www.e-rara.ch

Traité des projections des cartes géographiques

Germain, Adrien Adolphe Charles

Paris, [1865]

ETH-Bibliothek Zürich

Shelf Mark: Rar 18793

Persistent Link: https://doi.org/10.3931/e-rara-74932

Chapitre II.

www.e-rara.ch
Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien – von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material – from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d'imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L'éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes – des débuts de l'imprimerie jusqu'au 20e siècle.

e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

Nutzungsbedingungen Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titelinformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

Terms of Use This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

Conditions d'utilisation Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

Condizioni di utilizzo Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]

Visual Library

CHAPITRE II.

PROJECTIONS SANS DÉFORMATION OU ORTHOMORPHES.

1. Nous avons montré que la condition nécessaire et suffisante à la conservation des angles et par suite à la similitude des surfaces était que les éléments différentiels autour d'un même point fussent dans un rapport constant avec les éléments qui leur correspondent sur la surface du sphéroïde.

Désignons par m ce rapport qui est fonction de la latitude l et de la longitude t.

L'équation fondamentale sera alors

$$dx^2 + dy^2 = m^2(ds^2 + r^2dt^2),$$

ou, en posant $mr = n$,

$$dx^2 + dy^2 = n^2\left[\left(\frac{ds}{r}\right)^2 + dt^2\right].$$

Cherchons quelle fonction de la latitude représente le rapport $\frac{ds}{r}$.

Si nous désignons par z le complément de la latitude, c'est-à-dire l'angle de la normale avec l'axe des pôles, on aura $dz = -dl$, et par suite

$$\frac{ds}{r} = \frac{(1-e^2)dz}{(1-e^2\cos^2 z)\sin z} = \frac{dz}{\sin z} - \frac{e^2\sin z dz}{1-e^2\cos^2 z},$$

expression qui se réduit à son premier terme dans le cas où la terre est supposée sphérique.

Le rapport $\frac{ds}{r}$ est donc une quantité intégrable que nous pouvons désigner par du. Dans le cas de la terre sphérique l'intégrale est

$$u = \frac{1}{2}\log\frac{1-\cos z}{1+\cos z} + \log K = \log K \operatorname{tang}\frac{z}{2},$$

en appelant K une constante arbitraire. Si la terre est supposée elliptique, l'intégrale de $\frac{e^2 \sin z dz}{1-e^2\cos^2 z}$ est $\frac{e}{2}\log\frac{1-e\cos z}{1+e\cos z}$; on aura donc en général

$$u = \log\left[\mathrm{K}\tang\frac{z}{2}\left(\frac{1+e\cos z}{1-e\cos z}\right)^{\frac{e}{2}}\right].$$

Si l'on appelle ζ un angle tel que l'on ait

$$\tang\frac{\zeta}{2} = \tang\frac{z}{2}\left(\frac{1+e\cos z}{1-e\cos z}\right)^{\frac{e}{2}},$$

l'expression de u aura la même forme que dans le cas de la terre sphérique, car on aura alors

$$u = \log \mathrm{K}\tang\frac{\zeta}{2};$$

en sorte que l'on pourra regarder ζ comme la distance au pôle corrigée en vertu de l'aplatissement de la terre, et, comme l'excentricité est fort petite, on pourra trouver la correction dont il s'agit, c'est-à-dire la différence de ζ à z, par la relation

$$\zeta = z - \frac{e^2}{2}\sin 2z,$$

et cette approximation aura toute l'exactitude désirable (1).

Revenons maintenant à l'équation générale du problème

$$dx^2 + dy^2 = n^2(du^2 + dt^2);$$

la question se réduit à déterminer au moyen de cette équation les valeurs de x et de y en fonction de t et u.

Posons

$$u + t\sqrt{-1} = \alpha, \qquad u - t\sqrt{-1} = \beta,$$
$$x + y\sqrt{-1} = \alpha', \qquad x - y\sqrt{-1} = \beta'.$$

Nous pouvons écrire, en appelant ν ce que devient n quand on y remplace u et t par leurs valeurs en α et β,

---

(1) La différence $\zeta - z$, que nous avons appelée i au § 3 du chap. I, est égale à la différence entre la latitude géographique l et la latitude géocentrique l'; elle est donnée dans la table III pour toutes les valeurs de z de degré en degré.

$$d\alpha' d\beta' = \nu d\alpha d\beta.$$

Il est alors très-facile d'obtenir α' et β'.

Remplaçons

$$d\alpha' \quad \text{par} \quad \frac{d\alpha'}{d\alpha} d\alpha + \frac{d\alpha'}{d\beta} d\beta,$$

et

$$d\beta' \quad \text{par} \quad \frac{d\beta'}{d\alpha} d\alpha + \frac{d\beta'}{d\beta} d\beta;$$

il vient

$$\frac{d\alpha'}{d\alpha}\frac{d\beta'}{d\alpha} d\alpha^2 + \frac{d\alpha'}{d\beta}\frac{d\beta'}{d\beta} d\beta^2 + \left(\frac{d\alpha' d\beta'}{d\alpha d\beta} + \frac{d\alpha' d\beta'}{d\beta d\alpha}\right) d\alpha d\beta = n^2 \nu d\alpha d\beta;$$

d'où

$$\frac{d\alpha'}{d\alpha}\frac{d\beta'}{d\alpha} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{d\alpha'}{d\beta}\frac{d\beta'}{d\beta} = 0,$$

et par conséquent

$$\frac{d\alpha'}{d\beta} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{d\beta'}{d\alpha} = 0,$$

ou bien

$$\frac{d\alpha'}{d\alpha} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{d\beta'}{d\beta} = 0;$$

c'est-à-dire, en intégrant,

$$\alpha' = \mathrm{F}(\alpha), \quad \beta' = \mathrm{F}_1(\beta),$$

ou bien

$$\alpha' = \Phi(\beta) \quad \text{et} \quad \beta' = \Phi_1(\alpha).$$

Nous serions arrivés au même résultat en exprimant que l'angle de deux éléments quelconques de la carte est égal à l'angle des deux éléments correspondants du sphéroïde.

En effet, le cosinus de l'angle compris entre les deux éléments am_1, am_2 de la carte qui partent du point (xy) et se terminent respectivement aux points $(x + dx, y + dy)$, $(x + \delta x, y + \delta y)$ sera, abstraction faite du signe,

$$\frac{dx\delta y - \delta x dy}{\sqrt{(dx^2 + dx^2)(\delta x^2 + \delta y^2)}}.$$

De même le cosinus de l'angle formé sur le sphéroïde par les deux éléments AM_1, AM_2 qui partent du point (u, t) et se terminent

respectivement aux points $(u+du,\ t+dt)$, $(u+\delta u,\ t+\delta t)$, sera

$$\frac{du\delta t - dt\delta u}{\sqrt{(du^2+dt^2)(\delta u^2+\delta t^2)}}.$$

Nous aurons donc pour l'équation du problème

$$\frac{du\delta t - \delta u dt}{\sqrt{(du^2+dt^2)(\delta u^2+\delta t^2)}} = \frac{dx\delta y - dy\delta x}{\sqrt{(dx^2+dy^2)(\delta x^2+\delta y^2)}},$$

ou, en introduisant les variables α, β, α', β',

$$\frac{d\beta\delta\alpha - d\alpha\delta\beta}{\sqrt{d\alpha d\beta\delta\alpha\delta\beta}} = \frac{d\beta'\delta\alpha' - d\alpha'\delta\beta'}{\sqrt{d\alpha' d\beta'\delta\alpha'\delta\beta'}};$$

d'où

$$d\alpha' d\beta'\delta\alpha'\delta\beta'(d\beta\delta\alpha - \delta\beta d\alpha)^2 = d\alpha d\beta\delta\alpha\delta\beta(d\beta'\delta\alpha' - d\alpha'\delta\beta')^2.$$

Posons

$$\delta\alpha' = \frac{d\alpha'}{d\alpha}\delta\alpha + \frac{d\alpha'}{d\beta}\delta\beta \qquad \text{et} \qquad \delta\beta' = \frac{d\beta'}{d\alpha}\delta\alpha + \frac{d\beta'}{d\beta}\delta\beta,$$

et, supposant les éléments AM_1, am_1 fixes, faisons varier les éléments AM_2, am_2, c'est-à-dire supposant $d\alpha$, $d\beta$, $d\alpha'$, $d\beta'$ constants, faisons varier $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\alpha'$, $\delta\beta'$; l'égalité ci-dessus étant une identité, il ne pourra y avoir dans le premier nombre d'autres termes en $\delta\alpha$ et $\delta\beta$ que ceux qui se trouvent dans le second; ainsi les termes en $\delta\alpha^4$ et $\delta\beta^4$ du premier membre devront disparaître, ce qui exige que

$$\frac{d\alpha'}{d\alpha}\frac{d\beta'}{d\alpha} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{d\alpha'}{d\beta}\frac{d\beta'}{d\beta} = 0,$$

comme nous l'avions déjà obtenu.

La similitude des éléments autour de chaque point entraîne donc la conservation des angles, et réciproquement; c'est ce que nous avions déjà fait remarquer sans calcul.

Revenons aux résultats que nous avons trouvés

$$\alpha' = F(\alpha) \quad \text{avec} \quad \beta' = F_1(\beta) \quad \text{ou bien} \quad \alpha'\Phi = (\beta) \quad \text{avec} \quad \beta' = \Phi_1(\alpha).$$

Substituons à α, β, α', β' leurs valeurs en x, y, u et t; les deux solutions de notre problème deviendront

$$x + y\sqrt{-1} = F(u + t\sqrt{-1}) \quad \text{avec} \quad x - y\sqrt{-1} = F_1(u - t\sqrt{-1}),$$

et

$$x + y\sqrt{-1} = \Phi(u + t\sqrt{-1}) \quad \text{avec} \quad x - y\sqrt{-1} = \Phi_1(u + t\sqrt{-1}).$$

Les caractéristiques F et Φ désignent deux fonctions indéterminées quelconques, de sorte que $F(u+t\sqrt{-1})$ et $\Phi(u-t\sqrt{-1})$ sont des fonctions quelconques de $u+t\sqrt{-1}$ et de $u-t\sqrt{-1}$.

Mais x et y devant être réels comme u et t, les deux fonctions F_1 et Φ_1 ne peuvent pas être prises arbitrairement une fois que les fonctions F et Φ ont été fixées; il faut évidemment, si la fonction F est réelle, que F_1 soit la même fonction; et, si F est imaginaire, que F_1 soit la fonction conjuguée obtenue en changeant dans la première $\sqrt{-1}$ en $-\sqrt{-1}$; il en est de même de Φ_1 relativement à Φ; ainsi chacune de nos solutions ne contient qu'une fonction arbitraire qui peut être imaginaire aussi bien que réelle.

M. Bonnet (1) a montré très-simplement que la première solution correspond à la similitude directe lorsque l'on se place dans la région extérieure au sphéroïde, c'est-à-dire au cas où l'on veut représenter les différents lieux de la terre comme ils sont placés en réalité sur le globe; la seconde solution, au contraire, correspond à la similitude inverse; c'est le contraire qui aurait lieu si l'on se plaçait dans la région intérieure. Comme le premier cas est seul intéressant, nous ne considérerons que la première solution

$$x+y\sqrt{-1}=F(u+t\sqrt{-1}) \quad \text{et} \quad x-y\sqrt{-1}=F_1(u-t\sqrt{-1}).$$

Nous en tirons

$$x=\frac{1}{2}\left[F(u+t\sqrt{-1})+F_1(u-t\sqrt{-1})\right]$$

$$y=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\left[F(u+t\sqrt{-1})-F_1(u-t\sqrt{-1})\right].$$

Telles sont les expressions les plus générales des coordonnées x et y qui déterminent sur la carte la position que doit avoir chaque lieu de la terre en vertu de la condition supposée : que la distance de deux lieux quelconques infiniment voisins sur la surface de la terre soit à la distance des mêmes lieux sur la carte dans le rapport de 1 à m.

Il est facile de voir que réciproquement les expressions dont il s'agit renferment nécessairement la loi de la description de toutes

(1) *Thèses de mécanique et d'astronomie présentées à la Faculté des sciences de Paris, le 2 août* 1852, par M. Ossian Bonnet, in-4, pages 39 à 78.

les cartes géographiques dans lesquelles la même condition pourra avoir lieu.

2. Cherchons l'expression du rapport d'agrandissement m en chaque point.

Nous avons posé $m = \frac{n}{r}$ et les conditions du problème ont donné

$$dx^2 + dy^2 = n^2(du^2 + dt^2);$$

donc, en appelant F' et F'_1 les dérivées des fonctions F et F_1 par rapport à $u + t\sqrt{-1}$ et à $u - t\sqrt{-1}$, on aura

$$dx + dy\sqrt{-1} = F'(u + t\sqrt{-1}) \times (du + dt\sqrt{-1}),$$
$$dx - dy\sqrt{-1} = F'_1(u - t\sqrt{-1}) \times (du - dt\sqrt{-1});$$

donc

$$dx^2 + dy^2 = F'(u + t\sqrt{-1})\, F'_1(u - t\sqrt{-1}) \times (du^2 + dt^2);$$

ainsi

$$n^2 = F'(u + t\sqrt{-1})\, F'_1(u - t\sqrt{-1}),$$

et par conséquent

$$m = \frac{\sqrt{F'(u + t\sqrt{-1})\, F'_1(u - t\sqrt{-1})}}{r} = \frac{\sqrt{(1 - e^2\cos^2 z)\, F' . F'_1}}{\sin z} = \frac{1}{r\Omega},$$

en posant

$$\sqrt{F'(u + t\sqrt{-1})\, F'_1(u - t\sqrt{-1})} = \frac{1}{\Omega}.$$

Si nous considérons autour de deux points correspondants de la terre et de la carte deux figures infiniment petites, les côtés homologues étant dans le rapport de 1 à m, les figures seront semblables et leurs surfaces seront dans le rapport de 1 à m^2; ainsi chaque portion infiniment petite de la surface de la terre conserve sa figure et n'est altérée que dans sa grandeur.

