www.e-rara.ch

Traité des projections des cartes géographiques

Germain, Adrien Adolphe Charles

Paris, [1865]

ETH-Bibliothek Zürich

Shelf Mark: Rar 18793

Persistent Link: https://doi.org/10.3931/e-rara-74932

Première partie.

www.e-rara.ch
Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien – von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material – from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d'imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L'éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes – des débuts de l'imprimerie jusqu'au 20e siècle.

e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

Nutzungsbedingungen Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titelinformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

Terms of Use This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

Conditions d'utilisation Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

Condizioni di utilizzo Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]

Visual Library

PREMIÈRE PARTIE.

THÉORIE DES PROJECTIONS.

CHAPITRE PREMIER.

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES SUR LES PROJECTIONS.

1. Les difficultés que présentent la construction et l'emploi des globes terrestres ou célestes de grandes dimensions ont fait renoncer à leur usage et mis dans la nécessité de chercher à représenter sur des surfaces planes la situation des divers lieux de la surface sphérique que l'on considère. Les opérations graphiques que l'on effectue dans ce but constituent ce que l'on appelle en géographie la *méthode des projections.*

Ces représentations embrassent, ou la surface totale du globe, ou une de ses parties principales, ou une seule contrée; dans le premier cas on les appelle *mappemondes*, et *planisphères* lorsqu'elles ont la forme circulaire; dans le second cas on les nomme *cartes générales;* dans le troisième, *cartes spéciales.*

Les cartes géographiques spéciales se distinguent en *chorographiques*, qui représentent une province avec ses cours d'eau, ses montagnes, ses points principaux: en *topographiques*, qui comprennent, pour une moindre étendue de pays, les détails de la nature du terrain, les grandes constructions et jusqu'aux habitations isolées et aux divisions des champs; et enfin en *plans géométriques*, qui représentent une localité assez petite pour que la surface à représenter puisse être considérée comme plane.

Les cartes peuvent encore prendre d'autres dénominations suivant l'usage auquel elles sont appropriées; telles sont les cartes *hydrographiques* destinées à la navigation, les cartes *géologiques* et autres destinées à l'étude de la physique du globe.

Les surfaces de la sphère et des sphéroïdes n'étant pas développables, c'est-à-dire ne pouvant être étendues sur un plan sans déchirure ni duplicature comme les surfaces coniques ou cylindriques, il est impossible d'en donner une représentation plane dans laquelle les configurations, les distances des lieux et l'étendue relative des

régions soient conservées dans leurs rapports mutuels. Les géographes sont donc obligés d'altérer sur une carte certains rapports de grandeurs plutôt que d'autres, suivant le besoin, ou bien de représenter tous ces rapports par approximation; il en résulte divers systèmes de projections qui varient suivant le but qu'on se propose d'atteindre.

Comme la situation des différents lieux d'une sphère se détermine généralement par les cercles de latitude et de longitude, c'est-à-dire les parallèles et les méridiens qui passent par ces lieux, toute la difficulté consiste dans la projection de ces cercles. Dans les premières cartes qu'on a construites, cette représentation a presque toujours été soumise aux règles de la perspective; l'idée de placer les lieux de la terre comme les verrait un observateur situé à une distance plus ou moins grande du centre du globe, est très-simple et très-naturelle, puisque la voûte céleste se présente à nous sous un aspect analogue, et qu'il en est de même des astres que nous pouvons apercevoir, tels que la lune; mais rien n'oblige à suivre cette méthode sans exception. On peut en effet, ainsi que le fait remarquer *Lagrange* (1), regarder les cartes géographiques sous un point de vue plus général et comme des représentations quelconques de la surface du globe; alors il n'y a qu'à tracer les méridiens et les parallèles suivant une loi quelconque donnée, et à placer les différents lieux par rapport à ces lignes comme ils le sont sur la sphère par rapport aux cercles de longitude et de latitude.

De cette manière, la construction d'une carte géographique devient un problème tout à fait indéterminé, mais on peut le déterminer en l'assujettissant à certaines conditions données suivant la destination de la carte; on peut demander, par exemple, que l'étendue des pays soit conservée, c'est-à-dire que des portions égales de la terre soient représentées par des portions égales de la carte; dans les cartes marines on demande que les différents rumbs de vent y soient représentés par des droites faisant entre elles les mêmes angles que ces rumbs font dans la rose du compas. On peut aussi s'imposer la condition de représenter les méridiens et les parallèles par des courbes d'une nature donnée, tout en satisfaisant à une autre condition, telle, par exemple, que la conservation des angles. On voit que les conditions du problème peuvent varier à l'infini.

(1) *Sur la construction des cartes géographiques,* dans les *Nouveaux mémoires de l'Académie de Berlin,* année MDCCLXXIX, pages 161 à 210.

Mais, quelle que soit la condition que l'on impose, quel que soit le canevas que l'on adopte, la carte que l'on tracera sera entachée par rapport à la portion de la surface sphérique qu'elle représente, de l'une au moins des deux erreurs : *exagération* des surfaces, ou *déformation*, c'est-à-dire altération des angles ; nous donnerons le nom d'*altération* à l'erreur totale que comporte une carte, soit qu'elle provienne de l'une seulement de ces deux erreurs partielles, soit qu'elle résulte de leur existence simultanée, ce qui a lieu dans beaucoup de cas, soit que l'on cherche à réduire les trop grands écarts résultant de l'une des deux erreurs par l'introduction de l'autre, soit qu'on n'ait d'autre but que de représenter les méridiens et les parallèles par un système de lignes faciles à construire.

INFLUENCE DE LA FORME SPHÉROÏDALE DE LA TERRE DANS LA CONSTRUCTION DES CARTES GÉOGRAPHIQUES. — ÉLÉMENTS DU SPHÉROÏDE.

2. La terre n'étant pas une sphère, mais un corps que l'on peut regarder comme un ellipsoïde de révolution, il est naturel de tenir compte de la forme réelle dans la construction des cartes géographiques d'une grande précision.

Si l'on compare la longueur 110563^{m},7 d'un degré du méridien, à l'équateur, avec la longueur du degré au pôle 111680 mètres, on trouve une différence de 1116^{m},2 qui n'est que $\frac{1}{99}$ environ de la première longueur, et si l'on compare le degré à l'équateur avec le degré à la latitude de 45°, 111119^{m},4, on trouve que la différence 555^{m},7 n'est que le $\frac{1}{119}$ du premier. Ainsi les degrés du méridien, quoique inégaux, diffèrent très-peu, et dans les projections qui n'exigent pas une extrême précision, on peut supposer la terre sphérique.

Il en est naturellement ainsi dans les planisphères et les mappemondes, et dans les cartes générales qui embrassent une étendue de pays assez grande pour que la centième partie d'un degré de latitude (quantité d'ailleurs plus grande que l'erreur que l'on commet en réalité) soit inappréciable à l'échelle de la carte.

Dans les autres cas, il est facile de tenir compte de l'aplatissement aux pôles ; d'après ce que nous avons dit, en effet, les coordonnées des différents points d'une carte, les éléments qui servent à en construire le canevas, peuvent toujours être considérés comme des fonctions des coordonnées et des éléments correspondants de la surface que l'on veut représenter, la forme de ces fonctions étant définie par

la loi qui préside à la construction. Au lieu de faire intervenir, dans ces fonctions, les éléments d'une sphère, il sera tout aussi facile de considérer les éléments d'un sphéroïde; ces éléments étant eux-mêmes en chaque point des fonctions connues de la latitude et de la longitude géographique, les coordonnées de la projection pourront toujours être exprimées, théoriquement du moins, par des fonctions de ces mêmes variables.

Nous reviendrons en détail sur ce sujet lorsque nous nous occuperons de la théorie mathématique des cartes au point de vue de la conservation des configurations, des distances ou des surfaces; et, dans chaque système que nous étudierons en particulier, nous donnerons le moyen de tenir compte de la forme elliptique de la terre.

Nous allons donner ici, sans les démontrer, les formules qui expriment les divers éléments du sphéroïde en fonction des éléments connus et des variables longitude t, et latitude l qui déterminent la position de chaque point à la surface de la terre.

3. La terre peut être considérée comme un ellipsoïde de révolution, c'est-à-dire comme décrit par la rotation d'une ellipse autour de son petit axe dont les extrémités sont appelés pôles de la terre (fig. 1). Tout plan passant par cet axe coupe la surface suivant une ellipse dont on désigne le petit axe par $2b$, le grand axe par $2a$, et tout plan perpendiculaire trace une circonférence dont le rayon varie avec la distance de ce plan au pôle; l'équateur, c'est-à-dire l'intersection du sphéroïde par un plan perpendiculaire à son axe et également distant des deux pôles, a évidemment pour rayon a.

On appelle excentricité e, le rapport $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2}}$; ainsi,

$$e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2};$$

aplatissement α, le rapport $\frac{a-b}{a}$; ainsi,

$$\alpha = \frac{a-b}{a} = 1 - \frac{a}{b}.$$

Il en résulte

$$e^2 = 2\alpha - \alpha^2.$$

Comme l'aplatissement de la terre diffère peu de $\frac{1}{300}$, on peut, dans la plupart des cas, négliger α^2 et prendre

$$e^2 = 2\alpha,$$

ce qui revient à négliger les puissances quatrième et suivantes de l'excentricité, car

$$\alpha = 1 - (1-e)^{\frac{1}{2}} = 1 - (1 - \tfrac{1}{2}e^2 - \tfrac{1}{4}e^4 - \ldots\ldots) = \tfrac{1}{2}e^2 + \tfrac{1}{4}e^4 + \ldots\ldots$$

Si l'on supposait la terre sphérique et d'un rayon a égal au demi grand axe du sphéroïde, les plans des méridiens seraient les mêmes pour les deux surfaces; ainsi les longitudes t comptées à partir d'un même premier méridien sont indépendantes de l'aplatissement. Il n'en est pas de même des latitudes l. Sur la sphère la latitude est l'angle du rayon au point que l'on considère avec l'équateur; sur le sphéroïde c'est l'angle de la normale au point considérée avec le grand axe, et l'angle l' de l'équateur avec le rayon qui joint le même point de la surface au centre de l'ellipsoïde prend le nom de *latitude géocentrique*.

Ces deux latitudes l et l' sont liées entre elles par la relation

$$a^2 \operatorname{tang} l' = b^2 \operatorname{tang} l,$$

ou

$$\operatorname{tang} l' = (1-\alpha)^2 \operatorname{tang} l = (1-e^2) \operatorname{tang} l.$$

La différence NMC $= l - l' = i$ peut s'exprimer par la formule

$$\operatorname{tang} i = \alpha \sin 2l - \alpha^2 \sin l \cos 3l - \alpha^3 \sin^2 l \sin 4l \ldots\ldots$$

que l'on remplace ordinairement par

$$i = \frac{\alpha \sin 2l}{\sin 1''}.$$

La normale MN $=$ N au point dont la latitude est l est exprimée par

$$N = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 l)^{\frac{1}{2}}} = a(1 + \tfrac{1}{2}e^2 \sin^2 l),$$

en négligeant comme précédemment les termes en e^4, e^6.....

Le rayon de courbure ρ du méridien est exprimé par

$$\rho = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 l)^{\frac{3}{2}}} = N^3 \frac{1-e^2}{a^2} = a(1-e^2)(1 + \tfrac{3}{2}e^2 \sin^2 l).$$

Le rayon CM $=$ R est exprimé par

$$R = a\sqrt{\frac{1-e^2(2-e^2)\sin^2 l}{1-e^2 \sin^2 l}} = a\sqrt{\frac{1+(1-e^2)\tan g^2 l}{1+(1-e^2)\tan g^2 l}} = a\sqrt{\frac{\cos l}{\cos l' \cos(l-l')}}.$$

Le rayon r du parallèle de latitude l qui, dans l'hypothèse de la terre sphérique, est exprimé par

$$a \cos l,$$

a pour expression, sur le sphéroïde,

$$r = \frac{a \cos l}{(1 - e^2 \sin^2 l)^{\frac{1}{2}}} = \mathrm{N} \cos l.$$

Appelons s la longueur d'un arc de méridien se terminant à la latitude l; on aura

$$ds = \frac{a(1 - e^2)dl}{(1 - e^2 \sin^2 l)^{\frac{3}{2}}} = \rho dl = a dl\,(1 - e^2 + \tfrac{3}{2} e^2 \sin^2 l),$$

équation qui donne approximativement la distance itinéraire entre deux lieux voisins situés sur le même méridien et dont la différence des latitudes est dl: on devra prendre pour l la latitude du milieu de cette petite distance.

Si l'on veut traduire des arcs terrestres en secondes de degrés, et réciproquement, des nombres de secondes en distances linéaires, on se servira de la formule

$$\Delta = a\delta(1 + \tfrac{1}{2} e^2 \sin^2 l) = \mathrm{N}\delta,$$

dans laquelle Δ désigne la distance de deux lieux très-voisins, δ l'arc correspondant décrit du point de rencontre des normales avec un rayon égal à l'unité (fig. 2).

En appelant δ'' le nombre de secondes du petit arc δ, on aura

$$\delta = \delta'' \sin 1'',$$

d'où

$$\delta'' = \frac{\Delta(1 - e^2 \sin^2 l)^{\frac{1}{2}}}{a \sin 1''} = \frac{\Delta}{a \sin 1''}\,(1 - \tfrac{1}{2} e^2 \sin^2 l).$$

Un arc s de méridien se terminant d'un côté à l'équateur et de l'autre au parallèle de latitude l est exprimé par la formule

$$s = a(1 - e^2)\,(\mathrm{A}l - \tfrac{1}{2}\mathrm{B} \sin 2l + \tfrac{1}{4}\mathrm{C} \sin 4l \ldots\ldots),$$

dans laquelle

$$\mathrm{A} = 1 + \tfrac{3}{4} e^2 + \tfrac{45}{64} e^4,$$
$$\mathrm{B} = \tfrac{3}{4} e^2 + \tfrac{15}{16} e^4,$$
$$\mathrm{C} = \tfrac{15}{64} e^4.$$

La différence $s - s' = S$ de deux arcs de méridiens, c'est-à-dire l'arc S de méridien dont les latitudes des extrémités sont l et l', est exprimée par la formule

$$S = a(1-e^2)\,[A(l-l') - B\sin(l-l')\cos(l+l') + \tfrac{1}{2}C\sin 2(l-l')\cos 2(l+l')].$$

Dans ces formules, les arcs s et S sont exprimés par la même unité que a, soit en mètres, soit en degrés de l'équateur si l'on prend pour a la valeur

$$a = \frac{180}{\pi} = 57^\circ,2957793.$$

Pour la commodité des calculs on devra diviser le premier terme $A(l - l')$ du développement de s, par le nombre

$$\mu = \frac{180^\circ}{\pi} \text{ et remplacer } l - l' \text{ par } \frac{l - l'}{\mu}.$$

La valeur du complément du logarithme de μ est

$$\text{c}^\text{t}\log\mu = \overline{2},24187737.$$

De la sorte $l - l'$ désignera le nombre de degrés de la différence des latitudes extrêmes.

Faisons $l = l' + 1^\circ$; la longueur D_m de l'arc de 1° du méridien à la latitude l sera

$$\frac{a\pi(1-e^2)}{180^\circ(1-e^2\sin^2 l)^{\frac{3}{2}}},$$

ou

$$D_m = a(1-e^2)\,[A\,\text{arc}\,1^\circ - B\sin 1^\circ\cos(2l+1^\circ) + \tfrac{1}{2}C\sin 2^\circ\cos 2(2l+1^\circ)].$$

L'arc de 1° de longitude, c'est-à-dire l'arc d'un degré du parallèle dont la latitude est l, sera

$$D_p = \frac{a\pi\cos l}{180^\circ(1-e^2\sin^2 l)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\pi}{180^\circ}N\cos l = \frac{N\cos l}{\mu},$$

expression qui se réduit évidemment à

$$\frac{a\pi\cos l}{180},$$

si l'on suppose la terre sphérique.

C'est d'après les deux équations D_m et D_p qu'a été construite la

table I, en prenant pour a et e^2 les valeurs qui conviennent à l'aplatissement $\alpha = \frac{1}{299,15}$. (Ellipsoïde von Bessel)

Si, dans l'équation qui donne s, nous faisons $l = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$, nous obtenons le quart Q du méridien elliptique, c'est-à-dire la distance du pôle à l'équateur

$$Q = \tfrac{1}{2} a(1 - e^2)\,A\pi = \tfrac{1}{2}\pi a(1 - \tfrac{1}{4}e^2 - \tfrac{3}{64}e^4 \ldots\ldots);$$

ou, plus simplement, en négligeant e^4,

$$Q = \tfrac{1}{2}\pi a\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right),$$

équations dans lesquelles les longueurs q et a sont exprimées par la même unité.

Enfin la surface Z d'une zone du sphéroïde comprise entre l'équateur et le parallèle de latitude l est exprimée par

$$Z = 2\pi a^2(1 - e^2)\left(\sin l + \frac{2e^2}{3}\sin^3 l + \frac{3e^4}{5}\sin^5 l + \ldots\ldots\right),$$

équation qui se réduit à

$$Z = 2\pi a^2 \sin l,$$

lorsqu'on suppose la terre sphérique.

Si, par la verticale d'un lieu, on mène deux plans perpendiculaires entre eux et dont l'un passe par les pôles de la sphère céleste, ils intercepteront sur cette surface deux grands cercles. Les pieds des normales menées des différents points de leurs circonférences sur la terre formeront le *méridien* et la *perpendiculaire au méridien* en ce lieu. La première de ces courbes est plane parce que la surface terrestre est considérée comme un ellipsoïde de révolution. Elle se confond à son origine avec la méridienne du lieu qui n'est autre chose que l'intersection du plan du méridien avec l'horizon. La seconde est à double courbure ; néanmoins on peut la considérer dans une certaine étendue comme faisant partie de la section de la surface terrestre par le plan mené perpendiculairement au méridien suivant la verticale du lieu. On démontre que, dans cette hypothèse, *la méridienne est la section normale de plus grande courbure*, et que *la perpendiculaire est, au contraire, celle de plus petite courbure.* Le rayon de courbure de la méridienne est

$$\rho = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2 l)^{\frac{3}{2}}},$$

et celui de la perpendiculaire

$$\rho' = \frac{a}{(1-e^2\sin^2 l)^{\frac{1}{2}}}.$$

MÉTHODE DE PRONY POUR TENIR COMPTE DE L'APLATISSEMENT.

4. Quelque simple que soit la manière de tenir compte de la forme elliptique de la terre, il se présente bien des cas où la simplicité de la construction des cartes particulières de peu d'étendue et quelquefois même une propriété importante de la projection, tient essentiellement à l'hypothèse de la terre sphérique et où il serait cependant utile d'avoir égard à sa véritable figure. C'est dans ce but que Prony a cherché à déterminer « la position du centre et la longueur du rayon « de la sphère dont la surface s'approche le plus de coïncider avec « celle du sphéroïde terrestre dans le périmètre du pays dont on doit « former la carte (1). »

Il est d'abord évident que le rayon R de cette sphère est situé sur la normale à la surface de la terre menée par le centre de figure de pays, et que le plan du méridien elliptique passant par ce centre détermine, par son intersection avec la surface de la sphère, un méridien correspondant.

Supposons d'abord le périmètre du pays à peu près circulaire; le centre de la sphère cherchée se trouvera alors sur la normale à la surface du sphéroïde, passant par le centre du périmètre pris sur la même surface, et il ne s'agit plus que de trouver la longueur R du rayon. Or il est évident que cette longueur sera celle qui donnera les moindres erreurs sur les arcs de méridienne et de perpendiculaire qui se croisent au point central H dont la latitude est λ et dont les rayons de courbure sont respectivement ρ et ρ', car c'est sur ces arcs mêmes que les plus grandes anomalies ont lieu avec des signes différents sur l'un et sur l'autre. Soient donc

$$\frac{R}{\rho} = 1+\varepsilon, \quad \text{et} \quad \frac{\rho'}{R} = 1+\varepsilon';$$

(1) *Connaissance des temps* pour 1808, p. 374.

les erreurs sur la méridienne et la perpendiculaire seront dues respectivement à ε et à ε', et leur somme numérique sera

$$\varepsilon + \varepsilon' = \frac{R}{\rho} + \frac{\rho'}{R} - 2.$$

Alors, cherchant la valeur de R qui rend cette somme un *minimum*, on obtiendra

$$R = \sqrt{\rho\rho'} = a\sqrt{\frac{1-e^2}{(1-e^2\sin^2\lambda)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{(1-e^2\sin^2 l)^{\frac{1}{2}}}} = a[1 - \tfrac{1}{2}e^2 + e^2\sin^2\lambda - e^4(\tfrac{1}{8} + \ldots)],$$

c'est-à-dire que le rayon de la sphère qui jouit de la propriété demandée est moyenne géométrique entre ceux de plus grande et de plus petite courbure. Ces deux rayons sont si peu différents que la moyenne arithmétique $\frac{\rho+\rho'}{2}$ est à très-peu près égale à la moyenne géométrique $\sqrt{\rho\rho'}$ et pourra lui être substituée.

Prenons maintenant sur la surface du sphéroïde un périmètre quelconque; la détermination du centre de figure n'ayant pas besoin d'être faite avec une extrême rigueur, on se servira pour cette opération des cartes géographiques ordinaires, et l'on tracera un polygone qui coïncide autant que possible avec le périmètre donné; le centre de gravité de la surface de ce polygone, déterminé par les méthodes connues, sera le centre cherché (1).

---

(1) Pour trouver le centre de gravité d'un polygone tel que ABCDEFH (fig. 3), on trace deux axes rectangulaires à volonté dont l'un peut passer par l'un des côtés mêmes du polygone, par le plus grand, par exemple, et l'on décompose la surface en rectangles et en triangles rectangles par des droites menées par les sommets parallèlement aux axes, comme l'indique la figure. Le centre de gravité de chaque triangle est situé sur la droite qui joint le sommet au milieu de la base et au tiers de cette droite à partir de la base; le centre de gravité de chaque rectangle est à l'intersection de ses deux diagonales. Supposons donc tous ces centres de gravité déterminés; soient x, x' x''... leurs distances à l'axe oy; a, a', a''... les aires des triangles ou rectangles correspondants; la distance X du centre de gravité cherché au même axe oy sera donnée par la formule

$$X = \frac{ax + a'x' + a''x'' + \ldots}{a + a' + a'' + \ldots}.$$

En appelant de même y, y', y''... les distances des divers centres de gravité à l'axe ox, la distance du centre cherché sera

$$Y = \frac{ay + a'y' + a''y'' + \ldots}{a + a' + a'' + \ldots}.$$

Le centre de gravité du polygone pourra donc se construire facilement à l'aide de ses deux coordonnées X et Y.

Si ces constructions et ces mesures se font sur un canevas préalable ayant la propriété de peu altérer les distances, elles seront beaucoup abrégées.

Soient ρ et ρ' les rayons de plus grande et de plus petite courbure de la surface terrestre, α l'aplatissement, ψ l'angle qn'une section normale quelconque ayant R′ pour rayon forme avec la section de plus petite courbure qu'est celle perpendiculaire au méridien; soit enfin λ la latitude de centre de figure de la carte. La géodésie donne les formules

$$\rho = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2 l)^{\frac{3}{2}}} = a\left[1-\frac{\alpha}{2}(1+3\cos 2\lambda)\right],$$

$$\rho' = \frac{a}{(1-e^2\sin^2 l)^{\frac{1}{2}}} = a\left[1+\frac{\alpha}{2}(1-\cos 2\lambda)\right],$$

$$R' = \frac{2\rho\rho'}{\rho+\rho'-(\rho'-\rho)\cos 2\psi} = a[1-\alpha(\cos 2\lambda - \cos^2\lambda\cos 2\psi)],$$

ou bien, faisant pour abréger

$$\cos 2\lambda - \cos^2\lambda\cos 2\psi = m,$$

on aura

$$R' = a(1-\alpha m).$$

Cela posé, désignons par A_1, A_2, A_3... les longueurs des arcs produits à la surface du sphéroïde par des sections de plans normaux faites au centre de figure, longueurs comprises entre ce centre et les angles du polygone qui approche le plus du périmètre donné et qu'il suffira de mesurer sur la carte préliminaire qui nous a déjà servi pour trouver le centre de figure; désignons encore par r_1, r_2, r_3... les rayons de courbure de ces sections, par R′ l'un quelconque de ces rayons, enfin par R le rayon de la sphère dont la surface s'approche le plus de coïncider avec celle du sphéroïde terrestre.

On aura en général, pour l'erreur ε commise sur la valeur angulaire de l'arc A,

$$\varepsilon = \frac{A}{R} - \frac{A}{R'} = \frac{A(R'-R)}{RR'},$$

ou, sans erreur sensible,

$$\varepsilon = \frac{A(R'-R)}{R'^2},$$

puisque cette dernière expression ne diffère de la précédente que par des termes de l'ordre $(R'-R)^2$ et des ordres supérieurs, et que la différence $R'-R$ doit toujours être plus petite que l'excès du

rayon de l'équateur sur celui du pôle. Ainsi les erreurs angulaires relatives aux arcs A_1, A_2, A_3... seront respectivement

$$\varepsilon_1 = \frac{A_1(r_1 - R)}{R'^2}, \quad \varepsilon_2 = \frac{A_2(r_2 - R)}{R'^2}, \quad \varepsilon_3 = \frac{A_3(r_3 - R)}{R'^2} \ldots\ldots$$

Appliquons la méthode des moindres carrés qui consiste à rendre minimum la somme des carrés des erreurs; on aura

$$d\left[\frac{A^2_1(r_1 - R)^2 + A^2_2(r_2 - R)^2 + A^2_3(r_3 - R)^2 + \ldots\ldots}{R'^4}\right] = 0,$$

d'où l'on tire après la différentiation

$$R = \frac{A^2_1 r_1 + A^2_2 r_2 + A^2_3 r_3 + \ldots\ldots}{A^2_1 + A^2_2 + A^2_3 + \ldots\ldots}; \qquad (I)$$

mais, d'après ce qui précède, les rayons de courbure des sections normales sont

$$\begin{aligned} r_1 &= a(1 - \alpha m_1) \\ r_2 &= a(1 - \alpha m_2) \\ r_3 &= a(1 - \alpha m_3) \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

expressions dans lesquelles

$$\begin{aligned} m_1 &= \cos 2\lambda - \cos^2\lambda \cos 2\psi_1 \\ m_2 &= \cos 2\lambda - \cos^2\lambda \cos 2\psi_2 \\ m_3 &= \cos 2\lambda - \cos^2\lambda \cos 2\psi_3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

et où ψ_1, ψ_2, ψ_3... sont les angles que les sections normales font avec la perpendiculaire au méridien central; par conséquent, l'équation (I) prendra la forme suivante :

$$\frac{R}{a} = 1 - a\left(\frac{A^2_1 m_1 + A^2_2 m_2 + A^2_3 m_3 + \ldots\ldots}{A^2_1 + A^2_2 + A^2_3 + \ldots\ldots}\right).$$

Soient encore, pour abréger,

$$\frac{A_2}{A_1} = n_2; \quad \frac{A_3}{A_4} = n_3; \quad \ldots\ldots;$$

on aura enfin

$$\frac{R}{a} = 1 - \alpha\left(\frac{m_1 + m_2 n^2_2 + m_3 n^2_3 + \ldots\ldots}{1 + n^2_2 + \ldots\ldots}\right). \qquad (II)$$

L'expression du degré de la sphère dont R est le rayon se déduit de celle-ci :

$$1^\circ = \frac{\pi R}{180},$$

dans laquelle R devra être remplacé par sa valeur précédente, et π par 3,1416 ; ainsi l'on a

$$1^\circ = \frac{\pi}{180}\, a\left(1 - \alpha\, \frac{m_1 + m_2 n^2{}_2 + m_3 n_3 + \ldots\ldots}{1 + n^2{}_2 + n^2{}_3 + \ldots\ldots}\right) = \frac{\pi a}{180}\,(1 - \alpha U).$$

Mais la géodésie donne la formule

$$a = \frac{2Q}{\pi}\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right),$$

dans laquelle Q = 10,000,000 mètres, c'est-à-dire le quart du méridien ; on a donc

$$1^\circ = \frac{Q}{90^\circ}\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)(1 - \alpha U),$$

ou, en développant et s'arrêtant aux termes du premier ordre,

$$1^\circ = \frac{Q}{90^\circ} + \frac{\alpha Q}{180}\,(1 - 2U),$$

et définitivement en remettant pour U sa valeur,

$$1^\circ = \frac{Q}{90} + \frac{\alpha Q}{180}\left[1 - \frac{2(m_1 + m_2 n^2{}_2 + m_3 n^2{}_3 + \ldots\ldots)}{1 + n^2{}_2 + n^2{}_3 + \ldots\ldots}\right],$$

formule dans laquelle α devra être remplacé par la valeur que nous adoptons $\frac{1}{299,15}$.

Dans ce calcul les arcs A_1, A_2, A_3... qui aboutissent tous au centre de la carte et se terminent au périmètre de l'espace à représenter, sont supposés très-petits ; mais s'ils excédaient 4 ou 5 degrés, il conviendrait, pour plus d'exactitude, de prendre les rayons de courbure correspondants au milieu de ces arcs.

Nous avons supposé ces mêmes arcs mesurés sur une carte géographique, mais on peut aussi calculer les valeurs de ces arcs à l'aide de la formule

$$D = \frac{\pi\rho}{180^\circ}\left(1 + \frac{3}{4}\,\frac{\pi}{180}\,\frac{e^2}{1 - e^2}\sin 2\lambda \sin^2\psi + \frac{e^2}{1 - e^2}\cos^2\lambda \cos\psi\right),$$

dans laquelle D désigne l'arc de 1° d'une section oblique faite dans l'ellipsoïde à la latitude λ par un plan vertical faisant l'angle ψ avec la perpendiculaire au méridien; l'excentricité e^2 pourra être prise égale à 2α ou, plus exactement, à $\alpha\ (2-\alpha)$, soit 0,00667437 dans le cas où α est pris égal à $\frac{1}{299,15}$.

DÉTERMINATION DES POINTS SUR LE CANEVAS.

5. Nous avons dit que, les points du globe se déterminant par leur latitude et leur longitude, on cherchait, dans toute projection, à tracer d'abord le canevas, c'est-à-dire l'ensemble des parallèles et des méridiens, puis à placer les différents lieux par rapport à ces lignes comme ils le sont sur la sphère par rapport aux cercles de latitude et de longitude. Nous nous occuperons, dans ce qui suivra, du tracé des méridiens et des parallèles de la projection, mais nous ne nous arrêterons pas sur la seconde partie de la question qui est purement graphique et déjà familière à toutes les personnes qui s'occupent de dessin : nous dirons seulement que toutes les fois que les lignes des coordonnées géographiques ne seront pas rectilignes, on devra les tracer assez rapprochées pour que la détermination des points intermédiaires se fasse dans chaque quadrilatère avec toute l'exactitude désirable ; on aura satisfait le mieux possible à cette condition si, à l'échelle de la construction, chaque côté du quadrilatère considéré peut être regardé sans erreur appréciable comme une ligne droite, parce qu'alors le point cherché se placera, à l'aide de la règle et du compas, par les différences entre sa longitude et sa latitude et celles des côtés méridien et parallèle de ce quadrilatère.

Remarquons ici que, dans la construction d'une carte, on pourra toujours adopter pour premier méridien celui d'un lieu quelconque préalablement désigné et compter les longitudes des autres lieux à l'est et à l'ouest de celui-ci ; il suffira pour cela de remplacer les longitudes comptées à partir du méridien de Paris, par exemple, par les différences entre ces longitudes et celle du lieu dont le méridien sera pris pour départ.

Soit, par exemple, (fig. 4) 45° 23′ N. la latitude du point donné et 5°4′O. sa longitude à l'ouest du méridien à partir duquel on compte les longitudes. Supposons les méridiens et les parallèles tracés de 10

en 10 minutes ; on prendra, à l'aide du compas de proportion, les longueurs DH, BG respectivement égales aux $\frac{4}{10}$ des arcs de parallèles CD et AB, et les longueurs DE, CF respectivement égales aux $\frac{3}{10}$ des arcs de méridien BD et AC ; on joindra GH, FE, et l'intersection M donnera la position du point d'une manière très-approchée.

Lorsque l'on a placé sur la carte par leur latitude et leur longitude les sommets d'une triangulation, on a souvent à placer les sommets d'une triangulation secondaire dont on n'a pas calculé les coordonnées géographiques, c'est-à-dire à projeter sur la carte un triangle dont la projection de la base est déjà connue. Voici comment on résoudra graphiquement cette question en supposant que les projections des côtés du triangle soient des lignes droites et que les quadrilatères formés par les méridiens et les parallèles de la carte puissent être, sans erreur sensible, considérés comme des parallélogrammes, hypothèse qui se vérifiera le plus souvent sur les cartes de détail.

On construira d'abord (fig. 5), sur l'un des côtés CD du parallélogramme où se trouve la projection MN de la base, le rectangle A'B'CD ; puis, en menant Mm', Nn' parallèles au côté CD et prenant $M'm' = Mm$ et $N'n' = Nn$, on passera de la projection donnée MN à la projection de cette base dans le rectangle A'B'CD. Sur la nouvelle base M'N' on construira sans altération le triangle donné M'N'P' et l'on projettera le sommet P' dans le parallélogramme en menant $P'p'$ parallèle à CD et prenant $Pp = P'p'$; le triangle PMN sera le triangle cherché.

Si l'on voulait résoudre ce problème par le calcul, il faudrait déterminer la projection des angles adjacents à la base donnée MN, ce qui exigerait que l'on eût une formule pour déterminer la projection d'un angle formé sur le sphéroïde par un méridien et une autre ligne quelconque de plus courte distance, car tout angle étant toujours la différence des azimuts de ses côtés, il est évident que sa projection sera aussi la différence des projections de ces mêmes azimuts. En étudiant chacune des projections applicables aux cartes particulières, nous donnerons le moyen de calculer la projection d'un angle donné sur le sphéroïde.

On a souvent à résoudre ce problème inverse de celui que nous venons de traiter : *Déterminer la latitude et la longitude d'un point donné sur la projection.*

Lorsque la carte que l'on considère est une mappemonde ou une carte générale, on ne peut pas compter sur une grande exactitude, et la latitude et la longitude cherchée se déterminent le plus souvent

à vue en se représentant le méridien et le parallèle qui passeraient par le point donné et les intersections de ces courbes avec les côtés du quadrilatère où est situé ce point. Il est inutile d'ajouter que ce méridien et ce parallèle devront être exactement tracés toutes les fois qu'il sera possible de le faire, et prolongés jusqu'à celles de ces courbes qui portent la graduation en degrés et fractions de degré.

Dans les cartes particulières, si les méridiens et les parallèles sont assez rapprochés pour que les quadrilatères formés par ces lignes puissent être considérés comme des parallélogrammes, on résoudra très-simplement la question qui nous occupe en menant par le point donné deux droites respectivement parallèles aux côtés de ce quadrilatère préalablement divisés en degrés et minutes, et l'on connaîtra, à l'aide des divisions dont il s'agit et de la graduation marquée autour de la carte, la latitude et la longitude du point donné.

Si le quadrilatère dans lequel est renfermé ce point, tout en étant sensiblement rectiligne, ne pouvait pas être réellement assimilé à un parallélogramme, les deux droites à mener dans le sens des parallèles et des méridiens devraient concourir avec ces lignes. Soit (fig. 6) ABCD le quadrilatère dans lequel est le point donné M; on mènera la droite *a*M*d* parallèle à AD et l'on déterminera le point *m* sur AD par l'égalité

$$\frac{\mathrm{A}m}{\mathrm{AD}} = \frac{a\mathrm{M}}{ad}.$$

L'emploi du compas de proportion permettra de déterminer facilement la longueur A*m*; la droite *m*M*m'* pourra être considérée comme le parallèle du point M, et la graduation de *m* sur AD ou de *m'* sur BC préalablement divisés en degrés et fractions, donnera la latitude cherchée; il sera même inutile de partager AD ou BC en parties égales, car le compas de proportion donnera la fraction de AD que représente la longueur *m*A. En opérant de même pour les côtés AB, CD, on déterminera la longitude du point donné M.

Il arrive souvent, dans la construction des mappemondes et des cartes générales, que la position des lieux secondaires et les détails de la topographie sont donnés, non plus par leurs coordonnées géographiques, mais sur une carte déjà construite sur une autre projection à une échelle au moins égale à celle que l'on veut tracer. On devra alors partager les deux projections en quadrilatères correspondants par des méridiens et des parallèles assez rapprochés pour que

ces quadrilatères puissent être considérés comme rectilignes, et opérer dans chacun d'eux la réduction des détails en prenant pour point de départ les points principaux préalablement placés par leur longitude et leur latitude.

ÉVALUATION DES DISTANCES.

6. L'échelle de la carte se détermine toujours par la valeur que l'on assigne au degré de l'équateur, soit que l'on prenne ce degré pour unité, soit que l'on fixe l'échelle naturelle, c'est-à-dire la fraction de mètre qui, sur le dessin, devra représenter une distance de 1 mètre au point que l'on considère. De l'impossibilité d'obtenir une projection conservant toutes les distances, il résulte évidemment que la même échelle ne peut s'appliquer exactement dans toutes les directions aux différents points de la carte, et que, même en supposant la terre sphérique, la valeur du degré ou, si l'on veut, de la minute de grand cercle, ne pourra être représentée partout par la même longueur. En traitant de chaque système de projection en particulier, nous indiquerons la manière de tracer l'échelle correspondante et, toutes les fois que cela sera possible, la construction qui permettra de passer de cette échelle approchée à la détermination de la distance réelle de deux lieux.

On pourra d'ailleurs toujours calculer la distance exacte de deux points donnés par leur latitude et leur longitude. En appelant Δ cette distance, θ la différence $t-t'$ des longitudes de ces deux points, l et l' les latitudes, le triangle sphérique ayant pour sommets le pôle et les deux points considérés donnera

$$\cos\Delta = \sin l \sin l' + \cos l \cos l' \cos\theta.$$

Pour rendre cette formule calculable par logarithmes, on cherchera d'abord l'angle auxiliaire φ à l'aide de la formule

$$\cot\varphi = \cot l \cos\theta,$$

et l'on aura ensuite

$$\cos\Delta = \frac{\sin l \cos(l' - \varphi)}{\sin\varphi}.$$

Si les angles θ et $(l-l')$ sont moindres que trois degrés, on pourra employer pour plus de commodité les formules suivantes qui donneront une approximation presque toujours suffisante :

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{\theta}{l - l'} \cos \frac{l + l'}{2},$$

et

$$\Delta = \frac{l - l'}{\cos \varphi}.$$

Si l'on voulait, dans le calcul de la distance de deux lieues, tenir compte de l'aplatissement de la terre, on se servirait des formules données par Puissant (1). Ce problème, considéré dans toute sa généralité, n'est guère utile en géographie, car, outre que les formules sont très-compliquées, à quoi peut servir de connaître la plus courte distance de Paris à Saint-Pétersbourg avec une exactitude qui n'existe même pas dans la nature, à cause des mille accidents de localité qui forcent d'allonger la route d'au moins un quart ? Il est vrai que lorsqu'on compare deux stations voisines d'une triangulation il peut être très-utile d'en connaître la distance exacte d'après leurs latitudes et longitudes ; mais le problème appartient alors à la géodésie et sort du domaine de la géographie ; nous n'avons donc pas à l'étudier.

Voici une construction graphique qui, dans la plupart des cas, déterminera avec une exactitude suffisante la distance de deux points de la sphère quand on connaîtra soit directement, soit sur une carte géographique, leurs latitudes et la différence de leurs longitudes.

Soient (fig. 7) A et B les deux points considérés, P le pôle, EE′ l'équateur. Dans le méridien de chacun de ces points nous connaissons la perpendiculaire qui le projette sur l'équateur et qui est la demi-corde de l'arc double de sa latitude ; nous connaissons en outre l'angle des intersections de ces méridiens avec l'équateur qui est égal à la différence des longitudes des deux points ; il est donc facile de construire le trapèze AB*ab* dont le côté AB servira à évaluer l'arc de grand cercle qu'il sous-tend, c'est-à-dire la distance cherchée.

Nous ferons donc (fig. 8) au centre d'un cercle divisé en degrés et fractions un angle égal à la différence donnée des longitudes ; sur chaque côté de cet angle nous porterons respectivement des longueurs égales aux cosinus des latitudes données en construisant les triangles A*a*O, B*b*O ayant le rayon pour hypoténuse et la latitude correspondante pour angle au centre ; puis nous porterons, sur les perpendiculaires élevées en *a* et *b* à la corde *ab*, les longueurs des côtés

(1) *Traité de géodésie.*

aA, bB de ces triangles; A'B' sera la corde de l'arc de grand cercle compris sur la sphère entre les deux lieux proposés ; en la portant sur la circonférence divisée, l'arc qu'elle sous-tendra mesurera la plus courte distance des deux lieux.

Si la latitude du point A étant australe, celle du point B était boréale, la construction pour le point A se ferait au-dessous du rayon Oa, et la corde de l'arc cherché serait A'_1B'.

TRACÉ DES CARTES CÉLESTES A L'AIDE DES COORDONNÉES ASTRONOMIQUES.

7. Si, en géographie, un point est défini par sa *latitude* et sa *longitude*, c'est-à-dire par sa distance à l'équateur et par l'angle que fait son méridien avec un autre méridien connu, il n'en est pas toujours ainsi en astronomie ; la position d'un astre est le plus souvent définie par sa latitude et sa longitude astronomique, c'est-à-dire par sa distance à l'écliptique, et par l'angle que fait le grand cercle perpendiculaire à l'écliptique et passant par l'astre avec celui qui passe par le point équinoxial (intersection de l'équateur et de l'écliptique). Les premières coordonnées de cet astre, sa latitude et sa longitude terrestre, prennent alors le nom de *déclinaison* et d'*ascension droite*.

Si nous supposons que les méridiens et les parallèles à l'équateur aient été tracés sur une projection, nous sommes conduits à chercher les projections des grands cercles perpendiculaires à l'écliptique et des petits cercles parallèles, afin de pouvoir placer ensuite chaque astre par sa latitude et sa longitude céleste.

Cherchons d'abord les points d'intersection des méridiens de la projection avec un petit cercle parallèle à l'écliptique; soit β la latitude astronomique de ce parallèle, α l'ascension droite du méridien déjà tracé, δ la déclinaison cherchée du point d'intersection, e l'inclinaison de l'écliptique sur l'équateur (environ 23° 28'). Dans le triangle sphérique (fig. 9) ayant pour sommets les pôles P et π de l'équateur et de l'écliptique, et le point d'intersection cherché S, l'angle en P est égal à $90^\circ + \alpha$, le côté opposé πS à $90^\circ - \beta$, et le côté πP à e ; nous pourrons donc calculer le troisième côté PS$=90^\circ-\delta$ qui déterminera le point S sur la projection.

Nous nous servirons pour cela des formules

$$\operatorname{tang}\varphi = -\sin\alpha \operatorname{tang} e,$$

$$\sin(\delta+\varphi) = \frac{\sin\beta\cos\varphi}{\cos e}.$$

Par exemple, si la latitude du parallèle à l'écliptique est de 40°, l'ascension droite du méridien de la projection de 30°, nous trouverons

$$\varphi = -12°15' \quad \text{et} \quad \delta = 55°28'.$$

En donnant à α successivement les valeurs 0°, 10°, 20°... et réunissant ensuite tous les points obtenus par une même courbe, on obtiendra la projection du parallèle céleste considéré. On opérera de même pour autant de parallèles que l'on voudra en donnant successivement à β les valeurs 10°, 20°...

Pour obtenir l'écliptique il suffira de faire $\beta = 0$; dans ce cas

$$\delta + \varphi = 0 \quad \text{ou} \quad \delta = -\varphi;$$

la déclinaison cherchée des points où les méridiens traversent l'écliptique est alors donnée par la formule

$$\operatorname{tang}\delta = \sin\alpha \operatorname{tang} e,$$

dans laquelle on donnera à α les valeurs successives 0°, 10°, 20°...

Cherchons maintenant les intersections des méridiens de la carte avec un grand cercle passant par les pôles de l'écliptique et perpendiculaire sur lui ; soit λ sa longitude connue. Dans le triangle sphérique déjà considéré $P\pi S$, on connaît l'angle au pôle π qui est égal à $90° - \lambda$, l'angle au pôle P qui est égal à $90° + \alpha$, et le côté $P\pi = e$; on cherche le côté PS qui est égal à $90° - \delta$. Nous emploierons les formules

$$\operatorname{tang}\psi = \cos e \operatorname{cotang}\lambda,$$

$$\operatorname{tang}\delta = \frac{\operatorname{cotang} e \cos(\alpha + \psi)}{\sin\psi}.$$

Par exemple, si la longitude $\lambda = 60$, l'ascension droite $\alpha = 55°$, on trouve

$$\psi = 27°54', \quad \delta = 31°19'.$$

En cherchant le point où ce grand cercle de longitude λ traverse le méridien dont l'ascension droite est 70°, on a

$$\psi = 27°54' \quad \text{et} \quad \delta = -34°5',$$

le signe — devant la valeur de δ indique que le point cherché a une déclinaison australe, c'est-à-dire qu'il se trouve dans le méridien donné à 34°5' au-dessous de l'équateur.

En donnant à α successivement les valeurs 0°, 10°, 20°... et réu-

nissant les points obtenus par une courbe, on tracera le grand cercle de longitude astronomique λ ; en donnant ensuite à λ les valeurs 0°, 10°... on tracera autant de grands cercles perpendiculaires à l'écliptique que l'on voudra, et l'on pourra alors placer tous les astres par leurs coordonnées astronomiques.

La table suivante donne les déclinaisons des points de l'écliptique dont les ascensions droites varient de 5° en 5°.

Table de construction de l'écliptique.

ASCENSIONS DROITES.		DÉCLINAISONS.	ASCENSIONS DROITES.	
0°	180°	0° 0′	180°	360°
5	175	2 10	185	355
10	170	4 19	190	350
15	165	6 25	195	345
20	160	8 27	200	340
25	155	10 24	205	335
30	150	12 15	210	330
35	145	13 59	215	325
40	140	15 35	220	320
45	135	17 4	225	315
50	130	18 24	230	310
55	125	19 35	235	305
60	120	20 36	240	300
65	115	21 29	245	295
70	110	22 12	250	290
75	105	22 45	255	285
80	100	23 9	260	280
85	95	23 24	265	275
90	90	23 28	270	270

TRACÉ DE L'ORBITE D'UN ASTRE SUR UNE PROJECTION.

8. Il sera aussi facile de tracer par points sur une projection l'orbite AB d'une comète ou d'une planète, orbite ordinairement donnée par son inclinaison BCE = ϒCE = n sur l'écliptique ϒε, et par la longitude ϒC = k du *nœud ascendant*, c'est-à-dire du point d'intersection avec l'écliptique (fig. 9).

On déterminera en fonction de ces données l'inclinaison BAE = N

de l'orbite sur l'équateur et l'ascension droite $\gamma A = K$ du nœud ascendant à l'aide des formules suivantes :

$$\cos N = \cos e \cos n - \sin e \sin n \cos k,$$
$$\operatorname{cotang} K = \frac{\operatorname{cotang} n \sin e + \cos e \cos k}{\sin k};$$

et, comme vérification, on devra avoir

$$\sin N \sin K = \sin n \sin k.$$

Quand on connaîtra N et K, on trouvera le point d'intersection M de l'orbite avec un méridien donné PD de la sphère céleste dont l'ascension droite γD sera représentée par α, à l'aide du triangle ADM rectangle en D. En appelant δ la déclinaison cherchée DM de ce point, on aura

$$\operatorname{tang} \delta = \sin (\alpha - K) \operatorname{tang} N.$$

Par exemple, pour la comète de 1811, on aurait

$$n = 106^\circ 57' 24'', \quad k = 140^\circ 24' 30'', \quad e = 23^\circ 27' 50'';$$

on trouve

$$N = 90^\circ 31'; \quad K = 142^\circ 25'$$

donc

$$\operatorname{tang} \delta = 1{,}58679 \sin (\alpha - 142^\circ 25').$$

En faisant successivement $\alpha = 0^\circ$, $\alpha = 10^\circ$, $\alpha = 20^\circ$, $\alpha = 30^\circ$... on obtient

$$\delta = -87^\circ 34'; \quad \delta = -87^\circ 59'; \quad \delta = -88^\circ 15'; \quad \delta = -88^\circ 24'.$$

THÉORIE GÉNÉRALE DES PROJECTIONS.

9. Nous avons montré précédemment que la théorie générale des projections pouvait être ramenée au principe de la transformation des méridiens et des parallèles en d'autres lignes droites ou courbes tracées sur un plan d'après des conditions relatives aux propriétés que doit avoir la carte ; cette théorie est indépendante de la forme particulière attribuée à la surface de révolution que l'on considère, et suppose seulement qu'un point quelconque de cette surface est défini par l'arc de méridien s qui mesure sa distance au pôle et qui est une fonction connue de la latitude l, et par l'angle de ce méridien avec

celui que l'on prend pour premier méridien, c'est-à-dire par la longitude t.

Imaginons maintenant que le même lieu soit placé sur la carte géographique de manière que sa position soit déterminée par deux coordonnées rectangulaires x et y comptées à partir d'une origine quelconque. Ces deux variables x et y doivent dépendre de s et de t et par conséquent de l et de t, et l'on voit que si, dans ces fonctions on fait la variable t constante, on aura les coordonnées de la courbe qui représente le méridien dont la longitude est t; au contraire, si l'on y fait s et par suite l constante, on aura les coordonnées de la courbe qui représente le parallèle auquel répond l'arc de méridien s.

Considérons sur l'ellipsoïde de révolution deux parallèles et deux méridiens infiniment voisins se coupant respectivement en A, B, A', B'; appelons a, b, a' b' les points correspondants de la carte et qui sont les extrémités d'arcs infiniment petits de méridiens et de parallèles de la projection. Les coordonnées de A étant s et t, celles de B seront s et $t+dt$, celles de A', $s+ds$ et t, et celles de B', $s+ds$, et $t+dt$. De plus si nous appelons r le rayon du parallèle de A, rayon qui, comme l'arc s, ne dépend que de la latitude l, nous pourrons exprimer les longueurs des côtés du petit quadrilatère considéré :

$$\text{AB} = r\,dt \qquad \text{et} \qquad \text{AA}' = ds.$$

Quant à la distance AB' elle sera évidemment exprimée par

$$\text{AB}' = \sqrt{r^2 dt^2 + ds^2}.$$

Considérons maintenant (fig. 10) le petit quadrilatère $aba'b'$ de la carte; les coordonnées x, y de a étant fonctions de la latitude et de la longitude, celles de b s'obtiendront en faisant varier la longitude seule et cherchant l'accroissement correspondant de x et y; elles pourront donc être représentées par $x + \frac{dx}{dt}\,dt$ et $y + \frac{dy}{dt}\,dt$. De même celles de a' pourront s'exprimer par $x + \frac{dx}{dl}\,dl$, et $y + \frac{dy}{dl}\,dl$; enfin celles de b' par $x + \frac{dx}{dl}\,dl + \frac{dx}{dt}\,dt$ et $y + \frac{dy}{dl}\,dl + \frac{dy}{dt}\,dt$.

Il en résulte que

$$\alpha\alpha' = \beta\beta' = \frac{dx}{dl}\,dl, \quad \text{et que} \quad \beta'b' - \beta b = \alpha'a' - \alpha a = \frac{dy}{dl}\,dl,$$

ce qui montre que

$$aa' = bb' \quad \text{et que} \quad ab = a'b'$$

c'est-à-dire que le quadrilatère ABA'B' est représenté par un parallélogramme $aba'b'$. Les côtés de ce parallélogramme sont

$$ab = dt\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}.$$

$$aa' = dl\sqrt{\left(\frac{dx}{dl}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dl}\right)^2}.$$

$$ab' = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dl}dl + \frac{dx}{dt}dt\right)^2 - \left(\frac{dy}{dl}dl + \frac{dy}{dt}dt\right)^2}.$$

Enfin les angles de ab et aa' avec l'arc des abscisses ont respectivement pour tangentes

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \quad \text{et} \quad \frac{\frac{dy}{dl}}{\frac{dx}{dl}},$$

et l'angle du méridien et du parallèle est donné par l'équation

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{\frac{dy}{dl}\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt}\frac{dx}{dl}}{\frac{dy}{dl}\frac{dy}{dt} + \frac{dx}{dl}\frac{dx}{dt}}.$$

Si l'on veut que cet angle soit droit comme sur le sphéroïde, il faut que l'on ait

$$\frac{dx}{dl}\frac{dx}{dt} = -\frac{dy}{dl}\frac{dy}{dt} \quad \text{ou} \quad \frac{\frac{dy}{dl}}{\frac{dx}{dl}} = -\frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}}.$$

Si l'on demandait que les deux figures ABA'B', $aba'b'$ fussent non-seulement semblables, mais égales, il faudrait :

1° que ab fût égal à AB :

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = r^2;$$

2° que aa' fût égal à AA'

$$\left(\frac{dx}{dl}\right)^2+\left(\frac{dy}{dl}\right)^2=\left(\frac{ds}{dl}\right)^2;$$

3° que l'angle baa' fût droit :

$$\frac{\frac{dy}{dl}}{\frac{dx}{dl}}=-\frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}};$$

or si nous posons

$$\frac{\frac{dy}{dl}}{\frac{dx}{dl}}=\text{tang}\,\varphi,$$

la troisième condition donnera

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=-\text{cotang}\,\varphi;$$

par conséquent

$$\frac{dy}{dl}=\frac{dx}{dl}\text{tang}\,\varphi \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dt}=-\frac{dx}{dt}\text{cotang}\,\varphi.$$

Ces valeurs substituées dans les équations de condition donneront

$$\left(\frac{dx}{dl}\right)^2=\left(\frac{ds}{dl}\right)^2\cos^2\varphi, \quad \text{et} \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2=r^2\sin^2\varphi,$$

ou

$$\frac{dx}{dl}=s'\cos\varphi, \quad \text{et} \quad \frac{dx}{dt}=r\sin\varphi.$$

en appelant s' la dérivée de s par rapport à l.

Or entre la différentielle totale et les différentielles partielles d'une fonction de deux variables on a les équations

$$dx=\frac{dx}{dl}dl+\frac{dx}{dt}dt,$$
$$dy=\frac{dy}{dl}dl+\frac{dy}{dt}dt,$$

qui deviennent, après la substitution des valeurs de $\frac{dx}{dl}$ et $\frac{dx}{dt}$,

$$dx=ds\cos\varphi-rdt\sin\varphi,$$
$$dy=ds\sin\varphi+rdt\cos\varphi.$$

Pour que les seconds membres soient des différentielles complètes comme les premiers, il faut que l'on ait

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dl}\right)=\frac{d}{dl}\left(\frac{dx}{dt}\right), \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dl}\right)=\frac{d}{dl}\left(\frac{dy}{dt}\right),$$

ce qui transforme ainsi ces deux équations

$$-\frac{d\varphi}{dt}(s'\sin\varphi)=-\frac{dr}{dl}\sin\varphi-\frac{d\varphi}{dl}r\cos\varphi,$$
$$\frac{d\varphi}{dt}(s'\cos\varphi)=\frac{dr}{dl}\cos\varphi-\frac{d\varphi}{dl}r\sin\varphi.$$

En multipliant la première par *cos* φ, la seconde par *sin* φ et ajoutant, on obtient

$$r\frac{d\varphi}{dl}=0,$$

ce qui donne

$$\frac{d\varphi}{dl}=0;$$

la fonction φ doit donc être indépendante de la variable l. Mais si nous multiplions la seconde équation par *cos* φ, la première par *sin* φ et que nous retranchions, nous obtenons

$$\frac{d\varphi}{dt}s'=\frac{dr}{dl} \quad \text{ou} \quad \frac{d\varphi}{dt}=\frac{dr}{dl}\cdot\frac{1}{s'};$$

comme r et s sont des fonctions de l, il en est de même de leurs dérivées (1) ; cette relation indique donc que φ est fonction de l; comme cette condition contredit la précédente, il en résulte, ce que nous savions déjà, qu'il est impossible de représenter exactement la surface du sphéroïde sur un plan.

Puisque nous ne pouvons rendre parfaitement égales les figures infiniment petites correspondantes du sphéroïde et de la carte, nous

---

(1) Nous avons trouvé, en appelant s un arc d'ellipse compté *à partir du pôle*,

$$ds=-\frac{(1-e^2)dl}{(1-e^2\sin^2 l)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{et} \quad r=\frac{\cos l}{(1-e^2\sin^2 l)^{\frac{1}{2}}}.$$

On calcule $dr=\dfrac{\sin l\,(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2 l)^{\frac{3}{2}}}$, donc $\dfrac{\dfrac{dr}{dl}}{\dfrac{ds}{dl}}=-\sin l.$

pouvons chercher à les rendre soit semblables, soit équivalentes. Nous aurons atteint le premier but si nous établissons que, sur la carte, les distances d'un point quelconque aux points infiniment voisins sont aux distances qui leur correspondent sur le sphéroïde dans un rapport qui ne dépend que de la position du premier point considéré. La similitude des distances entraînera évidemment celle des surfaces infiniment petites et par suite la conservation des angles ; et réciproquement si les angles sont partout conservés, les surfaces infiniment petites seront nécessairement semblables et, autour de chaque point, les éléments différentiels seront dans un rapport constant avec les éléments qui leur correspondent sur la surface du sphéroïde.

Si, au lieu de la similitude des surfaces, on demande leur équivalence, on obtiendra les équations générales de tous les systèmes de projections qui satisfont à cette condition en égalant la surface d'un quadrilatère quelconque mais infiniment petit du sphéroïde à celle du parallélogramme rectiligne qui lui correspond.

Nous allons étudier successivement ces deux questions avec tous les développements qu'elles comportent.

CHAPITRE II.

PROJECTIONS SANS DÉFORMATION OU ORTHOMORPHES.

1. Nous avons montré que la condition nécessaire et suffisante à la conservation des angles et par suite à la similitude des surfaces était que les éléments différentiels autour d'un même point fussent dans un rapport constant avec les éléments qui leur correspondent sur la surface du sphéroïde.

Désignons par m ce rapport qui est fonction de la latitude l et de la longitude t.

L'équation fondamentale sera alors

$$dx^2 + dy^2 = m^2(ds^2 + r^2dt^2),$$

ou, en posant $mr = n$,

$$dx^2 + dy^2 = n^2\left[\left(\frac{ds}{r}\right)^2 + dt^2\right].$$

Cherchons quelle fonction de la latitude représente le rapport $\frac{ds}{r}$.

Si nous désignons par z le complément de la latitude, c'est-à-dire l'angle de la normale avec l'axe des pôles, on aura $dz = -dl$, et par suite

$$\frac{ds}{r} = \frac{(1-e^2)dz}{(1-e^2\cos^2 z)\sin z} = \frac{dz}{\sin z} - \frac{e^2\sin z dz}{1-e^2\cos^2 z},$$

expression qui se réduit à son premier terme dans le cas où la terre est supposée sphérique.

Le rapport $\frac{ds}{r}$ est donc une quantité intégrable que nous pouvons désigner par du. Dans le cas de la terre sphérique l'intégrale est

$$u = \frac{1}{2}\log\frac{1-\cos z}{1+\cos z} + \log K = \log K \operatorname{tang}\frac{z}{2},$$

en appelant K une constante arbitraire. Si la terre est supposée elliptique, l'intégrale de $\frac{e^2 \sin z dz}{1-e^2\cos^2 z}$ est $\frac{e}{2}\log\frac{1-e\cos z}{1+e\cos z}$; on aura donc en général

$$u = \log\left[\mathrm{K}\tang\frac{z}{2}\left(\frac{1+e\cos z}{1-e\cos z}\right)^{\frac{e}{2}}\right].$$

Si l'on appelle ζ un angle tel que l'on ait

$$\tang\frac{\zeta}{2} = \tang\frac{z}{2}\left(\frac{1+e\cos z}{1-e\cos z}\right)^{\frac{e}{2}},$$

l'expression de u aura la même forme que dans le cas de la terre sphérique, car on aura alors

$$u = \log \mathrm{K}\tang\frac{\zeta}{2};$$

en sorte que l'on pourra regarder ζ comme la distance au pôle corrigée en vertu de l'aplatissement de la terre, et, comme l'excentricité est fort petite, on pourra trouver la correction dont il s'agit, c'est-à-dire la différence de ζ à z, par la relation

$$\zeta = z - \frac{e^2}{2}\sin 2z,$$

et cette approximation aura toute l'exactitude désirable (1).

Revenons maintenant à l'équation générale du problème

$$dx^2 + dy^2 = n^2(du^2 + dt^2);$$

la question se réduit à déterminer au moyen de cette équation les valeurs de x et de y en fonction de t et u.

Posons

$$u + t\sqrt{-1} = \alpha, \qquad u - t\sqrt{-1} = \beta,$$
$$x + y\sqrt{-1} = \alpha', \qquad x - y\sqrt{-1} = \beta'.$$

Nous pouvons écrire, en appelant ν ce que devient n quand on y remplace u et t par leurs valeurs en α et β,

---

(1) La différence $\zeta - z$, que nous avons appelée i au § 3 du chap. I, est égale à la différence entre la latitude géographique l et la latitude géocentrique l'; elle est donnée dans la table III pour toutes les valeurs de z de degré en degré.

$$d\alpha' d\beta' = \nu d\alpha d\beta.$$

Il est alors très-facile d'obtenir α' et β'.

