www.e-rara.ch

Traité des projections des cartes géographiques

Germain, Adrien Adolphe Charles

Paris, [1865]

ETH-Bibliothek Zürich

Shelf Mark: Rar 18793

Persistent Link: https://doi.org/10.3931/e-rara-74932

Chapitre VI.

www.e-rara.ch
Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien – von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material – from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d'imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L'éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes – des débuts de l'imprimerie jusqu'au 20e siècle.

e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

Nutzungsbedingungen Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titelinformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

Terms of Use This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

Conditions d'utilisation Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

Condizioni di utilizzo Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]

Visual Library

CHAPITRE VI.

PROJECTIONS PAR DÉVELOPPEMENT ET LEURS MODIFICATIONS.

1. Nous avons déjà dit que pour que la surface à représenter sur un plan ne subît aucune altération dans les angles et dans les surfaces, il faudrait qu'elle fût développable comme le sont les surfaces coniques et cylindriques. Il est donc naturel, lorsque la portion du sphéroïde à représenter est peu considérable, de l'assimiler à une portion de surface de révolution développable se confondant sensiblement avec elle, de supposer tracés sur la seconde les méridiens et les parallèles suivant une loi qui donnera la plus grande analogie possible aux éléments des deux surfaces et de la développer ensuite sur un plan.

Les projections dont nous allons nous occuper portent le nom de *projections coniques* ou de *projections cylindriques* suivant qu'elles résultent du développement d'un cône ou de celui d'un cylindre.

PROJECTIONS CONIQUES.

2. Imaginons un cône tangent au globe suivant le parallèle qui occupe le milieu de l'espace à représenter, et supposons prolongés jusqu'à ce cône les plans des méridiens et des parallèles ; ce tronc de cône, qui diffère d'autant moins de la portion correspondante du globe que la zone à reproduire sera moins étendue en latitude, se trouvera divisé en quadrilatères mixtilignes représentant les quadrilatères curvilignes du sphéroïde et que l'on pourra regarder comme leurs équivalents. Il est bien évident que si nous développons ensuite ce cône tronqué en faisant coïncider l'une de ses génératrices avec une droite destinée à représenter le méridien correspondant de la carte, les parallèles seront représentés par des arcs de circonférences concentriques, et les méridiens par des droites partant toutes

du centre commun qui est le sommet de la surface conique ; le parallèle moyen gardera évidemment les longueurs de ses éléments, ce qui permettra de tracer chaque méridien en joignant le sommet aux points correspondants de ce parallèle.

Nous voyons que, par ce procédé, les quadrilatères sont rectangles comme sur la sphère, et que tous les détails situés sous la même latitude sont comparables, mais que des différences égales de latitudes sont représentées par des distances qui diminuent de plus en plus en allant du parallèle moyen vers le pôle et augmentent en se dirigeant de ce parallèle vers l'équateur. En outre, les différences de longitudes sont toutes plus grandes sur la surface conique que sur la sphère, excepté sur le parallèle moyen dont les degrés conservent leur véritable grandeur.

Pour que les latitudes ne soient pas altérées, on a imaginé de porter, à partir de l'intersection du méridien du milieu et du parallèle moyen sur ce méridien (fig. 45), des longueurs M*b*′, M*a*′... égales aux arcs MB, MA du méridien rectifié, de manière à espacer également les parallèles du cône comme ils le sont sur la surface de la sphère ; puis de prendre les distances S*b*′, S*a*′... pour rayons des projections des parallèles. Ces projections sont exprimées par des arcs ponctués sur la fig. 2 ; il n'y a plus par ce moyen d'erreur en latitude, et les distances en longitude sont déjà moins grandes que précédemment, comme l'indique la comparaison des arcs pleins et des arcs ponctués sur la même figure.

Quoique ce que nous venons de dire suffise pour tracer la projection conique, nous allons, pour plus de précision, appliquer le calcul à la construction.

Supposons d'abord la terre sphérique, soit a son rayon, λ la latitude du parallèle moyen que nous voulons représenter en véritable grandeur, $r = a \cos \lambda$ le rayon de ce parallèle, T la différence des longitudes des méridiens extrêmes de la carte, S l'angle au sommet du secteur développé.

L'arc mm' est égal au développement de l'arc rT du parallèle moyen ; donc, dans la figure 1,

$$\frac{180}{\pi a \cos \lambda} = \frac{\mathrm{T}}{\text{arc } mm'},$$

Or comme les lignes SM sont égales dans les deux figures, le rayon SM du parallèle moyen est égal à

$$SM = a \operatorname{cotang} \lambda ;$$

la figure 2 donnera donc

$$\frac{180}{\pi a \operatorname{cotang} \lambda} = \frac{S}{\operatorname{arc} mm'};$$

égalant les deux valeurs de arc mm' sur le cône et sur la projection, on arrive à

$$S = T \sin \lambda.$$

Ainsi l'on tracera un angle mSm' d'autant de degrés que le veut cette expression pour représenter l'angle total du développement ; on prendra $SM = a \operatorname{cotang} \lambda$ pour rayon du parallèle moyen de la projection, puis on portera de M vers a' et b' les longueurs développées en ligne droite du méridien MP, c'est-à-dire des arcs de 1°, 5°, 10°, etc., entre les limites des latitudes extrêmes. Si la carte doit comprendre d degrés en latitude, ab sera égal à $\frac{\pi a d}{180^\circ}$, et chacune des longueurs Ma', Mb' à $\frac{\pi a d}{90^\circ}$; puis on décrira du centre S des arcs qui figureront les parallèles de la carte. Les méridiens seront des droites partant du sommet S et passant par des points également distants pris sur mm'. En appelant θ l'angle de deux méridiens de la carte correspondant à l'angle t compté sur la sphère, on aura évidemment

$$\frac{\theta}{t} = \frac{S}{T} = \sin \lambda.$$

A la latitude l le rayon du parallèle sera égal à a [cotang λ — (l — λ)] et l'arc correspondant à la longitude t, à

$$at \sin \lambda [\operatorname{cotang} \lambda - (l - \lambda)].$$

L'erreur commise sur chaque degré de parallèle pourra donc s'exprimer par

$$a \sin \lambda [\operatorname{cotang} \lambda - (l - \lambda)] - a \cos \lambda ,$$

ou par

$$a(l - \lambda) \sin \lambda$$

Lorsque le centre commun S tombe en dehors des limites de la feuille, on construit les parallèles par points en les rapportant à deux axes de coordonnées rectangulaires, le méridien moyen et la tangente au parallèle moyen.

En appelant ρ le rayon de chaque parallèle, on pourra écrire

$$\rho = a \operatorname{cotang} \lambda - a(l - \lambda)$$
$$x = \rho \sin \theta = \rho \sin (t \sin \lambda)$$
$$y = a \operatorname{cotang} \lambda - \rho \cos (t \sin \lambda).$$

Quand on aura calculé ainsi les coordonnées d'autant de points que l'on voudra d'un même parallèle et celles du parallèle moyen pour lequel il suffira de faire dans les formules précédentes $l = \lambda$, on tracera les méridiens en joignant par des droites les points de même longitude; les autres parallèles s'obtiendront en portant sur ces méridiens, au-dessus et au-dessous du parallèle moyen, les longueurs des arcs de latitude.

