frac{dfr}{dr}; \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r} fr + \frac{1}{r} Fr &= \psi_1 r + b, \\ Fr - fr &= \psi_1 r + c; \end{aligned} \right\} (7)$$

en représentant par b et c deux constantes arbitraires, et faisant

$$\int \psi_1 r dr = \psi_1 r, \quad \int r \psi_1 r dr = \psi_1 r;$$

on pourra supposer que ces deux intégrales s'évaluent pour telle valeur qu'on voudra de r ; nous prendrons tout à l'heure $r = \infty$ pour cette valeur.

Si l'on a seulement égard aux constantes b et c , les équations précédentes donneront

$$fr = \frac{1}{2} br - \frac{1}{2} c, \quad f'r = \frac{1}{2} b,$$

$$Fr = \frac{1}{2} br + \frac{1}{2} c, \quad F'r = \frac{1}{2} c;$$

on en conclut

$$f(r+at) = \frac{1}{2} b(r+at) - \frac{1}{2} c,$$

$$f'(r+at) = \frac{1}{2} b;$$

pour $r > at$, on aura aussi

$$F(r-at) = \frac{1}{2} b(r-at) + \frac{1}{2} c,$$

$$F'(r-at) = \frac{1}{2} b;$$

pour $r < at$, on aura

$$f(at-r) = \frac{1}{2} b(at-r) - \frac{1}{2} c,$$

$$f'(at-r) = \frac{1}{2} b;$$

et en vertu des équations (6) il en résultera

$$F(r-at) = \frac{1}{2} b(r-at) + \frac{1}{2} c,$$

$$F'(r-at) = \frac{1}{2} b,$$

comme dans le cas de $r > at$. Or, en substituant ces différentes valeurs dans les formules (5), on trouvera qu'elles se réduisent à zéro; de sorte que les deux constantes arbitraires b et c disparaissent des expressions de ξ et s .

En en faisant donc abstraction, et mettant z au lieu de r dans les équations (7) et dans leurs diffé-

rentielles, il vient

$$\left. \begin{aligned} fz &= \frac{1}{2} z \psi_1 z - \frac{1}{2} \psi_1 z, \\ f'z &= \frac{1}{2} \psi_1 z + \frac{1}{2} z (\psi_1 z - \psi_1 z), \\ Fz &= \frac{1}{2} z \psi_1 z + \frac{1}{2} \psi_1 z, \\ F'z &= \frac{1}{2} \psi_1 z + \frac{1}{2} z (\psi_1 z + \psi_1 z), \end{aligned} \right\} (8)$$

pour les valeurs qui restaient à trouver.

Les formules (5) ne contiendront plus rien d'inconnu, et renfermeront, par conséquent, la solution complète du problème. On peut remarquer que rien, dans la question, ne pourrait servir à déterminer les valeurs de $f(-z)$, dont les formules (5) n'exigent pas la connaissance.

662. Voici maintenant les conséquences relatives à la théorie du son, qui se déduisent de ces formules.

Soit ϵ le rayon de l'ébranlement primitif, en sorte que ψr et ψr aient des valeurs données arbitrairement depuis $r=0$ jusqu'à $r=\epsilon$, et soient zéro depuis $r=\epsilon$ jusqu'à $r=\infty$. Les intégrales $\psi_1 r$ et $\psi_1 r$ seront des quantités constantes pour toutes les valeurs de z qui surpassent ϵ ; et comme on les suppose nulles pour $r=\infty$, elles le seront aussi depuis $r=\epsilon$ jusqu'à $r=\infty$.

Cela posé, si l'on considère d'abord un point du fluide compris dans l'étendue de l'ébranlement primitif, on aura $r < \epsilon$. Tant que t sera moindre que

$\frac{\epsilon-r}{a}$, les valeurs de $f(r+at)$ et $f'(r+at)$ ne seront

pas nulles, et on les déduira des équations (8); il en sera de même à l'égard des valeurs de $F(r-at)$ et

$F'(r-at)$, tant qu'on aura $t < \frac{r}{a}$; quand t sur-

passera $\frac{r}{a}$, celles-ci se déduiront de celles de $f(at-r)$

et $f'(at-r)$, au moyen des équations (6); enfin,

quand le temps t sera devenu plus grand que $\frac{r+\epsilon}{a}$

tous les termes des formules (5) seront nuls, et tous les points contenus dans l'étendue de l'ébranlement primitif seront revenus à l'état de repos. Ainsi, pour tous les points compris dans la sphère dont le rayon est ϵ , la durée du mouvement décroîtra, du

centre à la surface, entre les limites $\frac{\epsilon}{a}$ et $\frac{2\epsilon}{a}$.

En dehors de l'ébranlement primitif, on aura $r+at > \epsilon$; ce qui fera disparaître $f(r+at)$ et $f'(r+at)$ des formules (5), et les réduira à

$$\xi = \frac{1}{r} F'(r-at) - \frac{1}{r^2} F(r-at),$$

$$s = -\frac{1}{ar} F'(r-at),$$

quand on a $r > at$, ou bien, en vertu des équations (6), à

$$\xi = \frac{1}{r} f'(at - r) + \frac{1}{r^2} f(at - r),$$

$$s = -\frac{1}{ar} f'(at - r),$$

lorsqu'on a $at > r$. Les valeurs des quantités comprises dans ces expressions de ξ et s seront données par les formules (8); elles seront nulles tant qu'on aura $r > at + \epsilon$, et le redeviendront dès qu'on aura $r < at - \epsilon$; d'où l'on conclut que le son se propagera à l'air libre avec la même vitesse a que dans l'intérieur d'un tuyau cylindrique; que le mouvement de chaque molécule d'air subsistera

pendant un intervalle de temps égal à $\frac{2a}{a}$, et que la

largeur de l'onde sonore sera égale au diamètre $2a$ de l'ébranlement primitif.

A une grande distance du centre de cet ébranlement, on pourra négliger les seconds termes des valeurs de ξ , qui sont divisés par r^2 , par rapport aux premiers qui ne le sont que par r ; on aura alors, pendant toute la durée du mouvement,

$$\xi = \frac{f}{a},$$

comme dans le n° 498, où s représentait la dilatation au lieu de la condensation. La vitesse propre des molécules d'air décroîtra alors en raison inverse de r . On suppose l'intensité du son proportionnelle au carré de cette vitesse; en sorte qu'à une grande distance du lieu de l'ébranlement primitif, elle décroîtra en raison inverse du carré de cette distance; ce qui paraît conforme à l'expérience.

Ces résultats ont encore lieu, lorsque l'ébranlement n'est pas le même en tous sens. A une distance considérable par rapport à son diamètre, la vitesse du son est uniforme et égale à la constante a , les ondes ont une forme à peu près sphérique, et, suivant la direction de chaque rayon, l'intensité du son varie en raison inverse du carré de la distance, quelle que soit, d'ailleurs, sa variation en passant d'un rayon à un autre. Cette intensité décroît aussi avec la densité du milieu où le son est produit; en sorte que, par exemple, elle diminue à mesure qu'on approche du sommet d'une haute montagne. En considérant la propagation du son dans un air composé de couches de différentes densités, on trouve qu'à distance égale, son intensité ne dépend que de la densité au lieu de l'ébranlement primitif; d'où il résulte qu'une personne placée dans un ballon, doit entendre le bruit qu'on fait à la surface de la terre, comme si elle était à cette surface; tandis que le bruit qu'elle ferait serait entendu, à cette surface, comme si l'on était dans la couche atmosphérique où se trouve l'aérostat.

Si l'intensité du son dépend de la grandeur des vitesses des molécules d'air qui frappent l'organe de l'ouïe, si l'élévation du ton est réglée sur le nombre de ces coups dans un même temps, c'est-à-dire, sur la répétition plus ou moins fréquente des vibrations de l'air, on peut se demander ce qui fait la différence d'une syllabe à une autre, chantées avec une même force et sur un même ton. Selon Euler, cette différence doit être attribuée à la forme de la fonction qui exprime la loi des vitesses successives de l'air pendant chaque vibration; de manière que l'organe de la voix aurait la faculté de donner à cette fonction la forme convenable, et l'organe de l'ouïe, la faculté d'en apprécier les formes diverses.

663. Sans que la forme de l'équation (4) soit changée, on peut transporter l'origine des coordonnées en d'autres points du fluide. D'après cela, si l'on désigne par r, r_{II}, r_{III} , etc., les rayons vecteurs d'un même point, comptés de ces diverses origines, et si l'on suppose successivement que ϕ soit fonction de t et de chacun de ces rayons, on satisfera à l'équation (4) au moyen de la valeur de ϕ du n° 660, et des valeurs qui s'en déduisent, en y mettant r, r_{II}, r_{III} , etc., au lieu de r , et changeant à chaque fois les fonctions arbitraires. A cause de la forme linéaire de cette équation, on y satisfera donc aussi en prenant pour ϕ la somme de toutes ces valeurs particulières, ce qui donne

$$\begin{aligned} \phi = & \frac{1}{r} [f(r + at) + F(r - at)] \\ & + \frac{1}{r_I} [f(r_I + at) + F(r_I - at)] \\ & + \frac{1}{r_{II}} [f(r_{II} + at) + F(r_{II} - at)] \\ & + \text{etc.} \end{aligned} \quad (9)$$

Or, on conclura de cette formule, que si l'air est ébranlé simultanément autour de chacune des origines de r, r_I, r_{II} , etc., la condensation $\frac{d\phi}{dt}$ en un point et à un instant quelconques, qui sera toujours donnée par l'équation (1), aura pour valeur la somme des condensations qui auraient lieu en vertu de tous ces ébranlements isolés. De plus, en vertu des équations (2), les composantes de la vitesse au bout du temps t , et en un point M, dont x, y, z , sont les coordonnées par rapport à l'origine de r , auront pour expressions

$$\begin{aligned} u = \frac{d\phi}{dx} &= \frac{d\phi}{dr} \frac{dr}{dx} + \frac{d\phi}{dr_I} \frac{dr_I}{dx} + \frac{d\phi}{dr_{II}} \frac{dr_{II}}{dx} + \text{etc.}, \\ v = \frac{d\phi}{dy} &= \frac{d\phi}{dr} \frac{dr}{dy} + \frac{d\phi}{dr_I} \frac{dr_I}{dy} + \frac{d\phi}{dr_{II}} \frac{dr_{II}}{dy} + \text{etc.}, \\ w = \frac{d\phi}{dz} &= \frac{d\phi}{dr} \frac{dr}{dz} + \frac{d\phi}{dr_I} \frac{dr_I}{dz} + \frac{d\phi}{dr_{II}} \frac{dr_{II}}{dz} + \text{etc.}; \end{aligned}$$

les différences partielles $\frac{d\phi}{dr}, \frac{d\phi}{dr_i}, \frac{d\phi}{dr_{ii}}$, etc., étant prises en regardant r, r_i, r_{ii} , etc., comme des variables indépendantes. Mais si l'on appelle x, y, z , les coordonnées de M rapportées à l'origine de r_i et à des axes parallèles à ceux des x, y, z , ces coordonnées x, y, z , ne différeront de x, y, z , que d'une quantité constante; de sorte que l'on aura

$$\frac{dr_i}{dx} = \frac{dr_i}{dx_i} = \frac{x_i}{r_i}, \quad \frac{dr_i}{dy} = \frac{dr_i}{dy_i} = \frac{y_i}{r_i}, \quad \frac{dr_i}{dz} = \frac{dr_i}{dz_i} = \frac{z_i}{r_i};$$

on aura de même

$$\frac{dr_{ii}}{dx} = \frac{x_{ii}}{r_{ii}}, \quad \frac{dr_{ii}}{dy} = \frac{y_{ii}}{r_{ii}}, \quad \frac{dr_{ii}}{dz} = \frac{z_{ii}}{r_{ii}},$$

en désignant par x_{ii}, y_{ii}, z_{ii} , les coordonnées du même point, dont l'origine est celle de r_{ii} ; et ainsi de suite. Les formules précédentes deviendront donc

$$u = \frac{d\phi}{dr} \frac{x}{r} + \frac{d\phi}{dr_i} \frac{x_i}{r_i} + \frac{d\phi}{dr_{ii}} \frac{x_{ii}}{r_{ii}} + \text{etc.}$$

$$v = \frac{d\phi}{dr} \frac{y}{r} + \frac{d\phi}{dr_i} \frac{y_i}{r_i} + \frac{d\phi}{dr_{ii}} \frac{y_{ii}}{r_{ii}} + \text{etc.},$$

$$w = \frac{d\phi}{dr} \frac{z}{r} + \frac{d\phi}{dr_i} \frac{z_i}{r_i} + \frac{d\phi}{dr_{ii}} \frac{z_{ii}}{r_{ii}} + \text{etc.};$$

d'où l'on conclut que la résultante de u, v, w ,

sera la même que celle des vitesses $\frac{d\phi}{dr}, \frac{d\phi}{dr_i}, \frac{d\phi}{dr_{ii}}$, etc.,

dirigées suivant les rayons vecteurs r, r_i, r_{ii} , etc., et, par conséquent, en vertu de la formule (9), la même, en grandeur et en direction, que si tous les ébranlements autour des centres de ces rayons avaient lieu isolément; ce qui s'accorde avec le principe de la superposition des petits mouvements.

664. Cette formule (9) servira aussi à déterminer la réflexion du son sur un plan fixe.

Pour cela, supposons que la masse d'air soit terminée par un plan fixe AB (fig. 140), et que l'ébranlement primitif ait lieu autour du point C , origine du rayon vecteur r , et ne se soit pas étendu jusqu'au plan AB . De ce point, abaïssons la perpendiculaire CD sur ce plan; prolongeons-la d'une quantité DC_1 , égale à CD ; supposons que C_1 soit l'origine de r_i ; et prenons la droite CC_1 , pour axe des x et x_i . En appelant h la longueur de CD , on aura $x = h$ et $x_i = -h$, pour tous les points du plan AB ; pour ces valeurs de x et x_i , il faudra donc que la vitesse u , perpendiculaire à ce plan, soit constamment nulle (n° 653). Or, on satisfera à cette condition et à l'état initial du fluide, en prenant pour ϕ la for-

mule (9) réduite à ses deux premiers termes, savoir:

$$\phi = \frac{1}{r} [f(r + at) + F(r - at)] + \frac{1}{r_i} [f_i(r_i + at) + F_i(r_i - at)],$$

et déterminant convenablement les fonctions arbitraires f, F, f_i, F_i .

