www.e-rara.ch

Traité des projections des cartes géographiques

Germain, Adrien Adolphe Charles

Paris, [1865]

ETH-Bibliothek Zürich

Shelf Mark: Rar 18793

Persistent Link: https://doi.org/10.3931/e-rara-74932

Chapitre V.

www.e-rara.ch
Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien – von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material – from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d'imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L'éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes – des débuts de l'imprimerie jusqu'au 20e siècle.

e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

Nutzungsbedingungen Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titelinformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

Terms of Use This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

Conditions d'utilisation Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

Condizioni di utilizzo Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]

Visual Library

CHAPITRE V.

PROJECTIONS ZÉNITHALES.

1. Nous avons vu que lorsqu'une projection perspective est faite sur le plan de l'équateur les parallèles sont représentés par des cercles ayant tous pour centre la projection du pôle et les méridiens par des diamètres de l'équateur. Il n'en est plus de même lorsqu'on prend pour centre de la carte un point quelconque de la surface de la sphère, et pour plan de projection l'horizon de ce lieu. Mais si, au lieu de considérer les méridiens et les parallèles, on imagine une suite de plans perpendiculaires au diamètre de la sphère qui passe par ce lieu et d'autres perpendiculaires aux premiers et passant tous par ce diamètre, on recomposera un système de coordonnées sphériques semblable à celui auquel on rapporte tout point de la sphère terrestre : les parallèles seront remplacés par des almicantarats et les méridiens par des cercles azimutaux. La projection sera en tout semblable à la projection équatoriale; les almicantarats seront figurés par des cercles décrits autour du point central considéré, et les verticaux d'azimuts égaux par des diamètres de l'horizon de ce lieu également inclinés les uns sur les autres.

Les projections perspectives ne sont pas les seules à jouir de la propriété de conserver les azimuts autour du point central et de représenter des distances égales de ce point aux autres points de la sphère par des distances égales entre elles sur la projection, et par conséquent toujours faciles à mesurer. Nous avons déjà été conduits à étudier un certain nombre d'autres systèmes, tels que la projection isosphérique isomère de Lambert (1), dans lesquels la loi de représentation reste la même dans toutes les directions partant du point central de la carte. Nous les désignerons tous sous le nom de

(1) *Voir* chap. III, § 14.

projections zénithales parce qu'ils peuvent toujours être considérés comme la représentation de l'hémisphère situé au-dessus de l'horizon du lieu et ayant le zénith pour pôle.

2. Dans ces différents systèmes il suffit de connaître la loi suivant laquelle varient les rayons des almicantarats d'un point quelconque de la surface, et il est inutile de s'embarrasser des considérations de la place du pôle et de la forme des courbes qui représentent les méridiens et les parallèles ; une simple transformation de coordonnées sphériques permettra d'obtenir les intersections de ces deux systèmes de courbes, c'est-à-dire de calculer les nouvelles coordonnées en fonction des longitudes t et des latitudes l supposées connues.

Soit P le pôle (fig. 38), HPCH' le méridien du lieu C sur l'horizon duquel on veut faire la projection et qui doit occuper le centre de la carte ; nous supposerons les longitudes comptées à l'est et à l'ouest de ce méridien, ce qui revient à ne considérer que les différences entre les longitudes réelles et la longitude du centre C. Soit λ sa latitude, A un lieu de la terre dont on connaît la longitude t et la latitude l. Si nous supposons menés les grands cercles PA, CA, nous formerons le triangle sphérique PCA dans lequel nous connaîtrons le côté $PC = 90° - \lambda$, le côté $PA = 90° - l$ et l'angle en P égal à la longitude t comptée à partir du méridien PCH' ; il s'agit de trouver le côté CA qui mesure la plus courte distance θ des deux points C et A sur la sphère de l'azimut PCA que nous appellerons z.

La trigonométrie sphérique permet de calculer θ et z par les formules suivantes :

$$\cos\theta = \frac{\sin(l+\varphi)}{\cos\varphi}\sin\lambda \qquad \text{et} \qquad \sin z = \frac{\sin t}{\sin\theta}\cos l,$$

dans lesquelles l'angle auxiliaire φ est donné par la relation

$$\operatorname{tang}\varphi = \cos t \operatorname{cotang}\lambda.$$

Dans le cas où le centre de la carte est pris sur l'équateur, λ est égal à zéro et les formules se transforment en

$$\cos\theta = \cos t \cos l \qquad \text{et} \qquad \operatorname{tang} z = \sin t \operatorname{cotang} l.$$

Ainsi, pour chaque lieu dont on connaît la latitude et la longitude, on pourra calculer θ et z ; comme d'ailleurs on connaît la loi

$$\rho = F(\theta),$$

qui exprime le rayon ρ de chaque almicantarat en fonction de l'arc correspondant θ, il sera très-facile de placer sur la carte la projection du point donné A. Lambert (1) a proposé l'emploi simultané d'une table contenant les valeurs calculées de z et θ pour des valeurs données de l et t, et d'une règle pouvant tourner autour du centre de la projection et divisée à partir de ce point d'après la loi $\rho = F(\theta)$ qui définit le système que l'on veut tracer. Pour pouvoir mesurer immédiatement les angles de la règle avec le diamètre PC qui représente le méridien du centre (fig. 39), on divise la circonférence de la carte en degrés et fractions à partir de l'extrémité de ce diamètre. Pour un point quelconque A (l et t), on lit dans la table les valeurs de z et θ; en faisant tourner la règle jusqu'à ce qu'elle fasse avec le diamètre PC, cet angle z, le point qui indique sur la règle la valeur de θ sera le point A cherché.

Sans recourir nécessairement à l'emploi de la règle, on voit qu'il suffira de dresser une seconde table donnant les valeurs de ρ pour chaque valeur de θ et de porter ces valeurs de ρ à partir du centre C sur les diamètres faisant avec le méridien PC les angles correspondants z donnés par la première table.

On voit que la figure sera symétrique par rapport au méridien PC du centre, et lorsque ce centre sera pris sur l'équateur elle sera aussi symétrique par rapport à l'équateur. Dans ce cas, quelle que soit la projection zénithale que l'on considère, le méridien central et l'équateur sont divisés de la même manière et le méridien limitant l'hémisphère est divisé en arcs égaux ; les parallèles coupent à angles droits le méridien central, et les méridiens coupent à angles droits l'équateur.

On pourra aussi, pour plus d'exactitude, placer chaque point par ses coordonnées rectangulaires calculées à l'aide des formules

$$x = \rho \sin z; \qquad y = \rho \cos z.$$

Nous reproduisons table IV, les tables calculées par Lambert, pour le cas où $\lambda = 0$, c'est-à-dire où le centre de la carte est pris sur l'équateur (2).

---

(1) *Beytrage zum Gebrauche der Mathematik durch* LAMBERT, Berlin 1772, in-8, t. III, p. 174.

(2) Dans les tables données par Lambert et reproduites par *J. Tobias* MAYER (*Vollständige und gründliche Anweisung zur Verzeichnung der Land-See-und Himmelscharten*, Erlang 1794 (4e édit., 1828), in-8, § 50), ce n'est pas l'angle z qui est donné, mais son complément $90° - z$.

3. Lorsque, dans le tracé des méridiens et des parallèles, on ne tient pas à une exactitude mathématique, la remarque suivante permet de construire les projections de ces courbes d'une manière beaucoup plus simple.

Si, sur deux projections différentes ayant pour centre la projection d'un même point de la surface sphérique, on trace (d'après les lois $\rho = F(\theta)$ et $\rho' = F'(\theta)$ de ces deux projections) les almicantarats et les rayons représentant les mêmes petits cercles et les mêmes plans verticaux de la sphère, toutes les intersections des méridiens et des parallèles occuperont, par rapport aux cercles et aux rayons dont nous venons de parler, les mêmes places sur l'une et l'autre projection.

Si donc nous possédons une projection sur laquelle soient tracés les méridiens et les parallèles de 10° en 10°, par exemple, ainsi que les almicantarats et les verticaux aussi de 10° en 10°, pour toute autre projection définie par la formule $\rho = F(\theta)$, nous n'aurons qu'à tracer, avec les rayons des almicantarats de 10 en 10°, c'est-à-dire avec les valeurs de $F(\theta)$ résultant des valeurs de θ de 10° en 10°, des cercles concentriques que nous couperons ensuite par des rayons également espacés; nous pourrons alors placer sur ces rayons et ces cercles les intersections des méridiens et des parallèles de la même manière qu'elles le sont dans la première projection.

Parmi toutes les projections qui peuvent servir de canevas *type* pour tracer les autres, l'une des plus commodes est la projection stéréographique sur l'horizon du lieu qui doit servir de centre, parce que les méridiens et les parallèles y sont des cercles qui se tracent avec la plus grande facilité (1). On y décrira, du centre, des cercles de rayons égaux à $a \operatorname{tang} \frac{10^\circ}{2}$, $a \operatorname{tang} \frac{20^\circ}{2}$, etc., et l'on tracera des rayons inclinés de 10 degrés; cette projection pourra alors être employée pour déterminer les intersections des méridiens et des parallèles sur une projection quelconque à almicantarats concentriques et circulaires décrits autour du même centre d'après une loi connue.