Il est facile, dans la projection conique, de tenir compte de la forme sphéroïdale de la terre. Le rayon du parallèle moyen développé doit d'abord être modifié par la substitution de la grande normale au rayon de la terre, de sorte qu'en appelant a le rayon de l'équateur terrestre, le rayon de la projection du parallèle moyen dont λ est la latitude, sera

$$\frac{a \operatorname{cotang} \lambda}{(1 - e^2 \sin^2 \lambda)^{\frac{1}{2}}}.$$

Pour avoir ensuite les rayons des autres parallèles, on portera sur le méridien les longueurs des degrés de latitude telles qu'elles ont été calculées dans la table en prenant $\frac{1}{299,15}$ pour valeur de l'aplatissement.

L'angle θ de deux méridiens dont les longitudes diffèrent de t, sera exprimé par

$$\theta = \frac{t \sin \lambda}{(1 - e^2 \sin^2 \lambda)^{\frac{1}{2}}}.$$

Les coordonnées se calculent comme dans l'hypothèse de la terre sphérique.

Les avantages de la projection conique sont de rendre les erreurs inhérentes à tout canevas, indépendantes de la longitude, de permettre de comparer entre eux les éléments situés sous la même latitude, et de conserver les angles des méridiens et des parallèles; les principaux défauts sont de ne conserver ni les angles ni les surfaces et de ne donner les distances avec exactitude que dans le sens

des méridiens, les parallèles situés tant au-dessus qu'au-dessous du parallèle moyen excèdent ceux qui leur correspondent sur le globe, de sorte que cette projection est tout à fait impropre à représenter des pays étendus en latitude.

3. On attribue l'invention de la projection conique à *Claude Ptolémée* d'Alexandrie (150 ans après J.-C.), qui dans le XXIVe chapitre du premier livre de sa *Géographie*, donne deux méthodes pour représenter le monde connu de son temps; dans la première le célèbre géographe, après avoir montré la possibilité de voir les méridiens projetés en ligne droite, remarque que, comme il est impossible de conserver sur la carte le rapport exact des degrés de tous les parallèles, il suffit de conserver ce rapport pour le parallèle extrême nord passant par *Thulée*, et, pour l'équateur, de développer le parallèle de *Rhodes* (sur lequel avaient été faites le plus de recherches relatives aux degrés des parallèles) de façon que ses degrés conservent leur rapport véritable avec les degrés de méridien. Assignant 63° à la latitude de Thulée, et 36° à celle de Rhodes, Ptolémée prend pour rayon de ce dernier parallèle (fig. 46) GK = 79 *m* (*m* désignant la longueur d'un degré de méridien), nombre qui diffère très-peu de la cotangente du parallèle de 36° dont la valeur est 78,87 *m*; remarquons toutefois que rien, dans l'ouvrage de Ptolémée, ne semble indiquer que l'auteur ait eu en vue le développement d'un cône tangent à la terre; c'est plutôt par tâtonnements que par un calcul rigoureux qu'il a dû arriver à ce résultat. Quoi qu'il en soit, le rayon GS de l'équateur est pris égal à 79 *m* + 36 *m* ou 115 *m* et le rayon GP du parallèle de Thulée à 115 *m* — 63 *m* ou 52 *m*; remarquant ensuite que les degrés du parallèle de Rhodes sont à ceux de l'équateur dans le rapport $\frac{\cos 36^\circ}{1}$ ou environ $\frac{4}{5}$, Ptolémée porte sur ce parallèle à droite et à gauche du méridien du milieu 18 arcs de grand cercle de 4° (soit 4 *m*) représentant chacun 5° de ce parallèle, et trace les méridiens en joignant ces points au centre commun G. Les arcs QPO, TSR sont ainsi dans le rapport de PG à SG, soit $\frac{52}{115}$, rapport qui diffère très-peu du véritable $\frac{\cos 63}{1} = \frac{52{,}21}{115}$ qui existe entre les degrés du parallèle de Thulée et ceux de l'équateur, mais ils sont trop grands comparés à HKL. Comme Ptolémée étendait le monde connu à 16° 1/2 au sud de l'équateur, il trace à cette latitude l'*antiparallèle* de Méroë, lieu situé à 16° 1/2 au nord de l'équateur; il divise

cet arc comme celui qui passe par Méroë et trace les méridiens en lignes droites joignant ces points à ceux de l'équateur. Cette projection n'est, comme on le voit, qu'une altération grossière de la projection conique ; aussi Ptolémée lui préfère une autre méthode dont nous parlerons plus loin.

4. Nous avons dit que la projection conique ne pouvait convenir que pour représenter des pays peu étendus en latitude. En supposant que l'arc AB de latitude (fig. 47) soit très-petit, il n'y aurait pas d'inconvénient à prendre sa corde pour le côté du cône tronqué à développer. Dans ce cas les rayons des parallèles extrêmes seraient respectivement AO et BO, et la carte aurait une exactitude rigoureuse sur ces parallèles, mais ceux qui seraient intermédiaires pécheraient par défaut.

L'angle O ayant pour mesure $\frac{1}{2}$ arc supplément de AB — $\frac{1}{2}$ arc BP ou $\frac{l_a + l_b}{2}$ (en appelant l_a et l_b les latitudes extrêmes), le triangle rectangle AOa donne

$$\text{AO} = \rho_a = a \frac{\cos l_a}{\sin \frac{1}{2}(l_a + l_b)}.$$

De même

$$\text{BO} = \rho_b = a \frac{\cos l_b}{\sin \frac{1}{2}(l_a + l_b)}.$$

Mentionnons ici la mappemonde de Jean *Ruysch* publiée à Rome en 1508, et projetée en développement du cône ayant son sommet au pôle arctique, coupant la sphère à l'équateur et se terminant sur le plan prolongé du parallèle de 38° de latitude australe (1).

Gérard *Mercator*, le célèbre inventeur des cartes réduites, proposa le premier de remplacer, pour les cartes particulières, le cône tangent à la sphère par un cône sécant, traversant le globe sur deux parallèles symétriquement choisis de manière à balancer dans de justes proportions le rétrécissement et la dilatation des surfaces représentées dans le milieu et sur les bords de la carte. C'est sur ce principe que fut dressée la projection de la grande carte d'Europe tracée par Mercator en 1554 ; la convergence des méridiens y est déterminée par le rapport mutuel des parallèles de 40° et de 60° de latitude dont les degrés conservent leur véritable rapport avec les

(1) Elle est reproduite tout entière à l'échelle de 2/5 dans l'*Atlas du moyen âge de* LELEWELL, Bruxelles, 1857, in-8, planche XLIV.

degrés de méridiens tous égaux entre eux. Il y a alors contraction dans la zone intermédiaire et expansion dans les deux zones extrêmes.

5. Le procédé de Mercator fut adopté deux siècles après par l'astronome français Joseph-Nicolas *de l'Isle* pour la construction de la grande carte de la Russie publiée en 1745. Cette carte comprenant depuis le 40e degré de latitude nord jusqu'au 70e, le parallèle moyen répondait à 55° et les parallèles communs au cône et à la sphère étaient ceux de 47° 30′ et de 62° 30′ ; les méridiens étaient divisés en degrés égaux.