Remplaçons

$$d\alpha' \quad \text{par} \quad \frac{d\alpha'}{d\alpha} d\alpha + \frac{d\alpha'}{d\beta} d\beta,$$

et

$$d\beta' \quad \text{par} \quad \frac{d\beta'}{d\alpha} d\alpha + \frac{d\beta'}{d\beta} d\beta;$$

il vient

$$\frac{d\alpha'}{d\alpha}\frac{d\beta'}{d\alpha} d\alpha^2 + \frac{d\alpha'}{d\beta}\frac{d\beta'}{d\beta} d\beta^2 + \left(\frac{d\alpha' d\beta'}{d\alpha d\beta} + \frac{d\alpha' d\beta'}{d\beta d\alpha}\right) d\alpha d\beta = n^2 \nu d\alpha d\beta;$$

d'où

$$\frac{d\alpha'}{d\alpha}\frac{d\beta'}{d\alpha} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{d\alpha'}{d\beta}\frac{d\beta'}{d\beta} = 0,$$

et par conséquent

$$\frac{d\alpha'}{d\beta} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{d\beta'}{d\alpha} = 0,$$

ou bien

$$\frac{d\alpha'}{d\alpha} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{d\beta'}{d\beta} = 0;$$

c'est-à-dire, en intégrant,

$$\alpha' = \mathrm{F}(\alpha), \quad \beta' = \mathrm{F}_1(\beta),$$

ou bien

$$\alpha' = \Phi(\beta) \quad \text{et} \quad \beta' = \Phi_1(\alpha).$$

Nous serions arrivés au même résultat en exprimant que l'angle de deux éléments quelconques de la carte est égal à l'angle des deux éléments correspondants du sphéroïde.

En effet, le cosinus de l'angle compris entre les deux éléments am_1, am_2 de la carte qui partent du point (xy) et se terminent respectivement aux points $(x + dx, y + dy)$, $(x + \delta x, y + \delta y)$ sera, abstraction faite du signe,

$$\frac{dx\delta y - \delta x dy}{\sqrt{(dx^2 + dx^2)(\delta x^2 + \delta y^2)}}.$$

De même le cosinus de l'angle formé sur le sphéroïde par les deux éléments AM_1, AM_2 qui partent du point (u, t) et se terminent

respectivement aux points $(u+du,\ t+dt)$, $(u+\delta u,\ t+\delta t)$, sera

$$\frac{du\delta t - dt\delta u}{\sqrt{(du^2+dt^2)(\delta u^2+\delta t^2)}}.$$

Nous aurons donc pour l'équation du problème

$$\frac{du\delta t - \delta u dt}{\sqrt{(du^2+dt^2)(\delta u^2+\delta t^2)}} = \frac{dx\delta y - dy\delta x}{\sqrt{(dx^2+dy^2)(\delta x^2+\delta y^2)}},$$

ou, en introduisant les variables α, β, α', β',

$$\frac{d\beta\delta\alpha - d\alpha\delta\beta}{\sqrt{d\alpha d\beta\delta\alpha\delta\beta}} = \frac{d\beta'\delta\alpha' - d\alpha'\delta\beta'}{\sqrt{d\alpha' d\beta'\delta\alpha'\delta\beta'}};$$

d'où

$$d\alpha' d\beta'\delta\alpha'\delta\beta'(d\beta\delta\alpha - \delta\beta d\alpha)^2 = d\alpha d\beta\delta\alpha\delta\beta(d\beta'\delta\alpha' - d\alpha'\delta\beta')^2.$$

Posons

$$\delta\alpha' = \frac{d\alpha'}{d\alpha}\delta\alpha + \frac{d\alpha'}{d\beta}\delta\beta \qquad \text{et} \qquad \delta\beta' = \frac{d\beta'}{d\alpha}\delta\alpha + \frac{d\beta'}{d\beta}\delta\beta,$$

et, supposant les éléments AM_1, am_1 fixes, faisons varier les éléments AM_2, am_2, c'est-à-dire supposant $d\alpha$, $d\beta$, $d\alpha'$, $d\beta'$ constants, faisons varier $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\alpha'$, $\delta\beta'$; l'égalité ci-dessus étant une identité, il ne pourra y avoir dans le premier nombre d'autres termes en $\delta\alpha$ et $\delta\beta$ que ceux qui se trouvent dans le second; ainsi les termes en $\delta\alpha^4$ et $\delta\beta^4$ du premier membre devront disparaître, ce qui exige que

$$\frac{d\alpha'}{d\alpha}\frac{d\beta'}{d\alpha} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{d\alpha'}{d\beta}\frac{d\beta'}{d\beta} = 0,$$

comme nous l'avions déjà obtenu.

La similitude des éléments autour de chaque point entraîne donc la conservation des angles, et réciproquement; c'est ce que nous avions déjà fait remarquer sans calcul.

Revenons aux résultats que nous avons trouvés

$$\alpha' = F(\alpha) \quad \text{avec} \quad \beta' = F_1(\beta) \quad \text{ou bien} \quad \alpha'\Phi = (\beta) \quad \text{avec} \quad \beta' = \Phi_1(\alpha).$$

Substituons à α, β, α', β' leurs valeurs en x, y, u et t; les deux solutions de notre problème deviendront

$$x + y\sqrt{-1} = F(u + t\sqrt{-1}) \quad \text{avec} \quad x - y\sqrt{-1} = F_1(u - t\sqrt{-1}),$$

et

$$x + y\sqrt{-1} = \Phi(u + t\sqrt{-1}) \quad \text{avec} \quad x - y\sqrt{-1} = \Phi_1(u + t\sqrt{-1}).$$

Les caractéristiques F et Φ désignent deux fonctions indéterminées quelconques, de sorte que $F(u+t\sqrt{-1})$ et $\Phi(u-t\sqrt{-1})$ sont des fonctions quelconques de $u+t\sqrt{-1}$ et de $u-t\sqrt{-1}$.

Mais x et y devant être réels comme u et t, les deux fonctions F_1 et Φ_1 ne peuvent pas être prises arbitrairement une fois que les fonctions F et Φ ont été fixées; il faut évidemment, si la fonction F est réelle, que F_1 soit la même fonction; et, si F est imaginaire, que F_1 soit la fonction conjuguée obtenue en changeant dans la première $\sqrt{-1}$ en $-\sqrt{-1}$; il en est de même de Φ_1 relativement à Φ; ainsi chacune de nos solutions ne contient qu'une fonction arbitraire qui peut être imaginaire aussi bien que réelle.

M. Bonnet (1) a montré très-simplement que la première solution correspond à la similitude directe lorsque l'on se place dans la région extérieure au sphéroïde, c'est-à-dire au cas où l'on veut représenter les différents lieux de la terre comme ils sont placés en réalité sur le globe; la seconde solution, au contraire, correspond à la similitude inverse; c'est le contraire qui aurait lieu si l'on se plaçait dans la région intérieure. Comme le premier cas est seul intéressant, nous ne considérerons que la première solution

$$x+y\sqrt{-1}=F(u+t\sqrt{-1}) \quad \text{et} \quad x-y\sqrt{-1}=F_1(u-t\sqrt{-1}).$$

Nous en tirons

$$x=\frac{1}{2}\left[F(u+t\sqrt{-1})+F_1(u-t\sqrt{-1})\right]$$

$$y=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\left[F(u+t\sqrt{-1})-F_1(u-t\sqrt{-1})\right].$$

Telles sont les expressions les plus générales des coordonnées x et y qui déterminent sur la carte la position que doit avoir chaque lieu de la terre en vertu de la condition supposée : que la distance de deux lieux quelconques infiniment voisins sur la surface de la terre soit à la distance des mêmes lieux sur la carte dans le rapport de 1 à m.

Il est facile de voir que réciproquement les expressions dont il s'agit renferment nécessairement la loi de la description de toutes

(1) *Thèses de mécanique et d'astronomie présentées à la Faculté des sciences de Paris, le 2 août* 1852, par M. Ossian Bonnet, in-4, pages 39 à 78.

les cartes géographiques dans lesquelles la même condition pourra avoir lieu.

2. Cherchons l'expression du rapport d'agrandissement m en chaque point.

Nous avons posé $m = \frac{n}{r}$ et les conditions du problème ont donné

$$dx^2 + dy^2 = n^2(du^2 + dt^2);$$

donc, en appelant F' et F'_1 les dérivées des fonctions F et F_1 par rapport à $u + t\sqrt{-1}$ et à $u - t\sqrt{-1}$, on aura

$$dx + dy\sqrt{-1} = F'(u + t\sqrt{-1}) \times (du + dt\sqrt{-1}),$$
$$dx - dy\sqrt{-1} = F'_1(u - t\sqrt{-1}) \times (du - dt\sqrt{-1});$$

donc

$$dx^2 + dy^2 = F'(u + t\sqrt{-1})\, F'_1(u - t\sqrt{-1}) \times (du^2 + dt^2);$$

ainsi

$$n^2 = F'(u + t\sqrt{-1})\, F'_1(u - t\sqrt{-1}),$$

et par conséquent

$$m = \frac{\sqrt{F'(u + t\sqrt{-1})\, F'_1(u - t\sqrt{-1})}}{r} = \frac{\sqrt{(1 - e^2\cos^2 z)\, F' . F'_1}}{\sin z} = \frac{1}{r\Omega},$$

en posant

$$\sqrt{F'(u + t\sqrt{-1})\, F'_1(u - t\sqrt{-1})} = \frac{1}{\Omega}.$$

Si nous considérons autour de deux points correspondants de la terre et de la carte deux figures infiniment petites, les côtés homologues étant dans le rapport de 1 à m, les figures seront semblables et leurs surfaces seront dans le rapport de 1 à m^2; ainsi chaque portion infiniment petite de la surface de la terre conserve sa figure et n'est altérée que dans sa grandeur.

Nous savons déjà que la supposition de m constant est inadmissible dans l'hypothèse de la terre sphéroïde, c'est-à-dire qu'il est impossible d'obtenir un mode de représentation pour lequel une portion finie de la terre soit partout semblable à la partie correspondante de la carte. L'analyse démontre qu'en supposant seulement que la terre soit une surface de révolution, le rapport d'agrandissement ne pourrait être constant que si cette surface était un cylindre ou un cône. Nous ne nous arrêterons pas à ce calcul.

3. Reprenons maintenant les relations

$$x+y\sqrt{-1}=\mathrm{F}(u+t\sqrt{-1}) \quad \text{et} \quad x-y\sqrt{-1}=\mathrm{F}_1(u-t\sqrt{-1})$$

qui lient les différents points de la carte aux points correspondants du globe, et cherchons à déterminer la fonction inconnue F.

Je remarque que si nous supposons $t=0$, nous aurons les valeurs des coordonnées de la courbe qui représente le premier méridien :

$$x=\frac{\mathrm{F}(u)+\mathrm{F}_1(u)}{2}, \qquad y=\frac{\mathrm{F}(u)-\mathrm{F}_1(u)}{2\sqrt{-1}};$$

ces valeurs contenant deux fonctions arbitraires, savoir la partie réelle et le coefficient de $\sqrt{-1}$ de F, peuvent être des fonctions quelconques de u ; il en résulte que le premier méridien de la carte peut être représenté par une courbe quelconque et que la latitude peut varier sur ce méridien suivant une loi aussi quelconque. En effet, supposons que pour ce méridien on ait

$$x=\varphi(u), \quad y=\psi(u),$$

$\varphi(u)$ et $\psi(u)$ représentant des fonctions quelconques données de u ; on aura

$$\frac{\mathrm{F}(u)+\mathrm{F}_1(u)}{2}=\varphi(u) \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{F}(u)-\mathrm{F}_1(u)}{2\sqrt{-1}}=\psi(u);$$

d'où l'on tire

$$\mathrm{F}(u)=\varphi(u)+\psi(u)\sqrt{-1}; \quad \mathrm{F}_1(u)=\varphi(u)-\psi(u)\sqrt{-1};$$

donc, mettant cette forme de fonction dans les expressions générales de x et y, on aura

$$x=\frac{\varphi(u+t\sqrt{-1})+\varphi(u-t\sqrt{-1})}{2}+\frac{\psi(u+t\sqrt{-1})-\psi(u-t\sqrt{-1})}{2}\sqrt{-1},$$

$$y=\frac{\psi(u+t\sqrt{-1})+\psi(u-t\sqrt{-1})}{2}+\frac{\varphi(u+t\sqrt{-1})-\varphi(u-t\sqrt{-1})}{2}\sqrt{-1},$$

et ces expressions ont l'avantage que les imaginaires s'y détruisent toujours d'elles-mêmes.

Supposons, par exemple, que nous représentions le premier méridien par une droite sur laquelle la latitude devra varier, de telle sorte que $x=\mathrm{K}u$, K étant une constante ; prenons cette droite pour

axe des x; les deux fonctions $\varphi(u)$ et $\psi(u)$, sont dans ce cas 0 et u; nous aurons donc, en supposant la terre sphérique,

$$y = Kt \qquad \text{et} \qquad x = K \log\text{tang} \frac{90° - l}{2},$$

ce qui est la loi de la projection des cartes marines; les méridiens sont des droites parallèles également espacées, et les parallèles des droites perpendiculaires aux premières et dont l'espacement est soumis à la loi

$$dx = d\left(K \log\text{tang} \frac{90° - l}{2}\right) = \frac{-K dl}{\sin(90° - l)} = \frac{-K dl}{\sec l}.$$

Ces cartes (1) sont employées pour la navigation parce que les rumbs de vent y sont conservés et que, par conséquent, la route à suivre pour se rendre d'un point à un autre à l'aide de la boussole en coupant tous les méridiens sous le même angle y est représentée par une droite.

En appliquant la formule $m = \frac{\sqrt{F' \cdot F'_1}}{r}$, on trouve facilement que, dans l'hypothèse de la terre sphérique,

$$m = \frac{K}{\cos l}.$$

Le rapport d'agrandissement des surfaces sera par conséquent

$$m^2 = \frac{K^2}{\cos^2 l},$$

rapport considérable, mais qui importe peu pour les besoins de la navigation.

4. D'autres considérations peuvent nous faire déterminer immédiatement différents genres de représentation.

Quand on choisit pour F une fonction linéaire, c'est-à-dire F(A) = KA, on obtient la projection de Mercator ou des cartes marines, dont nous venons de parler.

On peut prendre pour F une fonction exponentielle réelle, par exemple l'une des plus simples

$$F\left(u + t\sqrt{-1}\right) = Ke^{\lambda\left(u + t\sqrt{-1}\right)};$$

(1) *Voir* la deuxième partie, chap. V, pour la théorie et la construction de cette projection, et le § 22 du chapitre VI (1re partie) pour l'historique de son invention due à Gérard MERCATOR.

on a alors

$$F_1(u - t\sqrt{-1}) = Ke^{\lambda(u-t\sqrt{-1})}.$$

On peut écrire

$$F(u + t\sqrt{-1}) = Ke^{\lambda u}(\cos\lambda t + \sqrt{-1}\sin\lambda t),$$

$$F_1(u - t\sqrt{-1}) = Ke^{\lambda u}(\cos\lambda t - \sqrt{-1}\sin\lambda t).$$

On aura donc

$$x = Ke^{\lambda u}\cos\lambda t, \qquad \text{et} \qquad y = Ke^{\lambda u}\sin\lambda t.$$

Dans le cas de la terre sphérique $u = \log \operatorname{tang} \frac{z}{2}$, z étant le complément de la latitude, donc

$$e^{\lambda u} = \left(\operatorname{tang}\frac{z}{2}\right)^{\lambda},$$

et par conséquent

$$x = K\left(\operatorname{tang}\frac{z}{2}\right)^{\lambda}\cos\lambda t \qquad \text{et} \qquad y = K\left(\operatorname{tang}\frac{z}{2}\right)^{\lambda}\sin\lambda t. \quad (A)$$

Comme $\frac{y}{x} = \operatorname{tang}\lambda t$ et que $x^2 + y^2 = K^2\left(\operatorname{tang}\frac{z}{2}\right)^{2\lambda} = \rho^2$, on voit que les projections de tous les points pour lesquels la latitude est constante forment un cercle, et que les projections de tous les points pour lesquels la longitude est constante forment une droite ; de plus tous les cercles représentant les parallèles ont un centre commun autour duquel rayonnent tous les méridiens.

Le rapport d'agrandissement est ici

$$m = \frac{\sqrt{F'.F'_1}}{\sin z} = \frac{\lambda K\left(\operatorname{tang}\frac{z}{2}\right)^{\lambda}}{\sin z}.$$

Comme λ est une constante arbitraire, nous pouvons lui donner telle valeur que nous voulons. Si nous faisons d'abord $\lambda = 1$ nous obtenons la projection dite stéréographique polaire (1)

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tang} t \qquad \text{et} \qquad x^2 + y^2 = K^2\left(\operatorname{tang}\frac{90° - l}{2}\right)^2,$$

K représente alors le rayon de l'équateur.

---

(1) *Voir* 2e partie, chap. I, § 5.

Le rapport d'agrandissement devient

$$m = \frac{\operatorname{tang}\frac{z}{2}}{\sin z} = \frac{1}{2\cos^2\frac{z}{2}}.$$

Si nous faisons, dans les équations (A), $\lambda = 0$, nous obtenons encore les cartes marines comme il est facile de s'en convaincre en développant

$$\rho = \operatorname{tang}\left(\frac{90^\circ - l}{2}\right)^\lambda = \left(\frac{\operatorname{tang} 45^\circ - \operatorname{tang}\frac{l}{2}}{\operatorname{tang} 45^\circ + \operatorname{tang}\frac{l}{2}}\right)^\lambda = \frac{\left(1 - \operatorname{tang}\frac{l}{2}\right)^\lambda}{\left(1 + \operatorname{tang}\frac{l}{2}\right)^\lambda}$$

suivant les puissances de $\operatorname{tang}\frac{l}{2}$.

Revenons aux expressions générales :

$$x = K\left(\operatorname{tang}\frac{z}{2}\right)^\lambda \cos\lambda t, \quad y = K\left(\operatorname{tang}\frac{z}{2}\right)^\lambda \sin\lambda t,$$

$$m = \frac{\lambda K\left(\operatorname{tang}\frac{z}{2}\right)^\lambda}{\sin z}.$$

Elles peuvent se mettre sous la forme

$$x = \rho\cos\lambda t, \quad y = \rho\sin\lambda t \quad \text{et} \quad m = \frac{\lambda\rho}{\sin z}.$$

Nous voyons que les coordonnées d'un point quelconque dont la longitude est t sont les mêmes que celles qui correspondent à λ fois la longitude t dans la projection stéréographique polaire définie par l'hypothèse $\lambda = 1$. Si donc λ est une fraction moindre que l'unité, la projection de la sphère entière, au lieu d'occuper la totalité d'un cercle, sera comprise dans un secteur qui sera la même fraction de l'aire totale. Ainsi, si $\lambda = \frac{1}{2}$, la projection de la sphère entière sera comprise dans un demi-cercle; si $\lambda = \frac{1}{3}$, dans un secteur de 120°; si $\lambda = \frac{2}{3}$, dans un secteur de 240°.

Nous reviendrons (1) sur cette projection imaginée par *Lambert* et plus connue sous le nom de *projection de Gauss*.

---

(1) *Voir* chap. II, § 8, et 2e partie, chap. XI.

Si nous posons $K = 1$, c'est-à-dire si nous prenons pour unité le rayon de l'équateur de la projection, nous avons

$$\rho = \left(\text{tang}\,\frac{z}{2}\right)^{\lambda},$$

formule qui permet de calculer facilement le rayon ρ de chaque parallèle pour chaque valeur de z de 0 à 180°. Les valeurs de ρ pour $z = 10°, 20°, 30°$..... dans les quatre cas $\lambda = \frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$, ont été réunies dans le tableau du chap. XI (2e partie) et ont servi à tracer les projections nos VI et VII.

5. La manière dont nous avons déterminé les fonctions arbitraires qui entrent dans les valeurs de x et de y, quoique la plus simple et la plus naturelle, n'est pas néanmoins celle qui convient le mieux à notre objet. Il vaut mieux, en effet, profiter de l'indétermination des deux fonctions qui entrent dans F_1 et F, de manière à faire acquérir à la carte quelque nouvelle propriété qui rende sa construction facile ou son emploi commode.

Proposons-nous de déterminer les fonctions arbitraires par la condition qu'une série de points de la surface du globe occupe une position déterminée sur la carte. Nous pouvons supposer dans ce cas F réel, et alors F_1 étant égale à F, on n'a plus qu'une seule fonction à déterminer. Cette fonction devant avoir des valeurs connues pour une série de valeurs de u et de t et par conséquent de $u + t\sqrt{-1}$, pourra toujours être déterminée au moyen des formules d'interpolation.

On pourrait aussi assujettir le rapport d'agrandissement m à avoir une même valeur déterminée pour une série de points du globe ; à l'aide des formules d'interpolation, on trouverait encore aisément les fonctions arbitraires.

Enfin on peut se donner la figure même des parallèles et des méridiens, et alors la question se réduit à déterminer la forme des fonctions inconnues de la solution générale, de sorte qu'il en résulte pour les méridiens et pour les parallèles des lignes d'une nature donnée. Ce problème, pris dans toute sa généralité, est peut-être impossible à résoudre ; mais comme il paraît naturel, quand on se donne d'avance la forme des méridiens et des parallèles, de prendre les formes les plus simples, nous ne considérerons que le cas où ces courbes doivent être des cercles, les droites pouvant être considérées comme des cercles de rayon infini. Cette question, étudiée avec beau-

coup de détails par *Lagrange* (1), a été reprise plus tard par M. Bonnet (2), qui l'a traitée avec l'élégance et la clarté qui caractérisent tous ses travaux.

6. Comme la principale propriété du cercle consiste en ce que le rayon de courbure est constant, nous allons d'abord chercher l'expression des rayons osculateurs ρ des courbes qui représentent les méridiens et les parallèles par les formules générales que nous avons trouvées.

L'expression du rayon osculateur d'une courbe plane quelconque rapportée aux coordonnées rectangulaires x et y est

$$\rho = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dy\,d^2x - dx\,d^2y}.$$

Occupons-nous d'abord des méridiens ; nous devons supposer t constant dans la formule générale

$$x + y\sqrt{-1} = \mathrm{F}(u + t\sqrt{-1});$$

nous en déduirons

$$dx = \alpha\,du \quad \text{et} \quad dy = \beta\,du,$$

en appelant, pour simplifier, α la partie réelle, et β le coefficient de $\sqrt{-1}$ dans la dérivée, par rapport à u, de $\mathrm{F}(u + t\sqrt{-1})$; il en résulte

$$d^2x = \frac{d\alpha}{du}du^2 \quad \text{et} \quad d^2y = \frac{d\beta}{du}du^2,$$

ce qui donne, en substituant dans l'expression générale de ρ,

$$\rho_m = \frac{(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{3}{2}}}{\beta\dfrac{d\alpha}{du} - \alpha\dfrac{d\beta}{du}}.$$

Or, pour un point quelconque de la surface, on a

$$dx = \alpha\,du - \beta\,dt \quad \text{et} \quad dy = \beta\,du + \alpha\,dt;$$

---

(1) *Sur la construction des cartes géographiques* (deux mémoires consécutifs) dans les *Nouveaux mémoires de l'Académie royale des sciences et belles-lettres, année* M.DCC.LXXIV, Berlin 1781, in-4°, pages 161 à 210.

(2) *Thèse d'astronomie*, par M. Ossian Bonnet, 1852.

donc on a aussi les relations

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{d\beta}{du} \quad \text{et} \quad \frac{d\beta}{dt} = \frac{d\alpha}{du}.$$

Il en résulte

$$\rho_m = \frac{(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{3}{2}}}{\beta\dfrac{d\beta}{dt}+\alpha\dfrac{d\alpha}{dt}},$$

ou enfin

$$\frac{1}{\rho_m} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right).$$

Pour les parallèles, en considérant u comme constant, on trouvera de même

$$\frac{1}{\rho_p} = \frac{d}{du}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right).$$

D'après la définition de α et de β et la forme des fonctions F et F_1, il est clair que

$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2} = \sqrt{F'(u+t\sqrt{-1})F_1'(u-t\sqrt{-1})},$$

quantité que nous avons appelée $\frac{1}{\Omega}$ dans l'expression du rapport d'agrandissement $m = \frac{1}{r\Omega}$.

Nous pouvons donc écrire

$$\frac{1}{\rho_m} = -\frac{d\Omega}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\rho_p} = \frac{d\Omega}{du}.$$

Revenons maintenant à la question que nous nous sommes proposée, de représenter les méridiens et les parallèles par des cercles. La première condition exige que la courbure $\frac{1}{\rho_m}$ des méridiens ne varie pas quand u varie, et soit par conséquent fonction de t seulement ; donc

$$\frac{d^2\Omega}{dt\,du} = 0.$$

Il en résulte cette conséquence importante que, par cela même que les méridiens sont représentés par des cercles, les parallèles le

sont aussi, car la condition $\frac{d^2\Omega}{dt\,du} = 0$ montre que la courbure $\frac{d\Omega}{du}$ des parallèles est fonction de u seulement, puisque sa dérivée par rapport à t est nulle; par conséquent cette courbure est constante pour tous les points d'un même parallèle. On prouverait de la même manière que, si les parallèles sont représentés par des cercles, les méridiens le sont également; et la condition commune à la circularité des uns et des autres est $\frac{d^2\Omega}{du\,dt} = 0$.

Voyons maintenant quelle doit être la forme des fonctions arbitraires F et F_1 pour que cette condition soit remplie.

Posons, pour simplifier,

$$\frac{1}{\sqrt{F'(z)}} = \varphi(z), \qquad \frac{1}{\sqrt{F'_1(z)}} = \psi(z),$$

ce qui donne

$$\Omega = \varphi(u + t\sqrt{-1})\,\psi(u - t\sqrt{-1}).$$

La condition

$$\frac{d^2\Omega}{du\,dt} = 0$$

deviendra

$$\varphi''(u + t\sqrt{-1})\,\psi(u - t\sqrt{-1}) - \psi''(u - t\sqrt{-1})\,\varphi(u + t\sqrt{-1}) = 0,$$

en appelant φ'' et ψ'' les dérivées secondes des fonctions φ et ψ.

L'égalité précédente peut se mettre sous la forme

$$\frac{\varphi''(u + t\sqrt{-1})}{\varphi(u + t\sqrt{-1})} = \frac{\psi''(u - t\sqrt{-1})}{\psi(u - t\sqrt{-1})};$$

or le second membre, d'après la nature des fonctions φ et ψ, se déduisant du premier par l'échange de $\sqrt{-1}$ en $-\sqrt{-1}$, cette égalité ne peut exister que si les deux membres se réduisent à une même constante k; on a donc

$$\frac{\varphi''(u + t\sqrt{-1})}{\varphi(u + t\sqrt{-1})} = k,$$

d'où

$$\varphi(u + t\sqrt{-1}) = Ae^{\sqrt{k}(u + t\sqrt{-1})} + Be^{-\sqrt{k}(u + t\sqrt{-1})},$$

A et B étant des constantes quelconques, réelles ou imaginaires; et par conséquent,

$$F(u+t\sqrt{-1}) = P + \frac{e^{-\sqrt{k}(u+t\sqrt{-1})}}{Me^{\sqrt{k}(u+t\sqrt{-1})} + Ne^{-\sqrt{k}(u+t\sqrt{-1})}},$$

M, N, P étant des constantes de même nature que A et B. Quant à la constante $\sqrt{k}$, comme son carré peut être aussi bien négatif que positif, elle peut de même être réelle ou imaginaire; mais on peut remarquer que la valeur que reçoit le second membre de l'égalité précédente pour une valeur de k négative et égale à $-c^2$, se déduit de la valeur que l'on obtient pour $k=c^2$, en changeant seulement u en t et t en $-u$. Cela étant, nous nous contenterons d'attribuer une valeur positive c^2; il viendra ainsi

$$F(u+t\sqrt{-1}),$$

ou bien

$$(I) \qquad x+y\sqrt{-1} = P + \frac{e^{-c(u+t\sqrt{-1})}}{Me^{c(u+t\sqrt{-1})} + Ne^{-c(u+t\sqrt{-1})}}.$$

Ce résultat peut être considérablement simplifié.

Je remarque d'abord que l'on peut toujours supposer nulle la constante P, car cela revient à ajouter une simple constante à x et y, c'est-à-dire à transporter les axes des x et des y parallèlement à eux-mêmes. De plus les constantes que nous avons dit être réelles ou imaginaires peuvent être supposées réelles et même positives. En effet, on peut, dans tous les cas, poser $M = me^{\alpha\sqrt{-1}}$, $N = ne^{\beta\sqrt{-1}}$, m et n étant positifs, et notre formule devient

$$x+y\sqrt{-1} = \frac{e^{-c(u+t\sqrt{-1})}}{me^{c\left[u+\left(t+\frac{\alpha}{c}\right)\sqrt{-1}\right]} + ne^{-c\left[u+\left(t-\frac{\beta}{c}\right)\sqrt{-1}\right]}}.$$

Multiplions le premier membre par $\cos\beta + \sqrt{-1}\sin\beta$, et le second par $e^{\beta\sqrt{-1}}$, puis posons

$$x\cos\beta - y\sin\beta = x_1, \qquad x\sin\beta + y\cos\beta = y_1;$$

nous aurons

$$x_1+y_1\sqrt{-1} = \frac{e^{-c\left[u+\left(t-\frac{\beta}{c}\right)\sqrt{-1}\right]}}{me^{c\left[u+\left(t+\frac{\alpha}{c}\right)\sqrt{-1}\right]} + ne^{-c\left[u+\left(t-\frac{\beta}{c}\right)\sqrt{-1}\right]}}.$$

Or x_1 et y_1 sont évidemment les coordonnées correspondantes à x

et y dans un système d'axes rectangulaires (OX_1, OY_1) que l'on obtient en faisant tourner de l'angle β le système des axes OX, OY); le second membre de la dernière équation ne diffère du second membre de l'équation (I), après qu'on y a fait $P=0$, $M=m$, $N=n$, qu'en ce que $t+\frac{\alpha-\beta}{c}$ est mis à la place de t, comme on le voit aisément en réduisant ces seconds membres au même numérateur 1. Donc, si l'on prend d'avance les axes des (X_1, Y_1) pour axes des (X, Y), et si l'on recule le méridien initial, à partir duquel se comptent les longitudes t, de l'angle $\frac{\alpha-\beta}{c}$, la dernière équation se confondra avec l'équation (I). On peut donc toujours supposer réelles et positives les constantes M et N.

Pour déduire de l'équation (I) simplifiée, comme il vient d'être dit, les valeurs de x et y en u et t, multiplions, dans le second membre haut et bas par $Me^{c(u-t\sqrt{-1})}+Ne^{-c(u-t\sqrt{-1})}$, il viendra

$$x+y\sqrt{-1}=\frac{Me^{-2ct\sqrt{-1}}+Ne^{-2cu}}{M^2e^{2cu}+2MN\cos 2ct+N^2e^{-2uc}},$$

et en égalant séparément les parties réelles et les parties imaginaires,

$$x=\frac{M\cos 2ct+Ne^{-2cu}}{M^2e^{2cu}+2MN\cos 2ct+N^2e^{-2cu}},$$

$$y=\frac{-M\sin 2ct}{M^2e^{2cu}+2MN\cos 2ct+N^2e^{-2cu}}.$$

Si, entre ces équations, on élimine u, on obtiendra une relation entre x, y, t qui représentera tous les cercles répondant aux différents méridiens, et réciproquement, si l'on élimine t, on aura une équation en x, y, u, qui sera l'équation commune à tous les cercles répondant aux différentes parallèles. Pour faciliter les éliminations, il convient de faire d'abord la somme des carrés des deux équations; on trouve

$$x^2+y^2=\frac{e^{-2cu}}{M^2e^{2cu}+2MN\cos 2ct+N^2e^{-2cu}},$$

et cela permet de mettre les équations sous la forme plus simple

$$\frac{x}{x^2+y^2}=N+Me^{2cu}\cos 2ct,$$

$$\frac{y}{x^2+y^2}=-Me^{2cu}\sin 2ct.$$

Éliminant maintenant la variable u, on a

$$x^2 + y^2 - \frac{y}{N}\operatorname{cotang} 2ct - \frac{x}{N} = 0. \tag{II}$$

La circonférence représentée par cette équation passe par l'origine O des coordonnées et par le point A de OX qui a $\frac{1}{N}$ pour abscisse; de plus elle coupe l'axe des x au point O sous un angle égal à $\pi - 2ct$ ou à $-2ct$ suivant que $t = 0$ est positif ou négatif; ajoutons que, dans le premier cas, on ne doit prendre que le segment situé du côté des y négatifs, et, dans le second, que le segment situé du côté des y positifs.

Éliminons, en second lieu, la variable t; on trouve

$$x^2 + y^2 + \frac{2Nx}{M^2 e^{4cu} - N^2} - \frac{1}{M^2 e^{4cu} - N^2} = 0. \tag{III}$$

La circonférence représentée par cette équation a l'axe des x pour diamètre. Pour achever de la définir, je vais chercher un système de deux points situés sur l'axe des x, et tels que leurs distances à un point quelconque de la circonférence soit dans un rapport constant. A cet effet, je prends l'équation

$$(x - a)^2 + y^2 = k^2[(x - a')^2 + y^2],$$

qui représente le lieu des points dont les distances à deux points situés sur l'axe des x, et ayant pour abscisses a et a', ont un rapport k, et j'identifie avec l'équation ci-dessus; il vient

$$\frac{-2a + 2a'k^2}{1 - k^2} = \frac{2N}{M^2 e^{4cu} - N^2}, \qquad \frac{k^2 a'^2 - a^2}{1 - k^2} = \frac{1}{M^2 e^{4cu} - N^2}.$$

On vérifie ces deux équations en posant

$$a' = 0, \quad a = \frac{1}{N}, \quad k = \frac{M}{N} e^{2cu};$$

donc les circonférences représentant les différents parallèles du globe terrestre sont les lieux de points dont les distances aux deux points fixes A et O déjà obtenus comme intersections des méridiens et de l'axe des x, sont dans un rapport constant et égal à $\frac{M}{N} e^{2cu}$.

Il convient de transporter l'origine des coordonnées au milieu de OA, afin de simplifier les équations (II) et (III); on trouve ainsi, en posant $OA = \frac{1}{N} = 2a$,

(IV) $$x^2 + y^2 - 2a \operatorname{cotang} 2ct \,.\, y = a^2,$$

pour l'équation des méridiens, et

$$x^2 + y^2 + 2a \frac{4a^2M^2e^{4cu} + 1}{4a^2M^2e^{4cu} - 1} x = -a^2$$

pour celle des parallèles.

Cette dernière équation peut se mettre sous une forme plus élégante; faisant $4a^2M^2 = e^{4ch}$, le coefficient de x deviendra

$$2a \frac{e^{4cu+4ch} + 1}{e^{4cu+4ch} - 1} = 2a \frac{e^{2c(u+h)} + e^{-2c(u+h)}}{e^{2c(u+h)} - e^{-2c(u+h)}}$$

$$= -2a\sqrt{-1} \operatorname{cotang} 2c \frac{u+h}{\sqrt{-1}},$$

et l'équation sera

(V) $$x^2 + y^2 - 2a\sqrt{-1} \operatorname{cotang} 2cu_1 x = -a^2,$$

en posant

$$u + h = u_1\sqrt{-1}.$$

On doit remarquer que la constante h qui entre dans l'expression de u_1, n'a aucune influence sur la solution trouvée, et qu'elle ne sert qu'à fixer le parallèle terrestre qui correspond à un cercle déterminé de la série représentée par l'équation (V). Ainsi il n'y a, en réalité, dans notre solution, que deux constantes arbitraires c et a.

Il est utile de connaître les valeurs de x et de y, en fonction de u_1 et de t. Or reprenons les valeurs

$$x = \frac{M \cos 2ct + Ne^{-2cu}}{M^2e^{2cu} + 2MN \cos 2ct + N^2e^{-2cu}},$$

$$y = \frac{-M \sin 2ct}{M^2e^{2cu} + 2MN \cos 2ct + N^2e^{-2cu}},$$

obtenues précédemment. Changeons dans la première x en $x + \frac{1}{2N}$, pour tenir compte du déplacement d'origine opéré plus haut; ce qui donne

$$x = \frac{N^2e^{-2cu} - M^2e^{2cu}}{2N(M^2e^{2cu} + 2MN \cos 2ct + N^2e^{-2cu})},$$

puis introduisons les nouvelles notations, il viendra

$$x = a\frac{e^{-2c(u+h)} - e^{2c(u+h)}}{e^{2c(u+h)} + 2\cos 2ct + e^{-2c(u+h)}} = -a\sqrt{-1}\,\frac{\sin 2cu_1}{\cos 2cu_1 + \cos 2ct},$$

$$y = -a\frac{\sin 2ct}{\cos 2cu_1 + \cos 2ct},$$

De là on tire encore

$$x + y\sqrt{-1} = -a\sqrt{-1}\,\frac{\sin 2cu_1 + \sin 2ct}{\cos 2cu_1 + \cos 2ct} = -a\sqrt{-1}\,\operatorname{tang} c(u_1 + t),$$

par conséquent

$$\mathrm{F}\left(u + t\sqrt{-1}\right) = -a\sqrt{-1}\,\operatorname{tang} c(u_1 + t),$$
$$\mathrm{F}_1\left(u - t\sqrt{-1}\right) = -a\sqrt{-1}\,\operatorname{tang} c(u_1 - t);$$

donc Ω, qui est égal à

$$\frac{1}{\sqrt{\mathrm{F}'\left(u + t\sqrt{-1}\right)\mathrm{F}'_1\left(u - t\sqrt{-1}\right)}},$$

devient

$$\Omega = \frac{\cos c(u_1 + t)\cos c(u_1 - t)}{ac}.$$

On peut obtenir une autre valeur de Ω d'une forme assez remarquable. Soient r et r' les distances d'un point quelconque (x, y) aux points A et O situés sur l'axe des x, et à la distance a de l'origine ; nous aurons

$$r^2 = x^2 + y^2 + 2ax + a^2, \qquad r'^2 = x^2 + y^2 - 2ax + a^2,$$

ou bien, d'après l'équation (V),

$$r^2 = 2ax\left(1 + \sqrt{-1}\,\operatorname{cotang} 2cu_1\right),$$
$$r'^2 = 2ax\left(-1 + \sqrt{-1}\,\operatorname{cotang} 2cu_1\right),$$

et, en substituant à x sa valeur en u_1 et t,

$$r^2 = 2a^2\,\frac{\cos 2cu_1 - \sqrt{-1}\sin 2cu_1}{\cos 2cu_1 + \cos 2ct}, \qquad r'^2 = 2a^2\,\frac{\cos 2cu_1 + \sqrt{-1}\sin 2cu_1}{\cos 2cu_1 + \cos 2ct};$$

de là on déduit

$$rr' = \frac{a^2}{\cos c(u_1 + t)\cos c(u_1 - t)},$$

donc on a

$$\Omega = \frac{a}{crr'}.$$

On devra, dans les résultats que nous venons d'obtenir, remplacer u par sa valeur en fonction de la latitude, valeur que nous avons trouvée précédemment (§ 1).

$$u = \log \mathrm{K} \operatorname{tang} \frac{\zeta}{2},$$

ζ désignant la distance polaire corrigée en vertu de l'aplatissement de la terre.

Résumons les règles qui résultent de ce qui précède, pour la construction d'une carte du système considéré, lorsqu'on suppose d'ailleurs la terre sphérique. Après avoir fixé la constante c qui est en quelque sorte l'exposant de la carte, on prend sur une horizontale les points A et A′ où viennent se couper tous les méridiens, c'est-à-dire les pôles de la carte, en ayant soin de placer à droite le pôle boréal A ; on connaît ainsi le méridien AA′ correspondant à $t = 0$, et le parallèle BB′, perpendiculaire au milieu de AA′, correspondant à $u_1 = 0$. Ce méridien et ce parallèle peuvent se rapporter à un lieu quelconque du globe terrestre, qui devient alors le centre de la carte. De la connaissance de ce lieu résulte celle du méridien à partir duquel se comptent les longitudes et celle de la constante h ; car puisque pour le centre de la carte on a $t = 0$, $u_1 = 0$, d'après la valeur de t, le méridien à partir duquel se comptent les longitudes est précisément celui qui passe par le centre de la carte ; et d'après la valeur de u_1, si l'on appelle z_0 la valeur du complément de la latitude pour le centre de la carte, et par conséquent $\log \operatorname{tang} \frac{z_0}{2}$ la valeur de u pour ce même point, on a

$$h + \log \operatorname{tang} \frac{z_0}{2} = 0, \quad \text{d'où} \quad h = -\log \operatorname{tang} \frac{z_0}{2}.$$

Maintenant, pour obtenir la représentation du méridien correspondant à une longitude t, on décrit, avec AA′ pour base, un segment capable de l'angle $\pi - 2ct$, au-dessous de AA′ si t est positif, ou bien un segment capable de $\pi + 2ct$ au-dessous de AA′ si t est négatif ; et pour avoir la représentation du parallèle correspondant à la latitude $\frac{\pi}{2} - z$, et par conséquent à la valeur $\log \operatorname{tang} \frac{z}{2}$ de u, on décrit le cercle lieu des points dont le rapport des distances aux points A et A′ est égal à

$$\frac{M}{N}\, c^{2cu} = e^{2c(u+h)} = \frac{\left(\operatorname{tang}\frac{z}{2}\right)^{2c}}{\left(\operatorname{tang}\frac{z_0}{2}\right)^{2c}}.$$

On peut ainsi obtenir la représentation des différents méridiens et des différents parallèles, et, par conséquent, placer sur la carte tel lieu que l'on veut.

La valeur de c étant arbitraire, on voit que, en faisant $c = 0$, on retrouve la projection de Mercator ; en prenant $c = \frac{1}{2}$, on obtient la projection stéréographique méridienne où la moitié seulement du globe est représentée sur le cercle d'un rayon égal à $\frac{AA'}{2}$. En prenant $c = \frac{1}{4}$, on peut représenter toute la surface du globe parce qu'alors les méridiens se coupent aux pôles sous des angles qui sont la moitié des angles de la sphère, mais les autres angles sont conservés. Quand nous reviendrons sur la construction de cette projection, nous donnerons les tables qui conviennent à ce cas particulier. Le canevas n° V, qui représente l'hémisphère nord, a été dressé dans ce système.

Si l'on veut, dans la projection générale qui nous occupe, tenir compte de l'aplatissement de la terre, il suffira de remplacer partout les angles z par les distances aux pôles ζ corrigées en vertu de l'aplatissement et calculées dans la table III pour l'hypothèse $\alpha = \frac{1}{299{,}15}$.

7. On voit que dans la construction de ces cartes il y a, comme indéterminées, d'abord la distance AA′ ou $2a$ dont dépend la grandeur ou l'échelle de la carte, puis la constante c, et enfin la position du lieu de la terre que l'on prend pour centre de la carte. Nous allons nous proposer de fixer ces indéterminées de manière à diminuer le plus possible l'altération causée par la représentation dans la grandeur des différents lieux de la terre. Cherchons le point pour lequel le rapport d'agrandissement, désigné ci-dessus par m, est un minimum, ou bien le point dans le voisinage duquel m est le moins altéré.

M. Bonnet a montré, dans ses travaux sur la théorie générale des surfaces, que si l'on appelle A une courbe tracée sur une surface de révolution, A′ la courbe correspondante tracée sur la représentation plane de cette surface, $\delta\sigma$ le déplacement infiniment petit normal à la courbe A, la relation générale qui lie les courbures géodésiques des deux courbes conjuguées A et A′ est

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{1}{m}\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_z + \frac{\delta\frac{1}{m}}{\delta\sigma},$$

ρ' étant le rayon de courbure de la courbe A', et $\frac{\cos\theta}{\rho}$ la courbure géodésique de la courbe A.

Cette formule nous permet de résoudre très-simplement la question du minimum de m. En effet, si l'on applique cette formule à un méridien, elle nous montre immédiatement que les lieux dont la grandeur est la moins altérée en longitude sont ceux qui sont situés sur le méridien rectiligne AA' de la carte, car pour ces points on a

$$\frac{\delta\frac{1}{m}}{\delta\sigma} = 0, \qquad \left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_z = 0,$$

et par conséquent $\frac{1}{\rho'}$ doit aussi être nul. Supposons, en second lieu, que la formule se rapporte aux parallèles, on aura

$$\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_z = \frac{\cos z}{u}, \qquad \frac{1}{m} = u\Omega,$$

et si l'on veut que

$$\frac{\delta\frac{1}{m}}{\delta\sigma} = 0,$$

c'est-à-dire que la déformation du lieu en latitude soit également minimum, il faudra que

$$\frac{1}{\rho'} = \Omega\cos z;$$

mais le rayon ρ' de la courbe transformée d'un parallèle est, en tenant compte du signe,

$$\frac{a\sqrt{-1}}{\sin 2cu_1};$$

Ω, qui a pour valeur générale

$$\frac{\cos c(u_1 + t)\cos(u_1 - t)}{ac},$$

se réduit ici à

$$\frac{\cos^2 cu_1}{ac} = \frac{1 + \cos 2cu_1}{2ac},$$

puisque, d'après la condition trouvée, $t = 0$. Donc notre formule devient

$$\text{(VI)} \qquad \frac{2c\sqrt{-1}\,\sin 2cu_1}{1+\cos 2cu_1} = -\cos z.$$

Nous pouvons obtenir un résultat beaucoup plus simple. Nommons k le rapport des distances du point cherché aux points A et A'; on sait que

$$k = e^{2c(u_1+h)} = \cos 2cu_1 + \sqrt{-1}\,\sin 2cu_1,$$

et, par conséquent,

$$\frac{1}{k} = \cos 2cu_1 - \sqrt{-1}\,\sin 2cu_1;$$

donc

$$\sqrt{-1}\,\sin 2cu_1 = \frac{1}{2}\left(k - \frac{1}{k}\right),$$

$$\cos 2cu_1 = \frac{1}{2}\left(k + \frac{1}{k}\right).$$

Substituant dans l'égalité (VI), il vient

$$\frac{2c(k^2-1)}{2k+k^2+1} = -\cos z,$$

d'où

$$k = \frac{2c-\cos z}{2c+\cos z}.$$

Ainsi le point cherché, pour lequel la déformation de la carte est la moindre possible, est le point situé sur le méridien rectiligne AA' qui partage ce méridien en parties proportionnelles à $2c - \cos z$ et à $2c + \cos z$. On voit qu'en supposant ce point désigné sur le globe terrestre, ce qui fait connaître z, on peut encore le placer arbitrairement sur l'axe AA' de la carte, et que l'exposant $2c$ se trouve seulement alors déterminé.

Puisqu'il reste encore une indéterminée, assujettissons la seconde variation de $\frac{1}{m}$ dans le sens du méridien à être nulle; nous aurons

$$\frac{d\frac{1}{\rho'}}{du} = \frac{1}{m}\,\frac{d\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_z}{du},$$

$\frac{1}{\rho'}$ et $\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_z$ se rapportant à un parallèle. Or

$$\frac{d\frac{1}{\rho'}}{du} = -\frac{2c}{a}\cos 2cu_1,$$

puis, en supposant la terre sphérique, ce que nous n'avions pas fait encore,

$$\frac{d\left(\frac{\cos 0}{\rho}\right)_z}{du} = \frac{d\operatorname{cotang} z}{du} = -\frac{1}{\sin z}, \qquad \frac{1}{m} = \sin z\,\frac{1+\cos 2cu_1}{2ac};$$

donc, en substituant, on a

$$4c^2\cos 2cu_1 = 1 + \cos 2cu_1;$$

d'où

$$4c^2 = \frac{(k+1)^2}{k^2+1}$$

et, à cause de la valeur de k obtenue plus haut,

$$2c = \sqrt{1+\sin^2 z},$$

ce qui détermine $2c$ quand la latitude $l = 90° - z$ est connue.

Ainsi, après avoir pris un lieu important M de la surface de la terre pour le point dans le voisinage duquel les lieux doivent être le moins altérés possible, on déterminera l'exposant de la carte par la condition $2c = \sqrt{1+\sin^2 z_1}$, z_1 étant le complément de la latitude du point M, puis on prendra les pôles A et A′ de façon que le rapport des distances de ces points au point M′ qui représente le point M de la terre soit $\frac{2c - \cos z_1}{2c + \cos z_1}$; enfin le coefficient h qui, en appelant z_0 le complément de la latitude du centre de la carte est égal à $-\log\operatorname{tang}\frac{z_0}{2}$, se déduira de ce que le rapport des distances M′A et M′A′ ou $\frac{2c - \cos z_1}{2c + \cos z_1}$ doit être $\frac{\left(\operatorname{tang}\frac{z_1}{2}\right)^{2c}}{\left(\operatorname{tang}\frac{z_0}{2}\right)^{2c}}$, et la carte se trouvera entièrement déterminée, sauf l'échelle qui doit évidemment rester quelconque.

La projection dont nous venons de donner les formules et le tracé est connue sous le nom de *projection de Lagrange*.

8. Nous avons traité avec détail, dans ce qui précède, le cas particulier où les méridiens sont des cercles qui se coupent aux pôles, cercles qui peuvent devenir des droites ; nous avons vu que les parallèles devaient être aussi représentés par des cercles, et nous avons donné les formules qui permettent de déterminer ces courbes, soit par leur centre, soit par leur intersection avec des droites fixes de la carte, soit enfin par points isolés.

Le géomètre *Lambert* (1) est arrivé directement aux mêmes résultats par un calcul des plus simples que nous allons exposer ici.

Cherchons d'abord à remplir la condition que :

Dans un réseau où les parallèles sont représentés par des cercles concentriques et les méridiens par les rayons de ces cercles, le trapèze curviligne infiniment petit formé par deux parallèles et deux méridiens infiniment voisins soit semblable au petit quadrilatère correspondant de la sphère.

Soient (fig. 11) P le pôle, PN et P*n* deux droites représentant deux méridiens infiniment voisins dont la différence des longitudes est dt; *m*M, *n*N deux arcs de cercle décrits du pôle P et représentant deux parallèles dont la différence des latitudes est $dz = -dl$, en appelant z le complément de la latitude du parallèle M*m*.

Pour que le trapèze M*mn*N soit semblable à la figure correspondante de la sphère, il faut évidemment que l'angle NP*n* soit égal à λdt, λ étant une constante arbitraire, et que le rapport de chaque degré de parallèle à chaque degré de méridien soit le même que sur la sphère.

Appelons ρ le rayon PM qui représente l'arc de grand cercle z ; MN sera alors $d\rho$, et l'on devra avoir, en supposant la terre sphérique,

$$\frac{d\rho}{\lambda \rho dt} = \frac{dz}{\sin z dt}$$

ou

$$\frac{d\rho}{\rho} = \lambda \frac{dz}{\sin z}.$$

En intégrant

$$\log \rho = \lambda \log \operatorname{tang} \frac{z}{2} + C.$$

---

(1) *Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung, durch J. H.* LAMBERT, Berlin, 1772, in-8, pages 105-199 (*Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Land-und-Himmelscharten.*

Cette constante C peut être déterminée en se donnant, par exemple, la valeur de z pour laquelle le rayon ρ est égal à l'arc correspondant du méridien de la sphère; supposons que pour $z = 90°$, k c'est-à-dire la distance du pôle à l'équateur sur la carte, doive être égale au quart du méridien, $\frac{1}{2} a\pi$, en appelant a le rayon de la terre; on aura alors

$$C = \log \tfrac{1}{2} a\pi = \log k;$$

et la formule générale devient

$$\log \rho = \log \left(\operatorname{tang} \frac{z}{2}\right)^{\lambda} + \log k = \log k \left(\operatorname{tang} \frac{z}{2}\right)^{\lambda};$$

donc

$$\rho = k \left(\operatorname{tang} \frac{z}{2}\right)^{\lambda}.$$

Nous avons ainsi obtenu directement, comme l'a fait *Lambert*, la projection dont nous avons déjà parlé au § 4, et que *Gauss* (1) a traitée comme application de sa formule générale des projections assujetties à la condition de conserver la similitude des configurations dans la représentation d'une surface sur une autre.

On trouverait facilement que le rapport d'agrandissement est exprimé par

$$m = \frac{\lambda k \left(\operatorname{tang} \frac{z}{2}\right)^{\lambda}}{a \sin z} = \frac{\lambda \rho}{a \sin z}.$$

Dans le cas où l'on veut tenir compte de la forme elliptique de la terre, il faut poser

$$\frac{d\rho}{\lambda \rho dt} = \frac{(1 - e^2) dz}{\sin z (1 - e^2 \cos^2 z) dt},$$

en appelant z l'angle de la normale avec l'axe des pôles. En intégrant, on aura donc

---

(1) *Allgemeine Auflösung der Aufgabe : die Theile einer gegebenen Fläche auf einer andern gegebenen Fläche so abzugebilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird, von* C. F. Gauss; un cahier de 30 pages compris dans les *Astronomische Abhandlungen herausgegeben von* H. C. Schumacher; *drittes Heft.* Altona, 1825, in-4°; voir principalement pages 14 à 17. Ce mémoire, couronné en 1822 par l'Académie des sciences de Copenhague, est donc postérieur de cinquante ans à l'ouvrage de Lambert; du reste Gauss, loin de s'attribuer le mérite de l'invention de cette projection, cite l'atlas céleste de *Harding* publié à Göttingue de 1808 à 1822, et dont les planches XIX à XXVI sont assujetties à cette projection avec les modifications que nous allons indiquer.

$$\frac{1}{\lambda}\log\rho - \log k = \int \frac{(1-e^2)\,dz}{\sin z\,(1-e^2\cos^2 z)} = \log\operatorname{tang}\frac{z}{2} - \int \frac{e^2 \sin z\,dz}{1-e^2\cos^2 z},$$

$$\frac{1}{\lambda}\log\rho - \log k = \log\operatorname{tang}\frac{z}{2} - \frac{e}{2}\log\frac{1-e\cos z}{1+e\cos z} = \log\left[\operatorname{tang}\frac{z}{2}\left(\frac{1+e\cos z}{1-e\cos z}\right)^{\frac{e}{2}}\right],$$

et, en appelant, comme nous l'avons déjà fait, ζ la distance au pôle corrigée en vertu de l'aplatissement de la terre, et posant

$$\operatorname{tang}\frac{\zeta}{2} = \left(\operatorname{tang}\frac{z}{2}\right)\left(\frac{1+e\cos z}{1-e\cos z}\right)^{\frac{e}{2}},$$

l'expression de $\frac{1}{\lambda}\log\rho$ a aussi la même forme que dans le cas de la terre sphérique, et l'on aura

$$\rho = k\left(\operatorname{tang}\frac{\zeta}{2}\right)^{\lambda}.$$

On pourra donc faire servir au cas de la terre elliptique les tables dressées comme nous l'avons dit (§ 4), et donnant les valeurs de ρ pour les valeurs de z de 10 en 10 degrés; il suffira de calculer préalablement les valeurs de ζ qui correspondent aux valeurs de z. Ces valeurs de ζ sont réunies dans la table III calculée à l'aide de la formule que nous avons indiquée :

$$\zeta = z - \frac{e^2}{2}\sin 2z.$$

Si la constante k doit exprimer la longueur de l'arc de méridien compris entre le pôle et l'équateur, on aura

$$k = Q = \frac{1}{2}\pi a\left(1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{64}e^4 \ldots\right),$$

ou plus simplement, en négligeant e^4 et prenant $\alpha = \frac{1}{299,15}$,

$$k = Q = \frac{1}{2}\pi a\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = 1,56818\,.\,a.$$

Le rapport d'agrandissement est exprimé par

$$m = \frac{\lambda k\left(\operatorname{tang}\frac{\zeta}{2}\right)^{\lambda}}{a\sin\zeta}.$$

9. Comme λ est arbitraire on peut le prendre de façon à satisfaire à une nouvelle condition; on peut, par exemple, déterminer λ de telle sorte que les degrés de deux parallèles donnés sur le réseau, aient entre eux le même rapport que sur la sphère. Appelons z_0 et z_1 les colatitudes de ces parallèles; leurs degrés étant dans le rapport de sin z_0 à sin z_1, les rayons des cercles correspondants devront être dans le même rapport, et l'on aura :

$$\left(\frac{\operatorname{tang}\frac{z_1}{2}}{\operatorname{tang}\frac{z_0}{2}}\right)^{\lambda} = \frac{\sin z_1}{\sin z_0},$$

d'où

$$\lambda = \frac{\log\sin z_1 - \log\sin z_0}{\log\operatorname{tang}\frac{z_1}{2} - \log\operatorname{tang}\frac{z_0}{2}}.$$

z_0 et z_1 peuvent être les valeurs extrêmes de z; ainsi, pour l'Europe, en prenant pour parallèles extrêmes ceux de 70° et de 30° de latitude nord, $z_0 = 20°$ et $z_1 = 60°$. On trouve alors $\lambda = 0{,}78327$; les angles au pôle (les seuls qui ne soient pas conservés) sont les $\frac{3}{4}$ environ des angles véritables ; 10° de longitude sont représentés par un angle de 7° 49′ 57″,7, soit 7° 50′ environ.

Si l'on voulait représenter de cette manière, et avec la même valeur de λ, un hémisphère entier, l'angle au pôle serait de 281° 59′ 38″.

Si l'on prend le rayon de la terre pour unité, le rayon de l'équateur de la carte sera 1,571... Les plus petits degrés de latitude sont entre les parallèles de 40° et de 50° de latitude, les plus grands entre le pôle et 80° de latitude. Vers l'équateur les degrés de latitude augmentent; les plus petits ont avec les plus grands le rapport approché de 15 à 25, ou de 3 à 5. Comme les différences sont à peu près constantes, les distances peuvent se mesurer approximativement avec la même échelle, si d'ailleurs les lieux ne sont pas très-éloignés les uns des autres en longitude.

Rappelons enfin que, lorsque les rayons des parallèles sont trop grands pour que les cercles puissent être décrits facilement avec le compas, on peut les tracer par points à l'aide des coordonnées

$$x = \rho\cos\lambda t, \qquad y = \rho\sin\lambda t,$$

rapportées à deux axes rectangulaires passant par le pôle, centre de tous les parallèles.

La projection VI a été construite avec la valeur de $\lambda = \frac{3}{4}$ qui résulte, comme nous l'avons indiqué, de la condition de conserver le rapport des degrés de longitude des parallèles de 30° et de 70° de latitude (1) ; la projection VII suppose $\lambda = \frac{1}{2}$.

10. Revenons à la formule générale

$$\rho = k\left(\operatorname{tang}\frac{z}{2}\right)^{\lambda};$$

on peut déterminer la valeur de λ d'après une autre condition, celle par exemple que, dans la figure MNnm, nN ait avec MN le même rapport que mM. Cela n'ayant pas lieu simultanément pour toutes les latitudes, donnons-nous la latitude 90° — Z pour laquelle nous voulons qu'existe cette propriété; cela revient évidemment à nous donner la latitude du parallèle sous lequel l'agrandissement est minimum; nous résoudrons donc le problème, soit en égalant à zéro la dérivée par rapport à z de la valeur de m, soit par la considération de la figure MNnm.

Or

$$Nn = \lambda dt(\rho + d\rho),$$

et l'arc correspondant de la sphère est exprimé par

$$dt \sin(z + dz) = dt(\sin z + \cos z dz);$$

ce qui donne

$$\frac{dz}{d\rho} = \frac{dt(\sin z + \cos z dz)}{\lambda dt(\rho + d\rho)};$$

il en résulte

$$dz\,\lambda(\rho + d\rho) = d\rho(\sin z + \cos z dz);$$

d'où

$$\frac{d\rho}{\rho} + \lambda = \left(\frac{\sin z}{dz} + \cos z\right);$$

or

$$\frac{\lambda\rho}{d\rho} = \frac{\sin z}{z},$$

donc

$$\frac{\sin z}{dz} + \lambda = \frac{\sin z}{dz} + \cos z;$$

---

(1) Dans les huit cartes d'étoiles de l'astronome Harding dont nous avons parlé dans la note précédente, on a pris pour z_0 et z_1 les colatitudes des parallèles extrêmes.

d'où enfin

$$\lambda = \cos z,$$

et, par conséquent, pour la distance polaire Z,

$$\lambda = \cos Z.$$

La formule devient alors

$$\rho = k \left(\operatorname{tang} \frac{z}{2}\right)^{Z},$$

par laquelle le trapèze $MmNn$ est tout à fait semblable au trapèze qu'il représente.

Il conviendra de prendre pour Z la colatitude du parallèle moyen de la carte à construire; ainsi 40° pour la carte de l'Europe. Si nous prenons pour parallèle moyen celui de 51° 34′, Z = 38° 26′, nous trouvons $\lambda = 0{,}78327$, et si nous nous reportons au paragraphe précédent, nous voyons que notre canevas jouira de cet avantage que le rapport d'agrandissement sera le même sur les parallèles de 70° et de 30° et sera minimum sur celui de 51° 34′.

