www.e-rara.ch

Traité des projections des cartes géographiques

Germain, Adrien Adolphe Charles

Paris, [1865]

ETH-Bibliothek Zürich

Shelf Mark: Rar 18793

Persistent Link: https://doi.org/10.3931/e-rara-74932

Chapitre III.

www.e-rara.ch
Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien – von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material – from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d'imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L'éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes – des débuts de l'imprimerie jusqu'au 20e siècle.

e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

Nutzungsbedingungen Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titelinformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

Terms of Use This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

Conditions d'utilisation Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

Condizioni di utilizzo Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]

Visual Library

CHAPITRE III.

PROJECTIONS SANS ALTÉRATION DES SURFACES OU ÉQUIVALENTES.

11. Pour obtenir l'équivalence des surfaces correspondantes de la carte et du sphéroïde, nous allons égaler la surface d'un quelconque des petits quadrilatères rectangles formés sur le sphéroïde par deux parallèles et deux méridiens infiniment rapprochés, à la surface du quadrilatère correspondant de la carte, quadrilatère qui, ainsi que nous l'avons montré (chap. I, § 9), peut être assimilé à un parallélogramme.

En appelant, comme nous l'avons déjà fait, r le rayon du parallèle dont la latitude est l, s l'arc du méridien compté depuis le pôle, ce quadrilatère a pour surface

$$ar.dsdt,$$

et comme r et ds sont des fonctions connues de l, on peut le représenter par

$$\mathrm{L}dtdl,$$

en posant

$$\mathrm{L}=ar\frac{ds}{dl}=\frac{a^2\cos l}{(1-e^2\sin^2 l)^{\frac{1}{2}}}.\frac{1-e^2}{(1-e^2\sin^2 l)^{\frac{3}{2}}}=\frac{a^2(1-e^2)\cos l}{(1-e^2\sin^2 l)^2}.$$

Les points de la projection qui correspondent aux sommets de ce rectangle ont respectivement pour coordonnées

$$x,y\left|x+\frac{dx}{dt}dt,\ y+\frac{dy}{dt}dt\right|x+\frac{dx}{dl}dl,\ y+\frac{dy}{dl}dl\left|x+\frac{dx}{dt}dt+\frac{dx}{dl}dl,\ y+\frac{dy}{dt}dt+\frac{dy}{dl}dl.\right.$$

La surface de ce parallélogramment rectiligne est facile à évaluer (fig. 14); c'est la différence des deux rectangles $bb_2a_1b_1$ et $a'a'_1a_1a_2$,

$$\frac{dx}{dt}dt.\frac{dy}{dl}dl-\frac{dx}{dl}dl.\frac{dy}{dt}dt.$$

La condition d'égalité des surfaces sur la carte et sur le sphéroïde est donc exprimée par la relation

$$\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dl} - \frac{dx}{dl}\frac{dy}{dt} = \mathrm{L}, \qquad (\mathrm{I})$$

dans laquelle L est une fonction connue de l, égale à $a^2 \cos l$ dans l'hypothèse de la terre sphérique.

Si nous prenons pour x une fonction quelconque φ de t et l, les dérivées partielles $\frac{dx}{dt} = p$ et $\frac{dx}{dl} = q$, seront des fonctions connues de ces deux variables, et l'expression générale de y s'obtiendra par l'intégration de l'équation aux différentielles partielles

$$p\frac{dy}{dl} - q\frac{dy}{dt} = \mathrm{L}.$$

On sait que cette intégration se ramène à celle des opérations différentielles simultanées

$$\frac{dl}{p} = -\frac{dt}{q} = \frac{dy}{\mathrm{L}},$$

On en déduit

$$pdt + qdl = 0,$$

équation dont l'intégrale est

$$\varphi(l.\,t) = \mathrm{C},$$

C étant une constante arbitraire. De plus

$$dy = \frac{\mathrm{L}dl}{p},$$

Or si nous supposons l'équation $\varphi\,(l,\,t) = \mathrm{C}$ résolue par rapport à t et que nous substituions à t cette valeur dans l'expression de p, le résultat, que nous désignerons par $p_{(l,\,c)}$, ne sera plus qu'une fonction de l, et il sera alors *théoriquement* possible de trouver l'intégrale de $\frac{\mathrm{L}dl}{p_{(l,\,c)}}$; on pourra donc écrire.

$$y = \mathrm{C}' + \int \frac{\mathrm{L}dl}{p_{(l,\,c)}}.$$

Nous obtiendrons alors l'intégrale de l'équation aux différentielles partielles en établissant entre les deux constantes C et C' une relation arbitraire quelconque ; et comme

$$\varphi(l, t) = x,$$

puisque l'on a en général

$$pdt + qdl = dx,$$

les équations définitives de conservation des surfaces sont

$$x = \varphi(l,t),$$
$$y = f(x) + \int \frac{L dl}{\left(\frac{dx}{dt}\right)_{(l,x)}},$$

à la condition de regarder x comme une constante dans l'expression de $\frac{dx}{dt}$.

Réciproquement, si ces équations sont satisfaites, les surfaces seront conservées. Soit en effet

$$\Psi(l,x) = \int \frac{L dl}{\left(\frac{dx}{dt}\right)_{(l,x)}},$$

l'intégrale obtenue en considérant x comme constante. Prenons les dérivées partielles de y,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} f'(x) + \frac{dx}{dt}\frac{d\Psi}{dx},$$
$$\frac{dy}{dl} = \frac{dx}{dl} f'(x) + \frac{dx}{dl}\frac{d\Psi}{dx} + \frac{d\Psi}{dl};$$

multiplions la seconde par $\frac{dx}{dt}$, la première par $\frac{dx}{dl}$, et retranchons,

$$\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dl} - \frac{dx}{dl}\frac{dy}{dt} = \frac{d\Psi}{dl}\cdot\frac{dx}{dt} = L,$$

et cette équation implique nécessairement la conservation des surfaces.

Remarquons que si le système des deux équations

$$x = \varphi(t,l), \quad y = \Psi(t,l)$$

est une solution de l'équation (I), on peut en déduire une infinité d'autres solutions en posant

$$x = \varphi(t,l), \quad y = f(x) + \Psi(l,t),$$

où f représente une fonction arbitraire quelconque de x.

2. Comme application des formules générales auxquelles nous sommes arrivés, prenons

$$\varphi(t, l) = at \quad \text{et} \quad f(x) = 0,$$

alors $\frac{dx}{dt} = a$, et par conséquent

$$y = \frac{1}{a}\int \mathrm{L}\,dl.$$

Si nous supposons la terre sphérique, L, c'est-à-dire $r\frac{ds}{dt}$, se réduit à ar ou $a^2 \cos l$; il vient donc

$$y = a \sin l.$$

On obtient ainsi un canevas dont les méridiens sont des droites parallèles et également espacées, et les parallèles d'autres droites perpendiculaires aux premières et distantes de l'équateur du sinus de la latitude correspondante. On voit de suite que ce système revient à circonscrire à la sphère un cylindre tangent le long de l'équateur et à projeter chaque point de la surface sphérique orthogonalement sur la surface cylindrique, c'est-à-dire par une perpendiculaire abaissée de ce point sur l'axe du cylindre, puis à développer la surface extérieure sur un plan.

Si l'on veut tenir compte de l'aplatissement de la terre, on est conduit à chercher l'intégrale de Ldl, c'est-à-dire de $\frac{a^2(1-e^2)\cos l}{(1-e^2\sin l)^2}$.