En effet, on déterminera les deux premières, comme précédemment, d'après l'état initial du fluide autour du point C ; les points qui répondent à $r_i < h$, n'appartenant pas au fluide, on pourra donner telle valeur qu'on voudra à chacune des fonctions f_i, r_i et F_i, r_i sans altérer cet état initial; on pourra donc prendre pour les fonctions indiquées par f_i , et F_i les mêmes fonctions qu'on aura trouvées pour celles dont les indices sont f et F ; la formule précédente deviendra alors

$$\phi = \frac{1}{r} [f(r + at) + F(r - at)] + \frac{1}{r_i} [f(r_i + at) + F(r_i - at)], \quad (10)$$

et ne renfermera plus rien d'inconnu. De plus, pour tous les points du plan AB , on a $r_i = r$; on aura donc $\frac{d\phi}{dr} = \frac{d\phi}{dr_i}$; et comme on a aussi pour ces mêmes points $x = h$ et $x_i = -h$, il en résultera $u = 0$; en sorte que la formule (10) représentera l'état initial du fluide, et remplira la condition relative aux points adjacens au plan AB ; ce qu'il s'agissait d'obtenir.

Soit M le point du fluide dont les rayons vecteurs CM et C_1M sont r et r_i ; en vertu des deux parties de la formule (10), ce point sera d'abord ébranlé au

bout d'un temps égal à $\frac{r-h}{a}$, et ensuite au bout

d'un temps égal à $\frac{r_i-h}{a}$, en désignant toujours

par e le rayon de l'ébranlement primitif. Le premier mouvement produira le son direct, et le second le son réfléchi. Celui-ci sera le même que si le plan AB n'existait pas, et qu'un second ébranlement identique avec celui qui a lieu autour du point C , ait eu lieu simultanément autour du point C_1 . Il se propagera avec la même vitesse a que le son direct, et aura l'intensité correspondante à la distance C_1M , ou à la ligne brisée CEM , en supposant que E soit le point où le rayon C_1M coupe le plan AB . Enfin EF étant la normale à ce plan, les deux parties CE et ME du rayon sonore qui se réfléchit au point E , feront l'angle d'incidence CEF égal à l'angle de réflexion MEF . Ainsi, il résulte de la formule (10)

que les lois de la réflexion du son sur un plan fixe sont exactement les mêmes que celles de la lumière.

665. Comparons maintenant la vitesse a , donnée par la théorie, à celle qui a été déterminée par l'expérience; et pour cela, voyons d'abord ce que signifie la quantité ϵ contenue dans son expression.

D'après les valeurs de ρ , p , σ , du n° 658, on a

$$p = \frac{gmh\rho(1+s+\epsilon s)}{D(1+s)},$$

ou plus simplement

$$p = \frac{gmh}{D} \rho(1+\epsilon s), \quad (a)$$

en négligeant le carré de s . Supposons que η soit l'augmentation de température qui répond à cette condensation s ; de sorte que la température, qui était θ dans l'état d'équilibre, devienne $\theta + \eta$ au bout du temps t , dans l'état de mouvement. A cet instant, la pression p , la densité ρ et la température $\theta + \eta$, auront lieu simultanément; d'après l'équation (1) du n° 625, on aura donc

$$p = k\rho[1 + \alpha(\rho + \eta)],$$

en désignant par k un coefficient indépendant de la densité et de la température, et par α le coefficient 0,00375 de la dilatation des gaz. Dans l'état d'équilibre, on a

$$p = gmh, \quad \rho = D, \quad \eta = 0;$$

appliquée à cet état, l'équation précédente sera donc

$$gmh = kD(1 + \alpha\theta);$$

par conséquent, on aura, dans l'état de mouvement,

$$p = \frac{gmh}{D} \rho \left(1 + \frac{\alpha\eta}{1 + \alpha\theta}\right);$$

et, en comparant cette valeur de p à la formule (a), il en résultera

$$\epsilon = \frac{\alpha\eta}{(1 + \alpha\theta)s}.$$

Or, si l'on suppose les vibrations de l'air assez rapides pour que la condensation s ait lieu sans aucune perte de chaleur, on pourra mettre s et η à la place de δ et ω dans l'équation (5) du n° 637; ce qui donne

$$1 + \epsilon = \gamma;$$

γ étant le rapport de la chaleur spécifique de l'air sous une pression constante, à sa chaleur spécifique sous un volume constant.

La valeur de a^2 du n° 658 deviendra, de cette manière,

$$a^2 = \frac{gmh\gamma}{D}.$$

Si l'on appelle Δ la densité de l'air sous la pression gmh et à la température zéro, on aura (n° 625)

$$D = \frac{\Delta}{1 + \alpha\theta},$$

et par conséquent,

$$a = \sqrt{\frac{gmh\gamma}{\Delta}(1 + \alpha\theta)}. \quad (b)$$

Puisque la quantité γ est regardée comme indépendante de la température et de la pression (n° 638), on voit, 1° que la vitesse a croîtra avec la température θ dans le rapport de $\sqrt{1 + \alpha\theta}$ à l'unité; 2° qu'elle ne variera pas avec les hauteurs barométriques, puisque h et Δ croissent en même temps et dans le même rapport. Les académiciens français envoyés au Pérou, pour la mesure d'un arc du méridien, ont, en effet, trouvé à peu près la même vitesse du son à Quito, où la pression barométrique n'était pas tout-à-fait de 0^m,55, qu'à Paris, où elle s'élève à 0^m,76. L'état hygrométrique de l'air doit influer un peu sur la valeur de α : la densité diminuant, toutes choses d'ailleurs égales, à mesure que l'air contient une plus grande quantité de vapeur, la vitesse a augmentera avec le degré d'humidité; mais d'après les données du n° 632, à la température de 18°,75, par exemple, la densité de l'air sec excède à peine de $\frac{1}{125}$, celle de l'air chargé du *maximum* de vapeur; ce qui ne fait qu'une variation de $\frac{1}{250}$ pour la vitesse du son dans ces deux états extrêmes de l'hygromètre.

Dans l'expérience la plus récente que l'on a faite sur la vitesse du son, les commissaires du Bureau des Longitudes ont trouvé

$$a = 340^m,89;$$

en prenant la seconde pour unité, et la température de l'air étant 15°,9 du thermomètre centigrade. Or, si l'on fait dans la formule (b)

$$g = 9^m,80890, \quad h = 0^m,76, \quad \frac{m}{\Delta} = 10,462,$$

$$\alpha = 0,00375, \quad \theta = 15^{\circ},9, \quad \gamma = 1,3748,$$

on en déduit

$$a = 337^m,07;$$

ce qui diffère peu du résultat de l'observation. En prenant (n° 638),

$$\gamma = 1,421,$$

et conservant toutes les autres données, on trouve

$$a = 342^m,69,$$

dont la différence avec l'observation est en sens contraire de la précédente, et toujours très petite.

Si l'on se sert de la vitesse observée, pour déterminer la valeur de γ , au moyen de la formule

$$\gamma = \frac{a^2 \Delta}{gmh(1 + a\delta)},$$

on obtient, d'après les données précédentes,

$$\gamma = 1,4061.$$

666. Il ne faut pas perdre de vue, en comparant cette dernière valeur de γ à celle qui la précède, qu'elles supposent l'une et l'autre la dilatation ou la condensation de l'air assez rapide pour que la quantité de chaleur du fluide n'ait pas le temps de varier sensiblement. Or, dans la propagation du son à l'air libre, d'où l'on a déduit la valeur $\gamma = 1,4061$, il est possible que la chaleur s'échappe ou revienne plus facilement sous forme rayonnante, que dans le son produit par l'air renfermé dans un tube, dont la considération a donné l'autre valeur $\gamma = 1,421$, et où la quantité de chaleur de chaque couche d'air ne peut guère varier que par le contact avec les parois du tube. Cette remarque pourrait expliquer la différence des deux résultats, et porterait à penser que la plus grande valeur de γ est la plus exacte.

En n'ayant point égard à cette quantité, la vitesse du son, réduite à $\sqrt{\frac{gmh}{D}}$, est celle que

Newton a donnée. Elle est trop petite de plus d'un sixième. Pour qu'elle s'accordât avec l'expérience, Lagrange avait remarqué qu'il faudrait supposer que la pression variât dans un plus grand rapport que la densité, et fût proportionnelle à peu près à la puissance $\frac{4}{3}$; et, en effet, en négligeant le carré de s , la valeur de p , dont nous avons fait usage, est

$$p = gmh(1 + s)^{1 + \epsilon},$$

pour la densité $D(1 + s)$. Mais il n'a assigné aucune cause de cette variation plus rapide de la force élastique de l'air; et c'est Laplace qui l'a attribuée, le premier, à la variation de température dont les condensations et les dilatations alternatives de l'air sont accompagnées dans le phénomène du son.

C'est à cette même cause qu'est due la propagation du son dans la vapeur d'eau au *maximum* de densité. Si l'on fait vibrer un corps sonore dans un vaisseau fermé, qui contienne cette vapeur non mélangée d'air, l'expérience prouve que le son se produit dans cette vapeur et s'entend au dehors. Or, si la température de la couche de vapeur adjacente à ce corps sonore n'était pas augmentée, quand elle est condensée par les vibrations de ce corps, elle se réduirait en eau et se précipiterait sur ce corps, puisqu'on la suppose au *maximum* de densité relatif à la température de l'espace où elle se trouve; mais sa température augmentant par la compression, la couche adjacente au corps sonore

peut se maintenir à l'état de vapeur: elle condense ensuite la couche suivante, celle-ci, la couche qui vient après, et ainsi de suite; de sorte que le son se propage, comme dans un gaz permanent, jusqu'à la paroi intérieure du vase. Les dilatations des couches de vapeur, qui suivent leurs condensations, sont accompagnées d'une diminution de température, qui ne les réduit pas non plus en eau, puisque leur densité diminue en même temps, et descend au-dessous du *maximum* relatif à la température de l'espace où se passe le phénomène.

667. En considérant l'eau comme un fluide un peu compressible et parfaitement élastique, le son s'y propagera suivant les mêmes lois que dans une masse d'air. Parvenu à la surface de l'eau, le son sera en partie transmis dans l'air extérieur, et en partie réfléchi dans l'eau; dans ce partage, la direction des ondes sonores, transmise et réfléchie, se déterminera suivant les lois de la réfraction et de la réflexion de la lumière. La vitesse du son réfléchi sera la même que celle du son direct, et les rapports des intensités du son transmis et du son réfléchi entre elles et avec l'intensité du son direct, dépendront du rapport des vitesses de la propagation du son dans les deux milieux superposés, c'est-à-dire, dans l'air et dans l'eau. C'est ce qu'on peut voir dans les mémoires cités au commencement de ce chapitre; ici, nous nous bornerons à calculer la valeur numérique de la vitesse du son dans une masse d'eau.

D'après ce qu'on a vu, dans le cas d'un fluide élastique, cette vitesse sera la même que si l'eau était contenue dans un tube très étroit et d'une largeur constante; et, dans ce cas, cette vitesse est aussi la même que celle de la propagation du mouvement, suivant la longueur d'une verge élastique de la même matière que l'eau. Or, supposons qu'une colonne d'eau contenue dans un cylindre vertical, soit chargée d'un poids Δ à sa partie supérieure; soient l sa longueur naturelle, et $l - \delta$, ce qu'elle devient par l'effet de cette pression; de sorte que δ soit une fraction très petite, qui exprime la condensation du liquide; soient aussi p son poids, et g la gravité; si l'on fait, comme dans le n° 495,

$$\frac{\Delta}{\delta} = q, \quad \frac{glq}{p} = a^2,$$

a sera la vitesse demandée, ainsi qu'on l'a vu dans le n° 498.

Appelons b la section horizontale de la colonne d'eau; supposons que la charge Δ soit égale au poids d'une colonne de mercure qui aurait b pour base, et dont la hauteur serait représentée par h ; désignons aussi par m la densité du mercure, et par ρ celle de l'eau; nous aurons

$$\Delta = gmhb, \quad p = g\rho lb;$$

et il en résultera

$$a^2 = \frac{gmh}{\rho\delta};$$

en sorte qu'il suffira pour calculer la valeur de a , de connaître la fraction δ relative à une hauteur donnée h .

A la température de 10 degrés centigrades, le physicien anglais Canton a trouvé

$$\delta = 0,000046,$$

sous une charge équivalente à la pression ordinaire de l'atmosphère. Ce résultat a été confirmé, comme on l'a dit précédemment (n° 576), par les expériences récentes qu'on a faites sous des pressions plus considérables, et qui ont donné une condensation proportionnelle à la pression et égale à la valeur précédente de δ , pour chaque pression atmosphérique. De plus, ces expériences, quelque

grande qu'ait été la pression, n'ont indiqué aucune augmentation sensible de température; en sorte qu'il n'y a pas lieu de croire que la propagation du son dans l'eau, soit accompagnée, comme dans l'air, d'une variation de température qui puisse influer sur sa vitesse. Cela étant, si l'on substitue cette valeur de δ dans la formule précédente, et qu'on y fasse

$$g = 9^m,80896, \quad h = 0^m,76, \quad \frac{m}{p} = 13,5975,$$

on en déduit

$$a = 1484^m;$$

de manière que la vitesse du son dans l'eau surpasse le quadruple de sa vitesse dans l'air.

CHAPITRE III.

DU MOUVEMENT DES FLUIDES, DANS UNE HYPOTHÈSE PARTICULIÈRE.

668. La supposition que nous admettons dans ce chapitre est connue sous la dénomination d'*hypothèse du parallélisme des tranches*. Elle consiste à supposer que quand un fluide pesant, de l'eau, par exemple, s'écoule dans un vase, et sort par un orifice horizontal pratiqué au fond du vase, les tranches horizontales et infiniment minces se remplacent successivement, en demeurant parallèles à elles-mêmes. Cela revient à négliger les différences des vitesses verticales des points qui appartiennent à une même tranche horizontale, et à regarder chaque tranche comme composée des mêmes points du fluide pendant toute la durée du mouvement. On néglige aussi les vitesses horizontales, qu'on suppose très petites par rapport aux vitesses verticales, et qui influent peu sur la vitesse verticale commune à tous les points d'une même tranche. Ces suppositions sont d'autant plus conformes à l'observation, que les dimensions horizontales du vase varient moins, et que leurs différences, d'une tranche à une autre, sont plus petites, eu égard à la hauteur du liquide au-dessus de l'orifice. Quand ces conditions sont remplies, on observe, en effet, que des parcelles d'une poussière légère, jetées dans le liquide et entraînées par son mouvement,

se meuvent, à peu près verticalement, avec une vitesse à peu près égale pour toutes les parcelles qui se trouvent dans une même tranche horizontale. Elles conservent ces directions tant qu'elles ne sont pas très rapprochées de l'orifice; quand elles en sont à de petites distances, et que l'éten due de l'orifice diffère notablement de celle des sections inférieures du vase, elles prennent des directions obliques, qui montrent qu'alors le parallélisme des tranches cesse d'être admissible; car il y a lieu de croire que ces légères particules s'attachent au liquide, et prennent exactement le mouvement des points auxquels elles répondent.