Si nous considérons le cas de la terre elliptique, le calcul est le suivant :

$$\frac{\lambda(\rho + d\rho)}{d\rho} = \frac{\lambda\rho}{d\rho} + \lambda = \frac{\sin(z+dz)[1 - e^2\cos^2(z+dz)]}{(1-e^2)\,dz},$$

$$\frac{\lambda\rho}{d\rho} + \lambda = \frac{(\sin z + \cos z dz)(1 - e^2\cos z + 2e^2\cos z \sin z dz)}{(1-e^2)dz}$$

$$= \frac{\sin z(1 - e^2\cos^2 z)}{(1-e^2)\,dz} + \frac{\cos z - e^2\cos z(1 - 3\sin^2 z)}{1-e^2};$$

d'où

$$\lambda = \frac{\cos Z - e^2 \cos Z(1 - 3\sin^2 Z)}{1-e^2}.$$

Telle est la valeur que prend λ pour la colatitude Z du parallèle sur lequel le rapport d'agrandissement doit être minimum.

On serait parvenu plus simplement au même résultat en remplaçant, dans le calcul qui convient au cas de la terre sphérique, z par ζ et, l'on aurait trouvé par conséquent $\lambda = \cos \zeta$, cette valeur ζ se déduisant de la colatitude donnée Z à l'aide de la formule

$$\zeta = z - \frac{e^2}{2} \sin 2z.$$

11. Lorsqu'on veut dresser des cartes d'étoiles, il peut être avan-

tageux de déterminer λ de telle sorte que les 45 premiers degrés de méridien soient égaux aux suivants, c'est-à-dire que le 45e degré de latitude partage tous les méridiens (du pôle à l'équateur) en deux parties égales.

On aura alors, pour $z = 45°$,

$$\frac{1}{4} a\pi = \frac{1}{2} a\pi \left(\operatorname{tang} \frac{45°}{2}\right)^{\lambda},$$

ou bien

$$\frac{1}{2} = \left(\operatorname{tang} 22° \frac{1}{2}\right)^{\lambda};$$

d'où

$$\lambda = \frac{0{,}30103}{0{,}38277} = 0{,}78643,$$

valeur qui approche beaucoup de 0,78327, ce qui montre un nouvel avantage du réseau pour lequel λ est à peu près égal à 0,78327.

Les cartes tracées d'après cette méthode peuvent être prolongées aussi loin que l'on veut au delà de l'équateur.

Pour les cartes particulières, il convient de prendre, pour z_0 et z_1 (voir § 9), les colatitudes géographiques des parallèles qui divisent à peu près en trois parties égales la distance des deux parallèles extrêmes de la carte à tracer (1). Si, par exemple, un pays, tel que l'Europe, est compris entre 30° et 70° de latitude, on prendra $z_1 = 46°$ 40′ et $z_0 = 33°$ 20′ et l'on calculera λ par la formule

$$\lambda = \frac{\log \sin z_1 - \log \sin z_0}{\log \operatorname{tang} \frac{z_1}{2} - \log \operatorname{tang} \frac{z_0}{2}}.$$

Le rayon restera évidemment arbitraire et ne dépendra que de l'échelle de la carte, c'est-à-dire de la grandeur à donner au réseau.

---

(1) La Société de géographie de Saint-Pétersbourg a choisi cette projection, en lui attribuant la dénomination de « *projection de Gauss,* » pour la belle carte de la Russie européenne en douze feuilles, qu'elle a publiée en 1862. Les deux parallèles dont les degrés conservent leur véritable rapport sont ceux de 46° et 58°, les latitudes des parallèles extrêmes étant 36° et 68°.

Sous le parallèle moyen, qui est celui de 52°, le degré subit un retrait qui le réduit à 0,994 de sa valeur réelle, tandis que sous les parallèles extrêmes il éprouve une dilatation qui le porte à 1,031 et à 1,040. Des échelles variables en *verstes* accompagnent la graduation des latitudes sur les bordures d'encadrement de chacune des douze feuilles de la carte. Le méridien moyen est celui de 10° à l'est de l'observatoire de Saint-Pétersbourg situé à 27° 59′ 31″ à l'est du méridien de Paris.

Avant de quitter ce sujet, disons que toutes les fois que λ est plus petit que l'unité, on peut plier la projection entière en forme de globe pour en faire des *coniglobes* dont l'usage était plus répandu autrefois qu'il ne l'est aujourd'hui, et la projection rentre alors dans la classe générale des projections coniques; elle peut être regardée comme le développement d'un cône ayant son sommet sur l'axe des pôles du globe, et coupant le sphéroïde suivant deux parallèles qui seront développés sur la carte en véritable grandeur, la position de ces parallèles, c'est-à-dire la connaissance de leurs colatitudes z_0 et z_1 définira la valeur du rapport λ qui est égal au sinus du demi-angle au sommet de ce cône. Nous aurons occasion, en traitant des projections coniques (1), de reparler de ce système, que nous désignerons, ainsi que la fait M. d'Avezac, sous le nom de *projection conique orthomorphe de Lambert* (2).

ÉTUDE DIRECTE DES PROJECTIONS ORTHOMORPHES A MÉRIDIENS CIRCULAIRES.

12. Nous avons traité avec détail aux §§ 8, 9, 10, 11, le cas particulier où les méridiens sont des droites passant par le centre commun à tous les parallèles; nous allons maintenant traiter, ainsi que l'a fait Lambert (3), le cas général où les méridiens sont des cercles se coupant sous des angles λ fois plus grands ou plus petits que les véritables, les parallèles d'autres cercles coupant les premiers à angles droits, de manière que le rapport des degrés de longitude et de latitude soit le même sur la carte que sur la sphère.

Soient (fig. 12) P, P' les pôles, PP' un méridien représenté par une droite et à partir duquel on compte les longitudes; CO perpendiculaire sur le milieu de PP' sera le lieu des centres de tous les méridiens; soit dt la différence des longitudes des deux méridiens infiniment voisins PCP', et PMP' dont O est le centre.

L'angle MPC doit, par hypothèse, être égal à λdt. Posons CP $= 1$; alors

$$\mathrm{MC} = \mathrm{tang}\left(\tfrac{1}{2}\lambda dt\right) = \tfrac{1}{2}\lambda dt.$$

(1) *Voir* plus loin, chap. VI, § 9.

(2) Signalons, en terminant, l'étude que sir J. F. W. HERSCHEL a faite de cette projection dans un travail inséré dans *the Journal of the royal geographical Society, volume the thirtieth, London*, 1860, pages 100-106, où l'auteur cherche les conditions sous lesquelles une sphère peut être projetée sur un plan de manière que la représentation de toute portion infiniment petite de la surface soit semblable de forme à la portion originale.

(3) *Entwerfung der Charten...* sect. V, p. 145.

De même

$$CO = \operatorname{cotang} \lambda dt = \frac{1}{\lambda dt}.$$

Soit z la colatitude d'un point quelconque B du méridien PCP'.

Posons $BC = x$ et soit $Bb = -dx$. On a d'abord

$$MO = AO = \frac{1}{\lambda dt} + \frac{1}{2}\lambda dt,$$

$$BO = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2 dt^2} + x^2} = \frac{1}{\lambda dt} + \frac{1}{2}x^2 \lambda dt,$$

donc

$$AB = \tfrac{1}{2}\lambda dt(1 - x^2).$$

Pour que les degrés de latitude gardent leur rapport exact avec ceux de longitude, on devra avoir

$$\frac{AB}{Bb} = \frac{dt \sin z}{dz},$$

et par conséquent

$$-\frac{1}{2}\frac{\lambda dt(1-x^2)}{dx} = dt\frac{\sin z}{dz};$$

d'où

$$-\frac{\lambda dz}{\sin z} = \frac{2dx}{1-x^2}.$$

Posons $x = \cos\varphi$; on aura

$$\frac{\lambda dz}{\sin z} = \frac{2d\varphi}{\sin\varphi},$$

et en intégrant,

$$\frac{1}{2}\lambda \log\left(C \operatorname{tang}\frac{z}{2}\right) = \log \operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi.$$

La constante C est arbitraire et permet d'assujettir le problème à une condition de plus. Déterminons-la, par exemple, par la condition que $x = 0$ et par suite $\varphi = 90°$ lorsque $z = z_0$, z_0 étant la colatitude du parallèle donné qui devra ainsi être représenté par une droite. On voit alors que

$$C = \operatorname{cotang}\frac{z_0}{2},$$

et il en résulte

$$\left(\operatorname{cotang}\frac{z_0}{2}\operatorname{tang}\frac{z}{2}\right)^{\lambda} = \operatorname{tang}^2\frac{\varphi}{2};$$

et comme

$$x = \frac{1 - \operatorname{tang}^2 \frac{\varphi}{2}}{1 + \operatorname{tang}^2 \frac{\varphi}{2}},$$

on a enfin la formule

$$x = \frac{1 - \left(\operatorname{cotang} \frac{z_0}{2} \operatorname{tang} \frac{z}{2}\right)^\lambda}{1 + \left(\operatorname{cotang} \frac{z_0}{2} \operatorname{tang} \frac{z}{2}\right)^\lambda} = 1 - \frac{2}{\left(\operatorname{tang} \frac{z_0}{2}\right)^\lambda \left(\operatorname{cotang} \frac{z}{2}\right)^\lambda + 1}.$$

Le rayon ρ de chaque parallèle est exprimé par

$$AD = AB \operatorname{cotang} ADB = AB \operatorname{cotang} AOC,$$

ou

$$\rho = \frac{1}{2} \frac{1 - x^2}{x} = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2} x.$$

On voit que

$$CD = x + \rho = \frac{1 + x^2}{2x}.$$

Pour $z = 0$, $x = +1$ et pour $z = 180°$, $x = -1$, ce qui montre que les deux pôles sont également distants du centre. Il en résulte que les degrés des deux côtés de l'équateur deviennent inégaux entre eux et que le tracé est moins régulier que lorsque $z_0 = 90°$, car alors la formule devient

$$x = 1 - \frac{2}{\left(\operatorname{cotang} \frac{z}{2}\right)^\lambda + 1},$$

et, dans ce cas, l'équateur est représenté par une droite perpendiculaire sur le milieu de PP′.

Les formules précédentes montrent l'identité de cette projection avec celle que nous avons étudiée longuement sous le nom de *projection de Lagrange*. (Voir les §§ 6 et 7 de ce chapitre.) La constante que nous avions appelée $2c$ est la même que celle que nous représentons ici par λ et indique le rapport dans lequel sont réduits les angles des méridiens entre eux. Nous avons vu comment Lagrange a su augmenter les avantages de cette projection en profi-

tant de l'indétermination de la constante λ ; nous n'avons donc rien à ajouter à l'étude que nous en avons déjà faite (1).

MÉTHODE DES COEFFICIENTS INDÉTERMINÉS.

13. Nous avons traité de la manière la plus générale, dans ce qui précède, la question de la représentation du sphéroïde sur un plan, sous la condition de la similitude des éléments infiniment petits, et nous avons donné différentes méthodes qui permettent de traiter très-simplement quelques cas particuliers.

Il est une autre méthode, aussi très-générale, qui permet d'arriver aux mêmes résultats, et, dans des cas particuliers, d'une manière assez simple : je veux parler de la méthode des coefficients indéterminés.

On sait que toute fonction y de deux variables indépendantes t et l peut être exprimée par une série continue de la forme

$$\begin{array}{l|l|l|l} y = A + Bl + A'l + B'l + A''l^2 + B''l^2 + \ldots\ldots & t + Cl + C'l + C''l^2 + \ldots & t^2 + Dl + D'l + D''l^2 + \ldots & t^3 + \ldots\ldots \\ & & & \ldots\ldots \\ & & & \ldots\ldots \\ & & & \ldots\ldots \end{array}$$

dans laquelle les coefficients A, B, C... A', B'... A''... peuvent être déterminés lorsque l'on connaît un nombre suffisant de valeurs de y ou de ses dérivées successives pour des valeurs données de t et de l.

Nous allons appliquer cette méthode pour obtenir, dans le cas de la similitude, des expressions convenables des coordonnées x et y des points de la carte qui correspondent aux points de la sphère ayant pour longitude t et pour colatitude $z = 90° - l$.

Mais d'abord cherchons à mettre en équations les conditions du problème.

Soit (fig. 13) PA le méridien dont la longitude est t, MB un parallèle dont la latitude est l. Soit sur le parallèle PM, M'' le point dont la longitude est $t + dt$, et sur le méridien PA, M' le point dont la latitude est $l - dl$.

La première condition du problème est que l'angle M''MM' soit

(1) Le mémoire de Lambert étant de 1772 et celui de Lagrange de 1781 seulement, le mérite de l'invention semble d'abord appartenir de droit au premier; mais comme la marche suivie par le second et les résultats auxquels il est parvenu constituent un travail beaucoup plus complet et lui sont évidemment propres, nous continuerons à désigner cette projection sous le nom de *projection de Lagrange*.

droit, par suite que les triangles rectangles $Mm''M''$, $Mm'M'$ soient semblables ; de plus, pour que les degrés de longitude et de latitude conservent entre eux le même rapport que sur la sphère, on doit avoir

$$\frac{MM'}{MM''} = \frac{dl}{dt\cos l},$$

et par conséquent

$$\frac{Mm''}{Mm'} = \frac{dy''}{dx'} = \frac{dt\cos l}{dl}, \quad \text{et} \quad \frac{M''m''}{M'm'} = -\frac{dx''}{dy'} = \frac{dt\cos l}{dl'}.$$

Or x et y étant fonctions de t et l, on a généralement

$$dx = \frac{dx}{dt}\,dt + \frac{dx}{dl}\,dl,$$

$$dy = \frac{dy}{dt}\,dt + \frac{dy}{dl}\,dl.$$

Pour un même méridien, t étant constant, $dt = 0$, donc

$$-dx' = \frac{dx}{dl}\,dl, \quad \text{et} \quad dy' = \frac{dy}{dl}\,dl.$$

Pour un même parallèle

$$dx'' = \frac{dx}{dt}\,dt, \quad \text{et} \quad dy'' = \frac{dy}{dt}\,dt.$$

Les deux équations de condition sont donc

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{dx}{dl}\cos l, \quad \text{et} \quad \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dl}\cos l$$

Ces équations sont nécessaires et suffisantes, car on voit facilement que si les valeurs de x et de y satisfont à ces équations, les angles d'intersection seront droits et les éléments proportionnels.

Parmi toutes les formes de séries infinies que l'on peut adopter, Lambert (1) remarquant que, d'après les équations de condition, $\frac{dx}{dl}$ et $\frac{dy}{dl}$ doivent être multipliés par $\cos l$, pensa que la forme la plus convenable est

(1) *Entwerfung der Charten...* sect. VI, p. 158.

$$
\begin{aligned}
y = {} & A + Bt + Ct^2 + \ldots\ldots \\
& + A' \sin l + B't \sin l + C't^2 + \ldots\ldots \\
& + A'' \sin 2l + B''t \sin 2l + C''t^2 \sin 2l + \ldots\ldots \\
& + A''' \sin 3l + B'''t \sin 3l + C'''t^2 \sin 3l + \ldots\ldots \\
& + \ldots\ldots + \ldots\ldots + \ldots\ldots + \ldots
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
x = {} & a + bt + ct^2 + \ldots\ldots \\
& + a' \cos l + b't \cos l + c't^2 \cos l + \ldots\ldots \\
& + a'' \cos 2l + b''t \cos l + c''t^2 \cos l + \ldots\ldots \\
& + a''' \cos 3l + b'''t \cos 3l + c'''t^2 \cos 3l + \ldots\ldots \\
& + \ldots\ldots + \ldots\ldots + \ldots\ldots + \ldots
\end{aligned}
$$

Si l'on différentie x et y séparément par rapport à l et par rappor à t, que l'on multiplie $\frac{dx}{dl}$ par cos$l$. ainsi que $\frac{dy}{dl}$, on trouve que pour satisfaire aux deux équations de condition quelles que soient les valeurs de l et de t, on doit avoir

$b = \frac{1}{2} A'$	$c = \frac{1}{4} B'$	$d = \frac{1}{6} C'$
$b' = \frac{1}{2} (2A'')$	$c' = \frac{1}{4} (2B'')$	$d' = \frac{1}{6} (2C'')$
$b'' = \frac{1}{2} (A' + 3A''')$	$c'' = \frac{1}{4} (B' + 4B''')$	$d'' = \frac{1}{6} (C' + 3C''')$
$b''' = \frac{1}{2} (2A'' + 4A^{iv})$	$c''' = \frac{1}{4} (2B'' + 4B^{iv})$	$d''' = \frac{1}{6} (2C'' + 4C^{iv})$
$b^{iv} = \frac{1}{2} (3A''' + 5A^{v})$	$c^{iv} = \frac{1}{4} (3B''' + 5B^{v})$	$d^{iv} = \frac{1}{6} (2C''' + 5C^{v})$
. . . . .	. . . . .	. . . . .

et de même

$B = \frac{1}{2} a'$	$C = \frac{1}{4} b'$	$D = \frac{1}{6} c'$
$B' = \frac{1}{2} (2a'')$	$C' = \frac{1}{4} (2b'')$	$D' = \frac{1}{6} (2c'')$
$B'' = \frac{1}{3} a' + 3a''')$	$C'' = \frac{1}{4} (b' + 3b''')$	. . . . .
. . . . .	. . . . .	. . . . .

La loi de la formation de ces termes est très-simple.
On voit ainsi que

les	b	dépendent des	A		
	c	«	B	et par conséquent des	a
	d	«	C	«	A
les	B	«	a	«	
	C	«	b	et par conséquent des	A
	D	«	c	«	a

. . . . . .

et ainsi tous les coefficients dépendant de a et de A.

On trouve ainsi :

$$\begin{aligned}
b &= \tfrac{1}{2}(\ +A') & B &= \tfrac{1}{2}(\ +a')\\
b' &= \tfrac{1}{2}(\ +2A'') & B' &= \tfrac{1}{2}(\ +2a'')\\
b'' &= \tfrac{1}{2}(A'+3A''') & B'' &= \tfrac{1}{2}(a'+3a''')\\
b''' &= \tfrac{1}{2}(2A''+4A^{IV}) & B''' &= \tfrac{1}{2}(2a''+4a^{IV})\\
b^{IV} &= \tfrac{1}{2}(3A'''+5A^{V}) & B^{IV} &= \tfrac{1}{2}(3a'''+5a^{V})\\
&\dots\dots\dots\dots & &\dots\dots\dots\dots\\
b^k &= \tfrac{1}{2}[(k-1)A^{k-1}+(k+1)A^{k+1}] & B^k &= \tfrac{1}{2}[(k-1)a^{k-1}+(k+1)a^{k+1}].
\end{aligned}$$

On trouve de même :

$$c^k = \frac{1}{4}[(k-1)B^{k-1}+(k+1)B^{k+1}] = \frac{1}{2.4}[(k-1)(k-2)a^{k-2}+2k^2a^k+(k+1)(k+2)a^{k+2}].$$

$$C = \frac{1}{4}[(k-1)b^{k-1}+(k+1)b^{k+1}] = \frac{1}{2.4}[(k-1)(k-2)A^{k-2}+2k^2A^k+(k+1)(k+2)A^{k+2}].$$

$$d^k = \frac{1}{6}[(k-1)C^{k-1}+(k+1)C^{k+1}] = \frac{1}{2.4.6}\left\{\begin{array}{l}(k-1)(k-2)(k-3)a^{k-3}\\ +(k-1)(3k^2-3k+2)a^{k-1}\\ +(k+1)(3k^2+3k+2)a^{k+1}\\ +(k+1)(k+2)(k+3)a^{k+3}\end{array}\right.$$

$$e^k = \frac{1}{8}[(k-1)D^{k-1}+(k+1)D^{k+1}] = \frac{1}{2.4.6.8}\left\{\begin{array}{l}(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)a^{k-4}\\ +(k-1)(k-2)(4k^2-8k+8)a^{k-2}\\ +k^2(6k^2+10)a^k\\ +(k+1)(k+2)(4k^2+8k+8)a^{k+2}\\ +(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)a^{k+4}\end{array}\right.$$

et ainsi de suite.

14. Nous allons, avec Lambert, considérer un cas particulier où cette méthode se simplifie beaucoup.

Représentons (fig. 13) le méridien du milieu de la projection par une droite sur laquelle nous porterons les degrés égaux de latitude, l'équateur par une seconde droite perpendiculaire à la première, et les méridiens et les parallèles par des courbes se coupant à angle droit, de manière que les degrés de longitude conservent leur véritable rapport avec ceux de latitude. Cherchons quelles doivent être les valeurs de x et de y en fonction de t et de l.

En prenant pour axes des coordonnées le méridien moyen et l'équateur, on voit que, la figure étant nécessairement symétrique par rapport à ces axes, y devra être exprimé par des puissances paires de t et impaires de l, et x par des puissances paires de l et im-

paires de t. En outre, si l'on fait $l = 0$, y sera nul aussi et x devra être exprimé par une fonction de t seulement. Si enfin l'on fait $t = 0$, il faudra que $y = l$ et $x = 0$.

Ces séries devront donc être de la forme

$$\begin{aligned} y = {} & Kl + At^2l + A't^2l^3 + A''t^2l^5 + \ldots\ldots \\ & + Bt^4l + B't^4l^3 + B''t^4l^5 + \ldots\ldots \\ & + Ct^6l + C't^6l^3 + C''t^6l^5 + \ldots\ldots \\ & + Dt^8l + \ldots\ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x = {} & at + a'tl^2 + a''tl^4 + a'''tl^6 + \ldots\ldots \\ & + bt^3 + b't^3l^2 + b''t^3l^4 + b'''t^3l^6 + \ldots\ldots \\ & + ct^5 + c't^5l^2 + c''t^5l^4 + \ldots\ldots \end{aligned}$$

En satisfaisant aux deux équations de condition

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{dx}{dl}\cos l \quad \text{et} \quad \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dl}\cos l,$$

ainsi qu'aux condition du problème que nous venons d'énoncer, on détermine facilement les coefficients, K, A, A'..., a, a'... b..., et l'on arrive aux deux séries

$$\begin{aligned} y = {} & l + \frac{1}{2}t^2l - \frac{4}{2}\frac{1}{1.2.3}t^2l^3 + \frac{16}{2}\frac{t^2l^5}{1.2.3.4.5} - \frac{64}{2}\frac{t^2l^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \ldots\ldots \\ & + \frac{5}{2}t^4l - \frac{7}{18}t^4l^3 + \frac{5}{18}t^4l^5 - \ldots\ldots \\ & + \frac{61}{720}t^6l - \frac{443}{1440}t^6l^3 - \ldots\ldots \\ & + \frac{139}{4032}t^8l - \ldots\ldots \\ & + \ldots\ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x = {} & t - \frac{1}{2}tl^2 + \frac{1}{1.2.3.4}tl^4 - \frac{1}{1.2.3.4.5.6}tl^6 + \ldots\ldots \\ & + \frac{1}{6}t^3 - \frac{5}{12}t^3l^2 + \frac{41}{144}t^3l^4 - \frac{73}{864}t^3l^6 + \ldots\ldots \\ & + \frac{1}{24}t^5 - \frac{61}{240}t^5l^2 + \frac{191}{480}t^5l^4 - \ldots\ldots \\ & + \frac{61}{5040}t^7 - \frac{139}{1008}t^7l + \ldots\ldots \\ & + \frac{139}{28224}t^9 + \ldots\ldots \\ & + \ldots\ldots \end{aligned}$$

En groupant les coefficients des mêmes puissances de t, on peut écrire

$$y = l + \frac{1}{4}\sin 2l\,t^2 + \frac{4\sin 2l + 3\sin 4l}{4.8.1.3}\,t^4 + \frac{34\sin 2l + 60\sin 4l + 30\sin 6l}{4.8.12.1.3.5}\,t^6 + \frac{496\sin 2l + 1512\sin 4l + 1620\sin 6l + 630\sin 8l}{4.8.12.16.1.3.5.7}\,t^8 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x = t\cos l + \frac{\cos l + \cos 3l}{4.1.3}\,t^3 + \frac{4\cos l + 10\cos 3l + 6\cos 5l}{4.8.1.3.5}\,t^5 + \frac{34\cos l + 154\cos 3l + 210\cos 5l + 90\cos 7l}{4.8.12.1.3.5.7}\,t^7 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Groupons maintenant les termes en $\sin 2l$, $\sin 4l$, $\sin 6l$... dans l'expression de y, et les termes en $\cos l$, $\cos 3l$, $\cos 5l$... dans l'expression de x; nous trouverons

$$y = l + \sin 2l \operatorname{tang}^2\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\sin 4l \operatorname{tang}^4\frac{t}{2} + \frac{1}{3}\sin 6l \operatorname{tang}^6\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 8 \operatorname{tang}^8\frac{t}{2} + \ldots\ldots$$

$$x = 2\cos l \operatorname{tang}\frac{t}{2} + \frac{2}{3}\cos 3l \operatorname{tang}^3\frac{t}{2} + \frac{2}{5}\cos 5l \operatorname{tang}^5\frac{t}{2} + \frac{2}{7}\cos 7l \operatorname{tang}^7\frac{t}{2} + \ldots\ldots$$

On trouve enfin, en groupant convenablement les termes :

$$y = l + \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\sin 2l \operatorname{tang}^2\frac{t}{2}}{1 - \cos 2l \operatorname{tang}^2\frac{t}{2}}\right),$$

$$x = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1 + 2\operatorname{tang}\frac{t}{2}\cos l + \operatorname{tang}^2\frac{t}{2}}{1 - 2\operatorname{tang}\frac{t}{2}\cos l + \operatorname{tang}^2\frac{t}{2}}\right),$$

ou, en posant $z = 90^\circ - l$,

$$y = 90^\circ - z + \operatorname{arc\,cotang}\left(\operatorname{cotang} 2z + \operatorname{cotang}^2\frac{z}{2}\operatorname{cos\acute{e}c}\, 2z\right),$$

$$x = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1 + \sin z \sin t}{1 - \sin z \sin t}\right),$$

ou plus simplement

(I) $$\operatorname{cotang} y = \cos t \operatorname{tang} z.$$

(II) $$x = \frac{1}{2}\log\left(\frac{\operatorname{cos\acute{e}c}\, z + \sin t}{\operatorname{cos\acute{e}c}\, z - \sin t}\right).$$

Il est facile, pour vérifier ces formules, de former

$$\frac{dy}{dt}, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dz}, \frac{dx}{dz},$$

et de voir que les équations de condition

$$\frac{dy}{dz}\sin z = -\frac{dx}{dt} \qquad \text{et} \qquad \frac{dx}{dz}\sin z = \frac{dy}{dt}$$

sont satisfaites.

La formule

$$x = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\sin z \sin t}{1-\sin z \sin t}\right)$$

montre que x dépend de z de la même manière que de t, de telle sorte que pour des valeurs telles que $z = 40°$ et $t = 60°$, on obtiendrait pour x la même valeur que pour le groupe $z = 60°$ et $t = 40°$.

Si l'on fait $z = 90°$, c'est-à-dire $l = 0°$, on obtient

$$x_0 = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right) = \log\operatorname{tang}\left(45° + \frac{t}{2}\right),$$
$$y_0 = 0;$$

ce qui montre que les degrés de l'équateur comptés à partir du centre C augmentent de la même manière que les degrés de latitude dans les cartes marines de Mercator.

Si l'on fait $t = 90°$, on obtient

$$x = \frac{1}{2}\log\frac{1+\sin z}{1-\sin z} = \log\operatorname{tang}\left(45° + \frac{z}{2}\right),$$
$$y = 90°;$$

ce qui montre que le méridien distant de 90° du méridien central, est parallèle à l'équateur, et que, à partir du pôle, les degrés augmentent sur ce méridien comme les degrés de longitude sur l'équateur, ou comme les degrés de latitude dans les cartes marines de Mercator. Comme les parallèles coupent les méridiens à angles droits, ils s'écartent de plus en plus du pôle P (fig. 13) en allant du méridien de départ PC au méridien de 90°, PD ; et, sur ce dernier méridien, ils deviennent parallèles à CP. Au-dessus du méridien PD ils passent par les positions symétriques de celles qu'ils ont occupées au-dessous, de manière à former des ovales dont le demi grand axe

est PD, le demi petit axe PB, et qui s'allongent d'autant plus que la latitude diminue.

Cherchons quelle est l'altération des surfaces dans cette projection. Considérons pour cela la petite surface comprise entre deux parallèles et deux méridiens infiniment voisins. Cet élément peut être évalué par le produit des arcs infiniment petits de parallèles et de méridiens ; or un arc de courbe est exprimé par

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Formons donc dy et dx à l'aide des formules (I) et (II). Nous trouvons

$$dy = \frac{\cos t dl + \sin l \cos l \sin t dt}{1 - \cos^2 l \sin^2 t};$$

$$dx = \frac{\cos l \cos t dt - \sin t \sin l dl}{1 - \cos^2 l \sin^2 t}.$$

Pour un méridien $dt = 0$, nous obtenons alors

$$ds_m = \frac{dl}{\sqrt{1 - \cos^2 l \sin^2 t}}.$$

Pour un parallèle $dl = 0$, et nous obtenons

$$ds_p = \frac{dt \cos l}{\sqrt{1 - \cos^2 l \sin^2 t}}.$$

Le petit rectangle considéré est donc exprimé par

$$\frac{dt\, dl \cos l}{1 - \cos^2 l \sin^2 t}.$$

Le numérateur exprime justement le rectangle correspondant sur la sphère ; le rapport d'agrandissement des surfaces est donc

$$m^2 = \frac{1}{1 - \cos^2 l \sin^2 t}.$$

On voit que si $t = 0$, $m^2 = 1$, ce qui montre que l'altération des surfaces est nulle le long du méridien central.

Si donc la carte tracée d'après cette projection ne contient qu'un petit nombre de degrés de longitude, elle jouira des avantages suivants :

1° les angles y seront partout conservés, et par conséquent les méridiens et les parallèles se couperont partout à angles droits ;

2° les degrés de latitude y seront égaux sur le méridien du milieu représentés par une droite, et ceux de longitude, aux environs de ce méridien, ne différeront que très-peu de leur véritable grandeur.

Ce système conviendra donc aux pays tels que l'Amérique qui, peu étendus en longitude, pourront avoir, en latitude, une longueur aussi grande que l'on voudra. L'Afrique aussi se prêtera assez bien à ce genre de projection, en prenant pour méridien central celui de 20° longitude est.

On trouvera dans la table du chap. XII (2e partie), les valeurs de x et de y pour les valeurs de l et de t, de 10 en 10 degrés. La mappemonde n° IX est construite sur cette projection.

Nous montrerons, en traitant des projections cylindriques (ch. VI, § 26), que ce système peut être considéré comme une projection de Mercator transverse, c'est-à-dire comme le développement d'un cylindre tangent à la sphère le long du premier méridien, sous la condition de conservation des angles. C'est cette considération qui nous fait adopter, pour désigner ce système de représentation, le nom de *projection cylindrique orthomorphe de Lambert.*

15. Avant de terminer le chapitre des projections orthomorphes, nous ferons remarquer que lorsque l'on connaît l'une des deux équations de la projection, c'est-à-dire soit la valeur de x, soit la valeur de y, il est facile de trouver l'autre.

Nous avons en effet obtenu au § 13, pour équations de condition nécessaires et suffisantes,

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{dx}{dl}\cos l \qquad \text{et} \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dl}\cos l.$$

Il en résulte que l'on a :

$$dx = \frac{dy}{dl}\cos l dt - \frac{dy}{dt}\frac{1}{\cos l}dl,$$

$$dy = \frac{dx}{dt}\frac{1}{\cos l}dl - \frac{dx}{dl}\cos l dt.$$

Si donc on donne la valeur de x par exemple, on formera $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dx}{dl}$ et l'on en déduira la valeur de dy dont l'intégration fera connaître l'équation en y.

Ainsi si l'on donne $y = t$, il est facile d'obtenir x, car

$$\frac{dy}{dt} = 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{dy}{dl} = 0;$$

donc

$$dx = -\frac{dl}{\cos l},$$

et par conséquent

$$x = \log \operatorname{tang} \frac{90^\circ - l}{2}.$$

Nous obtenons ainsi la projection des cartes marines ou de Mercator.

16. Littrow (1) a considéré la projection dont l'une des équations est

$$x = \log l \cos t.$$

On en déduit

$$\frac{dx}{dt} = -\operatorname{tang} l \sin t \qquad \text{et} \qquad \frac{dx}{dl} = \frac{\cos t}{\cos^2 l};$$

donc

$$dy = -\frac{(\sin l \sin t dl + \cos t \cos l dt)}{\cos^2 l},$$

dont l'intégrale est

$$y = -\frac{\sin t}{\cos l};$$

de sorte que les équations de cette projection sont

$$x = \operatorname{tang} l \cos t \qquad \text{et} \qquad y = -\frac{\sin t}{\cos l}.$$

En éliminant soit t, soit l, on obtient pour équation des parallèles et pour équation des méridiens

$$y^2 \sin^2 l + x^2 = \operatorname{tang}^2 l,$$
$$y^2 \cos^2 t - x^2 \sin^2 t = \sin^2 t \cos^2 t.$$

Ces deux équations représentent, la première des ellipses, la seconde des hyperboles, dont le centre est à l'origine des coordonnées et dont le grand axe est dans l'axe des y.

---

(1) *Chorographie von* LITTROW, p. 142, Vienne, 1833.

NOTE

SUR LA CONSTRUCTION DES CARTES GÉOGRAPHIQUES,

Par M. TCHÉBYCHEV,

Lue, le 18 janvier 1853, à l'Académie impériale des sciences de Saint-Pétersbourg.

17. « Dans la construction des cartes géographiques, on parvient facilement à reproduire la figure d'une partie quelconque de la surface du globe de manière qu'il y ait constamment similitude entre ses éléments infiniment petits et leur représentation sur la carte. Mais le rapport d'agrandissement de différents éléments n'ayant pas la même valeur, les portions finies de la surface du globe, dans leur représentation sur la carte, se déforment plus ou moins, suivant les déviations de ce rapport de sa valeur normale, et comme ces déviations, dans les différents systèmes de tracé des cartes, présentent des valeurs plus ou moins considérables, on conçoit qu'il existe un système qui, dans la représentation d'une portion donnée de la surface du globe, réduit ces déviations au *minimum*, et par conséquent représente sa figure le mieux possible. C'est de la détermination de ce système de tracé des cartes que nous allons nous occuper. La question que nous aurons à résoudre présente une grande analogie avec celles qui ont été l'objet de notre mémoire intitulé : *Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes* (*Mémoires des savants étrangers*, t. VII), où nous avons cherché, par un choix convenable des constantes d'une fonction donnée, à diminuer, autant que possible, ses déviations d'une autre fonction, pour toutes les valeurs de la variable, comprises entre des limites données. Sous la condition d'un minimum de cette espèce, nous aurons à présent à chercher une fonction à deux variables, assujettie à vérifier une certaine équation aux différentielles partielles. Pour simplifier les formules, nous ne tiendrons pas compte de l'aplatissement de la terre, mais la même méthode peut être facilement étendue à toutes les hypothèses possibles sur la forme du globe.

« D'après la notation de *Lagrange* (1), le rapport d'agrandissement s'exprime ainsi

---

(1) *Voir* chap. 2, § 2.

$$m = \frac{\sqrt{F'(u+t\sqrt{-1})\,F'_1(u-t\sqrt{-1})}}{\frac{2}{e^u+e^{-u}}},$$

ce qui donne

$$\log m = \frac{1}{2}\log[F'(u+t\sqrt{-1})] + \frac{1}{2}\log[F'(u-t\sqrt{-1})] - \log\frac{2}{e^u+e^{-u}},$$

où la partie positive, composée des fonctions arbitraires, n'est évidemment que l'intégrale de cette équation

$$\frac{d^2U}{du^2} + \frac{d^2U}{dt^2} = 0.$$

Donc, les écarts du rapport d'agrandissement dépendent des déviations de la fonction $\log\frac{2}{e^u+e^{-u}}$ et de l'intégrale de cette équation. Or d'après les propriétés remarquables de cette équation, on parvient à reconnaître que le minimum de déviation de son intégrale de la fonction $\log\frac{2}{e^u+e^{-u}}$ dans l'espace limité par une courbe quelconque, ne peut avoir lieu à moins que la différence

$$U - \log\frac{2}{e^u+e^{-u}},$$

sur cette courbe, n'ait constamment la même valeur.

« Donc par l'intégration de l'équation

$$\frac{d^2U}{du^2} + \frac{d^2U}{dt^2} = 0;$$

sous cette condition, on aura la valeur de

$$U = \frac{1}{2}[F'(u+t\sqrt{-1})] + \frac{1}{2}\log[F'(u-t\sqrt{-1})],$$

à une constante arbitraire près, et de là on tirera les valeurs des fonctions

$$F'(u+t\sqrt{-1}), \quad F'_1(u-t\sqrt{-1}),$$

qui, à un facteur constant près, seront celles qui donnent la projection la plus avantageuse. Quant à leur facteur constant, qui reste

inconnu, il se détermine facilement d'après la valeur normale du rapport d'agrandissement.

« D'après cela on parvient facilement à assigner tous les cas dans lesquels on peut parvenir à la projection de la carte la plus précise, en prenant pour les méridiens et les parallèles des arcs de cercle. Dans son Mémoire Lagrange a montré que, dans toutes les méthodes qui jouissent de cette propriété très-importante pour la pratique, le rapport d'agrandissement s'exprime ainsi :

$$m = \frac{1}{\frac{2}{e^u + e^{-u}}\left[a^2 e^{2cu} + 2ab\cos 2c(t-g) + b^2 e^{-2cu}\right]}$$

« Donc, d'après ce que nous venons de dire, ces méthodes de projection ne peuvent donner la représentation la plus précise d'un pays quelconque, à moins que sur les bornes de ce pays on n'ait

$$\log m = -\log\left\{\frac{2}{e^u + e^{-u}}\left[a^2 e^{2cu} + 2ab\cos 2c(t-g) + b^2 e^{-2cu}\right]\right\} = \text{Const}^{\text{e}},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(\text{I})\begin{cases} \log m = -\log\dfrac{2}{e^u + e^{-u}} - \log\left(ae^{cu + c(t-g)\sqrt{-1}} + be^{-cu - c(t-g)\sqrt{-1}}\right) \\ \qquad\qquad - \log\left(ae^{cu - c(t-g)\sqrt{-1}} + be^{-cu + c(t-g)\sqrt{-1}}\right) = \text{Const}^{\text{e}}. \end{cases}$$

« Pour simplifier cette équation, nous transformerons les coordonnées, en prenant le point où $\log m$ devient *minimum* pour le pôle, et pour premier méridien celui qui passe par le pôle primitif. Soit t_0 et $90^\circ - z_0$ la longitude et la latitude de ce point, et convenons de désigner par T et $90^\circ - \text{Z}$ la longitude et la latitude dans le nouveau système des coordonnées. Si l'on observe que, d'après la notation de Lagrange que nous employons, u désigne $\log\left(\text{tang}\,\frac{z}{2}\right)$, $90^\circ - z$ étant la latitude relativement au premier pôle et t la longitude, on parviendra facilement à ces équations très-simples :

$$e^{u+t\sqrt{-1}} = \text{tang}\,\frac{z}{2}\,e^{t\sqrt{-1}} = \frac{\text{tang}\,\frac{z_0}{2} + \text{tang}\,\frac{\text{Z}}{2}\,e^{\text{T}\sqrt{-1}}}{1 - \text{tang}\,\frac{z_0}{2}\,\text{tang}\,\frac{\text{Z}}{2}\,e^{\text{T}\sqrt{-1}}}\,e^{t_0\sqrt{-1}};$$

$$e^{u-t\sqrt{-1}} = \operatorname{tang}\frac{z}{2}e^{-t\sqrt{-1}} = \frac{\operatorname{tang}\frac{z_0}{2} + \operatorname{tang}\frac{Z}{2}e^{-T\sqrt{-1}}}{1 - \operatorname{tang}\frac{z_0}{2}\operatorname{tang}\frac{Z}{2}e^{-T\sqrt{-1}}}e^{-t_0\sqrt{-1}}.$$

En portant ces valeurs dans l'équation (I), et en remarquant que $\log m$ devient minimum pour $Z = 0$, nous trouvons que cette équation, aux quantités de l'ordre $\operatorname{tang}^3\frac{Z}{2}$ près, devient

$$\frac{1-4c^2}{\sin^2 z_0}(\cos^2 T - \sin^2 T)\operatorname{tang}^2\frac{Z}{2} + \operatorname{tang}^2\frac{Z}{2} = C^{te};$$

et, comme dans la projection stéréographique, à un facteur constant près, on a

$$x = \operatorname{tang}\frac{Z}{2}\sin T, \qquad y = \operatorname{tang}\frac{Z}{2}\cos T;$$

ces équations nous donnent

$$\frac{\sin^2 z_0 + 4c^2 - 1}{\sin^2 z_0}x^2 + \frac{\sin^2 z_0 - 4c^2 + 1}{\sin^2 z_0}y^2 = \text{Const}^{te}.$$

« Donc si l'on cherche la projectiond'un pays assez petit, en prenant pour les méridiens et les parallèles des arcs de cercle, la projection ne peut s'approcher notablement de celle de la plus précise, à moins que ses limites, dans leur projection stéréographique, aux quantités de l'ordre $\operatorname{tang}^3\frac{Z}{2}$ près, ne vérifient cette dernière équation, et par conséquent ne présentent une courbe du second degré qui sera évidemment une ellipse, car cette courbe doit être fermée.

« D'après l'équation précédente. on voit qu'un des axes de cette ellipse suit la direction du méridien et que leur rapport est égal à

$$\sqrt{\frac{\sin^2 z_0 - 4c^2 + 1}{\sin^2 z_0 + 4c^2 - 1}}.$$

« Donc, s'il s'agissait de projeter une portion de la surface du globe, limitée par une pareille courbe dont les axes sont en rapport de 1 : n, l'exposant de projection serait déterminé ainsi

$$(2c)^2 = 1 + \frac{n^2-1}{n^2+1}\sin^2 z_0.$$

« Cette équation nous montre qu'il existe une liaison intime entre la configuration d'un pays et la valeur la plus avantageuse de l'exposant pour sa projection.

« D'après les équations dont nous venons de parler, quelle que soit la forme du pays, on peut déterminer et le centre de projection et la valeur de l'exposant, de la manière la plus avantageuse pour la précision de la carte. C'est ce que nous nous proposons de montrer dans un Mémoire détaillé sur la construction des cartes géographiques. »

CHAPITRE III.

PROJECTIONS SANS ALTÉRATION DES SURFACES OU ÉQUIVALENTES.

11. Pour obtenir l'équivalence des surfaces correspondantes de la carte et du sphéroïde, nous allons égaler la surface d'un quelconque des petits quadrilatères rectangles formés sur le sphéroïde par deux parallèles et deux méridiens infiniment rapprochés, à la surface du quadrilatère correspondant de la carte, quadrilatère qui, ainsi que nous l'avons montré (chap. I, § 9), peut être assimilé à un parallélogramme.

En appelant, comme nous l'avons déjà fait, r le rayon du parallèle dont la latitude est l, s l'arc du méridien compté depuis le pôle, ce quadrilatère a pour surface

$$ar.dsdt,$$

et comme r et ds sont des fonctions connues de l, on peut le représenter par

$$\mathrm{L}dtdl,$$

en posant

$$\mathrm{L}=ar\frac{ds}{dl}=\frac{a^2\cos l}{(1-e^2\sin^2 l)^{\frac{1}{2}}}.\frac{1-e^2}{(1-e^2\sin^2 l)^{\frac{3}{2}}}=\frac{a^2(1-e^2)\cos l}{(1-e^2\sin^2 l)^2}.$$

Les points de la projection qui correspondent aux sommets de ce rectangle ont respectivement pour coordonnées

$$x,y\left|x+\frac{dx}{dt}dt,\ y+\frac{dy}{dt}dt\right|x+\frac{dx}{dl}dl,\ y+\frac{dy}{dl}dl\left|x+\frac{dx}{dt}dt+\frac{dx}{dl}dl,\ y+\frac{dy}{dt}dt+\frac{dy}{dl}dl.\right.$$

La surface de ce parallélogramment rectiligne est facile à évaluer (fig. 14); c'est la différence des deux rectangles $bb_2a_1b_1$ et $a'a'_1a_1a_2$,

$$\frac{dx}{dt}dt.\frac{dy}{dl}dl-\frac{dx}{dl}dl.\frac{dy}{dt}dt.$$

La condition d'égalité des surfaces sur la carte et sur le sphéroïde est donc exprimée par la relation

$$\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dl} - \frac{dx}{dl}\frac{dy}{dt} = \mathrm{L}, \qquad (\mathrm{I})$$

dans laquelle L est une fonction connue de l, égale à $a^2 \cos l$ dans l'hypothèse de la terre sphérique.

Si nous prenons pour x une fonction quelconque φ de t et l, les dérivées partielles $\frac{dx}{dt} = p$ et $\frac{dx}{dl} = q$, seront des fonctions connues de ces deux variables, et l'expression générale de y s'obtiendra par l'intégration de l'équation aux différentielles partielles

$$p\frac{dy}{dl} - q\frac{dy}{dt} = \mathrm{L}.$$

On sait que cette intégration se ramène à celle des opérations différentielles simultanées

$$\frac{dl}{p} = -\frac{dt}{q} = \frac{dy}{\mathrm{L}},$$

On en déduit

$$pdt + qdl = 0,$$

équation dont l'intégrale est

$$\varphi(l.\,t) = \mathrm{C},$$

C étant une constante arbitraire. De plus

$$dy = \frac{\mathrm{L}dl}{p},$$

Or si nous supposons l'équation $\varphi\,(l,\,t) = \mathrm{C}$ résolue par rapport à t et que nous substituions à t cette valeur dans l'expression de p, le résultat, que nous désignerons par $p_{(l,\,c)}$, ne sera plus qu'une fonction de l, et il sera alors *théoriquement* possible de trouver l'intégrale de $\frac{\mathrm{L}dl}{p_{(l,\,c)}}$; on pourra donc écrire.

$$y = \mathrm{C}' + \int \frac{\mathrm{L}dl}{p_{(l,\,c)}}.$$

Nous obtiendrons alors l'intégrale de l'équation aux différentielles partielles en établissant entre les deux constantes C et C' une relation arbitraire quelconque ; et comme

$$\varphi(l, t) = x,$$

puisque l'on a en général

$$pdt + qdl = dx,$$

les équations définitives de conservation des surfaces sont

$$x = \varphi(l,t),$$
$$y = f(x) + \int \frac{L dl}{\left(\frac{dx}{dt}\right)_{(l,x)}},$$

à la condition de regarder x comme une constante dans l'expression de $\frac{dx}{dt}$.

Réciproquement, si ces équations sont satisfaites, les surfaces seront conservées. Soit en effet

$$\Psi(l,x) = \int \frac{L dl}{\left(\frac{dx}{dt}\right)_{(l,x)}},$$

l'intégrale obtenue en considérant x comme constante. Prenons les dérivées partielles de y,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} f'(x) + \frac{dx}{dt}\frac{d\Psi}{dx},$$
$$\frac{dy}{dl} = \frac{dx}{dl} f'(x) + \frac{dx}{dl}\frac{d\Psi}{dx} + \frac{d\Psi}{dl};$$

multiplions la seconde par $\frac{dx}{dt}$, la première par $\frac{dx}{dl}$, et retranchons,

$$\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dl} - \frac{dx}{dl}\frac{dy}{dt} = \frac{d\Psi}{dl}\cdot\frac{dx}{dt} = L,$$

et cette équation implique nécessairement la conservation des surfaces.

Remarquons que si le système des deux équations

$$x = \varphi(t,l), \quad y = \Psi(t,l)$$

est une solution de l'équation (I), on peut en déduire une infinité d'autres solutions en posant

$$x = \varphi(t,l), \quad y = f(x) + \Psi(l,t),$$

où f représente une fonction arbitraire quelconque de x.

2. Comme application des formules générales auxquelles nous sommes arrivés, prenons

$$\varphi(t, l) = at \quad \text{et} \quad f(x) = 0,$$

alors $\frac{dx}{dt} = a$, et par conséquent

$$y = \frac{1}{a}\int \mathrm{L}\,dl.$$

Si nous supposons la terre sphérique, L, c'est-à-dire $r\frac{ds}{dt}$, se réduit à ar ou $a^2 \cos l$; il vient donc

$$y = a \sin l.$$

On obtient ainsi un canevas dont les méridiens sont des droites parallèles et également espacées, et les parallèles d'autres droites perpendiculaires aux premières et distantes de l'équateur du sinus de la latitude correspondante. On voit de suite que ce système revient à circonscrire à la sphère un cylindre tangent le long de l'équateur et à projeter chaque point de la surface sphérique orthogonalement sur la surface cylindrique, c'est-à-dire par une perpendiculaire abaissée de ce point sur l'axe du cylindre, puis à développer la surface extérieure sur un plan.

Si l'on veut tenir compte de l'aplatissement de la terre, on est conduit à chercher l'intégrale de Ldl, c'est-à-dire de $\frac{a^2(1-e^2)\cos l}{(1-e^2\sin l)^2}$.

Posons $\sin l = u$; nous pourrons écrire

$$y = \frac{1}{a}\int \mathrm{L}\,dl = a(1-e^2)\int \frac{\cos l\,dl}{(1-e^2\sin^2 l)^2} = a(1-e^2)\int \frac{du}{1-e^2u^2}$$

$$= a(1-e^2)\left[\frac{\frac{u}{2}}{1-e^2u^2} + \frac{1}{4e}\log\frac{1+eu}{1-eu} + \mathrm{C}\right]$$

$$= a(1-e^2)\left[\frac{\sin l}{2(1-e^2\sin^2 l)} + \frac{1}{4e}\log\frac{1+e\sin l}{1-e\sin l} + \mathrm{C}\right].$$

Si l'on veut que y s'annule avec l, il faut faire $\mathrm{C} = 0$,

Développons $\frac{\sin l}{2(1-e^2\sin^2 l)}$ et $\log(1+e\sin l) - \log(1-e\sin l)$ en séries, et négligeons les puissances de e supérieures à la troisième, nous pourrons écrire

$$y = a(1-e^2)(\sin l + \tfrac{3}{4}e^2\sin^3 l),$$

ou enfin

$$y = a \sin l - ae^2 \sin l \left(1 - \tfrac{3}{4} \sin^2 l\right).$$

Nous reviendrons plus tard sur cette projection ; disons de suite que les régions voisines de l'équateur sont assez exactement représentées, mais que l'altération croît très-rapidement jusqu'aux pôles qui sont, comme dans la projection de Mercator, représentés par deux droites parallèles, de telle sorte que les zones polaires sont allongées suivant les parallèles et aplaties suivant les méridiens. Ce système n'est donc pas admissible pour les mappemondes, et son emploi doit être borné aux cartes des pays peu éloignés de l'équateur ou comprenant cette ligne, dont on veut conserver les surfaces sans s'occuper de la déformation des contours. Nous le désignerons sous le nom de *projection isocylindrique droite de Lambert.*

La mappemonde n° X a été construite d'après ce système.

3. Pour les pays tels que l'Amérique, qui ont leur plus grande étendue du nord au sud, Lambert propose de retourner en quelque sorte ce genre de projection de façon à représenter le méridien moyen par une droite divisée en degrés égaux, et l'équateur par une perpendiculaire divisée comme l'était la ligne des pôles dans la projection précédente, c'est-à-dire suivant les sinus des longitudes.

Ainsi les conditions du problème sont que, pour $t = 0$, $x = 0$ et $y = l$, et que, pour $l = 0$, $x = \sin t$ et $y = 0$.

On voit de suite que la valeur de x, $\varphi(l, t)$, qui satisfait à ces conditions, doit être

$$x = \sin t \cos l.$$

Nous en tirons

$$\frac{dx}{dt} = \cos t \cos l, \quad \text{et} \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_{l,x} = \sqrt{\cos^2 l - x^2}.$$

Comme x doit être nul avec l, il faut que $f(x) = 0$. Il reste donc

$$y = \int \frac{\cos l \, dl}{\sqrt{\cos^2 l - x^2}} = \arcsin \frac{\sin l}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Les équations de la projection sont donc

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} x = \sin t \cos l, \\ \sin y = \dfrac{\sin l}{\sqrt{1 - \sin^2 t \cos^2 l}}, \quad \text{ou} \quad \operatorname{tang} y = \dfrac{\operatorname{tang} l}{\cos t}. \end{cases}$$

Lambert, après avoir exposé sa projection isocylindrique droite,

est parvenu à celle-ci, que nous désignerons sous le nom de *projection isocylindrique transverse*, par une simple transformation de coordonnées applicable à toutes les projections cylindriques et que nous exposerons plus loin (chap. VI, § 26).

Revenons aux équations de ce système. Nous obtiendrons les équations des méridiens et des parallèles en éliminant soit l soit t entre les valeurs de x et de y.

En éliminant l, on trouve pour équation des méridiens

$$x^2(1+\operatorname{tang}^2 y\cos^2 t)=\sin^2 t.$$

En éliminant t, on trouve pour équation des parallèles

$$\operatorname{tang}^2 y(\cos^2 l-x^2)=\sin^2 l.$$

Ces deux genres de courbes sont transcendants, de sorte qu'il faudra toujours les construire par joints que l'on réunira ensuite par un trait continu ; mais la connaissance des équations nous permet de faire quelques remarques sur la forme du canevas.

On voit d'abord que la projection doit être symétrique par rapport au méridien du milieu à partir duquel se comptent les longitudes, et par rapport à l'équateur ; que le méridien de 90° de longitude est parallèle à l'équateur, et que, si l'on continue à faire croître la longitude au delà de 90°, on obtient au-dessus de ce méridien rectiligne une figure parfaitement semblable à celle déjà construite au-dessous ; il en résulte qu'une projection polaire d'un hémisphère serait symétrique par rapport aux méridiens de 0° et de 90° de longitude, perpendiculaires l'un sur l'autre.

Cherchons maintenant les tangentes aux méridiens et aux parallèles aux points principaux de la figure. On sait que l'angle α de la tangente à une courbe avec l'axe des x a pour tangente trigonométrique $\dfrac{dy}{dx}$.

Pour les méridiens nous trouvons

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{(1+\operatorname{tang}^2 l)\cos t}{(\cos^2 t+\operatorname{tang}^2 l)\sin t\sin l}.$$

Si nous faisons $l=0$, nous obtenons

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0=\frac{\cos t}{0}=\infty,$$

ce qui montre que les méridiens coupent l'équateur à angles droits.

Pour $l = 90°$, c'est-à-dire au pôle, la tangente de l'angle que fait un méridien avec le méridien de départ, c'est-à-dire $\frac{dx}{dy}$, est égale à

$$-\left[\frac{(\cos^2 t + \operatorname{tang}^2 l)\sin t}{(1+\operatorname{tang}^2 l)\cos t}\right]_{90} = \left[\frac{\left(\frac{\cos t}{\operatorname{tang}^2 l}+1\right)\sin t}{\left(\frac{1}{\operatorname{tang}^2 l}+1\right)\cos t}\right]_{90} = \operatorname{tang} t,$$

ce qui montre que les méridiens font aux pôles leurs véritables angles t avec le méridien principal.

Pour les parallèles nous trouvons de même

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin l \operatorname{tang} t}{\cos^2 l(\cos^2 t + \operatorname{tang}^2 l)}.$$

Pour $t = 0$, $\frac{dx}{dy} = \infty$, ce qui montre que les parallèles sont perpendiculaires au méridien principal, et pour $t = 90°$, $\frac{dy}{dx} = \infty$, ce qui montre que les parallèles sont perpendiculaires au méridien de 90° de longitude.

Le canevas n° XI a été construit dans ce système à l'aide des tables du chapitre X (2e partie).

4. Revenons maintenant aux équations générales des projections équivalentes

$$x = \varphi(l, t),$$
$$y = f(x) + \int \frac{\mathrm{L}\,dl}{\left(\frac{dx}{dt}\right)_{l,x}}.$$

Nous pouvons disposer de l'indétermination des deux fonctions φ et f dans ces équations, pour imposer à notre système de représentation une autre propriété que la conservation des surfaces; nous pouvons exiger, par exemple, que les lignes des méridiens et des parallèles se coupent à angles droits.

Or si nous calculons l'angle φ d'un méridien et d'un parallèle de la carte, nous trouvons

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\frac{dy}{dl}\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt}\frac{dx}{dl}}{\frac{dy}{dl}\frac{dy}{dt} + \frac{dx}{dt}\frac{dx}{dl}}.$$

Pour que φ soit égal à 90°, il faut donc que

$$\frac{dy}{dl}\frac{dy}{dt}+\frac{dx}{dl}\frac{dx}{dt}=0;$$

en y joignant l'équation générale

$$\frac{dy}{dl}\frac{dx}{dt}-\frac{dx}{dl}\frac{dy}{dt}=\mathrm{L},$$

on a les deux équations du problème.

M. Bonnet a montré que la question se ramenait à la résolution d'une équation aux différentielles partielles du second ordre et a trouvé l'intégrale de cette équation; mais comme les applications que l'on peut en faire relativement aux systèmes de représentation offrent peu d'intérêt au point de vue pratique, nous ne nous y arrêterons pas.

5. La détermination des fonctions arbitraires, par la condition que les méridiens et les parallèles de la carte soient des courbes d'une espèce donnée, constitue un problème qu'il est peut être impossible de résoudre d'une manière générale, mais dont quelques cas particuliers se présentent facilement.

Cherchons, par exemple, les formules qui expriment tous les systèmes dans lesquels les parallèles sont représentés par des droites parallèles.

Si nous prenons l'équateur pour axe des x, nous voyons que y doit être indépendant de la longitude t, et que l'on pourra, par conséquent, poser

$$y=\mathrm{F}(l).$$

Il en résulte que l'on doit faire, dans les formules générales,

$$f(x)=0,$$

et que $\frac{dx}{dt}$ doit être indépendant de t; x devra donc être de la forme

$$x=t\varphi(l)+\Psi(l),$$

ou simplement

$$x=t\varphi(l),$$

si l'on se donne la condition de x nul avec t; de sorte que l'on pourra écrire

$$y=\int\frac{\mathrm{L}dl}{\varphi(l)}=\mathrm{F}(l).$$

On en tire

$$\varphi(l) = \frac{L}{F'(l)},$$

et, par conséquent,

$$x = \frac{tL}{F'(l)} \quad \text{et} \quad y = F(l),$$

sont les équations du problème.

En remplaçant L par sa valeur $\frac{a^2 \cos l\,(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 l)^2}$,

nous obtenons les deux équations

$$y = F(l); \quad x = \frac{a^2 t \cos l\,(1 - e^2)}{1 - e^2 \sin^2 l)^2 F'(l)}.$$

Si l'on suppose la terre sphérique, ces formules se réduisent à

$$y = F(l); \quad x = \frac{a^2 t \cos l}{F'(l)}. \qquad \text{(II)}$$

L'expression générale de l'ordonnée x montre que pour des différences égales de latitudes, les courbes méridiennes divisent les parallèles en parties égales.

M. le capitaine du génie *de Prépetit-Foucaut* (1) est parvenu au même résultat en traitant directement la question pour le cas de la terre sphérique. L'aire de la zone *abef* (fig. 15) comprise entre le méridien AP, un méridien quelconque P*ef*E, les deux cercles parallèles infiniment voisins *eb* et *af*, a pour mesure l'arc de l'équateur AE multiplié par la hauteur de la zone, soit

$$a^2 t \cos l dl.$$

Si nous traçons deux axes rectangulaires A'P', A'E', que nous prenions le premier pour représenter le méridien principal rectifié, le second pour représenter l'équateur, la courbe des méridiens sera déterminée par la condition que le rectangle *a'b'e'f'* soit égal à la portion de zone sphérique *abef*; nous aurons

$$x dy = a^2 t \cos l dl.$$

Représentons par

$$y = F(l)$$

(1) *Notice sur la construction de nouvelles mappemondes et de nouveaux atlas*, lithographiée à Arras en 1862.

la loi d'espacement des parallèles; les équations du système de projection considéré pourront s'écrire

$$y = \mathrm{F}(l); \qquad x = \frac{a^2 t \cos l}{\mathrm{F}'(l)}.$$

Pour avoir l'équation des méridiens, il suffira d'éliminer l entre ces deux équations.

Traitons quelques applications de ces dernières formules.

a. L'expression la plus simple de y est évidemment

$$y = nal,$$

n étant une constante arbitraire.

Alors

$$\mathrm{F}'(l) = na,$$

$$x = \frac{at}{n} \frac{\cos l (1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 l)^2},$$

et si nous supposons la terre sphérique,

$$x = \frac{at}{n} \cos l.$$

Les méridiens sont donc des sinusoïdes qui partagent les parallèles en parties égales, et les parallèles sont des droites espacées comme les parallèles de la terre.

Si l'on suppose $n = 1$, les équations se réduisent pour le cas de la sphère à

$$y = al \qquad \text{et} \qquad x = at \cos l,$$

ce qui montre que les degrés de parallèles conservent sur la carte leur véritable grandeur. On obtient ainsi la projection imaginée en 1650 par le géographe français *Sanson* (1) et nommée improprement *projection de Flamsteed* (2); nous la désignerons sous le nom de *projection sinusoïdale de Sanson*, et comme elle a été souvent

---

(1) *Voir* à la bibliothèque Impériale l'atlas in-folio n° 3377 comprenant l'Asie, l'Afrique, les deux Amériques et plusieurs cartes de détail par Nicolas Sanson, d'Abbeville, publiées en 1650 d'après cette projection, ainsi que la carte d'Europe par Nicolas Sanson, fils du précédent. L'ensemble des cartes des Sanson a été réédité plusieurs fois par leurs fils et petits-fils, et par Robert de Vaugondy en 1755.