Ce procédé très-rapide n'est d'une exactitude suffisante que lorsque l'échelle de la carte à tracer est très-petite; mais il est possible d'obtenir une exactitude beaucoup plus grande en déterminant d'abord

(1) *Voir* 2e part., chap. I, Projection stéréographique.

pour autant de points que l'on veut de la projection *type* le nombre de degrés et minutes contenus dans l'arc de grand cercle qui joint chacun de ces points au point central, puis faisant sur chacune de ces valeurs la construction ou le calcul indiqué par l'équation $\rho = F(\theta)$ de la projection que l'on veut obtenir.

Soit M_1 (fig. 40) un point quelconque de la projection type, que nous supposerons stéréographique; O_1 le centre du tracé, lequel sera reporté en O sur la carte zénithale à construire; $\pi_1\pi_1'$ le méridien du point O_1 représente par la droite $\pi\pi'$ sur la projection zénithale; si nous supposons la projection stéréographique construite sur un grand cercle de la sphère, le rayon $O_1\pi_1'$ de la circonférence qui limite un hémisphère sera le rayon de la sphère. Si l'on fait au point O de la carte l'angle πOM égal à l'angle $\pi_1O_1M_1$, le point cherché M qui correspond à M_1 est situé sur la droite OM; et si l'on connaissait l'arc de grand cercle θ qui, sur la sphère, joint les deux points dont les projections sont O et M, la position de ce ponit M serait entièrement déterminée puisque la distance $\rho = F(\theta)$ pourra toujours se déduire de l'arc θ. Pour trouver cet arc, il suffira de mener un diamètre AB perpendiculaire sur le rayon O_1M_1 et de joindre A_1M_1 que l'on prolongera jusqu'à la circonférence de l'hémisphère; l'arc $B\mu$ sera l'arc cherché, on le mesurera en degrés et minutes en portant une ouverture de compas égale à la corde $B\mu$ sur cette circonférence ou sur une égale que l'on aura divisée en degrés et fractions.

On abrégera beaucoup cette méthode s'il s'agit de construire un grand nombre de points de la projection zénithale, par exemple les points d'intersection des parallèles et des méridiens de 5 en 5, ou de 10 en 10 degrés, en remarquant que l'arc $B\mu$ ne dépend que de la distance O_1M_1. On pourra donc décrire (fig. 41), avec un rayon CA égal au rayon de la sphère, une demi-circonférence, mener un diamètre BA et un rayon CD perpendiculaire, diviser ce dernier en parties égales suffisamment petites, joindre les points de division au point A et prolonger ces droites jusqu'à la rencontre de l'arc BD préalablement divisé en degrés et fractions de degrés à partir du point B. Cela posé, si l'on porte de C en K' une longueur O_1M_1 prise sur la projection stéréographique, on trouvera sur-le-champ la longueur BK de l'arc correspondant avec une approximation d'autant plus grande qu'on aura multiplié davantage le nombre des parties dans lesquelles le rayon CD est divisé.

On pourrait aussi construire comme projection type une projection

orthographique ; mais les méridiens et les parallèles étant des ellipses plus difficiles à construire que les cercles de la projection stéréographique, le travail préparatoire serait plus grand et plus sujet à erreurs. Si cependant on avait déjà une projection orthographique sur l'horizon du lieu que l'on veut prendre pour centre, il suffirait pour dresser l'échelle graphique qui donnera les valeurs de l'arc θ, de décrire (fig. 42) avec le rayon de la sphère un quart de circonférence, de partager l'un des rayons CD en autant de parties égales que l'on voudra et d'élever des perpendiculaires jusqu'à la rencontre du quadrant ; les arcs BK seraient les valeurs de θ correspondantes aux rayons vecteurs de la projection orthographique qui auraient CK′ pour longueur.

Quelle que soit la projection auxiliaire que l'on emploiera, on pourra obtenir, non-seulement les projections des méridiens et des parallèles à l'aide de leurs intersections, mais encore la projection d'un cercle ou d'une courbe quelconque dont on connaîtra déjà la représentation sur un canevas auxiliaire.

4. Nous allons dire quelques mots des diverses projections zénithales dont plusieurs ont déjà été indiquées. Nous avons dit que chaque système était défini par la forme de la fonction $F(\theta)$ qui détermine, pour chaque valeur de θ, le rayon ρ de chaque almicantarat. On peut donc imaginer autant de systèmes différents que l'on veut et assujettir la projection à remplir une certaine condition qui déterminera la forme de la fonction F.

Nous avons déjà étudié les projections perspectives pour lesquelles

$$\rho = \frac{a\,D \sin\theta}{D + a\cos\theta},$$

formule dans laquelle D représente la distance du point de vue au plan de projection supposé mené par le centre de la sphère perpendiculairement au diamètre qui passe par le point de vue. Nous avons indiqué au § 20 du chapitre IV la construction qui permettra de tracer les méridiens et les parallèles à l'aide d'un canevas *type* tel que la projection stéréographique sans avoir besoin de connaître les valeurs de l'arc θ pour les points que l'on voudra reporter.

5. Revenons à la formule générale

$$\rho = F(\theta).$$

La forme la plus simple que nous puissions donner à ρ est évidemment

$$\rho = 0;$$

le rayon de chaque almicantarat est égal à l'arc de grand cercle qui, sur la sphère, joint le centre de la surface à représenter au petit cercle correspondant, les distances de ce centre aux différents points de la carte sont ainsi représentées en véritable grandeur. Si le pôle lui-même est pris pour centre, les parallèles de la projection ont pour rayons les différentes valeurs de

$$a(90^\circ - l)\frac{\pi}{180}.$$

Cette projection, imaginée par *Guillaume Postel* (de Dolérie près Avranches) qui ne l'employa que sous l'aspect polaire dans la mappemonde publiée en 1581 (1), fut étudiée comme projection zénithale d'abord par Lambert en 1772 (2), puis avec plus de détails, en 1799, c'est-à-dire vingt-sept ans après, par *Antonio Cagnoli*, membre de la Société italienne, qui crut l'avoir inventée et lui donna son nom (3); nous la désignerons sous le nom de *projection zénithale équidistante.*

Il est facile de voir que, tant que la valeur de θ n'excède pas 30°, les degrés des almicantarats sont peu altérés et conservent par conséquent à peu près leur véritable rapport avec ceux qui mesurent leur distance au centre de la projection.

Exprimons les rayons de la sphère et des différents cercles en degrés : nous pourrons écrire (fig. 43)

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{90}{57,29};$$

or

$$ef = AB \sin\theta \qquad \text{et} \qquad \frac{e'f'}{A'B'} = \frac{\theta}{90};$$

donc

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{90}{57,29} = \frac{90e'f'}{\theta} = \frac{ef}{\sin\theta};$$

(1) *Polo aptata nova charta universi, auth.* Guil° Postello. *Voir* au dépôt de la marine l'édition de 1621.

(2) Lambert, § 99, p. 179.

(3) A. Cagnoli, *Della più esalta costruzzione delle carte geografiche* (dans les *Memorie di Mathematica e Fisica della Societa Italiana*, t. VIII, Modène 1799, in-4, p. 658 à 664.

d'où

$$\frac{e'f'}{ef} = \frac{\theta}{57{,}29\sin\theta}.$$

Ce rapport tend vers l'unité lorsque θ diminue; quand θ est égal à 30°, ce rapport est égal à $\frac{60}{57{,}29}$, ce qui montre que les degrés de la projection sont un peu plus petits que ceux qui leur correspondent sur la sphère, mais en diffèrent très-peu. Si donc on n'étend pas cette projection à plus de 30 degrés du centre, on pourra considérer les distances perpendiculaires aux directions centrales comme conservées aussi bien que les distances le long de ces directions, et dresser une échelle de parties égales suffisante pour de petites distances.

Lorsque le point central est pris sur l'équateur, les degrés sont conservés sur la ligne des pôles et sur l'équateur ; et, sur la circonférence qui limite un hémisphère, ils sont aussi égaux entre eux ; mais les parallèles et les méridiens ne sont ni des ellipses comme dans les projections perspectives de la Hire et de Parent, ni des arcs de cercle comme dans la projection dite *globulaire* dont nous parlerons plus tard (1), et avec laquelle on a confondu à tort la projection zénithale équidistante.

Sous l'aspect polaire elle est très-employée pour les cartes célestes, et, au *bureau des longitudes*, pour les cartes des éclipses publiées chaque année dans la *Connaissance des temps*. Les projections nos XXVIII, XXIX et XXX représentent un hémisphère sous les trois aspects polaire, méridien et horizontal.

6. Si nous prenions pour plan de projection, dans la sphère stéréographique, non plus un grand cercle, mais le plan tangent à la sphère à l'extrémité du diamètre dont l'autre extrémité est le point de vue (2), nous aurions, pour exprimer les rayons des almicantarats,

$$\rho = 2\tang\frac{\theta}{2}.$$

D'un autre côté, la projection zénithale équidistante peut se représenter par la formule

(1) *Voir* 2e part., ch. XIV, 2°.