Dans l'hypothèse du parallélisme des tranches, telle que nous l'expliquons, on aura donc seulement deux inconnues à déterminer, en fonctions de deux variables, savoir: la vitesse d'une tranche quelconque et la pression qu'elle éprouve, en fonctions de la distance à un plan horizontal et du temps. La question sera ainsi réduite à sa plus grande simplicité, et susceptible, comme on va le voir, d'une solution complète, dans le cas d'un fluide homogène et incompressible.

669. Soient ABCD (fig. 141) le vase, AB l'orifice horizontal, EF le niveau du liquide, O α un axe

vertical, sur lequel on compte les distances des tranches horizontales à un point fixe O, ou au plan horizontal mené par ce point. Soit aussi MNM' une tranche quelconque, comprise entre deux sections horizontales MN et $M'N'$ du vase, dont la distance au point O est x au bout du temps t quelconque, et dont l'épaisseur est dx . Appelons v sa vitesse au même instant, et p la pression rapportée à l'unité de surface, qui a lieu sur la base supérieure MN , et est transmise, par le fluide, sur la base inférieure $M'N'$ et sur les parois MM' et NN' du vase. Désignons par y l'aire de la section MN du vase, qui sera donnée, dans chaque exemple, en fonction de x . Enfin, soient g la gravité et ρ la densité constante du fluide; la question consistera, comme on vient de le dire, à déterminer les valeurs de v et p en fonctions de t et x .

La masse de la tranche que nous considérons sera le produit $\rho y dx$ de la densité ρ et de son volume $y dx$. Si elle était libre, sa vitesse augmenterait de $g dt$ pendant l'instant dt ; elle augmente réellement de dv ; la vitesse perdue est donc $g dt - dv$; et l'on a

$$\left(g - \frac{dv}{dt}\right) \rho y dx,$$

pour la force perdue, c'est-à-dire, pour la partie du poids $g \rho y dx$ détruite par la pression des autres tranches. D'après le principe de D'Alembert, il y aura donc équilibre dans le fluide, si l'on suppose toutes ses tranches sollicitées par de semblables forces; dans cet état, la pression py qui a lieu sur la base supérieure MN de la tranche $\rho y dx$, se transmettra, en raison des surfaces (n° 578), sur la base inférieure $M'N'$, et deviendra, conséquemment, py' , en désignant par y' l'aire de $M'N'$; par conséquent si l'on ajoute à cette pression transmise, la force motrice précédente, on aura la pression totale exercée sur $M'N'$; en en représentant par p' cette pression, rapportée à l'unité de surface, il en résultera

$$p'y' = py + \left(g - \frac{dv}{dt}\right) \rho y dx.$$

Or, les quantités p' et y' sont ce que deviennent p et y , quand on y met $x + dx$ au lieu de x ; en négligeant les infiniment petits du second ordre, on aura donc

$$p' = p + \frac{dp}{dx} dx, \quad y' = y + \frac{dy}{dx} dx,$$

et, conséquemment,

$$(p' - p) y' = \frac{dp}{dx} y dx;$$

ce qui réduit l'équation précédente à celle-ci :

$$\frac{dp}{dx} = \rho \left(g - \frac{dv}{dt}\right), \quad (1)$$

que l'on obtient aussi en mettant $g - \frac{dv}{dt}$ à la place

de X dans la troisième équation d'équilibre du n° 583.

670. La seconde équation nécessaire pour déterminer les deux inconnues p et v , sera fournie par la considération de l'incompressibilité du fluide. Il en résulte que le volume du fluide qui passe, pendant l'instant dt , par chaque section horizontale du vase, doit être le même pour toutes les sections; par conséquent, les vitesses du fluide qui répondent, en même temps, à deux sections différentes du vase, doivent être réciproquement proportionnelles aux aires de ces sections. Si donc on appelle u , au bout du temps t , la vitesse qui a lieu à l'orifice horizontal AB ; que l'on représente par a l'aire de cet orifice, et que l'on compare cette vitesse à celle qui répond à la section quelconque MN , on aura

$$v : u :: a : y;$$

d'où l'on tire

$$v = \frac{au}{y}. \quad (2)$$

Dans cette valeur de v , u est une fonction de t , et y une fonction de x ; on peut donc en prendre la différentielle par rapport à l'une ou à l'autre de ces deux variables : la différentielle relative à x exprimerait la différence entre les vitesses de deux tranches consécutives, qui ont lieu au même instant; en différentiant par rapport à t , on aurait la différence entre les vitesses de deux tranches du fluide, qui répondent successivement à la même section du vase; mais pour avoir la différence entre les vitesses successives d'une même tranche, qui se déplace pendant l'instant dt , il faut différentier à la fois la valeur de v par rapport aux deux variables t et x , en considérant la seconde comme une fonction de la première; ce qui donne

$$\frac{dv}{dt} = \frac{a}{y} \frac{du}{dt} - \frac{au}{y^2} \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt}.$$

On a d'ailleurs $\frac{dx}{dt} = v$; et en ayant égard à l'é-

quation (2), il en résulte

$$\frac{dv}{dt} = \frac{a}{y} \frac{du}{dt} - \frac{a^2 u^2}{y^3} \frac{dy}{dx}.$$

C'est cette valeur de $\frac{dv}{dt}$ qu'il faut employer dans

l'équation (1), qui devient, en conséquence,

$$\frac{dp}{dx} = g\rho - \frac{a\rho}{y} \frac{du}{dt} + \frac{a^2 u^2}{y^3} \frac{dy}{dx}.$$

Je multiplie ses deux membres par dx ; j'intègre ensuite par rapport à x ; et en observant qu'alors les quantités u et $\frac{du}{dt}$ doivent être regardées comme des constantes, il vient

$$p = \pi + g_F x - \alpha_F \frac{du}{dt} \int \frac{dx}{y} - \frac{\alpha^2 \rho u^2}{2y^2};$$

π étant la constante arbitraire qui peut être une fonction de t . Pour la déterminer, je représente par π la pression atmosphérique, et je suppose que ce soit celle qui a lieu à la surface supérieure EF du liquide. Avant que le mouvement commence, cette surface est horizontale; et comme on admet que chaque tranche horizontale se compose constam-

ment des mêmes points du fluide, il s'ensuit que la surface EF demeurera horizontale pendant toute la durée du mouvement. Au bout du temps t , je désigne par θ la distance de EF au point O, et par ω l'aire de cette section variable du vase, de sorte que ω soit la même fonction de θ que y est de x ; on aura à la fois

$$p = \pi, \quad x = \theta, \quad y = \omega;$$

et si l'on suppose que l'intégrale $\int \frac{dx}{y}$ commence à $x = \theta$, l'équation précédente donnera

$$\pi = \pi + \frac{\alpha^2 \rho u^2}{2\omega^2} - g_F \theta;$$

au moyen de quoi, cette équation deviendra

$$p = \pi + g_F (x - \theta) - \alpha_F \frac{du}{dt} \int \frac{dx}{y} - \frac{\rho u^2}{2} \left(\frac{\alpha^2}{y^2} - \frac{\alpha^2}{\omega^2} \right). \quad (3)$$

Les équations (2) et (3) feront connaître immédiatement les valeurs des deux inconnues v et p , lorsqu'on aura déterminé la valeur de u .

671. Pour cela, j'observe que la pression qui a lieu à l'orifice AB sera donnée: si le liquide s'écoule dans l'air libre, elle sera la pression atmosphérique, comme à son niveau EF; s'il s'écoule dans le vide, elle sera zéro; pour plus de généralité, je supposerai que l'écoulement a lieu dans un air dont la force élastique est égale à la pression π , diminuée de la pression $g_F c$ correspondante à une hauteur donnée c du liquide; en sorte qu'en appelant l la distance de l'orifice AB au point O, on aura constamment

$$p = \pi - g_F c,$$

pour $x = l$. J'appelle aussi h la hauteur du niveau EF du liquide au-dessus de cet orifice, ou la différence $l - \theta$, et je représente par $\frac{1}{\lambda}$ la valeur de l'in-

tégrale $\int \frac{dx}{y}$, étendue au volume entier du liquide; de manière que λ soit une ligne, dont la longueur sera une fonction de h , dépendante de la figure du vase, et donnée dans chaque exemple. A l'orifice, on aura donc, en même temps, la valeur précédente de p , et

$$y = \omega, \quad x = l = \theta + h, \quad \int_{\theta}^{\theta+h} \frac{dx}{y} = \frac{1}{\lambda};$$

par conséquent, l'équation (3), appliquée à cette section du vase, deviendra

$$g(h + c) - \frac{\alpha}{\lambda} \frac{du}{dt} - \frac{1}{2} \zeta^2 u^2 = 0, \quad (4)$$

en faisant, pour abrégér,

$$1 - \frac{\alpha^2}{\omega^2} = \zeta^2.$$

On peut remarquer que cette quantité numérique ζ^2 sera toujours une quantité positive et moindre que l'unité; car, pour qu'elle devint négative, il faudrait que l'aire de la plus petite section du vase surpassât celle de l'orifice, et le liquide se détacherait du vase à l'endroit de cette section *minima*, qui deviendrait le véritable orifice par lequel l'écoulement aurait lieu.

Lorsque le niveau du liquide sera entretenu à une hauteur constante au-dessus de l'orifice, les trois quantités h , θ , λ , seront des constantes données, et l'équation (4) suffira pour déterminer la valeur de u en fonction de t . Quand le niveau EF s'abaissera pendant l'écoulement du liquide, h sera une variable qu'il faudra aussi déterminer en fonction de t . Or, à ce niveau, on a $y = \omega$ et $\frac{d\theta}{dt} = v$; et à cause que la somme $\theta + h$ est une

constante l , on a aussi $-\frac{d\theta}{dt} = \frac{dh}{dt}$; en vertu de l'équation (2) on aura donc

$$\frac{dh}{dt} + \frac{\alpha u}{\omega} = 0; \quad (5)$$

et les valeurs de u et h dépendront des deux équations différentielles (4) et (5), qui sont du premier ordre. On déterminera les deux constantes arbitraires que leurs intégrales contiendront, au moyen de la hauteur initiale du liquide, et en observant qu'on a $u = 0$, à l'origine du mouvement.

Soit que le niveau s'abaisse ou qu'il ne varie pas, si l'on appelle q le volume du liquide sorti du vase

au bout du temps t , sa différentielle sera égale au volume $a u dt$ de la tranche qui traverse l'orifice AB pendant l'instant dt ; on aura donc

$$dq = a u dt, \quad q = a \int u dt;$$

l'intégrale étant prise de manière qu'elle s'évanouisse quand $t = 0$.

Nous allons appliquer successivement ces différentes formules aux deux cas du niveau constant et du niveau variable.

672. Dans le premier cas, l'équation (4) donne

$$\lambda dt = \frac{2adu}{2g(h+c) - \epsilon^2 u^2};$$

d'où l'on tire, en mettant h au lieu de $h+c$, et intégrant

$$\lambda t = \frac{a}{\epsilon \sqrt{2gh}} \log \frac{\sqrt{2gh} + \epsilon u}{\sqrt{2gh} - \epsilon u};$$

on n'ajoute pas de constante arbitraire, parce qu'on doit avoir $u=0$, quand $t=0$. On pourra, sans changer cette formule, regarder, à volonté, ϵ et $\sqrt{2gh}$, comme des quantités positives ou négatives; nous les supposons positives. L'on aura réciproquement,

$$\sqrt{2gh} - \epsilon u = (\sqrt{2gh} + \epsilon u) e^{-\frac{\epsilon \lambda t \sqrt{2gh}}{a}} \quad (6)$$

en désignant, comme à l'ordinaire, par e la base des logarithmes népériens. A mesure que t augmentera, le second membre de cette équation diminuera; au bout d'un certain temps, il sera sensiblement nul; et à partir de cette époque, la vitesse u aura une valeur à peu près constante, savoir :

$$u = \frac{1}{\epsilon} \sqrt{2gh}.$$

En chaque point du vase, la pression p et la vitesse v varieront avec la vitesse u , et deviendront sensiblement constantes en même temps que u .

Si l'on fait $\frac{du}{dt} = 0$, dans la formule (3), et qu'on y mette pour u sa valeur précédente, on aura

$$p = \pi + g_f(x - \theta) + \frac{g_f h}{\epsilon^2} \left(\frac{a^2}{\omega^2} - \frac{a^2}{y^2} \right),$$

pour la valeur finale de p , relative au point quelconque M.

Dans l'état d'équilibre, la pression en ce point serait $\pi + g_f(x - \theta)$; elle est donc augmentée ou diminuée par le mouvement du liquide, selon que le dernier terme de cette formule est positif ou négatif, c'est-à-dire, selon que la section horizontale MN ou y , est plus grande ou plus petite que la section EF ou a .

L'équation (6) donne

$$u = \frac{\sqrt{2gh}}{\epsilon} \left(\frac{e^{\frac{\epsilon \lambda t \sqrt{2gh}}{2a}} - e^{-\frac{\epsilon \lambda t \sqrt{2gh}}{2a}}}{e^{\frac{\epsilon \lambda t \sqrt{2gh}}{2a}} + e^{-\frac{\epsilon \lambda t \sqrt{2gh}}{2a}}} \right);$$

à cause de $q = a \int u dt$, et de $q = 0$ quand $t = 0$, on aura donc

$$q = \frac{2a^2}{\epsilon^2 \lambda} \log \frac{1}{2} \left(\frac{e^{\frac{\epsilon \lambda t \sqrt{2gh}}{2a}} - e^{-\frac{\epsilon \lambda t \sqrt{2gh}}{2a}}}{e^{\frac{\epsilon \lambda t \sqrt{2gh}}{2a}} + e^{-\frac{\epsilon \lambda t \sqrt{2gh}}{2a}}} \right);$$

pour le volume de liquide sorti du vase pendant le temps t . Au bout d'un certain temps, on pourra négliger la seconde exponentielle, par rapport à la première, et l'on aura simplement

$$q = \frac{ta \sqrt{2gh}}{\epsilon} - \frac{2a^2}{\epsilon^2 \lambda} \log 2.$$

Le premier terme est le volume correspondant à la

vitesse constante $\frac{1}{\epsilon} \sqrt{2gh}$ de l'écoulement; le

volume total est plus petit, parce qu'au commencement la valeur variable de u est moindre que cette vitesse finale.

673. Dans le cas du niveau variable, je considère u comme une fonction de h , et j'élimine dt entre les équations (4) et (5); ce qui donne

$$gh + \frac{a^2 u du}{\lambda a dh} - \frac{1}{2} \epsilon^2 u^2 = 0,$$

en comprenant toujours la constante c dans h . J'appelle z la hauteur due à la vitesse u , de sorte qu'on ait

$$u^2 = 2gz. \quad u du = g dz.$$

L'équation précédente se change en une équation linéaire, savoir :

$$\frac{dz}{dh} - \frac{\epsilon^2 \lambda a}{a^2} z + \frac{\lambda a h}{a^2} = 0, \quad (7)$$

dont l'intégrale s'obtiendra, comme on sait, sous forme finie.