(2) Cette projection, citée dans l'ouvrage anglais : *The construction of maps and globes in tivo parts...* Londres, 1717, in-8, p. 81 à 83, fut employée par l'astronome anglais Jean Flamsteed pour la rédaction d'un atlas céleste commencé en 1700 et publié en 1729 sous le titre : *Atlas cœlestis by the late Reverend M. John* Flamsteed, *London*, 1729, gr. in-folio.

employée par les géographes même pour représenter la surface entière du globe dans une sorte d'ovale dont le grand axe est double du petit, nous l'étudierons plus loin avec plus de détails (1). La table II, qui renferme les valeurs des degrés de longitude pour les parallèles de degré en degré, rend très-facile la construction de cette projection sur laquelle a été tracée la mappemonde XVIII.

Nous voyons de suite que, l'angle d'intersection des méridiens et des parallèles n'étant droit que sur le méridien du milieu et sur l'équateur et s'écartant très-rapidement de 90° à mesure que la latitude augmente, cette projection ne peut convenir que pour les pays situés de part et d'autre de l'équateur et peu étendus en latitude.

7. Si l'on voulait que x fût fonction de t seulement, et par conséquent que les méridiens fussent représentés par des droites perpendiculaires à l'équateur, il suffirait de poser

$$x = \frac{t}{n},$$

et alors

$$F'(l) = n\cos l;$$

donc

$$y = F(l) = n\sin t.$$

On obtiendrait ainsi la projection isocylindrique droite de Lambert (§ 2).

M. de Prépetit-Foucaut a indiqué le système qu'il a appele *stéréographique équivalent* dans lequel les parallèles rectilignes sont à la même distance que ceux de la projection stéréographique ordinaire.

On a ainsi (fig. 16)

$$\frac{y}{AB} = \frac{E'O}{E'B};$$

d'où

$$y = a\,\text{tang}\,\frac{l}{2}.$$

On en déduit

$$F'(l) = \frac{a}{2\cos^2\frac{l}{2}};$$

(1) *Voir* 2e part., chap. VII, 2°. Disons ici que la projection prétendue nouvelle et nommée *isographique* par le docteur Mohr (séance du 6 février 1865 de la Société d'histoire naturelle et de médecine du Bas-Rhin) n'est point autre que la projection de Sanson.

donc

$$x = 2at \cos l \cos^2 \frac{l}{2}.$$

Pour $l = 90°$, $y = a$, $x = 0$, et pour $t = 90°$ et $l = o$, $y = 0$ et $x = a\pi$. On aurait donc pour représenter un hémisphère une figure très-aplatie aux pôles. Mais on peut transformer cette projection en prenant pour y, non plus a tang $\frac{l}{2}$, mais an tang $\frac{l}{2}$, n étant un coefficient que l'on détermine par la condition que les deux axes de la représentation d'un hémisphère soient égaux.

On obtient d'abord pour x

$$x = \frac{2at}{n} \cos l \cos^2 \frac{l}{2}.$$

pour $l = 90°$, $y = an$, et pour $l = 0$, $t = 90°$, $x = \frac{a\pi}{n}$. Il faut donc poser

$$n = \frac{\pi}{n};$$

d'où

$$n = \sqrt{\pi},$$

et les formules sont dans ce cas

$$y = at\sqrt{n}, \quad x = \frac{2at}{\sqrt{\pi}} \cos l \cos^2 \frac{l}{2}.$$

Ce système est plus curieux qu'utile; nous ne nous y arrêterons pas plus longtemps.

8. En voici un autre qui permet de représenter les parallèles par des lignes droites et les méridiens par des droites partant toutes d'un même point qui est le pôle de la projection.

Reprenons les formules générales pour le cas où la terre est supposée sphérique,

$$y = \mathrm{F}(l); \qquad x = \frac{a^2 t \cos l}{\mathrm{F}'(l)}.$$

Les équations des méridiens doivent être de la forme

$$x = (b - y)\varphi(t),$$

en appelant b l'ordonnée du point pris pour pôle, et plaçant l'origine des coordonnées à la rencontre de l'équateur et du méridien principal.

On a ainsi

$$(b-y)\varphi(t)=\frac{a^2t\cos l}{\frac{dy}{dl}}.$$

Comme $\frac{dy}{dl}$ est indépendant de t, il faut, pour que cette égalité ait lieu quelles que soient les valeurs de t et l, que $\varphi(t)$ soit de la forme mt, m étant une constante. On a alors

$$m(b-y)dy=a^2\cos l\,dl,$$

et en intégrant

$$m\left(by-\frac{y^2}{2}\right)=C+a^2\sin l.$$

Or y s'annule avec l, donc $C=0$; et comme pour $l=90^\circ$, $y=b$, il faut que

$$m\frac{b^2}{2}=a^2;$$

d'où

$$m=\frac{2a^2}{b^2}.$$

Les équations du système sont donc

$$2\left(by-\frac{y^2}{2}\right)=b^2\sin l,$$

$$x=2(b-y)\frac{a^2}{b^2}t.$$

Nous pouvons disposer de la constante b pour assujettir le problème à une nouvelle condition.

M. E. *Collignon* (1) l'a déterminée de manière que les méridiens extrêmes qui limitent la carte d'un hémisphère dessinent un carré. Il faut alors que pour $l=0$ et $t=\pm\frac{\pi}{2}$, on ait $x=\pm b$.

On trouve immédiatement

$$b=a\sqrt{\pi};$$

de sorte que les équations du nouveau système sont

$$x=2\left(a\sqrt{\pi}-y\right)\frac{t}{\pi},$$

(1) *Journal de l'École polytechnique*, 41e cahier.

$$y^2 - 2a\sqrt{\pi}\,y + \pi a^2 \sin l = 0.$$

y devant toujours être plus petit que $a\sqrt{\pi}$ on ne devra prendre que la racine

$$y = a\sqrt{\pi}\left(1 - \sqrt{1 - \sin l}\right) = a\sqrt{\pi}\left(1 - \sqrt{2}\sin\frac{90^\circ - l}{2}\right).$$

Soient (fig. 17) P le pôle, EE′ l'équateur, on portera d'abord

$$PO = OE = \frac{EE'}{2} = a\sqrt{\pi}.$$

Les méridiens se construisent immédiatement en partageant l'équateur en parties égales représentant des arcs de longitude de 5° en 5° ou de 10° en 10°.

Du point P, comme centre, avec PO pour rayon, décrivons le quadrant ADB.

Pour tracer le parallèle correspondant à une latitude représentée sur le quadrant AB par l'arc $AD = l$, il suffira de prendre le milieu F de l'arc DE complémentaire de la latitude, et de mener par ce point F, IH parallèle à BPE′ jusqu'à la rencontre H de PO. Le parallèle cherché sera N′HN parallèle à EE′.

En effet, abaissons FI perpendiculaire sur BE′ et menons IK parallèle à PO, nous aurons

$$OH = OP - IK = OP - IF\sqrt{2}.$$

Or

$$IF = OP \sin\frac{90^\circ - l}{2} = a\sqrt{\pi}\sin\frac{90^\circ - l}{2};$$

donc

$$OH = a\sqrt{\pi}\left(1 - \sqrt{2}\sin\frac{90^\circ - l}{2}\right),$$

valeur qui, substituée à y dans l'équation entre y et l, satisfait à cette équation.

Pour tracer les parallèles de 10° en 10°, il suffira donc de porter des arcs de 5° en 5° du point B au point M, milieu du quadrant BA, et de projeter ces points sur PO parallèlement à BE′; par les points de division de PO ainsi obtenus, on n'aura plus qu'à mener des parallèles à EE′ et ces parallèles seront à peu près également distants.

Pour obtenir le carré on fera le tracé seulement pour les latitudes boréales et on le répétera symétriquement au-dessous de l'équateur.

9. Nous allons maintenant considérer les systèmes de projections à surfaces équivalentes dans lesquels les parallèles sont représentés par des cercles concentriques. Nous pourrions traiter cette question comme cas particulier du problème général.

Soit C le centre commun que nous prenons pour centre des coordonnées polaires ρ et θ; remarquons de suite que ρ doit être fonction de la latitude l seulement; ainsi

$$\rho = \varphi(l).$$

Le petit quadrilatère formé par deux méridiens infiniment voisins et deux parallèles ayant pour rayons ρ et $\rho + d\rho$, a pour surface le produit de sa base $\rho d\theta$ par sa hauteur $d\rho$. L'égalité des surfaces de la carte et du sphéroïde donne donc

$$\rho d\rho d\theta = ar\,dt\,ds = \mathrm{L}\,dt\,dl;$$

d'où l'on tire

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\mathrm{L}}{\rho \dfrac{d\rho}{dl}},$$

et en intégrant

$$\theta = \frac{t\mathrm{L}}{\rho \dfrac{d\rho}{dl}} + f(l).$$

Si nous convenons de compter les angles θ à partir du méridien principal qui sera représenté par une droite, on voit que θ doit s'annuler avec t et que par conséquent

$$f(l) = 0.$$

Les équations générales cherchées sont donc

$$\theta = \frac{t\mathrm{L}}{\rho \dfrac{d\rho}{dl}} \quad \text{et} \quad \rho = \varphi(l).$$

Les parallèles sont des cercles concentriques et les méridiens partagent les parallèles en parties égales et ont pour équation le résultat de l'élimination de l entre les deux équations précédentes.

Faisons quelques applications de ces formules.

10. Supposons d'abord la terre sphérique et prenons pour ρ la fonction la plus simple de l. Soit

$$\rho = a(c' + cl),$$

c et c' étant deux constantes. Dans ce cas la valeur de θ peut s'écrire

$$\theta = \frac{at\cos l}{c\rho}.$$

L'égalité

$$\rho\theta = \frac{at\cos l}{c}$$

montre que les degrés des parallèles sont tous réduits dans un rapport constant; cette propriété rend très-facile le tracé de ces projections puisque les parallèles sont des cercles concentriques et que, pour avoir les méridiens, il suffit de porter sur ces cercles des longueurs qui soient aux degrés correspondants des parallèles de la sphère comme 1 est à C.

Nous pouvons construire des projections analogues pour représenter l'ellipsoïde. Pour cela donnons à ρ des variations proportionnelles à celles de l'arc s de méridien compté à partir du pôle en posant

$$\rho = ac' + cs.$$

Alors

$$\theta = \frac{t\mathrm{L}}{\rho\dfrac{d\rho}{dl}} = \frac{atr\dfrac{ds}{dl}}{ac\rho\dfrac{d\rho}{dl}} = \frac{tr}{c\rho},$$

et l'on aura encore

$$\rho\theta = \frac{tr}{c}.$$

Comme il est difficile et peu exact de porter sur un arc de cercle des longueurs données, il faudra déterminer les divisions des parallèles en construisant les angles θ, ou en portant, à l'aide du compas, les longueurs des cordes qui devront sous-tendre les arcs cherchés. Ces cordes d se calculeront facilement à l'aide de la formule

$$d = 2\rho\sin\frac{\theta}{2}.$$

Lorsque le centre commun des parallèles sera trop éloigné pour que ces cercles puissent être décrits facilement, on les déterminera par points en les rapportant à deux axes rectangulaires dont l'un sera le méridien principal et l'autre une perpendiculaire quelconque, tangente par exemple au parallèle de latitude l; on aura ainsi

$$x = \rho \sin \theta \qquad \text{et} \qquad y = \rho_1 - \rho \cos \theta,$$

ρ étant le rayon du parallèle de latitude l_1.

11. Nous pouvons disposer de l'indétermination des constantes c et c' pour donner à la projection une nouvelle propriété.

Supposons par exemple que nous convenions de prendre le pôle pour centre commun des cercles de latitude. Il faut alors que ρ soit nul pour $l = 90°$ et par conséquent

$$c' = -\frac{\pi}{2} c.$$

Si l'on demande en outre que le rayon de l'équateur ait une longueur donnée ma, ce qui fixe l'échelle de la carte, on trouve

$$c' = m; \qquad \text{donc} \qquad c = -\frac{2m}{\pi},$$

et ainsi les deux formules deviennent

$$\rho = \frac{2ma}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - l\right) = \frac{2ma}{\pi} z,$$

$$\theta = \frac{\pi^2 t \sin l}{4m^2 z}.$$

Or, en supposant $\frac{2m}{\pi} = 1$, ce qui est toujours possible, puisque cette constante m ne sert qu'à fixer l'échelle de la carte,

$$\rho = az \qquad \text{et} \qquad \theta = \frac{t \sin z}{z},$$

l'équation des méridiens est alors

$$\theta = \frac{at \sin \frac{\rho}{a}}{d\rho}.$$

Si nous calculons l'angle ω que fait la tangente à cette courbe avec le rayon vecteur, nous trouvons

$$\operatorname{tang} \omega = \rho \frac{d\theta}{d\rho} = tz \cos z - t \sin z.$$

Cet angle est nul au pôle où $z = 0°$ et va en croissant avec z, de sorte que plus on s'éloigne du pôle et plus les méridiens s'inclinent

sur les parallèles. Cette projection serait donc tout au plus bonne pour les régions voisines du pôle. La projection n° XIX reproduit la surface entière du globe d'après Werner (1514) (1).

12. On peut aussi déterminer les constantes qui entrent dans l'expression de ρ par la condition que ρ ait une longueur déterminée pour une valeur donnée de l. Si l'on fait en sorte, par exemple, que pour $l = l_1$, ρ soit égal à la cotangente de cette latitude, le rayon de ce parallèle sera précisément égal à la génératrice du cône supposé tangent à la sphère le long de ce cercle de latitude, et l'on pourra considérer la projection comme une sorte de développement de ce cône sur lequel on aurait d'abord rectifié chaque méridien à partir du point de tangence ; la valeur de chaque rayon est, dans ce cas,

$$\rho = a \operatorname{cotang} l_1 + (l_1 - l).$$

Cette projection jouit de cet avantage que les méridiens coupent le parallèle dont la latitude est l_1 à angles droits, de sorte que si l'on prend pour l_1 la latitude moyenne du pays que l'on veut représenter, on a sur ce cercle, la représentation la plus exacte qu'il soit possible d'obtenir. Nous reviendrons longuement sur cette projection, dont quelques géographes ont voulu attribuer l'idée première à Ptolémée, et qui est appelée en Allemagne *projection de Bonne*, en France projection du *Dépôt de la guerre*, et encore (par une grosse absurdité) *projection de Flamsteed modifiée* (2). Disons de suite qu'il est très-facile, dans cette projection, de tenir compte de l'aplatissement de la terre. Il suffit pour cela de prendre pour rayon du parallèle moyen la tangente du cône circonscrit à l'ellipsoïde, et de porter à partir du point de tangence sur le méridien moyen, les vraies longueurs des arcs de méridien données dans la table I ; on portera ensuite sur les arcs de cercle qui représentent les parallèles, les longueurs correspondantes à chacun d'eux, et données dans la même table.

Si l'on faisait $l_1 = 0$, ρ serait infini, les cercles parallèles deviendraient des droites et l'on obtiendrait la projection dont nous avons déjà parlé, vulgairement appelée *projection de Flamsteed* quoiqu'elle ait été indiquée et employée par *Sanson* en 1650 (3).

---

(1) *Voir* chap. VI, § 16.
(2) *Voir* chap. VI, § 14 et 2e part., chap. VII.
(3) *Voir* chap. VI, § 15, et 2e part., chap. VIII.

13. Reprenons encore pour le cas de la terre sphérique les formules

$$\rho = \varphi(l); \qquad 0 = \frac{ta^2 \cos l}{\rho \dfrac{d\rho}{dl}}.$$

Nous pouvons déterminer la fonction φ par la condition que les méridiens coupent les parallèles à angles droits. Comme les parallèles sont représentées par des cercles concentriques, les méridiens seront des droites qui devront être nécessairement également inclinées les unes sur les autres, puisque, dans toutes ces projections, les parallèles sont partagés en parties égales. Nous devons donc faire

$$0 = \frac{t}{m},$$

si nous voulons que les angles des méridiens de la carte soient dans le rapport de 1 à m avec ceux de la sphère. Il en résulte

$$\frac{a^2 \cos l}{\rho \dfrac{d\rho}{dl}} = \frac{1}{m},$$

d'où nous tirons

$$\rho d\rho = ma^2 \cos l dl,$$

et, en intégrant,

$$\frac{\rho^2}{2} = C - ma^2 \sin l.$$

Nous mettons le signe — devant le terme en sin l, parce que, ρ croissant quand l décroît, $d\rho$ et dl sont de signes contraires ; il faut donc rétablir les signes dont nous avons fait abstraction dans les formules générales.

ρ devant être nul pour $l = 90$, la constante C doit être prise égale à ma^2, et par conséquent

$$\frac{\rho^2}{2} = ma^2(1 - \sin l).$$

Remplaçons l par $90° - z$, nous pourrons écrire

$$\rho^2 = 4am^2 \sin^2 \frac{z}{2}.$$

Les équations de ce système de projection sont donc

$$\rho = 2\sqrt{m}\, a \sin\frac{z}{2} \qquad \text{et} \qquad 0 = \frac{t}{m};$$

$2a \sin\frac{z}{2}$ représente la corde de l'arc de méridien qui joint, sur la sphère, le pôle au parallèle de latitude l; la valeur de ρ est donc bien facile à construire; pour obtenir les rayons des parallèles, il suffira de tracer une circonférence d'un rayon égal à $a\sqrt{m}$, et de porter à partir d'un diamètre les différentes latitudes ; les distances rectilignes du pôle P de ce diamètre aux points de division, c'est-à-dire les cordes des arcs complémentaires des premiers, seront les rayons cherchés. Le rayon de l'équateur sera égal à $a\sqrt{2m}$.

On peut donner au coefficient m la valeur que l'on veut.

Pour des pays isolés tels que l'Europe, m peut être déterminé de manière que, sur la carte, le degré de latitude moyenne l_1 conserve son véritable rapport avec le degré de longitude. Il faut alors que

$$\rho\theta = \rho\,\frac{t}{m} = at \sin z_1.$$

Or

$$\rho = 2a\sqrt{m}\sin\frac{z_1}{2};$$

donc

$$\frac{2a}{\sqrt{m}}\sin\frac{z_1}{2} = a\sin z;$$

d'où

$$\sqrt{m} = \frac{2\sin\frac{z_1}{2}}{\sin z_1} = \frac{1}{\cos\frac{z_1}{2}},$$

et par conséquent

$$m = \frac{1}{\cos^2\frac{z_1}{2}} = \frac{2}{1+\cos z_1}.$$

Si l'on prend par exemple pour l'Europe $z_1 = 38°\,26'$, on trouve $\cos z_1 = 0{,}78327$; on peut donc prendre, si l'échelle est petite,

$$m = \tfrac{10}{9},$$

et c'est dans cette proportion que les degrés de longitude doivent être réduits. On a alors

$$\rho = \frac{2}{3} a\sqrt{10} \sin\frac{z}{2} = a.2{,}108 \sin\frac{z}{2}.$$

La projection n° XIV a été tracée en prenant $z_1 = 45°$ d'où résulte pour m la valeur 1,171. L'angle au pôle d'un hémisphère entier est de 307° 25′ environ.

Nous donnerons à ce système le nom de *projection isosphérique sténotère* (1) *de Lambert* (2) pour le distinguer du suivant qui conserve les angles des méridiens, et que nous pourrions qualifier de *isomère* (3).

11. Ce second système est ainsi défini par l'expression

$$m = 1,$$

et a pour formules

$$\theta = t, \quad \rho = 2a \sin\frac{z}{2}.$$

On voit que dans ce cas le rayon ρ de chaque parallèle est égal à la corde de l'arc de méridien compris sur la sphère entre le pôle et le cercle de latitude correspondant.

Lambert est arrivé à ces systèmes isosphériques en traitant directement la question de la conservation des surfaces sous la condition de représenter les méridiens par des droites se coupant au pôle et les parallèles par des cercles ayant ce pôle pour centre.

En posant $PM = \rho$, $MN = d\rho$, on a

$$M\mu = \rho dt$$
$$\text{surf. } MN\mu\nu = \rho dt d\rho = a^2 \sin z dz dt$$
$$\rho d\rho = a^2 \sin z dz = -a^2 d\cos z.$$

Donc, en se donnant la condition que ρ s'annule avec z,

$$\frac{1}{2}\rho^2 = a^2(1-\cos z) = 2a^2 \sin^2\frac{z}{2},$$

$$\rho = 2a \sin\frac{z}{2}.$$

Lambert eut encore le mérite de remarquer que cette projection, de même que toutes celles où les méridiens sont, en prenant le pôle

(1) Στενότερος, plus étroit.
(2) *Entwerfung der Charten*, sect. IX.
(3) Ἰσομοιρος, également partagé.

pour centre, des droites régulièrement espacées autour de ce point et les parallèles des cercles concentriques, peut s'appliquer en un point quelconque de la sphère pris pour centre ; il suffit pour cela de supposer les méridiens remplacés par des cercles verticaux et les parallèles par des cercles (nommés *almicantarats*) ayant tous ce point pour centre et dont les rayons sur la projection varieront d'après la même loi que les rayons des parallèles de la projection polaire. D'après cette remarque il suffit, pour représenter une portion quelconque de la surface sphérique sans en altérer les aires, de prendre arbitrairement un point de la sphère pour centre du tracé, de reporter ce point sur le papier, puis de placer chaque point du contour dans l'azimut du point correspondant sur la sphère par rapport au centre adopté, à une distance de ce centre égale à la corde du grand cercle mené de l'un à l'autre de ces deux points.

Pour déterminer chaque point de la carte par sa latitude et sa longitude, il suffit d'exprimer l'azimut et le rayon vecteur en fonction de ces coordonnées. Ce calcul de transformation de coordonnées se fait très-facilement à l'aide du triangle sphérique ayant pour sommets le pôle, le point central et le point donné par sa latitude et sa longitude, et que l'on veut placer sur la carte; dans ce triangle on connaît, en effet, deux côtés et l'angle compris; il est facile de trouver l'angle au point central et le côté qui joint ce point à celui que l'on veut placer.

Nous reviendrons sur ce calcul lorsque nous parlerons des projections zénitales, c'est-à-dire qui peuvent avoir pour centre un point donné quelconque.

Lambert n'a considéré, dans sa projection isosphérique, que le cas où le point central est pris sur l'équateur, de sorte que la projection d'un hémisphère peut être regardée comme faite sur le plan d'un méridien; mais le principe de transformation est le même lorsqu'on projette tout ou partie de la demi-surface sphérique sur l'horizon d'un lieu quelconque. Tout le mérite de cette invention revient à Lambert et non à *Lorgna*, qui, quoique n'ayant parlé que dix-sept ans plus tard de la projection polaire seulement, a su attacher son nom à ce système (1).

Nous reviendrons plus tard (2) sur cette projection, que M. E. *Col-*

(1) Anton.-Mario Lorgna, *Principi di geografia astronomico-geometrica*, Vérone, 1789, in-folio, chap. IX, à XI, p. 68 à 94.

(2) *Voir* 2e part., ch. IX.

lignon (1) vient de traiter d'une façon très-remarquable dans un mémoire présenté à l'Académie, et nous parlerons alors de l'application de ce système aux cartes particulières et de la manière de tenir compte de l'aplatissement de la terre. Disons de suite que la projection isosphérique zénitale de Lambert est incontestablement la meilleure de toutes celles qui conservent les surfaces, car :

1° l'altération des angles et des distances y est nulle au centre de la carte, point que l'on peut choisir arbitrairement;

2° ces erreurs sont égales à des distances égales du centre;

3° en chaque point il existe une infinité de couples de droites formant des angles non altérés, et deux éléments de longueur non altérés;

4° on peut, par des opérations graphiques très-simples, déterminer rigoureusement la mesure d'un angle représenté sur la carte, et approximativement la mesure de la longueur d'une ligne donnée.

Les projections n°s XX et XXI ont été dressées dans ce système et à l'aide des tables du chapitre IX (2e partie).

15. M. Collignon a proposé de construire des mappemondes mixtes en trois parties, les deux zones polaires à une base comprises entre les pôles et les parallèles de 30° de latitude étant projetées dans le système isosphérique de Lambert, et la zone équatoriale intermédiaire dans le système isocylindrique dont nous avons parlé au § 2. Comme la corde d'un arc de 60° est égale au rayon, les rayons des cercles qui limitent les deux zones polaires seront égaux au rayon du cylindre circonscrit, de plus les altérations des longueurs seront identiques sur ces trois cartes dans le sens des lignes qui en forment les contours extrêmes, et identiques aussi dans le sens perpendiculaire à ces contours; c'est ce que nous démontrerons quand nous étudierons chacun de ces systèmes en particulier. Une mappemonde ainsi construite permet d'évaluer des distances avec une erreur au plus égale au $\frac{15}{100}$ de leur valeur et de tracer au rapporteur les directions avec une déviation maximum de 8° 12′, résultats qui doivent être considérés comme très-suffisamment exacts quand on a à représenter la totalité de la surface terrestre sous la condition de conserver les aires.

16. La projection isosphérique sténotère de Lambert peut être considérée comme une projection conique toutes les fois que m est

(1) *Journal de l'Ecole Polytechnique*, 41e cahier.

plus grand que l'unité, car il est alors toujours possible de calculer l'angle au sommet 2α du cône obtenu en enroulant cette projection. En égalant la circonférence de la base à l'arc-limite de la projection, on a en effet (fig. 18)

$$2\pi OA = R\Theta \quad \text{ou} \quad \Theta R = 2\pi R \sin\alpha;$$

d'où

$$\Theta = 2\pi \sin\alpha.$$

Or nous avons posé $\Theta = \dfrac{2\pi}{m}$, donc

$$\frac{1}{m} = \sin\alpha,$$

formule qui permet de calculer l'une des quantités m ou α quand l'autre est connue. Si l'on suppose le cône tangent à la sphère, l'angle α est égal à la latitude de parallèle de contact.

Au lieu de prendre un cône tangent à la sphère, on peut en considérer un sécant en s'imposant la condition que sur deux parallèles donnés les degrés de longitude conservent leur véritable rapport avec ceux de latitude, et par suite que l'altération des angles soit nulle sur ces deux parallèles.

La projection qui en résulte, imaginée par le docteur *Albert* de Lünebourg en 1805 (1), est donc le développement d'un tronc de cône ayant pour axe la ligne des pôles et traversant la sphère suivant les deux cercles de latitudes l_1 et l_2 que l'on veut conserver dans la représentation.

La surface de la zone limitée par ces deux parallèles (fig. 19) est exprimée par

$$S = 2\pi a^2(\sin l_2 - \sin l_1) = 4\pi a^2 \cos\frac{l_1+l_2}{2} \sin\frac{l_2-l_1}{2};$$

la surface correspondante du tronc de cône par

$$S' = \pi a D(\cos l_2 + \cos l_1) = 2\pi a D \cos\frac{l_2+l_1}{2} \cos\frac{l_2-l_1}{2},$$

en appelant D la distance AB, c'est-à-dire la différence des rayons

(1) *Beschreibung einer neuen Kegelprojection, von H. C.* Albers, mémoire inséré dans la *Monatliche Correspondenz de* Zach, novembre 1805, p. 450 à 459.

des deux parallèles considérés sur la projection. De l'égalité des surfaces on tire

$$D = 2a \operatorname{tang} \frac{l_2 - l_1}{2}.$$

Le rayon ρ_2 du parallèle Al_2 s'obtiendra par le rapport

$$\frac{BA}{HB} = \frac{OA}{Al_2}, \quad \text{d'où} \quad \rho_2 = \frac{D \cos l_2}{\cos l_1 - \cos l_2} = \frac{a \cos l_2}{\sin \frac{l_2 + l_1}{2} \cos \frac{l_2 - l_1}{2}}.$$

De même le second rayon ρ_1 sera donné par l'égalité

$$\rho_1 = \rho_2 + D = \frac{a \cos l_1}{\sin \frac{l_1 + l_2}{2} \cos \frac{l_2 - l_1}{2}}.$$

Quant à l'écartement des méridiens qui sont les génératrices du cône développé, on l'obtiendra en égalant les deux expressions de la longueur d'un des deux parallèles B ou A sur le cône et sur la sphère, ce qui donnera

$$\theta = \frac{ta \cos l_1}{\rho_1} = \frac{t}{k}$$

en posant

$$k = \frac{\rho_1}{a \cos l_1} = \frac{1}{\sin \frac{l_1 + l_2}{2} \cos \frac{l_2 - l_1}{2}}.$$

Ainsi les angles des méridiens entre eux sont réduits dans le rapport de 1 à k.

Cherchons maintenant l'expression du rayon d'un parallèle quelconque de latitude l.

La surface infiniment petite comprise entre ce parallèle, le voisin et les deux méridiens consécutifs a évidemment pour expression sur le cône $\theta\rho d\rho$, et sur la sphère $ta^2 \cos l dl$; en exprimant que ces deux surfaces sont égales on a donc

$$\theta\rho d\rho = -ta^2 \cos l dl;$$

nous mettons le signe — parce que $d\rho$ et dl sont des accroissements de signes contraires. Remplaçons θ par $\frac{t}{k}$ et intégrons, nous aurons

$$\rho^2 = -2a^2 k \sin l + C.$$

Pour $l = l_1$ on a par conséquent

$$\rho_1^2 = -2a^2k \sin l_1 + C;$$

donc

$$\rho^2 = 2a^2k(\sin l_1 - \sin l) + \rho_1^2.$$

Telle est l'expression qui permettra de calculer le rayon d'un parallèle quelconque.

Si l'on veut prolonger le développement au-dessus et au-dessous des deux parallèles l_1 et l_2, le pôle sera représenté par un arc de cercle dont le rayon sera

$$\rho^2_{90} = \rho_1^2 - 2a^2k(1 - \sin l_1),$$

et l'équateur aura pour rayon

$$\rho^2_0 = 2a^2k \sin l_1 + \rho_1^2.$$

Dans cette projection la déformation n'est pas très-considérable lorsqu'on ne s'éloigne pas trop des deux parallèles qui conservent leur grandeur exacte, et par conséquent lorsque la différence des latitudes de ces deux parallèles est elle-même peu considérable; dans les 5 degrés de latitude voisins de chacun d'eux, l'erreur sur les degrés de longitude ne s'élève pas à plus de $\frac{1}{1000}$. Les distances se mesurent directement avec une approximation souvent suffisante, à l'aide d'une échelle divisée en parties égales, tant que la carte ne comprend pas plus de 20 degrés de latitude. Les distances, dans la zone centrale, sont augmentées du nord au sud et diminuées de l'est à l'ouest, et l'erreur la plus grande est sur les parallèles du milieu; dans les zones extrêmes, au contraire, les distances du nord au sud sont diminuées et celles de l'est à l'ouest augmentées, et cela d'autant plus que les deux parallèles donnés sont plus éloignés. Les erreurs sont indépendantes de l'étendue en longitude, ce qui rend la projection d'Albers très-convenable pour un pays tel que la Russie, qui a une très-grande étendue en longitude. Enfin les erreurs d'angles et de distances diminuent à mesure que la différence des latitudes des parallèles extrêmes décroît, et pour une zone ne dépassant pas 10° ces erreurs peuvent être négligées.

Le système d'Albers fut adopté pour la carte générale de l'Europe construite à Nuremberg en 1817 par *Reichard*.

La projection n° XV donne le développement de l'hémisphère nord avec la conservation des parallèles de 30 degrés et de 60 de latitude.

17. Si l'on veut une projection où les méridiens et les parallèles soient des droites se coupant à angles droits et où les degrés d'un parallèle donné conservent leur véritable rapport avec les degrés de latitude, on imaginera un cylindre non plus tangent à la sphère comme dans la projection isocylindrique de Lambert, mais construit sur le parallèle donné, en partie intérieur et en partie extérieur à la sphère; de cette manière l'étendue en longitude se trouvera exacte vers le milieu, mais l'erreur sera partagée entre les deux extrémités.

Si nous appelons h la distance d'un parallèle de latitude $l = l_0 + \delta$ au parallèle de latitude l_0 qui est supposé servir de base au cylindre et se développer en vraie longueur, on aura, en égalant les surfaces correspondantes de la sphère et du cylindre,

$$2\pi a^2[\sin(l_0 + \delta) - \sin l_0] = 2\pi a h \cos l_0,$$

d'où l'on tire

$$h = \frac{2a \sin \frac{\delta}{2} \cos\left(l_0 + \frac{\delta}{2}\right)}{\cos l_0}.$$

Nous reviendrons plus loin sur les projections cylindriques et nous montrerons que le cylindre peut être pris non-seulement perpendiculaire à l'équateur, mais encore oblique et tangent le long d'un grand cercle quelconque considéré comme l'équateur artificiel d'une zone étroite et oblique que l'on aurait à représenter.

La projection n° XII donne le développement du cylindre sécant le long du parallèle de 45°.

18. Il nous reste à parler d'une autre projection imaginée en 1805 par le savant professeur *C.-B. Mollweide*, de Halle (1), et dont on a fait depuis 1857 de nombreuses applications sous le nom de *projection homalographique de M. Babinet.* Le professeur *Schmidt*, de Giessen, en 1803, et bien avant lui le P. *Fournier* (2) en 1643, avaient proposé « pour tracer une carte la mieux proportionnée « qu'on puisse, » sur le plan d'un méridien, de représenter les mé-

(1) MOLLWEIDE, *Ueber die vom Prof.* SCHMIDT *in Giessen in der zweyten Abtheilung seines Handbuchs der naturlehre S. 595 Angegebene «Projection der Halbkugelfläche» (hierzu ein Kupfer, eine geometrische Figur enthaltend)* dans la *Monatliche Correspondenz* de ZACH, cahier d'août 1805, p. 152 à 163.

(2) *Hydrographie, composée par le Père* G. FOURNIER, *de la compagnie de Jésus.* Paris, 1643, 2e édit., 1667 in-fol.; liv. XIV, Des Cartes, p. 524.

ridiens équidistants par des ellipses équidistantes; quant aux parallèles, le P. Fournier les traçait soit en arcs de cercle passant à la fois par les divisions respectivement égales des méridiens extrêmes et du méridien moyen (1), soit en lignes droites menées par les divisions homologues des méridiens extrêmes. Le professeur Schmidt recommandait de diviser les méridiens elliptiques en parties égales avec le compas, pour déterminer chaque parallèle par points. Si l'on obtenait ainsi l'égalité des zones elliptiques et des fuseaux correspondants de la sphère, il n'en était plus de même pour les zones limitées par des parallèles, et ainsi l'égalité des surfaces n'était pas conservée; ce fut Mollweide qui eut le mérite de trouver la loi de l'espacement des droites destinées à représenter les parallèles de manière à satisfaire à cette condition.

Si l'on décrit (fig. 20) un cercle ABDE avec un rayon égal à $\sqrt{2}$, la surface de ce cercle sera égale à la moitié de la surface de la sphère; si ensuite on partage le diamètre AC en parties égales AI, IF, FG, GC, et que l'on trace des demi-ellipses telles que BFE ayant pour demi-axes BC et FC, en vertu de ce théorème que l'aire d'une ellipse est à l'aire décrite sur son grand axe dans le rapport du petit axe au grand axe, la surface du cercle ABDE sera partagée en autant de parties égales que le rayon AC, et chacune d'elles sera égale à la surface du fuseau correspondant de la sphère. Si l'on mène une corde HK on voit aussi que chaque segment limité par deux arcs elliptiques et par une partie de la corde HK, est au segment de cercle HBK dans le rapport de la partie MN de corde renfermée entre les arcs elliptiques, à la corde entière, et par conséquent dans le rapport de IF à AD, ce qui montre bien la possibilité de représenter les parallèles de la projection par des droites parallèles à l'équateur et qui seront, par conséquent, divisées comme lui en parties égales.

Il reste maintenant à rendre les parties du cercle ABDE comprises entre les cordes parallèles et le diamètre AD égales aux zones correspondantes de l'hémisphère.

Soit l'angle

$$\text{ACH} = \varphi; \quad \text{HL} = \sqrt{2}\cos\varphi; \quad \text{LC} = \sqrt{2}\sin\varphi.$$

Donc

$$\text{aire AHKD} = \text{triangle HCK} + 2\,\text{secteurs AHC} = 2\sin\varphi\cos\varphi + \sqrt{2}\varphi\sqrt{2} = \sin 2\varphi + 2\varphi.$$

(1) *Voir* 2e part., chap. XIV, 2°, Projection globulaire.

Soit μ la latitude du parallèle HK de la sphère; la zone sphérique comprise entre l'équateur et ce parallèle est égale à $\pi \sin \mu$; on aura donc pour déterminer φ l'équation

$$\sin 2\varphi + 2\varphi = \pi \sin \mu.$$

Mollweide est encore parvenu à la même équation en partant de l'équation différentielle qui exprime la condition de conservation des surfaces et faisant intervenir l'hypothèse des méridiens elliptiques.

Nous avons trouvé (§ 1) que, dans l'hypothèse de la terre sphérique, l'équation était

$$\frac{dy}{dl}\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt}\frac{dx}{dl} = \cos l.$$

Étudions la variation des coordonnées le long d'un méridien elliptique. L'équation des méridiens ayant pour axes $\sqrt{2}$ et $\frac{2t\sqrt{2}}{\pi}$ est

$$\frac{\pi^2 x^2}{8t^2} + \frac{y^2}{2} = 1, \quad \text{d'où} \quad x^2 = (2 - y^2)\frac{4t^2}{\pi^2}.$$

En considérant ces deux équations simultanément, on obtient immédiatement, pour déterminer y, l'équation

$$\frac{2}{\pi}\frac{dy}{dl}\sqrt{2 - y^2} = \cos l,$$

dans laquelle y n'est différentié que par rapport à l. En intégrant on a

$$y\sqrt{2 - y^2} + 2 \arcsin \frac{y}{\sqrt{2}} = \pi \sin l + A.$$

Comme, en vertu des conditions du problème, y et l disparaissent simultanément, il faut aussi que $A = 0$, et l'on a

$$y\sqrt{2 - y^2} + 2 \arcsin \frac{y}{\sqrt{2}} = \pi \sin l,$$

équation dans laquelle on devra évidemment prendre le plus petit de tous les arcs ayant pour sinus $\frac{y}{\sqrt{2}}$. Comme y ne dépend que de l, on en conclut que tous les points qui ont la même latitude sont situés sur une corde parallèle à l'axe des x.

Si l'on pose comme tout à l'heure

$$y = \sqrt{2} \sin \varphi,$$

l'équation se transforme en

$$\sin 2\varphi + 2\varphi = \pi \sin l$$

que nous avons déjà trouvée.

Cette équation est insoluble si l'on y regarde φ comme l'inconnue, mais on peut tourner la difficulté en la résolvant par rapport à l, et attribuant à φ des valeurs arbitraires ; il faudra pour cela la mettre sous la forme

$$\pi \sin l = 2\varphi \frac{180^\circ}{\pi} + \sin' 2\varphi.$$

On pourra ainsi construire une table renfermant en regard des valeurs de φ les valeurs de l correspondantes, et s'en servir de la même manière que d'une table de logarithmes pour trouver par interpolation les valeurs de φ qui correspondent à une valeur quelconque de l.

Mollweide a dressé ainsi une table qui permet de construire les parallèles de 10° en 10°, et M. Jules Bourdin a fait les mêmes calculs de 30′ en 30′. C'est cette dernière table que nous donnons plus loin (1). Elle nous a servi à construire le canevas de la projection n° XVI.

Nous ne nous sommes étendu si longuement sur les deux méthodes données par Mollweide que pour montrer qu'il est bien l'auteur de ce système appliqué seulement cinquante ans plus tard sous le patronage d'un nom plus populaire. Disons encore que le professeur allemand proposait d'adopter cette projection pour représenter, comme nous l'avons fait dans le planisphère n° XVI, la surface entière de la terre dans une ellipse dont l'un des axes est double de l'autre.

Mentionnons encore, avant de terminer le chapitre des projections équivalentes, le canevas indiqué par M. le capitaine Foucaut (2) comme se rapprochant du canevas homalographique de même dimension

$$y = \sqrt{\frac{\pi}{2(\pi+2)}}\, a(l + \sin l),$$

$$x = \sqrt{\frac{2(\pi+2)}{\pi}}\, at \frac{\cos l}{1+\cos l}.$$

(1) *Voir* 2e part., ch. VIII.

(2) Voir la note de la page 81.

CHAPITRE IV.

PROJECTIONS PERSPECTIVES.

1. Les projections perspectives représentent la surface d'une sphère comme la verrait un spectateur placé en un point déterminé de l'espace; la représentation de chaque point de la surface s'obtient par l'intersection du rayon visuel mené de l'œil à ce point, et d'un plan appelé *tableau*, perpendiculaire au rayon qui joint l'œil au centre; une ligne quelconque tracée sur la surface a de même pour projection perspective l'intersection du plan du tableau avec la surface conique dont cette ligne est la directrice et le point de vue le sommet.

La distance du tableau au centre du globe ne fixant que l'échelle de la carte, peut rester arbitraire; elle se détermine le plus souvent par de simples considérations de tracé graphique; mais de la position du point de vue dépendent la forme et les propriétés de la projection, de sorte que cette position varie suivant le but qu'on se propose.

Remarquons d'abord que, quand le point de vue est situé dans l'intérieur de la sphère (ce qui est le cas d'un observateur regardant la voûte céleste), c'est la surface intérieure de la sphère que l'on représente. Il en est encore de même lorsque le point de vue est sur cette surface ou à une petite distance; car, si l'on voulait représenter l'hémisphère antérieur, le rapprochement des rayons visuels dans le voisinage des tangentes extrêmes apporterait beaucoup de confusion dans le dessin et ne permettrait pas de représenter un hémisphère entier sans surcharger les bords de la carte. Mais dans le cas où l'œil est supposé à une distance du globe assez grande pour que les rayons visuels puissent être considérés comme parallèles, le même inconvénient n'existant plus, c'est la surface antérieure, celle que l'on voit réellement, qui doit être représentée.

L'une des principales propriétés de toute projection perspective, c'est que tout grand cercle passant par l'axe optique a pour projec-

tion un diamètre du cercle qui limite le tableau; les autres cercles ont pour perspectives des courbes du second degré, puisque ce sont les sections planes de cônes ayant tous des cercles pour directrices.

Nous allons nous occuper de tracer le canevas, c'est-à-dire les méridiens et les parallèles d'une projection perspective. Cherchons d'abord les formules qui permettent de calculer les coordonnées d'un point défini par sa latitude et sa longitude.

2. Nous supposerons, dans tout ce qui va suivre, que le plan de projection coïncide avec l'un des grands cercles de la sphère; dans le cas où il n'en serait pas ainsi, il suffirait, pour passer de ce plan fictif au plan réel auquel il est parallèle, de réduire toutes les lignes de la figure dans le rapport de la distance du point de vue au centre de la sphère, à la distance du point de vue au plan de projection. Enfin nous supposerons dans tout ce qui va suivre la terre sphérique, nous réservant d'indiquer, dans chaque système en particulier, la correction à faire pour tenir compte de l'aplatissement.

Le grand cercle de la sphère pris pour plan du tableau pourra être considéré comme l'horizon d'un lieu dont la latitude λ serait le complément de son inclinaison sur l'équateur ou de la distance du pôle à l'extrémité du diamètre passant par le point de vue.

Prenons pour plan de la figure celui du méridien PzH'z'H' qui contient le point de vue V et est, par conséquent, perpendiculaire au plan du tableau HTH'; nous supposerons les longitudes t comptées à partir de ce méridien, ce qui revient à ne considérer que les différences des longitudes de ce méridien et de tous ceux que l'on aura à construire sur la carte.

Prenons dans le plan du tableau deux axes de coordonnées, dont l'un sera l'intersection du méridien principal et du grand cercle de projection et dont l'autre passant par le centre C sera perpendiculaire au premier (fig. 21).

Appelons D la distance donnée CV du centre de la sphère au point de vue V, a le rayon de la sphère, x l'abscisse Cn, y l'ordonnée nm, δ la distance angulaire Mz, $90° - \lambda$ l'angle ZCP qui définit la position du tableau, $90° - l$ la distance polaire du point considéré M, t sa longitude ZPM, φ l'angle au zénith, MZP. Menons dans le plan ZCVM, MK parallèle à Cm et, par conséquent, perpendiculaire à CZ; les deux triangles semblables MKV, mCV donneront

$$\frac{Cm}{MK} = \frac{CV}{KV}.$$

Or

$$MK = a\sin\delta; \qquad KV = D + a\cos\delta,$$

donc

$$Cm = \frac{Da\sin\delta}{D + a\cos\delta}.$$

Le triangle Cmn donne

$$x = -Cm\cos\varphi; \qquad y = Cm\sin\varphi$$

Donc

$$x = -\frac{Da\sin\delta\cos\varphi}{D + a\cos\delta}; \qquad y = \frac{Da\sin\delta\sin\varphi}{D + a\cos\delta}.$$

Les coordonnées du point m se trouvent ainsi exprimées en fonction de φ et de δ; cherchons donc à exprimer φ et δ en fonction de la latitude l et de la longitude t.

Dans le triangle sphérique PzM, on a

$$\sin\delta\sin\varphi = \cos l\sin t$$

$$\sin\delta\cos\varphi = \frac{\sin l - \sin\lambda\cos\delta}{\cos\lambda}$$

$$\cos\delta = \sin\lambda\sin l + \cos\lambda\cos l\cos t,$$

d'où

$$\sin\delta\cos\varphi = \cos\lambda\sin l - \sin\lambda\cos l\cos t.$$

Substituons dans les valeurs de x et y; nous obtiendrons

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{Da(\sin\lambda\cos l\cos t - \cos\lambda\sin l)}{D + a(\cos\lambda\cos l\cos t + \sin\lambda\sin l)} \\ y &= \frac{Da\cos l\sin t}{D + a(\cos\lambda\cos l\cos t + \sin\lambda\sin l)} \end{aligned}\right\} \quad (I).$$

Telles sont les deux équations qui déterminent les coordonnées de la projection d'un point de la sphère défini par sa latitude et sa longitude.

Ces formules générales se modifient dans deux cas particuliers.

Si l'on suppose l'œil placé sur le prolongement de l'axe de la terre, le plan de projection coïncide avec l'équateur et la projection est dite *équatoriale* ou *polaire*. Nous obtiendrons alors les valeurs de x et de y en faisant $\lambda = 90°$ dans les formules (I) :

$$x = \frac{Da\cos l\cos t}{D + a\sin\lambda\sin l}; \qquad y = \frac{Da\cos l\sin t}{D + a\sin\lambda\sin l}.$$

Le pôle de l'hémisphère opposé au point de vue occupe alors le centre de la projection.

Si l'on suppose l'œil placé dans le plan de l'équateur, le plan de projection coïncide avec un méridien et la projection est dite *méridienne*. Nous obtiendrons alors les valeurs de x et de y en faisant $\lambda = 0$ dans les formules (I),

$$x = -\frac{Da\sin l}{D + a\cos l\cos t}; \qquad y = \frac{Da\cos l\sin t}{D + a\cos l\cos t}.$$

3. Revenons aux formules générales de la projection horizontale.

Pour obtenir autant de points que l'on voudra de l'équateur, on fera $l = 0$, et dans les formules résultantes

$$x = \frac{D\sin\lambda\cos t}{D + a\cos\lambda\cos t}, \qquad y = \frac{D\sin t}{D + a\cos\lambda\cos t},$$

on donnera successivement à t les valeurs 0°, 5°, 10°, 15°, etc.....

On obtiendra de même les intersections d'un parallèle de latitude donnée l avec les méridiens en donnant à t les valeurs 0°, 5°, 10°, 15°....., dans les formules générales où l conservera la valeur donnée. En opérant de même pour autant de valeurs de l que l'on voudra, puis réunissant par des courbes continues les points de même latitude, puis ceux de même longitude, on obtiendra les parallèles et les méridiens de la projection.

Comme ces courbes sont toutes du second degré, il est souvent plus commode et plus rapide de les tracer directement. Cherchons leurs équations.

Pour obtenir l'équation des méridiens, éliminons la latitude l entre les équations (I); cette élimination nous donnera l'équation d'une ellipse que nous pourrons construire.

Nous avons d'abord

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin t}{\sin\lambda\cos t - \cos\lambda\,\mathrm{tang}\,l},$$

d'où

$$\mathrm{tang}\,l = \frac{y\sin\lambda\cos t - x\sin t}{y\cos\lambda};$$

substituons à tang l cette valeur dans l'expression de y, nous obtiendrons

$$\left.\begin{aligned} &y^2(D^2 - D^2\sin^2\lambda\,.\,\sin^2 t - a^2\cos^2 t) + xy(a^2 - D^2)\sin\lambda\,\sin 2t \\ &+ x^2(D^2 - a^2\sin^2\lambda)\sin^2 t + Da^2 y\cos\lambda\sin 2t - a^2 Dx\sin 2\lambda\sin^2 t \\ &\qquad - a^2D^2\cos^2\lambda\sin^2 t = 0 \end{aligned}\right\} \text{(II)}.$$

Telle est l'équation la plus générale des méridiens. Il est facile de déterminer les deux axes 2A et 2B de cette ellipse ainsi que les coordonnées α et 6 du centre, respectivement parallèles à l'axe des x et des y. On obtient

$$A = \frac{aD}{\sqrt{D^2 - a^2(1 - \cos^2\lambda \sin^2 t)}}; \qquad B = \frac{aD^2 \cos\lambda \sin t}{D^2 - a^2(1 - \cos^2\lambda \sin^2 t)},$$

$$\alpha = \frac{Da^2 \sin 2\lambda \sin^2 t}{2[D^2 - a^2(1 - \cos^2\lambda \sin^2 t)]}; \qquad \beta = \frac{-Da^2 \cos\lambda \sin 2t}{2[D^2 - a^2(1 - \cos^2\lambda \sin^2 t)]},$$

et l'on trouve enfin, pour déterminer l'angle ω que fait le grand axe 2A avec l'axe des x, la formule

$$\operatorname{tang} 2\omega = \frac{\sin\lambda \sin 2t}{\cos^2 t - \sin^2\lambda \sin^2 t}$$

ou

$$\operatorname{tang}\omega = \sin\lambda \operatorname{tang} t.$$

Si l'on veut obtenir la courbe qui passe par les centres de toutes ces ellipses, il faut éliminer t entre les valeurs de α et de β :

$$\frac{\alpha}{\beta} = -\sin\lambda \operatorname{tang} t, \text{ d'où } \operatorname{tang} t = -\frac{\alpha}{\beta \sin\lambda}$$

ou

$$\sin^2 t = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2 \sin^2\lambda}.$$

En substituant à $\sin^2 t$ cette valeur dans l'expression de α, on obtiendra

$$\beta^2(D^2 - a^2)\sin^2\lambda + \alpha^2(D^2 - a^2\sin^2\lambda) - \alpha D a^2 \sin\lambda \cos\lambda = 0,$$

équation qui représente généralement une ellipse dont α et β sont les coordonnées rectangulaires et qui passe par le centre C de ces coordonnées.

Les coordonnées (α) et (β) du centre de cette courbe sont

$$(\alpha) = \frac{a^2 D \sin\lambda \cos\lambda}{2(D^2 - a^2\sin^2\lambda)}; \qquad (\beta) = 0;$$

ses demi-axes

$$(A) = \frac{a^2 D \sin\lambda \cos\lambda}{2(D^2 - a^2\sin^2\lambda)}; \qquad (B) = \frac{a^2 D \cos\lambda}{2\sqrt{(D^2 - a^2)(D^2 - a^2\sin^2\lambda)}}.$$

Le grand axe coïncide avec l'axe des x, l'angle (ω) est donc nul.

Cherchons maintenant l'équation des parallèles de la projection ; il suffira pour l'obtenir d'éliminer la longitude t entre les équations (I). Voici la suite des calculs :

$$\cos t = \frac{Dx + aD\cos\lambda\sin l + ax\sin\lambda\sin l}{aD\sin\lambda\cos l - ax\cos\lambda\cos l};$$

$$\frac{y}{x}\sin\lambda\cos l\cos t - \frac{y}{x}\cos\lambda\sin l = \cos l\sin t;$$

en élevant au carré

$$(y^2\sin^2\lambda\cos^2 l + x^2\cos^2 l)\cos^2 t - 2y^2\cos\lambda\sin\lambda\sin l\cos l\cos t - x^2\cos^2 l + y^2\cos^2\lambda\sin^2 l = 0.$$

En substituant dans cette équation la valeur de $\cos t$, on obtient, après réduction,

$$\left.\begin{aligned} &y^2(D\sin\lambda + a\sin l)^2 + x^2[D^2 + 2aD\sin\lambda\sin l - a^2\cos(\lambda - l)\cos(\lambda + l)] \\ &+ 2aDx(D\cos\lambda\sin l + a\sin\lambda\cos\lambda) - a^2D^2\sin(\lambda - l)\sin(\lambda + l) = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{(III)}.$$

Telle est l'équation la plus générale des parallèles : elle représente une ellipse, une hyperbole ou une parabole suivant que le terme

$$D^2 + 2aD\sin\lambda\sin l - a^2\cos(\lambda - l)\cos(\lambda + l)$$

est plus grand que zéro, plus petit que zéro, ou nul.

En appelant A′, B′ les demi-axes, α', β' les coordonnées du centre, on obtient

$$A' = \frac{aD\cos l(D\sin\lambda + a\sin l)}{D^2 + 2aD\sin\lambda\sin l + a^2\sin^2 l - a^2\cos^2\lambda};$$

$$B' = \frac{aD\cos l}{\sqrt{D^2 + 2aD\sin\lambda\sin l + a^2\sin^2 l - a^2\cos^2\lambda}};$$

$$\alpha' = -\frac{aD\cos\lambda(D\sin l + a\sin\lambda)}{D^2 + 2aD\sin\lambda\sin l + a^2\sin^2 l - a^2\cos\lambda};$$

$$\beta' = 0.$$

Comme le grand axe coïncide avec l'axe des x, l'angle ω' est nul ; ainsi les centres de toutes les projections des parallèles sont sur l'axe des x.

On obtiendra l'équation de la projection de l'équateur en faisant $l = 0$ dans l'équation (III), ce qui donnera

$$D^2y^2\sin^2\lambda + x^2(D^2 - a^2\cos^2\lambda) + 2a^2Dx\sin\lambda\cos\lambda - a^2D^2\sin^2\lambda = 0,$$

équation d'une ellipse dont les axes 2A″, 2B″ seront donnés par les formules

$$A'' = \frac{aD^2 \sin\lambda}{D^2 - a^2\cos^2\lambda}; \qquad B'' = \frac{aD}{\sqrt{D^2 - a^2\cos^2\lambda}},$$

et dont les coordonnées du centre seront

$$\alpha'' = -\frac{a^2 D \sin\lambda \cos\lambda}{D^2 - a^2\cos^2\lambda}; \qquad \beta'' = 0,$$

Pour avoir la distance de la projection p du pôle au centre de la carte, il suffira de faire $l = \pm 90°$ dans l'expression de α' et l'on obtiendra pour les deux pôles

$$p = -\frac{aD\cos\lambda}{D + a\sin\lambda}; \qquad p' = \frac{aD\cos\lambda}{D - a\sin\lambda}.$$

Les projections de ces deux points seront évidemment sur l'axe des x.

4. Dans le cas où l'équateur est pris pour plan de projection, les parallèles de la carte sont des cercles dont le rayon est égal à

$$\rho_p = \frac{Da\cos l}{D + a\sin l}.$$

On obtient cette formule en faisant $\lambda = 90°$ dans l'expression de A′.

Les méridiens sont des droites passant toutes par la projection du pôle et faisant entre elles les mêmes angles que les méridiens de la sphère ; c'est ce que montre l'équation (II) qui, dans l'hypothèse de $\lambda = 90$, devient

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tang} t.$$

La projection équatoriale est donc très-facile à construire sans le secours des coordonnées. Remarquons que dans ce cas, lorsque $D > a$, c'est-à-dire lorsque le point de vue est en dehors de la sphère, la projection peut être étendue au delà de l'équateur jusqu'au parallèle passant par le point où la tangente menée du point de vue touche le méridien PEP′E′ ; ce parallèle a une latitude l' donnée par la relation

$$\operatorname{tang} l' = \frac{a}{\sqrt{D^2 - a^2}},$$

et sa projection a pour rayon

$$\rho'_p = \frac{Da\cos l'}{D - a\sin l'}.$$

La figure 22 montre de suite les constructions à effectuer dans le cas de la projection équatoriale ou polaire. Sur le cercle de projection préalablement divisé en degrés, on comptera à partir du même point E les latitudes et les longitudes, et sur la ligne des pôles PP′ on portera CV égale à la distance D du point de vue : en joignant ce point V à chaque extrémité N des parallèles à construire, on aura de suite en n l'extrémité de la projection située sur le diamètre EE′, et l'on n'aura plus qu'à décrire du point C un cercle avec Cn pour rayon. Les méridiens seront les diamètres du cercle de projection.

5. Lorsque la projection est méridienne, c'est-à-dire faite sur le plan du méridien perpendiculaire à celui à partir duquel on compte les longitudes, quelques considérations graphiques permettent d'en simplifier aussi la construction.

Reprenons d'abord les formules que nous avons trouvées au § 2 :

$$x = -\frac{Da\sin l}{D + a\cos l\cos t}; \qquad y = \frac{Da\cos l\sin t}{D + a\cos l\cos t};$$

on en déduit

$$x = -\frac{y\,\mathrm{tang}\,l}{\sin t}.$$

Remarquons d'abord que pour les latitudes négatives les valeurs de x changent seules de signe, les valeurs de y restent les mêmes ; c'est l'inverse qui a lieu pour les longitudes négatives. Ce résultat pouvait être prévu, car la figure 23 est évidemment symétrique par rapport aux axes PP′ et RR′.

Les coordonnées x *et* y se construisent de la manière suivante :

Représentons le plan de projection par un cercle de rayon égal à a (fig. 24) ; menons deux diamètres PP′, RR′, dont l'un représente le premier méridien et dont l'autre figure l'équateur. Prolongeons PP′ et portons CV égale à la distance donnée D. Portons à partir de R sur la circonférence PRP′R′ supposée graduée, l'arc RM égal au complément $90° - t$ de la longitude donnée et joignons MV. Portons ensuite MA $= l$ et abaissons la perpendiculaire AY sur le rayon CM ; enfin, joignons VY; la distance Cy représentera l'ordonnée y. Joignons maintenant le point V au point A, et menons par y une parallèle $y\alpha$

à YA ; la distance ay représentera l'abscisse x. Pour obtenir la projection du point considéré nous n'aurons plus qu'à porter cette longueur ay sur une ligne ay perpendiculaire au rayon CR, le point a sera la projection cherchée.

En répétant cette construction pour plusieurs valeurs de l et de t, on pourra tracer les méridiens en réunissant les points qui ont même longitude, et les parallèles en joignant les points qui ont même latitude. Il est d'ailleurs facile de construire ces courbes par de simples considérations géométriques et sans recourir au calcul des coordonnées.

Le petit axe d'un parallèle quelconque s'obtiendra immédiatement en portant, à partir des extrémités du diamètre EE′ qui représente l'équateur, la latitude de ce parallèle de E en N et de E′ en N′, et en joignant ces deux points au point de vue V supposé rabattu sur le plan de projection; le milieu de nn' sera le centre de la courbe, et comme NN′ sera l'une de ses cordes, il sera facile de la construire par points. Cette courbe sera une ellipse, une hyperbole ou une parabole, suivant que le plan de projection coupera l'une seulement des nappes du cône perspectif, ou les deux nappes, ou sera parallèle à l'une des génératrices; c'est ce que la figure montrera immédiatement.

Pour tracer les méridiens on portera sur la circonférence de la carte (fig. 25), à partir de P d'un côté et de P′ de l'autre, la longitude du méridien considéré; en joignant ces points M, M′ au point de vue supposé rabattu sur la ligne des pôles, on obtiendra en m, m' l'un des deux axes de l'ellipse; comme PP′ est une corde commune, on construira facilement la courbe par points.

On peut encore obtenir de la manière suivante la projection d'un point donné par sa latitude et sa longitude.

Supposons (fig. 26) le plan du parallèle de latitude l rabattu sur le plan du premier méridien PEP′E′ en N′MN ; menons OM faisant avec PP′ un angle COM égal au complément de la longitude donnée, et abaissons la perpendiculaire Mμ sur NN′; cherchons la perspective de μM. Celle de μ s'obtient en μ_1, celle de M en M_1 ; $\mu_1 M_1$ est donc la longueur de la perspective de la demi-corde μM, et comme cette corde est parallèle au plan de projection et perpendiculaire au premier méridien, sa projection doit être perpendiculaire à PP′. Si donc nous supposons maintenant que le plan EPE′P′ représente le plan de projection, il suffira, pour avoir la projection de M, d'élever en μ, de part

et d'autre de PP', une perpendiculaire $\mu_1 m$ ou $\mu_1 m'$ égale à $\mu_1 M_1$; on obtiendra ainsi les projections des points qui ont pour latitude l et pour longitude, l'un t et l'autre $180° - t$.

Si l'on détermine ainsi pour chaque parallèle les points de même longitude, il suffira, pour tracer les méridiens, de faire passer par ces points des courbes continues.