Nous savons déjà que la supposition de m constant est inadmissible dans l'hypothèse de la terre sphéroïde, c'est-à-dire qu'il est impossible d'obtenir un mode de représentation pour lequel une portion finie de la terre soit partout semblable à la partie correspondante de la carte. L'analyse démontre qu'en supposant seulement que la terre soit une surface de révolution, le rapport d'agrandissement ne pourrait être constant que si cette surface était un cylindre ou un cône. Nous ne nous arrêterons pas à ce calcul.

3. Reprenons maintenant les relations

$$x+y\sqrt{-1}=\mathrm{F}(u+t\sqrt{-1}) \quad \text{et} \quad x-y\sqrt{-1}=\mathrm{F}_1(u-t\sqrt{-1})$$

qui lient les différents points de la carte aux points correspondants du globe, et cherchons à déterminer la fonction inconnue F.

Je remarque que si nous supposons $t=0$, nous aurons les valeurs des coordonnées de la courbe qui représente le premier méridien :

$$x=\frac{\mathrm{F}(u)+\mathrm{F}_1(u)}{2}, \qquad y=\frac{\mathrm{F}(u)-\mathrm{F}_1(u)}{2\sqrt{-1}};$$

ces valeurs contenant deux fonctions arbitraires, savoir la partie réelle et le coefficient de $\sqrt{-1}$ de F, peuvent être des fonctions quelconques de u ; il en résulte que le premier méridien de la carte peut être représenté par une courbe quelconque et que la latitude peut varier sur ce méridien suivant une loi aussi quelconque. En effet, supposons que pour ce méridien on ait

$$x=\varphi(u), \quad y=\psi(u),$$

$\varphi(u)$ et $\psi(u)$ représentant des fonctions quelconques données de u ; on aura

$$\frac{\mathrm{F}(u)+\mathrm{F}_1(u)}{2}=\varphi(u) \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{F}(u)-\mathrm{F}_1(u)}{2\sqrt{-1}}=\psi(u);$$

d'où l'on tire

$$\mathrm{F}(u)=\varphi(u)+\psi(u)\sqrt{-1}; \quad \mathrm{F}_1(u)=\varphi(u)-\psi(u)\sqrt{-1};$$

donc, mettant cette forme de fonction dans les expressions générales de x et y, on aura

$$x=\frac{\varphi(u+t\sqrt{-1})+\varphi(u-t\sqrt{-1})}{2}+\frac{\psi(u+t\sqrt{-1})-\psi(u-t\sqrt{-1})}{2}\sqrt{-1},$$

$$y=\frac{\psi(u+t\sqrt{-1})+\psi(u-t\sqrt{-1})}{2}+\frac{\varphi(u+t\sqrt{-1})-\varphi(u-t\sqrt{-1})}{2}\sqrt{-1},$$

et ces expressions ont l'avantage que les imaginaires s'y détruisent toujours d'elles-mêmes.

Supposons, par exemple, que nous représentions le premier méridien par une droite sur laquelle la latitude devra varier, de telle sorte que $x=\mathrm{K}u$, K étant une constante ; prenons cette droite pour

axe des x; les deux fonctions $\varphi(u)$ et $\psi(u)$, sont dans ce cas 0 et u; nous aurons donc, en supposant la terre sphérique,

$$y = Kt \qquad \text{et} \qquad x = K \log\text{tang} \frac{90° - l}{2},$$

ce qui est la loi de la projection des cartes marines; les méridiens sont des droites parallèles également espacées, et les parallèles des droites perpendiculaires aux premières et dont l'espacement est soumis à la loi

$$dx = d\left(K \log\text{tang} \frac{90° - l}{2}\right) = \frac{-K dl}{\sin(90° - l)} = \frac{-K dl}{\sec l}.$$

Ces cartes (1) sont employées pour la navigation parce que les rumbs de vent y sont conservés et que, par conséquent, la route à suivre pour se rendre d'un point à un autre à l'aide de la boussole en coupant tous les méridiens sous le même angle y est représentée par une droite.

En appliquant la formule $m = \frac{\sqrt{F' \cdot F'_1}}{r}$, on trouve facilement que, dans l'hypothèse de la terre sphérique,

$$m = \frac{K}{\cos l}.$$

Le rapport d'agrandissement des surfaces sera par conséquent

$$m^2 = \frac{K^2}{\cos^2 l},$$

rapport considérable, mais qui importe peu pour les besoins de la navigation.

4. D'autres considérations peuvent nous faire déterminer immédiatement différents genres de représentation.

Quand on choisit pour F une fonction linéaire, c'est-à-dire F(A) = KA, on obtient la projection de Mercator ou des cartes marines, dont nous venons de parler.

On peut prendre pour F une fonction exponentielle réelle, par exemple l'une des plus simples

$$F\left(u + t\sqrt{-1}\right) = Ke^{\lambda\left(u + t\sqrt{-1}\right)};$$

(1) *Voir* la deuxième partie, chap. V, pour la théorie et la construction de cette projection, et le § 22 du chapitre VI (1re partie) pour l'historique de son invention due à Gérard MERCATOR.

on a alors

$$F_1(u - t\sqrt{-1}) = Ke^{\lambda(u-t\sqrt{-1})}.$$

On peut écrire

$$F(u + t\sqrt{-1}) = Ke^{\lambda u}(\cos\lambda t + \sqrt{-1}\sin\lambda t),$$

$$F_1(u - t\sqrt{-1}) = Ke^{\lambda u}(\cos\lambda t - \sqrt{-1}\sin\lambda t).$$

On aura donc

$$x = Ke^{\lambda u}\cos\lambda t, \qquad \text{et} \qquad y = Ke^{\lambda u}\sin\lambda t.$$

Dans le cas de la terre sphérique $u = \log \operatorname{tang} \frac{z}{2}$, z étant le complément de la latitude, donc

$$e^{\lambda u} = \left(\operatorname{tang}\frac{z}{2}\right)^{\lambda},$$

et par conséquent

$$x = K\left(\operatorname{tang}\frac{z}{2}\right)^{\lambda}\cos\lambda t \qquad \text{et} \qquad y = K\left(\operatorname{tang}\frac{z}{2}\right)^{\lambda}\sin\lambda t. \quad (A)$$

Comme $\frac{y}{x} = \operatorname{tang}\lambda t$ et que $x^2 + y^2 = K^2\left(\operatorname{tang}\frac{z}{2}\right)^{2\lambda} = \rho^2$, on voit que les projections de tous les points pour lesquels la latitude est constante forment un cercle, et que les projections de tous les points pour lesquels la longitude est constante forment une droite ; de plus tous les cercles représentant les parallèles ont un centre commun autour duquel rayonnent tous les méridiens.

Le rapport d'agrandissement est ici

$$m = \frac{\sqrt{F'.F'_1}}{\sin z} = \frac{\lambda K\left(\operatorname{tang}\frac{z}{2}\right)^{\lambda}}{\sin z}.$$

Comme λ est une constante arbitraire, nous pouvons lui donner telle valeur que nous voulons. Si nous faisons d'abord $\lambda = 1$ nous obtenons la projection dite stéréographique polaire (1)

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tang} t \qquad \text{et} \qquad x^2 + y^2 = K^2\left(\operatorname{tang}\frac{90° - l}{2}\right)^2,$$

K représente alors le rayon de l'équateur.

---

(1) *Voir* 2e partie, chap. I, § 5.

Le rapport d'agrandissement devient

$$m = \frac{\operatorname{tang}\frac{z}{2}}{\sin z} = \frac{1}{2\cos^2\frac{z}{2}}.$$

Si nous faisons, dans les équations (A), $\lambda = 0$, nous obtenons encore les cartes marines comme il est facile de s'en convaincre en développant

$$\rho = \operatorname{tang}\left(\frac{90^\circ - l}{2}\right)^\lambda = \left(\frac{\operatorname{tang} 45^\circ - \operatorname{tang}\frac{l}{2}}{\operatorname{tang} 45^\circ + \operatorname{tang}\frac{l}{2}}\right)^\lambda = \frac{\left(1 - \operatorname{tang}\frac{l}{2}\right)^\lambda}{\left(1 + \operatorname{tang}\frac{l}{2}\right)^\lambda}$$

suivant les puissances de $\operatorname{tang}\frac{l}{2}$.

Revenons aux expressions générales :

$$x = K\left(\operatorname{tang}\frac{z}{2}\right)^\lambda \cos\lambda t, \quad y = K\left(\operatorname{tang}\frac{z}{2}\right)^\lambda \sin\lambda t,$$

$$m = \frac{\lambda K\left(\operatorname{tang}\frac{z}{2}\right)^\lambda}{\sin z}.$$

Elles peuvent se mettre sous la forme

$$x = \rho\cos\lambda t, \quad y = \rho\sin\lambda t \quad \text{et} \quad m = \frac{\lambda\rho}{\sin z}.$$

Nous voyons que les coordonnées d'un point quelconque dont la longitude est t sont les mêmes que celles qui correspondent à λ fois la longitude t dans la projection stéréographique polaire définie par l'hypothèse $\lambda = 1$. Si donc λ est une fraction moindre que l'unité, la projection de la sphère entière, au lieu d'occuper la totalité d'un cercle, sera comprise dans un secteur qui sera la même fraction de l'aire totale. Ainsi, si $\lambda = \frac{1}{2}$, la projection de la sphère entière sera comprise dans un demi-cercle; si $\lambda = \frac{1}{3}$, dans un secteur de 120°; si $\lambda = \frac{2}{3}$, dans un secteur de 240°.

Nous reviendrons (1) sur cette projection imaginée par *Lambert* et plus connue sous le nom de *projection de Gauss*.

---

(1) *Voir* chap. II, § 8, et 2e partie, chap. XI.

Si nous posons $K = 1$, c'est-à-dire si nous prenons pour unité le rayon de l'équateur de la projection, nous avons

$$\rho = \left(\text{tang}\,\frac{z}{2}\right)^{\lambda},$$

formule qui permet de calculer facilement le rayon ρ de chaque parallèle pour chaque valeur de z de 0 à 180°. Les valeurs de ρ pour $z = 10°, 20°, 30°$..... dans les quatre cas $\lambda = \frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$, ont été réunies dans le tableau du chap. XI (2e partie) et ont servi à tracer les projections nos VI et VII.

5. La manière dont nous avons déterminé les fonctions arbitraires qui entrent dans les valeurs de x et de y, quoique la plus simple et la plus naturelle, n'est pas néanmoins celle qui convient le mieux à notre objet. Il vaut mieux, en effet, profiter de l'indétermination des deux fonctions qui entrent dans F_1 et F, de manière à faire acquérir à la carte quelque nouvelle propriété qui rende sa construction facile ou son emploi commode.

Proposons-nous de déterminer les fonctions arbitraires par la condition qu'une série de points de la surface du globe occupe une position déterminée sur la carte. Nous pouvons supposer dans ce cas F réel, et alors F_1 étant égale à F, on n'a plus qu'une seule fonction à déterminer. Cette fonction devant avoir des valeurs connues pour une série de valeurs de u et de t et par conséquent de $u + t\sqrt{-1}$, pourra toujours être déterminée au moyen des formules d'interpolation.

On pourrait aussi assujettir le rapport d'agrandissement m à avoir une même valeur déterminée pour une série de points du globe ; à l'aide des formules d'interpolation, on trouverait encore aisément les fonctions arbitraires.

Enfin on peut se donner la figure même des parallèles et des méridiens, et alors la question se réduit à déterminer la forme des fonctions inconnues de la solution générale, de sorte qu'il en résulte pour les méridiens et pour les parallèles des lignes d'une nature donnée. Ce problème, pris dans toute sa généralité, est peut-être impossible à résoudre ; mais comme il paraît naturel, quand on se donne d'avance la forme des méridiens et des parallèles, de prendre les formes les plus simples, nous ne considérerons que le cas où ces courbes doivent être des cercles, les droites pouvant être considérées comme des cercles de rayon infini. Cette question, étudiée avec beau-

coup de détails par *Lagrange* (1), a été reprise plus tard par M. Bonnet (2), qui l'a traitée avec l'élégance et la clarté qui caractérisent tous ses travaux.

6. Comme la principale propriété du cercle consiste en ce que le rayon de courbure est constant, nous allons d'abord chercher l'expression des rayons osculateurs ρ des courbes qui représentent les méridiens et les parallèles par les formules générales que nous avons trouvées.

L'expression du rayon osculateur d'une courbe plane quelconque rapportée aux coordonnées rectangulaires x et y est

$$\rho = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dy\,d^2x - dx\,d^2y}.$$

Occupons-nous d'abord des méridiens ; nous devons supposer t constant dans la formule générale

$$x + y\sqrt{-1} = \mathrm{F}(u + t\sqrt{-1});$$

nous en déduirons

$$dx = \alpha\,du \quad \text{et} \quad dy = \beta\,du,$$

en appelant, pour simplifier, α la partie réelle, et β le coefficient de $\sqrt{-1}$ dans la dérivée, par rapport à u, de $\mathrm{F}(u + t\sqrt{-1})$; il en résulte

$$d^2x = \frac{d\alpha}{du}du^2 \quad \text{et} \quad d^2y = \frac{d\beta}{du}du^2,$$

ce qui donne, en substituant dans l'expression générale de ρ,

$$\rho_m = \frac{(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{3}{2}}}{\beta\dfrac{d\alpha}{du} - \alpha\dfrac{d\beta}{du}}.$$

Or, pour un point quelconque de la surface, on a

$$dx = \alpha\,du - \beta\,dt \quad \text{et} \quad dy = \beta\,du + \alpha\,dt;$$

---

(1) *Sur la construction des cartes géographiques* (deux mémoires consécutifs) dans les *Nouveaux mémoires de l'Académie royale des sciences et belles-lettres, année* M.DCC.LXXIV, Berlin 1781, in-4°, pages 161 à 210.