Connaissant z et u en fonctions de h , l'équation (5) donnera t en fonction de h , par une intégration immédiate; en sorte que l'on connaîtra le temps écoulé, quand le niveau du liquide sera à une hauteur h au-dessus de l'orifice, et, réciproquement, la hauteur h du niveau EF au bout d'un temps quelconque t . On aura le temps entier de l'écoulement de tout le liquide, en intégrant la valeur de dt depuis la valeur initiale de h jusqu'à $h=0$. Quant au volume q du fluide écoulé, il sera, à chaque instant, égal au volume du vase

compris entre le niveau variable et le niveau initial.

674. Supposons, par exemple, que le vase soit un cylindre vertical, terminé par un segment de surface dont la flèche est très petite et dans lequel est percé l'orifice horizontal AB. Soient a l'aire constante de la section horizontale du cylindre, et n le rapport de a à α , de sorte qu'on ait

$$a = \frac{\alpha}{n}, \quad \zeta^2 = \frac{n^2 - 1}{n^2}.$$

En faisant abstraction du segment inférieur du vase qu'on suppose très petit, on pourra prendre

$$u = a, \quad y = a, \quad \frac{1}{x} = \frac{h}{a},$$

dans l'équation (7), qui deviendra alors

$$\frac{dz}{dh} - \frac{(n^2 - 1)z}{h} + n^2 = 0.$$

Son intégrale complète est

$$z = Ch^{n^2-1} - \frac{n^2 h}{2-n^2},$$

en désignant par C la constante arbitraire. Si on appelle H la valeur initiale de h , il faudra que z s'évanouisse pour $h = H$; ce qui exige qu'on ait

$$C = \frac{n^2}{2-n^2} H^{2-n^2},$$

d'où il résultera, à un instant quelconque,

$$z = \frac{n^2}{2-n^2} (H^{2-n^2} h^{n^2-1} - 1 - h).$$

On aura, en même temps,

$$u = n\sqrt{2gh} \sqrt{\frac{H^{2-n^2} h^{n^2-2} - 1}{2-n^2}}, \quad (8)$$

et, en vertu de l'équation (5),

$$dt = -\frac{dh}{\sqrt{2gh}} \sqrt{\frac{2-n^2}{H^{2-n^2} h^{n^2-2} - 1}}. \quad (9)$$

C'est donc cette formule qu'il faudra intégrer pour obtenir t en fonction de h . Dans le cas de $n = 1$, on aura

$$dt = -\frac{dh}{\sqrt{2g} \sqrt{H-h}};$$

d'où l'on tire

$$t = \sqrt{\frac{2}{g}} \sqrt{H-h},$$

et, par conséquent,

$$H - h = \frac{1}{2} g t^2,$$

comme cela doit être, puisque l'orifice étant alors égal à la base du cylindre, le mouvement du fluide doit être le même que celui d'un corps solide pesant qui tombe dans le vide. La formule (9) s'intègre encore sous forme finie, lorsqu'on a $n^2 = 3$; et cela n'a lieu que pour cette valeur et pour $n^2 = 1$. Mais son intégrale définie, prise depuis $h = H$ jusqu'à $h = 0$, qui exprime le temps de l'écoulement entier du liquide, pourra toujours se réduire à des transcendentes que M. Legendre a nommées *intégrales Eulériennes* de la seconde espèce, et dont il a donné des tables numériques. J'ai effectué ailleurs cette réduction*; ici je me bornerai à appliquer la formule (9) au cas de $n^2 = 2$, où elle se présente sous la forme $\frac{0}{0}$.

D'après la règle ordinaire, sa véritable valeur est

$$dt = -\frac{dh}{\sqrt{2gh}} \left(\log \frac{H}{h} \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Or, si l'on fait

$$h = He^{-2x^2}, \quad dh = -4He^{-2x^2} x dx;$$

il en résultera

$$dt = 2 \sqrt{\frac{2H}{g}} e^{-x^2} dx.$$

Les limites relatives à x , qui répondent à $h = H$ et $h = 0$, seront $x = 0$ et $x = \infty$; si donc on appelle T le temps de l'écoulement total, on aura

$$T = 2 \sqrt{\frac{2H}{g}} \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\frac{2\pi H}{g}};$$

en observant que l'intégrale $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ est la moitié de $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx$, qui a $\sqrt{\pi}$ pour valeur, comme on l'a vu dans le n° 513. Il s'ensuit que le temps T est celui des petites oscillations d'un pendule simple, dont la longueur serait $\frac{2}{\pi} H$.

675. Lorsque l'orifice AB est très petit par rapport aux sections horizontales du vase, on peut négliger le terme multiplié par α dans l'équation (4),

à moins que le facteur $\frac{du}{dt}$ ne soit très grand; ce

qui a lieu, en effet, au commencement du mouvement, où la vitesse u varie avec une grande rapidité. On peut aussi y mettre l'unité à la place de ζ ; et alors, soit que le niveau EF s'abaisse ou qu'il ne varie pas, l'équation (4) se réduit à

$$g(h+c) - \frac{1}{2} u^2 = 0;$$

d'où l'on tire

$$n = \sqrt{2g(h+c)}.$$

*Correspondance sur l'Ecole Polytechnique, tome III, page 284.

Il en résulte ce théorème : que la vitesse d'un liquide qui sort d'un vase par un très petit orifice, est égale à celle qu'un corps pesant acquerrait en tombant dans le vide, d'une hauteur égale à celle du niveau du liquide au-dessus de cet orifice, quand les pressions supérieure et inférieure sont égales, ou, plus généralement, de la hauteur du niveau, augmentée de la constante c , quand ces deux pressions sont inégales.

Dans le cas du niveau constant, ce théorème résulte de la valeur finale de u , trouvée dans le n° 672, en y faisant $\xi = 1$. Il résulte aussi de la formule (8), appliquée au cas où n est un très grand nombre, afin que l'orifice a soit une très petite partie de la section horizontale A du cylindre. On peut alors mettre n^2 à la place de $n^2 - 2$; ce qui change d'abord la formule (8) en celle-ci :

$$u = \sqrt{2gh} \sqrt{1 - \left(\frac{h}{H}\right)^{n^2}}.$$

Or, dès que h sera notablement moindre que H , la puissance n^2 du rapport $\frac{h}{H}$ sera une très petite fraction, et cette valeur de u se réduira, à très peu près, à $u = \sqrt{2gh}$.

L'orifice AB étant très petit, si la section MN n'est pas très voisine de cette ouverture, le rapport $\frac{a^2}{y^2}$, qui entre dans la formule (3), sera très petit; le rapport $\frac{a^2}{\omega^2}$ l'est également; on pourra donc supprimer le dernier terme de cette formule; et si l'on néglige aussi le terme multiplié par a , elle se réduira à

$$p = \pi + g\xi(x - \theta);$$

d'où l'on conclut que, dans le cas d'un très petit orifice, la pression en tous les points du vase éloignés de cette ouverture, est sensiblement la même pendant le mouvement que dans l'état d'équilibre.

676. L'hypothèse du parallélisme des tranches exige, en général, que l'orifice soit horizontal; mais, dans le cas d'un très petit orifice, on l'admet encore lorsque le liquide s'écoule par une ouverture latérale, dont le plan a une inclinaison quelconque, et peut même être vertical. L'observation fait voir qu'alors le liquide situé à peu de distance au-dessus de cette petite ouverture, demeure stagnant, et que les tranches horizontales situées à une pareille distance au-dessus de cette même ouverture, descendent parallèlement à elles-mêmes; en sorte que le parallélisme des tranches n'est troublé, comme dans le cas d'un petit orifice horizontal, que pour la partie du liquide très voisine de l'orifice. On pourra donc prendre $\sqrt{2g(h+c)}$, pour la vitesse d'un liquide qui s'écoule par une très petite ouverture, quelle que

soit l'inclinaison de cet orifice; h étant la hauteur variable ou constante du niveau du liquide au-dessus du centre de l'orifice, et c la constante provenant de la différence des pressions extérieures qui répondent à ce niveau et à cette ouverture. Si le vase est placé dans le vide, de sorte que les deux pressions et cette constante soient nulles, les molécules du liquide auront, en sortant du vase, la vitesse $\sqrt{2gh}$ due à la hauteur h , qui est aussi la vitesse nécessaire pour s'élever, dans le vide, à cette hauteur (n° 130). Par conséquent, si l'on donne au fluide, au moyen d'un tuyau, une direction verticale, il remontera, au dehors, à la hauteur de son niveau intérieur; ce qui est, en effet, conforme à l'expérience. Généralement, les molécules du fluide décriront dans le vide, après un très court intervalle de temps, des paraboles dont la tangente à leur point de départ dépendra de la direction du jet, et le paramètre, de la hauteur h ou $h+c$, si la constante c n'est pas nulle.

La pression p sera sensiblement la même que dans l'état d'équilibre, excepté à l'orifice, où elle sera égale à $\pi - g\xi c$, au lieu de $\pi + g\xi h$. Or, si elle était aussi égale à $\pi + g\xi h$ sur cette partie du vase, les pressions horizontales se détruiraient, les pressions verticales se réduiraient au poids du liquide, augmenté de la pression ωa qui a lieu sur la surface du niveau; d'où l'on peut conclure que, dans l'état de mouvement, la charge totale que le vase aura à supporter se composera de la pression verticale qui aurait lieu dans l'état d'équilibre, et d'une force normale au plan de l'orifice, dirigée de dehors en dedans du vase, et égale à l'excès de la pression $(\pi + g\xi h)a$ sur la pression $(\pi - g\xi c)a$, ou à $g\xi(h+c)a$, en désignant toujours par a l'aire très petite de cet orifice.

677. Dans le cas d'un niveau constant et d'un orifice très petit, horizontal ou incliné, la dépense pendant le temps t , c'est-à-dire, le volume q du liquide qui sort du vase avec la vitesse $\sqrt{2gh}$, sera

$$q = at\sqrt{2gh};$$

ce qui résulte aussi de la valeur finale de q trouvée dans le n° 672, en y négligeant le carré de a . Mais on ne doit pas oublier que l'hypothèse du parallélisme des tranches, sur laquelle cette valeur de q est fondée, n'est qu'une approximation dont le degré d'exactitude ne peut pas être évalué *a priori*, et dont les résultats ne doivent pas être employés sans restriction. Or, l'expérience ne s'accorde pas toujours avec cette valeur théorique de la dépense.

Si la paroi du vase n'est pas très mince, et que l'ouverture pratiquée dans son épaisseur soit évaluée intérieurement, de telle sorte que le fluide qui s'écoule hors du vase soit un cylindre vertical, ou un cylindre recourbé dont les sections normales soient constantes et égales à l'aire a de l'orifice, prise sur la surface extérieure du vase; dans ce cas, disons-nous, la dépense observée s'accorde

avec la valeur précédente de q . Mais dans le cas d'un orifice en *mince paroi*, la dépense observée est toujours proportionnelle à l'aire de l'orifice, et à la racine carrée de l'élévation du niveau, comme dans la formule théorique; mais elle s'écarte de cette formule dans sa valeur absolue, qui en diffère par un facteur à peu près constant et moindre que l'unité. D'après les expériences qui méritent le plus de confiance, ce facteur est 0,62; en sorte que la valeur de q , dont on fait usage dans la pratique, est

$$q = (0,62) \text{ at } \sqrt{2gh},$$

pour un très petit orifice en mince paroi, et une hauteur du niveau assez grande par rapport aux dimensions de cette ouverture, horizontale ou inclinée.

On attribue cette différence aux directions inclinées que prennent les molécules du liquide en approchant de l'orifice, que je suppose horizontal, pour fixer les idées; directions qu'elles conservent après avoir traversé la mince paroi du vase. Il en résulte que la veine fluide extérieure se rétrécit, jusqu'à une petite distance du vase, où la section transversale est à son *minimum*, pour devenir ensuite constante. Ce phénomène est ce qu'on appelle la *contraction de la veine fluide*. L'écoulement du fluide est le même que si l'orifice était la section de la veine à l'endroit de sa plus grande contraction, de manière que si l'on désigne par a' l'aire de cette section, et par h' sa distance constante au niveau du liquide, la dépense sera exprimée par $a' t \sqrt{2gh'}$, ou, à très peu près, par $a' t \sqrt{2gh}$, à cause du peu de différence de h' et h ; or, en effet, par des mesures directes de la section a' comparée à l'orifice a , on trouve que ces deux quantités sont dans un rapport à peu près indépendant de h , et que l'on a constamment $a' = (0,62) a$.

Si l'on adapte à l'orifice en mince paroi, un *ajutage* cylindrique en dehors du vase, perpendiculaire au plan de l'orifice, et par lequel l'écoulement aura lieu, l'expérience montre que la dépense est augmentée, et peut s'élever aux quatre cinquièmes du résultat de la théorie. Si cet ajutage est enfoncé dans l'intérieur du vase, la dépense est, au contraire, diminuée, et réduite à moitié de la dépense théorique; en sorte que, dans la valeur précédente de q , le facteur 0,62 doit être remplacé par 0,80 dans le premier cas, et par 0,50 dans le second. Je me borne à citer succinctement ces résultats de l'observation, qui n'ont été ramenés, jusqu'à présent, à aucune théorie.

678. On admet aussi l'hypothèse du parallélisme des tranches dans le mouvement d'un fluide élastique qui sort d'un vase par un orifice quelconque; et elle s'écarte peu de la vérité, quand les sections du vase, parallèles au plan de l'orifice, ne diffèrent pas beaucoup l'une de l'autre, et que la longueur

du vase est assez grande par rapport à leurs dimensions.

Dans ce cas, on peut faire abstraction de la pesanteur, et supposer que le mouvement soit uniquement dû à la force élastique du fluide, plus grande ou plus petite à l'intérieur du vase qu'en dehors. On supprimera donc le terme dépendant de g dans l'équation (1), qui convient aux liquides et aux fluides élastiques. De plus, la différentielle de v , qu'elle renferme, devant être prise par rapport à t et à la variable x considérée comme fonction de t , on aura

$$dv = \frac{dv}{dt} dt + \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} dt;$$

et comme, on a aussi $\frac{dx}{dt} = v$, cette équation deviendra

$$\frac{dp}{dx} + f \frac{dv}{dt} + fv \frac{dv}{dx} = 0. \quad (a)$$

Le fluide étant compressible, il n'en passera plus un même volume, à chaque instant, par toutes les sections du vase, et l'équation (2) n'aura pas lieu. La masse de fluide qui passe pendant l'instant dt par la section MN, sera égale à $pyvdt$; ce sera cette même masse qui passera, l'instant d'après, en changeant de volume, par la section M'N'; et pendant toute la durée du mouvement, sa grandeur ne variera pas. La différentielle du produit pyv , prise par rapport à t et à la variable x considérée comme une fonction de t , sera donc nulle; et à cause que y n'est fonction que de x ,

et qu'on a $\frac{dx}{dt} = v$, on en conclura

$$fv^2 \frac{dy}{dx} + y \frac{d \cdot fv}{dt} + yv \frac{d \cdot fv}{dx} = 0. \quad (b)$$

Enfin, si l'on suppose que la température demeure constante pendant le mouvement, dans toute la masse du fluide, on aura

$$p = f k;$$

k étant un coefficient constant et donné.