6. Revenons maintenant au cas général de la projection horizontale où le plan de projection est un grand cercle quelconque de la sphère; nous allons montrer comment on peut obtenir graphiquement la projection d'un point quelconque sans recourir aux formules et aux calculs.

Soit AA (fig. 27) la ligne des pôles de la projection : sur le diamètre perpendiculaire CV on placera le point de vue à la distance donnée D; en tirant le diamètre PP' faisant avec AA' un angle égal à la latitude du lieu sur l'horizon duquel on veut tracer la projection, et joignant PV, P'V, on aura en p et p' les pôles de la carte, dont l'un sortira du cercle de projection. Les parallèles s'obtiendront en considérant d'abord, comme nous l'avons fait pour la projection méridienne, les traces de tous les parallèles de la sphère sur un plan perpendiculaire au plan de projection, c'est-à-dire sur le premier méridien qui passe par le point de vue, puis revenant de cette figure à celle de la projection par une simple rotation. On détermine ainsi de suite l'un des axes nn' de la courbe cherchée. Il est ensuite facile d'avoir la projection d'un point quelconque de ce parallèle correspondant à une longitude donnée t.

Supposons le parallèle rabattu sur le méridien de départ en N'MN; le point dont la longitude est t viendra en un point M tel que l'angle COM est égal au complément de l'angle t, soit $90° - t$. Abaissons la perpendiculaire Mμ sur NN'; cette perpendiculaire Mμ est en réalité parallèle au plan de projection dont la trace est ACA'; pour avoir sa perspective, nous joindrons d'abord μ et V, puis nous mènerons μM_1 égal à μM et parallèle à AA' et nous joindrons M_1 et V; $\mu_1 m_1$ sera la longueur de la perspective de μM; d'ailleurs μM étant, dans l'espace, perpendiculaire au plan ABA'B', sa perspective sera perpendiculaire à AA'; il suffira donc d'élever, en μ_1, $\mu_1 m$ perpendiculaire à AA' et égal à $\mu_1 m_1$; le point m sera la projection du point M dont la longitude est t et la latitude l.

Lorsque le parallèle rencontre l'axe AA', on a immédiatement deux points T,T' de sa projection en élevant TDT' perpendiculaire à

AA′ au point d'intersection ; car, si nous supposons d'abord que PE′P′E représente le premier méridien, le parallèle et le tableau étant tous deux perpendiculaires à ce plan, leur intersection sera perpendiculaire à AA′. Pour que ce cas se présente, il faut que la latitude du parallèle considéré soit moindre que le complément de la latitude du lieu sur l'horizon duquel on construit.

On voit de suite que la figure doit être symétrique par rapport à la ligne des pôles AA′ ; l'équateur passera par les trois points B, *e*, B′ ; *ee′* sera son petit axe.

Le parallèle qui, prolongé, passerait par le point de vue, sera seul représenté par une droite perpendiculaire à AA′ ; au delà les parallèles tourneront leur concavité en sens contraire.

Lorsqu'on aura déterminé, pour des latitudes suffisamment rapprochées, les lieux de même longitude, il suffira de les réunir par un trait continu pour tracer les méridiens qui devront être des ellipses.

7. Occupons-nous maintenant de déterminer la distance des deux points donnés par leurs projections.

Considérons d'abord le cas où l'un des deux points est au centre de la carte. En joignant ce point au second, on aura la perspective de la plus courte distance, puisque tout grand cercle qui passe par l'axe optique a pour projection perspective une ligne droite. Ainsi (fig. 28) C*a* est la perspective de la plus courte distance de C′ en A ; pour savoir ce qu'elle contient de degrés, on portera C*a* de C en α et l'on mènera la droite VαA ; le nombre de degrés contenus dans l'arc C′A sera celui qu'il s'agissait de trouver, parce que Cα est la projection de l'arc de grand cercle C′A.

On voit donc que l'échelle des plus courtes distances du centre de la carte à tous les autres points doit présenter une graduation semblable à celle que l'on effectue sur l'équateur des mappemondes construites sur le plan d'un méridien.

Arrivons maintenant au cas général. Soit d'abord MRN le plan de projection (fig. 29), V le point de vue, *a* et *b* les deux points donnés, projections des points A et B de la sphère. Si nous déterminons la longueur de la corde AB, il suffira de la porter sur la circonférence de la carte préalablement divisée en degrés et fractions de degrés pour lire l'arc sous-tendu et évaluer la distance soit en milles, soit en lieues ou en kilomètres. Nous allons donc chercher à construire sur la carte (fig. 30) le triangle AVB. Soient *a* et *b* les deux points donnés, MN un diamètre d'ailleurs quelconque que l'on pourra

prendre, pour simplifier, passant par l'un des deux points. Construisons les triangles rectangles aGV, bGV de la figure 29, en décrivant du centre C les arcs $a\alpha$, $b\beta$, portant sur une perpendiculaire au diamètre MN la longueur GV égale à la distance connue du point de vue au centre de la sphère, et joignant ce point V à α et à β. Si nous prolongeons ces droites Vα, Vβ jusqu'à la rencontre de la circonférence de la carte, les droites VA_1, VB_1 seront évidemment égales aux rayons visuels AV, BV de la figure 29. Nous pouvons alors construire le triangle abV de la figure 29 en décrivant de a et b avec des longueurs respectivement égales à αV et βV des arcs de cercle qui se composent en V_1; en prolongeant aV_1 d'une longueur Aa égale à $A_1\alpha$ et bV_1 d'une longueur bB égale à βB_1, on aura formé en ABV_1 le triangle AVB de l'espace; la droite AB sera la corde de l'arc qui mesurera la distance des deux points considérés.

Dans le cas de la projection méridienne on peut évaluer la distance de deux points d'une manière très-rapide et assez exacte lorsque les méridiens et les parallèles de la carte sont suffisamment rapprochés. Remarquons d'abord que si les deux points sont sur un même méridien, il suffit de lire sur la circonférence qui limite la carte la différence de graduation de leurs deux parallèles. S'il n'en est pas ainsi, on peut remplacer les deux points par deux autres semblablement placés par rapport au centre de la carte et se trouvant sur un même méridien; il suffit pour cela de découper un petit triangle de papier abC (fig. 31) et de le faire tourner autour du sommet C jusqu'à ce que les deux autres sommets se trouvent sur un autre méridien; ces deux nouveaux points étant évidemment à la même distance que les deux premiers, on n'aura plus qu'à lire la différence des latitudes de leurs deux parallèles. Au lieu du petit triangle de papier, on pourrait se servir d'un compas à trois branches que l'on ferait tourner autour de la pointe qui resterait en C.

8. Les formules et les constructions étant générales, on pourra supposer le point de vue à la distance que l'on voudra du centre de la sphère. Si ces deux points coïncident, la projection est dite *centrale* ou *gnomonique;* on suppose alors le plan de projection reculé jusqu'à la surface de la sphère à laquelle il devient tangent; tout grand cercle est représenté par une droite passant par le centre de la carte qui est le point de tangence du plan de projection et de la sphère. L'origine de cette projection, la plus ancienne que l'on connaisse, semble remonter au delà du Milésien *Thalès*, le prédicteur

d'éclipses, mort 548 ans avant notre ère. Appelé successivement des noms d'*horoscope* et d'*analemme*, elle fut aussi beaucoup employée par l'astronomie sous le nom de *gnomonique* pour esquisser la trace des phénomènes célestes à la surface de la terre, le baron de *Prony* proposa, en 1791, de s'en servir pour les cartes du cadastre. En 1803, Ch. T. *Reichard* fit paraître à Weimar un atlas de six cartes représentant le globe tout entier en projection centrale; ce sont les six faces d'un cube circonscrit à la sphère; il est évident en effet que les arcs terrestres étant représentés sur le plan de projection par leurs tangentes, l'arc de 90° excède toutes les limites possibles de ce plan, et que la projection du cercle entier exige au moins trois plans sur chacun desquels l'arc à projeter par sa tangente sera en moyenne de 60° de chaque côté du point de contact. Pour que ces trois plans se rencontrent sur la sphère dans tous ses aspects, il faut recourir au moins au tétraèdre, le plus simple de tous les solides terminés par des faces planes. Guidé par d'autres vues, *M. Élie de Beaumont* (1) a reconnu des avantages particuliers au choix des faces pentagonales d'un dodécaèdre régulier, et a publié comme spécimen une esquisse du pentagone européen, M. *Saint-Loup* a proposé de représenter la surface entière du globe sur les faces d'un icosaèdre régulier inscrit dans la sphère; on peut d'ailleurs employer un polyèdre quelconque, ainsi à Vienne le général *Franz* de *Hauslab* a proposé une projection centrale sur un polyèdre irrégulier de 48 faces triangulaires (2). Enfin, au chapitre des projections cylindriques, nous parlerons d'une projection centrale sur un cylindre tangent à la sphère le long d'un méridien. Nous reviendrons longuement sur ce système de représentation (3). Les projections n°s XXIV, XXV, XXVI en montrent l'application sous les trois aspects polaire, méridien et horizontal.

9. Lorsque le point de vue est sur la surface de la sphère, la projection prend le nom de *stéréographique*, et jouit de cette propriété bien remarquable que tout angle tracé sur la sphère conserve sa grandeur en projection (4), d'où il résulte que tout cercle a pour projection un autre cercle. Ce système, qui n'a reçu le nom de sté-

(1) *Notice sur les systèmes de montagnes*, Paris, 1852, 3 vol. in-18, p. 1038.
(2) Voir *Bulletin de la Société de Géologie de Paris*, janvier 1851, p. 185.
(3) *Voir* 2e part., chap. III.
(4) *Voir* ci-dessus, chap. II, § 4.

réographique qu'en 1613 du jésuite *François d'Aguillon*, fut imaginé 130 ans avant J.-C. par le célèbre *Hipparque*, qui lui donna le nom de *planisphère*, et commença à être très-employé en géographie au commencement du XVIe siècle ; il n'a cessé de l'être depuis, surtout en Allemagne, où il a dominé dans les publications d'ensemble et de détail (1) ; on l'a quelquefois désigné sous le nom d'*astrolabe de Gemma*.

Les projections nos I, II et III en montrent l'application sous les trois aspects polaire, méridien et horizontal.

10. Enfin, si le point de vue est supposé à une distance infinie, les rayons visuels peuvent être regardés comme parallèles, la perspective devient une véritable projection orthogonale et prend le nom d'*orthographique ;* il en résulte que tout cercle parallèle au plan de projection a pour représentation un cercle égal. Imaginé comme le précédent par Hipparque, ce système, appelé primitivement *analemme*, puis *astrolabe de Rojas* (1551), est resté exclusivement renfermé dans le domaine de l'astronomie jusqu'à l'atlas sphéroïdal de *Laguillermie* publié en 1843, et à l'atlas sphéroïdal et universel de *Garnier* publié en 1862. La projection n° XXVII en est une application sous l'aspect méridien.

11. Nous reviendrons en détail sur ces trois genres de projections perspectives. Disons de suite que la projection stéréographique a l'inconvénient de diminuer beaucoup les distances et par suite les surfaces situées au centre de la carte, tandis que les parties voisines des bords conservent à peu près leur véritable grandeur ; la projection orthographique, au contraire, conserve à peu près les distances au centre de la carte, mais diminue considérablement les parties voisines des bords. On conçoit donc qu'il ait dû venir à l'idée de trouver sur la perpendiculaire au plan du tableau un point de vue tel que les projections de points du globe également distants fussent elles-mêmes également espacées. Or si l'on appelle *ns* un certain nombre de divisions du méridien, *np* le même nombre de divisions correspondantes sur l'équateur et égales entre elles, on trouve

$$D = \frac{np \cos ns}{\sin ns - np}.$$

Cette valeur de D variant avec *ns*, c'est-à-dire avec *n*, prouve qu'il

(1) *Voir* plus loin, même chapitre, § 19.

n'y a pas de position pour le point de vue qui remplisse complétement le but que nous nous proposons d'atteindre.

Nous pouvons tout au moins chercher à satisfaire le mieux possible à la condition qu'on ne rencontre ni dans la projection stéréographique ni dans la projection orthographique. Reprenons l'expression générale d'un rayon de parallèle projeté, en fonction de la latitude et de la position du point de vue. Nous ayons trouvé

$$\rho_p = \frac{D a \cos l}{D + a \sin l} = \frac{a \cos l}{1 + \frac{a}{D} \sin l}.$$

Dans le cas de la projection stéréographique $D = a$

$$\rho'_p = \frac{a \cos l}{1 + \sin l} = a \operatorname{tang} \frac{90° - l}{2}.$$

Dans le cas de la projection orthographique $D = \infty$

$$\rho''_p = \frac{a \cos l}{1 + \frac{1}{\infty}} = a \cos l.$$

Dans ce dernier cas ρ varie trop peu lorsque l est voisin de 0; dans le cas précédent, la valeur du sinus qui entre au dénominateur non-seulement détruit cet inconvénient, mais encore lui substitue le défaut contraire, quoique dans une proportion moindre.

12. *La Hire*, qui s'est occupé le premier de cette question (1), a proposé de placer le point de vue de telle sorte que le rayon visuel mené au milieu de chaque quadrant de l'hémisphère opposé partage le rayon de la sphère perpendiculaire à l'axe optique en deux parties égales; l'erreur serait ainsi nulle au centre de la carte, à sa circonférence et au milieu de chaque rayon. Pour calculer la distance du centre au point de vue, on a alors l'égalité

$$\frac{\frac{a}{2}}{a \sin 45} = \frac{D}{D + a \sin 45°}.$$

(1) *Histoire de l'Académie des sciences, année MDCCI avec les mémoires de mathématiques et de physique*, Paris, 1704, in-4, p. 97 à 101 et 255 à 260; *Construction d'un nouvel astrolabe universel*, par M. DE LA HIRE, 3 décembre 1701.

d'où l'on tire facilement

$$D = a + a \sin 45°.$$

Ainsi, dans la projection de la Hire le point de vue est à une distance de la surface de l'hémisphère opposé à celui que l'on veut représenter, égale au sinus de 45° ou à la moitié du côté du carré inscrit. Si l'on cherche (fig. 32) quelle est la partie du rayon CP qui représente la projection de l'arc de 22° 30', lequel est le quart du quadrant, on trouve $0{,}248a$ au lieu de $0{,}250a$; l'erreur est donc de $\frac{2}{10000}$ du rayon, ce qui, dans une mappemonde d'un petit rayon, est peu considérable.

Dans le cas de la production sur le méridien dont la longitude est de 90°, les coordonnées d'un point défini par sa latitude et sa longitude se calculent par les formules

$$x = \frac{D \sin t \cos l}{D + a \cos t \cos l}; \qquad y = \frac{x \operatorname{tang} l}{\sin t} = x \operatorname{tang} \varphi,$$

dans lesquelles on devra remplacer D par $1{,}7071068\ a$ ou log D par $0{,}2322606 + \log a$.

Dans le cas de la projection polaire, c'est-à-dire sur l'équateur, les rayons des parallèles sont exprimés par

$$\rho_p = \frac{a \cos l}{1 + \dfrac{\sin l}{1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}}} = \frac{a \cos l}{1 + 0{,}585 \sin l},$$

ou environ

$$\rho_p = \frac{a \cos l}{1 + \frac{3}{5} \sin l}.$$

Enfin cette projection peut être faite sur l'horizon d'un lieu quelconque, et a été employée par son auteur à la construction de deux planisphères célestes sur le plan de l'écliptique.

La projection de la Hire n'a pas d'autre avantage que d'annuler les erreurs de représentation des longueurs en trois points des rayons de la circonférence de la carte. Quelques années avant la Hire divers géographes avaient cherché à obtenir la régularité de la représentation par divers expédients qui enlevaient à leurs projections le mé-

rite d'être perspectives. Le Père *Fournier* (1) proposait de représenter les méridiens par des ellipses équidistantes et les parallèles par des arcs de cercle passant à la fois par les divisions respectivement égales des méridiens extrêmes et du méridien moyen ; J. B. *Nicolosi* publiait à Rome en 1660 une série de grandes cartes suivant une projection analogue à celle du Père Fournier en traçant les méridiens en arcs de cercle comme les parallèles et les faisant passer par les divisions égales de l'équateur (2). Cette construction adoptée et préconisée en France par *Pierre du Val*, *Guillaume de l'Isle*, etc., est connue en Angleterre sous le nom de projection globulaire ou projection d'*Arrowsmith*, quoique ce dernier ne l'ait employée qu'en 1794, c'est-à-dire trente-quatre ans après son invention (3). Nous reviendrons (4) sur ce dernier système, que nous n'avons mentionné ici que parce qu'il est souvent, mais à tort, confondu avec la projection de la Hire.

13. Un an après que la Hire eut exposé son système à l'Académie, son confrère *Parent* calcula que les conditions seraient meilleures si l'éloignement de l'œil était un peu modifié (5).

Considérons l'un quelconque des grands cercles passant par le point de vue (soit l'équateur), et supposons-le divisé en parties infiniment petites égales; tirons des rayons visuels par chaque point de division, de manière à former sur le plan du tableau les perspectives de ces petits éléments. Si ces éléments projetés étaient parfaitement égaux, la somme de leurs différences serait nulle ; Parent fut ainsi porté à chercher parmi toutes les positions du point de vue celle qui donne la somme minimum de ces différences.

Soit (fig. 33) EAE′ l'équateur, PRP′ le méridien pris pour plan de projection; V le lieu de l'œil sur le diamètre CV perpendiculaire à ce

---

(1) *Hydrographie*, Paris 1647, p. 524, *voir* ci-dessus chap. III, p. 107.

(2) *Hercules siculus sive Studium geographicum, auctore J. B.* Nicolosio, *Hyblensi, sacerdote et sacræ theologiæ doctore*, Rome 1671, 2 vol. in-folio, édition latine de l'ouvrage publié en 1660 en italien.

(3) *Map of the World on a globular projection, by* A. Arrowsmith, Londres, 1er janvier 1794.

(4) *Voir* 2e partie, chap. XIV, 2°.

(5) *Histoire de l'Académie des sciences*, années MDCCII, Paris 1704, p. 70 à 72 de l'histoire ; *sur l'Astrolabe.* — *Essais et recherches de mathématiques et de physique*, par M. Parent, Paris 1713, 3 vol. in-12 ; t. II, p. 613 à 630 et 917 à 921 (additions). — *Mémoires de Trévoux*, juillet 1742, in-12, p. 1240 à 1250 : *De la situation de l'œil qui donne les représentations des parties égales de la sphère les plus égales qu'il soit possible, avec la manière de faire des mappemondes et des cartes géographiques sur ce principe, et d'y mesurer toutes sortes de distances.*

plan. Divisons le demi-cercle R'ER en parties infiniment petites égales, telles que AA' et menons des rayons visuels à tous ces points de division, nous obtiendrons leurs perspectives a, a', a''... La position du point V devra être telle que la somme de ces longueurs aa' soit la plus petite possible. Menons AX, A'X' perpendiculaires à EE', de manière à déterminer les coordonnées $AX = y$ et $CX = x$. Si nous nommons ds l'arc infiniment petit AA', et z la distance CA, XX' sera dx, et aa' sera Δz. Enfin tirons AB parallèle à VE', de manière à former le petit triangle rectangle ABA'.

Nous aurons d'abord, par les triangles semblables VaC, VAX

$$\frac{z}{y} = \frac{D}{D+x}; \qquad \text{d'où} \qquad z = \frac{D\sqrt{a^2-x^2}}{D+x}.$$

Calculons Δz en supposant la distance D constante,

$$\Delta z = \frac{a^2 + Dx}{(D+x)^2} \cdot \frac{D dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Or les triangles semblables CAX, ABA' donnent

$$\frac{AB}{AA'} = \frac{AX}{AC}; \qquad \text{d'où} \qquad dx = \frac{ds}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

Substituons cette valeur dans celle de Δz, il viendra

$$\Delta z = \frac{a^2 + Dx}{(D+x)^2} \cdot \frac{D ds}{a},$$

ou, en posant $D + x = u$

$$\Delta z = (a^2 + Du - D^2)\frac{D ds}{au^2}.$$

Or la somme des différences des éléments Δz est évidemment égale à la différence du plus grand (soit aa') au plus proche du centre C, augmentée de la différence de ce même aa' au plus proche du bord R. Cherchons donc quelle est, pour une même valeur de D. la plus grande ou la plus petite de toutes ces grandeurs Δz. Égalons pour cela la différentielle à zéro :

$$(-Du^2 - 2au^2 + 2D^2u)\frac{D\,du\,ds}{au^4} = 0;$$

d'où

$$u = D + x = \frac{2D^2 - 2a^2}{D};$$

d'où enfin

$$x = -\frac{2a^2}{D} + D.$$

Substituons cette valeur de x dans la valeur générale de Δz pour avoir l'expression de la plus grande ou de la moindre des projections des arcs ds; il viendra

$$aa' = \frac{D^3 ds}{4a(D^2 - r^2)}.$$

Pour avoir les deux autres éléments, il suffit, dans l'expression générale de Δz, de remplacer x d'abord par a, puis par 0 ; on obtient ainsi

$$(\Delta z)_a = \frac{D ds}{D + a} \qquad \text{et} \qquad (\Delta z)_0 = \frac{a ds}{D}.$$

Si nous retranchons la somme de ces deux éléments projetés du double de aa' et que nous égalions à zéro la différentielle prise par rapport à D, nous obtenons l'équation

$$D^6 - 3D^4a^2 + 4D^3a^3 - 6D^2a^4 + 2a^6 = 0,$$

qui doit nous donner la valeur de D.

En substituant à D la valeur a, le résultat est négatif; pour $D = 2a$ il est positif; la valeur cherchée de D est donc comprise entre a et $2a$. Pour $a\sqrt{2}$ le résultat est négatif; la racine est donc comprise entre $1{,}41\ a$ et $2\ a$; on voit de même qu'elle est comprise entre $1{,}59\ a$ et $1{,}60\ a$; si l'on prend $D = 1{,}595\ a$, l'erreur est moindre que la 200e partie du rayon, ce que Parent estime être assez juste pour la pratique.

En remplaçant D par cette valeur dans l'expression de l'asbcisse x de l'élément projeté maximum, on trouve que cet élément correspond à peu près au 70e degré à partir du point E ou au 20e à partir de R.

Si l'on cherche la valeur des parties les plus proches de R et de C, on trouve qu'elles ne diffèrent pas entre elles de plus de $\frac{1}{50}$ de la moindre. Enfin, si l'on cherche le point d'où ces éléments projetés seraient vus égaux, on trouve $D = 1{,}618\ a$, valeur qui ne diffère de celle adoptée par Parent que de $\frac{1}{43}$ du rayon.

La Hire, en prenant pour D la valeur $1{,}707\ a$ au lieu de $1{,}595\ a$, commettait une erreur qui est à peu près les $\frac{11}{100}$ du rayon, ou un peu plus de $\frac{1}{9}$, quantité très-appréciable dans les planisphères de grandeur ordinaire.

Si l'on voulait trouver la position de l'œil pour laquelle les éléments projetés paraissent aller tous en augmentant du centre vers la circonférence, et celle pour laquelle ces éléments paraissent aller tous en diminuant, il suffirait de supposer pour le premier cas $x = 0$ et D variable dans la valeur de x qui correspond à l'élément projeté maximum, ce qui donnerait

$$D = a\sqrt{2} = 1{,}414\ldots a;$$

pour le second cas on remplacerait x par a et l'on trouverait

$$D = 2a.$$

14. Au lieu de procéder comme nous venons de le faire, on peut chercher à rendre les représentations des parties égales de la sphère aussi égales que possible, de manière à répartir à peu près également l'erreur totale.

Or si l'on partage le rayon (fig. 34) en autant de parties égales que le quadrant EAR, que par les points de division on élève des perpendiculaires égales aux valeurs de Δz et qu'on joigne les extrémités par une courbe continue, on obtiendra, pour chaque valeur de D, une courbe différente et une ordonnée maximum aa' aussi différente. Soit $c_1a_1r_1$ l'une quelconque de ces courbes; comme la somme de toutes les ordonnées est constante et égale au rayon, si nous construisons une seconde courbe pour une autre valeur de D, ayant une ordonnée maximum moindre que aa', elle aura une plus petite courbure que la première, et l'on voit ainsi que celle qui possède la moindre de toutes les ordonnées maximum sera celle qui se rapprochera le plus d'une ligne droite. Si a_1a_1' était (ce que nous ne savons pas encore) l'ordonnée minimum de chaque courbe, on verrait de même que la courbe de moindre courbure correspond à la valeur de D qui donnerait la plus grande de toutes les ordonnées minimum aa'.

Cette valeur de D s'obtiendra donc en égalant à zéro la différentielle de la valeur de aa' considérée comme fonction de la variable D. On obtient ainsi

$$D = a\sqrt{3} = 1{,}732\ldots a.$$

Ainsi la distance du point de vue au centre est égale au côté du triangle équilatéral inscrit dans un grand cercle de la sphère.

Si l'on substitue cette valeur de D dans l'expression de aa', on obtient

$$aa' = \frac{3}{8} ds\sqrt{3} = 0{,}649 \ldots ds.$$

Si l'on fait la même substitution dans l'expression générale de Δz, puis qu'on y remplace x par a, on obtient pour l'élément projeté le plus près du centre C

$$(\Delta z)_a = \frac{ds\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = 0{,}634 \ldots ds,$$

et enfin en remplaçant x par 0, pour avoir l'élément le plus proche de R

$$(\Delta z)_0 = \frac{ds\sqrt{3}}{3} = 0{,}577 \ldots ds.$$

Ces trois valeurs montrent que aa' est la plus grande de toutes les projections Δz et non la moindre, et qu'elle ne surpasse la plus petite qui est en R que de $\frac{1}{9}$ de sa propre valeur. La valeur de x correspondant à cet élément maximum est

$$x = \frac{a\sqrt{3}}{3},$$

ce qui montre que cet élément est à peu près à 55° du point E.

Nous désignerons le système que nous venons d'exposer sous le nom de *seconde projection de Parent* pour le distinguer du précédent où la valeur de D est $1{,}595\ldots a$.

15. En 1825, un graveur de Londres, John *Lowry* (1), reprit la même question et chercha successivement les distances où il fallait placer le point de vue pour que les arcs de 5°, 10°, 15°..., 85° fussent représentés sur la carte par des parties proportionnelles du rayon; cela ne pouvant avoir lieu à la fois que pour un seul de ces arcs, Lowry obtint dix-sept déterminations successives du point de vue entre lesquelles il prit une moyenne; il trouva ainsi $1{,}69\,a$ pour la distance du point de vue au centre, nombre qui changerait si l'on faisait entrer dans le calcul des arcs plus petits; mais la différence

(1) Lacroix, *Précis du rapport verbal fait à l'Académie des sciences le 12 septembre 1825*, dans le *Bulletin de la Société de géographie*, cahier de septembre 1825, p. 127 à 130.

serait au-dessous de $\frac{a}{1000}$ si l'on prenait rigoureusement le milieu entre toutes celles qui correspondent aux différents points du quart de cercle.

En comparant par le calcul la graduation des cartes de Lowry avec celle qui résulte de la détermination de la Hire, on ne trouve que des différences insensibles, au moins dans les dimensions adoptés pour les cartes ordinaires ; il faudrait que le rayon fût de 1 mètre pour qu'il y eût quelques millimètres de différence entre les unes et les autres. On doit dire aussi que Lowry s'est rapproché encore de la Hire dans la note qu'il a communiquée à l'Académie, où il a adopté pour distance 1,70 a, tandis qu'en citant la Hire au bas de ses hémisphères construits sur l'horizon de Londres, il a mis 1,68 a qui n'est ni le résultat qu'il a obtenu ni celui de la Hire.

16. Les projections perspectives peuvent êtres étendues au delà d'un hémisphère, à l'exception de la projection centrale qui ne peut même représenter un hémisphère entier et de la projection orthographique qui ne pourrait être employée à plus de 90° du point central qu'à la condition de surcharger les bords de la carte. La question se présente lorsque l'on veut, par exemple, dresser une carte des étoiles visibles au-dessus de l'horizon d'un lieu, ou, en géographie, lorsque l'on veut embrasser d'un seul coup d'œil, pour des considérations de physique terrestre, l'ensemble des grands continents.

La projection stéréographique employée dans ce but altère beaucoup trop les distances sur les bords de la carte, puisque, dans une projection polaire, le degré d'un méridien à 109° du pôle est représenté par une longueur trois fois plus grande qu'au centre.

Pour chaque projection perspective dont le point de vue doit être situé à l'extérieur de la surface, la limite à laquelle elle peut être employée dépend de la distance du point de vue; elle est exprimée (fig. 35) par l'arc de grand cercle CAT compris entre l'extrémité c du diamètre passant par le point de vue et le cercle de contact de la sphère et du cône tangent. Cet arc φ est donné par la relation

$$\operatorname{tang}(180^\circ - \varphi) = \sqrt{\frac{D^2}{a^2} - 1}.$$

Si l'on voulait appliquer la méthode dont s'est servi Parent dans sa première projection pour représenter une portion plus grande qu'un hémisphère, portion mesurée par l'arc de grand cercle compris entre

le centre et la circonférence-limite de la carte, on suivrait la même méthode en remplaçant seulement la valeur de l'élément au bord de la carte par celle que prend cet élément à la limite donnée. On trouverait ainsi une valeur de D qui dépendrait de cette limite. Le reste du calcul et la construction s'achèveraient de même.

C'est ici le lieu de mentionner la projection du globe entier en quatre parties proposée par M. J. W. *Woolgar* en 1833. On projette la sphère par la méthode stéréographique sur les quatre faces d'une pyramide équilatère, afin qu'en représentant une portion de la surface moindre qu'un hémisphère, l'altération des distances vers les bords puisse être en partie évitée; en outre, chaque carte se relie aux autres par une partie commune. L'axe de la pyramide passe par la ligne des pôles, et le pôle sud touche la base de ce solide en son centre. La latitude des centres des trois autres faces est de 19° 28 16″, N., et le pôle N. se trouve sur la circonférence-limite de chacune d'elles, circonférence qui a pour rayon 70° 30′ au lieu de 90°; les longitudes de leurs centres diffèrent, par conséquent, de 120°. Sur chaque face l'échelle ne varie que dans le rapport de 1 à 1,5 au lieu de 1 à 2, comme dans la projection stéréographique d'un hémisphère.

17. Tout ce que nous avons dit sur le choix des points de vue dans les projections perspectives ne peut s'appliquer qu'à la graduation marquée sur le rayon des cartes; les quadrilatères compris entre les méridiens et les parallèles sont sensiblement agrandis sur les bords de la projection.

Parent (1) s'est aussi occupé de chercher quelle position on doit donner au point de vue sur un diamètre quelconque EE (fig. 36) pour que les zones égales en surface qui composent l'hémisphère opposé RER′, et qui ont EE′ pour axe soient représentées en perspective sur le grand cercle perpendiculaire à EV par d'autres zones égales entre elles.

Prenons un arc quelconque $AA' = ds$; nommons x l'ordonnée CX, z la distance Ca et D la distance CV. On aura

$$z = \frac{D\sqrt{a^2 - x^2}}{D + x}; \qquad aa' = \Delta z = \frac{a^2 + Dx}{(D + x)^2} \frac{Ddx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

(1) PARENT, *Essais et recherches de mathématiques et de physique*, t. II, p. 925-930, déjà cité.

La zone circulaire qui a Ca pour rayon et aa' pour largeur, et qui est la représentation de la zone sphérique qui a AN′ pour largeur et EV pour axe, a pour surface

$$2\pi z\,dz \qquad \text{ou} \qquad \frac{2\pi(a^2+\mathrm{D}x)}{(\mathrm{D}+x)^3}\,\mathrm{D}^2dx;$$

la zone sphérique correspondante a pour surface

$$2\pi a dx.$$

L'hypothèse que toutes les zones sphériques sont prises égales exige donc que tous les dx soient constants.

Posons $\mathrm{D}+x=u$; la valeur de la zone circulaire se change en

$$\frac{2\pi(a^2+\mathrm{D}u-\mathrm{D}^2)\,\mathrm{D}^2dx}{u^3},$$

dont la différentielle est

$$(\mathrm{D}u^3-3u^2a^2-3u^3\mathrm{D}+3u^2\mathrm{D}^2)\,\frac{\mathrm{D}^2du\,dx}{u^6},$$

qui, égalée àzéro, donne

$$-3a^2-2\mathrm{D}u+3\mathrm{D}^2=0,$$

d'où l'on déduit

$$x=\mathrm{CX}=\frac{1}{2}\mathrm{D}-\frac{3}{2}\frac{a^2}{\mathrm{D}}$$

pour l'abscisse correspondant à la zone maximum.

De plus, si dans l'expression générale de la valeur de la zone circulaire, on suppose $x=0$, il vient pour l'expression de la dernière zone vers le bord de la carte

$$\frac{2\pi a^2dx}{\mathrm{D}},$$

et, si l'on suppose $x=a$, la dernière zone vers le centre C est exprimée par

$$\frac{2\pi a\,\mathrm{D}^2dx}{(a+\mathrm{D})^2}.$$

Enfin, en remplaçant, dans l'expression générale, x par la valeur CX qui convient à la zone maximum, on obtient, pour l'expression de ce maximum,

$$\frac{8\pi\mathrm{D}^5dx}{(\mathrm{D}^2-a^2)27}.$$

Par le même raisonnement qui nous a guidé dans l'étude de la première projection de Parent, nous sommes conduit à retrancher

la somme des deux zones en C et R du double de la zone maximum, et à égaler la différentielle de cette quantité à zéro, en supposant que D soit la variable; nous obtenons ainsi l'équation

$$8D^8 - 121D^6a^2 + 162D^5a^3 - 81D^4a^4 + 54D^3a^5 - 81D^2a^6 + 27a^8 = 0.$$

Par des substitutions successives on trouve

$$D = 2{,}105\ldots a,$$

au lieu de 1,595..a que Parent avait trouvé en cherchant à rendre égales les projections d'arcs égaux, ce qui démontre une fois de plus qu'on ne peut conserver en même temps l'égalité des surfaces et celle des configurations.

En remplaçant D par cette valeur 2,105..a dans l'expression de l'abscisse x de l'élément projeté maximum, on trouve que cette zone correspond au 70e degré à partir de E; ainsi le maximum d'altération de distance et d'exagération a lieu au même point, à 70 degrés environ du centre de la projection.

18. En cherchant les deux zones les plus proches du bord R et du centre C, on trouve qu'elles ne diffèrent entre elles que de $\frac{1}{25}$ de la plus petite des deux à fort peu près, et que le point de l'axe EE' d'où ces deux zones seraient vues égales n'est éloigné du point V que de $\frac{1}{25}$ du rayon.

Nous avons encore à parler d'un autre système de projection perspective destiné à représenter les deux tiers environ d'une surface sphérique de manière que les configurations soient déformées le moins possible sans cependant que les surfaces extrêmes soient dilatées; c'est le système imaginé en 1857 par le colonel Henri *James*, directeur de l'*Ordnance survey*, et modifié plus tard par le capitaine A. R. *Clarke* du même service, qui adopte pour distance du point de vue au centre la valeur D = 1,36763 a au lieu de la valeur 1,50 a adoptée par le colonel James (1); mais comme quelques considérations préalables sur un certain groupe de projections (projections zénitales) dont les projections perspectives font elles-même partie, nous sont nécessaires pour aborder ce sujet, nous en renvoyons l'étude au chapitre suivant (2).

---

(1) *On projections for maps applying to a very large extent of the Earth's surface, by colonel sir H.* James, *and captain A. R.* Clarke; *communicated by the authors,* dans le *Philosophical Magazine,* cahier d'avril 1865, p. 306 à 312.

(2) *Voir* chap. V, § 9.

19. Avant de terminer ce chapitre, disons un mot des cartes géographiques particulières construites en projection perspective. La projection stéréographique est peu employée dans ce cas; il n'y a guère que les Allemands qui s'en soient servis, et particulièrement *Hass* (Leipsick, 1717), qui a composé la plus grande partie des cartes de l'atlas de *Homann*, fort répandu vers le milieu du siècle passé; les quatre parties du monde représentées isolément dans cette projection ne sont que des portions d'une mappemonde construite avec de plus grandes dimensions sur le plan du méridien perpendiculaire à celui qui passe par le milieu de la carte et qui contient le point de vue. La longueur excessive des rayons des cercles exigeant l'emploi des formules pour la construction par points fait perdre l'avantage du tracé d'arcs de cercle, et rend cette projection inférieure sous tous les rapports aux projections perspectives qui, en plaçant le point de vue hors du globe, diminuent l'inégalité des espaces. La distance à laquelle il conviendra de placer ce point de vue sur le diamètre passant par le centre du pays à représenter dépendra de l'étendue de ce pays, diminuera à mesure que cette étendue deviendra plus petite, et pourra se calculer aisément en comparant le degré sur les bords de la carte avec celui qui se trouve au milieu. Le procédé de calcul sera d'ailleurs identique à celui qu'a donné Parent pour sa première projection d'un hémisphère.

Lorsque l'échelle de la carte à construire sera suffisamment grande pour rendre appréciable la différence entre les degrés réels de la terre sphéroïde et les degrés d'une sphère ayant pour rayon celui de l'équateur, on tiendra compte de l'aplatissement par la méthode de Prony que nous avons exposée (1), et l'on cherchera le rayon de la sphère qui s'adapte le mieux à la courbure du sphéroïde terrestre dans le voisinage du centre de figure du pays dont on veut dresser la carte. A l'aide des nouveaux degrés calculés d'après cette méthode, on déterminera la distance du point de vue au centre de cette sphère, et la construction s'achèvera soit par coordonnées, soit par le tracé des ellipses, comme nous l'avons indiqué précédemment.

20. Nous avons vu que les projections perpective ne diffèrent les unes des autres que par la position du point de vue. Il en résulte un moyen facile de passer d'une projection perspective à une autre ayant même plan de projection et par conséquent même centre.

(1) *Voir* ci-dessus, chap. 1, § 4, p. 11.

Soit en effet (fig. 37) *m* la projection d'un point M de la sphère dans un premier tracé perspectif dont OV représente la distance D du point de vue au centre de la sphère; on demande la projection du même point M sur le même horizon dans un second tracé dont OV′ représente la distance D′ correspondante à D.

Joignons le point *m* au centre O de la projection, élevons OV perpendiculaire sur *om* et portons la distance D de O en V. Si nous joignons V*m*, l'arc MA compris entre les droites V*m* et VO prolongées sera l'arc de grand cercle qui a pour projection *om*. Si donc nous portons la seconde distance D′ de O en V′, en joignant le point M au point V′, l'intersection *m′* de cette droite avec le rayon *om* sera la projection de M dans le second tracé.

Il suffira donc, pour passer du premier système au second, de mener dans chacun d'eux des rayons vecteurs faisant respectivement les mêmes angles avec un axe fixe, le méridien du centre, par exemple, et de porter, sur ceux du second système, les longueurs telles que *om′* déterminées dans le premier. On déterminera ainsi, à l'aide d'autant de points que l'on voudra, les méridiens, les parallèles et en général toute courbe tracée sur la projection *type*. Nous verrons dans le chapitre suivant qu'il est souvent avantageux de construire d'abord un canevas *type* pour obtenir ensuite, par la méthode que nous venons d'exposer, le canevas définitif dont le tracé direct aurait été plus difficile à obtenir.

CHAPITRE V.

PROJECTIONS ZÉNITHALES.

1. Nous avons vu que lorsqu'une projection perspective est faite sur le plan de l'équateur les parallèles sont représentés par des cercles ayant tous pour centre la projection du pôle et les méridiens par des diamètres de l'équateur. Il n'en est plus de même lorsqu'on prend pour centre de la carte un point quelconque de la surface de la sphère, et pour plan de projection l'horizon de ce lieu. Mais si, au lieu de considérer les méridiens et les parallèles, on imagine une suite de plans perpendiculaires au diamètre de la sphère qui passe par ce lieu et d'autres perpendiculaires aux premiers et passant tous par ce diamètre, on recomposera un système de coordonnées sphériques semblable à celui auquel on rapporte tout point de la sphère terrestre : les parallèles seront remplacés par des almicantarats et les méridiens par des cercles azimutaux. La projection sera en tout semblable à la projection équatoriale; les almicantarats seront figurés par des cercles décrits autour du point central considéré, et les verticaux d'azimuts égaux par des diamètres de l'horizon de ce lieu également inclinés les uns sur les autres.

Les projections perspectives ne sont pas les seules à jouir de la propriété de conserver les azimuts autour du point central et de représenter des distances égales de ce point aux autres points de la sphère par des distances égales entre elles sur la projection, et par conséquent toujours faciles à mesurer. Nous avons déjà été conduits à étudier un certain nombre d'autres systèmes, tels que la projection isosphérique isomère de Lambert (1), dans lesquels la loi de représentation reste la même dans toutes les directions partant du point central de la carte. Nous les désignerons tous sous le nom de

(1) *Voir* chap. III, § 14.

projections zénithales parce qu'ils peuvent toujours être considérés comme la représentation de l'hémisphère situé au-dessus de l'horizon du lieu et ayant le zénith pour pôle.

2. Dans ces différents systèmes il suffit de connaître la loi suivant laquelle varient les rayons des almicantarats d'un point quelconque de la surface, et il est inutile de s'embarrasser des considérations de la place du pôle et de la forme des courbes qui représentent les méridiens et les parallèles ; une simple transformation de coordonnées sphériques permettra d'obtenir les intersections de ces deux systèmes de courbes, c'est-à-dire de calculer les nouvelles coordonnées en fonction des longitudes t et des latitudes l supposées connues.

Soit P le pôle (fig. 38), HPCH' le méridien du lieu C sur l'horizon duquel on veut faire la projection et qui doit occuper le centre de la carte ; nous supposerons les longitudes comptées à l'est et à l'ouest de ce méridien, ce qui revient à ne considérer que les différences entre les longitudes réelles et la longitude du centre C. Soit λ sa latitude, A un lieu de la terre dont on connaît la longitude t et la latitude l. Si nous supposons menés les grands cercles PA, CA, nous formerons le triangle sphérique PCA dans lequel nous connaîtrons le côté $PC = 90° - \lambda$, le côté $PA = 90° - l$ et l'angle en P égal à la longitude t comptée à partir du méridien PCH' ; il s'agit de trouver le côté CA qui mesure la plus courte distance θ des deux points C et A sur la sphère de l'azimut PCA que nous appellerons z.

La trigonométrie sphérique permet de calculer θ et z par les formules suivantes :

$$\cos\theta = \frac{\sin(l+\varphi)}{\cos\varphi}\sin\lambda \qquad \text{et} \qquad \sin z = \frac{\sin t}{\sin\theta}\cos l,$$

dans lesquelles l'angle auxiliaire φ est donné par la relation

$$\operatorname{tang}\varphi = \cos t \operatorname{cotang}\lambda.$$

Dans le cas où le centre de la carte est pris sur l'équateur, λ est égal à zéro et les formules se transforment en

$$\cos\theta = \cos t \cos l \qquad \text{et} \qquad \operatorname{tang} z = \sin t \operatorname{cotang} l.$$

Ainsi, pour chaque lieu dont on connaît la latitude et la longitude, on pourra calculer θ et z ; comme d'ailleurs on connaît la loi

$$\rho = F(\theta),$$

qui exprime le rayon ρ de chaque almicantarat en fonction de l'arc correspondant θ, il sera très-facile de placer sur la carte la projection du point donné A. Lambert (1) a proposé l'emploi simultané d'une table contenant les valeurs calculées de z et θ pour des valeurs données de l et t, et d'une règle pouvant tourner autour du centre de la projection et divisée à partir de ce point d'après la loi $\rho = F(\theta)$ qui définit le système que l'on veut tracer. Pour pouvoir mesurer immédiatement les angles de la règle avec le diamètre PC qui représente le méridien du centre (fig. 39), on divise la circonférence de la carte en degrés et fractions à partir de l'extrémité de ce diamètre. Pour un point quelconque A (l et t), on lit dans la table les valeurs de z et θ; en faisant tourner la règle jusqu'à ce qu'elle fasse avec le diamètre PC, cet angle z, le point qui indique sur la règle la valeur de θ sera le point A cherché.

Sans recourir nécessairement à l'emploi de la règle, on voit qu'il suffira de dresser une seconde table donnant les valeurs de ρ pour chaque valeur de θ et de porter ces valeurs de ρ à partir du centre C sur les diamètres faisant avec le méridien PC les angles correspondants z donnés par la première table.

On voit que la figure sera symétrique par rapport au méridien PC du centre, et lorsque ce centre sera pris sur l'équateur elle sera aussi symétrique par rapport à l'équateur. Dans ce cas, quelle que soit la projection zénithale que l'on considère, le méridien central et l'équateur sont divisés de la même manière et le méridien limitant l'hémisphère est divisé en arcs égaux ; les parallèles coupent à angles droits le méridien central, et les méridiens coupent à angles droits l'équateur.

On pourra aussi, pour plus d'exactitude, placer chaque point par ses coordonnées rectangulaires calculées à l'aide des formules

$$x = \rho \sin z; \qquad y = \rho \cos z.$$

Nous reproduisons table IV, les tables calculées par Lambert, pour le cas où $\lambda = 0$, c'est-à-dire où le centre de la carte est pris sur l'équateur (2).

---

(1) *Beytrage zum Gebrauche der Mathematik durch* LAMBERT, Berlin 1772, in-8, t. III, p. 174.

(2) Dans les tables données par Lambert et reproduites par *J. Tobias* MAYER (*Vollständige und gründliche Anweisung zur Verzeichnung der Land-See-und Himmelscharten*, Erlang 1794 (4e édit., 1828), in-8, § 50), ce n'est pas l'angle z qui est donné, mais son complément $90° - z$.

3. Lorsque, dans le tracé des méridiens et des parallèles, on ne tient pas à une exactitude mathématique, la remarque suivante permet de construire les projections de ces courbes d'une manière beaucoup plus simple.

Si, sur deux projections différentes ayant pour centre la projection d'un même point de la surface sphérique, on trace (d'après les lois $\rho = F(\theta)$ et $\rho' = F'(\theta)$ de ces deux projections) les almicantarats et les rayons représentant les mêmes petits cercles et les mêmes plans verticaux de la sphère, toutes les intersections des méridiens et des parallèles occuperont, par rapport aux cercles et aux rayons dont nous venons de parler, les mêmes places sur l'une et l'autre projection.

Si donc nous possédons une projection sur laquelle soient tracés les méridiens et les parallèles de 10° en 10°, par exemple, ainsi que les almicantarats et les verticaux aussi de 10° en 10°, pour toute autre projection définie par la formule $\rho = F(\theta)$, nous n'aurons qu'à tracer, avec les rayons des almicantarats de 10 en 10°, c'est-à-dire avec les valeurs de $F(\theta)$ résultant des valeurs de θ de 10° en 10°, des cercles concentriques que nous couperons ensuite par des rayons également espacés; nous pourrons alors placer sur ces rayons et ces cercles les intersections des méridiens et des parallèles de la même manière qu'elles le sont dans la première projection.

Parmi toutes les projections qui peuvent servir de canevas *type* pour tracer les autres, l'une des plus commodes est la projection stéréographique sur l'horizon du lieu qui doit servir de centre, parce que les méridiens et les parallèles y sont des cercles qui se tracent avec la plus grande facilité (1). On y décrira, du centre, des cercles de rayons égaux à $a \operatorname{tang} \frac{10^\circ}{2}$, $a \operatorname{tang} \frac{20^\circ}{2}$, etc., et l'on tracera des rayons inclinés de 10 degrés; cette projection pourra alors être employée pour déterminer les intersections des méridiens et des parallèles sur une projection quelconque à almicantarats concentriques et circulaires décrits autour du même centre d'après une loi connue.

Ce procédé très-rapide n'est d'une exactitude suffisante que lorsque l'échelle de la carte à tracer est très-petite; mais il est possible d'obtenir une exactitude beaucoup plus grande en déterminant d'abord

(1) *Voir* 2e part., chap. I, Projection stéréographique.

pour autant de points que l'on veut de la projection *type* le nombre de degrés et minutes contenus dans l'arc de grand cercle qui joint chacun de ces points au point central, puis faisant sur chacune de ces valeurs la construction ou le calcul indiqué par l'équation $\rho = F(\theta)$ de la projection que l'on veut obtenir.

Soit M_1 (fig. 40) un point quelconque de la projection type, que nous supposerons stéréographique; O_1 le centre du tracé, lequel sera reporté en O sur la carte zénithale à construire; $\pi_1\pi_1'$ le méridien du point O_1 représente par la droite $\pi\pi'$ sur la projection zénithale; si nous supposons la projection stéréographique construite sur un grand cercle de la sphère, le rayon $O_1\pi_1'$ de la circonférence qui limite un hémisphère sera le rayon de la sphère. Si l'on fait au point O de la carte l'angle πOM égal à l'angle $\pi_1O_1M_1$, le point cherché M qui correspond à M_1 est situé sur la droite OM; et si l'on connaissait l'arc de grand cercle θ qui, sur la sphère, joint les deux points dont les projections sont O et M, la position de ce ponit M serait entièrement déterminée puisque la distance $\rho = F(\theta)$ pourra toujours se déduire de l'arc θ. Pour trouver cet arc, il suffira de mener un diamètre AB perpendiculaire sur le rayon O_1M_1 et de joindre A_1M_1 que l'on prolongera jusqu'à la circonférence de l'hémisphère; l'arc $B\mu$ sera l'arc cherché, on le mesurera en degrés et minutes en portant une ouverture de compas égale à la corde $B\mu$ sur cette circonférence ou sur une égale que l'on aura divisée en degrés et fractions.

On abrégera beaucoup cette méthode s'il s'agit de construire un grand nombre de points de la projection zénithale, par exemple les points d'intersection des parallèles et des méridiens de 5 en 5, ou de 10 en 10 degrés, en remarquant que l'arc $B\mu$ ne dépend que de la distance O_1M_1. On pourra donc décrire (fig. 41), avec un rayon CA égal au rayon de la sphère, une demi-circonférence, mener un diamètre BA et un rayon CD perpendiculaire, diviser ce dernier en parties égales suffisamment petites, joindre les points de division au point A et prolonger ces droites jusqu'à la rencontre de l'arc BD préalablement divisé en degrés et fractions de degrés à partir du point B. Cela posé, si l'on porte de C en K' une longueur O_1M_1 prise sur la projection stéréographique, on trouvera sur-le-champ la longueur BK de l'arc correspondant avec une approximation d'autant plus grande qu'on aura multiplié davantage le nombre des parties dans lesquelles le rayon CD est divisé.

On pourrait aussi construire comme projection type une projection

orthographique ; mais les méridiens et les parallèles étant des ellipses plus difficiles à construire que les cercles de la projection stéréographique, le travail préparatoire serait plus grand et plus sujet à erreurs. Si cependant on avait déjà une projection orthographique sur l'horizon du lieu que l'on veut prendre pour centre, il suffirait pour dresser l'échelle graphique qui donnera les valeurs de l'arc θ, de décrire (fig. 42) avec le rayon de la sphère un quart de circonférence, de partager l'un des rayons CD en autant de parties égales que l'on voudra et d'élever des perpendiculaires jusqu'à la rencontre du quadrant ; les arcs BK seraient les valeurs de θ correspondantes aux rayons vecteurs de la projection orthographique qui auraient CK′ pour longueur.

Quelle que soit la projection auxiliaire que l'on emploiera, on pourra obtenir, non-seulement les projections des méridiens et des parallèles à l'aide de leurs intersections, mais encore la projection d'un cercle ou d'une courbe quelconque dont on connaîtra déjà la représentation sur un canevas auxiliaire.

4. Nous allons dire quelques mots des diverses projections zénithales dont plusieurs ont déjà été indiquées. Nous avons dit que chaque système était défini par la forme de la fonction $F(\theta)$ qui détermine, pour chaque valeur de θ, le rayon ρ de chaque almicantarat. On peut donc imaginer autant de systèmes différents que l'on veut et assujettir la projection à remplir une certaine condition qui déterminera la forme de la fonction F.

Nous avons déjà étudié les projections perspectives pour lesquelles

$$\rho = \frac{a\,D \sin\theta}{D + a\cos\theta},$$

formule dans laquelle D représente la distance du point de vue au plan de projection supposé mené par le centre de la sphère perpendiculairement au diamètre qui passe par le point de vue. Nous avons indiqué au § 20 du chapitre IV la construction qui permettra de tracer les méridiens et les parallèles à l'aide d'un canevas *type* tel que la projection stéréographique sans avoir besoin de connaître les valeurs de l'arc θ pour les points que l'on voudra reporter.

5. Revenons à la formule générale

$$\rho = F(\theta).$$

La forme la plus simple que nous puissions donner à ρ est évidemment

$$\rho = 0;$$

le rayon de chaque almicantarat est égal à l'arc de grand cercle qui, sur la sphère, joint le centre de la surface à représenter au petit cercle correspondant, les distances de ce centre aux différents points de la carte sont ainsi représentées en véritable grandeur. Si le pôle lui-même est pris pour centre, les parallèles de la projection ont pour rayons les différentes valeurs de

$$a(90^\circ - l)\frac{\pi}{180}.$$

Cette projection, imaginée par *Guillaume Postel* (de Dolérie près Avranches) qui ne l'employa que sous l'aspect polaire dans la mappemonde publiée en 1581 (1), fut étudiée comme projection zénithale d'abord par Lambert en 1772 (2), puis avec plus de détails, en 1799, c'est-à-dire vingt-sept ans après, par *Antonio Cagnoli*, membre de la Société italienne, qui crut l'avoir inventée et lui donna son nom (3); nous la désignerons sous le nom de *projection zénithale équidistante.*

Il est facile de voir que, tant que la valeur de θ n'excède pas 30°, les degrés des almicantarats sont peu altérés et conservent par conséquent à peu près leur véritable rapport avec ceux qui mesurent leur distance au centre de la projection.

Exprimons les rayons de la sphère et des différents cercles en degrés : nous pourrons écrire (fig. 43)

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{90}{57,29};$$

or

$$ef = AB \sin\theta \qquad \text{et} \qquad \frac{e'f'}{A'B'} = \frac{\theta}{90};$$

donc

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{90}{57,29} = \frac{90e'f'}{\theta} = \frac{ef}{\sin\theta};$$

(1) *Polo aptata nova charta universi, auth.* Guil° Postello. *Voir* au dépôt de la marine l'édition de 1621.

(2) Lambert, § 99, p. 179.

(3) A. Cagnoli, *Della più esalta costruzzione delle carte geografiche* (dans les *Memorie di Mathematica e Fisica della Societa Italiana*, t. VIII, Modène 1799, in-4, p. 658 à 664.

d'où

$$\frac{e'f'}{ef} = \frac{\theta}{57{,}29\sin\theta}.$$

Ce rapport tend vers l'unité lorsque θ diminue; quand θ est égal à 30°, ce rapport est égal à $\frac{60}{57{,}29}$, ce qui montre que les degrés de la projection sont un peu plus petits que ceux qui leur correspondent sur la sphère, mais en diffèrent très-peu. Si donc on n'étend pas cette projection à plus de 30 degrés du centre, on pourra considérer les distances perpendiculaires aux directions centrales comme conservées aussi bien que les distances le long de ces directions, et dresser une échelle de parties égales suffisante pour de petites distances.

Lorsque le point central est pris sur l'équateur, les degrés sont conservés sur la ligne des pôles et sur l'équateur ; et, sur la circonférence qui limite un hémisphère, ils sont aussi égaux entre eux ; mais les parallèles et les méridiens ne sont ni des ellipses comme dans les projections perspectives de la Hire et de Parent, ni des arcs de cercle comme dans la projection dite *globulaire* dont nous parlerons plus tard (1), et avec laquelle on a confondu à tort la projection zénithale équidistante.

Sous l'aspect polaire elle est très-employée pour les cartes célestes, et, au *bureau des longitudes*, pour les cartes des éclipses publiées chaque année dans la *Connaissance des temps*. Les projections nos XXVIII, XXIX et XXX représentent un hémisphère sous les trois aspects polaire, méridien et horizontal.

6. Si nous prenions pour plan de projection, dans la sphère stéréographique, non plus un grand cercle, mais le plan tangent à la sphère à l'extrémité du diamètre dont l'autre extrémité est le point de vue (2), nous aurions, pour exprimer les rayons des almicantarats,

$$\rho = 2\tang\frac{\theta}{2}.$$

D'un autre côté, la projection zénithale équidistante peut se représenter par la formule

(1) *Voir* 2e part., ch. XIV, 2°.

(2) C'est ce qu'il faut faire lorsque l'on veut éviter l'altération au centre de la carte et la reporter sur les bords, car les degrés au centre se trouvent alors conservés, tandis qu'à 90° ils sont presque doublés.

$$\rho = \theta = \infty . \operatorname{tang} \frac{\theta}{\infty}.$$

Le premier système a l'avantage de ne pas altérer les angles, et le second d'exagérer les surfaces beaucoup moins que le premier. Si donc on considère des systèmes ayant des formules analogues et en quelque sorte intermédiaires, telles que

$$\rho = 3 \operatorname{tang} \frac{\theta}{3}, \qquad \rho = 4 \operatorname{tang} \frac{\theta}{4} \ldots\ldots,$$

dans chacun d'eux il y aura déformation, mais aussi l'exagération sera moindre que dans la projection stéréographique.

7. Nous avons déjà parlé (1) d'une projection zénithale qui possède la propriété très-importante de conserver les surfaces dans leur véritable grandeur. On arrive directement à sa formule en exprimant que les zones formées sur la sphère par les almicantarats sont respectivement égales aux surfaces qui les représentent :

$$2\pi a^2(1 - \cos\theta) = \pi\rho^2,$$

d'où l'on déduit immédiatement

$$\rho = 2a \sin \frac{\theta}{2};$$

le rayon de chaque almicantarat est donc égal à la corde de l'arc vertical correspondant.

Nous reviendrons longuement sur ce système, l'un des plus importants à cause de ses propriétés.

8. Nous allons maintenant parler d'un nouveau système imaginé par l'astronome anglais *Airy*, qui lui a donné le nom de *Projection by Balance of Errors* (2).

Nous avons déjà dit que toutes les cartes, quel que fût leur système de projection, étaient entachées de l'une au moins des deux erreurs, exagération des surfaces et déformation ; nous allons nous occuper d'évaluer ces deux erreurs dans les projections zénithales en suivant la méthode imaginée par M. *Airy*.

---

(1) *Voir* chap. III, § 14, et 2e part., chap. IX, Projection équivalente zénithale de Lambert.

(2) *Explanation of a projection by Balance of Errors for maps applying to a very large extent of the Earth's surface; and comparison of this projection with other projections, by* G. B. Airy, *esq. astronomer royal : communicated by the author*; dans le *Philosophical Magazine*, cahier de décembre 1861, p. 409 à 421.

Supposons pour cela la surface sphérique décomposée en une infinité de petits rectangles formés par les arcs de deux almicantarats et de deux cercles azimutaux infiniment voisins ; la carte sera de même décomposée en une infinité de petits rectangles curvilignes compris entre deux circonférences et deux rayons infiniment voisins ; chaque rectangle de la sphère aura ainsi son correspondant sur la carte. Soient a et b la longueur et la largeur de l'un de ces petits rectangles de la sphère dont nous prenons le rayon pour unité ; la longueur et la largeur du petit rectangle correspondant de la carte, étant des fonctions de a et b, pourront être représentées par $a + \delta a$ et $b + \delta b$.

Si les rectangles de la carte étaient régulièrement égaux à ceux de la sphère, le rapport de l'aire projetée à l'aire originale serait égal à l'unité ; s'il n'en est pas ainsi le changement de surface pour chaque rectangle pourra être représenté par

$$\frac{\text{aire projetée}}{\text{aire horizontale}} - 1.$$

Si chaque rectangle était semblable à celui auquel il correspond, la déformation serait nulle, les angles ne seraient pas altérés, et le rapport des côtés projetés divisé par le rapport des côtés originaux donnerait un quotient égal à l'unité ; s'il n'en est pas ainsi, la déformation pour chaque rectangle pourra être exprimée par la différence de ce quotient à l'unité, c'est-à-dire par

$$\frac{\text{long}^{\text{r}} \text{ projetée} \times \text{larg}^{\text{r}} \text{ originale}}{\text{larg}^{\text{r}} \text{ projetée} \times \text{long}^{\text{r}} \text{ originale}} - 1.$$

Par suite des notations que nous avons adoptées nous pourrons représenter l'erreur sur chaque surface de rectangle par

$$\frac{(a + \delta a)(b + \delta b)}{ab} - 1 = \frac{\delta a}{a} + \frac{\delta b}{b},$$

et la déformation par

$$\frac{a + \delta a}{b + \delta b} \cdot \frac{b}{a} - 1 = \frac{\delta a}{a} - \frac{\delta b}{b},$$

en négligeant les puissances de δa et δb au-dessus de la première.

M. Airy a cherché comment on pouvait évaluer l'erreur totale produite sur la projection tant par l'exagération des surfaces que par la déformation, erreur résultante que nous avons déjà désignée

par le mot *altération* et à laquelle les Anglais donnent le nom bien plus expressif de *misrepresentation*. Le savant astronome a cherché en outre quel était le système zénithal dans lequel le résultat de la combinaison des deux erreurs était le plus avantageux possible, et il a basé ses calculs sur les suppositions et les déductions suivantes :

1° ces deux erreurs partielles, lorsqu'elles sont de même amplitude, peuvent être considérées comme des fautes égales ;

2° comme l'erreur produite par une valeur négative est la même que l'erreur produite par la même valeur prise positivement, on peut employer une puissance quelconque de leur expression et appliquer la méthode des moindres carrés ;

3° cette méthode conduit à chercher, pour chaque élément de surface, le minimum de la somme des carrés des deux expressions ;

4° pour la carte entière on devra donc chercher le minimum de la somme des carrés des erreurs élémentaires considérées en ayant égard à la grandeur de la petite surface correspondante.