(2) *Thèse d'astronomie*, par M. Ossian Bonnet, 1852.

donc on a aussi les relations

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{d\beta}{du} \quad \text{et} \quad \frac{d\beta}{dt} = \frac{d\alpha}{du}.$$

Il en résulte

$$\rho_m = \frac{(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{3}{2}}}{\beta\dfrac{d\beta}{dt}+\alpha\dfrac{d\alpha}{dt}},$$

ou enfin

$$\frac{1}{\rho_m} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right).$$

Pour les parallèles, en considérant u comme constant, on trouvera de même

$$\frac{1}{\rho_p} = \frac{d}{du}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right).$$

D'après la définition de α et de β et la forme des fonctions F et F_1, il est clair que

$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2} = \sqrt{F'(u+t\sqrt{-1})F_1'(u-t\sqrt{-1})},$$

quantité que nous avons appelée $\frac{1}{\Omega}$ dans l'expression du rapport d'agrandissement $m = \frac{1}{r\Omega}$.

Nous pouvons donc écrire

$$\frac{1}{\rho_m} = -\frac{d\Omega}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\rho_p} = \frac{d\Omega}{du}.$$

Revenons maintenant à la question que nous nous sommes proposée, de représenter les méridiens et les parallèles par des cercles. La première condition exige que la courbure $\frac{1}{\rho_m}$ des méridiens ne varie pas quand u varie, et soit par conséquent fonction de t seulement ; donc

$$\frac{d^2\Omega}{dt\,du} = 0.$$

Il en résulte cette conséquence importante que, par cela même que les méridiens sont représentés par des cercles, les parallèles le

sont aussi, car la condition $\frac{d^2\Omega}{dt\,du} = 0$ montre que la courbure $\frac{d\Omega}{du}$ des parallèles est fonction de u seulement, puisque sa dérivée par rapport à t est nulle; par conséquent cette courbure est constante pour tous les points d'un même parallèle. On prouverait de la même manière que, si les parallèles sont représentés par des cercles, les méridiens le sont également; et la condition commune à la circularité des uns et des autres est $\frac{d^2\Omega}{du\,dt} = 0$.

Voyons maintenant quelle doit être la forme des fonctions arbitraires F et F_1 pour que cette condition soit remplie.

Posons, pour simplifier,

$$\frac{1}{\sqrt{F'(z)}} = \varphi(z), \qquad \frac{1}{\sqrt{F'_1(z)}} = \psi(z),$$

ce qui donne

$$\Omega = \varphi(u + t\sqrt{-1})\,\psi(u - t\sqrt{-1}).$$

La condition

$$\frac{d^2\Omega}{du\,dt} = 0$$

deviendra

$$\varphi''(u + t\sqrt{-1})\,\psi(u - t\sqrt{-1}) - \psi''(u - t\sqrt{-1})\,\varphi(u + t\sqrt{-1}) = 0,$$

en appelant φ'' et ψ'' les dérivées secondes des fonctions φ et ψ.

L'égalité précédente peut se mettre sous la forme

$$\frac{\varphi''(u + t\sqrt{-1})}{\varphi(u + t\sqrt{-1})} = \frac{\psi''(u - t\sqrt{-1})}{\psi(u - t\sqrt{-1})};$$

or le second membre, d'après la nature des fonctions φ et ψ, se déduisant du premier par l'échange de $\sqrt{-1}$ en $-\sqrt{-1}$, cette égalité ne peut exister que si les deux membres se réduisent à une même constante k; on a donc

$$\frac{\varphi''(u + t\sqrt{-1})}{\varphi(u + t\sqrt{-1})} = k,$$

d'où

$$\varphi(u + t\sqrt{-1}) = Ae^{\sqrt{k}(u + t\sqrt{-1})} + Be^{-\sqrt{k}(u + t\sqrt{-1})},$$

A et B étant des constantes quelconques, réelles ou imaginaires; et par conséquent,

$$F(u+t\sqrt{-1}) = P + \frac{e^{-\sqrt{k}(u+t\sqrt{-1})}}{Me^{\sqrt{k}(u+t\sqrt{-1})} + Ne^{-\sqrt{k}(u+t\sqrt{-1})}},$$

M, N, P étant des constantes de même nature que A et B. Quant à la constante $\sqrt{k}$, comme son carré peut être aussi bien négatif que positif, elle peut de même être réelle ou imaginaire; mais on peut remarquer que la valeur que reçoit le second membre de l'égalité précédente pour une valeur de k négative et égale à $-c^2$, se déduit de la valeur que l'on obtient pour $k=c^2$, en changeant seulement u en t et t en $-u$. Cela étant, nous nous contenterons d'attribuer une valeur positive c^2; il viendra ainsi

$$F(u+t\sqrt{-1}),$$

ou bien

$$(I) \qquad x+y\sqrt{-1} = P + \frac{e^{-c(u+t\sqrt{-1})}}{Me^{c(u+t\sqrt{-1})} + Ne^{-c(u+t\sqrt{-1})}}.$$

Ce résultat peut être considérablement simplifié.

Je remarque d'abord que l'on peut toujours supposer nulle la constante P, car cela revient à ajouter une simple constante à x et y, c'est-à-dire à transporter les axes des x et des y parallèlement à eux-mêmes. De plus les constantes que nous avons dit être réelles ou imaginaires peuvent être supposées réelles et même positives. En effet, on peut, dans tous les cas, poser $M = me^{\alpha\sqrt{-1}}$, $N = ne^{\beta\sqrt{-1}}$, m et n étant positifs, et notre formule devient

$$x+y\sqrt{-1} = \frac{e^{-c(u+t\sqrt{-1})}}{me^{c\left[u+\left(t+\frac{\alpha}{c}\right)\sqrt{-1}\right]} + ne^{-c\left[u+\left(t-\frac{\beta}{c}\right)\sqrt{-1}\right]}}.$$

Multiplions le premier membre par $\cos\beta + \sqrt{-1}\sin\beta$, et le second par $e^{\beta\sqrt{-1}}$, puis posons

$$x\cos\beta - y\sin\beta = x_1, \qquad x\sin\beta + y\cos\beta = y_1;$$

nous aurons

$$x_1+y_1\sqrt{-1} = \frac{e^{-c\left[u+\left(t-\frac{\beta}{c}\right)\sqrt{-1}\right]}}{me^{c\left[u+\left(t+\frac{\alpha}{c}\right)\sqrt{-1}\right]} + ne^{-c\left[u+\left(t-\frac{\beta}{c}\right)\sqrt{-1}\right]}}.$$

Or x_1 et y_1 sont évidemment les coordonnées correspondantes à x

et y dans un système d'axes rectangulaires (OX_1, OY_1) que l'on obtient en faisant tourner de l'angle β le système des axes OX, OY); le second membre de la dernière équation ne diffère du second membre de l'équation (I), après qu'on y a fait $P=0$, $M=m$, $N=n$, qu'en ce que $t+\frac{\alpha-\beta}{c}$ est mis à la place de t, comme on le voit aisément en réduisant ces seconds membres au même numérateur 1. Donc, si l'on prend d'avance les axes des (X_1, Y_1) pour axes des (X, Y), et si l'on recule le méridien initial, à partir duquel se comptent les longitudes t, de l'angle $\frac{\alpha-\beta}{c}$, la dernière équation se confondra avec l'équation (I). On peut donc toujours supposer réelles et positives les constantes M et N.

Pour déduire de l'équation (I) simplifiée, comme il vient d'être dit, les valeurs de x et y en u et t, multiplions, dans le second membre haut et bas par $Me^{c(u-t\sqrt{-1})}+Ne^{-c(u-t\sqrt{-1})}$, il viendra

$$x+y\sqrt{-1}=\frac{Me^{-2ct\sqrt{-1}}+Ne^{-2cu}}{M^2e^{2cu}+2MN\cos 2ct+N^2e^{-2uc}},$$

et en égalant séparément les parties réelles et les parties imaginaires,

$$x=\frac{M\cos 2ct+Ne^{-2cu}}{M^2e^{2cu}+2MN\cos 2ct+N^2e^{-2cu}},$$

$$y=\frac{-M\sin 2ct}{M^2e^{2cu}+2MN\cos 2ct+N^2e^{-2cu}}.$$

Si, entre ces équations, on élimine u, on obtiendra une relation entre x, y, t qui représentera tous les cercles répondant aux différents méridiens, et réciproquement, si l'on élimine t, on aura une équation en x, y, u, qui sera l'équation commune à tous les cercles répondant aux différentes parallèles. Pour faciliter les éliminations, il convient de faire d'abord la somme des carrés des deux équations; on trouve

$$x^2+y^2=\frac{e^{-2cu}}{M^2e^{2cu}+2MN\cos 2ct+N^2e^{-2cu}},$$

et cela permet de mettre les équations sous la forme plus simple

$$\frac{x}{x^2+y^2}=N+Me^{2cu}\cos 2ct,$$

$$\frac{y}{x^2+y^2}=-Me^{2cu}\sin 2ct.$$

Éliminant maintenant la variable u, on a

$$x^2 + y^2 - \frac{y}{N}\operatorname{cotang} 2ct - \frac{x}{N} = 0. \tag{II}$$

La circonférence représentée par cette équation passe par l'origine O des coordonnées et par le point A de OX qui a $\frac{1}{N}$ pour abscisse; de plus elle coupe l'axe des x au point O sous un angle égal à $\pi - 2ct$ ou à $-2ct$ suivant que $t = 0$ est positif ou négatif; ajoutons que, dans le premier cas, on ne doit prendre que le segment situé du côté des y négatifs, et, dans le second, que le segment situé du côté des y positifs.

Éliminons, en second lieu, la variable t; on trouve

$$x^2 + y^2 + \frac{2Nx}{M^2 e^{4cu} - N^2} - \frac{1}{M^2 e^{4cu} - N^2} = 0. \tag{III}$$

La circonférence représentée par cette équation a l'axe des x pour diamètre. Pour achever de la définir, je vais chercher un système de deux points situés sur l'axe des x, et tels que leurs distances à un point quelconque de la circonférence soit dans un rapport constant. A cet effet, je prends l'équation

$$(x - a)^2 + y^2 = k^2[(x - a')^2 + y^2],$$

qui représente le lieu des points dont les distances à deux points situés sur l'axe des x, et ayant pour abscisses a et a', ont un rapport k, et j'identifie avec l'équation ci-dessus; il vient

$$\frac{-2a + 2a'k^2}{1 - k^2} = \frac{2N}{M^2 e^{4cu} - N^2}, \qquad \frac{k^2 a'^2 - a^2}{1 - k^2} = \frac{1}{M^2 e^{4cu} - N^2}.$$

On vérifie ces deux équations en posant

$$a' = 0, \quad a = \frac{1}{N}, \quad k = \frac{M}{N} e^{2cu};$$

donc les circonférences représentant les différents parallèles du globe terrestre sont les lieux de points dont les distances aux deux points fixes A et O déjà obtenus comme intersections des méridiens et de l'axe des x, sont dans un rapport constant et égal à $\frac{M}{N} e^{2cu}$.

Il convient de transporter l'origine des coordonnées au milieu de OA, afin de simplifier les équations (II) et (III); on trouve ainsi, en posant $OA = \frac{1}{N} = 2a$,

(IV) $$x^2 + y^2 - 2a \operatorname{cotang} 2ct \,.\, y = a^2,$$

pour l'équation des méridiens, et

$$x^2 + y^2 + 2a \frac{4a^2M^2e^{4cu} + 1}{4a^2M^2e^{4cu} - 1} x = -a^2$$

pour celle des parallèles.

Cette dernière équation peut se mettre sous une forme plus élégante; faisant $4a^2M^2 = e^{4ch}$, le coefficient de x deviendra

$$2a \frac{e^{4cu+4ch} + 1}{e^{4cu+4ch} - 1} = 2a \frac{e^{2c(u+h)} + e^{-2c(u+h)}}{e^{2c(u+h)} - e^{-2c(u+h)}}$$

$$= -2a\sqrt{-1} \operatorname{cotang} 2c \frac{u+h}{\sqrt{-1}},$$

et l'équation sera

(V) $$x^2 + y^2 - 2a\sqrt{-1} \operatorname{cotang} 2cu_1 x = -a^2,$$

en posant

$$u + h = u_1\sqrt{-1}.$$

On doit remarquer que la constante h qui entre dans l'expression de u_1, n'a aucune influence sur la solution trouvée, et qu'elle ne sert qu'à fixer le parallèle terrestre qui correspond à un cercle déterminé de la série représentée par l'équation (V). Ainsi il n'y a, en réalité, dans notre solution, que deux constantes arbitraires c et a.