Posons $\sin l = u$; nous pourrons écrire

$$y = \frac{1}{a}\int \mathrm{L}\,dl = a(1-e^2)\int \frac{\cos l\,dl}{(1-e^2\sin^2 l)^2} = a(1-e^2)\int \frac{du}{1-e^2u^2}$$

$$= a(1-e^2)\left[\frac{\frac{u}{2}}{1-e^2u^2} + \frac{1}{4e}\log\frac{1+eu}{1-eu} + \mathrm{C}\right]$$

$$= a(1-e^2)\left[\frac{\sin l}{2(1-e^2\sin^2 l)} + \frac{1}{4e}\log\frac{1+e\sin l}{1-e\sin l} + \mathrm{C}\right].$$

Si l'on veut que y s'annule avec l, il faut faire $\mathrm{C} = 0$,

Développons $\frac{\sin l}{2(1-e^2\sin^2 l)}$ et $\log(1+e\sin l) - \log(1-e\sin l)$ en séries, et négligeons les puissances de e supérieures à la troisième, nous pourrons écrire

$$y = a(1-e^2)(\sin l + \tfrac{3}{4}e^2\sin^3 l),$$

ou enfin

$$y = a \sin l - ae^2 \sin l \left(1 - \tfrac{3}{4} \sin^2 l\right).$$

Nous reviendrons plus tard sur cette projection ; disons de suite que les régions voisines de l'équateur sont assez exactement représentées, mais que l'altération croît très-rapidement jusqu'aux pôles qui sont, comme dans la projection de Mercator, représentés par deux droites parallèles, de telle sorte que les zones polaires sont allongées suivant les parallèles et aplaties suivant les méridiens. Ce système n'est donc pas admissible pour les mappemondes, et son emploi doit être borné aux cartes des pays peu éloignés de l'équateur ou comprenant cette ligne, dont on veut conserver les surfaces sans s'occuper de la déformation des contours. Nous le désignerons sous le nom de *projection isocylindrique droite de Lambert.*

La mappemonde n° X a été construite d'après ce système.

3. Pour les pays tels que l'Amérique, qui ont leur plus grande étendue du nord au sud, Lambert propose de retourner en quelque sorte ce genre de projection de façon à représenter le méridien moyen par une droite divisée en degrés égaux, et l'équateur par une perpendiculaire divisée comme l'était la ligne des pôles dans la projection précédente, c'est-à-dire suivant les sinus des longitudes.

Ainsi les conditions du problème sont que, pour $t = 0$, $x = 0$ et $y = l$, et que, pour $l = 0$, $x = \sin t$ et $y = 0$.

On voit de suite que la valeur de x, $\varphi(l, t)$, qui satisfait à ces conditions, doit être

$$x = \sin t \cos l.$$

Nous en tirons

$$\frac{dx}{dt} = \cos t \cos l, \quad \text{et} \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_{l,x} = \sqrt{\cos^2 l - x^2}.$$

Comme x doit être nul avec l, il faut que $f(x) = 0$. Il reste donc

$$y = \int \frac{\cos l \, dl}{\sqrt{\cos^2 l - x^2}} = \arcsin \frac{\sin l}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Les équations de la projection sont donc

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} x = \sin t \cos l, \\ \sin y = \dfrac{\sin l}{\sqrt{1 - \sin^2 t \cos^2 l}}, \quad \text{ou} \quad \operatorname{tang} y = \dfrac{\operatorname{tang} l}{\cos t}. \end{cases}$$

Lambert, après avoir exposé sa projection isocylindrique droite,

est parvenu à celle-ci, que nous désignerons sous le nom de *projection isocylindrique transverse*, par une simple transformation de coordonnées applicable à toutes les projections cylindriques et que nous exposerons plus loin (chap. VI, § 26).

Revenons aux équations de ce système. Nous obtiendrons les équations des méridiens et des parallèles en éliminant soit l soit t entre les valeurs de x et de y.

En éliminant l, on trouve pour équation des méridiens

$$x^2(1+\operatorname{tang}^2 y\cos^2 t)=\sin^2 t.$$

En éliminant t, on trouve pour équation des parallèles

$$\operatorname{tang}^2 y(\cos^2 l-x^2)=\sin^2 l.$$

Ces deux genres de courbes sont transcendants, de sorte qu'il faudra toujours les construire par joints que l'on réunira ensuite par un trait continu ; mais la connaissance des équations nous permet de faire quelques remarques sur la forme du canevas.

On voit d'abord que la projection doit être symétrique par rapport au méridien du milieu à partir duquel se comptent les longitudes, et par rapport à l'équateur ; que le méridien de 90° de longitude est parallèle à l'équateur, et que, si l'on continue à faire croître la longitude au delà de 90°, on obtient au-dessus de ce méridien rectiligne une figure parfaitement semblable à celle déjà construite au-dessous ; il en résulte qu'une projection polaire d'un hémisphère serait symétrique par rapport aux méridiens de 0° et de 90° de longitude, perpendiculaires l'un sur l'autre.

Cherchons maintenant les tangentes aux méridiens et aux parallèles aux points principaux de la figure. On sait que l'angle α de la tangente à une courbe avec l'axe des x a pour tangente trigonométrique $\dfrac{dy}{dx}$.

Pour les méridiens nous trouvons

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{(1+\operatorname{tang}^2 l)\cos t}{(\cos^2 t+\operatorname{tang}^2 l)\sin t\sin l}.$$

Si nous faisons $l=0$, nous obtenons

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0=\frac{\cos t}{0}=\infty,$$

ce qui montre que les méridiens coupent l'équateur à angles droits.

Pour $l = 90°$, c'est-à-dire au pôle, la tangente de l'angle que fait un méridien avec le méridien de départ, c'est-à-dire $\frac{dx}{dy}$, est égale à

$$-\left[\frac{(\cos^2 t + \operatorname{tang}^2 l)\sin t}{(1+\operatorname{tang}^2 l)\cos t}\right]_{90} = \left[\frac{\left(\frac{\cos t}{\operatorname{tang}^2 l}+1\right)\sin t}{\left(\frac{1}{\operatorname{tang}^2 l}+1\right)\cos t}\right]_{90} = \operatorname{tang} t,$$

ce qui montre que les méridiens font aux pôles leurs véritables angles t avec le méridien principal.

Pour les parallèles nous trouvons de même

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin l \operatorname{tang} t}{\cos^2 l(\cos^2 t + \operatorname{tang}^2 l)}.$$

Pour $t = 0$, $\frac{dx}{dy} = \infty$, ce qui montre que les parallèles sont perpendiculaires au méridien principal, et pour $t = 90°$, $\frac{dy}{dx} = \infty$, ce qui montre que les parallèles sont perpendiculaires au méridien de 90° de longitude.

Le canevas n° XI a été construit dans ce système à l'aide des tables du chapitre X (2e partie).

4. Revenons maintenant aux équations générales des projections équivalentes

$$x = \varphi(l, t),$$
$$y = f(x) + \int \frac{\mathrm{L}\,dl}{\left(\frac{dx}{dt}\right)_{l,x}}.$$

Nous pouvons disposer de l'indétermination des deux fonctions φ et f dans ces équations, pour imposer à notre système de représentation une autre propriété que la conservation des surfaces; nous pouvons exiger, par exemple, que les lignes des méridiens et des parallèles se coupent à angles droits.

Or si nous calculons l'angle φ d'un méridien et d'un parallèle de la carte, nous trouvons

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\frac{dy}{dl}\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt}\frac{dx}{dl}}{\frac{dy}{dl}\frac{dy}{dt} + \frac{dx}{dt}\frac{dx}{dl}}.$$

Pour que φ soit égal à 90°, il faut donc que

$$\frac{dy}{dl}\frac{dy}{dt}+\frac{dx}{dl}\frac{dx}{dt}=0;$$

en y joignant l'équation générale

$$\frac{dy}{dl}\frac{dx}{dt}-\frac{dx}{dl}\frac{dy}{dt}=\mathrm{L},$$

on a les deux équations du problème.