(2) C'est ce qu'il faut faire lorsque l'on veut éviter l'altération au centre de la carte et la reporter sur les bords, car les degrés au centre se trouvent alors conservés, tandis qu'à 90° ils sont presque doublés.

$$\rho = \theta = \infty . \operatorname{tang} \frac{\theta}{\infty}.$$

Le premier système a l'avantage de ne pas altérer les angles, et le second d'exagérer les surfaces beaucoup moins que le premier. Si donc on considère des systèmes ayant des formules analogues et en quelque sorte intermédiaires, telles que

$$\rho = 3 \operatorname{tang} \frac{\theta}{3}, \qquad \rho = 4 \operatorname{tang} \frac{\theta}{4} \ldots\ldots,$$

dans chacun d'eux il y aura déformation, mais aussi l'exagération sera moindre que dans la projection stéréographique.

7. Nous avons déjà parlé (1) d'une projection zénithale qui possède la propriété très-importante de conserver les surfaces dans leur véritable grandeur. On arrive directement à sa formule en exprimant que les zones formées sur la sphère par les almicantarats sont respectivement égales aux surfaces qui les représentent :

$$2\pi a^2(1 - \cos\theta) = \pi\rho^2,$$

d'où l'on déduit immédiatement

$$\rho = 2a \sin \frac{\theta}{2};$$

le rayon de chaque almicantarat est donc égal à la corde de l'arc vertical correspondant.

Nous reviendrons longuement sur ce système, l'un des plus importants à cause de ses propriétés.

8. Nous allons maintenant parler d'un nouveau système imaginé par l'astronome anglais *Airy*, qui lui a donné le nom de *Projection by Balance of Errors* (2).

Nous avons déjà dit que toutes les cartes, quel que fût leur système de projection, étaient entachées de l'une au moins des deux erreurs, exagération des surfaces et déformation ; nous allons nous occuper d'évaluer ces deux erreurs dans les projections zénithales en suivant la méthode imaginée par M. *Airy*.

---

(1) *Voir* chap. III, § 14, et 2e part., chap. IX, Projection équivalente zénithale de Lambert.

(2) *Explanation of a projection by Balance of Errors for maps applying to a very large extent of the Earth's surface; and comparison of this projection with other projections, by* G. B. Airy, *esq. astronomer royal : communicated by the author*; dans le *Philosophical Magazine*, cahier de décembre 1861, p. 409 à 421.

Supposons pour cela la surface sphérique décomposée en une infinité de petits rectangles formés par les arcs de deux almicantarats et de deux cercles azimutaux infiniment voisins ; la carte sera de même décomposée en une infinité de petits rectangles curvilignes compris entre deux circonférences et deux rayons infiniment voisins ; chaque rectangle de la sphère aura ainsi son correspondant sur la carte. Soient a et b la longueur et la largeur de l'un de ces petits rectangles de la sphère dont nous prenons le rayon pour unité ; la longueur et la largeur du petit rectangle correspondant de la carte, étant des fonctions de a et b, pourront être représentées par $a + \delta a$ et $b + \delta b$.

Si les rectangles de la carte étaient régulièrement égaux à ceux de la sphère, le rapport de l'aire projetée à l'aire originale serait égal à l'unité ; s'il n'en est pas ainsi le changement de surface pour chaque rectangle pourra être représenté par

$$\frac{\text{aire projetée}}{\text{aire horizontale}} - 1.$$

Si chaque rectangle était semblable à celui auquel il correspond, la déformation serait nulle, les angles ne seraient pas altérés, et le rapport des côtés projetés divisé par le rapport des côtés originaux donnerait un quotient égal à l'unité ; s'il n'en est pas ainsi, la déformation pour chaque rectangle pourra être exprimée par la différence de ce quotient à l'unité, c'est-à-dire par

$$\frac{\text{long}^{\text{r}} \text{ projetée} \times \text{larg}^{\text{r}} \text{ originale}}{\text{larg}^{\text{r}} \text{ projetée} \times \text{long}^{\text{r}} \text{ originale}} - 1.$$

Par suite des notations que nous avons adoptées nous pourrons représenter l'erreur sur chaque surface de rectangle par

$$\frac{(a + \delta a)(b + \delta b)}{ab} - 1 = \frac{\delta a}{a} + \frac{\delta b}{b},$$

et la déformation par

$$\frac{a + \delta a}{b + \delta b} \cdot \frac{b}{a} - 1 = \frac{\delta a}{a} - \frac{\delta b}{b},$$

en négligeant les puissances de δa et δb au-dessus de la première.

M. Airy a cherché comment on pouvait évaluer l'erreur totale produite sur la projection tant par l'exagération des surfaces que par la déformation, erreur résultante que nous avons déjà désignée

par le mot *altération* et à laquelle les Anglais donnent le nom bien plus expressif de *misrepresentation*. Le savant astronome a cherché en outre quel était le système zénithal dans lequel le résultat de la combinaison des deux erreurs était le plus avantageux possible, et il a basé ses calculs sur les suppositions et les déductions suivantes :

1° ces deux erreurs partielles, lorsqu'elles sont de même amplitude, peuvent être considérées comme des fautes égales ;

2° comme l'erreur produite par une valeur négative est la même que l'erreur produite par la même valeur prise positivement, on peut employer une puissance quelconque de leur expression et appliquer la méthode des moindres carrés ;

3° cette méthode conduit à chercher, pour chaque élément de surface, le minimum de la somme des carrés des deux expressions ;

4° pour la carte entière on devra donc chercher le minimum de la somme des carrés des erreurs élémentaires considérées en ayant égard à la grandeur de la petite surface correspondante.

La manière de représenter la projection de M. Airy consistera donc à déterminer la forme de la fonction de θ qui, prise pour rayon des almicantarats, rendra minimum l'erreur totale représentée par la somme de toutes les erreurs élémentaires multipliées par la surface qui correspond à chacune d'elles.

La somme des carrés des deux erreurs étant

$$\left(\frac{\delta a}{a}+\frac{\delta b}{2}\right)^2+\left(\frac{\delta a}{a}-\frac{\delta b}{b}\right)^2,$$

nous pouvons prendre pour *mesure* de l'erreur en chaque point

$$\left(\frac{\delta a}{a}\right)^2+\left(\frac{\delta b}{b}\right)^2.$$

Appelons θ la longueur, en fonction du rayon pris pour unité, de l'arc de grand cercle qui unit le centre de la carte au centre du petit rectangle que nous avons supposé formé sur la sphère, ρ la distance correspondante sur la carte, φ l'angle azimuthal infiniment petit sous lequel la largeur du rectangle est vue, dans les deux cas, du point pris pour centre. Alors

$$a=\delta\theta; \qquad a+a\delta=\delta\rho; \qquad \delta a=\delta\rho-\delta\theta,$$
$$b=\varphi\sin\theta; \qquad b+\delta b=\varphi\rho; \qquad \delta b=\varphi(\rho-\sin\theta),$$
$$\left(\frac{\delta a}{a}\right)^2+\left(\frac{\delta b}{b}\right)^2=\left(\frac{\delta\rho}{\delta\theta}-1\right)^2+\left(\frac{\rho}{\sin\theta}-1\right)^2.$$

telle est l'expression de l'altération en chaque point. Le produit de cette erreur par la surface $\varphi \sin\theta\, \delta\theta$ à laquelle elle correspond est donc

$$\left[\left(\frac{\delta\rho}{\delta\theta} - 1\right)^2 + \left(\frac{\rho}{\sin\theta} - 1\right)^2\right] \sin\theta d\theta,$$

en négligeant le multiplicateur φ.

La sommation des erreurs partielles pour toute la carte est donc représentée par

$$\int_0^\beta \left[\left(\frac{d\rho}{d\theta} - 1\right)^2 + \left(\frac{\rho}{\sin\theta} - 1\right)^2\right] \sin\theta d\theta,$$

en désignant par β la valeur de θ à la limite de la carte ; et c'est cette intégrale entre les limites 0 et β assignées à la variable θ qui doit être rendue *minimum*.

Posons $\rho - \theta = y$ et substituons en remplaçant $\frac{dy}{d\theta}$ par p. L'intégrale à rendre minimum a alors pour expression

$$\int_0^\beta d\theta \left[p^2 \sin\theta + \frac{(y + \theta - \sin\theta)^2}{\sin\theta}\right] = \int_0^\beta \mathrm{V} d\theta.$$

C'est un cas du *calcul des variations*.

Posons

$$\mathrm{M} = \frac{d\mathrm{V}}{d\theta}; \quad \mathrm{N} = \frac{d\mathrm{V}}{dy}; \quad \mathrm{P} = \frac{d\mathrm{V}}{dp} = 2p \sin\theta.$$

Nous devons donner à y une variation assujettie à la condition que dy soit nul quand $\theta = 0$; les équations de solution sont alors

$$\mathrm{N} = \frac{d\mathrm{P}}{d\theta} = 0, \quad \text{et} \quad \mathrm{P}_\beta = 0,$$

en désignant par P_β la valeur de $2p \sin\theta$ quand on y remplace θ par β. Or

$$\mathrm{N} = \frac{2(y + \theta - \sin\theta)}{\sin\theta}; \quad \frac{d\mathrm{P}}{d\theta} = \frac{2d^2y}{d\theta^2} \sin\theta + \frac{2dy}{d\theta} \cos\theta;$$

la première équation devient donc

$$\frac{y + \theta - \sin\theta}{\sin\theta} - \sin\theta \frac{d^2y}{d\theta^2} - \cos\theta \frac{dy}{d\theta} = 0,$$

ou

$$\sin^2\theta \frac{d^2y}{d\theta^2} + \sin\theta \cos\theta \frac{dy}{d\theta} - y = \theta - \sin\theta.$$

Écrivons Θ à la place de $\theta - \sin\theta$, et pour résoudre l'équation posons

$$z = \sin\theta \frac{dy}{d\theta} + y.$$

Nous avons alors, en différentiant et en substituant,

$$\sin\theta \frac{dz}{d\theta} - z = \sin^2\theta \frac{d^2y}{d\theta^2} + \sin\theta\cos\theta \frac{dy}{d\theta} - y,$$

ou

$$\sin\theta \frac{dz}{d\theta} - z = \Theta.$$

Cette équation est intégrable quand elle est multipliée par $\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}}$.