Il est utile de connaître les valeurs de x et de y, en fonction de u_1 et de t. Or reprenons les valeurs

$$x = \frac{M \cos 2ct + Ne^{-2cu}}{M^2e^{2cu} + 2MN \cos 2ct + N^2e^{-2cu}},$$

$$y = \frac{-M \sin 2ct}{M^2e^{2cu} + 2MN \cos 2ct + N^2e^{-2cu}},$$

obtenues précédemment. Changeons dans la première x en $x + \frac{1}{2N}$, pour tenir compte du déplacement d'origine opéré plus haut; ce qui donne

$$x = \frac{N^2e^{-2cu} - M^2e^{2cu}}{2N(M^2e^{2cu} + 2MN \cos 2ct + N^2e^{-2cu})},$$

puis introduisons les nouvelles notations, il viendra

$$x = a\frac{e^{-2c(u+h)} - e^{2c(u+h)}}{e^{2c(u+h)} + 2\cos 2ct + e^{-2c(u+h)}} = -a\sqrt{-1}\,\frac{\sin 2cu_1}{\cos 2cu_1 + \cos 2ct},$$

$$y = -a\frac{\sin 2ct}{\cos 2cu_1 + \cos 2ct},$$

De là on tire encore

$$x + y\sqrt{-1} = -a\sqrt{-1}\,\frac{\sin 2cu_1 + \sin 2ct}{\cos 2cu_1 + \cos 2ct} = -a\sqrt{-1}\,\operatorname{tang} c(u_1 + t),$$

par conséquent

$$\mathrm{F}\left(u + t\sqrt{-1}\right) = -a\sqrt{-1}\,\operatorname{tang} c(u_1 + t),$$
$$\mathrm{F}_1\left(u - t\sqrt{-1}\right) = -a\sqrt{-1}\,\operatorname{tang} c(u_1 - t);$$

donc Ω, qui est égal à

$$\frac{1}{\sqrt{\mathrm{F}'\left(u + t\sqrt{-1}\right)\mathrm{F}'_1\left(u - t\sqrt{-1}\right)}},$$

devient

$$\Omega = \frac{\cos c(u_1 + t)\cos c(u_1 - t)}{ac}.$$

On peut obtenir une autre valeur de Ω d'une forme assez remarquable. Soient r et r' les distances d'un point quelconque (x, y) aux points A et O situés sur l'axe des x, et à la distance a de l'origine ; nous aurons

$$r^2 = x^2 + y^2 + 2ax + a^2, \qquad r'^2 = x^2 + y^2 - 2ax + a^2,$$

ou bien, d'après l'équation (V),

$$r^2 = 2ax\left(1 + \sqrt{-1}\,\operatorname{cotang} 2cu_1\right),$$
$$r'^2 = 2ax\left(-1 + \sqrt{-1}\,\operatorname{cotang} 2cu_1\right),$$

et, en substituant à x sa valeur en u_1 et t,

$$r^2 = 2a^2\,\frac{\cos 2cu_1 - \sqrt{-1}\sin 2cu_1}{\cos 2cu_1 + \cos 2ct}, \qquad r'^2 = 2a^2\,\frac{\cos 2cu_1 + \sqrt{-1}\sin 2cu_1}{\cos 2cu_1 + \cos 2ct};$$

de là on déduit

$$rr' = \frac{a^2}{\cos c(u_1 + t)\cos c(u_1 - t)},$$

donc on a

$$\Omega = \frac{a}{crr'}.$$

On devra, dans les résultats que nous venons d'obtenir, remplacer u par sa valeur en fonction de la latitude, valeur que nous avons trouvée précédemment (§ 1).

$$u = \log \mathrm{K} \operatorname{tang} \frac{\zeta}{2},$$

ζ désignant la distance polaire corrigée en vertu de l'aplatissement de la terre.

Résumons les règles qui résultent de ce qui précède, pour la construction d'une carte du système considéré, lorsqu'on suppose d'ailleurs la terre sphérique. Après avoir fixé la constante c qui est en quelque sorte l'exposant de la carte, on prend sur une horizontale les points A et A′ où viennent se couper tous les méridiens, c'est-à-dire les pôles de la carte, en ayant soin de placer à droite le pôle boréal A ; on connaît ainsi le méridien AA′ correspondant à $t = 0$, et le parallèle BB′, perpendiculaire au milieu de AA′, correspondant à $u_1 = 0$. Ce méridien et ce parallèle peuvent se rapporter à un lieu quelconque du globe terrestre, qui devient alors le centre de la carte. De la connaissance de ce lieu résulte celle du méridien à partir duquel se comptent les longitudes et celle de la constante h ; car puisque pour le centre de la carte on a $t = 0$, $u_1 = 0$, d'après la valeur de t, le méridien à partir duquel se comptent les longitudes est précisément celui qui passe par le centre de la carte ; et d'après la valeur de u_1, si l'on appelle z_0 la valeur du complément de la latitude pour le centre de la carte, et par conséquent $\log \operatorname{tang} \frac{z_0}{2}$ la valeur de u pour ce même point, on a

$$h + \log \operatorname{tang} \frac{z_0}{2} = 0, \quad \text{d'où} \quad h = -\log \operatorname{tang} \frac{z_0}{2}.$$

Maintenant, pour obtenir la représentation du méridien correspondant à une longitude t, on décrit, avec AA′ pour base, un segment capable de l'angle $\pi - 2ct$, au-dessous de AA′ si t est positif, ou bien un segment capable de $\pi + 2ct$ au-dessous de AA′ si t est négatif ; et pour avoir la représentation du parallèle correspondant à la latitude $\frac{\pi}{2} - z$, et par conséquent à la valeur $\log \operatorname{tang} \frac{z}{2}$ de u, on décrit le cercle lieu des points dont le rapport des distances aux points A et A′ est égal à

$$\frac{M}{N}\, c^{2cu} = e^{2c(u+h)} = \frac{\left(\operatorname{tang}\frac{z}{2}\right)^{2c}}{\left(\operatorname{tang}\frac{z_0}{2}\right)^{2c}}.$$

On peut ainsi obtenir la représentation des différents méridiens et des différents parallèles, et, par conséquent, placer sur la carte tel lieu que l'on veut.

La valeur de c étant arbitraire, on voit que, en faisant $c = 0$, on retrouve la projection de Mercator ; en prenant $c = \frac{1}{2}$, on obtient la projection stéréographique méridienne où la moitié seulement du globe est représentée sur le cercle d'un rayon égal à $\frac{AA'}{2}$. En prenant $c = \frac{1}{4}$, on peut représenter toute la surface du globe parce qu'alors les méridiens se coupent aux pôles sous des angles qui sont la moitié des angles de la sphère, mais les autres angles sont conservés. Quand nous reviendrons sur la construction de cette projection, nous donnerons les tables qui conviennent à ce cas particulier. Le canevas n° V, qui représente l'hémisphère nord, a été dressé dans ce système.

Si l'on veut, dans la projection générale qui nous occupe, tenir compte de l'aplatissement de la terre, il suffira de remplacer partout les angles z par les distances aux pôles ζ corrigées en vertu de l'aplatissement et calculées dans la table III pour l'hypothèse $\alpha = \frac{1}{299{,}15}$.

7. On voit que dans la construction de ces cartes il y a, comme indéterminées, d'abord la distance AA′ ou $2a$ dont dépend la grandeur ou l'échelle de la carte, puis la constante c, et enfin la position du lieu de la terre que l'on prend pour centre de la carte. Nous allons nous proposer de fixer ces indéterminées de manière à diminuer le plus possible l'altération causée par la représentation dans la grandeur des différents lieux de la terre. Cherchons le point pour lequel le rapport d'agrandissement, désigné ci-dessus par m, est un minimum, ou bien le point dans le voisinage duquel m est le moins altéré.

M. Bonnet a montré, dans ses travaux sur la théorie générale des surfaces, que si l'on appelle A une courbe tracée sur une surface de révolution, A′ la courbe correspondante tracée sur la représentation plane de cette surface, $\delta\sigma$ le déplacement infiniment petit normal à la courbe A, la relation générale qui lie les courbures géodésiques des deux courbes conjuguées A et A′ est

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{1}{m}\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_z + \frac{\delta\frac{1}{m}}{\delta\sigma},$$

ρ' étant le rayon de courbure de la courbe A', et $\frac{\cos\theta}{\rho}$ la courbure géodésique de la courbe A.

Cette formule nous permet de résoudre très-simplement la question du minimum de m. En effet, si l'on applique cette formule à un méridien, elle nous montre immédiatement que les lieux dont la grandeur est la moins altérée en longitude sont ceux qui sont situés sur le méridien rectiligne AA' de la carte, car pour ces points on a

$$\frac{\delta\frac{1}{m}}{\delta\sigma} = 0, \qquad \left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_z = 0,$$

et par conséquent $\frac{1}{\rho'}$ doit aussi être nul. Supposons, en second lieu, que la formule se rapporte aux parallèles, on aura

$$\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_z = \frac{\cos z}{u}, \qquad \frac{1}{m} = u\Omega,$$

et si l'on veut que

$$\frac{\delta\frac{1}{m}}{\delta\sigma} = 0,$$

c'est-à-dire que la déformation du lieu en latitude soit également minimum, il faudra que

$$\frac{1}{\rho'} = \Omega\cos z;$$

mais le rayon ρ' de la courbe transformée d'un parallèle est, en tenant compte du signe,

$$\frac{a\sqrt{-1}}{\sin 2cu_1};$$

Ω, qui a pour valeur générale

$$\frac{\cos c(u_1 + t)\cos(u_1 - t)}{ac},$$

se réduit ici à

$$\frac{\cos^2 cu_1}{ac} = \frac{1 + \cos 2cu_1}{2ac},$$

puisque, d'après la condition trouvée, $t = 0$. Donc notre formule devient

$$\text{(VI)} \qquad \frac{2c\sqrt{-1}\,\sin 2cu_1}{1+\cos 2cu_1} = -\cos z.$$

Nous pouvons obtenir un résultat beaucoup plus simple. Nommons k le rapport des distances du point cherché aux points A et A'; on sait que

$$k = e^{2c(u_1+h)} = \cos 2cu_1 + \sqrt{-1}\,\sin 2cu_1,$$

et, par conséquent,

$$\frac{1}{k} = \cos 2cu_1 - \sqrt{-1}\,\sin 2cu_1;$$

donc

$$\sqrt{-1}\,\sin 2cu_1 = \frac{1}{2}\left(k - \frac{1}{k}\right),$$

$$\cos 2cu_1 = \frac{1}{2}\left(k + \frac{1}{k}\right).$$

Substituant dans l'égalité (VI), il vient

$$\frac{2c(k^2-1)}{2k+k^2+1} = -\cos z,$$

d'où

$$k = \frac{2c-\cos z}{2c+\cos z}.$$

Ainsi le point cherché, pour lequel la déformation de la carte est la moindre possible, est le point situé sur le méridien rectiligne AA' qui partage ce méridien en parties proportionnelles à $2c - \cos z$ et à $2c + \cos z$. On voit qu'en supposant ce point désigné sur le globe terrestre, ce qui fait connaître z, on peut encore le placer arbitrairement sur l'axe AA' de la carte, et que l'exposant $2c$ se trouve seulement alors déterminé.

Puisqu'il reste encore une indéterminée, assujettissons la seconde variation de $\frac{1}{m}$ dans le sens du méridien à être nulle; nous aurons

$$\frac{d\frac{1}{\rho'}}{du} = \frac{1}{m}\,\frac{d\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_z}{du},$$

$\frac{1}{\rho'}$ et $\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_z$ se rapportant à un parallèle. Or

$$\frac{d\frac{1}{\rho'}}{du} = -\frac{2c}{a}\cos 2cu_1,$$

puis, en supposant la terre sphérique, ce que nous n'avions pas fait encore,

$$\frac{d\left(\frac{\cos 0}{\rho}\right)_z}{du} = \frac{d\operatorname{cotang} z}{du} = -\frac{1}{\sin z}, \qquad \frac{1}{m} = \sin z\,\frac{1+\cos 2cu_1}{2ac};$$

donc, en substituant, on a

$$4c^2\cos 2cu_1 = 1 + \cos 2cu_1;$$

d'où

$$4c^2 = \frac{(k+1)^2}{k^2+1}$$

et, à cause de la valeur de k obtenue plus haut,

$$2c = \sqrt{1+\sin^2 z},$$

ce qui détermine $2c$ quand la latitude $l = 90° - z$ est connue.

Ainsi, après avoir pris un lieu important M de la surface de la terre pour le point dans le voisinage duquel les lieux doivent être le moins altérés possible, on déterminera l'exposant de la carte par la condition $2c = \sqrt{1+\sin^2 z_1}$, z_1 étant le complément de la latitude du point M, puis on prendra les pôles A et A′ de façon que le rapport des distances de ces points au point M′ qui représente le point M de la terre soit $\frac{2c - \cos z_1}{2c + \cos z_1}$; enfin le coefficient h qui, en appelant z_0 le complément de la latitude du centre de la carte est égal à $-\log\operatorname{tang}\frac{z_0}{2}$, se déduira de ce que le rapport des distances M′A et M′A′ ou $\frac{2c - \cos z_1}{2c + \cos z_1}$ doit être $\frac{\left(\operatorname{tang}\frac{z_1}{2}\right)^{2c}}{\left(\operatorname{tang}\frac{z_0}{2}\right)^{2c}}$, et la carte se trouvera entièrement déterminée, sauf l'échelle qui doit évidemment rester quelconque.

La projection dont nous venons de donner les formules et le tracé est connue sous le nom de *projection de Lagrange*.

8. Nous avons traité avec détail, dans ce qui précède, le cas particulier où les méridiens sont des cercles qui se coupent aux pôles, cercles qui peuvent devenir des droites ; nous avons vu que les parallèles devaient être aussi représentés par des cercles, et nous avons donné les formules qui permettent de déterminer ces courbes, soit par leur centre, soit par leur intersection avec des droites fixes de la carte, soit enfin par points isolés.

Le géomètre *Lambert* (1) est arrivé directement aux mêmes résultats par un calcul des plus simples que nous allons exposer ici.