M. Bonnet a montré que la question se ramenait à la résolution d'une équation aux différentielles partielles du second ordre et a trouvé l'intégrale de cette équation; mais comme les applications que l'on peut en faire relativement aux systèmes de représentation offrent peu d'intérêt au point de vue pratique, nous ne nous y arrêterons pas.

5. La détermination des fonctions arbitraires, par la condition que les méridiens et les parallèles de la carte soient des courbes d'une espèce donnée, constitue un problème qu'il est peut être impossible de résoudre d'une manière générale, mais dont quelques cas particuliers se présentent facilement.

Cherchons, par exemple, les formules qui expriment tous les systèmes dans lesquels les parallèles sont représentés par des droites parallèles.

Si nous prenons l'équateur pour axe des x, nous voyons que y doit être indépendant de la longitude t, et que l'on pourra, par conséquent, poser

$$y=\mathrm{F}(l).$$

Il en résulte que l'on doit faire, dans les formules générales,

$$f(x)=0,$$

et que $\frac{dx}{dt}$ doit être indépendant de t; x devra donc être de la forme

$$x=t\varphi(l)+\Psi(l),$$

ou simplement

$$x=t\varphi(l),$$

si l'on se donne la condition de x nul avec t; de sorte que l'on pourra écrire

$$y=\int\frac{\mathrm{L}dl}{\varphi(l)}=\mathrm{F}(l).$$

On en tire

$$\varphi(l) = \frac{L}{F'(l)},$$

et, par conséquent,

$$x = \frac{tL}{F'(l)} \quad \text{et} \quad y = F(l),$$

sont les équations du problème.

En remplaçant L par sa valeur $\frac{a^2 \cos l\,(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 l)^2}$,

nous obtenons les deux équations

$$y = F(l); \quad x = \frac{a^2 t \cos l\,(1 - e^2)}{1 - e^2 \sin^2 l)^2 F'(l)}.$$

Si l'on suppose la terre sphérique, ces formules se réduisent à

$$y = F(l); \quad x = \frac{a^2 t \cos l}{F'(l)}. \qquad \text{(II)}$$

L'expression générale de l'ordonnée x montre que pour des différences égales de latitudes, les courbes méridiennes divisent les parallèles en parties égales.

M. le capitaine du génie *de Prépetit-Foucaut* (1) est parvenu au même résultat en traitant directement la question pour le cas de la terre sphérique. L'aire de la zone *abef* (fig. 15) comprise entre le méridien AP, un méridien quelconque P*ef*E, les deux cercles parallèles infiniment voisins *eb* et *af*, a pour mesure l'arc de l'équateur AE multiplié par la hauteur de la zone, soit

$$a^2 t \cos l dl.$$

Si nous traçons deux axes rectangulaires A'P', A'E', que nous prenions le premier pour représenter le méridien principal rectifié, le second pour représenter l'équateur, la courbe des méridiens sera déterminée par la condition que le rectangle *a'b'e'f'* soit égal à la portion de zone sphérique *abef*; nous aurons

$$x dy = a^2 t \cos l dl.$$

Représentons par

$$y = F(l)$$

(1) *Notice sur la construction de nouvelles mappemondes et de nouveaux atlas*, lithographiée à Arras en 1862.

la loi d'espacement des parallèles; les équations du système de projection considéré pourront s'écrire

$$y = \mathrm{F}(l); \qquad x = \frac{a^2 t \cos l}{\mathrm{F}'(l)}.$$

Pour avoir l'équation des méridiens, il suffira d'éliminer l entre ces deux équations.

Traitons quelques applications de ces dernières formules.

a. L'expression la plus simple de y est évidemment

$$y = nal,$$

n étant une constante arbitraire.

Alors

$$\mathrm{F}'(l) = na,$$

$$x = \frac{at}{n} \frac{\cos l (1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 l)^2},$$

et si nous supposons la terre sphérique,

$$x = \frac{at}{n} \cos l.$$

Les méridiens sont donc des sinusoïdes qui partagent les parallèles en parties égales, et les parallèles sont des droites espacées comme les parallèles de la terre.

Si l'on suppose $n = 1$, les équations se réduisent pour le cas de la sphère à

$$y = al \qquad \text{et} \qquad x = at \cos l,$$

ce qui montre que les degrés de parallèles conservent sur la carte leur véritable grandeur. On obtient ainsi la projection imaginée en 1650 par le géographe français *Sanson* (1) et nommée improprement *projection de Flamsteed* (2); nous la désignerons sous le nom de *projection sinusoïdale de Sanson*, et comme elle a été souvent

---

(1) *Voir* à la bibliothèque Impériale l'atlas in-folio n° 3377 comprenant l'Asie, l'Afrique, les deux Amériques et plusieurs cartes de détail par Nicolas Sanson, d'Abbeville, publiées en 1650 d'après cette projection, ainsi que la carte d'Europe par Nicolas Sanson, fils du précédent. L'ensemble des cartes des Sanson a été réédité plusieurs fois par leurs fils et petits-fils, et par Robert de Vaugondy en 1755.

(2) Cette projection, citée dans l'ouvrage anglais : *The construction of maps and globes in tivo parts...* Londres, 1717, in-8, p. 81 à 83, fut employée par l'astronome anglais Jean Flamsteed pour la rédaction d'un atlas céleste commencé en 1700 et publié en 1729 sous le titre : *Atlas cœlestis by the late Reverend M. John* Flamsteed, *London*, 1729, gr. in-folio.

employée par les géographes même pour représenter la surface entière du globe dans une sorte d'ovale dont le grand axe est double du petit, nous l'étudierons plus loin avec plus de détails (1). La table II, qui renferme les valeurs des degrés de longitude pour les parallèles de degré en degré, rend très-facile la construction de cette projection sur laquelle a été tracée la mappemonde XVIII.

Nous voyons de suite que, l'angle d'intersection des méridiens et des parallèles n'étant droit que sur le méridien du milieu et sur l'équateur et s'écartant très-rapidement de 90° à mesure que la latitude augmente, cette projection ne peut convenir que pour les pays situés de part et d'autre de l'équateur et peu étendus en latitude.

7. Si l'on voulait que x fût fonction de t seulement, et par conséquent que les méridiens fussent représentés par des droites perpendiculaires à l'équateur, il suffirait de poser

$$x = \frac{t}{n},$$

et alors

$$F'(l) = n\cos l;$$

donc

$$y = F(l) = n\sin t.$$

On obtiendrait ainsi la projection isocylindrique droite de Lambert (§ 2).

M. de Prépetit-Foucaut a indiqué le système qu'il a appele *stéréographique équivalent* dans lequel les parallèles rectilignes sont à la même distance que ceux de la projection stéréographique ordinaire.

On a ainsi (fig. 16)

$$\frac{y}{AB} = \frac{E'O}{E'B};$$

d'où

$$y = a\,\text{tang}\,\frac{l}{2}.$$

On en déduit

$$F'(l) = \frac{a}{2\cos^2\frac{l}{2}};$$

(1) *Voir* 2e part., chap. VII, 2°. Disons ici que la projection prétendue nouvelle et nommée *isographique* par le docteur Mohr (séance du 6 février 1865 de la Société d'histoire naturelle et de médecine du Bas-Rhin) n'est point autre que la projection de Sanson.

donc

$$x = 2at \cos l \cos^2 \frac{l}{2}.$$

Pour $l = 90°$, $y = a$, $x = 0$, et pour $t = 90°$ et $l = o$, $y = 0$ et $x = a\pi$. On aurait donc pour représenter un hémisphère une figure très-aplatie aux pôles. Mais on peut transformer cette projection en prenant pour y, non plus a tang $\frac{l}{2}$, mais an tang $\frac{l}{2}$, n étant un coefficient que l'on détermine par la condition que les deux axes de la représentation d'un hémisphère soient égaux.

