www.e-rara.ch

Traité des projections des cartes géographiques

Germain, Adrien Adolphe Charles

Paris, [1865]

ETH-Bibliothek Zürich

Shelf Mark: Rar 18793

Persistent Link: https://doi.org/10.3931/e-rara-74932

Chapitre IV.

www.e-rara.ch
Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien – von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material – from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d'imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L'éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes – des débuts de l'imprimerie jusqu'au 20e siècle.

e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

Nutzungsbedingungen Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titelinformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

Terms of Use This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

Conditions d'utilisation Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

Condizioni di utilizzo Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]

Visual Library

CHAPITRE IV.

PROJECTIONS PERSPECTIVES.

1. Les projections perspectives représentent la surface d'une sphère comme la verrait un spectateur placé en un point déterminé de l'espace; la représentation de chaque point de la surface s'obtient par l'intersection du rayon visuel mené de l'œil à ce point, et d'un plan appelé *tableau*, perpendiculaire au rayon qui joint l'œil au centre; une ligne quelconque tracée sur la surface a de même pour projection perspective l'intersection du plan du tableau avec la surface conique dont cette ligne est la directrice et le point de vue le sommet.

La distance du tableau au centre du globe ne fixant que l'échelle de la carte, peut rester arbitraire; elle se détermine le plus souvent par de simples considérations de tracé graphique; mais de la position du point de vue dépendent la forme et les propriétés de la projection, de sorte que cette position varie suivant le but qu'on se propose.

Remarquons d'abord que, quand le point de vue est situé dans l'intérieur de la sphère (ce qui est le cas d'un observateur regardant la voûte céleste), c'est la surface intérieure de la sphère que l'on représente. Il en est encore de même lorsque le point de vue est sur cette surface ou à une petite distance; car, si l'on voulait représenter l'hémisphère antérieur, le rapprochement des rayons visuels dans le voisinage des tangentes extrêmes apporterait beaucoup de confusion dans le dessin et ne permettrait pas de représenter un hémisphère entier sans surcharger les bords de la carte. Mais dans le cas où l'œil est supposé à une distance du globe assez grande pour que les rayons visuels puissent être considérés comme parallèles, le même inconvénient n'existant plus, c'est la surface antérieure, celle que l'on voit réellement, qui doit être représentée.

L'une des principales propriétés de toute projection perspective, c'est que tout grand cercle passant par l'axe optique a pour projec-

tion un diamètre du cercle qui limite le tableau; les autres cercles ont pour perspectives des courbes du second degré, puisque ce sont les sections planes de cônes ayant tous des cercles pour directrices.

Nous allons nous occuper de tracer le canevas, c'est-à-dire les méridiens et les parallèles d'une projection perspective. Cherchons d'abord les formules qui permettent de calculer les coordonnées d'un point défini par sa latitude et sa longitude.

2. Nous supposerons, dans tout ce qui va suivre, que le plan de projection coïncide avec l'un des grands cercles de la sphère; dans le cas où il n'en serait pas ainsi, il suffirait, pour passer de ce plan fictif au plan réel auquel il est parallèle, de réduire toutes les lignes de la figure dans le rapport de la distance du point de vue au centre de la sphère, à la distance du point de vue au plan de projection. Enfin nous supposerons dans tout ce qui va suivre la terre sphérique, nous réservant d'indiquer, dans chaque système en particulier, la correction à faire pour tenir compte de l'aplatissement.

Le grand cercle de la sphère pris pour plan du tableau pourra être considéré comme l'horizon d'un lieu dont la latitude λ serait le complément de son inclinaison sur l'équateur ou de la distance du pôle à l'extrémité du diamètre passant par le point de vue.

Prenons pour plan de la figure celui du méridien PzH'z'H' qui contient le point de vue V et est, par conséquent, perpendiculaire au plan du tableau HTH'; nous supposerons les longitudes t comptées à partir de ce méridien, ce qui revient à ne considérer que les différences des longitudes de ce méridien et de tous ceux que l'on aura à construire sur la carte.

Prenons dans le plan du tableau deux axes de coordonnées, dont l'un sera l'intersection du méridien principal et du grand cercle de projection et dont l'autre passant par le centre C sera perpendiculaire au premier (fig. 21).

Appelons D la distance donnée CV du centre de la sphère au point de vue V, a le rayon de la sphère, x l'abscisse Cn, y l'ordonnée nm, δ la distance angulaire Mz, $90° - \lambda$ l'angle ZCP qui définit la position du tableau, $90° - l$ la distance polaire du point considéré M, t sa longitude ZPM, φ l'angle au zénith, MZP. Menons dans le plan ZCVM, MK parallèle à Cm et, par conséquent, perpendiculaire à CZ; les deux triangles semblables MKV, mCV donneront

$$\frac{Cm}{MK} = \frac{CV}{KV}.$$

Or

$$MK = a\sin\delta; \qquad KV = D + a\cos\delta,$$

donc

$$Cm = \frac{Da\sin\delta}{D + a\cos\delta}.$$

Le triangle Cmn donne

$$x = -Cm\cos\varphi; \qquad y = Cm\sin\varphi$$

Donc

$$x = -\frac{Da\sin\delta\cos\varphi}{D + a\cos\delta}; \qquad y = \frac{Da\sin\delta\sin\varphi}{D + a\cos\delta}.$$

Les coordonnées du point m se trouvent ainsi exprimées en fonction de φ et de δ; cherchons donc à exprimer φ et δ en fonction de la latitude l et de la longitude t.

Dans le triangle sphérique PzM, on a

$$\sin\delta\sin\varphi = \cos l\sin t$$

$$\sin\delta\cos\varphi = \frac{\sin l - \sin\lambda\cos\delta}{\cos\lambda}$$

$$\cos\delta = \sin\lambda\sin l + \cos\lambda\cos l\cos t,$$

d'où

$$\sin\delta\cos\varphi = \cos\lambda\sin l - \sin\lambda\cos l\cos t.$$

Substituons dans les valeurs de x et y; nous obtiendrons

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{Da(\sin\lambda\cos l\cos t - \cos\lambda\sin l)}{D + a(\cos\lambda\cos l\cos t + \sin\lambda\sin l)} \\ y &= \frac{Da\cos l\sin t}{D + a(\cos\lambda\cos l\cos t + \sin\lambda\sin l)} \end{aligned}\right\} \quad (I).$$

Telles sont les deux équations qui déterminent les coordonnées de la projection d'un point de la sphère défini par sa latitude et sa longitude.

Ces formules générales se modifient dans deux cas particuliers.

Si l'on suppose l'œil placé sur le prolongement de l'axe de la terre, le plan de projection coïncide avec l'équateur et la projection est dite *équatoriale* ou *polaire*. Nous obtiendrons alors les valeurs de x et de y en faisant $\lambda = 90°$ dans les formules (I) :

$$x = \frac{Da\cos l\cos t}{D + a\sin\lambda\sin l}; \qquad y = \frac{Da\cos l\sin t}{D + a\sin\lambda\sin l}.$$

Le pôle de l'hémisphère opposé au point de vue occupe alors le centre de la projection.

Si l'on suppose l'œil placé dans le plan de l'équateur, le plan de projection coïncide avec un méridien et la projection est dite *méridienne*. Nous obtiendrons alors les valeurs de x et de y en faisant $\lambda = 0$ dans les formules (I),

$$x = -\frac{Da\sin l}{D + a\cos l\cos t}; \qquad y = \frac{Da\cos l\sin t}{D + a\cos l\cos t}.$$

3. Revenons aux formules générales de la projection horizontale.

Pour obtenir autant de points que l'on voudra de l'équateur, on fera $l = 0$, et dans les formules résultantes

$$x = \frac{D\sin\lambda\cos t}{D + a\cos\lambda\cos t}, \qquad y = \frac{D\sin t}{D + a\cos\lambda\cos t},$$

on donnera successivement à t les valeurs 0°, 5°, 10°, 15°, etc.....