Le célèbre mathématicien *Euler* a étudié cette projection (1), et, après en avoir exposé les principes, a déterminé le cône qui satisfait aux deux conditions suivantes :

1° que les erreurs soient égales aux extrémités méridionale et septentrionale de la carte ;

2° qu'elles soient aussi égales à la plus grande de celles qui ont lieu vers le parallèle moyen.

Nous reproduisons ici ce travail qui, quoique appliqué à la carte de Russie, pourra servir de type pour les cartes des pays très-étendus en latitude.

Soit (fig. 48) l_a la moindre latitude du pays à représenter, l_b la plus grande ; AB la portion du méridien du milieu comprise entre ces deux latitudes extrêmes. Désignons par δ la grandeur de 1° de méridien ; soient P et Q les intersections du méridien central avec les parallèles dont les degrés doivent conserver sur la carte leur véritable rapport avec ceux de latitude, l_p et l_q les latitudes de ces deux parallèles, sur chacun d'eux un degré de longitude a respectivement pour valeur

$$\delta \cos l_p, \qquad \text{et} \qquad \delta \cos l_q.$$

Portons ces valeurs de 1°, Pp et Qq sur deux droites perpendiculaires à AB et que nous considérerons comme des arcs élémentaires de parallèles, et joignons pq ; cette droite représentera le méridien éloigné de 1° en longitude du méridien central AB, et le point d'intersection O sera le point de concours de tous les méridiens et le centre de tous les parallèles.

---

(1) *De projectione geographica de l'Isliana in mappa generali Imperii Russici usitata*, dans les *Acta Academiæ scientiarum imperialis Petropolitanæ pro anno MDCCLXXVII*, Saint-Pétersbourg, 1778, in-4, p. 143 à 153.

Cherchons d'abord la distance de ce centre O à l'équateur. Nous aurons de suite

$$\frac{Pp - Qp}{PQ} = \frac{Pp}{PO}, \quad \text{ou} \quad \frac{\delta(\cos l_p - \cos l_q)}{l_p - l_q} = \frac{\delta \cos l_p}{PO},$$

d'où

$$PO = \frac{\cos l_p (l_q - l_p)}{\cos l_p - \cos l_q}.$$

Ce centre une fois déterminé, on décrira avec OP une circonférence sur laquelle on portera des longueurs égales $\delta \cos l_p$; les droites qui joindront les points de division au centre O seront les méridiens distants de 1° de longitude ; en portant ensuite sur le méridien du milieu les degrés égaux de latitude, et, faisant passer des circonférences concentriques par chacun des points de division, on aura les parallèles.

Cherchons les erreurs qui résultent de cette construction sur les parallèles extrêmes de A et de B. D'abord l'angle $\omega = POp$ qui représente *un* degré de la sphère s'obtiendra par l'égalité

$$\omega = \frac{Pp}{PO} = \frac{\delta(\cos l_p - \cos l_q)}{l_p - l_q}$$

qui devient

$$\omega = \frac{\cos l_p - \cos l_q}{(l_q - l_p)\alpha},$$

en supposant $\delta = 1°$, et convenant d'exprimer le dénominateur $l_p - l_q$, non en degrés, mais en parties du rayon, ce qui revient à prendre $\alpha = 0{,}01745329$ pour valeur de 1° sur une circonférence de rayon égal à l'unité.

Appelons encore z la distance en degrés du centre O au pôle. La distance du point P au pôle étant exprimée par $90° - l_p$, celle de ce même point au point O le sera par $90° - l_p + z$ dont la valeur en parties du rayon sera

$$\alpha(90° - l_p + z).$$

On pourra donc écrire

$$PO = \frac{(l_q - l_p)\cos l_p}{\cos l_p - \cos l_q} = (90° - l_p + z),$$

d'où

$$z = \frac{(l_q - l_p)\cos l_p}{\cos l_p - \cos l_q} - 90° + l_p.$$

La distance du parallèle extrême de A au point O sera

$$AO = 90° - l_a + z,$$

et, en parties du rayon

$$AO = \alpha(90° - l_a + z);$$

en multipliant AO par ω on aura la valeur du degré sur ce parallèle

$$Aa = \frac{\delta(90° - l_a + z)(\cos l_p - \cos l_q)}{l_q - l_p},$$

au lieu de $\delta \cos l_a$; la différence de ces deux valeurs donne donc l'erreur sur le parallèle de A. En B cette erreur est la différence entre

$$\frac{\delta(90° - l_b + z)(\cos l_p - \cos l_q)}{l_q - l_p} \quad \text{et} \quad \delta \cos l_b.$$

Si nous cherchons, comme l'a fait Euler, à déterminer les parallèles de P et Q de manière à rendre les erreurs en A et B égales entre elles, il faut poser

$$\frac{(90° - l_a + z)(\cos l_p - \cos l_q)}{l_q - l_p} - \cos l_a = \frac{(90° - l_b + z)(\cos l_p - \cos l_q)}{l_q - l_p} - \cos l_b$$

ou

$$(l_a - l_b)(\cos l_p - \cos l_q) + (l_q - l_p)(\cos l_a - \cos l_b) = 0.$$

Nous pouvons représenter 1° sur les parallèles de A et de B respectivement par

$$\alpha(90° - l_a + z)\omega \quad \text{et} \quad \alpha(90° - l_b + z)\omega;$$

on obtiendra alors

$$\alpha(90° - l_a + z)\omega - \cos l_a = \alpha(90° - l_b + z)\omega - \cos l_b,$$

ou

$$\alpha(l_a - l_b)\omega = \cos l_a - \cos l_b,$$

d'où enfin

$$\omega = \frac{\cos l_a - \cos l_b}{\alpha(l_b - l_a)},$$

valeur qui devra s'exprimer en minutes et secondes.

Égalons de plus ces deux erreurs à la plus grande de celles qui peuvent avoir lieu entre A et B, en supposant d'abord que cette erreur maximum ait lieu sur le milieu X de AB ; la latitude de X étant $\frac{l_a + l_b}{2}$, l'erreur y sera égale à

$$-\left[\alpha\left(90° - \frac{l_a + l_b}{2} - z\right)\omega - \cos\frac{l_a + l_b}{2}\right],$$

car elle est évidemment de signe contraire aux erreurs de A et B. Nous aurons, en exprimant la condition énoncée,

$$\alpha(90^\circ - l_a + z)\omega - \cos l_a = \cos\frac{l_a + l_b}{2} - \alpha\left(90^\circ - \frac{l_a + l_b}{2} - z\right)\omega,$$

$$\alpha(90^\circ - l_b + z)\omega - \cos l_b = \cos\frac{l_a + l_b}{2} - \alpha\left(90^\circ - \frac{l_a + l_b}{2} - z\right)\omega.$$

Remplaçons ω par sa valeur $\dfrac{\cos l_a - \cos l_b}{\alpha\,(l_b - l_a)}$; il vient

$$\frac{(180^\circ - \frac{3}{2}l_a - \frac{1}{2}l_b + 2z)(\cos l_a - \cos l_b)}{l_b - l_a} = \cos l_a + \cos\frac{l_a + l_b}{2},$$

égalité qui se réduit à

$$(180^\circ - \tfrac{3}{2}l_a - \tfrac{1}{2}l_b + 2z) = \frac{l_b - l_a}{\cos l_a - \cos l_b}\left(\cos l_a + \cos\frac{l_a + l_b}{2}\right),$$

d'où l'on tire enfin z.