On obtient alors

$$z = \frac{1}{2}\tang\frac{\theta}{2}\int d\theta \frac{\Theta}{\sin^2\frac{\theta}{2}};$$

donc

$$\sin\theta \frac{dy}{d\theta} + y = \frac{1}{2}\tang\frac{\theta}{2}\int d\theta \frac{\Theta}{\sin^2\frac{\theta}{2}}.$$

Cette dernière équation devient intégrable quand on la multiplie par $\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}$; on obtient alors

$$y = \frac{1}{4}\cotang\frac{\theta}{2}\int d\theta \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos^3\frac{\theta}{2}}\int d\theta \frac{\Theta}{\sin^2\frac{\theta}{2}}.$$

En posant pour un moment $\frac{\theta}{2} = \psi$, on peut écrire

$$y = \cotang\psi\int d\psi \frac{\sin\psi}{\cos^3\psi}\int d\psi \frac{\Theta}{\sin^2\psi},$$

ou

$$y = \frac{1}{2}\frac{1}{\sin\psi\cos\psi}\int d\psi \frac{\Theta}{\sin^2\psi} - \frac{1}{2}\cotang\psi\int d\psi \frac{\Theta}{\sin^2\psi\cos^2\psi},$$

ou

$$y = \frac{1}{2}\tang\psi\int d\psi \frac{\Theta}{\sin^2\psi} - \frac{1}{2}\cotang\psi\int d\psi \frac{\Theta}{\cos^2\psi}.$$

En remplaçant Θ par $\theta - \sin\theta$, on obtient enfin

$$y = -\theta - 2\operatorname{cotang}\frac{\theta}{2}\log\cos\frac{\theta}{2} + C\operatorname{tang}\frac{\theta}{2} + C'\operatorname{cotang}\frac{\theta}{2},$$

y doit être nul avec θ, donc $C' = 0$.

L'équation de condition $P_\beta = 0$ peut s'écrire

$$\left(\frac{dy}{d\theta}\right)_\beta = 0;$$

on doit donc avoir

$$\operatorname{cosec}^2\frac{\beta}{2}\log\cos\frac{\beta}{2} + \frac{1}{2}C\sec^2\frac{\beta}{2} = 0;$$

d'où

$$C = \operatorname{cotang}^2\frac{\beta}{2}\log\sec^2\frac{\beta}{2} = -2\operatorname{cotang}^2\frac{\beta}{2}\log\cos\frac{\beta}{2}.$$

Il en résulte que, au centre de la carte où $\theta = 0$,

$$\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)_0 = \frac{1+C}{2} \quad (1).$$

On a donc définitivement

$$\rho = -2\operatorname{cotang}\frac{\theta}{2}\log\cos\frac{\theta}{2} + \operatorname{tang}\frac{\theta}{2}\operatorname{cotang}^2\frac{\beta}{2}\log\sec^2\frac{\beta}{2},$$

expression dans laquelle les logarithmes sont népériens; en appelant donc M le module 0,43429448, on aura, en logarithmes vulgaires,

$$\rho = -\frac{2}{M}\operatorname{cotang}\frac{\theta}{2}\log\cos\frac{\theta}{2} - \frac{2}{M}\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}\operatorname{cotang}^2\frac{\beta}{2}\log\cos\frac{\beta}{2}.$$

Le rayon-limite de la carte est

---

(1) M. Airy, négligeant la condition de rendre minimum l'intégrale de $Vd\theta$ entre les limites 0 et β, et cherchant seulement le minimum de l'intégrale indéfinie, s'était donné, pour déterminer la constante C, la condition que $\frac{dy}{d\theta}$ fût nul ainsi que y, pour $\theta = 0$, ce qui revient à cette condition que les parties centrales de la carte correspondent exactement à la région de la sphère qui entoure le point pris pour centre de projection; M. Airy trouvait ainsi $C = 1$ et finalement

$$\rho = \operatorname{tang}\frac{\theta}{2} + 2\operatorname{cotang}\frac{\theta}{2}\log\sec\frac{\theta}{2}.$$

Le capitaine Clarke, chargé par le colonel James de revoir les calculs de l'astronome anglais, détermina la constante comme nous l'avons fait (*Philosophical magazine*, avril 1862, p. 306-308).

$$R = 2C \operatorname{tang} \frac{\beta}{2}.$$

Cette quantité ne croît pas indéfiniment, mais est maximum quand $\beta = 126°, 24', 53''$; pour des valeurs plus grandes de β, R diminue.

Il ne faut pas oublier que dans nos calculs nous avons pris le rayon de la sphère pour unité, de sorte que si l'on exprime en réalité ce rayon par a, il faut multiplier par a les valeurs de ρ et R trouvées précédemment. Quand $\beta = 120°$, $R = 1{,}6007\ a$; quand $\beta = 113° 20'$, $R = 1{,}5760$.

La projection n° XXIII est construite à l'aide de ces formules sur l'horizon du lieu situé à 23° 30′ de latitude N. (tropique du cancer). Nous dirons au paragraphe suivant pourquoi ce point a été choisi.

9. Nous allons maintenant parler de la projection imaginée par le colonel *Henri James*, directeur de l'*Ordnance Survey*, en cherchant à représenter un hémisphère en projection perspective de manière que l'altération totale (*misrepresentation*) fût la moindre possible (1). Il est arrivé ainsi à placer le point de vue à une distance de la surface qui diffère si peu de la moitié du rayon que cette valeur lui a paru la meilleure à adopter dans la pratique à cause de la simplicité de sa définition. Ainsi

$$D = 1{,}50a,$$

au lieu de 1,595 valeur adoptée par la Hire. Le colonel James voulant appliquer cette projection à la représentation d'une partie de la surface de la terre plus grande qu'un hémisphère, au lieu de faire coïncider le plan du tableau avec un grand cercle de la sphère, l'a supposé parallèle à l'écliptique et passant par la limite des tropiques, c'est-à-dire à une distance du centre du globe égale à a sin 23° 30′; le rayon de la circonférence qui limite la carte est alors égal à a cos 23° 30′, c'est-à-dire à 0,91706 a, et des longueurs égales de la surface sphérique ne sont, sur les bords de la carte, que de $\frac{1}{6}$ plus grandes que vers le milieu,

Le colonel James a choisi cette distance et cette position du ta-

(1) *New geometrical Projection of two-thirds of a sphere*, article compris dans la section *Useful Inventions* de l'*Address to the Royal Geographical Society of London delivered at the Anniversary meeting, on the 25th may* 1857 *by Sir R. J.* MURCHISON, p. 421-422 des *Proceedings*, vol. I, Londres 1857, in-8, ou p. CXLJ-CXLIJ du Journal, vol. XXVII, Londres 1857, in-8.

bleau parce que, en plaçant, comme il l'a fait dans les cartes dessinées dans ce système par J. O. *Jarrels*, le point central sur le tropique du Cancer (23° 30′ N.) et à 15° (long E. de Greenwich, 12° 40′ de Paris) on peut représenter dans le cercle de projection l'Europe, l'Asie, l'Afrique et l'Amérique ; enfin il a donné à ce système le nom de projection des deux tiers du globe quoique la surface représentée soit en réalité les $\frac{7}{10}$ de la surface totale.

10. Ce système ainsi défini ne jouit réellement de tous ses avantages que jusqu'à 90° du centre ; mais en étendant la projection de 90° à 113° 30′ comme l'a fait sir H. James, le capitaine A. R. *Clarke* (1) a montré que le point de vue devait être placé à une distance de la surface égale aux $\frac{11}{30}$ du rayon au lieu de $\frac{15}{30}$. Voici le calcul tel qu'il a été présenté par l'auteur.