On obtiendra de même les intersections d'un parallèle de latitude donnée l avec les méridiens en donnant à t les valeurs 0°, 5°, 10°, 15°....., dans les formules générales où l conservera la valeur donnée. En opérant de même pour autant de valeurs de l que l'on voudra, puis réunissant par des courbes continues les points de même latitude, puis ceux de même longitude, on obtiendra les parallèles et les méridiens de la projection.

Comme ces courbes sont toutes du second degré, il est souvent plus commode et plus rapide de les tracer directement. Cherchons leurs équations.

Pour obtenir l'équation des méridiens, éliminons la latitude l entre les équations (I); cette élimination nous donnera l'équation d'une ellipse que nous pourrons construire.

Nous avons d'abord

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin t}{\sin\lambda\cos t - \cos\lambda\,\mathrm{tang}\,l},$$

d'où

$$\mathrm{tang}\,l = \frac{y\sin\lambda\cos t - x\sin t}{y\cos\lambda};$$

substituons à tang l cette valeur dans l'expression de y, nous obtiendrons

$$\left.\begin{aligned} &y^2(D^2 - D^2\sin^2\lambda\,.\,\sin^2 t - a^2\cos^2 t) + xy(a^2 - D^2)\sin\lambda\,\sin 2t \\ &+ x^2(D^2 - a^2\sin^2\lambda)\sin^2 t + Da^2 y\cos\lambda\sin 2t - a^2 Dx\sin 2\lambda\sin^2 t \\ &\qquad - a^2D^2\cos^2\lambda\sin^2 t = 0 \end{aligned}\right\} \text{(II)}.$$

Telle est l'équation la plus générale des méridiens. Il est facile de déterminer les deux axes 2A et 2B de cette ellipse ainsi que les coordonnées α et 6 du centre, respectivement parallèles à l'axe des x et des y. On obtient

$$A = \frac{aD}{\sqrt{D^2 - a^2(1 - \cos^2\lambda \sin^2 t)}}; \qquad B = \frac{aD^2 \cos\lambda \sin t}{D^2 - a^2(1 - \cos^2\lambda \sin^2 t)},$$

$$\alpha = \frac{Da^2 \sin 2\lambda \sin^2 t}{2[D^2 - a^2(1 - \cos^2\lambda \sin^2 t)]}; \qquad \beta = \frac{-Da^2 \cos\lambda \sin 2t}{2[D^2 - a^2(1 - \cos^2\lambda \sin^2 t)]},$$

et l'on trouve enfin, pour déterminer l'angle ω que fait le grand axe 2A avec l'axe des x, la formule

$$\operatorname{tang} 2\omega = \frac{\sin\lambda \sin 2t}{\cos^2 t - \sin^2\lambda \sin^2 t}$$

ou

$$\operatorname{tang}\omega = \sin\lambda \operatorname{tang} t.$$

Si l'on veut obtenir la courbe qui passe par les centres de toutes ces ellipses, il faut éliminer t entre les valeurs de α et de β :

$$\frac{\alpha}{\beta} = -\sin\lambda \operatorname{tang} t, \text{ d'où } \operatorname{tang} t = -\frac{\alpha}{\beta \sin\lambda}$$

ou

$$\sin^2 t = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2 \sin^2\lambda}.$$

En substituant à $\sin^2 t$ cette valeur dans l'expression de α, on obtiendra

$$\beta^2(D^2 - a^2)\sin^2\lambda + \alpha^2(D^2 - a^2\sin^2\lambda) - \alpha D a^2 \sin\lambda \cos\lambda = 0,$$

équation qui représente généralement une ellipse dont α et β sont les coordonnées rectangulaires et qui passe par le centre C de ces coordonnées.

Les coordonnées (α) et (β) du centre de cette courbe sont

$$(\alpha) = \frac{a^2 D \sin\lambda \cos\lambda}{2(D^2 - a^2\sin^2\lambda)}; \qquad (\beta) = 0;$$

ses demi-axes

$$(A) = \frac{a^2 D \sin\lambda \cos\lambda}{2(D^2 - a^2\sin^2\lambda)}; \qquad (B) = \frac{a^2 D \cos\lambda}{2\sqrt{(D^2 - a^2)(D^2 - a^2\sin^2\lambda)}}.$$

Le grand axe coïncide avec l'axe des x, l'angle (ω) est donc nul.

Cherchons maintenant l'équation des parallèles de la projection ; il suffira pour l'obtenir d'éliminer la longitude t entre les équations (I). Voici la suite des calculs :

$$\cos t = \frac{Dx + aD\cos\lambda\sin l + ax\sin\lambda\sin l}{aD\sin\lambda\cos l - ax\cos\lambda\cos l};$$

$$\frac{y}{x}\sin\lambda\cos l\cos t - \frac{y}{x}\cos\lambda\sin l = \cos l\sin t;$$

en élevant au carré

$$(y^2\sin^2\lambda\cos^2 l + x^2\cos^2 l)\cos^2 t - 2y^2\cos\lambda\sin\lambda\sin l\cos l\cos t - x^2\cos^2 l + y^2\cos^2\lambda\sin^2 l = 0.$$

En substituant dans cette équation la valeur de $\cos t$, on obtient, après réduction,

$$\left.\begin{aligned} &y^2(D\sin\lambda + a\sin l)^2 + x^2[D^2 + 2aD\sin\lambda\sin l - a^2\cos(\lambda - l)\cos(\lambda + l)] \\ &+ 2aDx(D\cos\lambda\sin l + a\sin\lambda\cos\lambda) - a^2D^2\sin(\lambda - l)\sin(\lambda + l) = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{(III)}.$$

Telle est l'équation la plus générale des parallèles : elle représente une ellipse, une hyperbole ou une parabole suivant que le terme

$$D^2 + 2aD\sin\lambda\sin l - a^2\cos(\lambda - l)\cos(\lambda + l)$$

est plus grand que zéro, plus petit que zéro, ou nul.

En appelant A′, B′ les demi-axes, α', β' les coordonnées du centre, on obtient

$$A' = \frac{aD\cos l(D\sin\lambda + a\sin l)}{D^2 + 2aD\sin\lambda\sin l + a^2\sin^2 l - a^2\cos^2\lambda};$$

$$B' = \frac{aD\cos l}{\sqrt{D^2 + 2aD\sin\lambda\sin l + a^2\sin^2 l - a^2\cos^2\lambda}};$$

$$\alpha' = -\frac{aD\cos\lambda(D\sin l + a\sin\lambda)}{D^2 + 2aD\sin\lambda\sin l + a^2\sin^2 l - a^2\cos\lambda};$$

$$\beta' = 0.$$

Comme le grand axe coïncide avec l'axe des x, l'angle ω' est nul ; ainsi les centres de toutes les projections des parallèles sont sur l'axe des x.

On obtiendra l'équation de la projection de l'équateur en faisant $l = 0$ dans l'équation (III), ce qui donnera

$$D^2y^2\sin^2\lambda + x^2(D^2 - a^2\cos^2\lambda) + 2a^2Dx\sin\lambda\cos\lambda - a^2D^2\sin^2\lambda = 0,$$

équation d'une ellipse dont les axes 2A″, 2B″ seront donnés par les formules

$$A'' = \frac{aD^2 \sin\lambda}{D^2 - a^2\cos^2\lambda}; \qquad B'' = \frac{aD}{\sqrt{D^2 - a^2\cos^2\lambda}},$$

et dont les coordonnées du centre seront

$$\alpha'' = -\frac{a^2 D \sin\lambda \cos\lambda}{D^2 - a^2\cos^2\lambda}; \qquad \beta'' = 0,$$

Pour avoir la distance de la projection p du pôle au centre de la carte, il suffira de faire $l = \pm 90°$ dans l'expression de α' et l'on obtiendra pour les deux pôles

$$p = -\frac{aD\cos\lambda}{D + a\sin\lambda}; \qquad p' = \frac{aD\cos\lambda}{D - a\sin\lambda}.$$

Les projections de ces deux points seront évidemment sur l'axe des x.