On obtient d'abord pour x

$$x = \frac{2at}{n} \cos l \cos^2 \frac{l}{2}.$$

pour $l = 90°$, $y = an$, et pour $l = 0$, $t = 90°$, $x = \frac{a\pi}{n}$. Il faut donc poser

$$n = \frac{\pi}{n};$$

d'où

$$n = \sqrt{\pi},$$

et les formules sont dans ce cas

$$y = at\sqrt{n}, \quad x = \frac{2at}{\sqrt{\pi}} \cos l \cos^2 \frac{l}{2}.$$

Ce système est plus curieux qu'utile; nous ne nous y arrêterons pas plus longtemps.

8. En voici un autre qui permet de représenter les parallèles par des lignes droites et les méridiens par des droites partant toutes d'un même point qui est le pôle de la projection.

Reprenons les formules générales pour le cas où la terre est supposée sphérique,

$$y = \mathrm{F}(l); \qquad x = \frac{a^2 t \cos l}{\mathrm{F}'(l)}.$$

Les équations des méridiens doivent être de la forme

$$x = (b - y)\varphi(t),$$

en appelant b l'ordonnée du point pris pour pôle, et plaçant l'origine des coordonnées à la rencontre de l'équateur et du méridien principal.

On a ainsi

$$(b-y)\varphi(t)=\frac{a^2t\cos l}{\frac{dy}{dl}}.$$

Comme $\frac{dy}{dl}$ est indépendant de t, il faut, pour que cette égalité ait lieu quelles que soient les valeurs de t et l, que $\varphi(t)$ soit de la forme mt, m étant une constante. On a alors

$$m(b-y)dy=a^2\cos l\,dl,$$

et en intégrant

$$m\left(by-\frac{y^2}{2}\right)=C+a^2\sin l.$$

Or y s'annule avec l, donc $C=0$; et comme pour $l=90^\circ$, $y=b$, il faut que

$$m\frac{b^2}{2}=a^2;$$

d'où

$$m=\frac{2a^2}{b^2}.$$

Les équations du système sont donc

$$2\left(by-\frac{y^2}{2}\right)=b^2\sin l,$$

$$x=2(b-y)\frac{a^2}{b^2}t.$$

Nous pouvons disposer de la constante b pour assujettir le problème à une nouvelle condition.

M. E. *Collignon* (1) l'a déterminée de manière que les méridiens extrêmes qui limitent la carte d'un hémisphère dessinent un carré. Il faut alors que pour $l=0$ et $t=\pm\frac{\pi}{2}$, on ait $x=\pm b$.

On trouve immédiatement

$$b=a\sqrt{\pi};$$

de sorte que les équations du nouveau système sont

$$x=2\left(a\sqrt{\pi}-y\right)\frac{t}{\pi},$$

(1) *Journal de l'École polytechnique*, 41e cahier.

$$y^2 - 2a\sqrt{\pi}\,y + \pi a^2 \sin l = 0.$$

y devant toujours être plus petit que $a\sqrt{\pi}$ on ne devra prendre que la racine

$$y = a\sqrt{\pi}\left(1 - \sqrt{1 - \sin l}\right) = a\sqrt{\pi}\left(1 - \sqrt{2}\sin\frac{90^\circ - l}{2}\right).$$

Soient (fig. 17) P le pôle, EE′ l'équateur, on portera d'abord

$$PO = OE = \frac{EE'}{2} = a\sqrt{\pi}.$$

Les méridiens se construisent immédiatement en partageant l'équateur en parties égales représentant des arcs de longitude de 5° en 5° ou de 10° en 10°.

Du point P, comme centre, avec PO pour rayon, décrivons le quadrant ADB.

Pour tracer le parallèle correspondant à une latitude représentée sur le quadrant AB par l'arc $AD = l$, il suffira de prendre le milieu F de l'arc DE complémentaire de la latitude, et de mener par ce point F, IH parallèle à BPE′ jusqu'à la rencontre H de PO. Le parallèle cherché sera N′HN parallèle à EE′.

En effet, abaissons FI perpendiculaire sur BE′ et menons IK parallèle à PO, nous aurons

$$OH = OP - IK = OP - IF\sqrt{2}.$$

Or

$$IF = OP \sin\frac{90^\circ - l}{2} = a\sqrt{\pi}\sin\frac{90^\circ - l}{2};$$

donc

$$OH = a\sqrt{\pi}\left(1 - \sqrt{2}\sin\frac{90^\circ - l}{2}\right),$$

valeur qui, substituée à y dans l'équation entre y et l, satisfait à cette équation.

Pour tracer les parallèles de 10° en 10°, il suffira donc de porter des arcs de 5° en 5° du point B au point M, milieu du quadrant BA, et de projeter ces points sur PO parallèlement à BE′; par les points de division de PO ainsi obtenus, on n'aura plus qu'à mener des parallèles à EE′ et ces parallèles seront à peu près également distants.

Pour obtenir le carré on fera le tracé seulement pour les latitudes boréales et on le répétera symétriquement au-dessous de l'équateur.

9. Nous allons maintenant considérer les systèmes de projections à surfaces équivalentes dans lesquels les parallèles sont représentés par des cercles concentriques. Nous pourrions traiter cette question comme cas particulier du problème général.

Soit C le centre commun que nous prenons pour centre des coordonnées polaires ρ et θ; remarquons de suite que ρ doit être fonction de la latitude l seulement; ainsi

$$\rho = \varphi(l).$$

Le petit quadrilatère formé par deux méridiens infiniment voisins et deux parallèles ayant pour rayons ρ et $\rho + d\rho$, a pour surface le produit de sa base $\rho d\theta$ par sa hauteur $d\rho$. L'égalité des surfaces de la carte et du sphéroïde donne donc

$$\rho d\rho d\theta = ar\,dt\,ds = \mathrm{L}\,dt\,dl;$$

d'où l'on tire

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\mathrm{L}}{\rho \dfrac{d\rho}{dl}},$$

et en intégrant

$$\theta = \frac{t\mathrm{L}}{\rho \dfrac{d\rho}{dl}} + f(l).$$

Si nous convenons de compter les angles θ à partir du méridien principal qui sera représenté par une droite, on voit que θ doit s'annuler avec t et que par conséquent

$$f(l) = 0.$$

Les équations générales cherchées sont donc

$$\theta = \frac{t\mathrm{L}}{\rho \dfrac{d\rho}{dl}} \quad \text{et} \quad \rho = \varphi(l).$$

Les parallèles sont des cercles concentriques et les méridiens partagent les parallèles en parties égales et ont pour équation le résultat de l'élimination de l entre les deux équations précédentes.

Faisons quelques applications de ces formules.

10. Supposons d'abord la terre sphérique et prenons pour ρ la fonction la plus simple de l. Soit

$$\rho = a(c' + cl),$$

c et c' étant deux constantes. Dans ce cas la valeur de θ peut s'écrire

$$\theta = \frac{at\cos l}{c\rho}.$$

L'égalité

$$\rho\theta = \frac{at\cos l}{c}$$

montre que les degrés des parallèles sont tous réduits dans un rapport constant; cette propriété rend très-facile le tracé de ces projections puisque les parallèles sont des cercles concentriques et que, pour avoir les méridiens, il suffit de porter sur ces cercles des longueurs qui soient aux degrés correspondants des parallèles de la sphère comme 1 est à C.