Cela posé, en mettant $\frac{p}{k}$ au lieu de f dans les équations (a) et (b), on aura deux équations aux différences partielles du premier ordre, pour déterminer, en fonctions de x et t , les deux inconnues v et p du problème. Elles ne sont pas intégrables sous forme finie, et les valeurs de v et p ne pourront s'obtenir que par approximation. Ces valeurs renfermeront deux fonctions arbitraires, que l'on déterminera d'après deux conditions particulières; pour cela, je supposerai, d'une part, que l'écoulement ait lieu à l'air libre, en sorte qu'en désignant

par π la pression atmosphérique, rapportée à l'unité de surface, on ait constamment $p = \pi$, à l'orifice AB. D'un autre côté, je supposerai aussi que le vase soit en communication avec un gazomètre d'une grande capacité, au moyen duquel on entretienne une pression constante et donnée, sur une section EF du fluide, parallèle à AB et de position fixe, de manière qu'en désignant par π' cette pression rapportée à l'unité de surface, on ait aussi $p = \pi'$, en cet endroit du vase, pendant toute la durée du mouvement. Si donc on compte la distance x à partir du plan EF, et qu'on appelle l la distance comprise entre AB et EF, on aura, quel que soit t , $p = \pi'$ pour $x = 0$, et $p = \pi$ pour $x = l$; ce qui servira à déterminer les deux fonctions arbitraires, et à compléter la solution du problème. Mais cette solution est trop compliquée pour qu'on en puisse déduire aucun résultat utile; et, dans la pratique, il suffit de connaître la vitesse constante de l'écoulement du fluide par l'orifice AB, lorsque la pression p et la vitesse v sont devenues constantes en chaque point du vase; ce qui arrive, en général, après un très court intervalle de temps.

679. Faisons donc $\frac{dv}{dt} = 0$ et $\frac{dp}{dt} = 0$, dans les

équations (a) et (b); elles se réduiront à deux équations différentielles, savoir :

$$\frac{k}{p} \frac{dp}{dx} + v \frac{dv}{dx} = 0, \quad pv \frac{dy}{dx} + y \frac{d \cdot pv}{dx} = 0, \quad (c)$$

à cause de $p = k\rho$.

L'intégrale de la seconde de ces équations est

$$y p v = c;$$

c étant la constante arbitraire. En désignant toujours par a l'orifice AB, et par u la vitesse du fluide à cet orifice, de sorte qu'on ait à la fois $y = a$, $v = u$, $p = \pi$, et, par conséquent, $c = a\pi u$, il en résultera, en un point quelconque du vase,

$$v = \frac{a\pi u}{yp}, \quad (d)$$

En substituant cette valeur de v dans la première équation (c), il vient

$$\frac{k}{p} \frac{dp}{dx} + \frac{a^2 \pi^2 u^2}{py} \frac{d \cdot \frac{1}{p}}{dx} = 0;$$

d'où l'on tire, en intégrant et désignant par c' la constante arbitraire,

$$k \log p + \frac{a^2 \pi^2 u^2}{2p^2 y^2} = c'.$$

Je désigne par a l'aire de la section EF, de sorte qu'on ait, en même temps, $y = a$ et $p = \pi'$; on aura donc

$$k \log \pi' + \frac{a^2 \pi^2 u^2}{2\pi'^2 a^2} = c',$$

et, en retranchant cette équation de la précédente,

$$k \log \frac{p}{\pi'} + \frac{1}{2} a^2 \pi^2 u^2 \left(\frac{1}{p^2 y^2} - \frac{1}{\pi'^2 a^2} \right) = 0. \quad (e)$$

Les équations (d) et (e) feront connaître la vitesse et la pression en un point quelconque du vase, dès que l'on connaîtra la vitesse u relative à l'orifice. Or, en faisant $p = \pi$ et $y = a$, dans l'équation (e), on en conclut

$$u^2 \left(1 - \frac{a^2 \pi^2}{a^2 \pi'^2} \right) = 2k \log \frac{\pi'}{\pi}; \quad (f)$$

d'où l'on tirera la valeur de u . On fera, dans cette formule,

$$k = grh,$$

en appelant g la gravité, et r le rapport de la densité du mercure à celle du fluide intérieur, sous une pression barométrique dont la hauteur est h , le volume du fluide qui sortira du vase pendant le temps t aura pour valeur aut .

Quand l'orifice sera très petit, on remarquera, comme dans le n° 676, qu'il ne sera plus nécessaire qu'il soit parallèle à la section EF, c'est-à-dire, qu'il pourra être pratiqué à la partie latérale du vase, et avoir une inclinaison quelconque sur le plan de cette section. On pourra alors négliger

le terme dépendant de $\frac{a^2}{a^2}$, dans le premier membre de l'équation (f) qui deviendra

$$u^2 = 2grh \cdot \log \frac{\pi'}{\pi};$$

par conséquent, la vitesse de l'écoulement du fluide par un très petit orifice, sera celle qui serait due à une hauteur rh , multipliée par le logarithme népérien du rapport $\frac{\pi'}{\pi}$. La supposition qu'on a

faite d'une température invariable pendant toute la durée du mouvement exige que la vitesse u ne soit pas très considérable, sans quoi la température varierait comme dans la propagation du son.

ADDITION

RELATIVE A L'USAGE DU PRINCIPE DES FORCES VIVES, DANS LE CALCUL
DES MACHINES EN MOUVEMENT.

680. Le principe des vitesses virtuelles donne immédiatement les conditions d'équilibre des forces appliquées aux machines; celui des forces vives renferme de même la théorie de leur mouvement, et fournit le moyen le plus direct de calculer les effets des forces qui leur sont appliquées. Cet usage du principe des forces vives forme, pour ainsi dire, le point de jonction de la Mécanique rationnelle et de la Mécanique industrielle. C'est pourquoi j'ai cru devoir donner succinctement, dans cette *addition*, les notions les plus générales sur cette matière. Pour de plus grands développemens, j'indiquerai les leçons de M. Navier, à l'École des Ponts et chaussées, et de M. Poncelet, à l'École de l'Artillerie et du Génie, qui ont été seulement lithographiées, mais auxquelles ces savans professeurs donneront sans doute plus de publicité.

681. Les machines sont des instrumens ou des systèmes de corps solides, propres à transporter l'action des forces, d'une partie à une autre de ces assemblages.

Quand une machine est en mouvement, certains points sont donc soumis à des forces données, et d'autres parties exercent des pressions sur les corps extérieurs, ou sont pressées réciproquement par ces corps que la machine est destinée à déplacer ou à déformer. Les premières forces s'appellent *forces mouvantes*; leurs points d'application se meuvent suivant leurs directions, ou, plus généralement, les directions des mouvemens de ces points font des angles aigus avec celles de ces forces. Par opposition, on nomme *forces résistantes*, les pressions exercées par les corps extérieurs; et les directions des mouvemens de leurs points d'application sont contraires à celles de ces forces, ou, du moins, elles font avec celles-ci des angles obtus.

La liaison des parties d'une machine est telle, qu'elle ne peut prendre, en général, que deux

mouvemens directement opposés l'un à l'autre; il s'ensuit donc que, quand le sens du mouvement qu'elle prend effectivement est connu, il suffit d'une seule équation pour déterminer ce mouvement d'une manière complète. Cette équation est celle que l'on obtient en intégrant les deux membres de l'équation (a) du n° 565, savoir :

$$\frac{1}{2} d \cdot \Sigma mv^2 = \Sigma m(Xdx + Ydy + Zdz). \quad (a)$$

Au bout d'un temps quelconque t , compté depuis l'origine du mouvement, v représente la vitesse du point dont x, y, z , sont les trois coordonnées rapportées à des axes fixes et rectangulaires; m est la masse de ce point; dx, dy, dz , sont les projections, sur ces axes, de l'espace qu'il parcourt pendant l'instant dt ; on désigne par mX, mY, mZ , les composantes de sa force motrice parallèles à ces mêmes axes, et les sommes Σ s'étendent à tous les points m du système.

682. Avant d'aller plus loin, il importe de distinguer, dans le second membre de l'équation (a), les termes qui proviennent des forces mouvantes et ceux qui résultent des forces résistantes, et de leur donner une autre forme.

Pour cela, soient P une des forces mouvantes, et α, ϵ, γ , les angles que fait sa direction avec des parallèles aux axes des x, y, z ; relativement à cette force, on aura

$$mX = P \cos \alpha, \quad mY = P \cos \epsilon, \quad mZ = P \cos \gamma.$$

Soient aussi ds l'espace décrit par son point d'application pendant l'instant dt , et λ, μ, ν , les angles que fait la direction de ds avec ses projections dx, dy, dz , de sorte qu'on ait

$$dx = ds \cos \lambda, \quad dy = ds \cos \mu, \quad dz = ds \cos \nu.$$

Désignons enfin par dp la projection de ds sur la direction de la force P , et par σ l'angle compris entre dp et ds ; nous aurons

$$dp = ds \cos \sigma, \quad \cos \sigma = \cos \alpha \cos \lambda + \cos \epsilon \cos \mu + \cos \gamma \cos \nu;$$

et, de ces diverses équations, on déduira

$$m(Xdx + Ydy + Zdz) = Pdp,$$

pour le terme du second membre de l'équation (a), qui répond à la force P.

En désignant par Q une des forces résistantes, et par dq la projection sur le prolongement de sa direction, de l'espace parcouru pendant l'instant dt par son point d'application, on trouvera de même — Qdq pour le terme de ce second membre qui provient de la force Q. De cette manière, l'équation (a) prendra la forme

$$\frac{1}{2} d. \Sigma mv^2 = \Sigma Pdp - \Sigma Qdq; \quad (b)$$

l'une des sommes Σ contenues dans son second membre s'étendant à toutes les forces mouvantes de la machine, et l'autre à toutes les forces résistantes. D'après les hypothèses qu'on a faites sur les directions de ces deux sortes de forces, en égard au sens des mouvemens des points où elles agissent, les quantités dp et dq sont positives, ainsi que P et Q, et conséquemment, les sommes Σ ne se composent que de termes positifs.

653. En désignant par k la vitesse initiale du point quelconque m , ou la valeur de v qui répond à $t=0$, et intégrant les deux membres de l'équation (b), on aura

$$\frac{1}{2} \Sigma mv^2 - \frac{1}{2} \Sigma mk^2 = \int \Sigma Pdp - \int \Sigma Qdq; \quad (c)$$

les intégrales étant prises de manière qu'elles s'évanouissent à l'origine du mouvement.

C'est sous cette forme qu'on emploie l'équation des forces vives, pour calculer les effets des machines en mouvement; elle coïncide avec l'équation (b) du n° 565, lorsqu'on peut effectuer les intégrations indiquées dans son second membre.

Les produits Pdp et Qdq , dont les sommes sont soumises à ces intégrations, ont reçu différentes dénominations : on les appelle *quantités d'action*, *momens d'activité*, *effets dynamiques*, des forces P et Q. Il serait à désirer qu'on les désignât toujours par un même nom. M. Coriolis a proposé de les nommer *quantités de travail élémentaire*; nous adopterons cette dénomination. Les sommes ΣPdp et ΣQdq seront donc les quantités de travail élémentaire, produites pendant un même instant par toutes les forces mouvantes et toutes les forces résistantes; et leurs intégrales $\int \Sigma Pdp$ et $\int \Sigma Qdq$ exprimeront le *travail moteur* et le *travail résistant* qui ont eu lieu dans la machine, depuis l'origine du mouvement jusqu'à l'instant que l'on considère.

Ainsi, l'équation (c) signifiera que, dans une machine en mouvement, l'accroissement, pendant un temps quelconque, de la demi-somme des forces vives de toutes ses parties, est toujours égal à l'excès du travail moteur sur le travail résistant pendant le même temps.

684. Si la force mouvante P, ou la force résis-

tante Q, est un poids Π , qui descende, dans le premier cas, d'une hauteur verticale h , ou qui monte, dans le second cas, à la même hauteur, le travail moteur ou résistant qui en résultera, aura pour valeur le produit Πh , quel que soit le chemin parcouru par ce poids, de manière que h soit toujours la projection verticale de la ligne droite ou courbe que son centre de gravité a suivie. Si cette ligne est fermée ou présente des sinuosités, il y aura eu alternativement travail moteur et travail résistant; et h étant la différence de niveau du point de départ et du point d'arrivée, Πh sera l'excès du premier travail sur le second. Dans le cas où il n'y a pas d'alternatives, la quantité de travail correspondante à un poids Π élevé à une hauteur h équivaut à la quantité de travail qui répond à un autre poids

Πh
 Π' élevé à une hauteur h' , telle que l'on ait $h' = \frac{\Pi h}{\Pi'}$.

Quelle que soit la force P ou Q, l'intégrale $\int Pdp$ ou $\int Qdq$ est toujours équivalente au produit d'un poids Π et d'une hauteur h ; et pour comparer entre eux et exprimer en nombres des travaux de différente nature, on peut ainsi les assimiler à des poids donnés, élevés à des hauteurs données. On prend alors pour unité de travail, que l'on appelle communément *unité dynamique*, le travail correspondant à un poids de 1000 kilogrammes, qu'on élève à la hauteur d'un mètre, ou qui descend d'un mètre de hauteur verticale. Cela étant, si l'on calcule les valeurs numériques des intégrales $\int Pdp$ et $\int Qdq$, en prenant 1000 kilogrammes pour unité de force, et le mètre pour unité linéaire, les nombres que l'on obtiendra de cette manière exprimeront en unités dynamiques, les quantités de travail représentées par ces intégrales. Une somme quelconque de force vive, telle que $\frac{1}{2} \Sigma mv^2$, par exemple, pourra aussi être exprimée en unités dynamiques; car si l'on appelle l la hauteur due à la vitesse v , g la gravité, et p le poids de m , on aura

$$v^2 = 2gl, \quad p = gm, \quad \frac{1}{2} \Sigma mv^2 = \Sigma pl;$$

et cette somme est de la même nature que les intégrales $\int Pdp$ et $\int Qdq$, ou que le produit Πh .