La manière de représenter la projection de M. Airy consistera donc à déterminer la forme de la fonction de θ qui, prise pour rayon des almicantarats, rendra minimum l'erreur totale représentée par la somme de toutes les erreurs élémentaires multipliées par la surface qui correspond à chacune d'elles.

La somme des carrés des deux erreurs étant

$$\left(\frac{\delta a}{a}+\frac{\delta b}{2}\right)^2+\left(\frac{\delta a}{a}-\frac{\delta b}{b}\right)^2,$$

nous pouvons prendre pour *mesure* de l'erreur en chaque point

$$\left(\frac{\delta a}{a}\right)^2+\left(\frac{\delta b}{b}\right)^2.$$

Appelons θ la longueur, en fonction du rayon pris pour unité, de l'arc de grand cercle qui unit le centre de la carte au centre du petit rectangle que nous avons supposé formé sur la sphère, ρ la distance correspondante sur la carte, φ l'angle azimuthal infiniment petit sous lequel la largeur du rectangle est vue, dans les deux cas, du point pris pour centre. Alors

$$a=\delta\theta; \qquad a+a\delta=\delta\rho; \qquad \delta a=\delta\rho-\delta\theta,$$
$$b=\varphi\sin\theta; \qquad b+\delta b=\varphi\rho; \qquad \delta b=\varphi(\rho-\sin\theta),$$
$$\left(\frac{\delta a}{a}\right)^2+\left(\frac{\delta b}{b}\right)^2=\left(\frac{\delta\rho}{\delta\theta}-1\right)^2+\left(\frac{\rho}{\sin\theta}-1\right)^2.$$

telle est l'expression de l'altération en chaque point. Le produit de cette erreur par la surface $\varphi \sin\theta\, \delta\theta$ à laquelle elle correspond est donc

$$\left[\left(\frac{\delta\rho}{\delta\theta} - 1\right)^2 + \left(\frac{\rho}{\sin\theta} - 1\right)^2\right] \sin\theta d\theta,$$

en négligeant le multiplicateur φ.

La sommation des erreurs partielles pour toute la carte est donc représentée par

$$\int_0^\beta \left[\left(\frac{d\rho}{d\theta} - 1\right)^2 + \left(\frac{\rho}{\sin\theta} - 1\right)^2\right] \sin\theta d\theta,$$

en désignant par β la valeur de θ à la limite de la carte ; et c'est cette intégrale entre les limites 0 et β assignées à la variable θ qui doit être rendue *minimum*.

Posons $\rho - \theta = y$ et substituons en remplaçant $\frac{dy}{d\theta}$ par p. L'intégrale à rendre minimum a alors pour expression

$$\int_0^\beta d\theta \left[p^2 \sin\theta + \frac{(y + \theta - \sin\theta)^2}{\sin\theta}\right] = \int_0^\beta \mathrm{V} d\theta.$$

C'est un cas du *calcul des variations*.

Posons

$$\mathrm{M} = \frac{d\mathrm{V}}{d\theta}; \quad \mathrm{N} = \frac{d\mathrm{V}}{dy}; \quad \mathrm{P} = \frac{d\mathrm{V}}{dp} = 2p \sin\theta.$$

Nous devons donner à y une variation assujettie à la condition que dy soit nul quand $\theta = 0$; les équations de solution sont alors

$$\mathrm{N} = \frac{d\mathrm{P}}{d\theta} = 0, \quad \text{et} \quad \mathrm{P}_\beta = 0,$$

en désignant par P_β la valeur de $2p \sin\theta$ quand on y remplace θ par β. Or

$$\mathrm{N} = \frac{2(y + \theta - \sin\theta)}{\sin\theta}; \quad \frac{d\mathrm{P}}{d\theta} = \frac{2d^2y}{d\theta^2} \sin\theta + \frac{2dy}{d\theta} \cos\theta;$$

la première équation devient donc

$$\frac{y + \theta - \sin\theta}{\sin\theta} - \sin\theta \frac{d^2y}{d\theta^2} - \cos\theta \frac{dy}{d\theta} = 0,$$

ou

$$\sin^2\theta \frac{d^2y}{d\theta^2} + \sin\theta \cos\theta \frac{dy}{d\theta} - y = \theta - \sin\theta.$$

Écrivons Θ à la place de $\theta - \sin\theta$, et pour résoudre l'équation posons

$$z = \sin\theta \frac{dy}{d\theta} + y.$$

Nous avons alors, en différentiant et en substituant,

$$\sin\theta \frac{dz}{d\theta} - z = \sin^2\theta \frac{d^2y}{d\theta^2} + \sin\theta\cos\theta \frac{dy}{d\theta} - y,$$

ou

$$\sin\theta \frac{dz}{d\theta} - z = \Theta.$$

Cette équation est intégrable quand elle est multipliée par $\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}}$.

On obtient alors

$$z = \frac{1}{2}\tang\frac{\theta}{2}\int d\theta \frac{\Theta}{\sin^2\frac{\theta}{2}};$$

donc

$$\sin\theta \frac{dy}{d\theta} + y = \frac{1}{2}\tang\frac{\theta}{2}\int d\theta \frac{\Theta}{\sin^2\frac{\theta}{2}}.$$

Cette dernière équation devient intégrable quand on la multiplie par $\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}$; on obtient alors

$$y = \frac{1}{4}\cotang\frac{\theta}{2}\int d\theta \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos^3\frac{\theta}{2}}\int d\theta \frac{\Theta}{\sin^2\frac{\theta}{2}}.$$

En posant pour un moment $\frac{\theta}{2} = \psi$, on peut écrire

$$y = \cotang\psi\int d\psi \frac{\sin\psi}{\cos^3\psi}\int d\psi \frac{\Theta}{\sin^2\psi},$$

ou

$$y = \frac{1}{2}\frac{1}{\sin\psi\cos\psi}\int d\psi \frac{\Theta}{\sin^2\psi} - \frac{1}{2}\cotang\psi\int d\psi \frac{\Theta}{\sin^2\psi\cos^2\psi},$$

ou

$$y = \frac{1}{2}\tang\psi\int d\psi \frac{\Theta}{\sin^2\psi} - \frac{1}{2}\cotang\psi\int d\psi \frac{\Theta}{\cos^2\psi}.$$

En remplaçant Θ par $\theta - \sin\theta$, on obtient enfin

$$y = -\theta - 2\operatorname{cotang}\frac{\theta}{2}\log\cos\frac{\theta}{2} + C\operatorname{tang}\frac{\theta}{2} + C'\operatorname{cotang}\frac{\theta}{2},$$

y doit être nul avec θ, donc $C' = 0$.

L'équation de condition $P_\beta = 0$ peut s'écrire

$$\left(\frac{dy}{d\theta}\right)_\beta = 0;$$

on doit donc avoir

$$\operatorname{cosec}^2\frac{\beta}{2}\log\cos\frac{\beta}{2} + \frac{1}{2}C\sec^2\frac{\beta}{2} = 0;$$

d'où

$$C = \operatorname{cotang}^2\frac{\beta}{2}\log\sec^2\frac{\beta}{2} = -2\operatorname{cotang}^2\frac{\beta}{2}\log\cos\frac{\beta}{2}.$$

Il en résulte que, au centre de la carte où $\theta = 0$,

$$\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)_0 = \frac{1+C}{2} \quad (1).$$

On a donc définitivement

$$\rho = -2\operatorname{cotang}\frac{\theta}{2}\log\cos\frac{\theta}{2} + \operatorname{tang}\frac{\theta}{2}\operatorname{cotang}^2\frac{\beta}{2}\log\sec^2\frac{\beta}{2},$$

expression dans laquelle les logarithmes sont népériens; en appelant donc M le module 0,43429448, on aura, en logarithmes vulgaires,

$$\rho = -\frac{2}{M}\operatorname{cotang}\frac{\theta}{2}\log\cos\frac{\theta}{2} - \frac{2}{M}\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}\operatorname{cotang}^2\frac{\beta}{2}\log\cos\frac{\beta}{2}.$$

Le rayon-limite de la carte est

---

(1) M. Airy, négligeant la condition de rendre minimum l'intégrale de $Vd\theta$ entre les limites 0 et β, et cherchant seulement le minimum de l'intégrale indéfinie, s'était donné, pour déterminer la constante C, la condition que $\frac{dy}{d\theta}$ fût nul ainsi que y, pour $\theta = 0$, ce qui revient à cette condition que les parties centrales de la carte correspondent exactement à la région de la sphère qui entoure le point pris pour centre de projection; M. Airy trouvait ainsi $C = 1$ et finalement

$$\rho = \operatorname{tang}\frac{\theta}{2} + 2\operatorname{cotang}\frac{\theta}{2}\log\sec\frac{\theta}{2}.$$

Le capitaine Clarke, chargé par le colonel James de revoir les calculs de l'astronome anglais, détermina la constante comme nous l'avons fait (*Philosophical magazine*, avril 1862, p. 306-308).

$$R = 2C \operatorname{tang} \frac{\beta}{2}.$$

Cette quantité ne croît pas indéfiniment, mais est maximum quand $\beta = 126°, 24', 53''$; pour des valeurs plus grandes de β, R diminue.

Il ne faut pas oublier que dans nos calculs nous avons pris le rayon de la sphère pour unité, de sorte que si l'on exprime en réalité ce rayon par a, il faut multiplier par a les valeurs de ρ et R trouvées précédemment. Quand $\beta = 120°$, $R = 1{,}6007\ a$; quand $\beta = 113° 20'$, $R = 1{,}5760$.

La projection n° XXIII est construite à l'aide de ces formules sur l'horizon du lieu situé à 23° 30′ de latitude N. (tropique du cancer). Nous dirons au paragraphe suivant pourquoi ce point a été choisi.

9. Nous allons maintenant parler de la projection imaginée par le colonel *Henri James*, directeur de l'*Ordnance Survey*, en cherchant à représenter un hémisphère en projection perspective de manière que l'altération totale (*misrepresentation*) fût la moindre possible (1). Il est arrivé ainsi à placer le point de vue à une distance de la surface qui diffère si peu de la moitié du rayon que cette valeur lui a paru la meilleure à adopter dans la pratique à cause de la simplicité de sa définition. Ainsi

$$D = 1{,}50a,$$

au lieu de 1,595 valeur adoptée par la Hire. Le colonel James voulant appliquer cette projection à la représentation d'une partie de la surface de la terre plus grande qu'un hémisphère, au lieu de faire coïncider le plan du tableau avec un grand cercle de la sphère, l'a supposé parallèle à l'écliptique et passant par la limite des tropiques, c'est-à-dire à une distance du centre du globe égale à a sin 23° 30′; le rayon de la circonférence qui limite la carte est alors égal à a cos 23° 30′, c'est-à-dire à 0,91706 a, et des longueurs égales de la surface sphérique ne sont, sur les bords de la carte, que de $\frac{1}{6}$ plus grandes que vers le milieu,

Le colonel James a choisi cette distance et cette position du ta-

(1) *New geometrical Projection of two-thirds of a sphere*, article compris dans la section *Useful Inventions* de l'*Address to the Royal Geographical Society of London delivered at the Anniversary meeting, on the 25th may* 1857 *by Sir R. J.* MURCHISON, p. 421-422 des *Proceedings*, vol. I, Londres 1857, in-8, ou p. CXLJ-CXLIJ du Journal, vol. XXVII, Londres 1857, in-8.

bleau parce que, en plaçant, comme il l'a fait dans les cartes dessinées dans ce système par J. O. *Jarrels*, le point central sur le tropique du Cancer (23° 30′ N.) et à 15° (long E. de Greenwich, 12° 40′ de Paris) on peut représenter dans le cercle de projection l'Europe, l'Asie, l'Afrique et l'Amérique ; enfin il a donné à ce système le nom de projection des deux tiers du globe quoique la surface représentée soit en réalité les $\frac{7}{10}$ de la surface totale.

10. Ce système ainsi défini ne jouit réellement de tous ses avantages que jusqu'à 90° du centre ; mais en étendant la projection de 90° à 113° 30′ comme l'a fait sir H. James, le capitaine A. R. *Clarke* (1) a montré que le point de vue devait être placé à une distance de la surface égale aux $\frac{11}{30}$ du rayon au lieu de $\frac{15}{30}$. Voici le calcul tel qu'il a été présenté par l'auteur.

Prenons le rayon de la sphère pour unité ; appelons D la distance de l'œil au centre, D′ celle du tableau au centre ; l'expression générale du rayon ρ des almicantarats sera

$$\rho = \frac{D' \sin \theta}{D + \cos \theta};$$

comme elle contient deux quantités arbitraires D et D′, nous pouvons en disposer pour rendre minimum l'altération totale de la carte pour toutes les valeurs de θ comprises entre 0 et 113° 30′. Nous avons vu précédemment que cette altération pouvait être exprimée par

$$\int_0^\beta \left[\left(\frac{d\rho}{d\theta} - 1 \right)^2 + \left(\frac{\rho}{\sin \theta} - 1 \right)^2 \right] \sin \theta d\theta = \int_0^\beta V \sin \theta d\theta.$$

Remplaçons donc $\frac{d\rho}{d\theta}$ par sa valeur $\frac{D'(D\cos\theta + 1)}{(D + \cos\theta)^2}$ et ρ par $\frac{D' \sin \theta}{D + \cos \theta}$, et nous aurons à rendre minimum par rapport à D et D′ l'intégrale

$$\int_0^\beta \left[\left(\frac{D'(D\cos\theta + 1)}{(D + \cos\theta)^2} - 1 \right)^2 + \left(\frac{D'}{D + \cos\theta} - 1 \right)^2 \right] \sin \theta d\theta = M.$$

L'intégration donne

$$M = D'^2 \Delta_1 + 2D' \Delta_2 + 4 \sin^2 \frac{\beta}{2},$$

(1) *On projections for maps applying to a very large extent of the Earth's surface, by Col. H.* James, *and Cap. A. R.* Clarke : *communicated by the authors ;* dans le *Philosophical Magazine*, cahier d'avril 1862, p. 306 à 312.

où les symboles Δ_1, Δ_2 sont

$$\Delta_1 = \frac{1+D^2}{N} = \frac{D(D^2-1)}{N^2} + \frac{(D^2-1)^2}{3N^3} - \frac{1}{3}\frac{(1-D)^2}{1+D} - 1,$$

$$\Delta_2 = (1+D)\log\frac{N}{1+D} + \frac{D^2-1}{N} - D + 1,$$

et

$$N = D + \cos\beta.$$

La condition du minimum exige que

$$\frac{dM}{dD'} = 0, \quad \text{et que} \quad \frac{dM}{dD} = 0,$$

donc

$$D'\Delta_1 + \Delta_2 = 0, \quad \text{et} \quad \frac{D'd\Delta_1}{dD} + 2\frac{d\Delta_2}{dD} = 0;$$

d'où

$$D' = -\frac{\Delta_2}{\Delta_1} \quad \text{et} \quad \Delta_2\frac{d\Delta_1}{dD} - 2\Delta_1\frac{d\Delta_2}{dD} = 0.$$

Substituant ces valeurs dans l'expression de M, nous trouvons

$$M = 4\sin^2\frac{\beta}{2} - \frac{\Delta_2^2}{\Delta_1},$$

expression qui ne contient plus que D; cette variable doit donc être déterminée de manière que $\frac{\Delta^2_2}{\Delta_1}$ soit maximum.

On y parvient très-facilement en calculant les valeurs de $\frac{\Delta^2_2}{\Delta_1}$ pour des valeurs données de D. On forme ainsi le tableau suivant :

D	$\log\Delta^2_2 - \log\Delta_1$
1,35	0,420732
1,36	0,420756
1,37	0,420762
1,38	0,420747
1,39	0,420665

En interpolant on trouve pour le minimum

$$D = 1{,}36763; \quad \log\Delta^2_2 - \log\Delta_1 = 0{,}4207623,$$

$$\frac{\Delta^2_2}{\Delta_1} = 2{,}634889; \quad M = 0{,}16261.$$

Le point de vue est ainsi aux $\frac{11}{30}$ environ du rayon de la surface de la sphère. L'expression du rayon des almicantarats est alors

$$\rho = \frac{1{,}66261\, a \sin\theta}{1{,}36763 + \cos\theta},$$

Quand $\theta = 113° 30'$, le rayon de la circonférence-limite devient

$$R = 1{,}5737,$$

qui diffère très-peu du rayon de la projection de M. Airy (*Balance of Errors*, corrigée par Sir Clarke).

La table suivante, qui donne les valeurs de ρ pour les valeurs de θ de 5° en 5° dans l'hypothèse de $a = 1$, a été calculée par le capitaine Clarke en prenant le rayon a pour unité. La projection n° XXII a été dressée dans ce système.

Ce genre de projection perspective convient assez bien pour représenter de grandes masses de terres et pour le tracé des cartes physiques ou géologiques ; pour les grandes cartes d'étoiles il doit être préféré à la projection stéréographique parce qu'il permet de représenter sans erreur exagérée sur les bords une grande partie du ciel, mais il ne possède pas l'importante propriété de conserver les angles et de représenter les constellations sans en altérer les formes.

Valeurs de $\rho = \frac{1{,}66261 \sin\theta}{1{,}36763 + \cos\theta}$.

θ	ρ	θ	ρ	θ	ρ	θ	ρ
0	0,0000	30	0,3722	60	0,7710	90	1,2157
5	0,0613	35	0,4361	65	0,8417	95	1,2935
10	0,1227	40	0,5009	70	0,9138	100	1,3713
15	0,1844	45	0,5666	75	0,9874	105	1,4484
20	0,2464	50	0,6335	80	1,0623	110	1,5233
25	0,3090	55	0,7016	85	1,1385	115	1,5945

11. Nous allons maintenant étudier les altérations que les projections zénithales font subir sur la carte aux angles, aux éléments de longueur et par suite aux surfaces.

Nous supposerons la projection faite sous l'aspect polaire avec le pôle au centre et les parallèles circulaires et concentriques ; mais,

comme un point quelconque de la sphère peut toujours être pris comme centre de la projection, ce que nous dirons des parallèles et des méridiens de la projection polaire pourra toujours s'appliquer aux almicantarats et aux cercles azimutaux relatifs à une position quelconque du centre.

ALTÉRATION DES ANGLES.

Considérons sur la sphère une direction quelconque faisant un angle α avec un méridien, et cherchons l'angle correspondant β de la carte, c'est-à-dire l'angle que fera avec le méridien de la projection la direction qui, sur la carte, correspond à la direction considérée sur la sphère. Appelons z l'azimut du sommet de l'angle.

Nous aurons évidemment sur la sphère

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{dz}{d\theta}\sin\theta,$$

et sur la carte

$$\operatorname{tang}\beta = \frac{\rho}{d\rho}\,dz.$$

Donc

$$\operatorname{tang}\beta = \frac{\rho d\theta}{d\rho\sin\theta}\operatorname{tang}\alpha = K\operatorname{tang}\alpha,$$

$$\operatorname{tang}(\beta-\alpha) = \frac{(K-1)\operatorname{tang}\alpha}{1+K\operatorname{tang}^2\alpha},$$

en posant

$$K = \frac{\rho d\theta}{d\rho\sin\theta}.$$

Remarquons d'abord que le rapport K et par suite l'altération $\beta-\alpha$ sont indépendants de l'azimut du sommet de l'angle, et restent par conséquent les mêmes pour des distances égales du centre de la projection.

Cette relation permet de tracer la rose des vents en un point quelconque de la carte, puisque, connaissant la loi

$$\rho = F(\theta)$$

qui la définit, on pourra calculer, pour toute valeur de θ, la fonction

$$\frac{\rho d\theta}{d\rho\sin\theta}.$$

Remarquons de suite que $\beta = \alpha$ pour $\alpha = 0$ et pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, ce que nous savions déjà puisque les almicantarats et les cercles azimutaux se coupent à angles droits sur la carte comme sur la sphère.

Cherchons maintenant le maximum B — A de l'altération $\beta - \alpha$ pour chaque valeur de θ; il nous suffira pour cela d'égaler à zéro la dérivée de la valeur de tang $(\beta - \alpha)$, en considérant α comme la véritable indépendante :

$$\frac{K-1}{\cos^2\alpha}(1+K)\tang^2\alpha) - \frac{2K(K-1)}{\cos^2\alpha}\tang^2\alpha = 0,$$

ou

$$1 - K\tang^2\alpha = 0,$$

d'où

$$\tang A = \pm\frac{1}{\sqrt{K}} = \pm\sqrt{\frac{d\rho}{d\theta}\frac{\sin\theta}{\rho}}.$$

Les deux directions qui, sur la sphère, font entre elles l'angle le plus altéré A sont donc symétriques de part et d'autre du méridien. Il en est de même des directions qui leur correspondent sur la carte, car, en remplaçant tang α par ces valeurs, on obtient :

$$\tang B = \pm\sqrt{K} = \frac{1}{\tang A},$$

équation qui conduit à poser

$$A + B = \frac{\pi}{2},$$

en excluant les arcs négatifs et ceux qui excèdent $\frac{\pi}{2}$. On déduit de là pour la déviation maximum :

$$\tang(B - A) = \frac{K-1}{2\sqrt{K}} = \frac{\rho d\theta - d\rho\sin\theta}{2\sqrt{\rho d\theta d\rho\sin\theta}},$$

ce qui montre que, au centre où $\theta = 0$ et $\rho = 0$, l'altération est toujours nulle.

Si nous voulons chercher la projection pour laquelle cette altération est partout nulle, il suffit d'égaler K à 1 :

$$\frac{\rho}{\sin\theta}\frac{d\theta}{d\rho} = 1,$$

d'où l'on tire

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{d\theta}{\sin\theta}, \quad \text{et par conséquent} \quad \rho = \operatorname{tang}\frac{\theta}{2};$$

c'est la loi de la projection stéréographique.

12. Pour terminer l'étude de l'altération des angles dans les projections zénithales, remarquons que, en tout point de la sphère ou de la carte, il existe une infinité de groupes de deux directions faisant entre elles le même angle sur la carte ou sur la sphère. M. Collignon a donné aux directions qui possèdent cette propriété le nom de *directions conjuguées.*

Soient α et α_1 les angles formés en un point M de la sphère par deux directions avec l'arc de grand cercle qui joint ce point à celui qui est pris pour centre de la projection ; soient β et β_1 les angles correspondants sur la carte. Les directions conjuguées seront définies par l'équation

$$\alpha_1 - \alpha = \beta_1 - \beta \quad \text{ou bien} \quad \beta - \alpha = \beta_1 - \alpha_1,$$

donc

$$\frac{\operatorname{tang}\beta - \operatorname{tang}\alpha}{1 + \operatorname{tang}\beta \operatorname{tang}\alpha} = \frac{\operatorname{tang}\beta_1 - \operatorname{tang}\alpha_1}{1 + \operatorname{tang}\beta_1 \operatorname{tang}\alpha_1}.$$

Connaissant la distance θ du point M au centre, on pourra remplacer tang β et tang β_1 par leurs valeurs en fonction de θ et de tang α ou tang α_1 ; on obtiendra ainsi la relation qui doit exister entre α et α_1 sur la sphère pour que les directions définies par ces angles soient des directions conjuguées. Remplaçons donc tang β par $\frac{\rho d\theta}{d\rho \sin\theta}\operatorname{tang}\alpha$; il viendra, après suppression du facteur commun $\frac{\rho d\theta}{d\rho \sin\theta} - 1$,

$$\frac{\operatorname{tang}\alpha}{1 + K\operatorname{tang}^2\alpha} = \frac{\operatorname{tang}\alpha_1}{1 + K\operatorname{tang}^2\alpha_1},$$

en posant comme précédemment

$$\frac{\rho d\theta}{d\rho \sin\theta} = K.$$

Cette équation est du second degré par rapport à tang α_1. Elle est satisfaite d'abord par tang α_1 = tang α, ce qui donne $\alpha_1 = \alpha$ en faisant abstraction des angles négatifs ou supérieurs à 180 degrés. Sup-

primant cette racine qui ne convient point à la question, il vient pour l'autre racine

$$\operatorname{tang}\alpha_1 = \frac{1}{K \operatorname{tang}\alpha}.$$

Le produit des tangentes des angles α et α_1 étant constant pour un même point M, les directions correspondantes appartiennent aux diamètres conjugués d'une hyperbole tracée sur le plan tangent à la sphère et qui aurait le point M pour centre, la tangente au grand cercle MO pour l'un de ses axes principaux, et dont enfin les asymptotes feraient avec cet axe l'angle dont la tangente est égale à $\frac{1}{\sqrt{K}}$.

Sur la carte les directions conjuguées appartiennent aussi aux diamètres conjugués d'une autre hyperbole ayant le rayon MO pour axe principal et dont les asymptotes font avec MO l'angle dont la tangente est égale à $\sqrt{K}$.

En d'autres termes, sur la carte comme sur la sphère, les asymptotes de l'hyperbole qui définit ces directions conjuguées ne sont autre chose que les directions de déviation maximum que nous avons déterminées tout à l'heure.

De là résulte un moyen géométrique de savoir si l'angle de deux directions MA, MB, sur la projection zénithale, reproduit en vraie grandeur l'angle des directions correspondantes sur la sphère. Par le point M (fig. 44) menons les droites MP, MP′ de déviation maximum sous des angles donnés par l'équation

$$\operatorname{tang} B = \pm\sqrt{K} = \pm\sqrt{\frac{\rho\, d\theta}{d\rho \sin\theta}}.$$

Menons ensuite une parallèle AB quelconque à MP′. Si le point I où elle coupe MP est le milieu du segment AB, les deux directions MB et MA sont des diamètres conjugués dans toute hyperbole ayant pour asymptotes MP, MP′, et par suite l'angle BMA reproduit en vraie grandeur l'angle formé sur la sphère par les directions correspondantes à MB, MA.

En effet, dans l'hyperbole rapportée à ses asymptotes, la somme des coefficients angulaires de deux diamètres conjugués est égale à zéro.

La direction MO est conjuguée avec une direction perpendiculaire

à MO au point M. La construction indique cette particularité que nous avions déjà reconnue.

Ainsi, quoique dans les projections zénithales les angles soient en général altérés, il y a en chaque point une infinité d'angles qui ne subissent aucune altération.

13. Nous allons maintenant appliquer à chacune des projections zénithales que nous avons étudiées les résultats auxquels nous sommes parvenus, et calculer les valeurs de K et de l'angle le plus altéré A ainsi que l'altération maximum B — A. Nous supposerons le rayon de la terre pris pour unité.

Nous avons trouvé, pour expression du rayon des almicantarats, dans les projections perspectives

$$\rho = \frac{D \sin\theta}{D + \cos\theta}.$$

Il en résulte

$$K = \frac{\rho}{\sin\theta} \cdot \frac{d\theta}{d\rho} = \frac{D + \cos\theta}{D\cos\theta + 1}.$$

$$\operatorname{tang} A = \pm\sqrt{\frac{D\cos\theta + 1}{D + \cos\theta}}, \quad \operatorname{tang}(B - A) = \frac{(D-1)(1-\cos\theta)}{2\sqrt{(D + \cos\theta)(D\cos\theta + 1)}}$$

La position du plan du tableau ne peut évidemment exercer d'influence sur les résultats.

Dans la projection de sir James $D = 1{,}50$

$$K = \frac{1{,}50 + \cos\theta}{1{,}50\cos\theta + 1}; \quad \operatorname{tang} A = \pm\sqrt{\frac{1{,}50 + \cos\theta}{D + \cos\theta}};$$

$$\operatorname{tang}(B - A) = \frac{0{,}25(1 - \cos\theta)}{\sqrt{(1{,}50 + \cos\theta)(1{,}50\cos\theta + 1)}}.$$

On voit que, à 90° du centre, l'angle le plus altéré sur la sphère est de 39° 14′ environ ; il est représenté sur la carte par une angle de 50° 46′ ; l'altération est de 11° 32′.

Dans la projection de sir James, modifiée par le capitaine Clarke, $D = 1{,}36763$ et par conséquent

$$\operatorname{tang}(B - A) = \frac{0{,}36763(1 - \cos\theta)}{2\sqrt{(1{,}36763 + \cos\theta)(1{,}36763\cos\theta + 1)}}.$$

A 90° du centre l'altération maximum n'est que de 8° 56′. Elle est de

13° 15′ dans la première projection de Parent où D = 1,595, de 15° 32′ dans la seconde où D = 1,732.

Dans la projection orthographique $\rho = \sin\theta$,

$$K = \frac{1}{\cos\theta};$$

$$\operatorname{tang} A = \pm\sqrt{\cos\theta}; \qquad \operatorname{tang} B = \pm\sqrt{\frac{1}{\cos\theta}};$$

$$\operatorname{tang}(B - A) = \frac{1 - \cos\theta}{2\sqrt{\cos\theta}} = \frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\sqrt{\cos\theta}}.$$

On voit que l'altération, nulle au centre, va en croissant avec θ et que, à la circonférence de la carte, pour $\theta = 90°$, elle est de 90 degrés ; quant à l'angle A le plus altéré sur la sphère, il est de 45° au centre et décroît jusqu'à zéro.

Dans la projection centrale $\rho = \operatorname{tang}\theta$,

$$K = \frac{\rho}{\sin\theta}\frac{d\theta}{d\rho} = \cos\theta;$$

$$\operatorname{tang} A = \pm\sqrt{\frac{1}{\cos\theta}}, \quad \text{et} \quad \operatorname{tang}(B - A) = -\frac{1 - \cos\theta}{2\sqrt{\cos\theta}} = -\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\sqrt{\cos\theta}}.$$

L'altération est donc égale, mais de signe contraire à celle de la projection orthographique.

Dans la projection équidistante $\rho = \theta$

$$K = \frac{\theta}{\sin\theta};$$

$$\operatorname{tang} A = \pm\sqrt{\frac{\sin\theta}{\theta}}; \qquad \operatorname{tang}(B - A) = \frac{\theta - \sin\theta}{2\sqrt{\theta\sin\theta}}.$$

Au centre $\theta = 0$ et le rapport $\frac{\sin\theta}{\theta}$ est égal à l'unité ; donc $A = \pm 45°$ et $B = \pm 45°$; la déviation est nulle ; l'angle A de déviation maximum décroît ensuite jusqu'à ce que $\theta = \frac{\pi}{2}$, et alors $\operatorname{tang} A = \pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}$, ou $A = 38° 35′ 10″$, tandis que B décroît jusqu'à 51° 24′ 50″ ; la déviation maximum est donc de 12° 49′ 40″.

Dans les projections que nous avons indiquées sous le nom de

projections intermédiaires, $\rho = n \operatorname{tang} \frac{\theta}{n}$, l'altération maximum croît avec n; quand $n = 3$, elle est de 7° 28′ 30″ à 90° du centre, et l'angle A est de 41° 15′ 45″; quand $n = 4$, à la même distance l'altération B—A est de 9° 52′ 44″ et l'angle A de 40° 3′ 38″.

Dans la projection zénithale équivalente de Lambert, $\rho = 2 \sin \frac{\theta}{2}$; on trouve alors

$$K = \frac{\rho}{\sin\theta} \frac{d\theta}{d\rho} = \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}}.$$

$$\operatorname{tang} A = \pm \cos \frac{\theta}{2}; \qquad \operatorname{tang}(B - A) = \frac{1}{2} \operatorname{tang} \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}.$$

L'angle A est égal à 45° pour $\theta = 0$, c'est-à-dire au centre de la carte; il décroît ensuite sur la sphère tandis que l'angle B augmente d'autant, et la déviation va en croissant; quand $\theta = \frac{\pi}{2}$, on a $\operatorname{tang} A = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ou A = 35° 15′ 52″, et la déviation maximum est de 19° 28′ 16″; elle continue à croître avec θ, et, à l'antipode du centre, lorsque $\theta = 180°$, on trouve A = 0 et B = 90°.

Dans la projection de sir Airy (*Balance of Errors*)

$$\rho = -2 \operatorname{cotang} \frac{\theta}{2} \log\cos \frac{\theta}{2} + \operatorname{tang} \frac{\theta}{2} \left(\operatorname{cotang}^2 \frac{\beta}{2} \log \operatorname{séc}^2 \frac{\beta}{2} \right),$$

et l'on peut calculer A et B pour chaque valeur de θ.

ALTÉRATION DES LONGUEURS.

11. Sur la sphère la distance des deux points définis par les coordonnés z et θ, $z + dz$ et $\theta + d\theta$ qui désignent l'une l'azimut et l'autre la distance au centre est exprimée par

$$\sqrt{\sin^2\theta\, dz^2 + d\theta^2};$$

la distance correspondante sur la carte zénithale par

$$\sqrt{d\rho^2 + \rho^2 dz^2}.$$

Soit m le rapport de la seconde distance à la première, rapport variable d'un point à l'autre de la carte, et variable aussi en chaque

point avec l'orientation de l'élément considéré, ou avec le rapport $\frac{dz}{d\theta}\sin\theta$ que nous avons reconnu être égal à la tangente de l'angle α que fait cet élément avec le méridien. On peut donc écrire

$$d\rho^2 + \rho^2 dz^2 = m^2(\sin^2\theta dz^2 + d\theta^2).$$

Cherchons la valeur de α qui rend m maximum ou minimum en un point donné.

Nous pouvons écrire, en remplaçant $\frac{dz}{d\theta}\sin\theta$ par tang α,

$$m^2 = \frac{d\rho^2 + \rho^2 dz^2}{\sin^2\theta dz^2 + d\theta^2} = \frac{\frac{d\rho^2}{d\theta^2} + \rho^2\frac{dz^2}{d\theta^2}}{1 + \operatorname{tang}^2\alpha} = \frac{d\rho^2}{d\theta^2}\cos^2\alpha + \rho^2\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\theta}.$$

Remarquons que si l'on calcule deux valeurs de m^2 correspondant à deux valeurs de α différant entre elles de $\frac{\pi}{2}$, la somme des deux valeurs de m^2 sera indépendante de α; on a en effet pour l'une

$$m^2_1 = \frac{d\rho^2}{d\theta^2}\cos^2\alpha_1 + \rho^2\frac{\sin^2\alpha_1}{\sin^2\theta};$$

et pour l'autre

$$m^2_2 = \frac{d\rho^2}{d\theta^2}\sin^2\alpha_1 + \rho^2\frac{\cos^2\alpha_1}{\sin^2\theta}.$$

Donc

$$m^2_1 + m^2_2 = \frac{d\rho^2}{d\theta^2} + \frac{\rho^2}{\sin^2\theta},$$

égalité remarquable dont nous aurons occasion de faire usage plus tard.

La valeur de α qui rend m ou m^2 maximum ou minimum s'obtiendra en égalant à zéro la dérivée de

$$\frac{d\rho^2}{d\theta^2}\cos^2\alpha + \rho^2\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\theta},$$

prise par rapport à la variable α;

$$-2\frac{d\rho^2}{d\theta^2}\sin\alpha\cos\alpha + \frac{2\rho^2}{\sin^2\theta}\sin\alpha\cos\alpha = 0,$$

ou

$$\sin\alpha\cos\alpha\left(\frac{\rho^2}{\sin^2\theta} - \frac{d\rho^2}{d\theta^2}\right) = 0.$$

Cette équation nous montre que les deux directions pour lesquelles m est maximum ou minimum sont données par les valeurs de α égales à 0 ou à $\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire coïncidant l'une avec l'almicantarat et l'autre avec le rayon.

Pour reconnaître celle des deux qui correspond au maximum, prenons la dérivée seconde de m^2 :

$$\cos 2\alpha \left(\frac{\rho^2}{\sin^2 0} - \frac{d\rho^2}{d\theta^2} \right),$$

et cherchons son signe pour $\alpha = 0$ et pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Supposons d'abord que $\frac{\rho^2}{\sin^2 \theta} - \frac{d\rho^2}{d\theta^2}$ soit positif, ce qui signifie

$$\frac{d\rho}{\rho} < \frac{d\theta}{\sin \theta}.$$

Nous pouvons intégrer les deux membres et comme, dans les projections que nous considérons, ρ devient nul en même temps que θ, nous pouvons écrire

$$\log \rho < \log \operatorname{tang} \frac{\theta}{2},$$

$$\rho < \operatorname{tang} \frac{\theta}{2}.$$

Supposons donc cette condition satisfaite, soit par la nature même de la projection, soit par une série de valeurs de θ; le signe de la dérivée seconde de m^2 dépendra alors du signe de $\cos 2\alpha$. Pour $\alpha = 0$, cette dérivée sera positive; elle sera négative pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$; il en résulte que m^2, et par conséquent m, sera minimum pour la première valeur, maximum pour la seconde.

Si le terme $\frac{\rho^2}{\sin^2 \theta} - \frac{d\rho^2}{d\theta^2}$ est négatif, et par suite si, dans la projection ou pour les valeurs de θ considérées, on a

$$\rho > \operatorname{tang} \frac{\theta}{2},$$

c'est le contraire qui a lieu; le rapport m sera alors maximum pour

$\alpha = 0$, c'est-à-dire sur le rayon, et minimum pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire sur l'almicantarat.

On voit de plus que le seul système dans lequel le rapport des distances est indépendant de l'angle α, c'est-à-dire reste le même dans toutes les projections (tout en variant avec θ), est la projection pour laquelle

$$\frac{\rho}{\sin\theta} = \frac{d\rho}{d\theta} \qquad \text{ou} \qquad \rho = \operatorname{tang}\frac{\theta}{2},$$

c'est-à-dire la projection stéréographique.

Cherchons les valeurs maximum ou minimum du rapport m; il suffit pour cela de faire $\alpha = 0$ ou $\alpha = \frac{\pi}{2}$ dans l'expression générale de m^2

$$m^2 = \frac{d\rho^2}{d\theta^2}\cos^2\alpha + \frac{\rho^2}{\sin^2\theta}\sin^2\alpha.$$

On trouve ainsi que, sur le rayon, ce rapport m_0 est égal à $\frac{d\rho}{d\theta}$, et que, sur l'almicantarat, $m_{\frac{\pi}{2}} = \frac{\rho}{\sin\theta}$.

Le rapport des surfaces élémentaires correspondantes de la carte et de la sphère est évidemment le produit $m_0 m_{\frac{\pi}{2}}$ des rapports maximum et minimum des distances élémentaires au point considéré. Si l'on considère, en effet, sur la sphère, un petit carré ayant l'unité pour chacun de ses côtés supposés d'ailleurs dirigés suivant le méridien et suivant le parallèle, sa surface sera exprimée par l'unité et le quadrilatère correspondant sur la carte aura pour côtés m_0 (suivant le rayon) et $m_{\frac{\pi}{2}}$ (suivant l'almicantarat), et pour surface le produit $m_0 m_{\frac{\pi}{2}}$.

Ainsi le rapport M^2 des surfaces élémentaires correspondantes de la carte et de la sphère est exprimé par

$$M^2 = \frac{d\rho}{d\theta}\frac{\rho}{\sin\theta}.$$

15. De même que nous avons cherché les plus grandes altérations d'angle, nous allons chercher les rapports m_0, $m_{\frac{\pi}{2}}$ et M^2 pour les diverses projections zénithales que nous avons considérées.

Pour les projections perspectives

$$\rho = \frac{D' \sin\theta}{D + \cos\theta},$$

$$m_\theta = \frac{d\rho}{d\theta} = \frac{D'(D\cos\theta + 1)}{(D + \cos\theta)^2}; \qquad m_{\frac{\pi}{2}} = \frac{\rho}{\sin\theta} = \frac{D'}{D + \cos\theta},$$

$$M^2 = \frac{D'^2(D\cos\theta + 1)}{(D + \cos\theta)^3}.$$

Dans le cas particulier de la projection stéréographique, si nous prenons pour plan de projection le plan tangent à l'hémisphère que nous voulons représenter, $D' = 2$,

$$m_0 = \frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}; \qquad m_{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}; \qquad M^2 = \frac{1}{\cos^4\frac{\theta}{2}}.$$

Le rapport m d'agrandissement des longueurs élémentaires reste le même autour de chaque point et ne varie qu'avec θ; ce rapport est égal à l'unité au centre de la carte, et croît du centre à la circonférence où il atteint la valeur 2. Le rapport M d'agrandissement des surfaces croît donc depuis 1 jusqu'à 4.

Dans la projection de sir James, si l'on suppose, comme l'a fait l'auteur, que le plan de projection soit à une distance du centre égale à sin 23° 30′, $D' = 1{,}1012$ et alors, au centre de la carte,

$$m_0 = m_{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2{,}270};$$

à 90° de ce centre

$$m_0 = \frac{1}{2{,}043}; \quad m_{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{1{,}362}; \quad M^2 = \frac{1}{2{,}7825};$$

mais si nous supposons que le plan de projection soit tangent à l'hémisphère que l'on veut représenter, on voit que, au centre, le rapport des longueurs élémentaires de la carte et de la sphère est égal à l'unité ainsi que le rapport des surfaces; c'est du reste ce qui a lieu pour toutes les projections perspectives lorsque l'on suppose le plan du tableau situé à l'extrémité du diamètre passant par le point de vue, car alors, pour $\theta = 0$ et $D' = D + 1$

$$m_0 = m_{\frac{\pi}{2}} = \frac{D'}{D + 1} = 1;$$

cette hypothèse sur la position du plan de projection permettra donc de comparer entre elles les projections perpectives en représentant sans altération les portions voisines du centre et voyant comment l'erreur croît avec la distance à ce centre.

Revenons à la projection de sir James ; si nous voulons l'étendre, comme l'a fait l'auteur, jusqu'à 113° 30′ du centre, nous trouvons, à cette limite,

$$m_0 = \frac{1}{1{,}201}; \qquad m_{\frac{\pi}{2}} = 2{,}265; \qquad M^2 = 1{,}88.$$

Dans la projection de sir James modifiée par le capitaine Clarke, à la même limite on trouve

$$m_0 = 1{,}149; \qquad m_{\frac{\pi}{2}} = 2{,}436; \qquad M^2 = 2{,}799.$$

Dans la première projection de Parent, à 90° du centre,

$$m_0 = 1{,}03; \qquad m_{\frac{\pi}{2}} = 1{,}63; \qquad M^2 = 1{,}68.$$

Dans la seconde projection de Parent

$$m_0 = \frac{1}{1{,}09}; \qquad m_{\frac{\pi}{2}} = 1{,}57; \qquad M^2 = 1{,}44.$$

Dans la projection orthographique, les valeurs générales de m_0 et $m_{\frac{\pi}{2}}$ sont

$$m_0 = \cos\theta; \qquad m_{\frac{\pi}{2}} = 1; \qquad M^2 = \cos\theta;$$

les almicantarats sont projetés en vraie grandeur, et sur les rayons le rapport d'agrandissement m_0 est égal à l'unité au centre de la projection et décroît jusqu'à la circonférence de la carte où il est nul ; le rapport M^2 passe par les mêmes valeurs ; à 60° du centre les surfaces ne sont que la moitié de celles qui leur correspondent sur la sphère.

Dans la projection centrale

$$m_0 = \frac{1}{\cos^2\theta}; \qquad m_{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\cos\theta}; \qquad M^2 = \frac{1}{\cos^3\theta};$$

chacun de ces rapports est égal à l'unité au centre de la projection, et infini pour $\theta = 90°$.

Dans la projection équidistante

$$m_0 = 1; \qquad m_{\frac{\pi}{2}} = \frac{\theta}{\sin\theta}; \qquad M^2 = \frac{\theta}{\sin\theta};$$

les rayons conservent leur véritable grandeur, et, sur les almicantarats, le rapport $m_{\frac{\pi}{2}}$, maximum en chaque point, croît depuis le centre où il est égal à l'unité jusqu'à ce que $\theta = 90°$, valeur pour laquelle il est égal à $\frac{\pi}{2} = 1{,}5708$; si l'on prolonge le carte au delà d'un hémisphère, ce rapport continue à croître jusqu'à l'infini.

Dans la projection zénithale intermédiaire $\rho = 3 \operatorname{tang} \frac{\theta}{3}$

$$m_0 = \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{3}}; \quad m_{\frac{\pi}{2}} = \frac{3 \operatorname{tang} \frac{\theta}{3}}{\sin\theta}; \quad M^2 = m_0 \, m_{\frac{\pi}{2}};$$

les rapports $m_0 \, m_{\frac{\pi}{2}}$ M^2 sont égaux à l'unité au centre de la projection ; quand θ croît jusqu'à 90°, le premier croît jusqu'à $\frac{4}{3}$ ou 1,333 ; le second jusqu'à $\sqrt{3}$ ou $1{,}7320_2$ le troisième jusqu'à 2,309.

Dans la projection $\rho = 4 \operatorname{tang} \frac{\theta}{4}$, le rapport m_0 croît depuis 1 jusqu'à 1,171, $m_{\frac{\pi}{2}}$ depuis 1 jusqu'à 1,6568, et enfin M^2 depuis l'unité jusqu'à 1,940.

Dans la projection équivalente zénithale de Lambert

$$m_0 = \cos \frac{\theta}{2}; \quad m_{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\cos \frac{\theta}{2}}; \quad M^2 = 1;$$

ainsi les longueurs des éléments des rayons sont réduites sur la carte dans le rapport de $\cos \frac{\theta}{2}$ à l'unité et les longueurs des éléments des almicantarats sont augmentées dans le même rapport. Quand θ croît de 0 à 90°, m_0 varie de 1 à $\frac{1}{1{,}414}$ et $m_{\frac{\pi}{2}}$ de 1 à 1,414.

On calculerait de même les rapports d'agrandissement dans la projection de sir Airy.

COMPARAISON DES PROJECTIONS ZÉNITHALES.

16. Si l'on dressait un tableau des valeurs de l'altération maximum des angles pour des valeurs assez rapprochées de θ, et un autre des rapports m_0, $m_{\frac{\pi}{2}}$ et M^2, on pourrait comparer entre elles les diverses projections zénithales et juger de leur mérite à diverses distances du centre. Mais une pareille comparaison est toute conventionnelle, et les résultats dépendent beaucoup du point de vue auquel on se place et de l'importance que l'on assigne à chacune des quantités qui entrent en comparaison.

On devra d'abord fixer l'échelle de construction de chaque projection et cette première détermination nécessitera une hypothèse sur la valeur du rayon de la circonférence qui devra limiter la carte ou sur la valeur du rayon au point que l'on considérera. Si l'on voulait s'affranchir de l'influence de ce rayon, on devrait supposer que, pour chaque valeur de θ, l'almicantarat coïncide avec le petit cercle correspondant de la sphère, et ne considérer que le rapport d'agrandissement m_0 normal à ce cercle ; il suffirait pour cela de diviser chaque valeur de m_0 par la valeur correspondante de ρ, et de comparer, pour les diverses projections, les quotients correspondants aux mêmes valeurs de θ.

On devra ensuite, en considérant l'usage auquel devra servir la carte, examiner quelles sont les parties où l'une des erreurs inhérentes à chaque projection devra être la moindre possible, et choisir le système qui satisfera le mieux à cette condition d'abord, puis aux autres du problème, sans toutefois exagérer les autres erreurs dans les mêmes parties de la carte ou en d'autres où elles pourraient avoir une influence notable sur le mérite relatif du canevas adopté.

On voit donc qu'il y a le plus souvent dans le choix à faire une question de compensation que l'intelligence du géographe résoudra bien mieux que ne pourraient le faire des règles fixes qui, dans la plupart des cas, ne seraient pas applicables ou ne donneraient pas tous les avantages possibles.

Ce que nous venons de dire à propos des projections zénithales, nous aurons occasion de le répéter plus loin pour un système quelconque de projection. Nous reviendrons alors sur les considérations qui doivent faire préférer l'emploi des projections zénithales qui se

prêtent mieux que toutes les autres à la représentation de la surface entière du globe ou d'un hémisphère.

Ces projections conviennent aussi très-bien pour la construction des cartes particulières, à cause de cette importante propriété que les altérations d'angles, de distances ou de surfaces y sont respectivement égales à égale distance du centre, et peuvent en tout point s'évaluer avec facilité.

Il est facile d'y tenir compte de l'aplatissement de la terre lorsque l'on veut construire une carte géographique. Il suffit, comme l'a indiqué Prony (1), de prendre pour rayon de la surface sphérique à représenter une moyenne géométrique entre les rayons de plus grande et de plus petite courbure de la surface ellipsoïdale au point choisi pour centre de la projection ; ce rayon aura donc pour valeur

$$R = \sqrt{\frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\lambda)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{a}{(1-e^2\sin^2\lambda)^{\frac{1}{2}}}}$$

$$= a\left(1-\tfrac{1}{2}e^2-\tfrac{1}{8}e^4\ldots..\right)\left(1+e^2\sin^2\lambda+e^4\sin^4\lambda\right)+\ldots.$$

en s'arrêtant aux termes en e^4 et appelant λ la latitude du centrede la projection ;

$$R = a[1-\tfrac{1}{2}e^2+e^2\sin^2\lambda-\tfrac{1}{8}e^4-\tfrac{1}{2}e^4\sin^2\lambda+e^4\sin^4\lambda+e^6(\ldots..)].$$

ou, plus simplemement, en négligeant les termes en e^4

$$R = a(1-\tfrac{1}{2}e^2+e^2\sin^2\lambda).$$

---

(1) *Voir* ci-dessus, ch. I, § 4.

CHAPITRE VI.

PROJECTIONS PAR DÉVELOPPEMENT ET LEURS MODIFICATIONS.

1. Nous avons déjà dit que pour que la surface à représenter sur un plan ne subît aucune altération dans les angles et dans les surfaces, il faudrait qu'elle fût développable comme le sont les surfaces coniques et cylindriques. Il est donc naturel, lorsque la portion du sphéroïde à représenter est peu considérable, de l'assimiler à une portion de surface de révolution développable se confondant sensiblement avec elle, de supposer tracés sur la seconde les méridiens et les parallèles suivant une loi qui donnera la plus grande analogie possible aux éléments des deux surfaces et de la développer ensuite sur un plan.

Les projections dont nous allons nous occuper portent le nom de *projections coniques* ou de *projections cylindriques* suivant qu'elles résultent du développement d'un cône ou de celui d'un cylindre.

PROJECTIONS CONIQUES.

2. Imaginons un cône tangent au globe suivant le parallèle qui occupe le milieu de l'espace à représenter, et supposons prolongés jusqu'à ce cône les plans des méridiens et des parallèles ; ce tronc de cône, qui diffère d'autant moins de la portion correspondante du globe que la zone à reproduire sera moins étendue en latitude, se trouvera divisé en quadrilatères mixtilignes représentant les quadrilatères curvilignes du sphéroïde et que l'on pourra regarder comme leurs équivalents. Il est bien évident que si nous développons ensuite ce cône tronqué en faisant coïncider l'une de ses génératrices avec une droite destinée à représenter le méridien correspondant de la carte, les parallèles seront représentés par des arcs de circonférences concentriques, et les méridiens par des droites partant toutes

du centre commun qui est le sommet de la surface conique ; le parallèle moyen gardera évidemment les longueurs de ses éléments, ce qui permettra de tracer chaque méridien en joignant le sommet aux points correspondants de ce parallèle.

Nous voyons que, par ce procédé, les quadrilatères sont rectangles comme sur la sphère, et que tous les détails situés sous la même latitude sont comparables, mais que des différences égales de latitudes sont représentées par des distances qui diminuent de plus en plus en allant du parallèle moyen vers le pôle et augmentent en se dirigeant de ce parallèle vers l'équateur. En outre, les différences de longitudes sont toutes plus grandes sur la surface conique que sur la sphère, excepté sur le parallèle moyen dont les degrés conservent leur véritable grandeur.

Pour que les latitudes ne soient pas altérées, on a imaginé de porter, à partir de l'intersection du méridien du milieu et du parallèle moyen sur ce méridien (fig. 45), des longueurs M*b*′, M*a*′... égales aux arcs MB, MA du méridien rectifié, de manière à espacer également les parallèles du cône comme ils le sont sur la surface de la sphère ; puis de prendre les distances S*b*′, S*a*′... pour rayons des projections des parallèles. Ces projections sont exprimées par des arcs ponctués sur la fig. 2 ; il n'y a plus par ce moyen d'erreur en latitude, et les distances en longitude sont déjà moins grandes que précédemment, comme l'indique la comparaison des arcs pleins et des arcs ponctués sur la même figure.

Quoique ce que nous venons de dire suffise pour tracer la projection conique, nous allons, pour plus de précision, appliquer le calcul à la construction.

Supposons d'abord la terre sphérique, soit a son rayon, λ la latitude du parallèle moyen que nous voulons représenter en véritable grandeur, $r = a \cos \lambda$ le rayon de ce parallèle, T la différence des longitudes des méridiens extrêmes de la carte, S l'angle au sommet du secteur développé.

L'arc mm' est égal au développement de l'arc rT du parallèle moyen ; donc, dans la figure 1,

$$\frac{180}{\pi a \cos \lambda} = \frac{\mathrm{T}}{\text{arc } mm'},$$

Or comme les lignes SM sont égales dans les deux figures, le rayon SM du parallèle moyen est égal à

$$SM = a \operatorname{cotang} \lambda ;$$

la figure 2 donnera donc

$$\frac{180}{\pi a \operatorname{cotang} \lambda} = \frac{S}{\operatorname{arc} mm'};$$

égalant les deux valeurs de arc mm' sur le cône et sur la projection, on arrive à

$$S = T \sin \lambda.$$

Ainsi l'on tracera un angle mSm' d'autant de degrés que le veut cette expression pour représenter l'angle total du développement ; on prendra $SM = a \operatorname{cotang} \lambda$ pour rayon du parallèle moyen de la projection, puis on portera de M vers a' et b' les longueurs développées en ligne droite du méridien MP, c'est-à-dire des arcs de 1°, 5°, 10°, etc., entre les limites des latitudes extrêmes. Si la carte doit comprendre d degrés en latitude, ab sera égal à $\frac{\pi a d}{180^\circ}$, et chacune des longueurs Ma', Mb' à $\frac{\pi a d}{90^\circ}$; puis on décrira du centre S des arcs qui figureront les parallèles de la carte. Les méridiens seront des droites partant du sommet S et passant par des points également distants pris sur mm'. En appelant θ l'angle de deux méridiens de la carte correspondant à l'angle t compté sur la sphère, on aura évidemment

$$\frac{\theta}{t} = \frac{S}{T} = \sin \lambda.$$

A la latitude l le rayon du parallèle sera égal à a [cotang λ — (l — λ)] et l'arc correspondant à la longitude t, à

$$at \sin \lambda [\operatorname{cotang} \lambda - (l - \lambda)].$$

L'erreur commise sur chaque degré de parallèle pourra donc s'exprimer par

$$a \sin \lambda [\operatorname{cotang} \lambda - (l - \lambda)] - a \cos \lambda ,$$

ou par

$$a(l - \lambda) \sin \lambda$$

Lorsque le centre commun S tombe en dehors des limites de la feuille, on construit les parallèles par points en les rapportant à deux axes de coordonnées rectangulaires, le méridien moyen et la tangente au parallèle moyen.

En appelant ρ le rayon de chaque parallèle, on pourra écrire

$$\rho = a \operatorname{cotang} \lambda - a(l - \lambda)$$
$$x = \rho \sin \theta = \rho \sin (t \sin \lambda)$$
$$y = a \operatorname{cotang} \lambda - \rho \cos (t \sin \lambda).$$

Quand on aura calculé ainsi les coordonnées d'autant de points que l'on voudra d'un même parallèle et celles du parallèle moyen pour lequel il suffira de faire dans les formules précédentes $l = \lambda$, on tracera les méridiens en joignant par des droites les points de même longitude; les autres parallèles s'obtiendront en portant sur ces méridiens, au-dessus et au-dessous du parallèle moyen, les longueurs des arcs de latitude.

Il est facile, dans la projection conique, de tenir compte de la forme sphéroïdale de la terre. Le rayon du parallèle moyen développé doit d'abord être modifié par la substitution de la grande normale au rayon de la terre, de sorte qu'en appelant a le rayon de l'équateur terrestre, le rayon de la projection du parallèle moyen dont λ est la latitude, sera

$$\frac{a \operatorname{cotang} \lambda}{(1 - e^2 \sin^2 \lambda)^{\frac{1}{2}}}.$$

Pour avoir ensuite les rayons des autres parallèles, on portera sur le méridien les longueurs des degrés de latitude telles qu'elles ont été calculées dans la table en prenant $\frac{1}{299,15}$ pour valeur de l'aplatissement.

L'angle θ de deux méridiens dont les longitudes diffèrent de t, sera exprimé par

$$\theta = \frac{t \sin \lambda}{(1 - e^2 \sin^2 \lambda)^{\frac{1}{2}}}.$$

Les coordonnées se calculent comme dans l'hypothèse de la terre sphérique.

Les avantages de la projection conique sont de rendre les erreurs inhérentes à tout canevas, indépendantes de la longitude, de permettre de comparer entre eux les éléments situés sous la même latitude, et de conserver les angles des méridiens et des parallèles; les principaux défauts sont de ne conserver ni les angles ni les surfaces et de ne donner les distances avec exactitude que dans le sens

des méridiens, les parallèles situés tant au-dessus qu'au-dessous du parallèle moyen excèdent ceux qui leur correspondent sur le globe, de sorte que cette projection est tout à fait impropre à représenter des pays étendus en latitude.

3. On attribue l'invention de la projection conique à *Claude Ptolémée* d'Alexandrie (150 ans après J.-C.), qui dans le XXIVe chapitre du premier livre de sa *Géographie*, donne deux méthodes pour représenter le monde connu de son temps; dans la première le célèbre géographe, après avoir montré la possibilité de voir les méridiens projetés en ligne droite, remarque que, comme il est impossible de conserver sur la carte le rapport exact des degrés de tous les parallèles, il suffit de conserver ce rapport pour le parallèle extrême nord passant par *Thulée*, et, pour l'équateur, de développer le parallèle de *Rhodes* (sur lequel avaient été faites le plus de recherches relatives aux degrés des parallèles) de façon que ses degrés conservent leur rapport véritable avec les degrés de méridien. Assignant 63° à la latitude de Thulée, et 36° à celle de Rhodes, Ptolémée prend pour rayon de ce dernier parallèle (fig. 46) GK = 79 *m* (*m* désignant la longueur d'un degré de méridien), nombre qui diffère très-peu de la cotangente du parallèle de 36° dont la valeur est 78,87 *m*; remarquons toutefois que rien, dans l'ouvrage de Ptolémée, ne semble indiquer que l'auteur ait eu en vue le développement d'un cône tangent à la terre; c'est plutôt par tâtonnements que par un calcul rigoureux qu'il a dû arriver à ce résultat. Quoi qu'il en soit, le rayon GS de l'équateur est pris égal à 79 *m* + 36 *m* ou 115 *m* et le rayon GP du parallèle de Thulée à 115 *m* — 63 *m* ou 52 *m*; remarquant ensuite que les degrés du parallèle de Rhodes sont à ceux de l'équateur dans le rapport $\frac{\cos 36^\circ}{1}$ ou environ $\frac{4}{5}$, Ptolémée porte sur ce parallèle à droite et à gauche du méridien du milieu 18 arcs de grand cercle de 4° (soit 4 *m*) représentant chacun 5° de ce parallèle, et trace les méridiens en joignant ces points au centre commun G. Les arcs QPO, TSR sont ainsi dans le rapport de PG à SG, soit $\frac{52}{115}$, rapport qui diffère très-peu du véritable $\frac{\cos 63}{1} = \frac{52{,}21}{115}$ qui existe entre les degrés du parallèle de Thulée et ceux de l'équateur, mais ils sont trop grands comparés à HKL. Comme Ptolémée étendait le monde connu à 16° 1/2 au sud de l'équateur, il trace à cette latitude l'*antiparallèle* de Méroë, lieu situé à 16° 1/2 au nord de l'équateur; il divise

cet arc comme celui qui passe par Méroë et trace les méridiens en lignes droites joignant ces points à ceux de l'équateur. Cette projection n'est, comme on le voit, qu'une altération grossière de la projection conique ; aussi Ptolémée lui préfère une autre méthode dont nous parlerons plus loin.

4. Nous avons dit que la projection conique ne pouvait convenir que pour représenter des pays peu étendus en latitude. En supposant que l'arc AB de latitude (fig. 47) soit très-petit, il n'y aurait pas d'inconvénient à prendre sa corde pour le côté du cône tronqué à développer. Dans ce cas les rayons des parallèles extrêmes seraient respectivement AO et BO, et la carte aurait une exactitude rigoureuse sur ces parallèles, mais ceux qui seraient intermédiaires pécheraient par défaut.

L'angle O ayant pour mesure $\frac{1}{2}$ arc supplément de AB — $\frac{1}{2}$ arc BP ou $\frac{l_a + l_b}{2}$ (en appelant l_a et l_b les latitudes extrêmes), le triangle rectangle AOa donne

$$\text{AO} = \rho_a = a \frac{\cos l_a}{\sin \frac{1}{2}(l_a + l_b)}.$$

De même

$$\text{BO} = \rho_b = a \frac{\cos l_b}{\sin \frac{1}{2}(l_a + l_b)}.$$

Mentionnons ici la mappemonde de Jean *Ruysch* publiée à Rome en 1508, et projetée en développement du cône ayant son sommet au pôle arctique, coupant la sphère à l'équateur et se terminant sur le plan prolongé du parallèle de 38° de latitude australe (1).