Nous pouvons construire des projections analogues pour représenter l'ellipsoïde. Pour cela donnons à ρ des variations proportionnelles à celles de l'arc s de méridien compté à partir du pôle en posant

$$\rho = ac' + cs.$$

Alors

$$\theta = \frac{t\mathrm{L}}{\rho\dfrac{d\rho}{dl}} = \frac{atr\dfrac{ds}{dl}}{ac\rho\dfrac{d\rho}{dl}} = \frac{tr}{c\rho},$$

et l'on aura encore

$$\rho\theta = \frac{tr}{c}.$$

Comme il est difficile et peu exact de porter sur un arc de cercle des longueurs données, il faudra déterminer les divisions des parallèles en construisant les angles θ, ou en portant, à l'aide du compas, les longueurs des cordes qui devront sous-tendre les arcs cherchés. Ces cordes d se calculeront facilement à l'aide de la formule

$$d = 2\rho\sin\frac{\theta}{2}.$$

Lorsque le centre commun des parallèles sera trop éloigné pour que ces cercles puissent être décrits facilement, on les déterminera par points en les rapportant à deux axes rectangulaires dont l'un sera le méridien principal et l'autre une perpendiculaire quelconque, tangente par exemple au parallèle de latitude l; on aura ainsi

$$x = \rho \sin \theta \qquad \text{et} \qquad y = \rho_1 - \rho \cos \theta,$$

ρ étant le rayon du parallèle de latitude l_1.

11. Nous pouvons disposer de l'indétermination des constantes c et c' pour donner à la projection une nouvelle propriété.

Supposons par exemple que nous convenions de prendre le pôle pour centre commun des cercles de latitude. Il faut alors que ρ soit nul pour $l = 90°$ et par conséquent

$$c' = -\frac{\pi}{2} c.$$

Si l'on demande en outre que le rayon de l'équateur ait une longueur donnée ma, ce qui fixe l'échelle de la carte, on trouve

$$c' = m; \qquad \text{donc} \qquad c = -\frac{2m}{\pi},$$

et ainsi les deux formules deviennent

$$\rho = \frac{2ma}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - l\right) = \frac{2ma}{\pi} z,$$

$$\theta = \frac{\pi^2 t \sin l}{4m^2 z}.$$

Or, en supposant $\frac{2m}{\pi} = 1$, ce qui est toujours possible, puisque cette constante m ne sert qu'à fixer l'échelle de la carte,

$$\rho = az \qquad \text{et} \qquad \theta = \frac{t \sin z}{z},$$

l'équation des méridiens est alors

$$\theta = \frac{at \sin \frac{\rho}{a}}{d\rho}.$$

Si nous calculons l'angle ω que fait la tangente à cette courbe avec le rayon vecteur, nous trouvons

$$\operatorname{tang} \omega = \rho \frac{d\theta}{d\rho} = tz \cos z - t \sin z.$$

Cet angle est nul au pôle où $z = 0°$ et va en croissant avec z, de sorte que plus on s'éloigne du pôle et plus les méridiens s'inclinent

sur les parallèles. Cette projection serait donc tout au plus bonne pour les régions voisines du pôle. La projection n° XIX reproduit la surface entière du globe d'après Werner (1514) (1).

12. On peut aussi déterminer les constantes qui entrent dans l'expression de ρ par la condition que ρ ait une longueur déterminée pour une valeur donnée de l. Si l'on fait en sorte, par exemple, que pour $l = l_1$, ρ soit égal à la cotangente de cette latitude, le rayon de ce parallèle sera précisément égal à la génératrice du cône supposé tangent à la sphère le long de ce cercle de latitude, et l'on pourra considérer la projection comme une sorte de développement de ce cône sur lequel on aurait d'abord rectifié chaque méridien à partir du point de tangence ; la valeur de chaque rayon est, dans ce cas,

$$\rho = a \operatorname{cotang} l_1 + (l_1 - l).$$

Cette projection jouit de cet avantage que les méridiens coupent le parallèle dont la latitude est l_1 à angles droits, de sorte que si l'on prend pour l_1 la latitude moyenne du pays que l'on veut représenter, on a sur ce cercle, la représentation la plus exacte qu'il soit possible d'obtenir. Nous reviendrons longuement sur cette projection, dont quelques géographes ont voulu attribuer l'idée première à Ptolémée, et qui est appelée en Allemagne *projection de Bonne*, en France projection du *Dépôt de la guerre*, et encore (par une grosse absurdité) *projection de Flamsteed modifiée* (2). Disons de suite qu'il est très-facile, dans cette projection, de tenir compte de l'aplatissement de la terre. Il suffit pour cela de prendre pour rayon du parallèle moyen la tangente du cône circonscrit à l'ellipsoïde, et de porter à partir du point de tangence sur le méridien moyen, les vraies longueurs des arcs de méridien données dans la table I ; on portera ensuite sur les arcs de cercle qui représentent les parallèles, les longueurs correspondantes à chacun d'eux, et données dans la même table.

Si l'on faisait $l_1 = 0$, ρ serait infini, les cercles parallèles deviendraient des droites et l'on obtiendrait la projection dont nous avons déjà parlé, vulgairement appelée *projection de Flamsteed* quoiqu'elle ait été indiquée et employée par *Sanson* en 1650 (3).

---

(1) *Voir* chap. VI, § 16.
(2) *Voir* chap. VI, § 14 et 2e part., chap. VII.
(3) *Voir* chap. VI, § 15, et 2e part., chap. VIII.

13. Reprenons encore pour le cas de la terre sphérique les formules

$$\rho = \varphi(l); \qquad 0 = \frac{ta^2 \cos l}{\rho \dfrac{d\rho}{dl}}.$$

Nous pouvons déterminer la fonction φ par la condition que les méridiens coupent les parallèles à angles droits. Comme les parallèles sont représentées par des cercles concentriques, les méridiens seront des droites qui devront être nécessairement également inclinées les unes sur les autres, puisque, dans toutes ces projections, les parallèles sont partagés en parties égales. Nous devons donc faire

$$0 = \frac{t}{m},$$

si nous voulons que les angles des méridiens de la carte soient dans le rapport de 1 à m avec ceux de la sphère. Il en résulte

$$\frac{a^2 \cos l}{\rho \dfrac{d\rho}{dl}} = \frac{1}{m},$$

d'où nous tirons

$$\rho d\rho = ma^2 \cos l dl,$$

et, en intégrant,

$$\frac{\rho^2}{2} = C - ma^2 \sin l.$$

Nous mettons le signe — devant le terme en sin l, parce que, ρ croissant quand l décroît, $d\rho$ et dl sont de signes contraires ; il faut donc rétablir les signes dont nous avons fait abstraction dans les formules générales.

ρ devant être nul pour $l = 90$, la constante C doit être prise égale à ma^2, et par conséquent

$$\frac{\rho^2}{2} = ma^2(1 - \sin l).$$

Remplaçons l par $90° - z$, nous pourrons écrire

$$\rho^2 = 4am^2 \sin^2 \frac{z}{2}.$$

Les équations de ce système de projection sont donc

$$\rho = 2\sqrt{m}\, a \sin\frac{z}{2} \qquad \text{et} \qquad 0 = \frac{t}{m};$$

$2a \sin\frac{z}{2}$ représente la corde de l'arc de méridien qui joint, sur la sphère, le pôle au parallèle de latitude l; la valeur de ρ est donc bien facile à construire; pour obtenir les rayons des parallèles, il suffira de tracer une circonférence d'un rayon égal à $a\sqrt{m}$, et de porter à partir d'un diamètre les différentes latitudes ; les distances rectilignes du pôle P de ce diamètre aux points de division, c'est-à-dire les cordes des arcs complémentaires des premiers, seront les rayons cherchés. Le rayon de l'équateur sera égal à $a\sqrt{2m}$.

On peut donner au coefficient m la valeur que l'on veut.