685. Lorsque la machine part du repos, l'équation (c) se réduit à

$$\frac{1}{2} \Sigma mv^2 = \int \Sigma Pdp - \int \Sigma Qdq. \quad (d)$$

Son premier membre étant une quantité essentiellement positive, il faut que dans les premiers momens le travail moteur l'emporte sur le travail résistant. Mais les vitesses des points de la machine ne pouvant pas croître indéfiniment, ce premier membre atteint son *maximum* au bout d'un certain temps, qui est généralement peu considérable. Par un moyen qui sera indiqué tout-à-l'heure, on fait en sorte qu'à partir de cet instant du *maximum*, la demi-somme $\frac{1}{2} \Sigma mv^2$ des forces vives demeure con-

stante, ou n'éprouve plus que de très petites variations; et l'on dit alors que la machine est parvenue à son état permanent. Dans cet état constant, on a, en différentiant l'équation précédente,

$$\Sigma Pdp = \Sigma Qdq;$$

de manière que la machine n'a plus d'autre effet que de changer, à chaque instant, le travail moteur élémentaire en une quantité égale de travail résistant. Mais il importe d'observer que la quantité $\int \Sigma Qdq$ de travail résistant dans lequel se change le travail moteur $\int \Sigma Pdp$, pendant un temps quelconque, ne comprend pas seulement le travail qu'on veut exécuter, au moyen de cet instrument; l'intégrale $\int \Sigma Qdq$ comprend aussi le travail résistant qui provient du frottement des parties de la machine, entre elles ou contre des corps étrangers, et de la résistance du milieu dans lequel la machine est en mouvement.

Pour avoir égard, par exemple, aux frottemens, il faut, d'après ce qu'on a vu dans le n° 569, ajouter à l'intégrale $\int \Sigma Qdq$, provenant du travail résistant proprement dit, une autre intégrale $\int \Sigma fNds$, dans laquelle f est le coefficient du frottement, N la pression mutuelle des parties frottantes, et ds l'élément de la courbe décrite par leur point de contact. Cette addition changera l'équation (d) en celle-ci :

$$\frac{1}{2} \Sigma mv^2 = \int \Sigma Pdp - \int \Sigma Qdq - \int \Sigma fNds. \quad (e)$$

Il suit de là que quand une machine a atteint son état permanent, la quantité de travail $\int \Sigma Pdp$, produite pendant un temps donné, par les forces mouvantes, n'est pas représentée en totalité par la partie utile $\int \Sigma Qdq$ du travail résistant, laquelle partie est toujours moindre que le travail moteur $\int \Sigma Pdp$, de toute la quantité de travail correspondante aux frottemens et aux autres résistances. Une machine est d'autant meilleure que le travail utile $\int \Sigma Qdq$ approche davantage d'être égal au travail moteur $\int \Sigma Pdp$; mais la première intégrale ne peut, quelle que soit la combinaison des parties de la machine, être égale à la seconde, ni, à plus forte raison, la surpasser. Parmi les machines imparfaites, où le travail utile n'était qu'une très petite fraction du travail moteur, et où la plus grande partie de celui-ci se trouvait absorbée par les frottemens, on peut citer, pour exemple, l'ancienne machine de Marly : le travail moteur consistait en une chute d'une partie considérable des eaux de la Seine, et le travail utile était l'élévation d'une quantité d'eau à une hauteur qui était bien loin de compenser l'exiguité de son volume.

686. Les quantités qui constituent essentiellement une machine sont la partie à laquelle sont appliquées les forces mouvantes, celle qui est en contact avec le corps que l'on a pour objet de mouvoir ou de déformer, et la partie intermédiaire qui transmet l'action des forces mouvantes. Quand on

a satisfait aux conditions de la solidité, il importe pour l'économie des frais de construction et pour la diminution des frottemens, que la masse totale de la machine soit la plus petite possible; mais il y a une autre considération, qui exige que l'on augmente cette masse, et qu'on ajoute aux trois parties essentielles dont elle se compose, une autre pièce qu'on appelle un *volant*, et qui consiste, en général, en un corps solide tournant autour d'un axe fixe horizontal.

Les mouvemens des trois premières parties d'une machine étant alternatifs ou révolutifs, la demi-somme $\frac{1}{2} \Sigma mv^2$ des forces vives qui s'y rapportent, après qu'elle a atteint son *maximum*, devient une quantité périodique; il en est de même, par conséquent, à l'égard du second membre de l'équation (e); en sorte que si la machine était réduite à ses trois parties essentielles, le travail moteur et le travail résistant, en comprenant dans celui-ci les effets des frottemens, l'emporteraient alternativement l'un sur l'autre; et si les variations alternatives du travail moteur $\int \Sigma Pdp$, et de la partie $\int \Sigma fNds$ du travail résistant, n'étaient pas réglées exactement sur les périodes de la machine, la quantité $\int \Sigma Qdq$ de travail utile varierait continuellement. Or, pour la bonne exécution des ouvrages que l'on veut effectuer au moyen d'une machine, il est indispensable, le plus souvent, que le travail utile approche, autant que possible, de l'uniformité; et c'est à remplir cette condition que le volant est destiné.

En effet, soient dm un élément de la masse du volant, et r sa distance à l'axe de rotation; appelons ω la vitesse angulaire autour de cet axe, commune à tous les élémens dm , et qui peut varier d'un instant à un autre; v sera la vitesse absolue de dm ; par conséquent, la somme des forces vives de toute la masse du volant aura pour valeur $\int r^2 \omega^2 dm$, ou, ce qui est la même chose, le produit $\mu \omega^2$, en désignant par μ le moment d'inertie du volant par rapport à son axe, c'est-à-dire, l'intégrale $\int r^2 dm$ étendue à sa masse entière. Si donc on ajoute $\frac{1}{2} \mu \omega^2$ au premier membre de l'équation (e), et si l'on suppose que la demi-somme $\frac{1}{2} \Sigma mv^2$ se rapporte aux trois autres parties de la machine, on aura

$$\frac{1}{2} \mu \omega^2 + \frac{1}{2} \Sigma mv^2 = \int \Sigma Pdp - \int \Sigma Qdq - \int \Sigma fNds;$$

d'où l'on tire

$$\int \Sigma Qdq = R - \frac{1}{2} \mu \omega^2,$$

en faisant, pour abrégé,

$$R = \int \Sigma Pdp - \int \Sigma fNds - \frac{1}{2} \Sigma mv^2.$$

Or, on conçoit que les variations de ω peuvent être réglées sur celles de cette quantité R , de manière que la variation totale de $R - \frac{1}{2} \mu \omega^2$ soit réduite

à de très petites amplitudes, et que, par conséquent, le travail résistant soit à peu près invariable dans l'état permanent de la machine : on conçoit aussi que, toutes choses d'ailleurs égales, les variations de la vitesse ω du volant seront d'autant moindres, que son moment d'inertie μ sera plus grand.

687. Par l'addition d'un volant, la dépense de travail moteur nécessaire pour mettre la machine en mouvement et pour accroître la force vive totale jusqu'à ce qu'elle soit parvenue au *maximum*, se trouve augmentée; mais quand la machine est arrivée à son état permanent, les masses de ses différentes parties n'ont plus d'influence sur son travail, si ce n'est celle de leur poids sur les frottemens.

Pendant le mouvement de la machine, s'il survient un choc de ses parties entre elles ou contre des corps étrangers, et qu'après le choc les points de contact aient une vitesse commune dans le sens normal aux surfaces, il y aura diminution de force vive dans le système; si les parties qui se sont choquées se séparent, en vertu de leur élasticité, il y aura encore perte de force vive, quand ces parties ne seront pas parfaitement élastiques; et quand elles le seront, il y aura perte de force vive dans la première partie du choc, puis une augmentation précisément égale à cette perte dans la seconde partie (n° 573). Par conséquent, pour ramener la machine à son état permanent, sans qu'il y ait diminution dans la quantité de travail résistant, il faudra que les forces mouvantes fassent une nouvelle dépense de travail moteur, semblable à celle qui a eu lieu à l'origine du mouvement, et égale à la moitié de la force vive perdue dans le choc. C'est pourquoi, indépendamment du dommage que les chocs produisent dans les machines, il est encore nécessaire de les éviter, pour l'économie des forces mouvantes.

688. En général, le travail résistant qui provient des frottemens et de l'action du milieu, est une quantité continuellement croissante; pour qu'il y ait un travail utile, ou, seulement, pour que le mouvement de la machine soit entretenu, il est donc nécessaire que la quantité de travail moteur croisse également avec le temps, dans un rapport au moins égal à celui de l'accroissement du travail résistant. Si cela n'a pas lieu, le travail résistant finira par être égal au travail moteur : à cet instant, la demi-somme des forces vives de tous les points du système sera nulle; les vitesses de tous ces points seront zéro, et la machine s'arrêtera et se trouvera réduite au repos.

Aux frottemens et aux résistances des milieux qui produisent cet épuisement graduel de la force vive, on peut encore ajouter la communication d'une partie du mouvement de la machine à ses supports, laquelle partie va ensuite se perdre dans le sol sur lequel la machine est établie. Cette communication ne provient pas seulement du dé-

faut de solidité des supports; elle a aussi lieu en vertu de leur élasticité, qui permet au mouvement de s'y propager de la même manière que le son; et il peut résulter de cette propagation une diminution de vitesse des parties de la machine, semblable à celle qui serait produite par la résistance d'un milieu. J'ai donné un exemple de cet effet singulier, dans le mouvement d'un pendule suspendu à l'extrémité d'une verge élastique et horizontale, d'une longueur indéfinie*.

Quand on supprime l'action des forces mouvantes, et que le travail utile de la machine a aussi cessé, l'équation des forces vives se change en celle-ci :

$$\frac{1}{2} \Sigma mv^2 = \frac{1}{2} \Sigma mk^2 - \int \Sigma f N ds;$$

Σmk^2 étant la somme des forces vives de tous les points du système à cet instant, Σmv^2 cette somme à une époque subséquente, et $\int \Sigma f N ds$ comprenant le travail qui provient des frottemens, de la résistance du milieu et de la perte du mouvement par les supports. Or, ce dernier terme sera bientôt égal à $\frac{1}{2} \Sigma mk^2$; la force vive de la machine se trouvera complètement épuisée, et la machine cessera de se mouvoir, comme on l'a déjà dit dans le n° 569.

689. Quand un homme transporte son propre poids, que j'appellerai Π , à une hauteur verticale h au-dessus de son point de départ, la quantité de travail produite est exprimée par Πh , d'après la règle du n° 684; mais cette quantité donnerait une idée très imparfaite des efforts musculaires qui ont été faits, et de la force totale que cet homme a développée. Il serait difficile d'en obtenir une mesure exacte; on peut seulement faire voir qu'elle doit surpasser, souvent de beaucoup, la quantité précédente, qui serait nulle si la hauteur h était zéro, quoique, certainement, il y ait une quantité de travail mécanique correspondante à la marche d'un homme sur un plan horizontal.

Dans cette marche, je suppose que l'homme ait d'abord le pied gauche en avant du pied droit; son centre de gravité est alors abaissé, au-dessous de sa position naturelle, d'une quantité que je désignerai par ϵ . En s'appuyant sur son pied gauche, et s'aidant du frottement de ce pied contre le sol, l'homme ramène son pied droit au niveau du pied gauche, puis le pied droit devance le pied gauche, et va se poser sur le sol; ce qui fait un pas entier, composé de deux parties. Or, dans la première partie, l'homme soulève son centre de gravité de la hauteur ϵ , et produit par là une quantité de travail égale à $\Pi \epsilon$; il imprime, au même instant, à ce point une vitesse horizontale, que je désignerai par α , à la fin du premier demi-pas; ce qui

* Additions à la Connaissance des Temps pour l'année 1833, page 26.

répond à une autre quantité de travail équiva-

lente à la demi-force vive $\frac{1}{2} \frac{\Pi a^2}{g}$, en désignant

par g la gravité. On devrait encore ajouter à $\frac{1}{2} \frac{\Pi a^2}{g}$, la partie de la demi-somme des forces

vives provenant des vitesses relatives de tous les autres points du corps (n° 570); mais j'en ferai abstraction dans cette évaluation, qui ne peut être qu'un aperçu. Je supposerai aussi que le second demi-pas a lieu en vertu de la vitesse acquise à la fin du premier, et du poids du corps qui retombe sur le sol, de manière que, pendant le second demi-pas, l'homme n'exerce plus aucun effort, et que les vitesses verticale et horizontale, dont son centre de gravité se trouve encore animé à la fin du pas entier, soient détruites par le choc et le frottement de son pied droit contre le sol. Dans cette hypothèse, la quantité de travail de l'homme

pendant le pas entier, sera la somme $\Pi \epsilon + \frac{1}{2} \frac{\Pi a^2}{g}$,

ou $\Pi (\epsilon + a)$, en appelant a la hauteur due à la vitesse a , de sorte qu'on ait $a^2 = 2ga$.

Il suit de là que dans un nombre n de pas égaux et semblables, la quantité de travail d'un homme ou d'un animal, portant un fardeau et marchant sur une route horizontale, aura pour valeur $nK(\epsilon + a)$, en désignant par K son poids Π augmenté de celui du fardeau. Si le poids total a été élevé verticalement à une hauteur h au-dessus du point de départ, il faudra ajouter Kh à la quantité $nK(\epsilon + a)$; et si le fardeau est traîné sur une route, où il éprouve un frottement qui soit représenté par une partie F de son poids, il en résultera une autre augmentation de travail égale à FL , en appelant L la longueur du trajet.

690. Dans le calcul des effets des machines en mouvement, il est souvent utile de distinguer les vitesses communes et les vitesses relatives de leurs différens points. Pour cela, soient toujours x, y, z , au bout du temps t , les coordonnées du point quelconque dont la masse est m ; à cet instant, les composantes de sa vitesse absolue seront $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$; et, au bout du temps $t + dt$, les coordonnées de ce même point deviendront $x + dx, y + dy, z + dz$. Or, on peut décomposer le mouvement du système, pendant l'instant dt , en un mouvement de translation et de rotation commun à tous ses points, dans lequel leurs distances soient invariables, et en des mouvemens particuliers où ces distances varient convenablement. J'appellerai $d'x, d'y, d'z$, les accroissemens de x, y, z , qui proviennent du mouvement commun, et dx, dy, dz , ceux qui résultent du mouvement relatif de m , de sorte qu'on ait

$$dx = d'x + dx, \quad dy = d'y + dy, \quad dz = d'z + dz.$$

Pour ce point m , j'appellerai aussi u', v', w' , les trois composantes de la vitesse commune qu'on regardera comme des fonctions données de t, x, y, z , et qui seront

$$u' = \frac{d'x}{dt}, \quad v' = \frac{d'y}{dt}, \quad w' = \frac{d'z}{dt};$$

celles de sa vitesse relative seront aussi $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$,

$\frac{dx}{dt}$; on aura

$$\frac{dx}{dt} = u' + \frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = v' + \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt} = w' + \frac{dz}{dt},$$

pour les composantes de sa vitesse absolue; et en différenciant, il en résultera

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{du'}{dt} + \frac{d^2x}{dt^2}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{dv'}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{dw'}{dt} + \frac{d^2z}{dt^2}, \end{aligned} \right\} (f)$$

pour les forces accélératrices de ce point m , suivant les axes des coordonnées; les différentielles relatives à t qui sont indiquées, étant prises par rapport à cette variable et aux coordonnées x, y, z , regardées comme des fonctions de t .