Gérard *Mercator*, le célèbre inventeur des cartes réduites, proposa le premier de remplacer, pour les cartes particulières, le cône tangent à la sphère par un cône sécant, traversant le globe sur deux parallèles symétriquement choisis de manière à balancer dans de justes proportions le rétrécissement et la dilatation des surfaces représentées dans le milieu et sur les bords de la carte. C'est sur ce principe que fut dressée la projection de la grande carte d'Europe tracée par Mercator en 1554 ; la convergence des méridiens y est déterminée par le rapport mutuel des parallèles de 40° et de 60° de latitude dont les degrés conservent leur véritable rapport avec les

(1) Elle est reproduite tout entière à l'échelle de 2/5 dans l'*Atlas du moyen âge de* LELEWELL, Bruxelles, 1857, in-8, planche XLIV.

degrés de méridiens tous égaux entre eux. Il y a alors contraction dans la zone intermédiaire et expansion dans les deux zones extrêmes.

5. Le procédé de Mercator fut adopté deux siècles après par l'astronome français Joseph-Nicolas *de l'Isle* pour la construction de la grande carte de la Russie publiée en 1745. Cette carte comprenant depuis le 40e degré de latitude nord jusqu'au 70e, le parallèle moyen répondait à 55° et les parallèles communs au cône et à la sphère étaient ceux de 47° 30′ et de 62° 30′ ; les méridiens étaient divisés en degrés égaux.

Le célèbre mathématicien *Euler* a étudié cette projection (1), et, après en avoir exposé les principes, a déterminé le cône qui satisfait aux deux conditions suivantes :

1° que les erreurs soient égales aux extrémités méridionale et septentrionale de la carte ;

2° qu'elles soient aussi égales à la plus grande de celles qui ont lieu vers le parallèle moyen.

Nous reproduisons ici ce travail qui, quoique appliqué à la carte de Russie, pourra servir de type pour les cartes des pays très-étendus en latitude.

Soit (fig. 48) l_a la moindre latitude du pays à représenter, l_b la plus grande ; AB la portion du méridien du milieu comprise entre ces deux latitudes extrêmes. Désignons par δ la grandeur de 1° de méridien ; soient P et Q les intersections du méridien central avec les parallèles dont les degrés doivent conserver sur la carte leur véritable rapport avec ceux de latitude, l_p et l_q les latitudes de ces deux parallèles, sur chacun d'eux un degré de longitude a respectivement pour valeur

$$\delta \cos l_p, \qquad \text{et} \qquad \delta \cos l_q.$$

Portons ces valeurs de 1°, Pp et Qq sur deux droites perpendiculaires à AB et que nous considérerons comme des arcs élémentaires de parallèles, et joignons pq ; cette droite représentera le méridien éloigné de 1° en longitude du méridien central AB, et le point d'intersection O sera le point de concours de tous les méridiens et le centre de tous les parallèles.

---

(1) *De projectione geographica de l'Isliana in mappa generali Imperii Russici usitata*, dans les *Acta Academiæ scientiarum imperialis Petropolitanæ pro anno MDCCLXXVII*, Saint-Pétersbourg, 1778, in-4, p. 143 à 153.

Cherchons d'abord la distance de ce centre O à l'équateur. Nous aurons de suite

$$\frac{Pp - Qp}{PQ} = \frac{Pp}{PO}, \quad \text{ou} \quad \frac{\delta(\cos l_p - \cos l_q)}{l_p - l_q} = \frac{\delta \cos l_p}{PO},$$

d'où

$$PO = \frac{\cos l_p (l_q - l_p)}{\cos l_p - \cos l_q}.$$

Ce centre une fois déterminé, on décrira avec OP une circonférence sur laquelle on portera des longueurs égales $\delta \cos l_p$; les droites qui joindront les points de division au centre O seront les méridiens distants de 1° de longitude ; en portant ensuite sur le méridien du milieu les degrés égaux de latitude, et, faisant passer des circonférences concentriques par chacun des points de division, on aura les parallèles.

Cherchons les erreurs qui résultent de cette construction sur les parallèles extrêmes de A et de B. D'abord l'angle $\omega = POp$ qui représente *un* degré de la sphère s'obtiendra par l'égalité

$$\omega = \frac{Pp}{PO} = \frac{\delta(\cos l_p - \cos l_q)}{l_p - l_q}$$

qui devient

$$\omega = \frac{\cos l_p - \cos l_q}{(l_q - l_p)\alpha},$$

en supposant $\delta = 1°$, et convenant d'exprimer le dénominateur $l_p - l_q$, non en degrés, mais en parties du rayon, ce qui revient à prendre $\alpha = 0{,}01745329$ pour valeur de 1° sur une circonférence de rayon égal à l'unité.

Appelons encore z la distance en degrés du centre O au pôle. La distance du point P au pôle étant exprimée par $90° - l_p$, celle de ce même point au point O le sera par $90° - l_p + z$ dont la valeur en parties du rayon sera

$$\alpha(90° - l_p + z).$$

On pourra donc écrire

$$PO = \frac{(l_q - l_p)\cos l_p}{\cos l_p - \cos l_q} = (90° - l_p + z),$$

d'où

$$z = \frac{(l_q - l_p)\cos l_p}{\cos l_p - \cos l_q} - 90° + l_p.$$

La distance du parallèle extrême de A au point O sera

$$AO = 90° - l_a + z,$$

et, en parties du rayon

$$AO = \alpha(90° - l_a + z);$$

en multipliant AO par ω on aura la valeur du degré sur ce parallèle

$$Aa = \frac{\delta(90° - l_a + z)(\cos l_p - \cos l_q)}{l_q - l_p},$$

au lieu de $\delta \cos l_a$; la différence de ces deux valeurs donne donc l'erreur sur le parallèle de A. En B cette erreur est la différence entre

$$\frac{\delta(90° - l_b + z)(\cos l_p - \cos l_q)}{l_q - l_p} \quad \text{et} \quad \delta \cos l_b.$$

Si nous cherchons, comme l'a fait Euler, à déterminer les parallèles de P et Q de manière à rendre les erreurs en A et B égales entre elles, il faut poser

$$\frac{(90° - l_a + z)(\cos l_p - \cos l_q)}{l_q - l_p} - \cos l_a = \frac{(90° - l_b + z)(\cos l_p - \cos l_q)}{l_q - l_p} - \cos l_b$$

ou

$$(l_a - l_b)(\cos l_p - \cos l_q) + (l_q - l_p)(\cos l_a - \cos l_b) = 0.$$

Nous pouvons représenter 1° sur les parallèles de A et de B respectivement par

$$\alpha(90° - l_a + z)\omega \quad \text{et} \quad \alpha(90° - l_b + z)\omega;$$

on obtiendra alors

$$\alpha(90° - l_a + z)\omega - \cos l_a = \alpha(90° - l_b + z)\omega - \cos l_b,$$

ou

$$\alpha(l_a - l_b)\omega = \cos l_a - \cos l_b,$$

d'où enfin

$$\omega = \frac{\cos l_a - \cos l_b}{\alpha(l_b - l_a)},$$

valeur qui devra s'exprimer en minutes et secondes.

Égalons de plus ces deux erreurs à la plus grande de celles qui peuvent avoir lieu entre A et B, en supposant d'abord que cette erreur maximum ait lieu sur le milieu X de AB ; la latitude de X étant $\frac{l_a + l_b}{2}$, l'erreur y sera égale à

$$-\left[\alpha\left(90° - \frac{l_a + l_b}{2} - z\right)\omega - \cos\frac{l_a + l_b}{2}\right],$$

car elle est évidemment de signe contraire aux erreurs de A et B. Nous aurons, en exprimant la condition énoncée,

$$\alpha(90^\circ - l_a + z)\omega - \cos l_a = \cos\frac{l_a + l_b}{2} - \alpha\left(90^\circ - \frac{l_a + l_b}{2} - z\right)\omega,$$

$$\alpha(90^\circ - l_b + z)\omega - \cos l_b = \cos\frac{l_a + l_b}{2} - \alpha\left(90^\circ - \frac{l_a + l_b}{2} - z\right)\omega.$$

Remplaçons ω par sa valeur $\dfrac{\cos l_a - \cos l_b}{\alpha\,(l_b - l_a)}$; il vient

$$\frac{(180^\circ - \frac{3}{2}l_a - \frac{1}{2}l_b + 2z)(\cos l_a - \cos l_b)}{l_b - l_a} = \cos l_a + \cos\frac{l_a + l_b}{2},$$

égalité qui se réduit à

$$(180^\circ - \tfrac{3}{2}l_a - \tfrac{1}{2}l_b + 2z) = \frac{l_b - l_a}{\cos l_a - \cos l_b}\left(\cos l_a + \cos\frac{l_a + l_b}{2}\right),$$

d'où l'on tire enfin z.

Appliquons ces calculs au cas de la carte de Russie

$$l_a = 40^\circ; \quad l_b = 70^\circ; \quad \frac{l_a + l_b}{2} = 55^\circ.$$

On calcule d'abord ω

$$\omega = \frac{\cos 40^\circ - \cos 70^\circ}{30\alpha} = \frac{0{,}4240243}{0{,}5235987} = 48'\,44''.$$

L'équation

$$(180^\circ - \tfrac{3}{2}l_a - \tfrac{1}{2}l_b + 2z)\alpha\omega = \cos l_a + \cos\frac{l_a + l_b}{2}$$

donne

$$(85^\circ + 2z)\alpha\omega = \cos 40^\circ + \cos 55^\circ = 1{,}33962,$$

or $\alpha\omega = 0{,}0141$; donc

$$2z = \frac{1{,}33961}{0{,}01410} - 85^\circ = 10^\circ, \quad \text{d'où} \quad z = 5^\circ.$$

Nous avons supposé que la plus grande erreur était au milieu de AB; cherchons quel est en réalité le point où l'erreur est maximum; soit x sa latitude; l'erreur y sera

$$\alpha(90^\circ - x + z)\omega - \cos x;$$

en égalant sa différentielle à zéro, nous obtenons

$$-\alpha\omega dx + \alpha dx \sin x = 0,$$

d'où

$$\sin x = \omega = 0{,}8098270,$$

et enfin

$$x = 54^\circ 4',$$

latitude qui définit un lieu peu éloigné du milieu de AB, dont la latitude est 55°.

En égalant l'erreur en x à l'erreur en A et B, on obtient

$$\alpha(180^\circ - l_a - x + 2z)\omega = \cos l_a + \cos x,$$

$$85^\circ 55' + 2z = \frac{\cos l_a + \cos x}{\alpha\omega} = 95^\circ 56'.$$

Donc

$$z = 5^\circ 0' 30''.$$

On peut donc prendre sans erreur appréciable $z = 5°$.
L'erreur en A et en B est alors exprimée par

$$\alpha\omega(90^\circ - l_a + z) - \cos l_a = 55\alpha\omega - 0{,}7660444 = 0{,}00946.$$

Ainsi le degré du parallèle de A (40° de latitude) sera exprimé par 0,77550 au lieu de 0,76604, valeur du degré correspondant sur la sphère; ce degré est donc trop grand de $\frac{1}{105}$ environ du degré du méridien ou de $\frac{1}{81}$ du degré réel du parallèle de 40°. On trouve de même que le degré du parallèle de 70°, en B, est trop grand de $\frac{1}{36}$ de sa valeur réelle qui est 0,34202.

Cette erreur, dit Euler, est parfaitement acceptable à cette latitude de 70°, et ainsi la position du centre des parallèles à 5° du pôle convient très-bien pour la carte de la Russie. Il ne faut pas oublier que les méridiens distants sur la sphère de 1° sont représentés par des droites faisant entre elles des angles de 48′ 44″.

Euler remarque encore que le grand cercle de la sphère le plus altéré dans cette projection est l'équateur dont chaque degré est égal à 1,33950, en prenant le degré de latitude pour unité; mais comme il ne figure pas dans la carte, cette erreur nuit peu à la projection.

Si du point F (fig. 49) représentant le méridien central, et situé par conséquent sur l'équateur à une distance FE du point E représentant 90° de la sphère, on abaisse FG perpendiculaire sur OE, cette droite représentera l'un des grands cercles perpendiculaires au

méridien OE ; sa longueur différera peu de sa longueur réelle 90°, car l'angle EOF étant égal à 72° 53′ et OF = OE à 95°, on a

$$FG = 95 \sin 72° 53' - 90°,79221.$$

Il en résulte que, dans cette projection, on peut obtenir les distances entre deux points sans commettre une grande erreur en mesurant à l'échelle des latitudes la droite qui les unit.

La projection n° XXXI a été dressée dans ce système.

6. Le savant anglais Patrice *Murdoch* a posé, en 1758, les principes d'une projection conique égale, *dans son ensemble seulement*, à la zone sphérique correspondante et ayant avec elle deux parallèles communs (1).

Soient (fig. 50) l_a, l_b les latitudes des parallèles extrêmes A*a*, B*b* qui limitent la zone à représenter ; M le milieu de AB, sa latitude sera $\frac{l_a + l_b}{2}$; a le rayon de la sphère exprimé en degrés, le degré étant pris pour unité.

Pour satisfaire aux conditions du problème, il faut, en supposant que PN et PO soient les rayons des parallèles extrêmes de la carte, que la droite ON soit égale à l'arc AB, et que la surface engendrée par la révolution de ON autour de l'axe *p*C soit égale à $2\pi a\,(ba)$.

Cette droite ON doit évidemment couper le quadrant PME en deux points η et ζ également distants du point M.

Appelons δ les angles égaux ηCM, ζCM ; on devra avoir

$$2\pi \mathrm{K}k \text{ arc AB} = 2\pi a\,(ab).$$

Or les triangles semblables K*ck*, MFC donnent

$$\frac{\mathrm{K}k}{\mathrm{FC}} = \frac{\mathrm{KC}}{\mathrm{MC}}; \quad \text{donc} \quad \mathrm{K}k = a \cos \frac{l_a + l_b}{2} \cos \delta,$$

et, en substituant,

$$\frac{l_b - l_a}{2} \cos \frac{l_a + l_b}{2} \cos \delta = \sin l_b - \sin l_a = 2 \sin \frac{l_b - l_a}{2} \cos \frac{l_a + l_b}{2};$$

---

(1) *Philosophical Transactions ; vol. L, part. II, for the year* 1758, Londres, 1759, in-4, p. 553, à 562 : *of the best form of geographical Maps, by the Rev.* Patrick Murdoch, M. A. F. R. S ; read feb. 9. 1758.

d'où

$$\cos\delta = \frac{2}{\frac{l_b - l_a}{2}} \sin\frac{l_b - l_a}{2} = \frac{\sin\frac{l_b - l_a}{2}}{l_b - l_a}.$$

On calculera facilement δ et par suite la distance du milieu K du méridien de la carte aux deux parallèles communs à la sphère et au cône.

Cherchons maintenant le rayon $Kp = R$ du parallèle du milieu :

$$\frac{Kp}{CF} = \frac{KC}{MF}, \quad \text{ou} \quad Kp = a\cos\frac{l_a + l_b}{2} \frac{\cos\delta}{\sin\frac{l_a + l_b}{2}},$$

donc

$$R = a\,\text{cotang}\,\frac{l_a + l_b}{2}\cos\delta.$$

Il ne reste plus qu'à tracer les méridiens par le simple développement du cône. Si nous appelons T la différence des longitudes des méridiens extrêmes du pays à représenter, S l'angle correspondant du développement, on devra avoir

$$TKk = S.Kp;$$

en remplaçant Kk par $a\cos\frac{l_a+l_b}{2}\cos\delta$ et Kp par $a\,\text{cotang}\,\frac{l_a+l_b}{2}\cos\delta$, il vient

$$S = T\sin\frac{l_a + l_b}{2}.$$

Murdoch, pour tracer les parallèles intermédiaires, divisait la droite ON en parties égales, de sorte que le rayon d'un parallèle quelconque était égal à

$$R + \frac{l_a + l_b}{2} - l.$$

Cette méthode, contraire aux conditions du problème posé par Murdoch, était tout arbitraire, mais avait l'avantage de diminuer un peu les défauts de la carte : c'est *Tobias Mayer* (1) qui, en repre-

(1) J. T. Mayer, *Anweisung zur Werzeichnung der Charten, cap III*, 1794 *Erlangen*, réédité en 1804, 1815, 1827.

nant le problème de Murdoch, a rempli la condition de conserver les deux parallèles η et ζ en leur donnant pour rayons

$$p\eta = pK - K\eta \quad \text{et} \quad p\zeta = pK + K\zeta,$$

et comme $K\eta = K\zeta = a \sin \delta$, on aura

$$p\eta = R - a \sin \delta = a \frac{\cos\left(\frac{l_a + l_b}{2} + \delta\right)}{\sin \frac{l_a + l_b}{2}},$$

$$p\zeta = R + a \sin \delta = a \frac{\cos\left(\frac{l_a + l_b}{2} - \delta\right)}{\sin \frac{l_a + l_b}{2}}.$$

Quelle que soit la méthode adoptée, cette projection ne peut convenir pour une bande de plus de 8 ou 10 degrés de latitude, et dans des limites aussi rapprochées presque toutes les projections coniques ont à peu près les mêmes avantages ; quant à la question de conserver la superficie totale de la carte, elle n'est que secondaire et oblige au contraire à comprimer les superficies et les distances dans la zone moyenne, tant en longueur qu'en largeur, et à les étendre dans les deux zones extrêmes dans toutes les directions.

7. Murdoch a indiqué une seconde projection conique qui a pour but d'obtenir l'exactitude de la perspective en plaçant l'œil au centre du globe comme dans la projection centrale et en s'assujettissant encore à la condition de conserver la surface totale de la zone à représenter (1).

Il suffit pour cela (fig. 51) d'imaginer des rayons visuels menés du centre C de la terre aux différents points de la surface ; leurs intersections avec la surface du cône sécant ayant pour axe la ligne des pôles donneront les points correspondants de la carte. Ainsi les points extrêmes O et N s'obtiendront en joignant le centre C aux points extrêmes A et B de la zone sphérique considérée. La distance CK qui détermine la position du cône s'obtiendra par la condition de conservation de la surface totale. Substituons à la détermination de CK celle de KO qui est la demi-longueur N. et S. de la carte ; nous aurons

(1) *Addenda to Mr. Murdoch's paper. Philosophical Transactions* (*ubi supra*, p. 568).

$$2\pi Kk \,.\, 2 \,.\, OK = 2\pi a(ab).$$

$$Kk = KC \cos\frac{l_a + l_b}{2} = OK \cos\frac{l_a + l_b}{2} \operatorname{cotang}\frac{l_b - l_a}{2}.$$

Donc

$$OK^2 \cos\frac{l_a + l_b}{2} \operatorname{cotang}\frac{l_b - l_a}{2} = a^2 \sin\frac{l_b - l_a}{2} \cos\frac{l_a + l_b}{2},$$

$$OK^2 = \frac{a^2 \sin^2\dfrac{l_b - l_a}{2}}{\cos\dfrac{l_b - l_a}{2}} = a^2 \operatorname{tang}^2\frac{l_b - l_a}{2} \cos\frac{l_b - l_a}{2},$$

et enfin

$$OK = a \operatorname{tang}\frac{l_b - l_a}{2}\sqrt{\cos\frac{l_b - l_a}{2}}.$$

Si nous appelons δ la différence des latitudes $l - \dfrac{l_a + l_b}{2}$ entre un parallèle quelconque et le parallèle moyen passant par K, la distance correspondante d sur la carte sera égale à

$$d = KC \operatorname{tang}\delta = a \operatorname{tang}\delta \sqrt{\cos\frac{l_b - l_a}{2}}.$$

Pour les parallèles communs à la sphère et au cône l'angle δ' sera défini par la relation

$$\cos\delta' = \sqrt{\cos\frac{l_b - l_a}{2}},$$

donc

$$K\eta = K\zeta = a\sqrt{1 - \cos\frac{l_b - l_a}{2}}\; a\sqrt{2}\sin\frac{l_b - l_a}{4}.$$

Les rayons des parallèles s'obtiennent très-facilement. D'abord

$$pK = R = CK \operatorname{tang} KCp = a \operatorname{cotang}\frac{l_a + l_b}{2}\sqrt{\cos\frac{l_b - l_a}{2}}.$$

Le rayon du parallèle supérieur, dont la latitude est l_b, sera

$$\rho_b = p0 = Kp - K0 = \frac{a\cos l_b\sqrt{\cos\dfrac{l_b - l_a}{2}}}{\sin\dfrac{l_a + l_b}{2}\cos\dfrac{l_b - l_a}{2}}.$$

Le rayon du parallèle inférieur, dont la latitude est l_a, sera

$$\rho_a = pN = Kp + KO = \frac{a \cos l_a \sqrt{\cos \frac{l_b - l_a}{2}}}{\sin \frac{l_a + l_b}{2} \cos \frac{l_b - l_a}{2}}.$$

Enfin le rayon d'un parallèle de latitude l sera

$$\rho_l = pK - d = \frac{a \sqrt{\cos \frac{l_b - l_a}{2}} \cos l}{\sin \frac{l_a + l_b}{2} \cos \left(l - \frac{l_a + l_b}{2} \right)}.$$

On pourra aussi, dans cette projection comme dans la précédente, tracer les parallèles par points à l'aide de leurs coordonnées rectangulaires x et y.

Les méridiens s'obtiendront encore par le simple développement du cône. L'angle du secteur développé sera donné par la formule

$$S = T \sin \frac{l_a + l_b}{2},$$

en appelant T la différence des longitudes des méridiens extrêmes.

C'est à tort que quelques auteurs ont pensé que cette projection, connue sous le nom de *seconde projection de Murdoch*, jouissait de la propriété de conserver les angles et par suite le rapport entre les arcs élémentaires de méridiens et de parallèles; elle convient un peu mieux que la première pour les *coniglobes* parce qu'elle donne l'aspect que l'on aurait en se plaçant au centre du globe, chaque point restant sur son rayon visuel. Mais elle ne doit pas être confondue avec la projection conique orthomorphe de Lambert, dont nous allons parler.

8. Signalons auparavant une troisième projection indiquée en quelques mots par Murdoch, dans laquelle la position du cône est donnée par la relation

$$\frac{CK}{CM} = \frac{\text{arc MA}}{\text{tang MA}},$$

d'où l'on déduit

$$CK = \frac{a \frac{\pi}{180} \frac{l_b - l_a}{2}}{\text{tang} \frac{l_b - l_a}{2}} = \frac{a \cdot \frac{l_b - l_a}{2}}{57{,}2957\ldots \text{tang} \frac{l_b - l_a}{2}}.$$

La condition de conservation de la surface totale donne les autres éléments.

La rayon moyen

$$pK = R = CK \operatorname{cotang} \frac{l_a + l_b}{2} = \frac{a \frac{l_b - l_a}{2} \operatorname{cotang} \frac{l_a + l_b}{2}}{57{,}2957\ldots \operatorname{tang} \frac{l_b + l_a}{2}}.$$

Les distances égales

$$KO = KN = \frac{a\,57{,}2957\ldots \sin \frac{l_b - l_a}{2} \operatorname{tang} \frac{l_b - l_a}{2}}{\frac{l_b - l_a}{2}}.$$

Les autres parallèles s'obtiennent en partageant les méridiens en parties égales.

Ce troisième système étant, sous tous les rapports, inférieur aux deux premiers, nous ne nous y arrêterons pas.

9. Lambert (1) est le premier qui ait indiqué un développement conique jouissant de la propriété de conserver les angles, excepté au sommet où les 360° ayant sur la sphère le pôle pour centre, sont évidemment représentés par un angle variable suivant les conditions du problème. Nous avons exposé avec détail aux §§ 4 et 8 du chapitre des projections sans déformation, la méthode employée par ce savant géomètre, ainsi que les résultats auxquels il est parvenu; nous avons dit aussi que l'illustre Gauss, cinquante ans après Lambert, a obtenu les mêmes résultats comme application de sa formule générale des projections conservant la similitude des représentations.

En appelant ρ le rayon d'un parallèle quelconque, z sa colatitude $90^e - l$, nous avons établi la formule

$$\rho = K\left(\operatorname{tang} \frac{z}{2}\right)^{\lambda},$$

dans laquelle λ indique le rapport entre l'angle de deux méridiens quelconques de la projection et l'angle correspondant sur la sphère, et K une longueur constante que nous avons prise égale à $\frac{1}{2}\pi a$.

Cherchons l'angle au sommet 2α du cône sécant à la sphère dont le développement doit donner le canevas de la carte. L'angle au cen-

(1) *Entwerfung der Charten*, sect. IV, p. 135.

tre du secteur développé étant égal à $\lambda . 360^0$, l'égalité de deux arcs correspondants quelconques du cône et de ce secteur donnera

$$2\pi\rho \sin\alpha = \frac{2\pi}{360}\rho\lambda . 360,$$

d'où

$$\sin\alpha = \lambda.$$

Le rapport d'agrandissement des arcs élémentaires est exprimé par

$$m = \frac{\lambda K \left(\operatorname{tang}\frac{z}{2}\right)^{\lambda}}{a \sin z},$$

et celui des surfaces élémentaires est le carré de m.

Nous avons vu comment on peut, dans la projection conique orthomorphe de Lambert, tenir compte de l'aplatissement de la terre.

Pour les cartes particulières la valeur de λ se détermine le plus souvent par la connaissance des colatitudes z_0 et z_1 des parallèles dont les degrés doivent conserver leur véritable rapport avec ceux de latitude et qui sont, par conséquent, communs à la sphère et au cône,

$$\lambda = \frac{\log\sin z_1 - \log\sin z_0}{\log\operatorname{tang}\frac{z_1}{2} - \log\operatorname{tang}\frac{z_0}{2}}.$$

Sir *John Herschel* (1), en traitant un cas particulier du problème de Gauss, a donné trois applications de la même formule pour les cas de $\lambda = \frac{2}{3}$, $\lambda = \frac{1}{2}$, $\lambda = \frac{1}{3}$; la première représente la surface totale du globe dans un secteur circulaire de 240°, la seconde dans un demi-cercle et la troisième dans un secteur de 120°.

10. Le docteur H. C. *Albers* de Lünebourg, après avoir étudié les trois projections de Murdoch (2) et en avoir montré les défauts, détermina une projection conique possédant la propriété de conserver les surfaces élémentaires aussi bien que la surface totale. Nous en avons déjà parlé (3) en traitant des projections équivalentes. Rappelons en quelques mots le principe de sa construction.

---

(1) *Voir* chap. II, § 11, note 3.

(2) *Ueber Murdoch's drey Kegelprojectionen von H. C.* Albers, inséré dans la *Monatliche Correspondenz* de Zach, février 1805, p. 97 à 114, et mars, p. 240 à 250.

(3) *Voir* chap. III, § 16.

Soient l_1 et l_2 les latitudes de deux parallèles qui doivent être communs au cône et à la sphère.

On calculera d'abord l'expression

$$K = \frac{1}{\sin\frac{l_1+l_2}{2}\cos\frac{l_2-l_1}{2}},$$

puis les rayons des deux parallèles l_1 et l_2 par les formules

$$\rho_1 = aK\cos l_1; \qquad \rho_2 = aK\cos l_2.$$

Le rayon d'un parallèle quelconque de latitude l aura pour expression

$$\rho = \sqrt{2aK(\sin l_1 - l) + \rho_1^2}.$$

Les méridiens s'obtiennent à la manière ordinaire par le simple développement du cône; les angles de ces méridiens entre eux sont réduits dans le rapport de 1 à K.

11. Lambert a indiqué aussi (1) toute une famille de projections coniques jouissant de la propriété de conserver les surfaces ; c'est ce que nous avons appelé les *projections isosphériques sténotères de Lambert.* Leur formule générale est

$$\rho = 2\sqrt{m}a\sin\frac{z}{2},$$

dans laquelle z désigne la colatitude de chaque parallèle, ρ le rayon de sa projection et m un coefficient constant tel que les angles des méridiens de la carte sont dans le rapport de 1 à m avec ceux de la sphère. Il en résulte que, si l'on appelle 2α l'angle au sommet du cône supposé tangent à la sphère, on doit avoir

$$\frac{1}{m} = \sin\alpha.$$

Ces projections sont remarquables par la facilité avec laquelle on construit graphiquement la valeur de chaque rayon ρ, le facteur $2a\sin\frac{z}{2}$ représentant la corde de l'arc de méridien qui joint, sur la sphère, le pôle au parallèle de colatitude z. La valeur de m se déter-

(1) *Voir* chap. III, §§ 13 et 16.

mine par la connaissance de la colatitude z_0 du parallèle dont les degrés devront sur la carte conserver leur rapport exact avec ceux de latitude, car on doit avoir

$$m = \frac{1}{\cos^2 \frac{z_0}{2}}.$$

Nous ne nous arrêterons pas davantage sur ce sujet que nous avons déjà traité.

PROJECTIONS CONIQUES MODIFIÉES.

12. Dans les projections coniques que nous venons d'examiner, les méridiens sont tous des génératrices du cône déterminées par les plans méridiens prolongés et les parallèles des cercles concentriques dont l'écartement dépend des propriétés secondaires que l'on peut donner à la projection. Leur principal avantage consiste dans la simplicité de leur construction qui n'exige que l'emploi de la règle et du compas, et dans leur propriété de conserver l'angle des méridiens et des parallèles ; mais leurs défauts les plus importants sont d'altérer beaucoup les distances prises dans le sens des parallèles et de changer le signe des erreurs de chaque côté des deux parallèles communs à la sphère et au cône. On doit donc reconnaître avec *Malte-Brun* que « quelque ingénieuses que soient les modifications par lesquelles « on a essayé de perfectionner la projection conique, elles aboutis- « sent toutes à faire perdre à cette projection sa simplicité et sa faci- « lité primitive sans obtenir complétement les autres avantages que « l'on voudrait lui donner (1). » Les géographes ont donc cherché, pour leurs cartes spéciales, des projections plus commodes et qui ne se rapportent que très-indirectement au développement d'une figure régulière quelconque.

13. La première de ces modifications a été imaginée par *Ptolémée* (150 ans environ ap. J.-C.), qui en expose les principes dans le chap. 24 de sa Géographie (1er livre), après avoir indiqué la projection conique dont nous avons déjà parlé au § 3.

Pour représenter le monde connu de son temps, Ptolémée remarque d'abord que le parallèle de Syène, dont la latitude est 23° 50′ N, occupe à peu près le milieu de l'espace à construire limité par le parallèle de

(1) *Précis de la géographie universelle*, par Malte-Brun, Paris 1810, t. II, p. 114.

Thulé (63° N.) et par l'*antiparallèle* de Meroë, (16° 3′ S.) Il suppose alors l'œil du spectateur dans le prolongement du rayon qui passe par le parallèle de Syène : « l'équateur et les parallèles, inclinés de 23° 50′ « sur ce rayon, deviennent les bases circulaires d'autant de cônes « obliques ayant tous l'œil pour sommet, et paraissent comme des « arcs de cercle parallèles ayant leur partie convexe tournée vers le « sud, tandis que les méridiens situés des deux côtés du méridien « moyen sont vus comme des arcs dont la concavité est tournée « vers le méridien moyen et qui deviennent de plus en plus con- « caves à mesure qu'ils s'en éloignent. » Mais au lieu de développer ces principes conformément à la perspective, Ptolémée détermine les lignes de sa projection d'après des proportions arbitraires, combinées de manière à conserver autant que possible la configuration des pays.

Après avoir choisi (fig. 52) une longueur arbitraire égale à l'unité pour représenter le degré de grand cercle de la sphère, il décrit une circonférence d'un rayon égal à 90 degrés, de manière que le diamètre vertical représente le développement du demi-méridien central, et porte EZ = (23° 50′); Z est ainsi au point de l'équateur dont le centre sera à l'intersection du diamètre vertical et de la perpendiculaire élevée sur le milieu de la corde BZ. Il est facile de calculer la distance HZ, rayon cherché de l'équateur,

$$ZH = \frac{ZB}{2} \cdot \frac{1}{\sin EBZ}, \quad \text{et} \quad \operatorname{tang} EBZ = \frac{EZ}{BE} = \frac{23°\,50'}{90°} = \operatorname{tang} 14°\,49'\,56'',3,$$

d'où

$$ZH = \frac{90°}{2\cos(14°,49',56'',3)} \frac{1}{\sin(14°,40',56'',3)} = \frac{90}{\sin(29°,39',52'',6)} = (181°\ 50'\ 81).$$

Ptolémé, par les régles de l'ancienne trigonométrie, trouve ZH = 181° 50′ et prend cette valeur pour rayon de l'équateur. Pour espacer également les autres parallèles il prend pour rayon de ces divers cercles 181° 50′ augmentés de la latitude australe ou diminués de la latitude boréale.

Ptolémée trace alors (fig. 53) le rectangle ABCD dont la longueur 180° égale le double de la hauteur 90°, et le divise en deux parties égales par la perpendiculaire EK. Il porte d'abord 16° 3′ de K en Z, puis 181° 50′ de Z en H pour déterminer le centre commun H. Si l'on prend ensuite ZF = 23° 50′ et ZM = 63°, les cercles passant par H, Z, F, M seront l'antiparallèle de Meroë, l'équateur, le parallèle de

Syène et celui de Thulé. On porte ensuite sur ces quatre arcs de cercle les longueurs de leurs degrés qui sont cos (16° 3′), 1, cos(23° 50′) et cos 63°; on obtient les méridiens en faisant passer des *courbes mécaniques* par les quatre points correspondants de ces arcs de cercle.

Ptolémée recommande cette construction comme plus exacte que la première qu'il donne dans le même chapitre et que nous avons exposée au paragraphe 3, parce que l'équateur et trois parallèles conservent leurs véritables degrés de longitude tandis que les autres sont très-peu altérés; ainsi sur le parallèle de Rhodes le rapport des degrés à ceux de l'équateur se trouve être de $\frac{4}{5}$, valeur qui, sans erreur appréciable, peut être considérée comme égale au cosinus de Rhodes, 0,80901.

Si nous nous sommes étendu aussi longuement sur cette seconde projection de Ptolémée depuis longtemps abandonnée, c'est pour rectifier quelques erreurs des géographes modernes dont quelques-uns ont cru voir dans les deux projections de Ptolémée l'idée et jusqu'aux principes de la projection stéréographique, antérieure de trois cents ans, et dont d'autres ont attribué au géographe alexandrin le mérite de l'invention de la projection connue aujourd'hui sous le nom de *projection de Bonne* ou *de la carte de France*. Il suffit de remarquer, pour répondre à ces derniers, que la seconde projection de Ptolémée n'est pas le développement du cône tangent au parallèle de Syène, puisque le rayon de ce parallèle est égal à 158 degrés au lieu de 129,69, valeur de la cotangente de 23° 50′; le cône ayant son sommet au point pris pour centre commun des parallèles serait tangent à la sphère le long du parallèle de 19° 20′ environ, latitude qui s'éloigne trop de celle de Syène pour que la différence puisse être attribuée à une erreur de calcul. Il faut donc reconnaître que Ptolémée n'avait pas l'idée d'un cône tangent à la terre le long du parallèle moyen, et que sa construction est tout arbitraire.

14. Cette projection demeura oubliée pendant des siècles, jusqu'à la renaissance où *Bernard de Sylva*, d'Éboli, en publiant à Venise, en 1511, une nouvelle édition de la géographie de Ptolémée, en agrandit le cadre pour y faire entrer les terres nouvellement découvertes (1). Elle commença dès lors à se transformer entre les mains des géographes tels que *Apianus* (*Pierre Benewitz*, 1520), *Oronce*

(1) *Voir* LELEWEL, Atlas de la géographie du moyen âge, pl. XLV.

Fine (1532), *Guillaume le Testu* (1566) (1), qui remplacèrent la construction arbitraire de Ptolémée par le développement du cône tangent le long du parallèle moyen et conservèrent les véritables grandeurs des degrés de chaque parallèle, de manière à déterminer chaque méridien par une série de points correspondants.

Cette nouvelle projection est généralement connue sous le nom de *projection de Bonne*, du nom du géographe français qui, en 1752, en fit le premier ressortir tous les avantages dont les principaux sont :

1° que le méridien du milieu représenté par une droite coupe tous les parallèles à angle droit ;

2° que le parallèle moyen, qui a pour rayon la cotangente de sa latitude, coupe tous les méridiens à angle droit ;

3° que les trapèzes de la surface sphérique sont représentés par des trapèzes curvilignes dont les côtés parallèles sont respectivement égaux en longueurs aux côtés qui leur correspondent sur la sphère ; et comme les hauteurs de ces trapèzes sont aussi partout égales, il en est de même de leurs surfaces ; mais à mesure qu'on s'éloigne du méridien central, ils s'allongent dans le sens de l'une de leurs diagonales et se rétrécissent dans le sens de l'autre.

C'est là le principal défaut de ce développement et ce qui le rend impropre à représenter non-seulement un hémisphère entier, mais encore une étendue considérable de pays.

Au lieu de déterminer les intersections des méridiens et des parallèles par la construction directe, on les construit en réalité à l'aide de leurs coordonnées rapportées à deux axes rectangulaires, qui sont le méridien central et la tangente au parallèle moyen.

Appelons ρ_1 (fig. 54) le rayon du parallèle moyen de latitude l_1 ; nous aurons d'abord

$$OA_1 = \rho_1 = a \operatorname{cotang} l_1.$$

Désignons par δ la longueur de l'arc $A_1 A$ compris entre le parallèle moyen $C_1 A_1 B_1$ et le parallèle CAB du point cherché M ; δ sera la différence des latitudes de ces deux parallèles, $l_1 + \frac{\delta}{a}$ sera donc la latitude du point M. On aura

$$MA = \rho 0 = ta \cos\left(l_1 + \frac{\delta}{a}\right),$$

(1) *Voir* au dépôt géographique des affaires étrangères la carte manuscrite de Guillaume le Testu, qui donne le développement des deux hémisphères nord et sud, projetés en regard l'un sous l'autre, chacun sur le parallèle moyen respectif de 15°.

$$\rho = \rho_1 - \delta = a \operatorname{cotang} l_1 - \delta,$$

$$x = \mathrm{MQ} = \rho \sin\theta, \quad y = \mathrm{MP} = \rho_1 - \rho\cos\theta = a \operatorname{cotang} l_1 - \rho\cos$$

Il est facile de tenir compte, dans ces calculs, de la forme sphéroïdale de la terre ; il faut pour cela multiplier cotang l_1 par la grande normale N_1 et remplacer l'arc sphérique δ par l'arc elliptique S. On aura alors

$$\mathrm{N}_1 = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 l_1)^{\frac{1}{2}}}; \quad \rho_1 = \mathrm{N}_1 \operatorname{cotang} l_1,$$

$$\rho = \mathrm{N}_1 \operatorname{cotang} l_1 - \mathrm{S}; \quad \theta = \frac{t\mathrm{N}_1 \cos\left(l_1 + \frac{\delta}{a}\right)}{\rho},$$

en ayant soin de remplacer, dans la valeur de θ, $\frac{\delta}{a}$ par le nombre de degrés qui exprime la différence des latitudes du parallèle considéré et du parallèle moyen. Les coordonnées se calculent ensuite par les formules

$$x = \rho \sin\theta; \quad y = \rho_1 - \rho\cos\theta.$$

Cette projection, très-employée depuis Bonne par *de l'Isle*, *d'Anville* et d'autres géographes pour les cartes générales telles que celles des quatre parties du monde, a été adoptée dès 1803 par le *Dépôt de la guerre*, comme répondant le mieux aux besoins des divers services publics, et notamment pour la construction de la grande carte de France levée par les officiers d'état-major. Comme elle est presque universellement employée aujourd'hui pour les cartes topographiques détaillées basées sur un levé trigonométrique, nous y reviendrons longuement, ainsi que nous l'avons déjà annoncé au chapitre des projections équivalentes, et nous étudierons alors les altérations d'angles et de longueurs ainsi que des détails de construction.

La projection n° XVII représente un hémisphère entier développé sur le parallèle moyen de 45° ; quoique la projection de Bonne ne doive jamais être employée pour des différences de latitudes et de longitudes aussi considérables, nous donnons cette application parce qu'elle montre bien les avantages aux environs du méridien central et du parallèle moyen, et les défauts à mesure qu'on s'en éloigne.

15. Si l'on prend pour parallèle central du développement l'équateur lui-même, le sommet du cône s'éloigne à l'infini et les parallèles sont alors représentés par des droites parallèles, espacées et divisées

comme le sont les parallèles du globe. Il résulte de cette construction, dont la projection, figure n° XVIII, offre l'application à la représentation de la surface terrestre entière, que, dans le sens des parallèles, la carte a partout des dimensions égales à celles du globe, et que les surfaces sont aussi partout conservées (1), comme dans la projection précédente dont celle-ci n'est qu'un cas particulier; mais la déformation y est plus considérable encore à cause de l'obliquité qu'y prennent les méridiens dès qu'on s'éloigne du méridien central et de l'équateur; de même aussi les distances ne peuvent être rigoureusement mesurées que sur les méridiens et les parallèles, et sont très-altérées dans le sens des diagonales de chaque trapèze; ce système ne peut donc convenir que pour représenter des pays peu étendus en latitude et traversés par l'équateur; c'est celui que l'on adopte généralement pour les cartes d'Afrique.

Les formules de la projection précédente deviennent, en prenant pour axes des coordonnées l'équateur et le méridien principal,

$$y = \frac{\pi}{180}\, al,$$

$$x = \frac{t\pi}{360}\, a \cos l = \mathrm{K} \cos \frac{y}{a}.$$

L'équation $x = \frac{y}{a}$ étant celle d'une sinusoïde, nous adopterons avec M. d'Avezac, pour désigner cette projection, le nom de *sinusoïdale* qui, en rappelant la nature des courbes méridiennes, en indique de suite la forme.

Il est très-facile d'y tenir compte de l'aplatissement de la terre, en ne divisant plus le méridien du milieu en parties égales, mais en prenant ces parties de mêmes longueurs croissantes vers le pôle que les arcs de 1° du méridien elliptique. En outre, on portera sur chaque parallèle les longueurs correspondantes des arcs de longitude calculées dans la table I; l'ordonnée x sera donnée par la formule

$$x = \frac{t\pi}{360}\, \mathrm{N} \cos l,$$

en continuant de désigner par N la grande normale

$$\mathrm{N} = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 l)^{\frac{1}{2}}}.$$

(1) *Voir* chap. III, § 6.

Cette projection a été imaginée par Nicolas *Sanson* d'Abbeville qui, en 1650, publia les cartes de l'Europe, de l'Asie, de l'Afrique et des deux Amériques, dans ce système de représentation (1).

Cinquante ans plus tard, l'astronome anglais Jean *Flamsteed* employa cette projection devenue usuelle en France pour la rédaction de son atlas céleste publié seulement en 1729; c'est donc contre toute justice qu'elle est vulgairement désignée sous le nom de cet astronome.

16. Au lieu de porter à l'infini le sommet du cône tangent à la sphère dans la projection du Dépôt de la guerre, nous pouvons supposer que ce sommet se rapproche de la surface de la sphère jusqu'à se confondre avec le pôle; le cône devient alors un plan tangent et les parallèles sont encore représentés par des arcs de cercle équidistants ayant tous le pôle pour centre; si l'on porte sur chacun d'eux des longueurs égales à celles qui leur correspondent sur la sphère, la projection que l'on obtient a pour formules

$$\rho = az; \qquad \theta = \frac{t \sin z}{z},$$

et conserve, comme les deux précédentes, la propriété de représenter les surfaces en véritable grandeur; elle est due à *Jean Werner*, de Nüremberg, qui, en 1514, à la suite d'une traduction avec commentaire du premier livre de la Géographie de Ptolemée, indique trois systèmes de représentation du monde entier avec des parallèles concentriques autour du pôle et équidistants; dans le premier cas l'équateur est représenté par un cercle entier et divisé en 360° plus grands évidemment que les degrés de latitude, dans le rapport du quadrant au rayon (projection n° XIX); dans le second cas, dont nous venons de parler et qui seul conserve les surfaces, les degrés de l'équateur sont faits égaux aux degrés de latitude, ce qui réduit à environ 229° 11′ l'angle au pôle sous-tendu par l'arc qui représente l'équateur; enfin, dans le troisième cas, les 360° de l'équateur sont représentés par un arc de cercle de 240°, ce qui attribue aux degrés de longitude une valeur un peu plus forte qu'aux degrés de latitude, à peu près dans le rapport de l'arc de 30° à son sinus. Dans les trois cas les degrés de longitude sont déterminés sur chaque parallèle conformément à leur rapport réel avec le degré équatorial.

---

(1) *Voir* l'atlas in-folio n° 3377, au département géographique de la bibliothèque Impériale. Ces cartes ont été plusieurs fois rééditées.

Le canevas n° XXXII donne l'application de la troisième projection de Werner à la représentation de la surface entière du globe.

17. Les projections coniques et leurs modifications dont nous avons parlé jusqu'ici ont toutes pour but principal de substituer à la zone sphérique que l'on veut représenter une zone développable sur laquelle les méridiens et les parallèles sont supposés tracés de manière que le développement jouisse de telle propriété que l'on veut. Ces projections conviennent surtout pour représenter des zones étroites, c'est-à-dire peu étendues de part et d'autre d'un parallèle moyen que les méridiens coupent à angle droit et sur lequel la projection atteint son plus grand degré de perfection.

Il n'en est plus de même lorsque le pays à représenter est très-étendu en latitude ou composé d'États détachés tels que les États-Unis, parce qu'il devient alors impossible de choisir un même parallèle central pour chacun d'eux ; aussi l'Amérique et l'Angleterre ont-elles adopté, pour le tracé des cartes embrassant une grande portion de la surface terrestre, un système qui a pour but de remplacer chaque zone terrestre élémentaire par la zone conique élémentaire correspondante et de conserver la rectangularité des méridiens et des parallèles.

Cette projection a reçu en Amérique le nom de *projection polyconique rectangulaire* qui en peint de suite le tracé.

Considérons le cas général du sphéroïde entier développé le long d'un méridien central quelconque. Au pôle nord le cône tangent se confond avec le plan tangent et, à mesure qu'on s'éloigne du pôle, son sommet se recule le long de l'axe terrestre prolongé en donnant à chaque parallèle du développement un centre de plus en plus reculé et un rayon qui croît à mesure que la latitude diminue et qui est partout égal à la cotangente de cette latitude. A 45° de latitude les rayons de la terre et du parallèle sont égaux ; enfin, le cône devient un cylindre à l'équateur qui est représenté par une droite perpendiculaire aux méridiens. Dans l'hémisphère austral le cône occupe par rapport à l'équateur des positions symétriques à celles qu'il a occupées dans l'hémisphère boréal ; la courbure des parallèles croît ainsi en sens inverse jusqu'au pôle antarctique représenté comme le pôle nord par un point situé à 90° de l'équateur. On obtient ainsi une figure à deux axes rectangulaires (proj. n° XXXVI) dont le plus petit est le méridien central rectifié, et dont le plus grand, double du premier, représente l'équateur entier développé.

Le méridien-limite, qui est en réalité la seconde moitié du méridien central, s'allonge, de chaque côté de la figure, de plus de deux fois et demie sa longueur véritable. Les méridiens sont comme sur la sphère et sur chacun des cônes assujettis à couper chaque parallèle à angles droits. Mais comme il est impossible de conserver à la fois les angles et les surfaces, il en résulte une altération très-sensible dans les longueurs des degrés de parallèles dont l'équateur est le seul qui conserve ses véritables dimensions.

Un autre défaut important consiste dans l'inégalité des distances méridiennes entre les parallèles successifs et dans l'accroissement des degrés des méridiens à mesure que l'on s'éloigne du méridien central seul développé en vraie grandeur. Ce défaut rend impossible l'emploi d'une échelle pour la mesure, même approchée, des longueurs, dans des directions autres que l'équateur et le méridien central.

Nous étudierons plus loin cette projection d'après l'exposé qui en a été donné en 1860 par le colonel *H. James*, directeur du Département topographique du bureau de la Guerre (1), et nous donnerons des tables qui en facilitent la construction.

Le colonel James, pour rendre compte de cette projection, suppose d'abord la terre représentée par un globe creux et très-mince, en papier par exemple, que l'on coupe par un grand nombre de plans parallèles passant par les parallèles terrestres équidistants en latitude; on coupe encore ce globe le long du demi-méridien opposé à celui qui doit servir de méridien central, et l'on ouvre le globe entier sur un plan de manière à considérer chaque bande de la surface du globe comme une portion d'une ceinture circulaire, à l'exception de l'équateur qui se développe en ligne droite. Tous les points de chaque parallèle se placent sur un arc de cercle dont le rayon est égal à la cotangente de la latitude correspondante, et les centres de tous ces cercles sont sur la droite qui représente le méridien central. Cette manière d'envisager la projection polyconique rectangulaire laisse beaucoup à désirer, car, après le développement de chaque ceinture circulaire, il reste nécessairement un espace qui provient de

(1) *Description of the Projection used in the Topographical Department of the War Office for maps embracing large portions of the Earth's Surface (drawn up by Capt.* Clarke, R. E. *and) communicated by Colonel Sir Henry* James, R. E. *Director of the Topographical Department;* dans *the Journal of the Royal Geographical Society*, Vol. XXX, Londres, 1860, in-8, p. 106 à 111.

la différence des rayons de chacune d'elles, et qui n'est négligeable à aucune limite puisqu'il est du même ordre de grandeur que l'accroissement du rayon de chaque zone ; il n'est possible de le faire disparaître, lorsque l'on veut conserver la rectangularité des méridiens et des parallèles, que par une déformation en longueur de chaque cercle de latitude.

18. Il peut être préférable, dans certains cas, de conserver les longueurs des degrés de tous les parallèles en renonçant à leur perpendicularité sur les méridiens. On obtient ainsi une nouvelle projection dite *polyconique ordinaire*, qui appliquée à la représentation de la surface entière du globe (proj. n° XXXVII) présente une figure à deux axes rectangulaires et à quatre quadrants égaux comme la projection rectangulaire. Le méridien central, seul perpendiculaire aux parallèles, est encore développé en vraie grandeur; sur chaque parallèle décrit avec la cotangente de sa latitude, on porte les véritables longueurs des degrés de longitude et l'on fait passer, par les points correspondants, des courbes qui représentent les méridiens.

Nous reviendrons sur cette projection (1), et nous donnerons les moyens de tenir compte de l'aplatissement de la terre à l'aide de tables qui rendent la construction très-rapide.

La projection polyconique ordinaire a été adoptée en Amérique par le *Coast Survey Office* parce que « les opérations de l'hydro-« graphie étant limitées à une bande étroite et longue de la côte et « n'ayant pas pour but de former une carte d'ensemble des pays en « feuilles régulières et uniformes, il est préférable de faire une pro-« jection indépendante pour chaque lever et pour chaque feuille hy-« drographique à l'aide de son méridien central; chaque feuille est « ainsi projetée comme une carte locale et se relie aux autres par les « sommets de la triangulation (2). »

La carte du congrès a été dressée en 1855 en projection polyconique à l'échelle de $\frac{1}{1500000}$ (3).

---

(1) *Voir* 2e part., chap. XIII, § 3.

(2) *Report of the Superintendant of the Coast Survey during the year* 1853. Washington, 1854; *Appendice* n° 39, p. 99.

(3) Les méridiens et les parallèles y sont tracés de minute en minute; le méridien central pour la côte orientale a été pris à 84° à l'ouest de Greenwich (86° 20′ 9″ à l'ouest de Paris), et pour la côte occidentelle à 120° de Greenwich (122° 20′ 9″ à l'ouest de Paris); les deux côtes ont ainsi été projetées séparément. Cette carte comprend la côte entière des États-Unis depuis la baie de Passamaquoddy (limite nord du Maine) jusqu'au Mexique (embouchure de Rio Grande), et depuis le Rio Frazer jusqu'à San Diego.

19. La méthode de projection employée au *Coast Survey Office* pour les cartes de localités ou pour les petits levers hydrographiques prend le nom de *projection polyconique équidistante*. Les parallèles provisoires et les méridiens y sont d'abord tracés comme dans la projection polyconique ordinaire, puis on porte sur chaque méridien au-dessus et au-dessous du parallèle central, les longueurs des divisions du méridien central, et l'on fait passer les parallèles définitifs par les points ainsi obtenus. Il en résulte une projection dans laquelle les parallèles sont partout à des distances méridiennes égales. Si on la suppose appliquée à la représentation de la surface entière du globe, et que l'on prenne l'équateur pour parallèle central, tous les parallèles tournent leur concavité vers l'équateur, car les distances méridiennes des parallèles étant égales à ces distances mesurées sur le méridien central qui est une ligne droite, il est évident que les parallèles devront converger en s'éloignant du méridien central. Le parallèle de 90°, c'est-à-dire le pôle, sera représenté par une courbe dont la longueur approchera de celle de l'équateur développé.

En comparant une projection polyconique équidistante avec une projection de Bonne ayant même méridien central et même parallèle moyen, il est facile de voir que, sur la première, l'aire projetée est moindre que la surface correspondante de la sphère. Cette projection a en outre l'inconvénient d'augmenter d'une manière exagérée les arcs de parallèle et de rendre impossible l'emploi d'une même échelle autour d'un même point; les intersections des méridiens et des parallèles n'y sont pas rectangulaires et les angles sont difficiles à calculer. Il en résulte que ce système ne doit être employé que dans les limites les plus restreintes. Dans le bureau hydrographique des États-Unis il n'est employé que pour représenter des surfaces de *un* degré carré *au plus*, à une échelle ne dépassant par $\frac{1}{10000}$.

Lorsque l'on veut représenter en projection polyconique ordinaire un hémisphère entier à une échelle peu considérable, on peut figurer le méridien de 90° de longitude, qui doit limiter la carte, par une circonférence décrite sur la distance des pôles comme diamètre, et partager en parties égales les arcs de parallèle interceptés; les autres méridiens seront des courbes passant par les points correspondants ainsi obtenus.

PROJECTIONS CYLINDRIQUES.

20. Jusqu'à présent, dans l'étude des projections par développement, nous ne nous sommes occupé que de celles qui peuvent être considérées comme obtenues par le développement d'un ou de plusieurs cônes tangents ou sécants au sphéroïde, et des projections qui peuvent être considérées comme des modifications des projections coniques. Au lieu de considérer le tronc de cône qui, sous certaines conditions dépendant du but que doit atteindre la carte, se rapproche le plus possible de la portion du sphéroïde à représenter, il est naturel de chercher à représenter une portion de la surface du globe par le développement d'une portion de surface cylindrique soit inscrite, soit circonscrite à la zone considérée et dont l'axe coïncide avec celui du globe. Les méridiens, qui résultent des sections du cylindre par des plans passant par son axe, seront représentés par des droites parallèles à cet axe, les parallèles par des droites perpendiculaires aux premières.

Les défauts des projections cylindriques sont plus considérables encore que ceux de la projection conique, car, dans celle-ci, on peut donner à deux parallèles leur véritable longueur par rapport aux degrés de latitude, tandis que dans la projection cylindrique le parallélisme des méridiens ne permet d'observer cette proportion qu'à l'égard d'un seul qui est l'inférieur, si l'on considère le développement du cylindre circonscrit, et le supérieur si l'on considère au contraire le développement du cylindre inscrit.

Pour remédier à cet inconvénient, on a employé le cylindre construit sur l'un des parallèles intermédiaires et qui est par conséquent en partie intérieur et en partie extérieur à la sphère ; de cette manière l'étendue en longitude est exacte vers le milieu, mais trop petite du côté de l'équateur et trop grande du côté opposé.

21. Dans la *projection cylindrique proprement dite*, on donne aux degrés de latitude leur véritable longueur de façon que chaque méridien $A_1 B_1$ de la projection (fig. 55) soit égal au développement de l'arc correspondant AB du méridien de la sphère.

En appelant l la latitude du parallèle Mm commun à la sphère et au cylindre, les degrés de longitude seront sur tous les parallèles de la projection égaux à

$$\frac{2\pi}{360} a \cos l_1.$$

La figure 55 montre bien les défauts de ce système, l'agrandissement des parallèles supérieurs et la diminution des parallèles inférieurs. La projection n° XXXIV donne la représentation de l'hémisphère Nord développé sur le parallèle de 45° de latitude.

Les cartes projetées d'après ce système portent le nom de *cartes plates parallélogrammatiques ;* elles ne peuvent convenir que, à des parties du globe très-peu étendues en latitude, mais autant qu'on le veut en longitude ; les moins défectueuses sont celles qui représentent les portions voisines de l'équateur, parce que, à peu de distance de ce cercle, les cosinus de latitude ne varient pas beaucoup ; d'*Anville* s'en est servi avec avantage pour la carte de Guinée publiée en 1776. Cette construction est la plus ancienne de toutes ; son origine semble remonter jusqu'à *Anaximandre* (550 ans environ av. J.-C.) qui, le premier peut-être, traça une carte géographique du monde connu de son temps ; elle continua à être employée par les géographes de l'antiquité (*Hécatée*, *Dicéarque*, *Eratosthènes*, *Agrippa*, *Strabon*, *Marin de Tyr*, *Ptolémée*) qui prenaient pour parallèle moyen celui de Rhodes.

22. Lorsque le cylindre est tangent le long de l'équateur, le réseau est formé de carrés parfaits ; il en résulte une projection très-simple de construction, mais très-erronée dès qu'on s'écarte de l'équateur puisque les degrés de longitude y sont partout égaux aux degrés de latitude (proj. n° XXXIII) ; on la désigne sous le nom de *projection plate carrée ;* l'invention en a à tort été attribuée au prince *Henri* de Portugal (1438) ; elle était connue, dès le commencement du XIVe siècle, des navigateurs génois (1), qui la communiquèrent aux Catalans ; mais elle n'est plus employée depuis le commencement du XVIe siècle. Elle offrait aux marins cet avantage de représenter par une ligne droite la *loxodromie*, c'est-à-dire la direction que suit le navire naviguant pendant quelque temps sous le même rumb de vent et coupant par conséquent tous les méridiens sous le même angle (2).

---

(1) Les cartes nautiques les plus célèbres qui nous sont parvenues de cette époque sont : l'atlas de *Petrus Vesconte de Janua* (1318), les cartes de *Marin Sanuto* (1321), l'atlas anonyme de 1351 de la bibliothèque Laurentienne de Florence, l'atlas catalan de 1375, l'atlas vénitien de 1384, etc. *Voir* les *Monuments de la géographie*, par JOMARD, 4e livraison.

(2) L'emploi de la boussole rend presque exclusive la navigation loxodromique ; la courbe décrite à la surface des mers par un navire se rendant d'un point à un autre n'est donc pas un arc de grand cercle, mais une courbe à double courbure dont la principale

Mais les cartes plates avaient l'énorme inconvénient non-seulement de déformer beaucoup les configurations terrestres, mais encore de fausser les directions et les gisements de telle sorte que les directions E.-O. et N.-S. de la rose des vents étaient seules conservées et que les autres étaient difficiles à tracer exactement. Cet inconvénient avait déjà été remarqué par Ptolémée; il fut de nouveau signalé au commencement du XVIe siècle par Martin *Cortès*, puis par *Pero Nunès;* enfin, en 1569, *Gérard Mercator*, considérant que les marins n'emploient pas leurs cartes pour connaître la figure des pays, mais seulement pour y tracer exactement le chemin parcouru d'après sa longueur et sa direction, et pour déterminer la distance où ils sont des divers points des îles et la direction qu'ils doivent suivre soit pour y arriver, soit pour les éviter, imagina la *projection des cartes réduites.*

23. La nécessité de représenter la loxodromie par une ligne droite mettait dans l'obligation de figurer les méridiens par des droites parallèles équidistantes perpendiculaires aux parallèles et de considérer par conséquent la projection comme le développement d'un cylindre tangent à la sphère le long de l'équateur ; en outre, l'obligation de conserver partout les directions devait faire conserver le rapport exact des degrés de latitude aux degrés de longitude ; or comme les derniers, par suite du parallélisme des méridiens, sont tous augmentés dans le rapport de l'unité au cosinus de leur latitude, il faut augmenter aussi les degrés de latitude dans le même rapport.

Or, en supposant la terre sphérique, on a

$$\frac{\text{un degré de parallèle}}{\text{un degré de l'équateur}} = \frac{\text{cosinus latitude}}{1} = \frac{1}{\text{sécante } l},$$

donc

$$\text{un degré de méridien} = \text{un degré de parallèle} \times \text{séc } l;$$

de même

$$\text{une minute de méridien} = \text{une minute de parallèle} \times \text{séc } l.$$

Il résulte de là qu'en faisant constamment sur la carte réduite la minute de parallèle égale à celle de l'équateur, l'intervalle entre

---

propriété est de couper sous le même angle tous les méridiens qu'elle traverse; ainsi une ligne loxodromique qui fait un angle oblique avec un méridien est une sorte de spirale qui s'approche sans cesse de l'un des pôles sans jamais l'atteindre; s'il était possible en effet qu'une telle ligne passât par le pôle, il faudrait qu'elle fît en ce point le même angle avec tous les méridiens, ce qui est impossible.

deux parallèles consécutifs ou la différence de leurs distances à l'équateur répondant à une minute doit être égale à

une minute de l'équateur $\times$ séc l.