Appliquons ces calculs au cas de la carte de Russie

$$l_a = 40^\circ; \quad l_b = 70^\circ; \quad \frac{l_a + l_b}{2} = 55^\circ.$$

On calcule d'abord ω

$$\omega = \frac{\cos 40^\circ - \cos 70^\circ}{30\alpha} = \frac{0{,}4240243}{0{,}5235987} = 48'\,44''.$$

L'équation

$$(180^\circ - \tfrac{3}{2}l_a - \tfrac{1}{2}l_b + 2z)\alpha\omega = \cos l_a + \cos\frac{l_a + l_b}{2}$$

donne

$$(85^\circ + 2z)\alpha\omega = \cos 40^\circ + \cos 55^\circ = 1{,}33962,$$

or $\alpha\omega = 0{,}0141$; donc

$$2z = \frac{1{,}33961}{0{,}01410} - 85^\circ = 10^\circ, \quad \text{d'où} \quad z = 5^\circ.$$

Nous avons supposé que la plus grande erreur était au milieu de AB; cherchons quel est en réalité le point où l'erreur est maximum; soit x sa latitude; l'erreur y sera

$$\alpha(90^\circ - x + z)\omega - \cos x;$$

en égalant sa différentielle à zéro, nous obtenons

$$-\alpha\omega dx + \alpha dx \sin x = 0,$$

d'où

$$\sin x = \omega = 0{,}8098270,$$

et enfin

$$x = 54^\circ 4',$$

latitude qui définit un lieu peu éloigné du milieu de AB, dont la latitude est 55°.

En égalant l'erreur en x à l'erreur en A et B, on obtient

$$\alpha(180^\circ - l_a - x + 2z)\omega = \cos l_a + \cos x,$$

$$85^\circ 55' + 2z = \frac{\cos l_a + \cos x}{\alpha\omega} = 95^\circ 56'.$$

Donc

$$z = 5^\circ 0' 30''.$$

On peut donc prendre sans erreur appréciable $z = 5°$.
L'erreur en A et en B est alors exprimée par

$$\alpha\omega(90^\circ - l_a + z) - \cos l_a = 55\alpha\omega - 0{,}7660444 = 0{,}00946.$$

Ainsi le degré du parallèle de A (40° de latitude) sera exprimé par 0,77550 au lieu de 0,76604, valeur du degré correspondant sur la sphère; ce degré est donc trop grand de $\frac{1}{105}$ environ du degré du méridien ou de $\frac{1}{81}$ du degré réel du parallèle de 40°. On trouve de même que le degré du parallèle de 70°, en B, est trop grand de $\frac{1}{36}$ de sa valeur réelle qui est 0,34202.

Cette erreur, dit Euler, est parfaitement acceptable à cette latitude de 70°, et ainsi la position du centre des parallèles à 5° du pôle convient très-bien pour la carte de la Russie. Il ne faut pas oublier que les méridiens distants sur la sphère de 1° sont représentés par des droites faisant entre elles des angles de 48′ 44″.

Euler remarque encore que le grand cercle de la sphère le plus altéré dans cette projection est l'équateur dont chaque degré est égal à 1,33950, en prenant le degré de latitude pour unité; mais comme il ne figure pas dans la carte, cette erreur nuit peu à la projection.

Si du point F (fig. 49) représentant le méridien central, et situé par conséquent sur l'équateur à une distance FE du point E représentant 90° de la sphère, on abaisse FG perpendiculaire sur OE, cette droite représentera l'un des grands cercles perpendiculaires au

méridien OE ; sa longueur différera peu de sa longueur réelle 90°, car l'angle EOF étant égal à 72° 53′ et OF = OE à 95°, on a

$$FG = 95 \sin 72° 53' - 90°,79221.$$

Il en résulte que, dans cette projection, on peut obtenir les distances entre deux points sans commettre une grande erreur en mesurant à l'échelle des latitudes la droite qui les unit.

La projection n° XXXI a été dressée dans ce système.

6. Le savant anglais Patrice *Murdoch* a posé, en 1758, les principes d'une projection conique égale, *dans son ensemble seulement*, à la zone sphérique correspondante et ayant avec elle deux parallèles communs (1).

Soient (fig. 50) l_a, l_b les latitudes des parallèles extrêmes A*a*, B*b* qui limitent la zone à représenter ; M le milieu de AB, sa latitude sera $\frac{l_a + l_b}{2}$; a le rayon de la sphère exprimé en degrés, le degré étant pris pour unité.

Pour satisfaire aux conditions du problème, il faut, en supposant que PN et PO soient les rayons des parallèles extrêmes de la carte, que la droite ON soit égale à l'arc AB, et que la surface engendrée par la révolution de ON autour de l'axe *p*C soit égale à $2\pi a\,(ba)$.

Cette droite ON doit évidemment couper le quadrant PME en deux points η et ζ également distants du point M.

Appelons δ les angles égaux ηCM, ζCM ; on devra avoir

$$2\pi \mathrm{K}k \text{ arc AB} = 2\pi a\,(ab).$$

Or les triangles semblables K*ck*, MFC donnent

$$\frac{\mathrm{K}k}{\mathrm{FC}} = \frac{\mathrm{KC}}{\mathrm{MC}}; \quad \text{donc} \quad \mathrm{K}k = a \cos \frac{l_a + l_b}{2} \cos \delta,$$

et, en substituant,

$$\frac{l_b - l_a}{2} \cos \frac{l_a + l_b}{2} \cos \delta = \sin l_b - \sin l_a = 2 \sin \frac{l_b - l_a}{2} \cos \frac{l_a + l_b}{2};$$

---

(1) *Philosophical Transactions ; vol. L, part. II, for the year* 1758, Londres, 1759, in-4, p. 553, à 562 : *of the best form of geographical Maps, by the Rev.* Patrick Murdoch, M. A. F. R. S ; read feb. 9. 1758.

d'où

$$\cos\delta = \frac{2}{\frac{l_b - l_a}{2}} \sin\frac{l_b - l_a}{2} = \frac{\sin\frac{l_b - l_a}{2}}{l_b - l_a}.$$

On calculera facilement δ et par suite la distance du milieu K du méridien de la carte aux deux parallèles communs à la sphère et au cône.