4. Dans le cas où l'équateur est pris pour plan de projection, les parallèles de la carte sont des cercles dont le rayon est égal à

$$\rho_p = \frac{Da\cos l}{D + a\sin l}.$$

On obtient cette formule en faisant $\lambda = 90°$ dans l'expression de A′.

Les méridiens sont des droites passant toutes par la projection du pôle et faisant entre elles les mêmes angles que les méridiens de la sphère ; c'est ce que montre l'équation (II) qui, dans l'hypothèse de $\lambda = 90$, devient

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tang} t.$$

La projection équatoriale est donc très-facile à construire sans le secours des coordonnées. Remarquons que dans ce cas, lorsque $D > a$, c'est-à-dire lorsque le point de vue est en dehors de la sphère, la projection peut être étendue au delà de l'équateur jusqu'au parallèle passant par le point où la tangente menée du point de vue touche le méridien PEP′E′ ; ce parallèle a une latitude l' donnée par la relation

$$\operatorname{tang} l' = \frac{a}{\sqrt{D^2 - a^2}},$$

et sa projection a pour rayon

$$\rho'_p = \frac{Da\cos l'}{D - a\sin l'}.$$

La figure 22 montre de suite les constructions à effectuer dans le cas de la projection équatoriale ou polaire. Sur le cercle de projection préalablement divisé en degrés, on comptera à partir du même point E les latitudes et les longitudes, et sur la ligne des pôles PP′ on portera CV égale à la distance D du point de vue : en joignant ce point V à chaque extrémité N des parallèles à construire, on aura de suite en n l'extrémité de la projection située sur le diamètre EE′, et l'on n'aura plus qu'à décrire du point C un cercle avec Cn pour rayon. Les méridiens seront les diamètres du cercle de projection.

5. Lorsque la projection est méridienne, c'est-à-dire faite sur le plan du méridien perpendiculaire à celui à partir duquel on compte les longitudes, quelques considérations graphiques permettent d'en simplifier aussi la construction.

Reprenons d'abord les formules que nous avons trouvées au § 2 :

$$x = -\frac{Da\sin l}{D + a\cos l\cos t}; \qquad y = \frac{Da\cos l\sin t}{D + a\cos l\cos t};$$

on en déduit

$$x = -\frac{y\,\mathrm{tang}\,l}{\sin t}.$$

Remarquons d'abord que pour les latitudes négatives les valeurs de x changent seules de signe, les valeurs de y restent les mêmes ; c'est l'inverse qui a lieu pour les longitudes négatives. Ce résultat pouvait être prévu, car la figure 23 est évidemment symétrique par rapport aux axes PP′ et RR′.

Les coordonnées x *et* y se construisent de la manière suivante :

Représentons le plan de projection par un cercle de rayon égal à a (fig. 24) ; menons deux diamètres PP′, RR′, dont l'un représente le premier méridien et dont l'autre figure l'équateur. Prolongeons PP′ et portons CV égale à la distance donnée D. Portons à partir de R sur la circonférence PRP′R′ supposée graduée, l'arc RM égal au complément $90° - t$ de la longitude donnée et joignons MV. Portons ensuite MA $= l$ et abaissons la perpendiculaire AY sur le rayon CM ; enfin, joignons VY; la distance Cy représentera l'ordonnée y. Joignons maintenant le point V au point A, et menons par y une parallèle $y\alpha$

à YA ; la distance ay représentera l'abscisse x. Pour obtenir la projection du point considéré nous n'aurons plus qu'à porter cette longueur ay sur une ligne ay perpendiculaire au rayon CR, le point a sera la projection cherchée.

En répétant cette construction pour plusieurs valeurs de l et de t, on pourra tracer les méridiens en réunissant les points qui ont même longitude, et les parallèles en joignant les points qui ont même latitude. Il est d'ailleurs facile de construire ces courbes par de simples considérations géométriques et sans recourir au calcul des coordonnées.

Le petit axe d'un parallèle quelconque s'obtiendra immédiatement en portant, à partir des extrémités du diamètre EE′ qui représente l'équateur, la latitude de ce parallèle de E en N et de E′ en N′, et en joignant ces deux points au point de vue V supposé rabattu sur le plan de projection; le milieu de nn' sera le centre de la courbe, et comme NN′ sera l'une de ses cordes, il sera facile de la construire par points. Cette courbe sera une ellipse, une hyperbole ou une parabole, suivant que le plan de projection coupera l'une seulement des nappes du cône perspectif, ou les deux nappes, ou sera parallèle à l'une des génératrices; c'est ce que la figure montrera immédiatement.

Pour tracer les méridiens on portera sur la circonférence de la carte (fig. 25), à partir de P d'un côté et de P′ de l'autre, la longitude du méridien considéré; en joignant ces points M, M′ au point de vue supposé rabattu sur la ligne des pôles, on obtiendra en m, m' l'un des deux axes de l'ellipse; comme PP′ est une corde commune, on construira facilement la courbe par points.

On peut encore obtenir de la manière suivante la projection d'un point donné par sa latitude et sa longitude.

Supposons (fig. 26) le plan du parallèle de latitude l rabattu sur le plan du premier méridien PEP′E′ en N′MN ; menons OM faisant avec PP′ un angle COM égal au complément de la longitude donnée, et abaissons la perpendiculaire Mμ sur NN′; cherchons la perspective de μM. Celle de μ s'obtient en μ_1, celle de M en M_1 ; $\mu_1 M_1$ est donc la longueur de la perspective de la demi-corde μM, et comme cette corde est parallèle au plan de projection et perpendiculaire au premier méridien, sa projection doit être perpendiculaire à PP′. Si donc nous supposons maintenant que le plan EPE′P′ représente le plan de projection, il suffira, pour avoir la projection de M, d'élever en μ, de part

et d'autre de PP', une perpendiculaire $\mu_1 m$ ou $\mu_1 m'$ égale à $\mu_1 M_1$; on obtiendra ainsi les projections des points qui ont pour latitude l et pour longitude, l'un t et l'autre $180° - t$.

Si l'on détermine ainsi pour chaque parallèle les points de même longitude, il suffira, pour tracer les méridiens, de faire passer par ces points des courbes continues.

6. Revenons maintenant au cas général de la projection horizontale où le plan de projection est un grand cercle quelconque de la sphère; nous allons montrer comment on peut obtenir graphiquement la projection d'un point quelconque sans recourir aux formules et aux calculs.

Soit AA (fig. 27) la ligne des pôles de la projection : sur le diamètre perpendiculaire CV on placera le point de vue à la distance donnée D; en tirant le diamètre PP' faisant avec AA' un angle égal à la latitude du lieu sur l'horizon duquel on veut tracer la projection, et joignant PV, P'V, on aura en p et p' les pôles de la carte, dont l'un sortira du cercle de projection. Les parallèles s'obtiendront en considérant d'abord, comme nous l'avons fait pour la projection méridienne, les traces de tous les parallèles de la sphère sur un plan perpendiculaire au plan de projection, c'est-à-dire sur le premier méridien qui passe par le point de vue, puis revenant de cette figure à celle de la projection par une simple rotation. On détermine ainsi de suite l'un des axes nn' de la courbe cherchée. Il est ensuite facile d'avoir la projection d'un point quelconque de ce parallèle correspondant à une longitude donnée t.