Pour des pays isolés tels que l'Europe, m peut être déterminé de manière que, sur la carte, le degré de latitude moyenne l_1 conserve son véritable rapport avec le degré de longitude. Il faut alors que

$$\rho\theta = \rho\,\frac{t}{m} = at \sin z_1.$$

Or

$$\rho = 2a\sqrt{m}\sin\frac{z_1}{2};$$

donc

$$\frac{2a}{\sqrt{m}}\sin\frac{z_1}{2} = a\sin z;$$

d'où

$$\sqrt{m} = \frac{2\sin\frac{z_1}{2}}{\sin z_1} = \frac{1}{\cos\frac{z_1}{2}},$$

et par conséquent

$$m = \frac{1}{\cos^2\frac{z_1}{2}} = \frac{2}{1+\cos z_1}.$$

Si l'on prend par exemple pour l'Europe $z_1 = 38°\,26'$, on trouve $\cos z_1 = 0{,}78327$; on peut donc prendre, si l'échelle est petite,

$$m = \tfrac{10}{9},$$

et c'est dans cette proportion que les degrés de longitude doivent être réduits. On a alors

$$\rho = \frac{2}{3} a\sqrt{10} \sin\frac{z}{2} = a.2{,}108 \sin\frac{z}{2}.$$

La projection n° XIV a été tracée en prenant $z_1 = 45°$ d'où résulte pour m la valeur 1,171. L'angle au pôle d'un hémisphère entier est de 307° 25′ environ.

Nous donnerons à ce système le nom de *projection isosphérique sténotère* (1) *de Lambert* (2) pour le distinguer du suivant qui conserve les angles des méridiens, et que nous pourrions qualifier de *isomère* (3).

11. Ce second système est ainsi défini par l'expression

$$m = 1,$$

et a pour formules

$$\theta = t, \quad \rho = 2a \sin\frac{z}{2}.$$

On voit que dans ce cas le rayon ρ de chaque parallèle est égal à la corde de l'arc de méridien compris sur la sphère entre le pôle et le cercle de latitude correspondant.

Lambert est arrivé à ces systèmes isosphériques en traitant directement la question de la conservation des surfaces sous la condition de représenter les méridiens par des droites se coupant au pôle et les parallèles par des cercles ayant ce pôle pour centre.

En posant $PM = \rho$, $MN = d\rho$, on a

$$M\mu = \rho dt$$
$$\text{surf. } MN\mu\nu = \rho dt d\rho = a^2 \sin z dz dt$$
$$\rho d\rho = a^2 \sin z dz = -a^2 d\cos z.$$

Donc, en se donnant la condition que ρ s'annule avec z,

$$\frac{1}{2}\rho^2 = a^2(1-\cos z) = 2a^2 \sin^2\frac{z}{2},$$

$$\rho = 2a \sin\frac{z}{2}.$$

Lambert eut encore le mérite de remarquer que cette projection, de même que toutes celles où les méridiens sont, en prenant le pôle

(1) Στενότερος, plus étroit.
(2) *Entwerfung der Charten*, sect. IX.
(3) Ἰσομοιρος, également partagé.

pour centre, des droites régulièrement espacées autour de ce point et les parallèles des cercles concentriques, peut s'appliquer en un point quelconque de la sphère pris pour centre ; il suffit pour cela de supposer les méridiens remplacés par des cercles verticaux et les parallèles par des cercles (nommés *almicantarats*) ayant tous ce point pour centre et dont les rayons sur la projection varieront d'après la même loi que les rayons des parallèles de la projection polaire. D'après cette remarque il suffit, pour représenter une portion quelconque de la surface sphérique sans en altérer les aires, de prendre arbitrairement un point de la sphère pour centre du tracé, de reporter ce point sur le papier, puis de placer chaque point du contour dans l'azimut du point correspondant sur la sphère par rapport au centre adopté, à une distance de ce centre égale à la corde du grand cercle mené de l'un à l'autre de ces deux points.

Pour déterminer chaque point de la carte par sa latitude et sa longitude, il suffit d'exprimer l'azimut et le rayon vecteur en fonction de ces coordonnées. Ce calcul de transformation de coordonnées se fait très-facilement à l'aide du triangle sphérique ayant pour sommets le pôle, le point central et le point donné par sa latitude et sa longitude, et que l'on veut placer sur la carte; dans ce triangle on connaît, en effet, deux côtés et l'angle compris; il est facile de trouver l'angle au point central et le côté qui joint ce point à celui que l'on veut placer.

Nous reviendrons sur ce calcul lorsque nous parlerons des projections zénitales, c'est-à-dire qui peuvent avoir pour centre un point donné quelconque.

Lambert n'a considéré, dans sa projection isosphérique, que le cas où le point central est pris sur l'équateur, de sorte que la projection d'un hémisphère peut être regardée comme faite sur le plan d'un méridien; mais le principe de transformation est le même lorsqu'on projette tout ou partie de la demi-surface sphérique sur l'horizon d'un lieu quelconque. Tout le mérite de cette invention revient à Lambert et non à *Lorgna*, qui, quoique n'ayant parlé que dix-sept ans plus tard de la projection polaire seulement, a su attacher son nom à ce système (1).

Nous reviendrons plus tard (2) sur cette projection, que M. E. *Col-*

(1) Anton.-Mario Lorgna, *Principi di geografia astronomico-geometrica*, Vérone, 1789, in-folio, chap. IX, à XI, p. 68 à 94.

(2) *Voir* 2e part., ch. IX.

lignon (1) vient de traiter d'une façon très-remarquable dans un mémoire présenté à l'Académie, et nous parlerons alors de l'application de ce système aux cartes particulières et de la manière de tenir compte de l'aplatissement de la terre. Disons de suite que la projection isosphérique zénitale de Lambert est incontestablement la meilleure de toutes celles qui conservent les surfaces, car :

1° l'altération des angles et des distances y est nulle au centre de la carte, point que l'on peut choisir arbitrairement;

2° ces erreurs sont égales à des distances égales du centre;

3° en chaque point il existe une infinité de couples de droites formant des angles non altérés, et deux éléments de longueur non altérés;

4° on peut, par des opérations graphiques très-simples, déterminer rigoureusement la mesure d'un angle représenté sur la carte, et approximativement la mesure de la longueur d'une ligne donnée.

Les projections n°s XX et XXI ont été dressées dans ce système et à l'aide des tables du chapitre IX (2e partie).

15. M. Collignon a proposé de construire des mappemondes mixtes en trois parties, les deux zones polaires à une base comprises entre les pôles et les parallèles de 30° de latitude étant projetées dans le système isosphérique de Lambert, et la zone équatoriale intermédiaire dans le système isocylindrique dont nous avons parlé au § 2. Comme la corde d'un arc de 60° est égale au rayon, les rayons des cercles qui limitent les deux zones polaires seront égaux au rayon du cylindre circonscrit, de plus les altérations des longueurs seront identiques sur ces trois cartes dans le sens des lignes qui en forment les contours extrêmes, et identiques aussi dans le sens perpendiculaire à ces contours; c'est ce que nous démontrerons quand nous étudierons chacun de ces systèmes en particulier. Une mappemonde ainsi construite permet d'évaluer des distances avec une erreur au plus égale au $\frac{15}{100}$ de leur valeur et de tracer au rapporteur les directions avec une déviation maximum de 8° 12′, résultats qui doivent être considérés comme très-suffisamment exacts quand on a à représenter la totalité de la surface terrestre sous la condition de conserver les aires.