Cherchons maintenant le rayon $Kp = R$ du parallèle du milieu :

$$\frac{Kp}{CF} = \frac{KC}{MF}, \quad \text{ou} \quad Kp = a\cos\frac{l_a + l_b}{2} \frac{\cos\delta}{\sin\frac{l_a + l_b}{2}},$$

donc

$$R = a\,\text{cotang}\,\frac{l_a + l_b}{2}\cos\delta.$$

Il ne reste plus qu'à tracer les méridiens par le simple développement du cône. Si nous appelons T la différence des longitudes des méridiens extrêmes du pays à représenter, S l'angle correspondant du développement, on devra avoir

$$TKk = S.Kp;$$

en remplaçant Kk par $a\cos\frac{l_a+l_b}{2}\cos\delta$ et Kp par $a\,\text{cotang}\,\frac{l_a+l_b}{2}\cos\delta$, il vient

$$S = T\sin\frac{l_a + l_b}{2}.$$

Murdoch, pour tracer les parallèles intermédiaires, divisait la droite ON en parties égales, de sorte que le rayon d'un parallèle quelconque était égal à

$$R + \frac{l_a + l_b}{2} - l.$$

Cette méthode, contraire aux conditions du problème posé par Murdoch, était tout arbitraire, mais avait l'avantage de diminuer un peu les défauts de la carte : c'est *Tobias Mayer* (1) qui, en repre-

(1) J. T. Mayer, *Anweisung zur Werzeichnung der Charten, cap III*, 1794 *Erlangen*, réédité en 1804, 1815, 1827.

nant le problème de Murdoch, a rempli la condition de conserver les deux parallèles η et ζ en leur donnant pour rayons

$$p\eta = pK - K\eta \quad \text{et} \quad p\zeta = pK + K\zeta,$$

et comme $K\eta = K\zeta = a \sin \delta$, on aura

$$p\eta = R - a \sin \delta = a \frac{\cos\left(\frac{l_a + l_b}{2} + \delta\right)}{\sin \frac{l_a + l_b}{2}},$$

$$p\zeta = R + a \sin \delta = a \frac{\cos\left(\frac{l_a + l_b}{2} - \delta\right)}{\sin \frac{l_a + l_b}{2}}.$$

Quelle que soit la méthode adoptée, cette projection ne peut convenir pour une bande de plus de 8 ou 10 degrés de latitude, et dans des limites aussi rapprochées presque toutes les projections coniques ont à peu près les mêmes avantages ; quant à la question de conserver la superficie totale de la carte, elle n'est que secondaire et oblige au contraire à comprimer les superficies et les distances dans la zone moyenne, tant en longueur qu'en largeur, et à les étendre dans les deux zones extrêmes dans toutes les directions.

7. Murdoch a indiqué une seconde projection conique qui a pour but d'obtenir l'exactitude de la perspective en plaçant l'œil au centre du globe comme dans la projection centrale et en s'assujettissant encore à la condition de conserver la surface totale de la zone à représenter (1).

Il suffit pour cela (fig. 51) d'imaginer des rayons visuels menés du centre C de la terre aux différents points de la surface ; leurs intersections avec la surface du cône sécant ayant pour axe la ligne des pôles donneront les points correspondants de la carte. Ainsi les points extrêmes O et N s'obtiendront en joignant le centre C aux points extrêmes A et B de la zone sphérique considérée. La distance CK qui détermine la position du cône s'obtiendra par la condition de conservation de la surface totale. Substituons à la détermination de CK celle de KO qui est la demi-longueur N. et S. de la carte ; nous aurons

(1) *Addenda to Mr. Murdoch's paper. Philosophical Transactions* (*ubi supra*, p. 568).

$$2\pi Kk \,.\, 2 \,.\, OK = 2\pi a(ab).$$

$$Kk = KC \cos\frac{l_a + l_b}{2} = OK \cos\frac{l_a + l_b}{2} \operatorname{cotang}\frac{l_b - l_a}{2}.$$

Donc

$$OK^2 \cos\frac{l_a + l_b}{2} \operatorname{cotang}\frac{l_b - l_a}{2} = a^2 \sin\frac{l_b - l_a}{2} \cos\frac{l_a + l_b}{2},$$

$$OK^2 = \frac{a^2 \sin^2\dfrac{l_b - l_a}{2}}{\cos\dfrac{l_b - l_a}{2}} = a^2 \operatorname{tang}^2\frac{l_b - l_a}{2} \cos\frac{l_b - l_a}{2},$$

et enfin

$$OK = a \operatorname{tang}\frac{l_b - l_a}{2}\sqrt{\cos\frac{l_b - l_a}{2}}.$$

Si nous appelons δ la différence des latitudes $l - \dfrac{l_a + l_b}{2}$ entre un parallèle quelconque et le parallèle moyen passant par K, la distance correspondante d sur la carte sera égale à

$$d = KC \operatorname{tang}\delta = a \operatorname{tang}\delta \sqrt{\cos\frac{l_b - l_a}{2}}.$$

Pour les parallèles communs à la sphère et au cône l'angle δ' sera défini par la relation

$$\cos\delta' = \sqrt{\cos\frac{l_b - l_a}{2}},$$

donc

$$K\eta = K\zeta = a\sqrt{1 - \cos\frac{l_b - l_a}{2}}\; a\sqrt{2}\sin\frac{l_b - l_a}{4}.$$

Les rayons des parallèles s'obtiennent très-facilement. D'abord

$$pK = R = CK \operatorname{tang} KCp = a \operatorname{cotang}\frac{l_a + l_b}{2}\sqrt{\cos\frac{l_b - l_a}{2}}.$$

Le rayon du parallèle supérieur, dont la latitude est l_b, sera

$$\rho_b = p0 = Kp - K0 = \frac{a\cos l_b\sqrt{\cos\dfrac{l_b - l_a}{2}}}{\sin\dfrac{l_a + l_b}{2}\cos\dfrac{l_b - l_a}{2}}.$$

Le rayon du parallèle inférieur, dont la latitude est l_a, sera

$$\rho_a = pN = Kp + KO = \frac{a \cos l_a \sqrt{\cos \frac{l_b - l_a}{2}}}{\sin \frac{l_a + l_b}{2} \cos \frac{l_b - l_a}{2}}.$$

Enfin le rayon d'un parallèle de latitude l sera

$$\rho_l = pK - d = \frac{a \sqrt{\cos \frac{l_b - l_a}{2}} \cos l}{\sin \frac{l_a + l_b}{2} \cos \left(l - \frac{l_a + l_b}{2} \right)}.$$

On pourra aussi, dans cette projection comme dans la précédente, tracer les parallèles par points à l'aide de leurs coordonnées rectangulaires x et y.

Les méridiens s'obtiendront encore par le simple développement du cône. L'angle du secteur développé sera donné par la formule

$$S = T \sin \frac{l_a + l_b}{2},$$

en appelant T la différence des longitudes des méridiens extrêmes.

C'est à tort que quelques auteurs ont pensé que cette projection, connue sous le nom de *seconde projection de Murdoch*, jouissait de la propriété de conserver les angles et par suite le rapport entre les arcs élémentaires de méridiens et de parallèles; elle convient un peu mieux que la première pour les *coniglobes* parce qu'elle donne l'aspect que l'on aurait en se plaçant au centre du globe, chaque point restant sur son rayon visuel. Mais elle ne doit pas être confondue avec la projection conique orthomorphe de Lambert, dont nous allons parler.

8. Signalons auparavant une troisième projection indiquée en quelques mots par Murdoch, dans laquelle la position du cône est donnée par la relation

$$\frac{CK}{CM} = \frac{\text{arc MA}}{\text{tang MA}},$$

d'où l'on déduit

$$CK = \frac{a \frac{\pi}{180} \frac{l_b - l_a}{2}}{\text{tang} \frac{l_b - l_a}{2}} = \frac{a \cdot \frac{l_b - l_a}{2}}{57{,}2957\ldots \text{tang} \frac{l_b - l_a}{2}}.$$

La condition de conservation de la surface totale donne les autres éléments.