Supposons le parallèle rabattu sur le méridien de départ en N'MN; le point dont la longitude est t viendra en un point M tel que l'angle COM est égal au complément de l'angle t, soit $90° - t$. Abaissons la perpendiculaire Mμ sur NN'; cette perpendiculaire Mμ est en réalité parallèle au plan de projection dont la trace est ACA'; pour avoir sa perspective, nous joindrons d'abord μ et V, puis nous mènerons μM_1 égal à μM et parallèle à AA' et nous joindrons M_1 et V; $\mu_1 m_1$ sera la longueur de la perspective de μM; d'ailleurs μM étant, dans l'espace, perpendiculaire au plan ABA'B', sa perspective sera perpendiculaire à AA'; il suffira donc d'élever, en μ_1, $\mu_1 m$ perpendiculaire à AA' et égal à $\mu_1 m_1$; le point m sera la projection du point M dont la longitude est t et la latitude l.

Lorsque le parallèle rencontre l'axe AA', on a immédiatement deux points T,T' de sa projection en élevant TDT' perpendiculaire à

AA′ au point d'intersection ; car, si nous supposons d'abord que PE′P′E représente le premier méridien, le parallèle et le tableau étant tous deux perpendiculaires à ce plan, leur intersection sera perpendiculaire à AA′. Pour que ce cas se présente, il faut que la latitude du parallèle considéré soit moindre que le complément de la latitude du lieu sur l'horizon duquel on construit.

On voit de suite que la figure doit être symétrique par rapport à la ligne des pôles AA′ ; l'équateur passera par les trois points B, *e*, B′ ; *ee′* sera son petit axe.

Le parallèle qui, prolongé, passerait par le point de vue, sera seul représenté par une droite perpendiculaire à AA′ ; au delà les parallèles tourneront leur concavité en sens contraire.

Lorsqu'on aura déterminé, pour des latitudes suffisamment rapprochées, les lieux de même longitude, il suffira de les réunir par un trait continu pour tracer les méridiens qui devront être des ellipses.

7. Occupons-nous maintenant de déterminer la distance des deux points donnés par leurs projections.

Considérons d'abord le cas où l'un des deux points est au centre de la carte. En joignant ce point au second, on aura la perspective de la plus courte distance, puisque tout grand cercle qui passe par l'axe optique a pour projection perspective une ligne droite. Ainsi (fig. 28) C*a* est la perspective de la plus courte distance de C′ en A ; pour savoir ce qu'elle contient de degrés, on portera C*a* de C en α et l'on mènera la droite VαA ; le nombre de degrés contenus dans l'arc C′A sera celui qu'il s'agissait de trouver, parce que Cα est la projection de l'arc de grand cercle C′A.

On voit donc que l'échelle des plus courtes distances du centre de la carte à tous les autres points doit présenter une graduation semblable à celle que l'on effectue sur l'équateur des mappemondes construites sur le plan d'un méridien.

Arrivons maintenant au cas général. Soit d'abord MRN le plan de projection (fig. 29), V le point de vue, *a* et *b* les deux points donnés, projections des points A et B de la sphère. Si nous déterminons la longueur de la corde AB, il suffira de la porter sur la circonférence de la carte préalablement divisée en degrés et fractions de degrés pour lire l'arc sous-tendu et évaluer la distance soit en milles, soit en lieues ou en kilomètres. Nous allons donc chercher à construire sur la carte (fig. 30) le triangle AVB. Soient *a* et *b* les deux points donnés, MN un diamètre d'ailleurs quelconque que l'on pourra

prendre, pour simplifier, passant par l'un des deux points. Construisons les triangles rectangles aGV, bGV de la figure 29, en décrivant du centre C les arcs $a\alpha$, $b\beta$, portant sur une perpendiculaire au diamètre MN la longueur GV égale à la distance connue du point de vue au centre de la sphère, et joignant ce point V à α et à β. Si nous prolongeons ces droites Vα, Vβ jusqu'à la rencontre de la circonférence de la carte, les droites VA_1, VB_1 seront évidemment égales aux rayons visuels AV, BV de la figure 29. Nous pouvons alors construire le triangle abV de la figure 29 en décrivant de a et b avec des longueurs respectivement égales à αV et βV des arcs de cercle qui se composent en V_1; en prolongeant aV_1 d'une longueur Aa égale à $A_1\alpha$ et bV_1 d'une longueur bB égale à βB_1, on aura formé en ABV_1 le triangle AVB de l'espace; la droite AB sera la corde de l'arc qui mesurera la distance des deux points considérés.

Dans le cas de la projection méridienne on peut évaluer la distance de deux points d'une manière très-rapide et assez exacte lorsque les méridiens et les parallèles de la carte sont suffisamment rapprochés. Remarquons d'abord que si les deux points sont sur un même méridien, il suffit de lire sur la circonférence qui limite la carte la différence de graduation de leurs deux parallèles. S'il n'en est pas ainsi, on peut remplacer les deux points par deux autres semblablement placés par rapport au centre de la carte et se trouvant sur un même méridien; il suffit pour cela de découper un petit triangle de papier abC (fig. 31) et de le faire tourner autour du sommet C jusqu'à ce que les deux autres sommets se trouvent sur un autre méridien; ces deux nouveaux points étant évidemment à la même distance que les deux premiers, on n'aura plus qu'à lire la différence des latitudes de leurs deux parallèles. Au lieu du petit triangle de papier, on pourrait se servir d'un compas à trois branches que l'on ferait tourner autour de la pointe qui resterait en C.

8. Les formules et les constructions étant générales, on pourra supposer le point de vue à la distance que l'on voudra du centre de la sphère. Si ces deux points coïncident, la projection est dite *centrale* ou *gnomonique;* on suppose alors le plan de projection reculé jusqu'à la surface de la sphère à laquelle il devient tangent; tout grand cercle est représenté par une droite passant par le centre de la carte qui est le point de tangence du plan de projection et de la sphère. L'origine de cette projection, la plus ancienne que l'on connaisse, semble remonter au delà du Milésien *Thalès*, le prédicteur

d'éclipses, mort 548 ans avant notre ère. Appelé successivement des noms d'*horoscope* et d'*analemme*, elle fut aussi beaucoup employée par l'astronomie sous le nom de *gnomonique* pour esquisser la trace des phénomènes célestes à la surface de la terre, le baron de *Prony* proposa, en 1791, de s'en servir pour les cartes du cadastre. En 1803, Ch. T. *Reichard* fit paraître à Weimar un atlas de six cartes représentant le globe tout entier en projection centrale; ce sont les six faces d'un cube circonscrit à la sphère; il est évident en effet que les arcs terrestres étant représentés sur le plan de projection par leurs tangentes, l'arc de 90° excède toutes les limites possibles de ce plan, et que la projection du cercle entier exige au moins trois plans sur chacun desquels l'arc à projeter par sa tangente sera en moyenne de 60° de chaque côté du point de contact. Pour que ces trois plans se rencontrent sur la sphère dans tous ses aspects, il faut recourir au moins au tétraèdre, le plus simple de tous les solides terminés par des faces planes. Guidé par d'autres vues, *M. Élie de Beaumont* (1) a reconnu des avantages particuliers au choix des faces pentagonales d'un dodécaèdre régulier, et a publié comme spécimen une esquisse du pentagone européen, M. *Saint-Loup* a proposé de représenter la surface entière du globe sur les faces d'un icosaèdre régulier inscrit dans la sphère; on peut d'ailleurs employer un polyèdre quelconque, ainsi à Vienne le général *Franz* de *Hauslab* a proposé une projection centrale sur un polyèdre irrégulier de 48 faces triangulaires (2). Enfin, au chapitre des projections cylindriques, nous parlerons d'une projection centrale sur un cylindre tangent à la sphère le long d'un méridien. Nous reviendrons longuement sur ce système de représentation (3). Les projections n°s XXIV, XXV, XXVI en montrent l'application sous les trois aspects polaire, méridien et horizontal.