Si ce point m est astreint à se mouvoir sur une surface qui peut être fixe ou mobile, mais dont la forme est invariable, il devra demeurer constamment sur cette surface, en vertu de sa vitesse absolue, et l'on pourra aussi supposer qu'il y resterait constamment, en vertu du mouvement commun du système. En représentant par $L=0$, l'équation de la surface, L sera une fonction donnée des coordonnées de m , rapportées à des axes mobiles qui participent au mouvement commun, et cette quantité pourra être changée en une fonction du temps et des coordonnées de m rapportées à des axes fixes, c'est-à-dire, en une fonction de t, x, y, z . L'équation $L=0$ devra subsister, lorsqu'on y remplacera ces quatre variables, soit par $t + dt, x + dx, y + dy, z + dz$, dans le mouvement absolu de m , soit par $t + dt, x + d'x, y + d'y, z + d'z$, dans le mouvement commun du système. En négligeant les infiniment petits du second ordre, on aura donc simultanément

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} + \frac{dL}{dx} (d'x + dx) \\ + \frac{dL}{dy} (d'y + dy) + \frac{dL}{dz} (d'z + dz) &= 0, \\ \frac{dL}{dt} + \frac{dL}{dx} d'x + \frac{dL}{dy} d'y + \frac{dL}{dz} d'z &= 0, \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$-\frac{dL}{dx} \delta x + \frac{dL}{dy} \delta y + \frac{dL}{dz} \delta z = 0. \quad (g)$$

Cela posé, nous allons chercher la somme des forces vives dues aux vitesses relatives de tous les points du système, et la comparer à la somme des forces vives qui résultent de leurs vitesses absolues.

691. Reprenons, pour cela, la formule générale du n° 532, de laquelle on a déduit l'équation (a) du n° 681, et formons successivement les termes de cette formule, relatifs aux différentes sortes de forces qui peuvent agir sur le système que l'on considère.

Désignons d'abord par P une des forces extérieures et données; δp étant la projection du déplacement de son point d'application, sur sa direction, et en regardant cette projection comme une quantité positive ou négative, selon qu'elle tombe sur la direction même de P ou sur son prolongement, on aura, comme dans le n° 682,

$$m(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = P\delta p,$$

pour la partie de la formule citée, qui résulte de cette force P .

Soit aussi R l'action mutuelle de deux points du système dont les masses sont m et m' ; appelons r la distance mm' , dont R est une certaine fonction; x, y, z, x', y', z' , étant les coordonnées de m et m' , on aura

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2;$$

et si δr exprime la variation de r qui résulte de leurs accroissemens $\delta x, \delta y, \delta z, \delta x', \delta y', \delta z'$, on aura aussi

$$r\delta r = (x - x')(\delta x - \delta x') + (y - y')(\delta y - \delta y') + (z - z')(\delta z - \delta z').$$

Les composantes de la force R appliquée au point m , seront

$$mX = \pm \frac{(x - x')R}{r},$$

$$mY = \pm \frac{(y - y')R}{r},$$

$$mZ = \pm \frac{(z - z')R}{r},$$

et celles de la même force appliquée au point m' ,

$$m'X' = \pm \frac{(x' - x)R}{r},$$

$$m'Y' = \pm \frac{(y' - y)R}{r},$$

$$m'Z' = \pm \frac{(z' - z)R}{r};$$

d'où l'on conclut

$$m(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) + m'(X'\delta x' + Y'\delta y' + Z'\delta z') = \pm R\delta r,$$

pour la partie de la formule générale, provenant de la force R ; le signe supérieur ou le signe inférieur ayant lieu, selon que cette force est répulsive ou attractive.

Si le point m est astreint à demeurer sur la surface dont on a représenté l'équation par $L=0$, dans le numéro précédent, et que l'on appelle ω l'élément de cette surface auquel le point m répond au bout du temps t , et ωU la résistance qu'il éprouve, cette force sera normale à la position actuelle de ω ; on aura donc pour ses composantes

$$mX = \omega UV \frac{dL}{dx}, \quad mY = \omega UV \frac{dL}{dy}, \quad mZ = \omega UV \frac{dL}{dz},$$

en faisant, pour abréger,

$$V = \left[\left(\frac{dL}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dL}{dy} \right)^2 + \left(\frac{dL}{dz} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}};$$

et si l'on fait aussi

$$V \left(\frac{dL}{dx} \delta x + \frac{dL}{dy} \delta y + \frac{dL}{dz} \delta z \right) = \delta u,$$

il en résultera $\omega U \delta u$, pour le terme de la formule générale qui provient de la résistance ωU . Le facteur U exprimera cette résistance rapportée à l'unité de surface; δu sera la projection du déplacement de m sur la normale à l'élément ω ; elle aura un signe ambigu, à cause du radical V , et l'on regardera δu comme une quantité positive ou négative, selon que la projection du déplacement de m tombera sur la direction même de la résistance ωU , ou sur son prolongement.

Outre la résistance normale de la surface sur laquelle le point m est assujéti à se mouvoir, il éprouvera encore une résistance tangentielle provenant du frottement contre cette surface; et si l'on désigne cette force par ωF , et par δs la projection du déplacement du point matériel m sur sa trajectoire, il en résultera $\omega F \delta s$, pour le terme correspondant de la formule du n° 532.

D'après cela, cette formule pourra s'écrire ainsi :

$$\Sigma m \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \delta x + \frac{d^2 y}{dt^2} \delta y + \frac{d^2 z}{dt^2} \delta z \right) = \Sigma P \delta p \pm \Sigma R \delta r + \Sigma \omega U \delta u - \Sigma \omega F \delta s; \quad (h)$$

la somme Σ du premier membre répondant à tous les points du système, et les sommes Σ du second membre s'étendant, la première aux points qui sont soumis à des forces motrices extérieures, la seconde aux actions mutuelles de tous les points du système pris deux à deux, la troisième et la quatrième à tous les éléments des surfaces résistantes et frottantes.

Cela posé, si l'obligation d'une partie des points du système, de demeurer sur ces surfaces, est la seule condition qui restreigne les mouvemens du système entier, on pourra maintenant considérer tous ces points comme entièrement libres, et faire telle hypothèse qu'on voudra sur les variations δx , δy , δz , des coordonnées d'un point quelconque.

692. Je supposerai d'abord qu'on prenne

$$\delta x = dx, \quad \delta y = dy, \quad \delta z = dz;$$

de sorte que le déplacement du point quelconque m soit celui qui a lieu effectivement pendant l'instant dt . On aura, en même temps, $\delta r = dr$; et l'on remplacera δp , δu , δs , par dp , du , ds , qui représentent les projections du déplacement réel du point m sur les directions des forces P , ωU , ωF . En appelant v , la vitesse d'un point quelconque m , et observant qu'on a

$$\frac{d^2 x}{dt^2} dx + \frac{d^2 y}{dt^2} dy + \frac{d^2 z}{dt^2} dz = \frac{1}{2} d \cdot v^2,$$

l'équation (h) deviendra

$$\frac{1}{2} d \cdot \Sigma m v^2 = \Sigma P dp \pm \Sigma R dr + \Sigma \omega U du - \Sigma \omega F ds.$$

En intégrant, on aura donc

$$\frac{1}{2} \Sigma m v^2 - \frac{1}{2} \Sigma m k^2 = \int \Sigma P dp \pm \int \Sigma R dr + \int \Sigma \omega U du - \int \Sigma \omega F ds, \quad (i)$$

k étant la valeur initiale de v , et les intégrales commençant à l'origine du mouvement.

Le terme $\int \Sigma P dp$ comprendra la partie du travail moteur qui répond au poids du système; et si l'on appelle Π ce poids, et ξ la hauteur verticale dont le centre de gravité sera tombé pendant le temps t , cette partie sera égale à $\Pi \xi$,

Lorsque les distances des points du système que l'on considère demeureront invariables pendant le mouvement, on aura $dr = 0$, et le terme $\int \Sigma R dr$ disparaîtra de l'équation (i). S'il s'agit d'un fluide, ce terme comprendra les attractions ou répulsions mutuelles de ses points, qui s'étendent à de grandes distances; il comprendra aussi les actions mutuelles qu'on appelle proprement *forces moléculaires* (n° 589), qui ne s'étendent qu'à des distances insensibles, et qui produisent les pressions intérieures, auxquelles on n'a point eu égard en formant l'équation (i). La valeur de cette intégrale $\int \Sigma R dr$ dépendra du changement de forme et des condensations ou dilatations du fluide pendant son mouvement; et pour les très petites variations de densité qui ont lieu dans le liquide, elle pourra varier dans de très grands rapports, à raison des forces moléculaires ou des pressions intérieures qui en résultent (n° 577).

Les sommes $\Sigma \omega U du$ et $\Sigma \omega F ds$ comprises sous les deux dernières intégrales, sont elles-mêmes des intégrales doubles étendues à tous les élémens ω des surfaces résistantes et frottantes. Si la partie du

système qui frotte contre une de ces surfaces est un corps solide, la force ωF sera indépendante de la vitesse de ce corps, et proportionnelle, pour chaque élément ω , à la pression correspondante, laquelle est égale et contraire à la résistance ωU . Si cette partie frottante du système est un fluide, la force ωF dépendra de sa vitesse relative, et sera indépendante de la pression (n° 457). Lorsque la surface dont $L = 0$ est l'équation, sera immobile, la projection du déplacement de m sur la normale à cette surface sera nulle, puisque le point m est assujéti à demeurer sur cette surface; on aura donc $du = 0$; ce qui fera disparaître l'intégrale $\int \Sigma \omega U du$; et si l'on fait, de plus, abstraction du frottement, l'équation (i) se réduira à l'équation ordinaire des forces vives.

693. Prenons actuellement

$$\delta x = d_1 x, \quad \delta y = d_1 y, \quad \delta z = d_1 z;$$

de manière que les déplacements des points du système que suppose l'équation (h), soient leurs déplacements relatifs. Désignons par $d_1 p$, $d_1 u$, $d_1 s$, les projections des déplacements relatifs des points où sont appliquées les forces P , U , F , sur leurs directions. Les valeurs de δp , δu , δs , que nous employons, seront $d_1 p$, $d_1 u$, $d_1 s$. De plus, les autres parties $d'x$, $d'y$, $d'z$, des différentielles totales dx , dy , dz , n'influant pas, par hypothèse, sur les distances mutuelles des points du système, δr se changera dans la différentielle dr , comme dans le numéro précédent. L'équation (h) deviendra donc

$$\Sigma m \left(\frac{d^2 x}{dt^2} d_1 x + \frac{d^2 y}{dt^2} d_1 y + \frac{d^2 z}{dt^2} d_1 z \right) = \Sigma P d_1 p \pm \Sigma R dr + \Sigma \omega U d_1 u - \Sigma \omega F d_1 s. \quad (k)$$

Si l'on appelle v , la vitesse relative du point m , dont les composantes sont $\frac{d_1 x}{dt}$, $\frac{d_1 y}{dt}$, $\frac{d_1 z}{dt}$, on aura

$$v^2 = \left(\frac{d_1 x}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d_1 y}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d_1 z}{dt} \right)^2,$$

et, en différenciant,

$$\frac{1}{2} d \cdot v^2 = \frac{dd_1 x}{dt^2} d_1 x + \frac{dd_1 y}{dt^2} d_1 y + \frac{dd_1 z}{dt^2} d_1 z.$$

En vertu des équations (f), on aura donc

$$\frac{d^2 x}{dt^2} d_1 x + \frac{d^2 y}{dt^2} d_1 y + \frac{d^2 z}{dt^2} d_1 z = \frac{1}{2} d \cdot v^2 + \frac{dv^2}{dt} d_1 x + \frac{dv^2}{dt} d_1 y + \frac{dv^2}{dt} d_1 z.$$

D'ailleurs, si l'on met $d_1 x$, $d_1 y$, $d_1 z$, dans l'expres-

sion de δu du n° 691, pour avoir celle de $d_i u$, on aura

$$d_i u = V \left(-\frac{dL}{dx} d_i x + -\frac{dL}{dy} d_i y + -\frac{dL}{dz} d_i z \right);$$

quantité nulle, en vertu de l'équation (g). Au moyen

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \Sigma m v_i^2 - \frac{1}{2} \Sigma m k_i^2 &= \int \Sigma P d_i p \pm \int \Sigma R d_i r - \int \Sigma \omega F d_i s \\ &- \int \Sigma m \left(-\frac{dw'}{dt} d_i x + -\frac{dw'}{dt} d_i y + -\frac{dw'}{dt} d_i z \right) \end{aligned} \right\} (l)$$

k_i étant la valeur initiale de v' , et les intégrales commençant à l'origine du mouvement.

694. Cette équation (l) fera connaître l'accroissement, pendant le temps t , de la demi-somme des forces vives, dues aux vitesses relatives de tous les points du système.

En faisant directement dans la formule générale du n° 532, l'hypothèse qui nous a conduits à l'équa-

$$\frac{1}{2} d \cdot m v_i^2 = \Sigma m \left[\left(X - \frac{dw'}{dt} \right) d_i x + \left(Y - \frac{dw'}{dt} \right) d_i y + \left(Z - \frac{dw'}{dt} \right) d_i z \right]$$

la somme Σ du second membre s'étendant à toutes les forces provenant des résistances normales des surfaces fixes ou mobiles, que les valeurs prises pour δx , δy , δz , ont la propriété de faire disparaître. Or, si l'on appelle H la force dont les trois composantes sont

$$m \left(X - \frac{dw'}{dt} \right), \quad m \left(Y - \frac{dw'}{dt} \right), \quad m \left(Z - \frac{dw'}{dt} \right),$$

et $d_i h$ la projection du déplacement relatif de son point d'application sur sa direction, on aura

$$\begin{aligned} m \left(X - \frac{dw'}{dt} \right) d_i x + m \left(Y - \frac{dw'}{dt} \right) d_i y \\ + m \left(Z - \frac{dw'}{dt} \right) d_i z = \pm H d_i h, \end{aligned}$$

selon que cette projection $d_i h$ tombera sur la direction même de la force H , ou sur son prolongement. Donc en conservant H et $d_i h$ dans le premier cas, et employant L et $d_i l$ dans le second, on en conclura

$$\frac{1}{2} \Sigma m v_i^2 - \frac{1}{2} \Sigma m k_i^2 = \int \Sigma H d_i h - \int \Sigma L d_i l;$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \Sigma m (v^2 - v_i^2) - \Sigma m (k^2 - k_i^2) &= \int \Sigma P (d_p - d_i p) \\ &+ \frac{1}{2} \int \Sigma m \left(-\frac{dw'}{dt} d_i x + -\frac{dw'}{dt} d_i y + -\frac{dw'}{dt} d_i z \right) + \int \Sigma \omega U d_i u. \end{aligned} \right\} (2b)$$

Si les forces P se réduisent aux poids des différentes parties du système; que l'on appelle Π le poids total, et z' la hauteur verticale que décrit son cen-

tre de gravité pendant le temps t , dans le mouve-

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} d \cdot \Sigma m v_i^2 + \Sigma m \left(-\frac{dw'}{dt} d_i x + -\frac{dw'}{dt} d_i y + -\frac{dw'}{dt} d_i z \right) \\ = \Sigma P d_i p \pm \Sigma R d_i r - \Sigma \omega F d_i s; \end{aligned}$$

et, en intégrant, il en résultera

tion (l), c'est-à-dire, en y mettant $d_i x$, $d_i y$, $d_i z$, au lieu de δx , δy , δz , on aura

$$\begin{aligned} \Sigma m \left(\frac{d^2 x}{dt^2} d_i x + \frac{d^2 y}{dt^2} d_i y + \frac{d^2 z}{dt^2} d_i z \right) \\ = \Sigma m (X d_i x + Y d_i y + Z d_i z), \end{aligned}$$

ou bien, d'après ce qui précède,

la somme $\Sigma H d_i h$ s'étendant à toutes les forces mouvantes du système, et la somme $\Sigma L d_i l$ à toutes les forces résistantes.