Prenons le rayon de la sphère pour unité ; appelons D la distance de l'œil au centre, D′ celle du tableau au centre ; l'expression générale du rayon ρ des almicantarats sera

$$\rho = \frac{D' \sin \theta}{D + \cos \theta};$$

comme elle contient deux quantités arbitraires D et D′, nous pouvons en disposer pour rendre minimum l'altération totale de la carte pour toutes les valeurs de θ comprises entre 0 et 113° 30′. Nous avons vu précédemment que cette altération pouvait être exprimée par

$$\int_0^\beta \left[\left(\frac{d\rho}{d\theta} - 1 \right)^2 + \left(\frac{\rho}{\sin \theta} - 1 \right)^2 \right] \sin \theta d\theta = \int_0^\beta V \sin \theta d\theta.$$

Remplaçons donc $\frac{d\rho}{d\theta}$ par sa valeur $\frac{D'(D\cos\theta + 1)}{(D + \cos\theta)^2}$ et ρ par $\frac{D' \sin \theta}{D + \cos \theta}$, et nous aurons à rendre minimum par rapport à D et D′ l'intégrale

$$\int_0^\beta \left[\left(\frac{D'(D\cos\theta + 1)}{(D + \cos\theta)^2} - 1 \right)^2 + \left(\frac{D'}{D + \cos\theta} - 1 \right)^2 \right] \sin \theta d\theta = M.$$

L'intégration donne

$$M = D'^2 \Delta_1 + 2D' \Delta_2 + 4 \sin^2 \frac{\beta}{2},$$

(1) *On projections for maps applying to a very large extent of the Earth's surface, by Col. H.* James, *and Cap. A. R.* Clarke : *communicated by the authors ;* dans le *Philosophical Magazine*, cahier d'avril 1862, p. 306 à 312.

où les symboles Δ_1, Δ_2 sont

$$\Delta_1 = \frac{1+D^2}{N} = \frac{D(D^2-1)}{N^2} + \frac{(D^2-1)^2}{3N^3} - \frac{1}{3}\frac{(1-D)^2}{1+D} - 1,$$

$$\Delta_2 = (1+D)\log\frac{N}{1+D} + \frac{D^2-1}{N} - D + 1,$$

et

$$N = D + \cos\beta.$$

La condition du minimum exige que

$$\frac{dM}{dD'} = 0, \quad \text{et que} \quad \frac{dM}{dD} = 0,$$

donc

$$D'\Delta_1 + \Delta_2 = 0, \quad \text{et} \quad \frac{D'd\Delta_1}{dD} + 2\frac{d\Delta_2}{dD} = 0;$$

d'où

$$D' = -\frac{\Delta_2}{\Delta_1} \quad \text{et} \quad \Delta_2\frac{d\Delta_1}{dD} - 2\Delta_1\frac{d\Delta_2}{dD} = 0.$$

Substituant ces valeurs dans l'expression de M, nous trouvons

$$M = 4\sin^2\frac{\beta}{2} - \frac{\Delta_2^2}{\Delta_1},$$

expression qui ne contient plus que D; cette variable doit donc être déterminée de manière que $\frac{\Delta^2_2}{\Delta_1}$ soit maximum.

On y parvient très-facilement en calculant les valeurs de $\frac{\Delta^2_2}{\Delta_1}$ pour des valeurs données de D. On forme ainsi le tableau suivant :

D	$\log\Delta^2_2 - \log\Delta_1$
1,35	0,420732
1,36	0,420756
1,37	0,420762
1,38	0,420747
1,39	0,420665

En interpolant on trouve pour le minimum

$$D = 1{,}36763; \quad \log\Delta^2_2 - \log\Delta_1 = 0{,}4207623,$$

$$\frac{\Delta^2_2}{\Delta_1} = 2{,}634889; \quad M = 0{,}16261.$$

Le point de vue est ainsi aux $\frac{11}{30}$ environ du rayon de la surface de la sphère. L'expression du rayon des almicantarats est alors

$$\rho = \frac{1{,}66261\, a \sin\theta}{1{,}36763 + \cos\theta},$$

Quand $\theta = 113° 30'$, le rayon de la circonférence-limite devient

$$R = 1{,}5737,$$

qui diffère très-peu du rayon de la projection de M. Airy (*Balance of Errors*, corrigée par Sir Clarke).

La table suivante, qui donne les valeurs de ρ pour les valeurs de θ de 5° en 5° dans l'hypothèse de $a = 1$, a été calculée par le capitaine Clarke en prenant le rayon a pour unité. La projection n° XXII a été dressée dans ce système.

Ce genre de projection perspective convient assez bien pour représenter de grandes masses de terres et pour le tracé des cartes physiques ou géologiques ; pour les grandes cartes d'étoiles il doit être préféré à la projection stéréographique parce qu'il permet de représenter sans erreur exagérée sur les bords une grande partie du ciel, mais il ne possède pas l'importante propriété de conserver les angles et de représenter les constellations sans en altérer les formes.

Valeurs de $\rho = \frac{1{,}66261 \sin\theta}{1{,}36763 + \cos\theta}$.

θ	ρ	θ	ρ	θ	ρ	θ	ρ
0	0,0000	30	0,3722	60	0,7710	90	1,2157
5	0,0613	35	0,4361	65	0,8417	95	1,2935
10	0,1227	40	0,5009	70	0,9138	100	1,3713
15	0,1844	45	0,5666	75	0,9874	105	1,4484
20	0,2464	50	0,6335	80	1,0623	110	1,5233
25	0,3090	55	0,7016	85	1,1385	115	1,5945

11. Nous allons maintenant étudier les altérations que les projections zénithales font subir sur la carte aux angles, aux éléments de longueur et par suite aux surfaces.

Nous supposerons la projection faite sous l'aspect polaire avec le pôle au centre et les parallèles circulaires et concentriques ; mais,

comme un point quelconque de la sphère peut toujours être pris comme centre de la projection, ce que nous dirons des parallèles et des méridiens de la projection polaire pourra toujours s'appliquer aux almicantarats et aux cercles azimutaux relatifs à une position quelconque du centre.

ALTÉRATION DES ANGLES.

Considérons sur la sphère une direction quelconque faisant un angle α avec un méridien, et cherchons l'angle correspondant β de la carte, c'est-à-dire l'angle que fera avec le méridien de la projection la direction qui, sur la carte, correspond à la direction considérée sur la sphère. Appelons z l'azimut du sommet de l'angle.

Nous aurons évidemment sur la sphère

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{dz}{d\theta}\sin\theta,$$

et sur la carte

$$\operatorname{tang}\beta = \frac{\rho}{d\rho}\,dz.$$

Donc

$$\operatorname{tang}\beta = \frac{\rho d\theta}{d\rho\sin\theta}\operatorname{tang}\alpha = K\operatorname{tang}\alpha,$$

$$\operatorname{tang}(\beta-\alpha) = \frac{(K-1)\operatorname{tang}\alpha}{1+K\operatorname{tang}^2\alpha},$$

en posant

$$K = \frac{\rho d\theta}{d\rho\sin\theta}.$$

Remarquons d'abord que le rapport K et par suite l'altération $\beta-\alpha$ sont indépendants de l'azimut du sommet de l'angle, et restent par conséquent les mêmes pour des distances égales du centre de la projection.

Cette relation permet de tracer la rose des vents en un point quelconque de la carte, puisque, connaissant la loi

$$\rho = F(\theta)$$

qui la définit, on pourra calculer, pour toute valeur de θ, la fonction

$$\frac{\rho d\theta}{d\rho\sin\theta}.$$

Remarquons de suite que $\beta = \alpha$ pour $\alpha = 0$ et pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, ce que nous savions déjà puisque les almicantarats et les cercles azimutaux se coupent à angles droits sur la carte comme sur la sphère.

Cherchons maintenant le maximum B — A de l'altération $\beta - \alpha$ pour chaque valeur de θ; il nous suffira pour cela d'égaler à zéro la dérivée de la valeur de tang $(\beta - \alpha)$, en considérant α comme la véritable indépendante :

$$\frac{K-1}{\cos^2\alpha}(1+K)\tang^2\alpha) - \frac{2K(K-1)}{\cos^2\alpha}\tang^2\alpha = 0,$$

ou

$$1 - K\tang^2\alpha = 0,$$

d'où

$$\tang A = \pm\frac{1}{\sqrt{K}} = \pm\sqrt{\frac{d\rho}{d\theta}\frac{\sin\theta}{\rho}}.$$

Les deux directions qui, sur la sphère, font entre elles l'angle le plus altéré A sont donc symétriques de part et d'autre du méridien. Il en est de même des directions qui leur correspondent sur la carte, car, en remplaçant tang α par ces valeurs, on obtient :

$$\tang B = \pm\sqrt{K} = \frac{1}{\tang A},$$

équation qui conduit à poser

$$A + B = \frac{\pi}{2},$$

en excluant les arcs négatifs et ceux qui excèdent $\frac{\pi}{2}$. On déduit de là pour la déviation maximum :

$$\tang(B - A) = \frac{K-1}{2\sqrt{K}} = \frac{\rho d\theta - d\rho\sin\theta}{2\sqrt{\rho d\theta d\rho\sin\theta}},$$

ce qui montre que, au centre où $\theta = 0$ et $\rho = 0$, l'altération est toujours nulle.

Si nous voulons chercher la projection pour laquelle cette altération est partout nulle, il suffit d'égaler K à 1 :

$$\frac{\rho}{\sin\theta}\frac{d\theta}{d\rho} = 1,$$

d'où l'on tire

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{d\theta}{\sin\theta}, \quad \text{et par conséquent} \quad \rho = \operatorname{tang}\frac{\theta}{2};$$

c'est la loi de la projection stéréographique.