9. Lorsque le point de vue est sur la surface de la sphère, la projection prend le nom de *stéréographique*, et jouit de cette propriété bien remarquable que tout angle tracé sur la sphère conserve sa grandeur en projection (4), d'où il résulte que tout cercle a pour projection un autre cercle. Ce système, qui n'a reçu le nom de sté-

(1) *Notice sur les systèmes de montagnes*, Paris, 1852, 3 vol. in-18, p. 1038.
(2) Voir *Bulletin de la Société de Géologie de Paris*, janvier 1851, p. 185.
(3) *Voir* 2e part., chap. III.
(4) *Voir* ci-dessus, chap. II, § 4.

réographique qu'en 1613 du jésuite *François d'Aguillon*, fut imaginé 130 ans avant J.-C. par le célèbre *Hipparque*, qui lui donna le nom de *planisphère*, et commença à être très-employé en géographie au commencement du XVIe siècle ; il n'a cessé de l'être depuis, surtout en Allemagne, où il a dominé dans les publications d'ensemble et de détail (1) ; on l'a quelquefois désigné sous le nom d'*astrolabe de Gemma*.

Les projections nos I, II et III en montrent l'application sous les trois aspects polaire, méridien et horizontal.

10. Enfin, si le point de vue est supposé à une distance infinie, les rayons visuels peuvent être regardés comme parallèles, la perspective devient une véritable projection orthogonale et prend le nom d'*orthographique ;* il en résulte que tout cercle parallèle au plan de projection a pour représentation un cercle égal. Imaginé comme le précédent par Hipparque, ce système, appelé primitivement *analemme*, puis *astrolabe de Rojas* (1551), est resté exclusivement renfermé dans le domaine de l'astronomie jusqu'à l'atlas sphéroïdal de *Laguillermie* publié en 1843, et à l'atlas sphéroïdal et universel de *Garnier* publié en 1862. La projection n° XXVII en est une application sous l'aspect méridien.

11. Nous reviendrons en détail sur ces trois genres de projections perspectives. Disons de suite que la projection stéréographique a l'inconvénient de diminuer beaucoup les distances et par suite les surfaces situées au centre de la carte, tandis que les parties voisines des bords conservent à peu près leur véritable grandeur ; la projection orthographique, au contraire, conserve à peu près les distances au centre de la carte, mais diminue considérablement les parties voisines des bords. On conçoit donc qu'il ait dû venir à l'idée de trouver sur la perpendiculaire au plan du tableau un point de vue tel que les projections de points du globe également distants fussent elles-mêmes également espacées. Or si l'on appelle *ns* un certain nombre de divisions du méridien, *np* le même nombre de divisions correspondantes sur l'équateur et égales entre elles, on trouve

$$D = \frac{np \cos ns}{\sin ns - np}.$$

Cette valeur de D variant avec *ns*, c'est-à-dire avec *n*, prouve qu'il

(1) *Voir* plus loin, même chapitre, § 19.

n'y a pas de position pour le point de vue qui remplisse complétement le but que nous nous proposons d'atteindre.

Nous pouvons tout au moins chercher à satisfaire le mieux possible à la condition qu'on ne rencontre ni dans la projection stéréographique ni dans la projection orthographique. Reprenons l'expression générale d'un rayon de parallèle projeté, en fonction de la latitude et de la position du point de vue. Nous ayons trouvé

$$\rho_p = \frac{D a \cos l}{D + a \sin l} = \frac{a \cos l}{1 + \frac{a}{D} \sin l}.$$

Dans le cas de la projection stéréographique $D = a$

$$\rho'_p = \frac{a \cos l}{1 + \sin l} = a \operatorname{tang} \frac{90° - l}{2}.$$

Dans le cas de la projection orthographique $D = \infty$

$$\rho''_p = \frac{a \cos l}{1 + \frac{1}{\infty}} = a \cos l.$$

Dans ce dernier cas ρ varie trop peu lorsque l est voisin de 0; dans le cas précédent, la valeur du sinus qui entre au dénominateur non-seulement détruit cet inconvénient, mais encore lui substitue le défaut contraire, quoique dans une proportion moindre.

12. *La Hire*, qui s'est occupé le premier de cette question (1), a proposé de placer le point de vue de telle sorte que le rayon visuel mené au milieu de chaque quadrant de l'hémisphère opposé partage le rayon de la sphère perpendiculaire à l'axe optique en deux parties égales; l'erreur serait ainsi nulle au centre de la carte, à sa circonférence et au milieu de chaque rayon. Pour calculer la distance du centre au point de vue, on a alors l'égalité

$$\frac{\frac{a}{2}}{a \sin 45} = \frac{D}{D + a \sin 45°}.$$

(1) *Histoire de l'Académie des sciences, année MDCCI avec les mémoires de mathématiques et de physique*, Paris, 1704, in-4, p. 97 à 101 et 255 à 260; *Construction d'un nouvel astrolabe universel*, par M. DE LA HIRE, 3 décembre 1701.

d'où l'on tire facilement

$$D = a + a \sin 45°.$$

Ainsi, dans la projection de la Hire le point de vue est à une distance de la surface de l'hémisphère opposé à celui que l'on veut représenter, égale au sinus de 45° ou à la moitié du côté du carré inscrit. Si l'on cherche (fig. 32) quelle est la partie du rayon CP qui représente la projection de l'arc de 22° 30', lequel est le quart du quadrant, on trouve $0{,}248a$ au lieu de $0{,}250a$; l'erreur est donc de $\frac{2}{10000}$ du rayon, ce qui, dans une mappemonde d'un petit rayon, est peu considérable.

Dans le cas de la production sur le méridien dont la longitude est de 90°, les coordonnées d'un point défini par sa latitude et sa longitude se calculent par les formules

$$x = \frac{D \sin t \cos l}{D + a \cos t \cos l}; \qquad y = \frac{x \operatorname{tang} l}{\sin t} = x \operatorname{tang} \varphi,$$

dans lesquelles on devra remplacer D par $1{,}7071068\ a$ ou log D par $0{,}2322606 + \log a$.

Dans le cas de la projection polaire, c'est-à-dire sur l'équateur, les rayons des parallèles sont exprimés par

$$\rho_p = \frac{a \cos l}{1 + \dfrac{\sin l}{1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}}} = \frac{a \cos l}{1 + 0{,}585 \sin l},$$

ou environ

$$\rho_p = \frac{a \cos l}{1 + \frac{3}{5} \sin l}.$$

Enfin cette projection peut être faite sur l'horizon d'un lieu quelconque, et a été employée par son auteur à la construction de deux planisphères célestes sur le plan de l'écliptique.

La projection de la Hire n'a pas d'autre avantage que d'annuler les erreurs de représentation des longueurs en trois points des rayons de la circonférence de la carte. Quelques années avant la Hire divers géographes avaient cherché à obtenir la régularité de la représentation par divers expédients qui enlevaient à leurs projections le mé-

rite d'être perspectives. Le Père *Fournier* (1) proposait de représenter les méridiens par des ellipses équidistantes et les parallèles par des arcs de cercle passant à la fois par les divisions respectivement égales des méridiens extrêmes et du méridien moyen ; J. B. *Nicolosi* publiait à Rome en 1660 une série de grandes cartes suivant une projection analogue à celle du Père Fournier en traçant les méridiens en arcs de cercle comme les parallèles et les faisant passer par les divisions égales de l'équateur (2). Cette construction adoptée et préconisée en France par *Pierre du Val*, *Guillaume de l'Isle*, etc., est connue en Angleterre sous le nom de projection globulaire ou projection d'*Arrowsmith*, quoique ce dernier ne l'ait employée qu'en 1794, c'est-à-dire trente-quatre ans après son invention (3). Nous reviendrons (4) sur ce dernier système, que nous n'avons mentionné ici que parce qu'il est souvent, mais à tort, confondu avec la projection de la Hire.