La rayon moyen

$$pK = R = CK \operatorname{cotang} \frac{l_a + l_b}{2} = \frac{a \frac{l_b - l_a}{2} \operatorname{cotang} \frac{l_a + l_b}{2}}{57{,}2957\ldots \operatorname{tang} \frac{l_b + l_a}{2}}.$$

Les distances égales

$$KO = KN = \frac{a\,57{,}2957\ldots \sin \frac{l_b - l_a}{2} \operatorname{tang} \frac{l_b - l_a}{2}}{\frac{l_b - l_a}{2}}.$$

Les autres parallèles s'obtiennent en partageant les méridiens en parties égales.

Ce troisième système étant, sous tous les rapports, inférieur aux deux premiers, nous ne nous y arrêterons pas.

9. Lambert (1) est le premier qui ait indiqué un développement conique jouissant de la propriété de conserver les angles, excepté au sommet où les 360° ayant sur la sphère le pôle pour centre, sont évidemment représentés par un angle variable suivant les conditions du problème. Nous avons exposé avec détail aux §§ 4 et 8 du chapitre des projections sans déformation, la méthode employée par ce savant géomètre, ainsi que les résultats auxquels il est parvenu; nous avons dit aussi que l'illustre Gauss, cinquante ans après Lambert, a obtenu les mêmes résultats comme application de sa formule générale des projections conservant la similitude des représentations.

En appelant ρ le rayon d'un parallèle quelconque, z sa colatitude $90^e - l$, nous avons établi la formule

$$\rho = K\left(\operatorname{tang} \frac{z}{2}\right)^{\lambda},$$

dans laquelle λ indique le rapport entre l'angle de deux méridiens quelconques de la projection et l'angle correspondant sur la sphère, et K une longueur constante que nous avons prise égale à $\frac{1}{2}\pi a$.

Cherchons l'angle au sommet 2α du cône sécant à la sphère dont le développement doit donner le canevas de la carte. L'angle au cen-

(1) *Entwerfung der Charten*, sect. IV, p. 135.

tre du secteur développé étant égal à $\lambda . 360^0$, l'égalité de deux arcs correspondants quelconques du cône et de ce secteur donnera

$$2\pi\rho \sin\alpha = \frac{2\pi}{360}\rho\lambda . 360,$$

d'où

$$\sin\alpha = \lambda.$$

Le rapport d'agrandissement des arcs élémentaires est exprimé par

$$m = \frac{\lambda K \left(\operatorname{tang}\frac{z}{2}\right)^{\lambda}}{a \sin z},$$

et celui des surfaces élémentaires est le carré de m.

Nous avons vu comment on peut, dans la projection conique orthomorphe de Lambert, tenir compte de l'aplatissement de la terre.

Pour les cartes particulières la valeur de λ se détermine le plus souvent par la connaissance des colatitudes z_0 et z_1 des parallèles dont les degrés doivent conserver leur véritable rapport avec ceux de latitude et qui sont, par conséquent, communs à la sphère et au cône,

$$\lambda = \frac{\log\sin z_1 - \log\sin z_0}{\log\operatorname{tang}\frac{z_1}{2} - \log\operatorname{tang}\frac{z_0}{2}}.$$

Sir *John Herschel* (1), en traitant un cas particulier du problème de Gauss, a donné trois applications de la même formule pour les cas de $\lambda = \frac{2}{3}$, $\lambda = \frac{1}{2}$, $\lambda = \frac{1}{3}$; la première représente la surface totale du globe dans un secteur circulaire de 240°, la seconde dans un demi-cercle et la troisième dans un secteur de 120°.

10. Le docteur H. C. *Albers* de Lünebourg, après avoir étudié les trois projections de Murdoch (2) et en avoir montré les défauts, détermina une projection conique possédant la propriété de conserver les surfaces élémentaires aussi bien que la surface totale. Nous en avons déjà parlé (3) en traitant des projections équivalentes. Rappelons en quelques mots le principe de sa construction.

---

(1) *Voir* chap. II, § 11, note 3.

(2) *Ueber Murdoch's drey Kegelprojectionen von H. C.* Albers, inséré dans la *Monatliche Correspondenz* de Zach, février 1805, p. 97 à 114, et mars, p. 240 à 250.

(3) *Voir* chap. III, § 16.

Soient l_1 et l_2 les latitudes de deux parallèles qui doivent être communs au cône et à la sphère.

On calculera d'abord l'expression

$$K = \frac{1}{\sin\frac{l_1+l_2}{2}\cos\frac{l_2-l_1}{2}},$$

puis les rayons des deux parallèles l_1 et l_2 par les formules

$$\rho_1 = aK\cos l_1; \qquad \rho_2 = aK\cos l_2.$$

Le rayon d'un parallèle quelconque de latitude l aura pour expression

$$\rho = \sqrt{2aK(\sin l_1 - l) + \rho_1^2}.$$

Les méridiens s'obtiennent à la manière ordinaire par le simple développement du cône; les angles de ces méridiens entre eux sont réduits dans le rapport de 1 à K.

11. Lambert a indiqué aussi (1) toute une famille de projections coniques jouissant de la propriété de conserver les surfaces ; c'est ce que nous avons appelé les *projections isosphériques sténotères de Lambert.* Leur formule générale est

$$\rho = 2\sqrt{m}a\sin\frac{z}{2},$$

dans laquelle z désigne la colatitude de chaque parallèle, ρ le rayon de sa projection et m un coefficient constant tel que les angles des méridiens de la carte sont dans le rapport de 1 à m avec ceux de la sphère. Il en résulte que, si l'on appelle 2α l'angle au sommet du cône supposé tangent à la sphère, on doit avoir

$$\frac{1}{m} = \sin\alpha.$$

Ces projections sont remarquables par la facilité avec laquelle on construit graphiquement la valeur de chaque rayon ρ, le facteur $2a\sin\frac{z}{2}$ représentant la corde de l'arc de méridien qui joint, sur la sphère, le pôle au parallèle de colatitude z. La valeur de m se déter-

(1) *Voir* chap. III, §§ 13 et 16.

mine par la connaissance de la colatitude z_0 du parallèle dont les degrés devront sur la carte conserver leur rapport exact avec ceux de latitude, car on doit avoir

$$m = \frac{1}{\cos^2 \frac{z_0}{2}}.$$

Nous ne nous arrêterons pas davantage sur ce sujet que nous avons déjà traité.

PROJECTIONS CONIQUES MODIFIÉES.

12. Dans les projections coniques que nous venons d'examiner, les méridiens sont tous des génératrices du cône déterminées par les plans méridiens prolongés et les parallèles des cercles concentriques dont l'écartement dépend des propriétés secondaires que l'on peut donner à la projection. Leur principal avantage consiste dans la simplicité de leur construction qui n'exige que l'emploi de la règle et du compas, et dans leur propriété de conserver l'angle des méridiens et des parallèles ; mais leurs défauts les plus importants sont d'altérer beaucoup les distances prises dans le sens des parallèles et de changer le signe des erreurs de chaque côté des deux parallèles communs à la sphère et au cône. On doit donc reconnaître avec *Malte-Brun* que « quelque ingénieuses que soient les modifications par lesquelles « on a essayé de perfectionner la projection conique, elles aboutis- « sent toutes à faire perdre à cette projection sa simplicité et sa faci- « lité primitive sans obtenir complétement les autres avantages que « l'on voudrait lui donner (1). » Les géographes ont donc cherché, pour leurs cartes spéciales, des projections plus commodes et qui ne se rapportent que très-indirectement au développement d'une figure régulière quelconque.