Cherchons d'abord à remplir la condition que :

Dans un réseau où les parallèles sont représentés par des cercles concentriques et les méridiens par les rayons de ces cercles, le trapèze curviligne infiniment petit formé par deux parallèles et deux méridiens infiniment voisins soit semblable au petit quadrilatère correspondant de la sphère.

Soient (fig. 11) P le pôle, PN et P*n* deux droites représentant deux méridiens infiniment voisins dont la différence des longitudes est dt; *m*M, *n*N deux arcs de cercle décrits du pôle P et représentant deux parallèles dont la différence des latitudes est $dz = -dl$, en appelant z le complément de la latitude du parallèle M*m*.

Pour que le trapèze M*mn*N soit semblable à la figure correspondante de la sphère, il faut évidemment que l'angle NP*n* soit égal à λdt, λ étant une constante arbitraire, et que le rapport de chaque degré de parallèle à chaque degré de méridien soit le même que sur la sphère.

Appelons ρ le rayon PM qui représente l'arc de grand cercle z ; MN sera alors $d\rho$, et l'on devra avoir, en supposant la terre sphérique,

$$\frac{d\rho}{\lambda \rho dt} = \frac{dz}{\sin z dt}$$

ou

$$\frac{d\rho}{\rho} = \lambda \frac{dz}{\sin z}.$$

En intégrant

$$\log \rho = \lambda \log \operatorname{tang} \frac{z}{2} + C.$$

---

(1) *Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung, durch J. H.* LAMBERT, Berlin, 1772, in-8, pages 105-199 (*Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Land-und-Himmelscharten.*

Cette constante C peut être déterminée en se donnant, par exemple, la valeur de z pour laquelle le rayon ρ est égal à l'arc correspondant du méridien de la sphère; supposons que pour $z = 90°$, k c'est-à-dire la distance du pôle à l'équateur sur la carte, doive être égale au quart du méridien, $\frac{1}{2} a\pi$, en appelant a le rayon de la terre; on aura alors

$$C = \log \tfrac{1}{2} a\pi = \log k;$$

et la formule générale devient

$$\log \rho = \log \left(\operatorname{tang} \frac{z}{2}\right)^{\lambda} + \log k = \log k \left(\operatorname{tang} \frac{z}{2}\right)^{\lambda};$$

donc

$$\rho = k \left(\operatorname{tang} \frac{z}{2}\right)^{\lambda}.$$

Nous avons ainsi obtenu directement, comme l'a fait *Lambert*, la projection dont nous avons déjà parlé au § 4, et que *Gauss* (1) a traitée comme application de sa formule générale des projections assujetties à la condition de conserver la similitude des configurations dans la représentation d'une surface sur une autre.

On trouverait facilement que le rapport d'agrandissement est exprimé par

$$m = \frac{\lambda k \left(\operatorname{tang} \frac{z}{2}\right)^{\lambda}}{a \sin z} = \frac{\lambda \rho}{a \sin z}.$$

Dans le cas où l'on veut tenir compte de la forme elliptique de la terre, il faut poser

$$\frac{d\rho}{\lambda \rho dt} = \frac{(1 - e^2) dz}{\sin z (1 - e^2 \cos^2 z) dt},$$

en appelant z l'angle de la normale avec l'axe des pôles. En intégrant, on aura donc

---

(1) *Allgemeine Auflösung der Aufgabe : die Theile einer gegebenen Fläche auf einer andern gegebenen Fläche so abzugebilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird, von* C. F. Gauss; un cahier de 30 pages compris dans les *Astronomische Abhandlungen herausgegeben von* H. C. Schumacher; *drittes Heft.* Altona, 1825, in-4°; voir principalement pages 14 à 17. Ce mémoire, couronné en 1822 par l'Académie des sciences de Copenhague, est donc postérieur de cinquante ans à l'ouvrage de Lambert; du reste Gauss, loin de s'attribuer le mérite de l'invention de cette projection, cite l'atlas céleste de *Harding* publié à Göttingue de 1808 à 1822, et dont les planches XIX à XXVI sont assujetties à cette projection avec les modifications que nous allons indiquer.

$$\frac{1}{\lambda}\log\rho - \log k = \int \frac{(1-e^2)\,dz}{\sin z\,(1-e^2\cos^2 z)} = \log\operatorname{tang}\frac{z}{2} - \int \frac{e^2 \sin z\,dz}{1-e^2\cos^2 z},$$

$$\frac{1}{\lambda}\log\rho - \log k = \log\operatorname{tang}\frac{z}{2} - \frac{e}{2}\log\frac{1-e\cos z}{1+e\cos z} = \log\left[\operatorname{tang}\frac{z}{2}\left(\frac{1+e\cos z}{1-e\cos z}\right)^{\frac{e}{2}}\right],$$

et, en appelant, comme nous l'avons déjà fait, ζ la distance au pôle corrigée en vertu de l'aplatissement de la terre, et posant

$$\operatorname{tang}\frac{\zeta}{2} = \left(\operatorname{tang}\frac{z}{2}\right)\left(\frac{1+e\cos z}{1-e\cos z}\right)^{\frac{e}{2}},$$

l'expression de $\frac{1}{\lambda}\log\rho$ a aussi la même forme que dans le cas de la terre sphérique, et l'on aura

$$\rho = k\left(\operatorname{tang}\frac{\zeta}{2}\right)^{\lambda}.$$

On pourra donc faire servir au cas de la terre elliptique les tables dressées comme nous l'avons dit (§ 4), et donnant les valeurs de ρ pour les valeurs de z de 10 en 10 degrés; il suffira de calculer préalablement les valeurs de ζ qui correspondent aux valeurs de z. Ces valeurs de ζ sont réunies dans la table III calculée à l'aide de la formule que nous avons indiquée :

$$\zeta = z - \frac{e^2}{2}\sin 2z.$$

Si la constante k doit exprimer la longueur de l'arc de méridien compris entre le pôle et l'équateur, on aura

$$k = Q = \frac{1}{2}\pi a\left(1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{64}e^4 \ldots\right),$$

ou plus simplement, en négligeant e^4 et prenant $\alpha = \frac{1}{299,15}$,

$$k = Q = \frac{1}{2}\pi a\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = 1,56818\,.\,a.$$

Le rapport d'agrandissement est exprimé par

$$m = \frac{\lambda k\left(\operatorname{tang}\frac{\zeta}{2}\right)^{\lambda}}{a\sin\zeta}.$$

9. Comme λ est arbitraire on peut le prendre de façon à satisfaire à une nouvelle condition; on peut, par exemple, déterminer λ de telle sorte que les degrés de deux parallèles donnés sur le réseau, aient entre eux le même rapport que sur la sphère. Appelons z_0 et z_1 les colatitudes de ces parallèles; leurs degrés étant dans le rapport de sin z_0 à sin z_1, les rayons des cercles correspondants devront être dans le même rapport, et l'on aura :

$$\left(\frac{\operatorname{tang}\frac{z_1}{2}}{\operatorname{tang}\frac{z_0}{2}}\right)^{\lambda} = \frac{\sin z_1}{\sin z_0},$$

d'où

$$\lambda = \frac{\log\sin z_1 - \log\sin z_0}{\log\operatorname{tang}\frac{z_1}{2} - \log\operatorname{tang}\frac{z_0}{2}}.$$

z_0 et z_1 peuvent être les valeurs extrêmes de z; ainsi, pour l'Europe, en prenant pour parallèles extrêmes ceux de 70° et de 30° de latitude nord, $z_0 = 20°$ et $z_1 = 60°$. On trouve alors $\lambda = 0{,}78327$; les angles au pôle (les seuls qui ne soient pas conservés) sont les $\frac{3}{4}$ environ des angles véritables ; 10° de longitude sont représentés par un angle de 7° 49′ 57″,7, soit 7° 50′ environ.

Si l'on voulait représenter de cette manière, et avec la même valeur de λ, un hémisphère entier, l'angle au pôle serait de 281° 59′ 38″.

Si l'on prend le rayon de la terre pour unité, le rayon de l'équateur de la carte sera 1,571... Les plus petits degrés de latitude sont entre les parallèles de 40° et de 50° de latitude, les plus grands entre le pôle et 80° de latitude. Vers l'équateur les degrés de latitude augmentent; les plus petits ont avec les plus grands le rapport approché de 15 à 25, ou de 3 à 5. Comme les différences sont à peu près constantes, les distances peuvent se mesurer approximativement avec la même échelle, si d'ailleurs les lieux ne sont pas très-éloignés les uns des autres en longitude.

Rappelons enfin que, lorsque les rayons des parallèles sont trop grands pour que les cercles puissent être décrits facilement avec le compas, on peut les tracer par points à l'aide des coordonnées

$$x = \rho\cos\lambda t, \qquad y = \rho\sin\lambda t,$$

rapportées à deux axes rectangulaires passant par le pôle, centre de tous les parallèles.

La projection VI a été construite avec la valeur de $\lambda = \frac{3}{4}$ qui résulte, comme nous l'avons indiqué, de la condition de conserver le rapport des degrés de longitude des parallèles de 30° et de 70° de latitude (1) ; la projection VII suppose $\lambda = \frac{1}{2}$.

10. Revenons à la formule générale

$$\rho = k\left(\operatorname{tang}\frac{z}{2}\right)^{\lambda};$$

on peut déterminer la valeur de λ d'après une autre condition, celle par exemple que, dans la figure MNnm, nN ait avec MN le même rapport que mM. Cela n'ayant pas lieu simultanément pour toutes les latitudes, donnons-nous la latitude 90° — Z pour laquelle nous voulons qu'existe cette propriété; cela revient évidemment à nous donner la latitude du parallèle sous lequel l'agrandissement est minimum; nous résoudrons donc le problème, soit en égalant à zéro la dérivée par rapport à z de la valeur de m, soit par la considération de la figure MNnm.

Or

$$Nn = \lambda dt(\rho + d\rho),$$

et l'arc correspondant de la sphère est exprimé par

$$dt \sin(z + dz) = dt(\sin z + \cos z dz);$$

ce qui donne

$$\frac{dz}{d\rho} = \frac{dt(\sin z + \cos z dz)}{\lambda dt(\rho + d\rho)};$$

il en résulte

$$dz\,\lambda(\rho + d\rho) = d\rho(\sin z + \cos z dz);$$

d'où

$$\frac{d\rho}{\rho} + \lambda = \left(\frac{\sin z}{dz} + \cos z\right);$$

or

$$\frac{\lambda\rho}{d\rho} = \frac{\sin z}{z},$$

donc

$$\frac{\sin z}{dz} + \lambda = \frac{\sin z}{dz} + \cos z;$$

---

(1) Dans les huit cartes d'étoiles de l'astronome Harding dont nous avons parlé dans la note précédente, on a pris pour z_0 et z_1 les colatitudes des parallèles extrêmes.

d'où enfin

$$\lambda = \cos z,$$

et, par conséquent, pour la distance polaire Z,

$$\lambda = \cos Z.$$

La formule devient alors

$$\rho = k \left(\operatorname{tang} \frac{z}{2}\right)^{Z},$$

par laquelle le trapèze $MmNn$ est tout à fait semblable au trapèze qu'il représente.

Il conviendra de prendre pour Z la colatitude du parallèle moyen de la carte à construire; ainsi 40° pour la carte de l'Europe. Si nous prenons pour parallèle moyen celui de 51° 34′, Z = 38° 26′, nous trouvons $\lambda = 0{,}78327$, et si nous nous reportons au paragraphe précédent, nous voyons que notre canevas jouira de cet avantage que le rapport d'agrandissement sera le même sur les parallèles de 70° et de 30° et sera minimum sur celui de 51° 34′.

Si nous considérons le cas de la terre elliptique, le calcul est le suivant :

$$\frac{\lambda(\rho + d\rho)}{d\rho} = \frac{\lambda\rho}{d\rho} + \lambda = \frac{\sin(z+dz)[1 - e^2\cos^2(z+dz)]}{(1-e^2)\,dz},$$

$$\frac{\lambda\rho}{d\rho} + \lambda = \frac{(\sin z + \cos z dz)(1 - e^2\cos z + 2e^2\cos z \sin z dz)}{(1-e^2)dz}$$

$$= \frac{\sin z(1 - e^2\cos^2 z)}{(1-e^2)\,dz} + \frac{\cos z - e^2\cos z(1 - 3\sin^2 z)}{1-e^2};$$

d'où

$$\lambda = \frac{\cos Z - e^2 \cos Z(1 - 3\sin^2 Z)}{1-e^2}.$$

Telle est la valeur que prend λ pour la colatitude Z du parallèle sur lequel le rapport d'agrandissement doit être minimum.

On serait parvenu plus simplement au même résultat en remplaçant, dans le calcul qui convient au cas de la terre sphérique, z par ζ et, l'on aurait trouvé par conséquent $\lambda = \cos \zeta$, cette valeur ζ se déduisant de la colatitude donnée Z à l'aide de la formule

$$\zeta = z - \frac{e^2}{2} \sin 2z.$$

11. Lorsqu'on veut dresser des cartes d'étoiles, il peut être avan-

tageux de déterminer λ de telle sorte que les 45 premiers degrés de méridien soient égaux aux suivants, c'est-à-dire que le 45e degré de latitude partage tous les méridiens (du pôle à l'équateur) en deux parties égales.

On aura alors, pour $z = 45°$,

$$\frac{1}{4} a\pi = \frac{1}{2} a\pi \left(\operatorname{tang} \frac{45°}{2}\right)^{\lambda},$$

ou bien

$$\frac{1}{2} = \left(\operatorname{tang} 22° \frac{1}{2}\right)^{\lambda};$$

d'où

$$\lambda = \frac{0{,}30103}{0{,}38277} = 0{,}78643,$$

valeur qui approche beaucoup de 0,78327, ce qui montre un nouvel avantage du réseau pour lequel λ est à peu près égal à 0,78327.