13. Un an après que la Hire eut exposé son système à l'Académie, son confrère *Parent* calcula que les conditions seraient meilleures si l'éloignement de l'œil était un peu modifié (5).

Considérons l'un quelconque des grands cercles passant par le point de vue (soit l'équateur), et supposons-le divisé en parties infiniment petites égales; tirons des rayons visuels par chaque point de division, de manière à former sur le plan du tableau les perspectives de ces petits éléments. Si ces éléments projetés étaient parfaitement égaux, la somme de leurs différences serait nulle ; Parent fut ainsi porté à chercher parmi toutes les positions du point de vue celle qui donne la somme minimum de ces différences.

Soit (fig. 33) EAE′ l'équateur, PRP′ le méridien pris pour plan de projection; V le lieu de l'œil sur le diamètre CV perpendiculaire à ce

---

(1) *Hydrographie*, Paris 1647, p. 524, *voir* ci-dessus chap. III, p. 107.

(2) *Hercules siculus sive Studium geographicum, auctore J. B.* Nicolosio, *Hyblensi, sacerdote et sacræ theologiæ doctore*, Rome 1671, 2 vol. in-folio, édition latine de l'ouvrage publié en 1660 en italien.

(3) *Map of the World on a globular projection, by* A. Arrowsmith, Londres, 1er janvier 1794.

(4) *Voir* 2e partie, chap. XIV, 2°.

(5) *Histoire de l'Académie des sciences*, années MDCCII, Paris 1704, p. 70 à 72 de l'histoire ; *sur l'Astrolabe.* — *Essais et recherches de mathématiques et de physique*, par M. Parent, Paris 1713, 3 vol. in-12 ; t. II, p. 613 à 630 et 917 à 921 (additions). — *Mémoires de Trévoux*, juillet 1742, in-12, p. 1240 à 1250 : *De la situation de l'œil qui donne les représentations des parties égales de la sphère les plus égales qu'il soit possible, avec la manière de faire des mappemondes et des cartes géographiques sur ce principe, et d'y mesurer toutes sortes de distances.*

plan. Divisons le demi-cercle R'ER en parties infiniment petites égales, telles que AA' et menons des rayons visuels à tous ces points de division, nous obtiendrons leurs perspectives a, a', a''... La position du point V devra être telle que la somme de ces longueurs aa' soit la plus petite possible. Menons AX, A'X' perpendiculaires à EE', de manière à déterminer les coordonnées $AX = y$ et $CX = x$. Si nous nommons ds l'arc infiniment petit AA', et z la distance CA, XX' sera dx, et aa' sera Δz. Enfin tirons AB parallèle à VE', de manière à former le petit triangle rectangle ABA'.

Nous aurons d'abord, par les triangles semblables VaC, VAX

$$\frac{z}{y} = \frac{D}{D+x}; \qquad \text{d'où} \qquad z = \frac{D\sqrt{a^2-x^2}}{D+x}.$$

Calculons Δz en supposant la distance D constante,

$$\Delta z = \frac{a^2 + Dx}{(D+x)^2} \cdot \frac{D dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Or les triangles semblables CAX, ABA' donnent

$$\frac{AB}{AA'} = \frac{AX}{AC}; \qquad \text{d'où} \qquad dx = \frac{ds}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

Substituons cette valeur dans celle de Δz, il viendra

$$\Delta z = \frac{a^2 + Dx}{(D+x)^2} \cdot \frac{D ds}{a},$$

ou, en posant $D + x = u$

$$\Delta z = (a^2 + Du - D^2)\frac{D ds}{au^2}.$$

Or la somme des différences des éléments Δz est évidemment égale à la différence du plus grand (soit aa') au plus proche du centre C, augmentée de la différence de ce même aa' au plus proche du bord R. Cherchons donc quelle est, pour une même valeur de D. la plus grande ou la plus petite de toutes ces grandeurs Δz. Égalons pour cela la différentielle à zéro :

$$(-Du^2 - 2au^2 + 2D^2u)\frac{D\,du\,ds}{au^4} = 0;$$

d'où

$$u = D + x = \frac{2D^2 - 2a^2}{D};$$

d'où enfin

$$x = -\frac{2a^2}{D} + D.$$

Substituons cette valeur de x dans la valeur générale de Δz pour avoir l'expression de la plus grande ou de la moindre des projections des arcs ds; il viendra

$$aa' = \frac{D^3 ds}{4a(D^2 - r^2)}.$$

Pour avoir les deux autres éléments, il suffit, dans l'expression générale de Δz, de remplacer x d'abord par a, puis par 0 ; on obtient ainsi

$$(\Delta z)_a = \frac{D ds}{D + a} \qquad \text{et} \qquad (\Delta z)_0 = \frac{a ds}{D}.$$

Si nous retranchons la somme de ces deux éléments projetés du double de aa' et que nous égalions à zéro la différentielle prise par rapport à D, nous obtenons l'équation

$$D^6 - 3D^4a^2 + 4D^3a^3 - 6D^2a^4 + 2a^6 = 0,$$

qui doit nous donner la valeur de D.

En substituant à D la valeur a, le résultat est négatif; pour $D = 2a$ il est positif; la valeur cherchée de D est donc comprise entre a et $2a$. Pour $a\sqrt{2}$ le résultat est négatif; la racine est donc comprise entre $1{,}41\ a$ et $2\ a$; on voit de même qu'elle est comprise entre $1{,}59\ a$ et $1{,}60\ a$; si l'on prend $D = 1{,}595\ a$, l'erreur est moindre que la 200e partie du rayon, ce que Parent estime être assez juste pour la pratique.

En remplaçant D par cette valeur dans l'expression de l'asbcisse x de l'élément projeté maximum, on trouve que cet élément correspond à peu près au 70e degré à partir du point E ou au 20e à partir de R.

Si l'on cherche la valeur des parties les plus proches de R et de C, on trouve qu'elles ne diffèrent pas entre elles de plus de $\frac{1}{50}$ de la moindre. Enfin, si l'on cherche le point d'où ces éléments projetés seraient vus égaux, on trouve $D = 1{,}618\ a$, valeur qui ne diffère de celle adoptée par Parent que de $\frac{1}{43}$ du rayon.

La Hire, en prenant pour D la valeur $1{,}707\ a$ au lieu de $1{,}595\ a$, commettait une erreur qui est à peu près les $\frac{11}{100}$ du rayon, ou un peu plus de $\frac{1}{9}$, quantité très-appréciable dans les planisphères de grandeur ordinaire.

Si l'on voulait trouver la position de l'œil pour laquelle les éléments projetés paraissent aller tous en augmentant du centre vers la circonférence, et celle pour laquelle ces éléments paraissent aller tous en diminuant, il suffirait de supposer pour le premier cas $x = 0$ et D variable dans la valeur de x qui correspond à l'élément projeté maximum, ce qui donnerait

$$D = a\sqrt{2} = 1{,}414\ldots a;$$

pour le second cas on remplacerait x par a et l'on trouverait

$$D = 2a.$$

14. Au lieu de procéder comme nous venons de le faire, on peut chercher à rendre les représentations des parties égales de la sphère aussi égales que possible, de manière à répartir à peu près également l'erreur totale.

Or si l'on partage le rayon (fig. 34) en autant de parties égales que le quadrant EAR, que par les points de division on élève des perpendiculaires égales aux valeurs de Δz et qu'on joigne les extrémités par une courbe continue, on obtiendra, pour chaque valeur de D, une courbe différente et une ordonnée maximum aa' aussi différente. Soit $c_1a_1r_1$ l'une quelconque de ces courbes; comme la somme de toutes les ordonnées est constante et égale au rayon, si nous construisons une seconde courbe pour une autre valeur de D, ayant une ordonnée maximum moindre que aa', elle aura une plus petite courbure que la première, et l'on voit ainsi que celle qui possède la moindre de toutes les ordonnées maximum sera celle qui se rapprochera le plus d'une ligne droite. Si a_1a_1' était (ce que nous ne savons pas encore) l'ordonnée minimum de chaque courbe, on verrait de même que la courbe de moindre courbure correspond à la valeur de D qui donnerait la plus grande de toutes les ordonnées minimum aa'.