12. Pour terminer l'étude de l'altération des angles dans les projections zénithales, remarquons que, en tout point de la sphère ou de la carte, il existe une infinité de groupes de deux directions faisant entre elles le même angle sur la carte ou sur la sphère. M. Collignon a donné aux directions qui possèdent cette propriété le nom de *directions conjuguées.*

Soient α et α_1 les angles formés en un point M de la sphère par deux directions avec l'arc de grand cercle qui joint ce point à celui qui est pris pour centre de la projection ; soient β et β_1 les angles correspondants sur la carte. Les directions conjuguées seront définies par l'équation

$$\alpha_1 - \alpha = \beta_1 - \beta \quad \text{ou bien} \quad \beta - \alpha = \beta_1 - \alpha_1,$$

donc

$$\frac{\operatorname{tang}\beta - \operatorname{tang}\alpha}{1 + \operatorname{tang}\beta \operatorname{tang}\alpha} = \frac{\operatorname{tang}\beta_1 - \operatorname{tang}\alpha_1}{1 + \operatorname{tang}\beta_1 \operatorname{tang}\alpha_1}.$$

Connaissant la distance θ du point M au centre, on pourra remplacer tang β et tang β_1 par leurs valeurs en fonction de θ et de tang α ou tang α_1 ; on obtiendra ainsi la relation qui doit exister entre α et α_1 sur la sphère pour que les directions définies par ces angles soient des directions conjuguées. Remplaçons donc tang β par $\frac{\rho d\theta}{d\rho \sin\theta}\operatorname{tang}\alpha$; il viendra, après suppression du facteur commun $\frac{\rho d\theta}{d\rho \sin\theta} - 1$,

$$\frac{\operatorname{tang}\alpha}{1 + K\operatorname{tang}^2\alpha} = \frac{\operatorname{tang}\alpha_1}{1 + K\operatorname{tang}^2\alpha_1},$$

en posant comme précédemment

$$\frac{\rho d\theta}{d\rho \sin\theta} = K.$$

Cette équation est du second degré par rapport à tang α_1. Elle est satisfaite d'abord par tang α_1 = tang α, ce qui donne $\alpha_1 = \alpha$ en faisant abstraction des angles négatifs ou supérieurs à 180 degrés. Sup-

primant cette racine qui ne convient point à la question, il vient pour l'autre racine

$$\operatorname{tang}\alpha_1 = \frac{1}{K \operatorname{tang}\alpha}.$$

Le produit des tangentes des angles α et α_1 étant constant pour un même point M, les directions correspondantes appartiennent aux diamètres conjugués d'une hyperbole tracée sur le plan tangent à la sphère et qui aurait le point M pour centre, la tangente au grand cercle MO pour l'un de ses axes principaux, et dont enfin les asymptotes feraient avec cet axe l'angle dont la tangente est égale à $\frac{1}{\sqrt{K}}$.

Sur la carte les directions conjuguées appartiennent aussi aux diamètres conjugués d'une autre hyperbole ayant le rayon MO pour axe principal et dont les asymptotes font avec MO l'angle dont la tangente est égale à $\sqrt{K}$.

En d'autres termes, sur la carte comme sur la sphère, les asymptotes de l'hyperbole qui définit ces directions conjuguées ne sont autre chose que les directions de déviation maximum que nous avons déterminées tout à l'heure.

De là résulte un moyen géométrique de savoir si l'angle de deux directions MA, MB, sur la projection zénithale, reproduit en vraie grandeur l'angle des directions correspondantes sur la sphère. Par le point M (fig. 44) menons les droites MP, MP′ de déviation maximum sous des angles donnés par l'équation

$$\operatorname{tang} B = \pm\sqrt{K} = \pm\sqrt{\frac{\rho\, d\theta}{d\rho \sin\theta}}.$$

Menons ensuite une parallèle AB quelconque à MP′. Si le point I où elle coupe MP est le milieu du segment AB, les deux directions MB et MA sont des diamètres conjugués dans toute hyperbole ayant pour asymptotes MP, MP′, et par suite l'angle BMA reproduit en vraie grandeur l'angle formé sur la sphère par les directions correspondantes à MB, MA.

En effet, dans l'hyperbole rapportée à ses asymptotes, la somme des coefficients angulaires de deux diamètres conjugués est égale à zéro.

La direction MO est conjuguée avec une direction perpendiculaire

à MO au point M. La construction indique cette particularité que nous avions déjà reconnue.

Ainsi, quoique dans les projections zénithales les angles soient en général altérés, il y a en chaque point une infinité d'angles qui ne subissent aucune altération.

13. Nous allons maintenant appliquer à chacune des projections zénithales que nous avons étudiées les résultats auxquels nous sommes parvenus, et calculer les valeurs de K et de l'angle le plus altéré A ainsi que l'altération maximum B — A. Nous supposerons le rayon de la terre pris pour unité.

Nous avons trouvé, pour expression du rayon des almicantarats, dans les projections perspectives

$$\rho = \frac{D \sin\theta}{D + \cos\theta}.$$

Il en résulte

$$K = \frac{\rho}{\sin\theta} \cdot \frac{d\theta}{d\rho} = \frac{D + \cos\theta}{D\cos\theta + 1}.$$

$$\operatorname{tang} A = \pm\sqrt{\frac{D\cos\theta + 1}{D + \cos\theta}}, \quad \operatorname{tang}(B - A) = \frac{(D-1)(1-\cos\theta)}{2\sqrt{(D + \cos\theta)(D\cos\theta + 1)}}$$

La position du plan du tableau ne peut évidemment exercer d'influence sur les résultats.

Dans la projection de sir James $D = 1{,}50$

$$K = \frac{1{,}50 + \cos\theta}{1{,}50\cos\theta + 1}; \quad \operatorname{tang} A = \pm\sqrt{\frac{1{,}50 + \cos\theta}{D + \cos\theta}};$$

$$\operatorname{tang}(B - A) = \frac{0{,}25(1 - \cos\theta)}{\sqrt{(1{,}50 + \cos\theta)(1{,}50\cos\theta + 1)}}.$$

On voit que, à 90° du centre, l'angle le plus altéré sur la sphère est de 39° 14′ environ ; il est représenté sur la carte par une angle de 50° 46′ ; l'altération est de 11° 32′.

Dans la projection de sir James, modifiée par le capitaine Clarke, $D = 1{,}36763$ et par conséquent

$$\operatorname{tang}(B - A) = \frac{0{,}36763(1 - \cos\theta)}{2\sqrt{(1{,}36763 + \cos\theta)(1{,}36763\cos\theta + 1)}}.$$

A 90° du centre l'altération maximum n'est que de 8° 56′. Elle est de

13° 15′ dans la première projection de Parent où D = 1,595, de 15° 32′ dans la seconde où D = 1,732.

Dans la projection orthographique $\rho = \sin\theta$,

$$K = \frac{1}{\cos\theta};$$

$$\operatorname{tang} A = \pm\sqrt{\cos\theta}; \qquad \operatorname{tang} B = \pm\sqrt{\frac{1}{\cos\theta}};$$

$$\operatorname{tang}(B - A) = \frac{1 - \cos\theta}{2\sqrt{\cos\theta}} = \frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\sqrt{\cos\theta}}.$$

On voit que l'altération, nulle au centre, va en croissant avec θ et que, à la circonférence de la carte, pour $\theta = 90°$, elle est de 90 degrés ; quant à l'angle A le plus altéré sur la sphère, il est de 45° au centre et décroît jusqu'à zéro.

Dans la projection centrale $\rho = \operatorname{tang}\theta$,

$$K = \frac{\rho}{\sin\theta}\frac{d\theta}{d\rho} = \cos\theta;$$

$$\operatorname{tang} A = \pm\sqrt{\frac{1}{\cos\theta}}, \quad \text{et} \quad \operatorname{tang}(B - A) = -\frac{1 - \cos\theta}{2\sqrt{\cos\theta}} = -\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\sqrt{\cos\theta}}.$$

L'altération est donc égale, mais de signe contraire à celle de la projection orthographique.

Dans la projection équidistante $\rho = \theta$

$$K = \frac{\theta}{\sin\theta};$$

$$\operatorname{tang} A = \pm\sqrt{\frac{\sin\theta}{\theta}}; \qquad \operatorname{tang}(B - A) = \frac{\theta - \sin\theta}{2\sqrt{\theta\sin\theta}}.$$

Au centre $\theta = 0$ et le rapport $\frac{\sin\theta}{\theta}$ est égal à l'unité ; donc $A = \pm 45°$ et $B = \pm 45°$; la déviation est nulle ; l'angle A de déviation maximum décroît ensuite jusqu'à ce que $\theta = \frac{\pi}{2}$, et alors $\operatorname{tang} A = \pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}$, ou $A = 38° 35′ 10″$, tandis que B décroît jusqu'à 51° 24′ 50″ ; la déviation maximum est donc de 12° 49′ 40″.

Dans les projections que nous avons indiquées sous le nom de

projections intermédiaires, $\rho = n \operatorname{tang} \frac{\theta}{n}$, l'altération maximum croît avec n; quand $n = 3$, elle est de 7° 28′ 30″ à 90° du centre, et l'angle A est de 41° 15′ 45″; quand $n = 4$, à la même distance l'altération B—A est de 9° 52′ 44″ et l'angle A de 40° 3′ 38″.