13. La première de ces modifications a été imaginée par *Ptolémée* (150 ans environ ap. J.-C.), qui en expose les principes dans le chap. 24 de sa Géographie (1er livre), après avoir indiqué la projection conique dont nous avons déjà parlé au § 3.

Pour représenter le monde connu de son temps, Ptolémée remarque d'abord que le parallèle de Syène, dont la latitude est 23° 50′ N, occupe à peu près le milieu de l'espace à construire limité par le parallèle de

(1) *Précis de la géographie universelle*, par Malte-Brun, Paris 1810, t. II, p. 114.

Thulé (63° N.) et par l'*antiparallèle* de Meroë, (16° 3′ S.) Il suppose alors l'œil du spectateur dans le prolongement du rayon qui passe par le parallèle de Syène : « l'équateur et les parallèles, inclinés de 23° 50′ « sur ce rayon, deviennent les bases circulaires d'autant de cônes « obliques ayant tous l'œil pour sommet, et paraissent comme des « arcs de cercle parallèles ayant leur partie convexe tournée vers le « sud, tandis que les méridiens situés des deux côtés du méridien « moyen sont vus comme des arcs dont la concavité est tournée « vers le méridien moyen et qui deviennent de plus en plus con- « caves à mesure qu'ils s'en éloignent. » Mais au lieu de développer ces principes conformément à la perspective, Ptolémée détermine les lignes de sa projection d'après des proportions arbitraires, combinées de manière à conserver autant que possible la configuration des pays.

Après avoir choisi (fig. 52) une longueur arbitraire égale à l'unité pour représenter le degré de grand cercle de la sphère, il décrit une circonférence d'un rayon égal à 90 degrés, de manière que le diamètre vertical représente le développement du demi-méridien central, et porte EZ = (23° 50′); Z est ainsi au point de l'équateur dont le centre sera à l'intersection du diamètre vertical et de la perpendiculaire élevée sur le milieu de la corde BZ. Il est facile de calculer la distance HZ, rayon cherché de l'équateur,

$$ZH = \frac{ZB}{2} \cdot \frac{1}{\sin EBZ}, \quad \text{et} \quad \operatorname{tang} EBZ = \frac{EZ}{BE} = \frac{23°\,50'}{90°} = \operatorname{tang} 14°\,49'\,56'',3,$$

d'où

$$ZH = \frac{90°}{2\cos(14°,49',56'',3)} \frac{1}{\sin(14°,40',56'',3)} = \frac{90}{\sin(29°,39',52'',6)} = (181°\ 50'\ 81).$$

Ptolémé, par les régles de l'ancienne trigonométrie, trouve ZH = 181° 50′ et prend cette valeur pour rayon de l'équateur. Pour espacer également les autres parallèles il prend pour rayon de ces divers cercles 181° 50′ augmentés de la latitude australe ou diminués de la latitude boréale.

Ptolémée trace alors (fig. 53) le rectangle ABCD dont la longueur 180° égale le double de la hauteur 90°, et le divise en deux parties égales par la perpendiculaire EK. Il porte d'abord 16° 3′ de K en Z, puis 181° 50′ de Z en H pour déterminer le centre commun H. Si l'on prend ensuite ZF = 23° 50′ et ZM = 63°, les cercles passant par H, Z, F, M seront l'antiparallèle de Meroë, l'équateur, le parallèle de

Syène et celui de Thulé. On porte ensuite sur ces quatre arcs de cercle les longueurs de leurs degrés qui sont cos (16° 3′), 1, cos(23° 50′) et cos 63°; on obtient les méridiens en faisant passer des *courbes mécaniques* par les quatre points correspondants de ces arcs de cercle.

Ptolémée recommande cette construction comme plus exacte que la première qu'il donne dans le même chapitre et que nous avons exposée au paragraphe 3, parce que l'équateur et trois parallèles conservent leurs véritables degrés de longitude tandis que les autres sont très-peu altérés; ainsi sur le parallèle de Rhodes le rapport des degrés à ceux de l'équateur se trouve être de $\frac{4}{5}$, valeur qui, sans erreur appréciable, peut être considérée comme égale au cosinus de Rhodes, 0,80901.

Si nous nous sommes étendu aussi longuement sur cette seconde projection de Ptolémée depuis longtemps abandonnée, c'est pour rectifier quelques erreurs des géographes modernes dont quelques-uns ont cru voir dans les deux projections de Ptolémée l'idée et jusqu'aux principes de la projection stéréographique, antérieure de trois cents ans, et dont d'autres ont attribué au géographe alexandrin le mérite de l'invention de la projection connue aujourd'hui sous le nom de *projection de Bonne* ou *de la carte de France*. Il suffit de remarquer, pour répondre à ces derniers, que la seconde projection de Ptolémée n'est pas le développement du cône tangent au parallèle de Syène, puisque le rayon de ce parallèle est égal à 158 degrés au lieu de 129,69, valeur de la cotangente de 23° 50′; le cône ayant son sommet au point pris pour centre commun des parallèles serait tangent à la sphère le long du parallèle de 19° 20′ environ, latitude qui s'éloigne trop de celle de Syène pour que la différence puisse être attribuée à une erreur de calcul. Il faut donc reconnaître que Ptolémée n'avait pas l'idée d'un cône tangent à la terre le long du parallèle moyen, et que sa construction est tout arbitraire.

14. Cette projection demeura oubliée pendant des siècles, jusqu'à la renaissance où *Bernard de Sylva*, d'Éboli, en publiant à Venise, en 1511, une nouvelle édition de la géographie de Ptolémée, en agrandit le cadre pour y faire entrer les terres nouvellement découvertes (1). Elle commença dès lors à se transformer entre les mains des géographes tels que *Apianus* (*Pierre Benewitz*, 1520), *Oronce*

(1) *Voir* LELEWEL, Atlas de la géographie du moyen âge, pl. XLV.

Fine (1532), *Guillaume le Testu* (1566) (1), qui remplacèrent la construction arbitraire de Ptolémée par le développement du cône tangent le long du parallèle moyen et conservèrent les véritables grandeurs des degrés de chaque parallèle, de manière à déterminer chaque méridien par une série de points correspondants.

Cette nouvelle projection est généralement connue sous le nom de *projection de Bonne*, du nom du géographe français qui, en 1752, en fit le premier ressortir tous les avantages dont les principaux sont :

1° que le méridien du milieu représenté par une droite coupe tous les parallèles à angle droit ;

2° que le parallèle moyen, qui a pour rayon la cotangente de sa latitude, coupe tous les méridiens à angle droit ;

3° que les trapèzes de la surface sphérique sont représentés par des trapèzes curvilignes dont les côtés parallèles sont respectivement égaux en longueurs aux côtés qui leur correspondent sur la sphère ; et comme les hauteurs de ces trapèzes sont aussi partout égales, il en est de même de leurs surfaces ; mais à mesure qu'on s'éloigne du méridien central, ils s'allongent dans le sens de l'une de leurs diagonales et se rétrécissent dans le sens de l'autre.