L'intervalle entre deux parallèles quelconques sera par conséquent égal à la longueur d'une minute de l'équateur multipliée par la somme des sécantes faite de minute en minute depuis la plus petite latitude jusqu'à la plus grande.

C'est sur ce principe que Mercator fit construire une grande mappemonde publiée à Duysbourg en août 1569 (1) ; *Edouard Wright*, auquel on a à tort attribué l'invention des cartes réduites (2), expliqua le premier en 1589 les procédés de calcul comme nous venons de le faire et dressa une table des parties du méridien ; mais ce procédé pour calculer les accroissements des parties méridiennes n'est pas rigoureux, puisque l'arc d'*une minute*, malgré sa petitesse, diffère sensiblement de sa corde ; il faudrait donc supposer la minute elle-même divisée en un nombre infini de parties et faire la somme de tous les accroissements successifs ; *Henry Bond*, en 1645, montra le premier que les longueurs des méridiens projetés croissent comme le logarithme de la tangente de la moitié du compliment de la latitude. Le calcul intégral conduit très-rapidement à ce résultat et permet de tenir compte de l'aplatissement de la terre ; nous reviendrons sur ce sujet en traitant de la construction et de l'usage des cartes réduites. Remarquons de suite que, comme la sécante de 90° est infinie, le pôle ne peut être représenté sur ces cartes et que les parallèles s'écartent de plus en plus et jusqu'à l'infini à mesure que la latitude augmente. Cet inconvénient est peu sensible dans la navigation parce que le 83e degrés de latitude constitue la limite de notre connaissance des terres à la surface du globe.

24. Le célèbre astronome *César-François Cassini* a employé, pour l'exécution de sa carte de France commencée en 1745 et terminée en 1793 par son fils (*Jacques-Dominique*), une modification de la projection plate dans laquelle le cylindre est tangent le long du

(1) Cette carte, large de 2 mètres sur 1m,26, se trouve reproduite en fac-simile dans les *Monuments de la géographie* de Jomard (8e livraison) et dans un appendice à la *Géographie du moyen âge*, de Lelewel (t. II, p. 225 à 233).

(2) Édouard Wright dans son ouvrage, *Certain Errors in Navigation detected and corrected*, p. 12 et 13 de la préface, reconnaissait lui-même que la carte de Mercator lui avait servi de guide et qu'il avait seulement deviné la méthode dont le géographe allemand n'avait pas fait part au public.

méridien principal ; par les divisions de l'équateur on imagine des plans parallèles à ce méridien, et par les divisions du méridien des grands cercles qui ont un diamètre commun situé dans le plan de l'équateur ; ce diamètre est, dans la projection de Cassini, ce qu'est la ligne des pôles dans la projection plate. On imagine ensuite le cylindre développé, et les génératrices passant par les divisions du méridien représentent les grands cercles perpendiculaires à ce méridien, tandis que les petits cercles qui lui sont parallèles ont pour projections les développements des intersections du cylindre par leurs plans.

Cassini a été conduit à adopter cette projection parce que, dans les levers trigonométriques, s'il est facile de tracer le méridien d'un lieu, il ne l'est plus autant de tracer le parallèle à l'équateur ; si, par un alignement, dirigé au moyen de piquets verticaux, et perpendiculaire au méridien d'un lieu on détermine une suite de points, ils appartiennent au grand cercle que détermine le plan vertical mené perpendiculairement au méridien dont il s'agit et qui, sur la terre, répond au cercle céleste que l'on nomme premier vertical ; le parallèle ne fait que toucher ce cercle au point où il coupe le méridien. La méridienne et ses perpendiculaires étant donc les lignes qui se tracent le plus facilement par les opérations astronomiques et géodésiques, c'est au méridien de l'Observatoire de Paris et à ses perpendiculaires qu'ont été rapportés immédiatement les points de la carte de France ; leurs latitudes et leurs longitudes n'ont été conclues qu'*à posteriori* et par le calcul.

Nous reviendrons sur cette projection pour donner les équations exactes des méridiens et des parallèles, évaluer les erreurs des surfaces et des angles et tenir compte de l'aplatissement. Mais nous pouvons dès à présent nous rendre compte de ses principaux défauts.

En supposant la terre sphérique, les grands cercles perpendiculaires au méridien, au lieu de se couper aux pôles de ce méridien et par conséquent de converger tous les uns vers les autres, sont, en projection, tous parallèles entre eux ; il en résulte que les portions déterminées par deux cercles perpendiculaires au méridien sont représentées par des rectangles de même longeur, mais plus larges vers les extrémités. Ainsi les distances et les aires ne peuvent être mesurées immédiatement sur la carte de Cassini que par approximation, et quoique l'étendue en longitude ne soit pas assez considérable pour que la convergence des perpendiculaires au méridien entraîne

une erreur importante, il faut être très-réservé dans l'emploi de cette projection, qui n'est excellente que pour la réunion immédiate des levés trigonométriques.

25. Nous avons déjà parlé, au chapitre des projections équivalentes (1), d'une projection cylindrique due à Lambert, et jouissant de la propriété de représenter les surfaces de la sphère par des surfaces égales. Elle est basée sur ce principe que si l'on circonscrit un cylindre circulaire droit à une sphère et que l'on coupe les deux surfaces par une série de plans parallèles au grand cercle de contact, on détachera des zones qui seront toutes respectivement égales.

On a en effet (fig. 56), en considérant le cylindre tangent le long de l'équateur,

$$\text{surf. cylindr. AIEE'A'} = 2\pi a C\alpha = 2\pi a \sin l,$$
$$\text{zone sphérique } a\text{EE}'a' = 2\pi a C\alpha = 2\pi a \sin l;$$

et comme les méridiens interceptent sur les deux surfaces des parties proportionnelles à leurs différences de longitude, les surfaces élémentaires sont respectivement égales.

Cette projection a l'inconvénient de faire croître les distances en latitude comme les sinus de ces latitudes, et par conséquent de rapprocher de plus en plus les parallèles à mesure que l'on s'éloigne de l'équateur, tandis que les degrés de longitude conservent partout la longueur qu'ils ont à l'équateur et sont par conséquent partout augmentés.

Si l'on appelle α l'angle d'une direction quelconque avec le méridien d'un point M sur la sphère, β l'angle correspondant sur la carte, l la latitude de ce point M, on trouve facilement par une méthode semblable à celle que nous avons employée (2) pour étudier les altérations des projections zénithales

$$\operatorname{tang}\beta = \operatorname{tang}\alpha \frac{1}{\cos^2 l}.$$

Il en résulte que la déviation maximum correspond en chaque point à

$$\operatorname{tang} A = \pm \cos l,$$

ou à

$$\operatorname{tang} B = \pm \frac{1}{\cos l},$$

(1) *Voir* chap. III, § 2.
(2) *Voir* chap. V, § 11.

les signes se correspondant, et qu'en chaque point il existe une infinité de groupes de deux directions définies par la relation

$$\text{tang}\,\alpha_1 \,\text{tang}\,\alpha = \cos^2 l,$$

sur la sphère, et par la relation

$$\text{tang}\,\beta_1 \,\text{tang}\,\beta = \frac{1}{\cos^2 l}$$

sur la carte. On voit en outre que les éléments du méridien sont réduits sur la carte dans le rapport de cos l à l'unité, et que les éléments du parallèle sont augmentés dans le même rapport (1).

En résumé, ce système n'est applicable qu'aux zones comprenant l'équateur et peu étendues en latitude.

26. Nous avons parlé (2) de la modification proposée par Lambert pour les pays tels que l'Amérique qui ont leur plus grande étendue du nord au sud; on suppose le cylindre tangent non plus le long de l'équateur mais le long du méridien moyen; dans le développement l'équateur est représenté par une droite divisée suivant les sinus des longitudes et le méridien central par une droite divisée en degrés égaux.

Lambert, après avoir exposé sa projection isocylindrique, est parvenu à celle-ci par une simple transformation de coordonnées que nous allons exposer parce que l'illustre géomètre l'a plusieurs fois appliquée pour passer d'un système de projection cylindrique à un autre analogue.

Soit A (fig. 57) un point quelconque pris pour pôle d'un grand cercle PKS, B l'autre pôle. Considérons deux grands cercles APBS, AKB passant par A et B et que nous pourrons appeler des méridiens relatifs à A et B ; PKS sera l'équateur. Supposons que dans ce système de coordonnées les longitudes t' soient comptées à partir du méridien AKB.

Pour représenter d'après la méthode isocylindrique de Lambert la surface de la sphère ainsi traversée par les méridiens et les parallèles, on portera (fig. 58) sur une droite ps, de part et d'autre du point K, des longueurs égales aux longitudes t', c'est-à-dire aux arcs de grand cercle PS rectifiés, et sur une perpendiculaire ab à ps, des longueurs

(1) L'étude des altérations dans cette projection a été faite par M. Collignon (*Journal de l'École Polytechnique*, 41e *cahier*) pour montrer la possibilité de construire les mappemondes mixtes en trois parties dont nous avons parlé au § 15 du chap. III.

(2) *Voir* chap. III, § 3.

kr égales aux sinus à sin *l'* des parallèles tels que WRE ; en élevant par les points de division ainsi obtenus des perpendiculaires ou des parallèles à *ps*, on achèverait la construction du réseau isocylindrique dont les degrés de longitude seraient égaux, mais dont ceux de latitude iraient en diminuant de K à *a*.

Soient maintenant P et S les pôles véritables de la sphère et AKB l'équateur véritable ; PKS est un méridien dont les pôles sont en A et B et qui est déjà représenté par une droite *ps* divisée en degrés égaux ; *p* et *s* figureront les pôles véritables. L'équateur réel AKB est représenté par une droite *ab* dont les arcs à partir du centre K sont dans le rapport des sinus des longitudes des méridiens tels que PYS, car les arcs qui, dans l'hypothèse des pôles en AB, mesurent sur le grand cercle AKB les latitudes, mesurent maintenant les longitudes dans l'hypothèse des pôles en P et S.

Considérons un point quelconque M de la surface de la sphère et menons l'arc de grand cercle AMD qui sera perpendiculaire sur le méridien du milieu PKS puisque le pôle de ce méridien est supposé en A. Ce grand cercle était, dans la première hypothèse, un méridien représenté par une perpendiculaire à *p* passant par un point *d* tel que K*d* est égal à l'arc KD ; et, sur cette perpendiculaire, le point M devait se trouver placé à une distance *md* de *ps*, égale au sinus de l'arc MD.

Cherchons donc à exprimer les arcs DK $= y$ et MD dont le sinus égale $md = x$, en fonction de la latitude l et de la longitude t du point M.

Dans le triangle sphérique PTD, rectangle en D, on connaît l'hypoténuse PM $= 90° - l$ et l'angle MPD $= t$; on calculera MD et PD $= 90° - y$ à l'aide des formules

$$\sin \mathrm{MD} = x = \cos l \sin t,$$

et

$$\operatorname{cotang} \mathrm{PD} = \operatorname{tang} \mathrm{KD} = \operatorname{tang} y = \frac{\operatorname{cotang} \mathrm{MP}}{\cos \mathrm{MPD}} = \frac{\operatorname{tang} l}{\cos t},$$

qui sont bien les mêmes que celles auxquelles nous sommes parvenus directement.

23. La même méthode de transformation de coordonnées permet d'obtenir immédiatement les équations de la projection *cylindrique orthomorphe de Lambert* (1) en la considérant comme une projection

(1) *Voir* chap. II, § 14.

de Mercator renversée. En se reportant en effet aux deux figures précédentes on voit que l'arc DK devra être projeté en vraie longueur et que l'arc de grand cercle MD devra être représenté par une droite perpendiculaire à *pks* et égale à

$$md = \log \operatorname{tang} \frac{90^\circ + \mathrm{MD}}{2} = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \sin \mathrm{MD}}{1 - \sin \mathrm{MD}};$$

or le triangle rectangle PMD nous a donné

$$\sin \mathrm{MD} = \cos l \sin t,$$
$$\operatorname{cotang} \mathrm{DK} = \cos t \operatorname{cotang} l.$$

Les équations de la projection seront donc

$$x = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \cos l \sin t}{1 - \cos l \sin t},$$
$$\operatorname{cotang} y = \cos t \operatorname{cotang} l,$$

qui sont bien les équations auxquelles nous sommes parvenus par la méthode des coefficients indéterminés.

28. Revenons aux projections cylindriques équivalentes. Lorsqu'il s'agit de représenter une portion de zone qui n'est pas contiguë à l'équateur, on imagine un cylindre sécant le long d'un parallèle de la zone à représenter, et, en partie inscrit, en partie circonscrit; on peut alors déterminer l'espacement des parallèles par la condition de conserver les surfaces élémentaires.

Appelons d (fig. 59) la distance en projection d'un parallèle de latitude l au parallèle commun MM′ dont nous désignerons la latitude par l_1.

Sur le cylindre la zone $\mathrm{MM'D_1D'_1}$ a pour surface

$$2\pi a d \cos l_1,$$

et, sur la sphère, la zone MM′DD′ comprise entre les deux latitudes l et l_1 est exprimée par

$$2\pi a^2 (\sin l - \sin l_1) = 4\pi a^2 \sin \frac{l - l_1}{2} \cos \frac{l + l_1}{2}.$$

On aura donc

$$d = \frac{2a \sin \dfrac{l - l_1}{2} \cos \dfrac{l + l_1}{2}}{\cos l_1}.$$

Le parallèle MM′ commun aux deux surfaces et donné par la condition de conservation des degrés de longitude à la latitude l_1.

29. Lorsqu'on a à représenter une zone terrestre étroite et longue dirigée obliquement à l'équateur, on peut recourir au développement du cylindre tangent à la sphère le long du vertical qui coïncide avec la plus grande longueur de la zone à représenter. On forme ainsi un équateur et des méridiens provisoires que l'on projette sur le cylindre tangent pour le développer ensuite, et le tracé des méridiens et des parallèles véritables s'obtient par une transformation de coordonnées.

Le lieutenant *Textor* a traité cette question (1) dont l'idée première est due à Lambert, en s'imposant cette autre condition que la surface *totale* de la zone cylindrique fût égale à la zone sphérique à représenter ; il suffit pour cela d'imaginer un second cylindre, intérieur ayant un rayon un peu plus petit que celui de la sphère mais la même hauteur que le cylindre en contact, c'est-à-dire la longueur des méridiens auxiliaires contenus dans la bande étroite. Si des deux côtés de l'équateur auxiliaire on a à représenter n degrés, en appelant r le rayon de base du cylindre intérieur, g la longueur d'un degré évaluée en parties du rayon a, la surface de la zone cylindrique est exprimée par

$$2.\pi.r.2.n.g;$$

celle de la zone sphérique par

$$2\pi a\, 2a \sin n^\circ;$$

ce qui donne l'équation

$$rng = a^2 \sin n^\circ,$$

d'où

$$r = \frac{a^2 \sin n^\circ}{ng} = \frac{a.180.\sin n^\circ}{\pi n};$$

il faudra donc d'abord multiplier chacune des parties de l'équateur auxiliaire par le rapport $\frac{180 \sin n^\circ}{\pi n}$. On représentera ensuite cet équateur auxiliaire par une droite parallèle aux bords supérieur et inférieur de la carte à construire, et on la divisera en degrés comme nous venons de le voir; une droite perpendiculaire sur le milieu de la première représentera le méridien véritable qui passe par le pôle

(1) *Vorschlag zu einer Projection eines langen und schmalen Streifens der Erdfläche, dessen Richtung mit dem Æquator einen schiefen Winkel macht, von dem Premier Lieutenant von* Textor ; dans la *Monatliche Correspondenz* de Zach, septembre 1808, p. 185 à 196.

auxiliaire. En appelant λ la latitude de son point d'intersection avec l'équateur auxiliaire, θ la différence des longitudes de ce méridien et d'un autre considéré, μ la distance de ces points d'intersection de l'équateur auxiliaire et de ces deux méridiens, α l'inclinaison de ce méridien considéré sur cet équateur, l_1 la latitude du point d'intersection de ces deux cercles, on obtient

$$\cos\alpha = \sin\theta\cos\lambda,$$
$$\operatorname{tang}\mu = \operatorname{tang}\theta\cos\lambda,$$
$$\operatorname{tang} l_1 = \frac{\operatorname{tang}\lambda}{\cos\theta}.$$

On peut donc construire par points un méridien quelconque en prenant son point d'intersection avec l'équateur auxiliaire pour origine des abscisses x et cet équateur pour leur axe. Pour un point dont la latitude sera l on aura

$$\sin y = \sin(l - l_1)\sin\alpha,$$
$$\operatorname{tang} x = \operatorname{tang}(l - l_1)\cos\alpha.$$

Si $l < l_1$, x et y deviennent négatifs.

En réunissant par des courbes continues les points de même latitude, on obtiendra les parallèles de la projection.

Ce genre de projection, qui exige des calculs fort longs, est peu utile dans la pratique parce qu'il est rare que l'on cherche à conserver la surface totale d'un pays sans s'occuper de conserver aussi les surfaces élémentaires.

30. Mentionnons ici la *Projection of the Globe on the cylinder of a meridian, by* J. *Wetch* (1). C'est une projection perspective centrale sur un cylindre tangent à la sphère le long d'un méridien. Si le cylindre était tangent le long de l'équateur, les méridiens seraient représentés par des droites parallèles équidistantes perpendiculaires à l'équateur, et les parallèles par des droites perpendiculaires aux premières et dont la distance à l'équateur serait égale à la tangente de la latitude. Le cylindre étant en réalité tangent le long d'un méridien les degrés du méridien moyen conservent seuls leur véritable longueur, ceux de l'équateur varient comme les différences des tangentes des longitudes ; les méridiens et les parallèles sont des courbes faciles à tracer par points à l'aide des formules de transformation

(1) Bibliothèque impériale, Kl. 1112.

de coordonnées dont nous avons déjà fait usage pour les projections cylindriques transverses de Lambert.

MODIFICATION DE LA PROJECTION CYLINDRIQUE

31. Avant de déterminer ce qui a rapport aux développements cylindriques, nous dirons quelques mots d'une projection *trapéziforme* introduite dans la géographie au commencement du XIVe siècle (1) comme modification de la projection plate parallélogrammatique employée par Ptolémée pour les vingt-six cartes de son Hyphégèse géographique, et qui fut la plus employée pendant les XVe, XVIe et même XVIIe siècles. Elle consiste à remplacer les méridiens parallèles de la projection plate par des méridiens rectilignes, mais convergents d'après la condition de conserver les divisions exactes des parallèles extrêmes de la carte ou de deux parallèles pris à volonté.

Ainsi l'on porte sur le méridien principal ab (fig. 60) les degrés égaux g de latitude, on élève des perpendiculaires par les points de division, et sur deux des parallèles $Cc C'$, $Dd D'$ on porte en véritable grandeur les degrés de longitude de ces parallèles.

On a ainsi

$$c\gamma = \gamma\gamma' = \gamma'\gamma'' = \ldots\ldots = g\cos l_1,$$
$$d\delta = \delta\delta' = \delta'\delta'' = \ldots\ldots = g\cos l_2.$$

On voit de suite que les parallèles CC', DD' devront être très-éloignés pour bien déterminer les méridiens; mais, d'un autre côté, pour répartir aussi également que possible la déformation résultant de ce tracé, il conviendra de prendre ces deux parallèles de manière à partager en trois parties égales la hauteur en latitude de la carte, et alors

$$ac = cd = db.$$

Cherchons le point de convergence P et les angles des méridiens avec le méridien principal et avec les parallèles.

Soit XX' un parallèle de latitude l; on aura

$$\frac{c\gamma - d\delta}{cd} = \frac{c\gamma}{Pc}, \quad \text{ou} \quad \frac{g(\cos l_1 - \cos l_2)}{g(l_2 - l_1)} = \frac{g\cos l_1}{cP},$$

(1) Le manuscrit grec de la géographie de Ptolemée, n° 1401 de la bibliothèque Impériale, qui est réputé du XIVe siècle, offre la plupart de ses cartes ainsi modifiées, tandis que dans le ms. 1402 la projection est restée plate.

d'où

$$cP = \frac{g\cos l_1(l_2 - l_1)}{\cos l_1 - \cos l_2} = \frac{g\cos l_1(l_2 - l_1)}{2\sin\frac{l_2 - l_1}{2}\sin\frac{l_2 + l_1}{2}}.$$

De même

$$Pd = \frac{g\cos l_2(l_2 - l_1)}{\cos l_1 - \cos l_2} = \frac{g\cos l_2(l_2 - l_1)}{2\sin\frac{l_2 - l_1}{2}\sin\frac{l_2 + l_1}{2}}.$$

On déterminera ainsi le point P par l'une de ces deux équations. On a ensuite

$$Px = Pd - dx = Pd - g(l - l_2).$$

Appelons θ l'angle $x\mathrm{P}\xi$, on aura

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{c\gamma - d\delta}{cd} = \frac{(\cos l_1 - \cos l_2)}{l_2 - l_1},$$

donc

$$x\xi = Px\operatorname{tang}\theta = \frac{g\cos l_2(l - l_1) - g\cos l_1(l - l_2)}{l_2 - l_1},$$

telle est la valeur du degré de longitude à la latitude l. Sur la sphère ce degré de longitude est égal à

$$g' = g\cos l,$$

l'erreur commise sur le degré de longitude à la latitude l est donc

$$x\xi - g' = \frac{g\cos l_2(l - l_1) - g\cos l_1(l - l_2) - g\cos l(l_2 - l_1)}{l_2 - l_1}.$$

Par exemple, si les deux parallèles dont on veut conserver les grandeurs ont pour latitudes, l'un $l_1 = 55°$, l'autre $l_2 = 60°$, l'erreur commise sur le parallèle de 65° sera, en faisant $g = 1$, $\cos l_1 = 0{,}5736$, $\cos l_2 = 0{,}5000$, $\cos l = 0{,}4226$;

$$x\xi - g' = 0{,}0038.$$

De même, en appelant $\varphi = P\gamma c$ l'angle d'un méridien avec un parallèle, si γc contient t degrés de longitude,

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{dc}{c\gamma - d\delta} = \frac{l_2 - l_1}{t(\cos l_1 - \cos l_2)}.$$

Dans notre exemple, si $t = 10°$, on trouve

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{5}{10\,(0{,}0736)} \quad \text{ou} \quad \varphi = 81°,38';$$

l'erreur en moins est donc de 8° 22′.

Ainsi, dans cette projection, le méridien central est seul perpendiculaire aux parallèles dont deux conservent leurs véritables grandeurs ; les parallèles intermédiaires sont diminués, les autres sont augmentés, et les erreurs augmentent rapidement à mesure que l'on s'éloigne de ces deux parallèles ; de même l'angle des méridiens et des parallèles, au lieu d'être droit, décroît rapidement à mesure que l'on s'éloigne du méridien central. La simplicité du tracé permettra cependant l'emploi de cette projection pour des bandes peu étendues en latitude, lorsque la conservation rigoureuse des angles et des surfaces sera de peu d'importance.

La projection n° XXXV a été dressée dans ce système et représente l'hémisphère nord développé en conservant les degrés des parallèles de 30° et de 60° de latitude.

CHAPITRE VII.

ÉTUDE GÉNÉRALE DES ALTÉRATIONS DANS UNE PROJECTION QUELCONQUE.

1. Nous avons donné aux §§ 11-15 du chapitre V les formules qui permettent d'évaluer en un point quelconque d'une projection zénithale les altérations d'angles, de longueurs et de surfaces; nous allons maintenant étudier la même question d'une manière générale et chercher la loi de déformation en un point quelconque, lorsqu'on passe d'une figure tracée sur le sphéroïde à celle qui la représente sur la carte.

Considérons un point quelconque du sphéroïde défini par sa latitude l et sa longitude t, et le plan tangent en ce point; toute courbe infiniment petite tracée autour de ce point peut être considérée comme située tout entière dans ce plan tangent qui se confond avec la surface jusqu'à des distances infiniment petites du point de contact; supposons que cette courbe soit une circonférence dont ce point occupe le centre. Un arc quelconque tracé du centre à la circonférence, c'est-à-dire un rayon quelconque de cette dernière, aura pour longueur

$$ds = \sqrt{r^2 dt^2 + \rho^2 dl^2},$$

r désignant le rayon du parallèle du point (l, t) et ρ le rayon de courbure du méridien en ce point; r et ρ sont donc des fonctions connues de l.

Soit, sur la carte, x et y les coordonnées rectangulaires du point correspondant au point (l, t) du sphéroïde; l'élément considéré aura pour projection un arc dont la longueur sera exprimée par

$$\sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Désignons par m le rapport de la seconde distance à la première, rapport variable d'un point à l'autre de la carte, et variable aussi en

chaque point avec l'orientation de l'élément mesuré ou avec le rapport $\frac{rdt}{\rho dl}$, tangente trigonométrique de l'angle α formé sur le sphéroïde par la direction considérée et le méridien.

Nous aurons donc l'équation

$$r^2dt^2+\rho^2dl^2=\frac{1}{m^2}(dx^2+dy^2), \qquad (I)$$

dans laquelle

$$dx=\frac{dx}{dt}dt+\frac{dx}{dl}dl=pdt+qdl,$$

$$dy=\frac{dy}{dt}dt+\frac{dy}{dl}dl=p'dt+q'dl.$$

Exprimons m en fonction de l'angle α défini par l'égalité

$$\operatorname{tang}\alpha=\frac{rdt}{\rho dl}.$$

L'équation (I) prend la forme

$$m^2=\frac{p^2+p'^2}{r^2}\sin^2\alpha+\frac{2(pq+p'q')}{\rho r}\sin\alpha\cos\alpha+\frac{q^2+q'^2}{\rho^2}\cos^2\alpha. \qquad (II)$$

Sous cette forme elle met d'abord en évidence une propriété importante. Si l'on calcule deux valeurs de m^2 correspondantes à deux valeurs de α différant entre elles de $\frac{\pi}{2}$, leur somme sera indépendante de α; on a en effet pour l'une

$$m^2=\frac{p^2+p'^2}{r^2}\sin^2\alpha+\frac{2(pq+p'q')}{\rho r}\sin\alpha\cos\alpha+\frac{q^2+q'^2}{\rho^2}\sin^2\alpha,$$

et pour l'autre

$$m^2_1=\frac{p^2+p'^2}{r^2}\cos^2\alpha-\frac{2(pq+p'q')}{\rho r}\sin\alpha\cos\alpha+\frac{q^2+q'^2}{\rho^2}\sin^2\alpha,$$

et, en ajoutant,

$$m^2+m^2_1=\frac{p^2+p'^2}{r^2}+\frac{q^2+q'^2}{\rho^2}, \qquad (III)$$

égalité remarquable dont nous aurons occasion de faire usage un peu plus loin.

Cherchons la valeur de α qui rend le rapport m maximum ou mi-

nimum en un point donné (l, t). Il faut pour cela laisser p, p', q, q', ρ et r constants dans l'équation (II), et égaler à zéro la dérivée du second membre prise par rapport à la seule variable α, ce qui donne

$$\left(\frac{p^2+p'^2}{r^2}-\frac{q^2+q'^2}{\rho^2}\right)\sin 2\alpha+\frac{2(pq+p'q')}{\rho r}\cos 2\alpha=0,$$

ou bien

$$\operatorname{tang} 2\alpha=-\frac{2(pq+p'q')\rho r}{\rho^2(p^2+p'^2)-r^2(q^2+q'^2)}. \qquad \text{(IV)}$$

On a donc pour tang 2α une valeur unique, mais il en résulte pour α, entre 0 et π, deux valeurs distinctes dont la différence est $\frac{\pi}{2}$.

Les éléments de longueurs qui correspondent à ces deux valeurs de α sont, l'un l'élément le plus augmenté sur la carte, l'autre l'élément le plus réduit; on peut s'assurer en effet que les deux valeurs de α font de signes contraires la dérivée seconde du second membre de l'équation (II).

Les éléments de longueurs qui subissent sur la carte les plus grandes altérations font donc un angle droit sur la surface du sphéroïde.

Cherchons aussi l'angle qu'ils font sur la carte. Nous aurons pour l'un d'eux

$$dx'=pdt+qdl=\left(\frac{\rho}{r}p\operatorname{tang}\alpha+q\right)dl,$$

$$dy'=\left(\frac{\rho}{r}p'\operatorname{tang}\alpha+q'\right)dl;$$

pour l'autre, en augmentant α de $\frac{\pi}{2}$,

$$dx''=\left(-\frac{\rho}{r}p\operatorname{cotang}\alpha+q\right)dl,$$

$$dy''=\left(-\frac{\rho}{r}p'\operatorname{cotang}\alpha+q'\right)dl.$$

Faisons ensuite

$$\operatorname{tang}\beta'=\frac{dy'}{dx'} \quad \text{et} \quad \operatorname{tang}\beta''=\frac{dy''}{dx''},$$

et il viendra, en multipliant ces deux équations membre à membre,

$$\operatorname{tang}\beta'\operatorname{tang}\beta''=\frac{\frac{1}{2}(r^2q'^2-\rho^2p'^2)\sin 2\alpha-\rho rp'q'\cos 2\alpha}{\frac{1}{2}(r^2q^2-\rho^2p^2)\sin 2\alpha-\rho rpq\cos 2\alpha},$$

fraction qui se réduit à -1 en vertu de l'équation (IV). Donc les deux directions correspondantes aux angles β' et β'' font entre elles un angle droit, ou, en d'autres termes, les éléments de longueur les plus altérés ont sur la carte comme sur le sphéroïde des directions rectangulaires; ces directions ne coïncident avec les méridiens et les parallèles que dans les projections où ces deux lignes se coupent à angle droit.

2. Revenons à l'équation (III)

$$m^2 + m_1^2 = \frac{p^2 + p'^2}{r^2} + \frac{q^2 + q'^2}{\rho^2}.$$

Si nous prenons pour unité le rayon de la petite circonférence que nous avons décrite sur le sphéroïde, les longueurs des projections de deux rayons rectangulaires seront précisément m et m_1, et l'égalité précédente exprime que la somme des carrés de ces rayons est constante quelle que soit la valeur de l'angle α. Or si l'on considère une ellipse (fig. 61) et la circonférence décrite sur son grand axe, on sait que les rayons vecteurs de l'ellipse correspondant à deux rayons rectangulaires du cercle sont deux demi-diamètres conjugués, et que la somme de leurs carrés est constante et égale à la somme des carrés des axes. Comme cette propriété suffit réciproquement pour définir l'ellipse, et que cette courbe peut toujours être considérée comme la section oblique d'un cône droit, on voit que, autour d'un même point, la déformation est soumise à une loi qui ne dépend ni de la nature des surfaces, ni de la position du point que l'on considère, ni de la manière dont on a tracé le canevas; voici comment M. Tissot l'a énoncée (1) :

« Toute représentation du sphéroïde sur un plan peut être remplacée en chaque point par une projection orthogonale faite à une échelle convenable (2). »

3. Nous avons montré précédemment, et il est facile de vérifier à l'aide de cette loi, que, quelle que soit la projection adoptée, il existe en chaque point du sphéroïde deux directions et par conséquent deux tangentes perpendiculaires entre elles, et, à moins que les angles ne soient tous conservés, il n'en existe que deux, telles que les directions qui leur correspondent sur l'autre surface se coupent aussi à angle droit. M. Tissot leur a donné le nom de *tangentes principales.*

(1) *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. XLIX, p. 673.

(2) La même loi s'applique à la représentation d'une surface quelconque sur une autre.

C'est pour ces directions que le rapport des longueurs de deux éléments infiniment petits, qui se correspondent sur les deux surfaces, atteint sa plus grande et sa plus petite valeur. Désignons respectivement ces deux valeurs par a et b et supposons $a > b$; a sera le demi grand axe de l'ellipse projection de la petite circonférence décrite sur le sphéroïde, et b sera le demi petit axe; on aura d'abord

$$a^2 = \frac{p^2 + p'^2}{r^2} = \frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}{N^2 \cos^2 l},$$

$$b^2 = \frac{q^2 + q'^2}{\rho^2} = \frac{\left(\frac{dx}{dl}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dl}\right)^2}{\rho^2},$$

et l'on pourra calculer a et b quand on connaîtra les formules de la projection dont on s'occupe, c'est-à-dire les expressions des coordonnées rectangulaires de chaque point en fonction de l et de t. Les deux rayons de courbures N et ρ de l'ellipsoïde en ce point se calculeront facilement en fonction de la latitude l.

Les tangentes principales sont bissectrices des mêmes angles sur le sphéroïde et sur la carte, et les rapports de longueurs sont égaux sur les côtés de chacun de ces angles.

La représentation diminue tous les angles aigus dont l'un des côtés coïncide avec la tangente principale qui se rapporte au maximum a. Si on représente par φ l'un de ces angles, par ψ l'angle modifié et par m le rapport de longueurs pour son second côté, il viendra

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{b}{a}\operatorname{tang}\varphi; \qquad \operatorname{tang}(\varphi - \psi) = \frac{(a-b)\sin 2\varphi}{a+b+(a-b)\cos 2\varphi},$$

$$m\cos\psi = a\cos\varphi; \qquad m\sin\psi = b\sin\varphi;$$

$$m^2 = a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi.$$

Le maximum de l'altération $\varphi - \psi$ est l'angle θ pour lequel on a

$$\sin\theta = \frac{a-b}{a+b}; \qquad \cos\theta = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}, \qquad \operatorname{tang}\theta = \frac{a-b}{2\sqrt{ab}}.$$

En appelant Φ et Ψ les valeurs correspondantes de φ et ψ, et M celle de m, on trouve

$$\Phi = 45^\circ + \frac{\theta}{2}; \quad \Psi = 45^\circ - \frac{\theta}{2}; \quad \operatorname{tang}\Phi = \sqrt{\frac{a}{b}}; \quad \operatorname{tang}\Psi = \sqrt{\frac{b}{a}}; \quad M = \sqrt{ab}.$$

L'angle le plus altéré est celui que forme la direction ainsi obtenue avec la droite qui lui est symétrique par rapport à l'une des tangentes principales. Cet angle se trouve remplacé par son supplément dans la représentation, et l'altération est égale à 2θ.

A toute autre direction il en correspond une seconde seulement, faisant avec la première un angle qui n'est pas modifié ; l'une étant donnée par l'angle φ, l'autre le sera par l'angle $90° - \psi$.

Pour tous les angles non modifiés, le produit des rapports de distances m et m' qui conviennent aux deux côtés, est le même, et l'on a

$$mm' = ab.$$

Si l'on représente par m et m_1 les rapports pour deux directions à angle droit, et par δ l'altération de cet angle, on aura, ainsi que nous l'avons déjà vu,

$$m^2 + m_1^2 = a^2 + b^2; \qquad mm_1 \cos\delta = ab.$$

Lorsqu'on passe de la première surface à la seconde, le rapport M^2, suivant lequel l'élément superficiel est modifié, est donné par le rectangle des deux axes. On a

$$M^2 = ab;$$

ce rapport est donc le carré du rapport des longueurs des seconds côtés de l'angle le plus altéré Φ et de sa projection Ψ.

On a

$$a = M \operatorname{tang}\left(45° + \frac{\theta}{2}\right); \qquad b = M \operatorname{tang}\left(45° - \frac{\theta}{2}\right).$$

Si les surfaces sont conservées en projection, il vient

$$M^2 = mm' = mm_1 \cos\delta = 1,$$

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{a-b}{2}; \qquad a = \operatorname{tang}\left(45° + \frac{\theta}{2}\right).$$

Dans ce cas, les deux éléments de longueur, dont l'angle est le plus altéré, n'éprouvent pas de modification.

Tous ces résultats, que nous avons donnés sans démonstration parce qu'ils se déduisent immédiatement de la loi de la déformation et de la considération de la circonférence infiniment petite et de l'ellipse projection, sont généraux et se vérifient dans une transformation quelconque.

Lorsque la projection est orthomorphe, l'ellipse devient une circonférence, et le rapport m des longueurs est indépendant de l'orientation de l'élément considéré.

4. Reprenons l'équation (III).

$$m^2 + m_1^2 = \frac{p^2 + p'^2}{r^2} + \frac{q^2 + q'^2}{\rho^2}.$$

M. Collignon (1) remarque que, si en un point donné d'une projection *équivalente*, il n'y a pas altération dans les longueurs, m étant égal à m_1 et à l'unité, la fonction $\frac{p^2 + p'^2}{r^2} + \frac{q^2 + q'^2}{\rho^2}$ est égale à deux unités. Réciproquement, si en un point particulier d'une carte conservant les surfaces, cette fonction a pour valeur deux unités, il n'y a pas d'altération dans les longueurs autour de ce point, car les équations

$$mm_1 = 1 \quad \text{et} \quad m^2 + m_1^2 = 2,$$

ne sont satisfaites que par

$$m = m_1 = 1.$$

La fonction $\frac{p^2 + p'^2}{r^2} + \frac{q^2 + q'^2}{\rho^2}$ est donc la fonction caractéristique du mérite propre d'un système quelconque de tracé conservant les surfaces. Si l'on calcule les valeurs numériques de cette fonction en différents points, l'écart de ces nombres par rapport au nombre 2, leur limite inférieure, indique pour chaque point le degré d'altération résultant du tracé.

Appliquant cette méthode à la comparaison de différentes projections équivalentes, M. Collignon trouve que, pour la projection zénithale de Lambert, en prenant le pôle pour centre, cette fonction a pour expression

$$\cos^2 \frac{90^\circ - l}{2} + \frac{1}{\cos^2 \frac{90^\circ - l}{2}},$$

résultat auquel nous sommes parvenus directement. Elle prend la valeur 2 au pôle, centre du tracé, et atteint son maximum $2 + \frac{1}{2}$ à l'équateur.

---

(1) *Journal de l'École Polytechnique*, 41e cahier.

Pour la projection sur le cylindre circonscrit à l'équateur, la fonction est représentée par l'expression

$$\sin^2 l + \frac{1}{\sin^2 l};$$

elle est égale à 2 en tous points de l'équateur, mais elle devient infinie au pôle pour $l = 90^0$.

Pour le tracé homalographique de Mollweide, on trouve

$$\frac{p^2 + p'^2}{r^2} + \frac{q^2 + q'^2}{\rho^2} = \frac{8\cos^2\varphi}{\pi^2\cos^2 l} + \frac{\pi^2}{8}\frac{\cos^2 l}{\cos^2\varphi} + \frac{\sin^2\varphi\cos^2 l}{2\cos^4\varphi}\,t^2.$$

Cette fonction atteint ses moindres valeurs pour une valeur donnée de l lorsque $t = 0$, c'est-à-dire le long du méridien central; sur ce méridien elle atteint son minimum en deux points, lorsque $\varphi = l$, ce qui a lieu à l'équateur et au pôle. Elle prend alors la valeur 2,048 supérieure à deux unités; mais cette valeur n'est pas applicable au pôle, car, en ce point, t est indéterminé, et le dernier terme de la fonction a une valeur infinie. Pour $t = 0$ et $l = 65^\circ\ 30'$, latitude qui correspond à peu près à la plus grande différence entre l et φ, la valeur de la fonction atteint 2,82. Pour un point placé à cette latitude, mais sur le bord de la carte, la valeur de la fonction s'élève à 4,11.

Ces résultats mettent en évidence les profondes altérations inhérentes au tracé homalographique.

La meilleure carte d'égale superficie serait celle pour laquelle la fonction $\frac{p^2 + p'^2}{r^2} + \frac{q^2 + q'^2}{\rho^2}$ serait égale à deux unités, soit en un point donné, soit en tous points d'une ligne définie par une relation donnée entre l et t et serait en outre la plus petite possible pour tous les autres points de la carte. La détermination des fonctions arbitraires par cette condition constitue un problème d'analyse beaucoup trop compliqué pour que nous essayions de le résoudre.

CHOIX DE LA PROJECTION.

5. Nous n'avons pas la prétention de donner ici des règles fixes sur le choix de la projection qui convient le mieux à la carte que l'on se propose de tracer, et nous disons même que de telles règles ne sauraient exister, car ce choix doit dépendre de plusieurs circonstances qu'il est impossible de prévoir d'une manière générale.

Malte-Brun disait avec raison que le premier objet des méditations du géographe-dessinateur est de déterminer le genre et le but de sa carte; nous ne saurions, de notre côté, trop insister sur l'importance de pareilles considérations, et c'est dans ce but que nous allons passer rapidement en revue les principaux cas qui peuvent se présenter.

Lorsqu'on veut construire une carte terrestre, on doit se demander tout d'abord si elle doit représenter : 1° la surface entière du globe ou seulement un hémisphère; 2° une vaste portion du monde; 3° un empire ou une province seulement.

Pour chacune de ces grandes divisions, le but que doit atteindre le tracé permettra de restreindre beaucoup le nombre des projections qui peuvent tout d'abord paraître convenables. Si l'on veut conserver les surfaces, c'est dans la classe des projections équivalentes que l'on devra borner son choix; si, au contraire, il importe de conserver la similitude des configurations, la projection devra être orthomorphe; mais le plus souvent il sera nécessaire d'accepter en même temps les erreurs de surfaces et de configurations, afin de ne pas exagérer l'une des deux en détruisant l'autre entièrement; et c'est alors que le choix à faire exigera une étude approfondie et intelligente.

6. Nous allons passer rapidement en revue les différents systèmes qui peuvent convenir à la représentation de la surface entière du globe au moyen d'une ou de deux cartes seulement; toute projection pourrait, à la rigueur, être appliquée à la représentation d'un hémisphère, ainsi que nous l'avons fait dans les planches qui accompagnent cet ouvrage ; mais quelques-unes entraînent avec elles, à cette limite, des erreurs beaucoup trop grandes pour que l'emploi, quelle que soit d'ailleurs la simplicité du tracé, puisse en être avantageux ; nous n'avons pas eu d'autre but, en projetant un hémisphère entier, que de mieux faire ressortir les inconvénients de chaque canevas et d'indiquer ainsi dans quelles limites chacun d'eux peut être employé.

1° Le développement des cartes réduites de Mercator et celui du cylindre droit de Lambert sont les seuls qui représentent les méridiens et les parallèles par des droites perpendiculaires entre elles; le premier conserve les angles, le second les surfaces, mais tous les deux ont l'inconvénient de déformer d'une manière exagérée les régions polaires, et ne peuvent donner une idée même approchée des

positions relatives des différents points du globe; cependant le premier est souvent employé pour les planisphères, parce qu'il indique immédiatement la route à suivre pour se rendre par mer d'un point à un autre du globe, ainsi que la longueur de cette route.

2° La projection homalographique, qui conserve les surfaces et permet de représenter le globe entier dans une ellipse dont l'axe équatorial est double de l'autre, modifie trop les angles pour être employée exclusivement; au delà de 50° de latitude, les altérations croissent très-rapidement, et rendent ce système impropre à représenter d'une manière satisfaisante les configurations des régions plus élevées en latitude.

3° Les proportions zénithales, que nous avons étudiées séparément avec tous les détails nécessaires, possèdent ce grand avantage que les azimuts relatifs au point central sont conservés; que les erreurs, de quelque nature qu'elles soient, y sont égales à égale distance du centre, nulles à ce centre qui peut être pris arbitrairement, et par conséquent d'autant plus faibles que les régions considérées sont plus voisines de ce point; ces erreurs sont, en outre, très-faciles à calculer.

Parmi ces projections, la plus facile à tracer est la projection stéréographique, qui n'altère pas les angles et permet de résoudre très-rapidement par des constructions planes les problèmes de la sphère; quoique ce système double les longueurs et quadruple les surfaces le long de la circonférence qui limite un hémisphère, il est bon qu'il figure dans les atlas, mais il ne devrait pas y figurer seul; la projection zénithale équivalente de Lambert et la projection équidistante, employées simultanément avec la projection stéréographique, permettraient de se rendre un compte exact des surfaces et des distances, non-seulement au point central, mais encore des différents points entre eux, lorsque ces points ne sont pas à plus de 30 à 40 degrés du centre. Sur la circonférence de l'hémisphère projeté dans le système équidistant, les surfaces élémentaires de la carte et de la sphère sont entre elles dans le rapport de 1,57 à 1, au lieu de 4 à 1, comme dans la projection stéréographique. Nous donnons aux chapitres IX et XIV (2e partie) le moyen de construire rapidement ces deux projections, soit directement, soit à l'aide d'une projection stéréographique déjà tracée et ayant pour centre le même point du globe.

Lorsque l'on veut représenter un hémisphère sous l'aspect méridien, il est souvent suffisant de remplacer le système équidistant par

le système globulaire, plus facile à tracer, et qui ne présente avec lui que des différences très-faibles, tantôt dans un sens, tantôt dans un autre.

La projection équidistante est celle qui convient le mieux au tracé d'un hémisphère sous l'aspect polaire, parce que les parallèles y sont représentés par des circonférences concentriques et équidistantes, comme sur la sphère, et que dans toute la zone limitée par le cercle polaire les erreurs de tous genres y sont tellement faibles qu'elles peuvent y être négligées; car, à 25 degrés du pôle, c'est-à-dire sur le parallèle de 65 degrés de latitude, le rapport maximum des distances élémentaires de la carte et de la sphère, de même que le rapport des surfaces élémentaires, est exprimé par 1,032, valeur très-peu différente de l'unité.

La projection orthographique altère beaucoup trop les surfaces et les angles pour qu'on puisse l'employer avantageusement pour la représentation d'un hémisphère ; à 60 degrés du centre, les surfaces ne sont que la moitié de celles qui leur correspondent sur la sphère, et la plus grande altération d'angle est déjà de 19° 28′. Cette projection est adoptée pour la carte de la lune, parce qu'elle figure les astres comme nous les voyons en réalité.

Les autres projections perspectives ne sont que rarement employées pour la construction des mappemondes; celle de la Hire et de Parent ne s'écartent que très-peu de la projection équidistante, qui n'est pas plus difficile à construire ; la projection du colonel James, où les erreurs sont à peu près uniformément réparties, peut être avantageusement employée pour les cartes physiques figurant plus d'un hémisphère, de manière à embrasser d'un seul coup d'œil l'ensemble des grands continents.

La projection de sir Airy, *Balance of Errors*, n'a pas encore été employée ; sa formule, très-compliquée, nécessite des calculs très-pénibles, et les problèmes de la sphère ne peuvent s'y résoudre facilement.

4° Les projections coniques seront très-utiles pour figurer un hémisphère entier, boréal ou austral parce que, les parallèles étant représentés par des cercles concentriques, les régions situées sous les mêmes latitudes sont comparables entre elles. Les projections coniques orthomorphes de Lambert conservant les angles (excepté aux pôles) et par conséquent les formes des parties peu étendues, conviennent très-bien pour cet objet : elles pourraient même être pro-

longées au delà de l'équateur ; mais, comme les erreurs croissent très-rapidement à cette limite, il sera préférable, si l'on veut représenter la surface entière du globe, de recourir à deux cartes se terminant à l'équateur, l'une pour l'hémisphère boréal, l'autre pour l'hémisphère austral. En prenant pour λ la valeur $\frac{3}{4}$, l'angle au pôle d'un hémisphère entier est de 281° 59″ 38′ ; les degrés de longitude sont conservés sur deux parallèles qui diffèrent peu de ceux de 30 et de 70 degrés de latitude ; le rapport d'agrandissement, le même à ces deux latitudes, est le plus petit possible sous le parallèle de 51° 30′ environ ; enfin, le parallèle de 45° de latitude partage tous les méridiens en deux parties à peu près égales.

On peut aussi représenter l'hémisphère boréal ou l'hémisphère austral en proportion conique équivalente, d'après le système de Lambert, en déterminant le coefficient arbitraire n de manière que les degrés d'un parallèle donné conservent leur véritable rapport avec le degré de longitude ; si ce parallèle est celui de 45 degrés, le coefficient n prend la valeur 1,171, et par conséquent l'angle au pôle est de 307° 25′ environ.

Enfin les projections polyconiques représenteront avec une exactitude suffisante un hémisphère sous l'aspect méridien, soit que l'on veuille conserver les degrés de tous les parallèles, soit que l'on préfère sacrifier cette égalité à la perpendicularité des méridiens et des parallèles. Comme les deux systèmes diffèrent très-peu l'un de l'autre, on pourra se contenter de la construction abrégée d'un hémisphère que nous avons indiquée en parlant des systèmes polyconiques.

7. Supposons maintenant que l'on veuille représenter, non plus un hémisphère entier, mais une portion plus ou moins grande du monde. On devra tout d'abord considérer quelle est la position de cette contrée relativement à l'équateur, son étendue et la forme générale de son contour ; on voit que la question sera beaucoup plus difficile que celle de la construction d'un hémisphère, parce que, l'échelle étant nécessairement plus grande, les altérations résultant du canevas que l'on adoptera seront beaucoup plus apparentes, et auront une importance bien autrement considérable ; on devra donc étudier la question avec le plus grand soin, chercher à répartir les erreurs à peu près également dans les parties également importantes, en reportant les plus considérables dans les parties dont l'exacte représentation importe le moins, comme, par exemple, les grandes masses d'eau qui entourent un continent ; il faudra aussi éviter les

projections qui, par rapport au format, obligent le géographe à faire entrer dans sa carte plus de pays étrangers à son objet que tel autre système, parce qu'elles diminuent l'échelle de la carte, c'est-à-dire la proportion entre l'image et l'objet représenté.

Lorsque la carte ne doit embrasser qu'une petite portion de la surface du globe, les défauts de toutes les méthodes diminuent, car les quadrilatères formés par les méridiens et les parallèles approchent d'autant plus d'être des parallélogrammes rectangles équivalents qu'ils sont moins éloignés du centre de la contrée que l'on veut représenter ; c'est ainsi que toutes les projections viennent se confondre avec le plan levé géométriquement toutes les fois qu'il s'agit d'une étendue dans laquelle la courbure de la terre est peu sensible; il est donc toujours avantageux de multiplier les cartes d'un atlas, au lieu de chercher à représenter dans une même carte plusieurs États, plusieurs contrées dont l'ensemble importe peu à l'étude que l'on veut faire; mais, en se conformant à cette prescription, le choix de la projection n'en reste pas moins important, car il peut être nécessaire de réduire les erreurs le plus possible autour d'un point important, tel qu'une capitale, en les laissant s'accroître avec les distances à ce point, ou de conserver les distances relatives dans certaines directions plutôt que dans d'autres.

Il ne peut exister de règles fixes pour le choix de la projection la plus convenable; s'il était possible de dresser un tableau des altérations d'angles, de longueurs, de surfaces, en des points assez rapprochés de chaque canevas, un tracé rapide du contour de la contrée que l'on veut figurer montrerait, suivant le but que l'on veut atteindre, quel est le système qui convient le mieux à cette contrée ; mais on ne peut songer à dresser un pareil tableau, puisque, pour beaucoup de systèmes, les altérations dépendent de coefficients arbitraires et que l'on ne détermine que par les données mêmes de la question que l'on veut résoudre, par exemple, par la latitude du point important où l'on veut réduire les erreurs, ou par celle de deux parallèles dont on veut conserver les degrés de longitude, etc. L'intelligence du géographe peut donc seule suppléer à ce manque de règles et d'indications suffisantes, et ce n'est que par une connaissance approfondie des avantages et des défauts de chaque système en particulier qu'il pourra prononcer au milieu du grand nombre qui peuvent s'offrir à lui.

NOTE

SUR LES CARTES GÉOGRAPHIQUES,

Par M. A. Tissot (1).

« *Trouver le meilleur mode de projection pour chaque contrée particulière.* »

8. « Lorsqu'il s'agit d'une carte destinée aux services publics, comme celle qui a été dressée en France par le Dépôt de la Guerre, la première condition que l'on doit s'astreindre à remplir en faisant choix d'un système de projection, est relative à la reproduction des angles; il n'est pas nécessaire d'annuler complétement leurs altérations, mais il faut les rendre plus faibles que les erreurs admissibles en topographie dans la mesure des angles eux-mêmes; alors chaque feuille de la carte constituera un véritable levé topographique; seulement, les distances ne pouvant être conservées, l'échelle du dessin variera d'une feuille à l'autre. Une seconde condition se rapporte à cette variation de l'échelle; on doit, en la rendant aussi faible que possible, amener à son maximum l'étendue de chacune des régions à laquelle il est permis d'attribuer une échelle unique. Enfin, avant de tracer le canevas, on a à calculer les coordonnées d'un grand nombre de points rapportés à deux axes rectangulaires; une troisième condition réside dans la simplicité des formules employées à cet usage.

« Il existe une infinité de systèmes de représentation qui ne modifient pas les angles; mais s'il s'agit d'une contrée ayant, comme la Russie, des dimensions exceptionnelles dans tous les sens, quand même on prendrait celui de ces systèmes qui réduit à son minimum la plus grande altération de longueur, l'échelle subirait de fortes variations d'une extrémité du pays à l'autre, à moins qu'on ne le divisât en plusieurs régions ayant chacune leur carte particulière; c'est pourquoi, tout en évitant les difficultés d'analyse, on aura résolu la question dans les cas qu'il est utile de considérer, si l'on se borne aux trois suivants : celui d'une portion du globe peu étendue dans le sens des parallèles, et autant que l'on voudra dans le sens des mé-

(1) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 17 décembre 1860, p. 964-969.

ridiens ; celui d'une portion du globe peu étendue dans le sens des méridiens, et autant que l'on voudra dans le sens des parallèles ; celui d'une contrée peu étendue dans les deux sens, comme la France, l'Espagne, etc.

« Appelons L la latitude d'un point quelconque, L_0 celle d'un point central, m la longitude du premier point comptée à partir du méridien du second, r le rayon du parallèle dont la latitude est L, r_0 celui du parallèle dont la latitude est L_0, s l'arc de méridien compris entre ces deux parallèles, x et y les coordonnées rectangulaires du point de la carte qui correspond à la latitude L et à la longitude m.

« Dans le premier cas, le meilleur système de projection est donné par les formules

$$(I) \qquad x = s + \frac{1}{2} rm^2 \sin L, \qquad y = rm\left(1 + \frac{1}{6} m^2 \cos 2L\right).$$

« Dans le second cas, en posant

$$R_0 = r_0 \operatorname{cosec} L_0, \qquad R = R_0 - s - \frac{1}{6} s^3, \qquad \varphi = m \sin L_0,$$

on aura, pour les formules analogues,

$$(II) \qquad x = R_0 - R\cos\varphi, \qquad y = R\sin\varphi;$$

ici les méridiens de la carte sont des droites partant toutes d'un même point, et les parallèles des circonférences dont ce point occupe le centre.

« Dans le troisième cas, si l'on appelle N_0 la grande normale du méridien à la latitude L_0, et si l'on représente par μ la variable $m \cos L_0$, on devra employer les formules

$$(III) \quad \begin{cases} x = s + \frac{1}{2} N_0 \operatorname{tang} L_0 \mu^2 + \frac{1}{3} As^3 - Bs^2\mu + Cs\mu^2 + \frac{1}{3} B\mu^3, \\ y = rm + \frac{1}{3} Bs^3 + As^2\mu - Bs\mu^2 + \frac{1}{2} C\mu^3, \end{cases}$$

dans lesquelles on peut mettre $L - L_0$ à la place de s, excepté dans le premier terme de la valeur de x ; A, B, C sont des coefficients constants, dont le troisième est lié au premier par la relation

$$2(A + C)\cos^2 L_0 = \cos 2L_0 ;$$

quant à A et à B, ils dépendent de la forme du contour qui limite le pays, et voici comment ils s'obtiennent ; on trace d'abord ce contour en rapportant chacun de ses points à deux axes rectangulaires sur

lesquels on porte les coordonnées $L - L_0$ et μ; à l'aide de quelques tâtonnements graphiques, on détermine ensuite de grandeur et de position l'ellipse enveloppante pour laquelle le diamètre qui est incliné à 45° sur ses deux axes est le plus petit possible. Soient $2d$ la longueur de ce diamètre minimum, $2a$ celle du grand axe correspondant, α l'angle que fait cette dernière ligne avec l'axe des coordonnées sur lequel est comptée la variable μ; on aura

$$\text{(IV)} \qquad A = \frac{1}{2}\left(\cos^2\alpha - \frac{d^2}{2a^2}\cos 2\alpha\right), \qquad B = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{d^2}{a^2}\right)\sin 2\alpha;$$

le centre de l'ellipse donnera le point central de la carte, et par conséquent fera connaître la latitude moyenne L_0, dont une valeur approchée aura suffi dans cette recherche préliminaire.

« Pour certains contours exceptionnels, le mode de projection le plus avantageux sera fourni par des essais analogues au précédent, mais où les ellipses seront remplacées par des hyperboles ou même par des paraboles, et, dans le cas des paraboles, les formules (III) devront être un peu modifiées; la plupart du temps, on reconnaîtra d'avance l'inutilité de ces deux derniers essais.

« Enfin, on peut introduire dans les seconds membres des équations (I), (II) et (III) un facteur qu'il est facile de déterminer pour chaque pays en particulier, et dont l'effet est de réduire de moitié la plus grande altération de longueur, en la rendant positive dans certaines régions et négative dans d'autres.

« Appliquées à la France, les recherches qui précèdent donnent

$$\text{(V)} \qquad A = 0{,}306, \qquad B = 0, \qquad C = -0{,}368, \qquad L_0 = 41^\circ 40',$$

et le méridien moyen est celui de Paris.

« Pour la carte d'Espagne, dont les opérations géodésiques sont en voie d'exécution, on est conduit à prendre comme méridien central celui de Madrid, et comme parallèle central celui de 40°; les formules sont

$$\text{(VI)} \qquad \begin{cases} x = s + 0{,}42013\mu^2 + 0{,}111s^3 - 0{,}185s^2\mu, \\ y = rm + 0{,}333s^2\mu - 0{,}062\mu^3. \end{cases}$$

« Voici maintenant un tableau contenant, pour six contrées différentes, la plus grand altération d'angle et la plus grande altération de distance produites par le mode de projection adopté lors de la

construction de la carte de France, et par l'un de ceux qui sont proposés dans ce Mémoire.

CONTRÉES.	VALEURS de la plus grande altération d'angle.	VALEURS de la plus grande altération de distance.	MODE DE PROJECTION.
Première contrée. . .	7° 30′	$\frac{1}{15}$	Celui du Dépôt de la Guerre.
Idem.	1′ 20″	$\frac{1}{230}$	Celui des formules (I).
Égypte.	25″	$\frac{1}{250}$	Dépôt de la Guerre.
Idem.	5″	$\frac{1}{2000}$	Formules (II).
Troisième contrée. . .	14° 40′	$\frac{1}{7}$	Dépôt de la Guerre.
Idem.	1′ 20″	$\frac{1}{230}$	Formules (II).
Algérie.	11′	$\frac{1}{600}$	Dépôt de la Guerre.
Idem.	3″	$\frac{1}{2000}$	Formules (II).
France.	18′	$\frac{1}{380}$	Dépôt de la Guerre (parallèle moyen de 45°).
Idem.	10′ 30″	$\frac{1}{650}$	Dépôt de la Guerre (parallèle moyen de 46° 30′).
Idem, ...	25″	$\frac{1}{1100}$	Formules (III) et (V).
Espagne.	11′	$\frac{1}{600}$	Dépôt de la Guerre (parallèle moyen de 41°).
Idem.	20″	$\frac{1}{1000}$	Formules (VI).

« Le premier et le troisième exemple ne se rapportent à aucune division territoriale ; je les ai choisis afin de montrer qu'avec un petit nombre de cartes on pourrait représenter toute la surface du globe, en ne donnant lieu qu'à de faibles déformations ; en effet, si de part et d'autre d'un méridien quelconque on porte sur tous les parallèles des longueurs égales à la moitié de l'arc de 15° à l'équateur, on détachera de la surface de la terre une portion qui en sera environ la huitième partie, et c'est de cette portion qu'il s'agit dans les deux premières lignes du tableau. Dans la cinquième et la sixième, on a considéré toute la zone comprise entre les parallèles

de 37° 30′ et 52° 30′ de latitude, zone dont fait partie l'Europe centrale, si on la prend dans l'hémisphère nord.

« Pour la seconde application, j'ai choisi la carte d'Égypte, parce que les travaux nécessaires à sa construction doivent être commencés prochainement. Le territoire de l'Égypte se compose, comme on sait, d'une longue vallée encaissée depuis Assouan jusqu'au Caire par deux chaînes de montagnes dont les versants extérieurs s'étendent dans de vastes déserts; il est à présumer que l'on n'effectuera dans ces déserts aucune triangulation, mais que par la suite on continuera au sud d'Assouan et en remontant le Nil des opérations géodésiques dont les résultats offriront beaucoup d'intérêt, tant pour l'étude de la forme de la terre qu'au point de vue géographique. J'ai donc supposé que la carte qu'il s'agissait d'établir était celle d'une contrée située entre le 9e et le 32e degré de latitude, avec une étendue de 5° en longitude.

« Le quatrième exemple est relatif à toute l'Algérie, c'est-à-dire au Tell et au Sahara algériens; en adoptant les formules proposées, on pourrait placer sur la même carte la régence de Tunis et la plus grande partie de l'empire du Maroc sans augmenter les altérations.

« Le parallèle moyen de 45° dont il est question pour la France est celui qui a été adopté par les commissions de 1803 et de 1818.

« Enfin, avec les formules (VI), les îles Baléares, le territoire de Ceuta et le Portugal se trouvent compris dans la région à laquelle se rapportent les altérations indiquées par le tableau; mais celles que produit le système de Flamsteed modifié augmenteraient, si on voulait compléter la carte de la Péninsule par l'addition du Portugal. »