16. La projection isosphérique sténotère de Lambert peut être considérée comme une projection conique toutes les fois que m est

(1) *Journal de l'Ecole Polytechnique*, 41e cahier.

plus grand que l'unité, car il est alors toujours possible de calculer l'angle au sommet 2α du cône obtenu en enroulant cette projection. En égalant la circonférence de la base à l'arc-limite de la projection, on a en effet (fig. 18)

$$2\pi OA = R\Theta \quad \text{ou} \quad \Theta R = 2\pi R \sin\alpha;$$

d'où

$$\Theta = 2\pi \sin\alpha.$$

Or nous avons posé $\Theta = \dfrac{2\pi}{m}$, donc

$$\frac{1}{m} = \sin\alpha,$$

formule qui permet de calculer l'une des quantités m ou α quand l'autre est connue. Si l'on suppose le cône tangent à la sphère, l'angle α est égal à la latitude de parallèle de contact.

Au lieu de prendre un cône tangent à la sphère, on peut en considérer un sécant en s'imposant la condition que sur deux parallèles donnés les degrés de longitude conservent leur véritable rapport avec ceux de latitude, et par suite que l'altération des angles soit nulle sur ces deux parallèles.

La projection qui en résulte, imaginée par le docteur *Albert* de Lünebourg en 1805 (1), est donc le développement d'un tronc de cône ayant pour axe la ligne des pôles et traversant la sphère suivant les deux cercles de latitudes l_1 et l_2 que l'on veut conserver dans la représentation.

La surface de la zone limitée par ces deux parallèles (fig. 19) est exprimée par

$$S = 2\pi a^2(\sin l_2 - \sin l_1) = 4\pi a^2 \cos\frac{l_1+l_2}{2} \sin\frac{l_2-l_1}{2};$$

la surface correspondante du tronc de cône par

$$S' = \pi a D(\cos l_2 + \cos l_1) = 2\pi a D \cos\frac{l_2+l_1}{2} \cos\frac{l_2-l_1}{2},$$

en appelant D la distance AB, c'est-à-dire la différence des rayons

(1) *Beschreibung einer neuen Kegelprojection, von H. C.* Albers, mémoire inséré dans la *Monatliche Correspondenz de* Zach, novembre 1805, p. 450 à 459.

des deux parallèles considérés sur la projection. De l'égalité des surfaces on tire

$$D = 2a \operatorname{tang} \frac{l_2 - l_1}{2}.$$

Le rayon ρ_2 du parallèle Al_2 s'obtiendra par le rapport

$$\frac{BA}{HB} = \frac{OA}{Al_2}, \quad \text{d'où} \quad \rho_2 = \frac{D \cos l_2}{\cos l_1 - \cos l_2} = \frac{a \cos l_2}{\sin \frac{l_2 + l_1}{2} \cos \frac{l_2 - l_1}{2}}.$$

De même le second rayon ρ_1 sera donné par l'égalité

$$\rho_1 = \rho_2 + D = \frac{a \cos l_1}{\sin \frac{l_1 + l_2}{2} \cos \frac{l_2 - l_1}{2}}.$$

Quant à l'écartement des méridiens qui sont les génératrices du cône développé, on l'obtiendra en égalant les deux expressions de la longueur d'un des deux parallèles B ou A sur le cône et sur la sphère, ce qui donnera

$$\theta = \frac{ta \cos l_1}{\rho_1} = \frac{t}{k}$$

en posant

$$k = \frac{\rho_1}{a \cos l_1} = \frac{1}{\sin \frac{l_1 + l_2}{2} \cos \frac{l_2 - l_1}{2}}.$$

Ainsi les angles des méridiens entre eux sont réduits dans le rapport de 1 à k.

Cherchons maintenant l'expression du rayon d'un parallèle quelconque de latitude l.

La surface infiniment petite comprise entre ce parallèle, le voisin et les deux méridiens consécutifs a évidemment pour expression sur le cône $\theta\rho d\rho$, et sur la sphère $ta^2 \cos l dl$; en exprimant que ces deux surfaces sont égales on a donc

$$\theta\rho d\rho = -ta^2 \cos l dl;$$

nous mettons le signe — parce que $d\rho$ et dl sont des accroissements de signes contraires. Remplaçons θ par $\frac{t}{k}$ et intégrons, nous aurons

$$\rho^2 = -2a^2 k \sin l + C.$$

Pour $l = l_1$ on a par conséquent

$$\rho_1^2 = -2a^2k \sin l_1 + C;$$

donc

$$\rho^2 = 2a^2k(\sin l_1 - \sin l) + \rho_1^2.$$

Telle est l'expression qui permettra de calculer le rayon d'un parallèle quelconque.

Si l'on veut prolonger le développement au-dessus et au-dessous des deux parallèles l_1 et l_2, le pôle sera représenté par un arc de cercle dont le rayon sera

$$\rho^2_{90} = \rho_1^2 - 2a^2k(1 - \sin l_1),$$

et l'équateur aura pour rayon

$$\rho^2_0 = 2a^2k \sin l_1 + \rho_1^2.$$

Dans cette projection la déformation n'est pas très-considérable lorsqu'on ne s'éloigne pas trop des deux parallèles qui conservent leur grandeur exacte, et par conséquent lorsque la différence des latitudes de ces deux parallèles est elle-même peu considérable; dans les 5 degrés de latitude voisins de chacun d'eux, l'erreur sur les degrés de longitude ne s'élève pas à plus de $\frac{1}{1000}$. Les distances se mesurent directement avec une approximation souvent suffisante, à l'aide d'une échelle divisée en parties égales, tant que la carte ne comprend pas plus de 20 degrés de latitude. Les distances, dans la zone centrale, sont augmentées du nord au sud et diminuées de l'est à l'ouest, et l'erreur la plus grande est sur les parallèles du milieu; dans les zones extrêmes, au contraire, les distances du nord au sud sont diminuées et celles de l'est à l'ouest augmentées, et cela d'autant plus que les deux parallèles donnés sont plus éloignés. Les erreurs sont indépendantes de l'étendue en longitude, ce qui rend la projection d'Albers très-convenable pour un pays tel que la Russie, qui a une très-grande étendue en longitude. Enfin les erreurs d'angles et de distances diminuent à mesure que la différence des latitudes des parallèles extrêmes décroît, et pour une zone ne dépassant pas 10° ces erreurs peuvent être négligées.

Le système d'Albers fut adopté pour la carte générale de l'Europe construite à Nuremberg en 1817 par *Reichard*.

La projection n° XV donne le développement de l'hémisphère nord avec la conservation des parallèles de 30 degrés et de 60 de latitude.

17. Si l'on veut une projection où les méridiens et les parallèles soient des droites se coupant à angles droits et où les degrés d'un parallèle donné conservent leur véritable rapport avec les degrés de latitude, on imaginera un cylindre non plus tangent à la sphère comme dans la projection isocylindrique de Lambert, mais construit sur le parallèle donné, en partie intérieur et en partie extérieur à la sphère; de cette manière l'étendue en longitude se trouvera exacte vers le milieu, mais l'erreur sera partagée entre les deux extrémités.

Si nous appelons h la distance d'un parallèle de latitude $l = l_0 + \delta$ au parallèle de latitude l_0 qui est supposé servir de base au cylindre et se développer en vraie longueur, on aura, en égalant les surfaces correspondantes de la sphère et du cylindre,

$$2\pi a^2[\sin(l_0 + \delta) - \sin l_0] = 2\pi a h \cos l_0,$$

d'où l'on tire

$$h = \frac{2a \sin \frac{\delta}{2} \cos\left(l_0 + \frac{\delta}{2}\right)}{\cos l_0}.$$

Nous reviendrons plus loin sur les projections cylindriques et nous montrerons que le cylindre peut être pris non-seulement perpendiculaire à l'équateur, mais encore oblique et tangent le long d'un grand cercle quelconque considéré comme l'équateur artificiel d'une zone étroite et oblique que l'on aurait à représenter.

La projection n° XII donne le développement du cylindre sécant le long du parallèle de 45°.