Dans la projection zénithale équivalente de Lambert, $\rho = 2 \sin \frac{\theta}{2}$; on trouve alors

$$K = \frac{\rho}{\sin\theta} \frac{d\theta}{d\rho} = \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}}.$$

$$\operatorname{tang} A = \pm \cos \frac{\theta}{2}; \qquad \operatorname{tang}(B - A) = \frac{1}{2} \operatorname{tang} \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}.$$

L'angle A est égal à 45° pour $\theta = 0$, c'est-à-dire au centre de la carte; il décroît ensuite sur la sphère tandis que l'angle B augmente d'autant, et la déviation va en croissant; quand $\theta = \frac{\pi}{2}$, on a $\operatorname{tang} A = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ou A = 35° 15′ 52″, et la déviation maximum est de 19° 28′ 16″; elle continue à croître avec θ, et, à l'antipode du centre, lorsque $\theta = 180°$, on trouve A = 0 et B = 90°.

Dans la projection de sir Airy (*Balance of Errors*)

$$\rho = -2 \operatorname{cotang} \frac{\theta}{2} \log\cos \frac{\theta}{2} + \operatorname{tang} \frac{\theta}{2} \left(\operatorname{cotang}^2 \frac{\beta}{2} \log \operatorname{séc}^2 \frac{\beta}{2} \right),$$

et l'on peut calculer A et B pour chaque valeur de θ.

ALTÉRATION DES LONGUEURS.

11. Sur la sphère la distance des deux points définis par les coordonnés z et θ, $z + dz$ et $\theta + d\theta$ qui désignent l'une l'azimut et l'autre la distance au centre est exprimée par

$$\sqrt{\sin^2\theta\, dz^2 + d\theta^2};$$

la distance correspondante sur la carte zénithale par

$$\sqrt{d\rho^2 + \rho^2 dz^2}.$$

Soit m le rapport de la seconde distance à la première, rapport variable d'un point à l'autre de la carte, et variable aussi en chaque

point avec l'orientation de l'élément considéré, ou avec le rapport $\frac{dz}{d\theta}\sin\theta$ que nous avons reconnu être égal à la tangente de l'angle α que fait cet élément avec le méridien. On peut donc écrire

$$d\rho^2 + \rho^2 dz^2 = m^2(\sin^2\theta dz^2 + d\theta^2).$$

Cherchons la valeur de α qui rend m maximum ou minimum en un point donné.

Nous pouvons écrire, en remplaçant $\frac{dz}{d\theta}\sin\theta$ par tang α,

$$m^2 = \frac{d\rho^2 + \rho^2 dz^2}{\sin^2\theta dz^2 + d\theta^2} = \frac{\frac{d\rho^2}{d\theta^2} + \rho^2\frac{dz^2}{d\theta^2}}{1 + \operatorname{tang}^2\alpha} = \frac{d\rho^2}{d\theta^2}\cos^2\alpha + \rho^2\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\theta}.$$

Remarquons que si l'on calcule deux valeurs de m^2 correspondant à deux valeurs de α différant entre elles de $\frac{\pi}{2}$, la somme des deux valeurs de m^2 sera indépendante de α; on a en effet pour l'une

$$m^2_1 = \frac{d\rho^2}{d\theta^2}\cos^2\alpha_1 + \rho^2\frac{\sin^2\alpha_1}{\sin^2\theta};$$

et pour l'autre

$$m^2_2 = \frac{d\rho^2}{d\theta^2}\sin^2\alpha_1 + \rho^2\frac{\cos^2\alpha_1}{\sin^2\theta}.$$

Donc

$$m^2_1 + m^2_2 = \frac{d\rho^2}{d\theta^2} + \frac{\rho^2}{\sin^2\theta},$$

égalité remarquable dont nous aurons occasion de faire usage plus tard.

La valeur de α qui rend m ou m^2 maximum ou minimum s'obtiendra en égalant à zéro la dérivée de

$$\frac{d\rho^2}{d\theta^2}\cos^2\alpha + \rho^2\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\theta},$$

prise par rapport à la variable α;

$$-2\frac{d\rho^2}{d\theta^2}\sin\alpha\cos\alpha + \frac{2\rho^2}{\sin^2\theta}\sin\alpha\cos\alpha = 0,$$

ou

$$\sin\alpha\cos\alpha\left(\frac{\rho^2}{\sin^2\theta} - \frac{d\rho^2}{d\theta^2}\right) = 0.$$

Cette équation nous montre que les deux directions pour lesquelles m est maximum ou minimum sont données par les valeurs de α égales à 0 ou à $\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire coïncidant l'une avec l'almicantarat et l'autre avec le rayon.

Pour reconnaître celle des deux qui correspond au maximum, prenons la dérivée seconde de m^2 :

$$\cos 2\alpha \left(\frac{\rho^2}{\sin^2 0} - \frac{d\rho^2}{d\theta^2} \right),$$

et cherchons son signe pour $\alpha = 0$ et pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Supposons d'abord que $\frac{\rho^2}{\sin^2 \theta} - \frac{d\rho^2}{d\theta^2}$ soit positif, ce qui signifie

$$\frac{d\rho}{\rho} < \frac{d\theta}{\sin \theta}.$$

Nous pouvons intégrer les deux membres et comme, dans les projections que nous considérons, ρ devient nul en même temps que θ, nous pouvons écrire

$$\log \rho < \log \operatorname{tang} \frac{\theta}{2},$$

$$\rho < \operatorname{tang} \frac{\theta}{2}.$$

Supposons donc cette condition satisfaite, soit par la nature même de la projection, soit par une série de valeurs de θ; le signe de la dérivée seconde de m^2 dépendra alors du signe de $\cos 2\alpha$. Pour $\alpha = 0$, cette dérivée sera positive; elle sera négative pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$; il en résulte que m^2, et par conséquent m, sera minimum pour la première valeur, maximum pour la seconde.

Si le terme $\frac{\rho^2}{\sin^2 \theta} - \frac{d\rho^2}{d\theta^2}$ est négatif, et par suite si, dans la projection ou pour les valeurs de θ considérées, on a

$$\rho > \operatorname{tang} \frac{\theta}{2},$$

c'est le contraire qui a lieu; le rapport m sera alors maximum pour

$\alpha = 0$, c'est-à-dire sur le rayon, et minimum pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire sur l'almicantarat.

On voit de plus que le seul système dans lequel le rapport des distances est indépendant de l'angle α, c'est-à-dire reste le même dans toutes les projections (tout en variant avec θ), est la projection pour laquelle

$$\frac{\rho}{\sin\theta} = \frac{d\rho}{d\theta} \qquad \text{ou} \qquad \rho = \operatorname{tang}\frac{\theta}{2},$$

c'est-à-dire la projection stéréographique.

Cherchons les valeurs maximum ou minimum du rapport m; il suffit pour cela de faire $\alpha = 0$ ou $\alpha = \frac{\pi}{2}$ dans l'expression générale de m^2

$$m^2 = \frac{d\rho^2}{d\theta^2}\cos^2\alpha + \frac{\rho^2}{\sin^2\theta}\sin^2\alpha.$$

On trouve ainsi que, sur le rayon, ce rapport m_0 est égal à $\frac{d\rho}{d\theta}$, et que, sur l'almicantarat, $m_{\frac{\pi}{2}} = \frac{\rho}{\sin\theta}$.

Le rapport des surfaces élémentaires correspondantes de la carte et de la sphère est évidemment le produit $m_0 m_{\frac{\pi}{2}}$ des rapports maximum et minimum des distances élémentaires au point considéré. Si l'on considère, en effet, sur la sphère, un petit carré ayant l'unité pour chacun de ses côtés supposés d'ailleurs dirigés suivant le méridien et suivant le parallèle, sa surface sera exprimée par l'unité et le quadrilatère correspondant sur la carte aura pour côtés m_0 (suivant le rayon) et $m_{\frac{\pi}{2}}$ (suivant l'almicantarat), et pour surface le produit $m_0 m_{\frac{\pi}{2}}$.

Ainsi le rapport M^2 des surfaces élémentaires correspondantes de la carte et de la sphère est exprimé par

$$M^2 = \frac{d\rho}{d\theta}\frac{\rho}{\sin\theta}.$$

15. De même que nous avons cherché les plus grandes altérations d'angle, nous allons chercher les rapports m_0, $m_{\frac{\pi}{2}}$ et M^2 pour les diverses projections zénithales que nous avons considérées.

Pour les projections perspectives

$$\rho = \frac{D' \sin\theta}{D + \cos\theta},$$

$$m_\theta = \frac{d\rho}{d\theta} = \frac{D'(D\cos\theta + 1)}{(D + \cos\theta)^2}; \qquad m_{\frac{\pi}{2}} = \frac{\rho}{\sin\theta} = \frac{D'}{D + \cos\theta},$$

$$M^2 = \frac{D'^2(D\cos\theta + 1)}{(D + \cos\theta)^3}.$$

Dans le cas particulier de la projection stéréographique, si nous prenons pour plan de projection le plan tangent à l'hémisphère que nous voulons représenter, $D' = 2$,

$$m_0 = \frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}; \qquad m_{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}; \qquad M^2 = \frac{1}{\cos^4\frac{\theta}{2}}.$$

Le rapport m d'agrandissement des longueurs élémentaires reste le même autour de chaque point et ne varie qu'avec θ; ce rapport est égal à l'unité au centre de la carte, et croît du centre à la circonférence où il atteint la valeur 2. Le rapport M d'agrandissement des surfaces croît donc depuis 1 jusqu'à 4.