Cette valeur de D s'obtiendra donc en égalant à zéro la différentielle de la valeur de aa' considérée comme fonction de la variable D. On obtient ainsi

$$D = a\sqrt{3} = 1{,}732\ldots a.$$

Ainsi la distance du point de vue au centre est égale au côté du triangle équilatéral inscrit dans un grand cercle de la sphère.

Si l'on substitue cette valeur de D dans l'expression de aa', on obtient

$$aa' = \frac{3}{8} ds\sqrt{3} = 0{,}649 \ldots ds.$$

Si l'on fait la même substitution dans l'expression générale de Δz, puis qu'on y remplace x par a, on obtient pour l'élément projeté le plus près du centre C

$$(\Delta z)_a = \frac{ds\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = 0{,}634 \ldots ds,$$

et enfin en remplaçant x par 0, pour avoir l'élément le plus proche de R

$$(\Delta z)_0 = \frac{ds\sqrt{3}}{3} = 0{,}577 \ldots ds.$$

Ces trois valeurs montrent que aa' est la plus grande de toutes les projections Δz et non la moindre, et qu'elle ne surpasse la plus petite qui est en R que de $\frac{1}{9}$ de sa propre valeur. La valeur de x correspondant à cet élément maximum est

$$x = \frac{a\sqrt{3}}{3},$$

ce qui montre que cet élément est à peu près à 55° du point E.

Nous désignerons le système que nous venons d'exposer sous le nom de *seconde projection de Parent* pour le distinguer du précédent où la valeur de D est $1{,}595\ldots a$.

15. En 1825, un graveur de Londres, John *Lowry* (1), reprit la même question et chercha successivement les distances où il fallait placer le point de vue pour que les arcs de 5°, 10°, 15°..., 85° fussent représentés sur la carte par des parties proportionnelles du rayon; cela ne pouvant avoir lieu à la fois que pour un seul de ces arcs, Lowry obtint dix-sept déterminations successives du point de vue entre lesquelles il prit une moyenne; il trouva ainsi $1{,}69\,a$ pour la distance du point de vue au centre, nombre qui changerait si l'on faisait entrer dans le calcul des arcs plus petits; mais la différence

(1) Lacroix, *Précis du rapport verbal fait à l'Académie des sciences le 12 septembre 1825*, dans le *Bulletin de la Société de géographie*, cahier de septembre 1825, p. 127 à 130.

serait au-dessous de $\frac{a}{1000}$ si l'on prenait rigoureusement le milieu entre toutes celles qui correspondent aux différents points du quart de cercle.

En comparant par le calcul la graduation des cartes de Lowry avec celle qui résulte de la détermination de la Hire, on ne trouve que des différences insensibles, au moins dans les dimensions adoptés pour les cartes ordinaires ; il faudrait que le rayon fût de 1 mètre pour qu'il y eût quelques millimètres de différence entre les unes et les autres. On doit dire aussi que Lowry s'est rapproché encore de la Hire dans la note qu'il a communiquée à l'Académie, où il a adopté pour distance 1,70 a, tandis qu'en citant la Hire au bas de ses hémisphères construits sur l'horizon de Londres, il a mis 1,68 a qui n'est ni le résultat qu'il a obtenu ni celui de la Hire.

16. Les projections perspectives peuvent êtres étendues au delà d'un hémisphère, à l'exception de la projection centrale qui ne peut même représenter un hémisphère entier et de la projection orthographique qui ne pourrait être employée à plus de 90° du point central qu'à la condition de surcharger les bords de la carte. La question se présente lorsque l'on veut, par exemple, dresser une carte des étoiles visibles au-dessus de l'horizon d'un lieu, ou, en géographie, lorsque l'on veut embrasser d'un seul coup d'œil, pour des considérations de physique terrestre, l'ensemble des grands continents.

La projection stéréographique employée dans ce but altère beaucoup trop les distances sur les bords de la carte, puisque, dans une projection polaire, le degré d'un méridien à 109° du pôle est représenté par une longueur trois fois plus grande qu'au centre.

Pour chaque projection perspective dont le point de vue doit être situé à l'extérieur de la surface, la limite à laquelle elle peut être employée dépend de la distance du point de vue; elle est exprimée (fig. 35) par l'arc de grand cercle CAT compris entre l'extrémité c du diamètre passant par le point de vue et le cercle de contact de la sphère et du cône tangent. Cet arc φ est donné par la relation

$$\operatorname{tang}(180^\circ - \varphi) = \sqrt{\frac{D^2}{a^2} - 1}.$$

Si l'on voulait appliquer la méthode dont s'est servi Parent dans sa première projection pour représenter une portion plus grande qu'un hémisphère, portion mesurée par l'arc de grand cercle compris entre

le centre et la circonférence-limite de la carte, on suivrait la même méthode en remplaçant seulement la valeur de l'élément au bord de la carte par celle que prend cet élément à la limite donnée. On trouverait ainsi une valeur de D qui dépendrait de cette limite. Le reste du calcul et la construction s'achèveraient de même.

C'est ici le lieu de mentionner la projection du globe entier en quatre parties proposée par M. J. W. *Woolgar* en 1833. On projette la sphère par la méthode stéréographique sur les quatre faces d'une pyramide équilatère, afin qu'en représentant une portion de la surface moindre qu'un hémisphère, l'altération des distances vers les bords puisse être en partie évitée; en outre, chaque carte se relie aux autres par une partie commune. L'axe de la pyramide passe par la ligne des pôles, et le pôle sud touche la base de ce solide en son centre. La latitude des centres des trois autres faces est de 19° 28 16″, N., et le pôle N. se trouve sur la circonférence-limite de chacune d'elles, circonférence qui a pour rayon 70° 30′ au lieu de 90°; les longitudes de leurs centres diffèrent, par conséquent, de 120°. Sur chaque face l'échelle ne varie que dans le rapport de 1 à 1,5 au lieu de 1 à 2, comme dans la projection stéréographique d'un hémisphère.

17. Tout ce que nous avons dit sur le choix des points de vue dans les projections perspectives ne peut s'appliquer qu'à la graduation marquée sur le rayon des cartes; les quadrilatères compris entre les méridiens et les parallèles sont sensiblement agrandis sur les bords de la projection.

Parent (1) s'est aussi occupé de chercher quelle position on doit donner au point de vue sur un diamètre quelconque EE (fig. 36) pour que les zones égales en surface qui composent l'hémisphère opposé RER′, et qui ont EE′ pour axe soient représentées en perspective sur le grand cercle perpendiculaire à EV par d'autres zones égales entre elles.

Prenons un arc quelconque $AA' = ds$; nommons x l'ordonnée CX, z la distance Ca et D la distance CV. On aura

$$z = \frac{D\sqrt{a^2 - x^2}}{D + x}; \qquad aa' = \Delta z = \frac{a^2 + Dx}{(D + x)^2} \frac{Ddx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

(1) PARENT, *Essais et recherches de mathématiques et de physique*, t. II, p. 925-930, déjà cité.

La zone circulaire qui a Ca pour rayon et aa' pour largeur, et qui est la représentation de la zone sphérique qui a AN′ pour largeur et EV pour axe, a pour surface

$$2\pi z\,dz \qquad \text{ou} \qquad \frac{2\pi(a^2+\mathrm{D}x)}{(\mathrm{D}+x)^3}\,\mathrm{D}^2dx;$$

la zone sphérique correspondante a pour surface

$$2\pi a dx.$$

L'hypothèse que toutes les zones sphériques sont prises égales exige donc que tous les dx soient constants.