Les cartes tracées d'après cette méthode peuvent être prolongées aussi loin que l'on veut au delà de l'équateur.

Pour les cartes particulières, il convient de prendre, pour z_0 et z_1 (voir § 9), les colatitudes géographiques des parallèles qui divisent à peu près en trois parties égales la distance des deux parallèles extrêmes de la carte à tracer (1). Si, par exemple, un pays, tel que l'Europe, est compris entre 30° et 70° de latitude, on prendra $z_1 = 46°$ 40′ et $z_0 = 33°$ 20′ et l'on calculera λ par la formule

$$\lambda = \frac{\log \sin z_1 - \log \sin z_0}{\log \operatorname{tang} \frac{z_1}{2} - \log \operatorname{tang} \frac{z_0}{2}}.$$

Le rayon restera évidemment arbitraire et ne dépendra que de l'échelle de la carte, c'est-à-dire de la grandeur à donner au réseau.

---

(1) La Société de géographie de Saint-Pétersbourg a choisi cette projection, en lui attribuant la dénomination de « *projection de Gauss,* » pour la belle carte de la Russie européenne en douze feuilles, qu'elle a publiée en 1862. Les deux parallèles dont les degrés conservent leur véritable rapport sont ceux de 46° et 58°, les latitudes des parallèles extrêmes étant 36° et 68°.

Sous le parallèle moyen, qui est celui de 52°, le degré subit un retrait qui le réduit à 0,994 de sa valeur réelle, tandis que sous les parallèles extrêmes il éprouve une dilatation qui le porte à 1,031 et à 1,040. Des échelles variables en *verstes* accompagnent la graduation des latitudes sur les bordures d'encadrement de chacune des douze feuilles de la carte. Le méridien moyen est celui de 10° à l'est de l'observatoire de Saint-Pétersbourg situé à 27° 59′ 31″ à l'est du méridien de Paris.

Avant de quitter ce sujet, disons que toutes les fois que λ est plus petit que l'unité, on peut plier la projection entière en forme de globe pour en faire des *coniglobes* dont l'usage était plus répandu autrefois qu'il ne l'est aujourd'hui, et la projection rentre alors dans la classe générale des projections coniques; elle peut être regardée comme le développement d'un cône ayant son sommet sur l'axe des pôles du globe, et coupant le sphéroïde suivant deux parallèles qui seront développés sur la carte en véritable grandeur, la position de ces parallèles, c'est-à-dire la connaissance de leurs colatitudes z_0 et z_1 définira la valeur du rapport λ qui est égal au sinus du demi-angle au sommet de ce cône. Nous aurons occasion, en traitant des projections coniques (1), de reparler de ce système, que nous désignerons, ainsi que la fait M. d'Avezac, sous le nom de *projection conique orthomorphe de Lambert* (2).

ÉTUDE DIRECTE DES PROJECTIONS ORTHOMORPHES A MÉRIDIENS CIRCULAIRES.

12. Nous avons traité avec détail aux §§ 8, 9, 10, 11, le cas particulier où les méridiens sont des droites passant par le centre commun à tous les parallèles; nous allons maintenant traiter, ainsi que l'a fait Lambert (3), le cas général où les méridiens sont des cercles se coupant sous des angles λ fois plus grands ou plus petits que les véritables, les parallèles d'autres cercles coupant les premiers à angles droits, de manière que le rapport des degrés de longitude et de latitude soit le même sur la carte que sur la sphère.

Soient (fig. 12) P, P' les pôles, PP' un méridien représenté par une droite et à partir duquel on compte les longitudes; CO perpendiculaire sur le milieu de PP' sera le lieu des centres de tous les méridiens; soit dt la différence des longitudes des deux méridiens infiniment voisins PCP', et PMP' dont O est le centre.

L'angle MPC doit, par hypothèse, être égal à λdt. Posons CP $= 1$; alors

$$\mathrm{MC} = \mathrm{tang}\left(\tfrac{1}{2}\lambda dt\right) = \tfrac{1}{2}\lambda dt.$$

(1) *Voir* plus loin, chap. VI, § 9.

(2) Signalons, en terminant, l'étude que sir J. F. W. HERSCHEL a faite de cette projection dans un travail inséré dans *the Journal of the royal geographical Society, volume the thirtieth, London*, 1860, pages 100-106, où l'auteur cherche les conditions sous lesquelles une sphère peut être projetée sur un plan de manière que la représentation de toute portion infiniment petite de la surface soit semblable de forme à la portion originale.

(3) *Entwerfung der Charten...* sect. V, p. 145.

De même

$$CO = \operatorname{cotang} \lambda dt = \frac{1}{\lambda dt}.$$

Soit z la colatitude d'un point quelconque B du méridien PCP'.

Posons $BC = x$ et soit $Bb = -dx$. On a d'abord

$$MO = AO = \frac{1}{\lambda dt} + \frac{1}{2}\lambda dt,$$

$$BO = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2 dt^2} + x^2} = \frac{1}{\lambda dt} + \frac{1}{2}x^2 \lambda dt,$$

donc

$$AB = \tfrac{1}{2}\lambda dt(1 - x^2).$$

Pour que les degrés de latitude gardent leur rapport exact avec ceux de longitude, on devra avoir

$$\frac{AB}{Bb} = \frac{dt \sin z}{dz},$$

et par conséquent

$$-\frac{1}{2}\frac{\lambda dt(1-x^2)}{dx} = dt\frac{\sin z}{dz};$$

d'où

$$-\frac{\lambda dz}{\sin z} = \frac{2dx}{1-x^2}.$$

Posons $x = \cos\varphi$; on aura

$$\frac{\lambda dz}{\sin z} = \frac{2d\varphi}{\sin\varphi},$$

et en intégrant,

$$\frac{1}{2}\lambda \log\left(C \operatorname{tang}\frac{z}{2}\right) = \log \operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi.$$

La constante C est arbitraire et permet d'assujettir le problème à une condition de plus. Déterminons-la, par exemple, par la condition que $x = 0$ et par suite $\varphi = 90°$ lorsque $z = z_0$, z_0 étant la colatitude du parallèle donné qui devra ainsi être représenté par une droite. On voit alors que

$$C = \operatorname{cotang}\frac{z_0}{2},$$

et il en résulte

$$\left(\operatorname{cotang}\frac{z_0}{2}\operatorname{tang}\frac{z}{2}\right)^{\lambda} = \operatorname{tang}^2\frac{\varphi}{2};$$

et comme

$$x = \frac{1 - \operatorname{tang}^2 \frac{\varphi}{2}}{1 + \operatorname{tang}^2 \frac{\varphi}{2}},$$

on a enfin la formule

$$x = \frac{1 - \left(\operatorname{cotang} \frac{z_0}{2} \operatorname{tang} \frac{z}{2}\right)^\lambda}{1 + \left(\operatorname{cotang} \frac{z_0}{2} \operatorname{tang} \frac{z}{2}\right)^\lambda} = 1 - \frac{2}{\left(\operatorname{tang} \frac{z_0}{2}\right)^\lambda \left(\operatorname{cotang} \frac{z}{2}\right)^\lambda + 1}.$$

Le rayon ρ de chaque parallèle est exprimé par

$$AD = AB \operatorname{cotang} ADB = AB \operatorname{cotang} AOC,$$

ou

$$\rho = \frac{1}{2} \frac{1 - x^2}{x} = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2} x.$$

On voit que

$$CD = x + \rho = \frac{1 + x^2}{2x}.$$

Pour $z = 0$, $x = +1$ et pour $z = 180°$, $x = -1$, ce qui montre que les deux pôles sont également distants du centre. Il en résulte que les degrés des deux côtés de l'équateur deviennent inégaux entre eux et que le tracé est moins régulier que lorsque $z_0 = 90°$, car alors la formule devient

$$x = 1 - \frac{2}{\left(\operatorname{cotang} \frac{z}{2}\right)^\lambda + 1},$$

et, dans ce cas, l'équateur est représenté par une droite perpendiculaire sur le milieu de PP′.

Les formules précédentes montrent l'identité de cette projection avec celle que nous avons étudiée longuement sous le nom de *projection de Lagrange*. (Voir les §§ 6 et 7 de ce chapitre.) La constante que nous avions appelée $2c$ est la même que celle que nous représentons ici par λ et indique le rapport dans lequel sont réduits les angles des méridiens entre eux. Nous avons vu comment Lagrange a su augmenter les avantages de cette projection en profi-

tant de l'indétermination de la constante λ ; nous n'avons donc rien à ajouter à l'étude que nous en avons déjà faite (1).

MÉTHODE DES COEFFICIENTS INDÉTERMINÉS.

13. Nous avons traité de la manière la plus générale, dans ce qui précède, la question de la représentation du sphéroïde sur un plan, sous la condition de la similitude des éléments infiniment petits, et nous avons donné différentes méthodes qui permettent de traiter très-simplement quelques cas particuliers.

Il est une autre méthode, aussi très-générale, qui permet d'arriver aux mêmes résultats, et, dans des cas particuliers, d'une manière assez simple : je veux parler de la méthode des coefficients indéterminés.

On sait que toute fonction y de deux variables indépendantes t et l peut être exprimée par une série continue de la forme

$$\begin{array}{l|l|l|l} y = A + Bl + A'l + B'l + A''l^2 + B''l^2 + \ldots\ldots & t + Cl + C'l + C''l^2 + \ldots & t^2 + Dl + D'l + D''l^2 + \ldots & t^3 + \ldots\ldots \\ & & & \ldots\ldots \\ & & & \ldots\ldots \\ & & & \ldots\ldots \end{array}$$

dans laquelle les coefficients A, B, C... A', B'... A''... peuvent être déterminés lorsque l'on connaît un nombre suffisant de valeurs de y ou de ses dérivées successives pour des valeurs données de t et de l.

Nous allons appliquer cette méthode pour obtenir, dans le cas de la similitude, des expressions convenables des coordonnées x et y des points de la carte qui correspondent aux points de la sphère ayant pour longitude t et pour colatitude $z = 90° - l$.

Mais d'abord cherchons à mettre en équations les conditions du problème.

Soit (fig. 13) PA le méridien dont la longitude est t, MB un parallèle dont la latitude est l. Soit sur le parallèle PM, M'' le point dont la longitude est $t + dt$, et sur le méridien PA, M' le point dont la latitude est $l - dl$.

La première condition du problème est que l'angle M''MM' soit

(1) Le mémoire de Lambert étant de 1772 et celui de Lagrange de 1781 seulement, le mérite de l'invention semble d'abord appartenir de droit au premier; mais comme la marche suivie par le second et les résultats auxquels il est parvenu constituent un travail beaucoup plus complet et lui sont évidemment propres, nous continuerons à désigner cette projection sous le nom de *projection de Lagrange*.

droit, par suite que les triangles rectangles $Mm''M''$, $Mm'M'$ soient semblables ; de plus, pour que les degrés de longitude et de latitude conservent entre eux le même rapport que sur la sphère, on doit avoir

$$\frac{MM'}{MM''} = \frac{dl}{dt\cos l},$$

et par conséquent

$$\frac{Mm''}{Mm'} = \frac{dy''}{dx'} = \frac{dt\cos l}{dl}, \quad \text{et} \quad \frac{M''m''}{M'm'} = -\frac{dx''}{dy'} = \frac{dt\cos l}{dl'}.$$

Or x et y étant fonctions de t et l, on a généralement

$$dx = \frac{dx}{dt}\,dt + \frac{dx}{dl}\,dl,$$

$$dy = \frac{dy}{dt}\,dt + \frac{dy}{dl}\,dl.$$

Pour un même méridien, t étant constant, $dt = 0$, donc

$$-dx' = \frac{dx}{dl}\,dl, \quad \text{et} \quad dy' = \frac{dy}{dl}\,dl.$$

Pour un même parallèle

$$dx'' = \frac{dx}{dt}\,dt, \quad \text{et} \quad dy'' = \frac{dy}{dt}\,dt.$$

Les deux équations de condition sont donc

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{dx}{dl}\cos l, \quad \text{et} \quad \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dl}\cos l$$

Ces équations sont nécessaires et suffisantes, car on voit facilement que si les valeurs de x et de y satisfont à ces équations, les angles d'intersection seront droits et les éléments proportionnels.