Dans la projection de sir James, si l'on suppose, comme l'a fait l'auteur, que le plan de projection soit à une distance du centre égale à sin 23° 30′, $D' = 1{,}1012$ et alors, au centre de la carte,

$$m_0 = m_{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2{,}270};$$

à 90° de ce centre

$$m_0 = \frac{1}{2{,}043}; \quad m_{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{1{,}362}; \quad M^2 = \frac{1}{2{,}7825};$$

mais si nous supposons que le plan de projection soit tangent à l'hémisphère que l'on veut représenter, on voit que, au centre, le rapport des longueurs élémentaires de la carte et de la sphère est égal à l'unité ainsi que le rapport des surfaces; c'est du reste ce qui a lieu pour toutes les projections perspectives lorsque l'on suppose le plan du tableau situé à l'extrémité du diamètre passant par le point de vue, car alors, pour $\theta = 0$ et $D' = D + 1$

$$m_0 = m_{\frac{\pi}{2}} = \frac{D'}{D + 1} = 1;$$

cette hypothèse sur la position du plan de projection permettra donc de comparer entre elles les projections perpectives en représentant sans altération les portions voisines du centre et voyant comment l'erreur croît avec la distance à ce centre.

Revenons à la projection de sir James ; si nous voulons l'étendre, comme l'a fait l'auteur, jusqu'à 113° 30′ du centre, nous trouvons, à cette limite,

$$m_0 = \frac{1}{1{,}201}; \qquad m_{\frac{\pi}{2}} = 2{,}265; \qquad M^2 = 1{,}88.$$

Dans la projection de sir James modifiée par le capitaine Clarke, à la même limite on trouve

$$m_0 = 1{,}149; \qquad m_{\frac{\pi}{2}} = 2{,}436; \qquad M^2 = 2{,}799.$$

Dans la première projection de Parent, à 90° du centre,

$$m_0 = 1{,}03; \qquad m_{\frac{\pi}{2}} = 1{,}63; \qquad M^2 = 1{,}68.$$

Dans la seconde projection de Parent

$$m_0 = \frac{1}{1{,}09}; \qquad m_{\frac{\pi}{2}} = 1{,}57; \qquad M^2 = 1{,}44.$$

Dans la projection orthographique, les valeurs générales de m_0 et $m_{\frac{\pi}{2}}$ sont

$$m_0 = \cos\theta; \qquad m_{\frac{\pi}{2}} = 1; \qquad M^2 = \cos\theta;$$

les almicantarats sont projetés en vraie grandeur, et sur les rayons le rapport d'agrandissement m_0 est égal à l'unité au centre de la projection et décroît jusqu'à la circonférence de la carte où il est nul ; le rapport M^2 passe par les mêmes valeurs ; à 60° du centre les surfaces ne sont que la moitié de celles qui leur correspondent sur la sphère.

Dans la projection centrale

$$m_0 = \frac{1}{\cos^2\theta}; \qquad m_{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\cos\theta}; \qquad M^2 = \frac{1}{\cos^3\theta};$$

chacun de ces rapports est égal à l'unité au centre de la projection, et infini pour $\theta = 90°$.

Dans la projection équidistante

$$m_0 = 1; \qquad m_{\frac{\pi}{2}} = \frac{\theta}{\sin\theta}; \qquad M^2 = \frac{\theta}{\sin\theta};$$

les rayons conservent leur véritable grandeur, et, sur les almicantarats, le rapport $m_{\frac{\pi}{2}}$, maximum en chaque point, croît depuis le centre où il est égal à l'unité jusqu'à ce que $\theta = 90°$, valeur pour laquelle il est égal à $\frac{\pi}{2} = 1{,}5708$; si l'on prolonge le carte au delà d'un hémisphère, ce rapport continue à croître jusqu'à l'infini.

Dans la projection zénithale intermédiaire $\rho = 3 \operatorname{tang} \frac{\theta}{3}$

$$m_0 = \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{3}}; \quad m_{\frac{\pi}{2}} = \frac{3 \operatorname{tang} \frac{\theta}{3}}{\sin\theta}; \quad M^2 = m_0 \, m_{\frac{\pi}{2}};$$

les rapports $m_0 \, m_{\frac{\pi}{2}}$ M^2 sont égaux à l'unité au centre de la projection ; quand θ croît jusqu'à 90°, le premier croît jusqu'à $\frac{4}{3}$ ou 1,333 ; le second jusqu'à $\sqrt{3}$ ou $1{,}7320_2$ le troisième jusqu'à 2,309.

Dans la projection $\rho = 4 \operatorname{tang} \frac{\theta}{4}$, le rapport m_0 croît depuis 1 jusqu'à 1,171, $m_{\frac{\pi}{2}}$ depuis 1 jusqu'à 1,6568, et enfin M^2 depuis l'unité jusqu'à 1,940.

Dans la projection équivalente zénithale de Lambert

$$m_0 = \cos \frac{\theta}{2}; \quad m_{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\cos \frac{\theta}{2}}; \quad M^2 = 1;$$

ainsi les longueurs des éléments des rayons sont réduites sur la carte dans le rapport de $\cos \frac{\theta}{2}$ à l'unité et les longueurs des éléments des almicantarats sont augmentées dans le même rapport. Quand θ croît de 0 à 90°, m_0 varie de 1 à $\frac{1}{1{,}414}$ et $m_{\frac{\pi}{2}}$ de 1 à 1,414.

On calculerait de même les rapports d'agrandissement dans la projection de sir Airy.

COMPARAISON DES PROJECTIONS ZÉNITHALES.

16. Si l'on dressait un tableau des valeurs de l'altération maximum des angles pour des valeurs assez rapprochées de θ, et un autre des rapports m_0, $m_{\frac{\pi}{2}}$ et M^2, on pourrait comparer entre elles les diverses projections zénithales et juger de leur mérite à diverses distances du centre. Mais une pareille comparaison est toute conventionnelle, et les résultats dépendent beaucoup du point de vue auquel on se place et de l'importance que l'on assigne à chacune des quantités qui entrent en comparaison.

On devra d'abord fixer l'échelle de construction de chaque projection et cette première détermination nécessitera une hypothèse sur la valeur du rayon de la circonférence qui devra limiter la carte ou sur la valeur du rayon au point que l'on considérera. Si l'on voulait s'affranchir de l'influence de ce rayon, on devrait supposer que, pour chaque valeur de θ, l'almicantarat coïncide avec le petit cercle correspondant de la sphère, et ne considérer que le rapport d'agrandissement m_0 normal à ce cercle ; il suffirait pour cela de diviser chaque valeur de m_0 par la valeur correspondante de ρ, et de comparer, pour les diverses projections, les quotients correspondants aux mêmes valeurs de θ.

On devra ensuite, en considérant l'usage auquel devra servir la carte, examiner quelles sont les parties où l'une des erreurs inhérentes à chaque projection devra être la moindre possible, et choisir le système qui satisfera le mieux à cette condition d'abord, puis aux autres du problème, sans toutefois exagérer les autres erreurs dans les mêmes parties de la carte ou en d'autres où elles pourraient avoir une influence notable sur le mérite relatif du canevas adopté.

On voit donc qu'il y a le plus souvent dans le choix à faire une question de compensation que l'intelligence du géographe résoudra bien mieux que ne pourraient le faire des règles fixes qui, dans la plupart des cas, ne seraient pas applicables ou ne donneraient pas tous les avantages possibles.

Ce que nous venons de dire à propos des projections zénithales, nous aurons occasion de le répéter plus loin pour un système quelconque de projection. Nous reviendrons alors sur les considérations qui doivent faire préférer l'emploi des projections zénithales qui se

prêtent mieux que toutes les autres à la représentation de la surface entière du globe ou d'un hémisphère.

Ces projections conviennent aussi très-bien pour la construction des cartes particulières, à cause de cette importante propriété que les altérations d'angles, de distances ou de surfaces y sont respectivement égales à égale distance du centre, et peuvent en tout point s'évaluer avec facilité.

Il est facile d'y tenir compte de l'aplatissement de la terre lorsque l'on veut construire une carte géographique. Il suffit, comme l'a indiqué Prony (1), de prendre pour rayon de la surface sphérique à représenter une moyenne géométrique entre les rayons de plus grande et de plus petite courbure de la surface ellipsoïdale au point choisi pour centre de la projection ; ce rayon aura donc pour valeur

$$R = \sqrt{\frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\lambda)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{a}{(1-e^2\sin^2\lambda)^{\frac{1}{2}}}}$$

$$= a\left(1-\tfrac{1}{2}e^2-\tfrac{1}{8}e^4\ldots..\right)\left(1+e^2\sin^2\lambda+e^4\sin^4\lambda\right)+\ldots.$$

en s'arrêtant aux termes en e^4 et appelant λ la latitude du centrede la projection ;

$$R = a[1-\tfrac{1}{2}e^2+e^2\sin^2\lambda-\tfrac{1}{8}e^4-\tfrac{1}{2}e^4\sin^2\lambda+e^4\sin^4\lambda+e^6(\ldots..)].$$

ou, plus simplemement, en négligeant les termes en e^4

$$R = a(1-\tfrac{1}{2}e^2+e^2\sin^2\lambda).$$

---

(1) *Voir* ci-dessus, ch. I, § 4.