Posons $\mathrm{D}+x=u$; la valeur de la zone circulaire se change en

$$\frac{2\pi(a^2+\mathrm{D}u-\mathrm{D}^2)\,\mathrm{D}^2dx}{u^3},$$

dont la différentielle est

$$(\mathrm{D}u^3-3u^2a^2-3u^3\mathrm{D}+3u^2\mathrm{D}^2)\,\frac{\mathrm{D}^2du\,dx}{u^6},$$

qui, égalée àzéro, donne

$$-3a^2-2\mathrm{D}u+3\mathrm{D}^2=0,$$

d'où l'on déduit

$$x=\mathrm{CX}=\frac{1}{2}\mathrm{D}-\frac{3}{2}\frac{a^2}{\mathrm{D}}$$

pour l'abscisse correspondant à la zone maximum.

De plus, si dans l'expression générale de la valeur de la zone circulaire, on suppose $x=0$, il vient pour l'expression de la dernière zone vers le bord de la carte

$$\frac{2\pi a^2dx}{\mathrm{D}},$$

et, si l'on suppose $x=a$, la dernière zone vers le centre C est exprimée par

$$\frac{2\pi a\,\mathrm{D}^2dx}{(a+\mathrm{D})^2}.$$

Enfin, en remplaçant, dans l'expression générale, x par la valeur CX qui convient à la zone maximum, on obtient, pour l'expression de ce maximum,

$$\frac{8\pi\mathrm{D}^5dx}{(\mathrm{D}^2-a^2)27}.$$

Par le même raisonnement qui nous a guidé dans l'étude de la première projection de Parent, nous sommes conduit à retrancher

la somme des deux zones en C et R du double de la zone maximum, et à égaler la différentielle de cette quantité à zéro, en supposant que D soit la variable; nous obtenons ainsi l'équation

$$8D^8 - 121D^6a^2 + 162D^5a^3 - 81D^4a^4 + 54D^3a^5 - 81D^2a^6 + 27a^8 = 0.$$

Par des substitutions successives on trouve

$$D = 2{,}105\ldots a,$$

au lieu de 1,595..a que Parent avait trouvé en cherchant à rendre égales les projections d'arcs égaux, ce qui démontre une fois de plus qu'on ne peut conserver en même temps l'égalité des surfaces et celle des configurations.

En remplaçant D par cette valeur 2,105..a dans l'expression de l'abscisse x de l'élément projeté maximum, on trouve que cette zone correspond au 70e degré à partir de E; ainsi le maximum d'altération de distance et d'exagération a lieu au même point, à 70 degrés environ du centre de la projection.

18. En cherchant les deux zones les plus proches du bord R et du centre C, on trouve qu'elles ne diffèrent entre elles que de $\frac{1}{25}$ de la plus petite des deux à fort peu près, et que le point de l'axe EE' d'où ces deux zones seraient vues égales n'est éloigné du point V que de $\frac{1}{25}$ du rayon.

Nous avons encore à parler d'un autre système de projection perspective destiné à représenter les deux tiers environ d'une surface sphérique de manière que les configurations soient déformées le moins possible sans cependant que les surfaces extrêmes soient dilatées; c'est le système imaginé en 1857 par le colonel Henri *James*, directeur de l'*Ordnance survey*, et modifié plus tard par le capitaine A. R. *Clarke* du même service, qui adopte pour distance du point de vue au centre la valeur D = 1,36763 a au lieu de la valeur 1,50 a adoptée par le colonel James (1); mais comme quelques considérations préalables sur un certain groupe de projections (projections zénitales) dont les projections perspectives font elles-même partie, nous sont nécessaires pour aborder ce sujet, nous en renvoyons l'étude au chapitre suivant (2).

---

(1) *On projections for maps applying to a very large extent of the Earth's surface, by colonel sir H.* James, *and captain A. R.* Clarke; *communicated by the authors,* dans le *Philosophical Magazine,* cahier d'avril 1865, p. 306 à 312.

(2) *Voir* chap. V, § 9.

19. Avant de terminer ce chapitre, disons un mot des cartes géographiques particulières construites en projection perspective. La projection stéréographique est peu employée dans ce cas; il n'y a guère que les Allemands qui s'en soient servis, et particulièrement *Hass* (Leipsick, 1717), qui a composé la plus grande partie des cartes de l'atlas de *Homann*, fort répandu vers le milieu du siècle passé; les quatre parties du monde représentées isolément dans cette projection ne sont que des portions d'une mappemonde construite avec de plus grandes dimensions sur le plan du méridien perpendiculaire à celui qui passe par le milieu de la carte et qui contient le point de vue. La longueur excessive des rayons des cercles exigeant l'emploi des formules pour la construction par points fait perdre l'avantage du tracé d'arcs de cercle, et rend cette projection inférieure sous tous les rapports aux projections perspectives qui, en plaçant le point de vue hors du globe, diminuent l'inégalité des espaces. La distance à laquelle il conviendra de placer ce point de vue sur le diamètre passant par le centre du pays à représenter dépendra de l'étendue de ce pays, diminuera à mesure que cette étendue deviendra plus petite, et pourra se calculer aisément en comparant le degré sur les bords de la carte avec celui qui se trouve au milieu. Le procédé de calcul sera d'ailleurs identique à celui qu'a donné Parent pour sa première projection d'un hémisphère.

Lorsque l'échelle de la carte à construire sera suffisamment grande pour rendre appréciable la différence entre les degrés réels de la terre sphéroïde et les degrés d'une sphère ayant pour rayon celui de l'équateur, on tiendra compte de l'aplatissement par la méthode de Prony que nous avons exposée (1), et l'on cherchera le rayon de la sphère qui s'adapte le mieux à la courbure du sphéroïde terrestre dans le voisinage du centre de figure du pays dont on veut dresser la carte. A l'aide des nouveaux degrés calculés d'après cette méthode, on déterminera la distance du point de vue au centre de cette sphère, et la construction s'achèvera soit par coordonnées, soit par le tracé des ellipses, comme nous l'avons indiqué précédemment.

20. Nous avons vu que les projections perpective ne diffèrent les unes des autres que par la position du point de vue. Il en résulte un moyen facile de passer d'une projection perspective à une autre ayant même plan de projection et par conséquent même centre.

(1) *Voir* ci-dessus, chap. 1, § 4, p. 11.

Soit en effet (fig. 37) *m* la projection d'un point M de la sphère dans un premier tracé perspectif dont OV représente la distance D du point de vue au centre de la sphère; on demande la projection du même point M sur le même horizon dans un second tracé dont OV′ représente la distance D′ correspondante à D.

Joignons le point *m* au centre O de la projection, élevons OV perpendiculaire sur *om* et portons la distance D de O en V. Si nous joignons V*m*, l'arc MA compris entre les droites V*m* et VO prolongées sera l'arc de grand cercle qui a pour projection *om*. Si donc nous portons la seconde distance D′ de O en V′, en joignant le point M au point V′, l'intersection *m′* de cette droite avec le rayon *om* sera la projection de M dans le second tracé.

Il suffira donc, pour passer du premier système au second, de mener dans chacun d'eux des rayons vecteurs faisant respectivement les mêmes angles avec un axe fixe, le méridien du centre, par exemple, et de porter, sur ceux du second système, les longueurs telles que *om′* déterminées dans le premier. On déterminera ainsi, à l'aide d'autant de points que l'on voudra, les méridiens, les parallèles et en général toute courbe tracée sur la projection *type*. Nous verrons dans le chapitre suivant qu'il est souvent avantageux de construire d'abord un canevas *type* pour obtenir ensuite, par la méthode que nous venons d'exposer, le canevas définitif dont le tracé direct aurait été plus difficile à obtenir.