Parmi toutes les formes de séries infinies que l'on peut adopter, Lambert (1) remarquant que, d'après les équations de condition, $\frac{dx}{dl}$ et $\frac{dy}{dl}$ doivent être multipliés par $\cos l$, pensa que la forme la plus convenable est

(1) *Entwerfung der Charten...* sect. VI, p. 158.

$$
\begin{aligned}
y = {} & A + Bt + Ct^2 + \ldots\ldots \\
& + A' \sin l + B't \sin l + C't^2 + \ldots\ldots \\
& + A'' \sin 2l + B''t \sin 2l + C''t^2 \sin 2l + \ldots\ldots \\
& + A''' \sin 3l + B'''t \sin 3l + C'''t^2 \sin 3l + \ldots\ldots \\
& + \ldots\ldots + \ldots\ldots + \ldots\ldots + \ldots
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
x = {} & a + bt + ct^2 + \ldots\ldots \\
& + a' \cos l + b't \cos l + c't^2 \cos l + \ldots\ldots \\
& + a'' \cos 2l + b''t \cos l + c''t^2 \cos l + \ldots\ldots \\
& + a''' \cos 3l + b'''t \cos 3l + c'''t^2 \cos 3l + \ldots\ldots \\
& + \ldots\ldots + \ldots\ldots + \ldots\ldots + \ldots
\end{aligned}
$$

Si l'on différentie x et y séparément par rapport à l et par rappor à t, que l'on multiplie $\frac{dx}{dl}$ par cos$l$. ainsi que $\frac{dy}{dl}$, on trouve que pour satisfaire aux deux équations de condition quelles que soient les valeurs de l et de t, on doit avoir

$b = \frac{1}{2} A'$	$c = \frac{1}{4} B'$	$d = \frac{1}{6} C'$
$b' = \frac{1}{2} (2A'')$	$c' = \frac{1}{4} (2B'')$	$d' = \frac{1}{6} (2C'')$
$b'' = \frac{1}{2} (A' + 3A''')$	$c'' = \frac{1}{4} (B' + 4B''')$	$d'' = \frac{1}{6} (C' + 3C''')$
$b''' = \frac{1}{2} (2A'' + 4A^{iv})$	$c''' = \frac{1}{4} (2B'' + 4B^{iv})$	$d''' = \frac{1}{6} (2C'' + 4C^{iv})$
$b^{iv} = \frac{1}{2} (3A''' + 5A^{v})$	$c^{iv} = \frac{1}{4} (3B''' + 5B^{v})$	$d^{iv} = \frac{1}{6} (2C''' + 5C^{v})$
. . . . .	. . . . .	. . . . .

et de même

$B = \frac{1}{2} a'$	$C = \frac{1}{4} b'$	$D = \frac{1}{6} c'$
$B' = \frac{1}{2} (2a'')$	$C' = \frac{1}{4} (2b'')$	$D' = \frac{1}{6} (2c'')$
$B'' = \frac{1}{3} a' + 3a''')$	$C'' = \frac{1}{4} (b' + 3b''')$	. . . . .
. . . . .	. . . . .	. . . . .

La loi de la formation de ces termes est très-simple.
On voit ainsi que

les	b	dépendent des	A		
	c	«	B	et par conséquent des	a
	d	«	C	«	A
les	B	«	a	«	
	C	«	b	et par conséquent des	A
	D	«	c	«	a

. . . . . .

et ainsi tous les coefficients dépendant de a et de A.

On trouve ainsi :

$$\begin{aligned}
b &= \tfrac{1}{2}(\ +A') & B &= \tfrac{1}{2}(\ +a')\\
b' &= \tfrac{1}{2}(\ +2A'') & B' &= \tfrac{1}{2}(\ +2a'')\\
b'' &= \tfrac{1}{2}(A'+3A''') & B'' &= \tfrac{1}{2}(a'+3a''')\\
b''' &= \tfrac{1}{2}(2A''+4A^{IV}) & B''' &= \tfrac{1}{2}(2a''+4a^{IV})\\
b^{IV} &= \tfrac{1}{2}(3A'''+5A^{V}) & B^{IV} &= \tfrac{1}{2}(3a'''+5a^{V})\\
&\dots\dots\dots\dots & &\dots\dots\dots\dots\\
b^k &= \tfrac{1}{2}[(k-1)A^{k-1}+(k+1)A^{k+1}] & B^k &= \tfrac{1}{2}[(k-1)a^{k-1}+(k+1)a^{k+1}].
\end{aligned}$$

On trouve de même :

$$c^k = \frac{1}{4}[(k-1)B^{k-1}+(k+1)B^{k+1}] = \frac{1}{2.4}[(k-1)(k-2)a^{k-2}+2k^2a^k+(k+1)(k+2)a^{k+2}].$$

$$C = \frac{1}{4}[(k-1)b^{k-1}+(k+1)b^{k+1}] = \frac{1}{2.4}[(k-1)(k-2)A^{k-2}+2k^2A^k+(k+1)(k+2)A^{k+2}].$$

$$d^k = \frac{1}{6}[(k-1)C^{k-1}+(k+1)C^{k+1}] = \frac{1}{2.4.6}\left\{\begin{array}{l}(k-1)(k-2)(k-3)a^{k-3}\\ +(k-1)(3k^2-3k+2)a^{k-1}\\ +(k+1)(3k^2+3k+2)a^{k+1}\\ +(k+1)(k+2)(k+3)a^{k+3}\end{array}\right.$$

$$e^k = \frac{1}{8}[(k-1)D^{k-1}+(k+1)D^{k+1}] = \frac{1}{2.4.6.8}\left\{\begin{array}{l}(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)a^{k-4}\\ +(k-1)(k-2)(4k^2-8k+8)a^{k-2}\\ +k^2(6k^2+10)a^k\\ +(k+1)(k+2)(4k^2+8k+8)a^{k+2}\\ +(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)a^{k+4}\end{array}\right.$$

et ainsi de suite.

14. Nous allons, avec Lambert, considérer un cas particulier où cette méthode se simplifie beaucoup.

Représentons (fig. 13) le méridien du milieu de la projection par une droite sur laquelle nous porterons les degrés égaux de latitude, l'équateur par une seconde droite perpendiculaire à la première, et les méridiens et les parallèles par des courbes se coupant à angle droit, de manière que les degrés de longitude conservent leur véritable rapport avec ceux de latitude. Cherchons quelles doivent être les valeurs de x et de y en fonction de t et de l.

En prenant pour axes des coordonnées le méridien moyen et l'équateur, on voit que, la figure étant nécessairement symétrique par rapport à ces axes, y devra être exprimé par des puissances paires de t et impaires de l, et x par des puissances paires de l et im-

paires de t. En outre, si l'on fait $l = 0$, y sera nul aussi et x devra être exprimé par une fonction de t seulement. Si enfin l'on fait $t = 0$, il faudra que $y = l$ et $x = 0$.

Ces séries devront donc être de la forme

$$\begin{aligned} y = {} & Kl + At^2l + A't^2l^3 + A''t^2l^5 + \ldots\ldots \\ & + Bt^4l + B't^4l^3 + B''t^4l^5 + \ldots\ldots \\ & + Ct^6l + C't^6l^3 + C''t^6l^5 + \ldots\ldots \\ & + Dt^8l + \ldots\ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x = {} & at + a'tl^2 + a''tl^4 + a'''tl^6 + \ldots\ldots \\ & + bt^3 + b't^3l^2 + b''t^3l^4 + b'''t^3l^6 + \ldots\ldots \\ & + ct^5 + c't^5l^2 + c''t^5l^4 + \ldots\ldots \end{aligned}$$

En satisfaisant aux deux équations de condition

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{dx}{dl}\cos l \quad \text{et} \quad \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dl}\cos l,$$

ainsi qu'aux condition du problème que nous venons d'énoncer, on détermine facilement les coefficients, K, A, A'..., a, a'... b..., et l'on arrive aux deux séries

$$\begin{aligned} y = {} & l + \frac{1}{2}t^2l - \frac{4}{2}\frac{1}{1.2.3}t^2l^3 + \frac{16}{2}\frac{t^2l^5}{1.2.3.4.5} - \frac{64}{2}\frac{t^2l^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \ldots\ldots \\ & + \frac{5}{2}t^4l - \frac{7}{18}t^4l^3 + \frac{5}{18}t^4l^5 - \ldots\ldots \\ & + \frac{61}{720}t^6l - \frac{443}{1440}t^6l^3 - \ldots\ldots \\ & + \frac{139}{4032}t^8l - \ldots\ldots \\ & + \ldots\ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x = {} & t - \frac{1}{2}tl^2 + \frac{1}{1.2.3.4}tl^4 - \frac{1}{1.2.3.4.5.6}tl^6 + \ldots\ldots \\ & + \frac{1}{6}t^3 - \frac{5}{12}t^3l^2 + \frac{41}{144}t^3l^4 - \frac{73}{864}t^3l^6 + \ldots\ldots \\ & + \frac{1}{24}t^5 - \frac{61}{240}t^5l^2 + \frac{191}{480}t^5l^4 - \ldots\ldots \\ & + \frac{61}{5040}t^7 - \frac{139}{1008}t^7l + \ldots\ldots \\ & + \frac{139}{28224}t^9 + \ldots\ldots \\ & + \ldots\ldots \end{aligned}$$

En groupant les coefficients des mêmes puissances de t, on peut écrire

$$y = l + \frac{1}{4}\sin 2l\,t^2 + \frac{4\sin 2l + 3\sin 4l}{4.8.1.3}\,t^4 + \frac{34\sin 2l + 60\sin 4l + 30\sin 6l}{4.8.12.1.3.5}\,t^6 + \frac{496\sin 2l + 1512\sin 4l + 1620\sin 6l + 630\sin 8l}{4.8.12.16.1.3.5.7}\,t^8 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x = t\cos l + \frac{\cos l + \cos 3l}{4.1.3}\,t^3 + \frac{4\cos l + 10\cos 3l + 6\cos 5l}{4.8.1.3.5}\,t^5 + \frac{34\cos l + 154\cos 3l + 210\cos 5l + 90\cos 7l}{4.8.12.1.3.5.7}\,t^7 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Groupons maintenant les termes en $\sin 2l$, $\sin 4l$, $\sin 6l$... dans l'expression de y, et les termes en $\cos l$, $\cos 3l$, $\cos 5l$... dans l'expression de x; nous trouverons

$$y = l + \sin 2l \operatorname{tang}^2\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\sin 4l \operatorname{tang}^4\frac{t}{2} + \frac{1}{3}\sin 6l \operatorname{tang}^6\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 8 \operatorname{tang}^8\frac{t}{2} + \ldots\ldots$$

$$x = 2\cos l \operatorname{tang}\frac{t}{2} + \frac{2}{3}\cos 3l \operatorname{tang}^3\frac{t}{2} + \frac{2}{5}\cos 5l \operatorname{tang}^5\frac{t}{2} + \frac{2}{7}\cos 7l \operatorname{tang}^7\frac{t}{2} + \ldots\ldots$$

On trouve enfin, en groupant convenablement les termes :

$$y = l + \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\sin 2l \operatorname{tang}^2\frac{t}{2}}{1 - \cos 2l \operatorname{tang}^2\frac{t}{2}}\right),$$

$$x = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1 + 2\operatorname{tang}\frac{t}{2}\cos l + \operatorname{tang}^2\frac{t}{2}}{1 - 2\operatorname{tang}\frac{t}{2}\cos l + \operatorname{tang}^2\frac{t}{2}}\right),$$

ou, en posant $z = 90^\circ - l$,

$$y = 90^\circ - z + \operatorname{arc\,cotang}\left(\operatorname{cotang} 2z + \operatorname{cotang}^2\frac{z}{2}\operatorname{cos\acute{e}c}\, 2z\right),$$

$$x = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1 + \sin z \sin t}{1 - \sin z \sin t}\right),$$

ou plus simplement

(I) $$\operatorname{cotang} y = \cos t \operatorname{tang} z.$$

(II) $$x = \frac{1}{2}\log\left(\frac{\operatorname{cos\acute{e}c}\, z + \sin t}{\operatorname{cos\acute{e}c}\, z - \sin t}\right).$$

Il est facile, pour vérifier ces formules, de former

$$\frac{dy}{dt}, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dz}, \frac{dx}{dz},$$

et de voir que les équations de condition

$$\frac{dy}{dz}\sin z = -\frac{dx}{dt} \qquad \text{et} \qquad \frac{dx}{dz}\sin z = \frac{dy}{dt}$$

sont satisfaites.

La formule

$$x = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\sin z \sin t}{1-\sin z \sin t}\right)$$

montre que x dépend de z de la même manière que de t, de telle sorte que pour des valeurs telles que $z = 40°$ et $t = 60°$, on obtiendrait pour x la même valeur que pour le groupe $z = 60°$ et $t = 40°$.

Si l'on fait $z = 90°$, c'est-à-dire $l = 0°$, on obtient

$$x_0 = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right) = \log\operatorname{tang}\left(45° + \frac{t}{2}\right),$$
$$y_0 = 0;$$

ce qui montre que les degrés de l'équateur comptés à partir du centre C augmentent de la même manière que les degrés de latitude dans les cartes marines de Mercator.

Si l'on fait $t = 90°$, on obtient

$$x = \frac{1}{2}\log\frac{1+\sin z}{1-\sin z} = \log\operatorname{tang}\left(45° + \frac{z}{2}\right),$$
$$y = 90°;$$

ce qui montre que le méridien distant de 90° du méridien central, est parallèle à l'équateur, et que, à partir du pôle, les degrés augmentent sur ce méridien comme les degrés de longitude sur l'équateur, ou comme les degrés de latitude dans les cartes marines de Mercator. Comme les parallèles coupent les méridiens à angles droits, ils s'écartent de plus en plus du pôle P (fig. 13) en allant du méridien de départ PC au méridien de 90°, PD ; et, sur ce dernier méridien, ils deviennent parallèles à CP. Au-dessus du méridien PD ils passent par les positions symétriques de celles qu'ils ont occupées au-dessous, de manière à former des ovales dont le demi grand axe

est PD, le demi petit axe PB, et qui s'allongent d'autant plus que la latitude diminue.

Cherchons quelle est l'altération des surfaces dans cette projection. Considérons pour cela la petite surface comprise entre deux parallèles et deux méridiens infiniment voisins. Cet élément peut être évalué par le produit des arcs infiniment petits de parallèles et de méridiens ; or un arc de courbe est exprimé par

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Formons donc dy et dx à l'aide des formules (I) et (II). Nous trouvons

$$dy = \frac{\cos t dl + \sin l \cos l \sin t dt}{1 - \cos^2 l \sin^2 t};$$

$$dx = \frac{\cos l \cos t dt - \sin t \sin l dl}{1 - \cos^2 l \sin^2 t}.$$

Pour un méridien $dt = 0$, nous obtenons alors

$$ds_m = \frac{dl}{\sqrt{1 - \cos^2 l \sin^2 t}}.$$

Pour un parallèle $dl = 0$, et nous obtenons

$$ds_p = \frac{dt \cos l}{\sqrt{1 - \cos^2 l \sin^2 t}}.$$

Le petit rectangle considéré est donc exprimé par

$$\frac{dt\, dl \cos l}{1 - \cos^2 l \sin^2 t}.$$

Le numérateur exprime justement le rectangle correspondant sur la sphère ; le rapport d'agrandissement des surfaces est donc

$$m^2 = \frac{1}{1 - \cos^2 l \sin^2 t}.$$

On voit que si $t = 0$, $m^2 = 1$, ce qui montre que l'altération des surfaces est nulle le long du méridien central.