Cette dernière équation n'est autre chose que l'équation (l) présentée sous une forme différente. En la comparant à l'équation (d), on voit que le principe des forces vives a encore lieu à l'égard des vitesses relatives des points du système, telles qu'elles ont été définies dans le n° 690, pourvu que l'on remplace les forces données P et Q , par d'autres forces H et L qui dépendent des premières et du mouvement commun du système.

Ce théorème est dû à M. Coriolis. Il peut être employé utilement dans beaucoup de questions étrangères à ce traité de Mécanique rationnelle, et pour lesquelles nous renverrons au mémoire de l'auteur sur le principe des forces vives dans les mouvements relatifs des machines *.

695. Le terme $\int \Sigma R d_i r$, qui provient des forces moléculaires, est le même dans les deux équations (i) et (l); le plus souvent, le terme qui répond aux frottements est aussi le même dans le mouvement absolu et dans le mouvement relatif du système, et ne change pas, par conséquent, en passant d'une équation à l'autre; alors, en retranchant la seconde de ces équations de la première, on aura

tre de gravité pendant le temps t , dans le mouve-

* Journal de l'École Polytechnique, 21^e cahier.

ment commun à tous ses points, il est aisé de voir que l'on aura aussi

$$f \Sigma P (dp - d_p) = \Pi \xi'.$$

De plus, s'il n'y a qu'une seule surface résistante, et que ce soit, par exemple, un plan qui se meut parallèlement à lui-même, on pourra prendre, pour le mouvement commun du système, le mouvement donné de ce plan, car il satisfait aux deux conditions du n° 690 : il ne changera pas les distances mutuelles des points du système, et il n'empêchera pas les points qui sont en contact avec ce plan mobile, de demeurer à sa surface. D'ailleurs, il est évident que ce mouvement étant perpendiculaire au plan mobile, il n'influera aucunement sur les vitesses relatives des points qui glissent sur ce plan, non plus que sur les trajectoires qu'ils y décrivent; d'où il résulte que le travail résistant dû au frottement contre ce plan, sera le même dans le mouvement absolu et dans le mouvement relatif, comme le suppose l'équation (m).

Pour simplifier encore cette équation, je suppose que le mouvement du plan résistant soit uniforme; en sorte que tous ses points décrivent des perpendiculaires à sa position initiale, avec une vitesse

$$\frac{1}{2} \Sigma m (k^2 - k_i^2) - \frac{1}{2} \Sigma m (v^2 - v_i^2) + \Pi a t \cos \alpha = a f Q dt. \quad (n)$$

La vitesse v_i est la résultante de v et de la vitesse a prise en sens contraire de sa direction; si donc, on représente par ϵ , l'angle que fait la direction de la vitesse v avec celle de a , on aura

$$v_i^2 = v^2 - 2av \cos \epsilon + a^2;$$

et si l'on désigne par δ la valeur initiale de ϵ , on aura de même

$$k_i^2 = k^2 - 2ak \cos \delta + a^2;$$

d'où il résulte

$$\frac{1}{2} \Sigma m (k^2 - k_i^2) = a \Sigma m k \cos \delta - \frac{1}{2} a^2 \Sigma m,$$

$$\frac{1}{2} \Sigma m (v^2 - v_i^2) = a \Sigma m v \cos \epsilon - \frac{1}{2} a^2 \Sigma m;$$

ce qui change l'équation (n) en celle-ci,

$$\Sigma m k \cos \delta - \Sigma m v \cos \epsilon + \Pi t \cos \alpha = f Q dt, \quad (o)$$

après qu'on a supprimé le facteur a commun à tous ses termes.

Les sommes $\Sigma m k \cos \delta$ et $\Sigma m v \cos \epsilon$ expriment, au commencement et à la fin du temps t , les quantités de mouvement de tous les points du système, dans le sens perpendiculaire au plan donné; le produit $\Pi t \cos \alpha$ est la quantité de mouvement produite suivant la même direction par le poids Π du système, pendant la durée du temps t ; et l'intégrale $f Q dt$ est la quantité de mouvement détruite pendant ce temps par la résistance du plan donné. Or, il est évident que cette dernière quantité doit être égale à l'excès de la première somme sur la seconde, aug-

commune, qui sera rendue, par un moyen quelconque, invariable et indépendante de l'action du système sur ce plan. Ses composantes u' , v' , w' , seront constantes, et l'on aura

$$f \Sigma m \left(-\frac{du'}{dt} dx + \frac{dv'}{dt} dy + \frac{dw'}{dt} dz \right) = 0.$$

En désignant cette vitesse par a , et par α l'angle que sa direction fait avec celle de la pesanteur, on aura aussi

$$\xi' = at \cos \alpha.$$

Soit, en outre, Q la pression exercée au bout du temps t , sur la surface entière du plan donné, et dans le sens de la vitesse a . Le travail résistant qui répond à cette force prise en sens contraire de sa direction, c'est-à-dire, à la résistance du plan, sera $-f Q a dt$, pendant la durée du temps t , en supposant que l'intégrale s'évanouisse avec cette variable. En faisant passer le facteur a en dehors du signe f , nous aurons donc

$$f \Sigma m U du = - a f Q dt,$$

pour la valeur du dernier terme de l'équation (m), laquelle deviendra

menté de la quantité $\Pi t \cos \alpha$; en sorte que l'équation précédente, qui exprime cette égalité peut être regardée comme une vérification de notre analyse.

696. Lorsque la vitesse k de chaque point du système se changera brusquement dans la vitesse v , l'action du système sur le plan donné sera une percussion; pendant sa durée très courte, on pourra négliger l'effet $\Pi t \cos \alpha$ de la pesanteur; et la quantité de mouvement détruite par le plan sera l'excès de $\Sigma m k \cos \delta$ sur $\Sigma m v \cos \epsilon$.

Si le système est un corps solide situé au-dessus du plan, et qui demeure juxta-posé à sa surface après le choc, la composante $v \cos \epsilon$ de la vitesse v sera la même, à cet instant, pour tous les points du corps, et égale à la constante a ; en différentiant l'équation (o) par rapport à t , on aura donc

$$\Pi \cos \alpha = Q;$$

et, en effet, la vitesse du plan étant invariable, par hypothèse, il faut que sa résistance détruise incessamment les accélérations de la gravité, qui auraient lieu perpendiculairement à sa surface; il faut donc que cette force soit égale et contraire à la composante du poids Π suivant cette direction, et que la pression Q soit égale à cette composante.

On peut remarquer que, quand l'angle α est obtus, la valeur précédente de Q a le signe $-$. Mais on a supposé plus haut que la pression exercée sur ce plan était dirigée dans le sens de la vitesse a ; et, si le contraire avait lieu il faudrait changer le signe de Q dans toutes les équations précédentes. Or, la

pression Q s'exerce effectivement en sens contraire de la vitesse a , lorsque l'angle α est obtus; la valeur de Q est donc alors $-\Pi \cos \alpha$, ou, autrement dit, cette valeur est toujours $\Pi \cos \alpha$, abstraction faite du signe.

697. L'équation (o) évidente en elle-même, peut servir à déterminer la pression d'une veine fluide en mouvement sur un plan AB (fig. 142), animé de la vitesse a perpendiculaire à ce plan, et dont la direction fait, avec celle de la pesanteur, un angle α .

Pour fixer les idées, supposons que le liquide sorte d'un vase par un orifice horizontal, et qu'il forme, au-dessous de la contraction de la veine (n° 677), un cylindre vertical dont tous les points ont une vitesse commune et verticale, que nous désignerons par γ . Supposons aussi que le niveau du liquide soit entretenu à une hauteur constante dans le vase; ce qui rendra la vitesse γ indépendante du temps.

Jusqu'à une section horizontale CD, faite à une petite distance au-dessus du plan AB, la veine conservera sa forme cylindrique et sa vitesse γ ; elle s'étendra ensuite sur ce plan, et finira par le déborder. Au bout d'un certain temps, le fluide parviendra à un état permanent dans lequel la vitesse de chaque molécule ne dépendra plus que du lieu qu'elle occupe, et où la pression en un point quelconque du plan AB sera aussi indépendante du temps. C'est dans cet état qu'il s'agira de déterminer la pression totale Q , exercée sur la surface entière du plan.

La partie de cette pression due au poids du liquide, sera la composante de ce poids, perpendiculaire au plan AB, défalcation faite de la partie de ce même poids, qui est soutenue par les parois du vase d'où le liquide s'écoule. Comme il sera toujours facile d'y avoir égard, dans chaque cas particulier, nous en ferons abstraction, et nous ferons, en conséquence, $\Pi = 0$, dans l'équation (o). Il est évident, qu'on pourra aussi, dans les sommes $\Sigma mk \cos \delta$ et $\Sigma mv \cos \epsilon$, ne pas tenir compte des molécules du liquide situées au-dessus de CD, puisqu'elles conservent toujours la même vitesse, ce qui fait disparaître la différence de ces deux sommes. Enfin si le diamètre de la veine fluide est très petit, l'épaisseur de la couche liquide sera aussi très petite, à une petite distance autour de l'axe de la veine. A cette distance, les vitesses relatives des points de la couche seront sensiblement parallèles au plan AB, dans toute l'épaisseur de la couche, ou, ce qui est la même chose, leurs composantes perpendiculaires à ce plan seront égales à a . De plus, cette partie du fluide comprise entre AB et CD sera beaucoup plus considérable que la partie voisine de l'axe de la veine, si la surface du plan AB est très grande par rapport à la section CD; on pourra donc alors prendre a , sans erreur sensible, pour la composante $v \cos \epsilon$ de la vitesse v de chaque point du fluide contenu entre AB et CD.

Cela posé, soit C'D' une autre section de la veine

fluide, faite au-dessus de CD, et telle que le volume compris entre CD et C'D' soit équivalent au volume de fluide compris entre AB et CD. Appelons θ le temps que le premier volume du liquide emploie à traverser la section CD et à se changer dans le second volume. Supposons que les sommes $\Sigma mk \cos \delta$ et $\Sigma mv \cos \epsilon$, de l'équation (o), étendues à tous les points du second volume, se rapportent au commencement et à la fin du temps θ . Au commencement, tous ces points étaient situés au-dessus de CD, et avaient, conséquemment, une vitesse γ , faisant un angle α avec la vitesse a ; pour un point quelconque m , on a donc

$$k = \gamma, \quad \delta = \alpha, \quad k \cos \delta = \gamma \cos \alpha.$$

A la fin du temps θ , on a, comme on vient de le dire,

$$v \cos \epsilon = a,$$

pour un point quelconque m du liquide contenu entre AB et CD. Si donc on appelle μ la masse de ce liquide, il en résultera

$$\Sigma mk \cos \delta - \Sigma mv \cos \epsilon = \mu (\gamma \cos \alpha - a).$$

D'ailleurs, la pression Q étant constante, l'intégrale $\int Q dt$ est égale au produit $Q\theta$, pour la durée du temps θ ; d'après l'intégrale (o), nous aurons donc

$$\mu (\gamma \cos \alpha - a) = Q\theta.$$

Soit n le nombre de fois que le temps θ est contenu dans un temps t quelconque; $n\mu$ sera la masse du liquide qui traversera la section CD pendant le temps t . Mais cette masse sera aussi $\rho c \gamma t$, en appelant ρ la densité du liquide, c l'aire de la section CD, et observant que γ est la vitesse constante de l'écoulement à travers cette section; on aura, par conséquent,

$$n\mu = \rho c \gamma t;$$

si l'on multiplie l'équation précédente par n , que l'on y substitue cette valeur de $n\mu$, et qu'on supprime ensuite le facteur t , commun à tous ses termes, on a finalement

$$Q = \rho c \gamma (\gamma \cos \alpha - a),$$

pour la valeur de la pression qu'on se proposait de déterminer.

On devra se rappeler que cette formule suppose l'angle α aigu; quand il sera obtus, il faudra, comme on l'a dit plus haut, changer le signe de Q ; en sorte que l'on aura alors

$$Q = \rho c \gamma (\gamma \cos \alpha + a).$$

Ces deux expressions de Q supposent aussi que le plan AB est entièrement recouvert par la veine fluide épanouie sur sa surface; ce qui exige que α ne soit pas un angle droit, et, qu'en général, il s'écarte sensiblement de 90°. Quand le mouvement du

plan est vertical, on a $\alpha = 0$, ou $\alpha = 180^\circ$, et, conséquemment,

$$Q = \rho c \gamma (\gamma \mp \alpha);$$

le signe supérieur ayant lieu lorsque le plan se meut dans le sens de la pesanteur, et le signe inférieur dans le cas contraire. Si l'on a $\alpha = 0$, et que γ soit

la vitesse due à la hauteur h , et g la gravité, on aura

$$Q = 2g\rho c h;$$

en sorte que la pression Q sera, dans ce cas, le poids d'une portion de la veine cylindrique égale en longueur à h .

FIN.

ERRATA.

Page 48, 1^{re} colonne, ligne 12 en remontant,

$$X = bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right), \text{ lisez } X = \sqrt{bc} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right)$$

Page 292, formule (3), 3^e ligne,

$$+ (w'_1 + p'_1 b' -) \text{ lisez } + (w'_1 + p'_1 b' -)$$

Page 419, formule b ,

$$1 \left[\quad \right] \text{ lisez } \frac{1}{2} \left[\quad \right]$$