18. Il nous reste à parler d'une autre projection imaginée en 1805 par le savant professeur *C.-B. Mollweide*, de Halle (1), et dont on a fait depuis 1857 de nombreuses applications sous le nom de *projection homalographique de M. Babinet.* Le professeur *Schmidt*, de Giessen, en 1803, et bien avant lui le P. *Fournier* (2) en 1643, avaient proposé « pour tracer une carte la mieux proportionnée « qu'on puisse, » sur le plan d'un méridien, de représenter les mé-

(1) MOLLWEIDE, *Ueber die vom Prof.* SCHMIDT *in Giessen in der zweyten Abtheilung seines Handbuchs der naturlehre S. 595 Angegebene «Projection der Halbkugelfläche» (hierzu ein Kupfer, eine geometrische Figur enthaltend)* dans la *Monatliche Correspondenz* de ZACH, cahier d'août 1805, p. 152 à 163.

(2) *Hydrographie, composée par le Père* G. FOURNIER, *de la compagnie de Jésus.* Paris, 1643, 2e édit., 1667 in-fol.; liv. XIV, Des Cartes, p. 524.

ridiens équidistants par des ellipses équidistantes; quant aux parallèles, le P. Fournier les traçait soit en arcs de cercle passant à la fois par les divisions respectivement égales des méridiens extrêmes et du méridien moyen (1), soit en lignes droites menées par les divisions homologues des méridiens extrêmes. Le professeur Schmidt recommandait de diviser les méridiens elliptiques en parties égales avec le compas, pour déterminer chaque parallèle par points. Si l'on obtenait ainsi l'égalité des zones elliptiques et des fuseaux correspondants de la sphère, il n'en était plus de même pour les zones limitées par des parallèles, et ainsi l'égalité des surfaces n'était pas conservée; ce fut Mollweide qui eut le mérite de trouver la loi de l'espacement des droites destinées à représenter les parallèles de manière à satisfaire à cette condition.

Si l'on décrit (fig. 20) un cercle ABDE avec un rayon égal à $\sqrt{2}$, la surface de ce cercle sera égale à la moitié de la surface de la sphère; si ensuite on partage le diamètre AC en parties égales AI, IF, FG, GC, et que l'on trace des demi-ellipses telles que BFE ayant pour demi-axes BC et FC, en vertu de ce théorème que l'aire d'une ellipse est à l'aire décrite sur son grand axe dans le rapport du petit axe au grand axe, la surface du cercle ABDE sera partagée en autant de parties égales que le rayon AC, et chacune d'elles sera égale à la surface du fuseau correspondant de la sphère. Si l'on mène une corde HK on voit aussi que chaque segment limité par deux arcs elliptiques et par une partie de la corde HK, est au segment de cercle HBK dans le rapport de la partie MN de corde renfermée entre les arcs elliptiques, à la corde entière, et par conséquent dans le rapport de IF à AD, ce qui montre bien la possibilité de représenter les parallèles de la projection par des droites parallèles à l'équateur et qui seront, par conséquent, divisées comme lui en parties égales.

Il reste maintenant à rendre les parties du cercle ABDE comprises entre les cordes parallèles et le diamètre AD égales aux zones correspondantes de l'hémisphère.

Soit l'angle

$$\text{ACH} = \varphi; \quad \text{HL} = \sqrt{2}\cos\varphi; \quad \text{LC} = \sqrt{2}\sin\varphi.$$

Donc

$$\text{aire AHKD} = \text{triangle HCK} + 2\,\text{secteurs AHC} = 2\sin\varphi\cos\varphi + \sqrt{2}\varphi\sqrt{2} = \sin 2\varphi + 2\varphi.$$

(1) *Voir* 2e part., chap. XIV, 2°, Projection globulaire.

Soit μ la latitude du parallèle HK de la sphère; la zone sphérique comprise entre l'équateur et ce parallèle est égale à $\pi \sin \mu$; on aura donc pour déterminer φ l'équation

$$\sin 2\varphi + 2\varphi = \pi \sin \mu.$$

Mollweide est encore parvenu à la même équation en partant de l'équation différentielle qui exprime la condition de conservation des surfaces et faisant intervenir l'hypothèse des méridiens elliptiques.

Nous avons trouvé (§ 1) que, dans l'hypothèse de la terre sphérique, l'équation était

$$\frac{dy}{dl}\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt}\frac{dx}{dl} = \cos l.$$

Étudions la variation des coordonnées le long d'un méridien elliptique. L'équation des méridiens ayant pour axes $\sqrt{2}$ et $\frac{2t\sqrt{2}}{\pi}$ est

$$\frac{\pi^2 x^2}{8t^2} + \frac{y^2}{2} = 1, \quad \text{d'où} \quad x^2 = (2 - y^2)\frac{4t^2}{\pi^2}.$$

En considérant ces deux équations simultanément, on obtient immédiatement, pour déterminer y, l'équation

$$\frac{2}{\pi}\frac{dy}{dl}\sqrt{2 - y^2} = \cos l,$$

dans laquelle y n'est différentié que par rapport à l. En intégrant on a

$$y\sqrt{2 - y^2} + 2 \arcsin \frac{y}{\sqrt{2}} = \pi \sin l + A.$$

Comme, en vertu des conditions du problème, y et l disparaissent simultanément, il faut aussi que $A = 0$, et l'on a

$$y\sqrt{2 - y^2} + 2 \arcsin \frac{y}{\sqrt{2}} = \pi \sin l,$$

équation dans laquelle on devra évidemment prendre le plus petit de tous les arcs ayant pour sinus $\frac{y}{\sqrt{2}}$. Comme y ne dépend que de l, on en conclut que tous les points qui ont la même latitude sont situés sur une corde parallèle à l'axe des x.

Si l'on pose comme tout à l'heure

$$y = \sqrt{2} \sin \varphi,$$

l'équation se transforme en

$$\sin 2\varphi + 2\varphi = \pi \sin l$$

que nous avons déjà trouvée.

Cette équation est insoluble si l'on y regarde φ comme l'inconnue, mais on peut tourner la difficulté en la résolvant par rapport à l, et attribuant à φ des valeurs arbitraires ; il faudra pour cela la mettre sous la forme

$$\pi \sin l = 2\varphi \frac{180^\circ}{\pi} + \sin' 2\varphi.$$

On pourra ainsi construire une table renfermant en regard des valeurs de φ les valeurs de l correspondantes, et s'en servir de la même manière que d'une table de logarithmes pour trouver par interpolation les valeurs de φ qui correspondent à une valeur quelconque de l.

Mollweide a dressé ainsi une table qui permet de construire les parallèles de 10° en 10°, et M. Jules Bourdin a fait les mêmes calculs de 30′ en 30′. C'est cette dernière table que nous donnons plus loin (1). Elle nous a servi à construire le canevas de la projection n° XVI.

Nous ne nous sommes étendu si longuement sur les deux méthodes données par Mollweide que pour montrer qu'il est bien l'auteur de ce système appliqué seulement cinquante ans plus tard sous le patronage d'un nom plus populaire. Disons encore que le professeur allemand proposait d'adopter cette projection pour représenter, comme nous l'avons fait dans le planisphère n° XVI, la surface entière de la terre dans une ellipse dont l'un des axes est double de l'autre.

Mentionnons encore, avant de terminer le chapitre des projections équivalentes, le canevas indiqué par M. le capitaine Foucaut (2) comme se rapprochant du canevas homalographique de même dimension

$$y = \sqrt{\frac{\pi}{2(\pi+2)}}\, a(l + \sin l),$$

$$x = \sqrt{\frac{2(\pi+2)}{\pi}}\, at \frac{\cos l}{1+\cos l}.$$

(1) *Voir* 2e part., ch. VIII.

(2) Voir la note de la page 81.