Si donc la carte tracée d'après cette projection ne contient qu'un petit nombre de degrés de longitude, elle jouira des avantages suivants :

1° les angles y seront partout conservés, et par conséquent les méridiens et les parallèles se couperont partout à angles droits ;

2° les degrés de latitude y seront égaux sur le méridien du milieu représentés par une droite, et ceux de longitude, aux environs de ce méridien, ne différeront que très-peu de leur véritable grandeur.

Ce système conviendra donc aux pays tels que l'Amérique qui, peu étendus en longitude, pourront avoir, en latitude, une longueur aussi grande que l'on voudra. L'Afrique aussi se prêtera assez bien à ce genre de projection, en prenant pour méridien central celui de 20° longitude est.

On trouvera dans la table du chap. XII (2e partie), les valeurs de x et de y pour les valeurs de l et de t, de 10 en 10 degrés. La mappemonde n° IX est construite sur cette projection.

Nous montrerons, en traitant des projections cylindriques (ch. VI, § 26), que ce système peut être considéré comme une projection de Mercator transverse, c'est-à-dire comme le développement d'un cylindre tangent à la sphère le long du premier méridien, sous la condition de conservation des angles. C'est cette considération qui nous fait adopter, pour désigner ce système de représentation, le nom de *projection cylindrique orthomorphe de Lambert.*

15. Avant de terminer le chapitre des projections orthomorphes, nous ferons remarquer que lorsque l'on connaît l'une des deux équations de la projection, c'est-à-dire soit la valeur de x, soit la valeur de y, il est facile de trouver l'autre.

Nous avons en effet obtenu au § 13, pour équations de condition nécessaires et suffisantes,

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{dx}{dl}\cos l \qquad \text{et} \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dl}\cos l.$$

Il en résulte que l'on a :

$$dx = \frac{dy}{dl}\cos l dt - \frac{dy}{dt}\frac{1}{\cos l}dl,$$

$$dy = \frac{dx}{dt}\frac{1}{\cos l}dl - \frac{dx}{dl}\cos l dt.$$

Si donc on donne la valeur de x par exemple, on formera $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dx}{dl}$ et l'on en déduira la valeur de dy dont l'intégration fera connaître l'équation en y.

Ainsi si l'on donne $y = t$, il est facile d'obtenir x, car

$$\frac{dy}{dt} = 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{dy}{dl} = 0;$$

donc

$$dx = -\frac{dl}{\cos l},$$

et par conséquent

$$x = \log \operatorname{tang} \frac{90^\circ - l}{2}.$$

Nous obtenons ainsi la projection des cartes marines ou de Mercator.

16. Littrow (1) a considéré la projection dont l'une des équations est

$$x = \log l \cos t.$$

On en déduit

$$\frac{dx}{dt} = -\operatorname{tang} l \sin t \qquad \text{et} \qquad \frac{dx}{dl} = \frac{\cos t}{\cos^2 l};$$

donc

$$dy = -\frac{(\sin l \sin t dl + \cos t \cos l dt)}{\cos^2 l},$$

dont l'intégrale est

$$y = -\frac{\sin t}{\cos l};$$

de sorte que les équations de cette projection sont

$$x = \operatorname{tang} l \cos t \qquad \text{et} \qquad y = -\frac{\sin t}{\cos l}.$$

En éliminant soit t, soit l, on obtient pour équation des parallèles et pour équation des méridiens

$$y^2 \sin^2 l + x^2 = \operatorname{tang}^2 l,$$
$$y^2 \cos^2 t - x^2 \sin^2 t = \sin^2 t \cos^2 t.$$

Ces deux équations représentent, la première des ellipses, la seconde des hyperboles, dont le centre est à l'origine des coordonnées et dont le grand axe est dans l'axe des y.

---

(1) *Chorographie von* LITTROW, p. 142, Vienne, 1833.

NOTE

SUR LA CONSTRUCTION DES CARTES GÉOGRAPHIQUES,

Par M. TCHÉBYCHEV,

Lue, le 18 janvier 1853, à l'Académie impériale des sciences de Saint-Pétersbourg.

17. « Dans la construction des cartes géographiques, on parvient facilement à reproduire la figure d'une partie quelconque de la surface du globe de manière qu'il y ait constamment similitude entre ses éléments infiniment petits et leur représentation sur la carte. Mais le rapport d'agrandissement de différents éléments n'ayant pas la même valeur, les portions finies de la surface du globe, dans leur représentation sur la carte, se déforment plus ou moins, suivant les déviations de ce rapport de sa valeur normale, et comme ces déviations, dans les différents systèmes de tracé des cartes, présentent des valeurs plus ou moins considérables, on conçoit qu'il existe un système qui, dans la représentation d'une portion donnée de la surface du globe, réduit ces déviations au *minimum*, et par conséquent représente sa figure le mieux possible. C'est de la détermination de ce système de tracé des cartes que nous allons nous occuper. La question que nous aurons à résoudre présente une grande analogie avec celles qui ont été l'objet de notre mémoire intitulé : *Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes* (*Mémoires des savants étrangers*, t. VII), où nous avons cherché, par un choix convenable des constantes d'une fonction donnée, à diminuer, autant que possible, ses déviations d'une autre fonction, pour toutes les valeurs de la variable, comprises entre des limites données. Sous la condition d'un minimum de cette espèce, nous aurons à présent à chercher une fonction à deux variables, assujettie à vérifier une certaine équation aux différentielles partielles. Pour simplifier les formules, nous ne tiendrons pas compte de l'aplatissement de la terre, mais la même méthode peut être facilement étendue à toutes les hypothèses possibles sur la forme du globe.

« D'après la notation de *Lagrange* (1), le rapport d'agrandissement s'exprime ainsi

---

(1) *Voir* chap. 2, § 2.

$$m = \frac{\sqrt{F'(u+t\sqrt{-1})\,F'_1(u-t\sqrt{-1})}}{\frac{2}{e^u+e^{-u}}},$$

ce qui donne

$$\log m = \frac{1}{2}\log[F'(u+t\sqrt{-1})] + \frac{1}{2}\log[F'(u-t\sqrt{-1})] - \log\frac{2}{e^u+e^{-u}},$$

où la partie positive, composée des fonctions arbitraires, n'est évidemment que l'intégrale de cette équation

$$\frac{d^2U}{du^2} + \frac{d^2U}{dt^2} = 0.$$

Donc, les écarts du rapport d'agrandissement dépendent des déviations de la fonction $\log\frac{2}{e^u+e^{-u}}$ et de l'intégrale de cette équation. Or d'après les propriétés remarquables de cette équation, on parvient à reconnaître que le minimum de déviation de son intégrale de la fonction $\log\frac{2}{e^u+e^{-u}}$ dans l'espace limité par une courbe quelconque, ne peut avoir lieu à moins que la différence

$$U - \log\frac{2}{e^u+e^{-u}},$$

sur cette courbe, n'ait constamment la même valeur.

« Donc par l'intégration de l'équation

$$\frac{d^2U}{du^2} + \frac{d^2U}{dt^2} = 0;$$

sous cette condition, on aura la valeur de

$$U = \frac{1}{2}[F'(u+t\sqrt{-1})] + \frac{1}{2}\log[F'(u-t\sqrt{-1})],$$

à une constante arbitraire près, et de là on tirera les valeurs des fonctions

$$F'(u+t\sqrt{-1}), \quad F'_1(u-t\sqrt{-1}),$$

qui, à un facteur constant près, seront celles qui donnent la projection la plus avantageuse. Quant à leur facteur constant, qui reste

inconnu, il se détermine facilement d'après la valeur normale du rapport d'agrandissement.

« D'après cela on parvient facilement à assigner tous les cas dans lesquels on peut parvenir à la projection de la carte la plus précise, en prenant pour les méridiens et les parallèles des arcs de cercle. Dans son Mémoire Lagrange a montré que, dans toutes les méthodes qui jouissent de cette propriété très-importante pour la pratique, le rapport d'agrandissement s'exprime ainsi :

$$m = \frac{1}{\frac{2}{e^u + e^{-u}}\left[a^2 e^{2cu} + 2ab\cos 2c(t-g) + b^2 e^{-2cu}\right]}$$

« Donc, d'après ce que nous venons de dire, ces méthodes de projection ne peuvent donner la représentation la plus précise d'un pays quelconque, à moins que sur les bornes de ce pays on n'ait

$$\log m = -\log\left\{\frac{2}{e^u + e^{-u}}\left[a^2 e^{2cu} + 2ab\cos 2c(t-g) + b^2 e^{-2cu}\right]\right\} = \text{Const}^{\text{e}},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(\text{I})\begin{cases} \log m = -\log\dfrac{2}{e^u + e^{-u}} - \log\left(ae^{cu + c(t-g)\sqrt{-1}} + be^{-cu - c(t-g)\sqrt{-1}}\right) \\ \qquad\qquad - \log\left(ae^{cu - c(t-g)\sqrt{-1}} + be^{-cu + c(t-g)\sqrt{-1}}\right) = \text{Const}^{\text{e}}. \end{cases}$$

« Pour simplifier cette équation, nous transformerons les coordonnées, en prenant le point où $\log m$ devient *minimum* pour le pôle, et pour premier méridien celui qui passe par le pôle primitif. Soit t_0 et $90^\circ - z_0$ la longitude et la latitude de ce point, et convenons de désigner par T et $90^\circ - \text{Z}$ la longitude et la latitude dans le nouveau système des coordonnées. Si l'on observe que, d'après la notation de Lagrange que nous employons, u désigne $\log\left(\text{tang}\,\frac{z}{2}\right)$, $90^\circ - z$ étant la latitude relativement au premier pôle et t la longitude, on parviendra facilement à ces équations très-simples :

$$e^{u+t\sqrt{-1}} = \text{tang}\,\frac{z}{2}\,e^{t\sqrt{-1}} = \frac{\text{tang}\,\frac{z_0}{2} + \text{tang}\,\frac{\text{Z}}{2}\,e^{\text{T}\sqrt{-1}}}{1 - \text{tang}\,\frac{z_0}{2}\,\text{tang}\,\frac{\text{Z}}{2}\,e^{\text{T}\sqrt{-1}}}\,e^{t_0\sqrt{-1}};$$

$$e^{u-t\sqrt{-1}} = \operatorname{tang}\frac{z}{2}e^{-t\sqrt{-1}} = \frac{\operatorname{tang}\frac{z_0}{2} + \operatorname{tang}\frac{Z}{2}e^{-T\sqrt{-1}}}{1 - \operatorname{tang}\frac{z_0}{2}\operatorname{tang}\frac{Z}{2}e^{-T\sqrt{-1}}}e^{-t_0\sqrt{-1}}.$$

En portant ces valeurs dans l'équation (I), et en remarquant que $\log m$ devient minimum pour $Z = 0$, nous trouvons que cette équation, aux quantités de l'ordre $\operatorname{tang}^3\frac{Z}{2}$ près, devient

$$\frac{1-4c^2}{\sin^2 z_0}(\cos^2 T - \sin^2 T)\operatorname{tang}^2\frac{Z}{2} + \operatorname{tang}^2\frac{Z}{2} = C^{te};$$

et, comme dans la projection stéréographique, à un facteur constant près, on a

$$x = \operatorname{tang}\frac{Z}{2}\sin T, \qquad y = \operatorname{tang}\frac{Z}{2}\cos T;$$

ces équations nous donnent

$$\frac{\sin^2 z_0 + 4c^2 - 1}{\sin^2 z_0}x^2 + \frac{\sin^2 z_0 - 4c^2 + 1}{\sin^2 z_0}y^2 = \text{Const}^{te}.$$

« Donc si l'on cherche la projectiond'un pays assez petit, en prenant pour les méridiens et les parallèles des arcs de cercle, la projection ne peut s'approcher notablement de celle de la plus précise, à moins que ses limites, dans leur projection stéréographique, aux quantités de l'ordre $\operatorname{tang}^3\frac{Z}{2}$ près, ne vérifient cette dernière équation, et par conséquent ne présentent une courbe du second degré qui sera évidemment une ellipse, car cette courbe doit être fermée.

« D'après l'équation précédente. on voit qu'un des axes de cette ellipse suit la direction du méridien et que leur rapport est égal à

$$\sqrt{\frac{\sin^2 z_0 - 4c^2 + 1}{\sin^2 z_0 + 4c^2 - 1}}.$$

« Donc, s'il s'agissait de projeter une portion de la surface du globe, limitée par une pareille courbe dont les axes sont en rapport de 1 : n, l'exposant de projection serait déterminé ainsi

$$(2c)^2 = 1 + \frac{n^2-1}{n^2+1}\sin^2 z_0.$$

« Cette équation nous montre qu'il existe une liaison intime entre la configuration d'un pays et la valeur la plus avantageuse de l'exposant pour sa projection.

« D'après les équations dont nous venons de parler, quelle que soit la forme du pays, on peut déterminer et le centre de projection et la valeur de l'exposant, de la manière la plus avantageuse pour la précision de la carte. C'est ce que nous nous proposons de montrer dans un Mémoire détaillé sur la construction des cartes géographiques. »