C'est là le principal défaut de ce développement et ce qui le rend impropre à représenter non-seulement un hémisphère entier, mais encore une étendue considérable de pays.

Au lieu de déterminer les intersections des méridiens et des parallèles par la construction directe, on les construit en réalité à l'aide de leurs coordonnées rapportées à deux axes rectangulaires, qui sont le méridien central et la tangente au parallèle moyen.

Appelons ρ_1 (fig. 54) le rayon du parallèle moyen de latitude l_1 ; nous aurons d'abord

$$OA_1 = \rho_1 = a \operatorname{cotang} l_1.$$

Désignons par δ la longueur de l'arc $A_1 A$ compris entre le parallèle moyen $C_1 A_1 B_1$ et le parallèle CAB du point cherché M ; δ sera la différence des latitudes de ces deux parallèles, $l_1 + \frac{\delta}{a}$ sera donc la latitude du point M. On aura

$$MA = \rho 0 = ta \cos\left(l_1 + \frac{\delta}{a}\right),$$

(1) *Voir* au dépôt géographique des affaires étrangères la carte manuscrite de Guillaume le Testu, qui donne le développement des deux hémisphères nord et sud, projetés en regard l'un sous l'autre, chacun sur le parallèle moyen respectif de 15°.

$$\rho = \rho_1 - \delta = a \operatorname{cotang} l_1 - \delta,$$

$$x = \mathrm{MQ} = \rho \sin\theta, \quad y = \mathrm{MP} = \rho_1 - \rho\cos\theta = a \operatorname{cotang} l_1 - \rho\cos$$

Il est facile de tenir compte, dans ces calculs, de la forme sphéroïdale de la terre ; il faut pour cela multiplier cotang l_1 par la grande normale N_1 et remplacer l'arc sphérique δ par l'arc elliptique S. On aura alors

$$\mathrm{N}_1 = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 l_1)^{\frac{1}{2}}}; \quad \rho_1 = \mathrm{N}_1 \operatorname{cotang} l_1,$$

$$\rho = \mathrm{N}_1 \operatorname{cotang} l_1 - \mathrm{S}; \quad \theta = \frac{t\mathrm{N}_1 \cos\left(l_1 + \frac{\delta}{a}\right)}{\rho},$$

en ayant soin de remplacer, dans la valeur de θ, $\frac{\delta}{a}$ par le nombre de degrés qui exprime la différence des latitudes du parallèle considéré et du parallèle moyen. Les coordonnées se calculent ensuite par les formules

$$x = \rho \sin\theta; \quad y = \rho_1 - \rho\cos\theta.$$

Cette projection, très-employée depuis Bonne par *de l'Isle*, *d'Anville* et d'autres géographes pour les cartes générales telles que celles des quatre parties du monde, a été adoptée dès 1803 par le *Dépôt de la guerre*, comme répondant le mieux aux besoins des divers services publics, et notamment pour la construction de la grande carte de France levée par les officiers d'état-major. Comme elle est presque universellement employée aujourd'hui pour les cartes topographiques détaillées basées sur un levé trigonométrique, nous y reviendrons longuement, ainsi que nous l'avons déjà annoncé au chapitre des projections équivalentes, et nous étudierons alors les altérations d'angles et de longueurs ainsi que des détails de construction.

La projection n° XVII représente un hémisphère entier développé sur le parallèle moyen de 45° ; quoique la projection de Bonne ne doive jamais être employée pour des différences de latitudes et de longitudes aussi considérables, nous donnons cette application parce qu'elle montre bien les avantages aux environs du méridien central et du parallèle moyen, et les défauts à mesure qu'on s'en éloigne.

15. Si l'on prend pour parallèle central du développement l'équateur lui-même, le sommet du cône s'éloigne à l'infini et les parallèles sont alors représentés par des droites parallèles, espacées et divisées

comme le sont les parallèles du globe. Il résulte de cette construction, dont la projection, figure n° XVIII, offre l'application à la représentation de la surface terrestre entière, que, dans le sens des parallèles, la carte a partout des dimensions égales à celles du globe, et que les surfaces sont aussi partout conservées (1), comme dans la projection précédente dont celle-ci n'est qu'un cas particulier; mais la déformation y est plus considérable encore à cause de l'obliquité qu'y prennent les méridiens dès qu'on s'éloigne du méridien central et de l'équateur; de même aussi les distances ne peuvent être rigoureusement mesurées que sur les méridiens et les parallèles, et sont très-altérées dans le sens des diagonales de chaque trapèze; ce système ne peut donc convenir que pour représenter des pays peu étendus en latitude et traversés par l'équateur; c'est celui que l'on adopte généralement pour les cartes d'Afrique.

Les formules de la projection précédente deviennent, en prenant pour axes des coordonnées l'équateur et le méridien principal,

$$y = \frac{\pi}{180}\, al,$$

$$x = \frac{t\pi}{360}\, a \cos l = \mathrm{K} \cos \frac{y}{a}.$$

L'équation $x = \frac{y}{a}$ étant celle d'une sinusoïde, nous adopterons avec M. d'Avezac, pour désigner cette projection, le nom de *sinusoïdale* qui, en rappelant la nature des courbes méridiennes, en indique de suite la forme.

Il est très-facile d'y tenir compte de l'aplatissement de la terre, en ne divisant plus le méridien du milieu en parties égales, mais en prenant ces parties de mêmes longueurs croissantes vers le pôle que les arcs de 1° du méridien elliptique. En outre, on portera sur chaque parallèle les longueurs correspondantes des arcs de longitude calculées dans la table I; l'ordonnée x sera donnée par la formule

$$x = \frac{t\pi}{360}\, \mathrm{N} \cos l,$$

en continuant de désigner par N la grande normale

$$\mathrm{N} = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 l)^{\frac{1}{2}}}.$$

(1) *Voir* chap. III, § 6.

Cette projection a été imaginée par Nicolas *Sanson* d'Abbeville qui, en 1650, publia les cartes de l'Europe, de l'Asie, de l'Afrique et des deux Amériques, dans ce système de représentation (1).

Cinquante ans plus tard, l'astronome anglais Jean *Flamsteed* employa cette projection devenue usuelle en France pour la rédaction de son atlas céleste publié seulement en 1729; c'est donc contre toute justice qu'elle est vulgairement désignée sous le nom de cet astronome.

16. Au lieu de porter à l'infini le sommet du cône tangent à la sphère dans la projection du Dépôt de la guerre, nous pouvons supposer que ce sommet se rapproche de la surface de la sphère jusqu'à se confondre avec le pôle; le cône devient alors un plan tangent et les parallèles sont encore représentés par des arcs de cercle équidistants ayant tous le pôle pour centre; si l'on porte sur chacun d'eux des longueurs égales à celles qui leur correspondent sur la sphère, la projection que l'on obtient a pour formules

$$\rho = az; \qquad \theta = \frac{t \sin z}{z},$$

et conserve, comme les deux précédentes, la propriété de représenter les surfaces en véritable grandeur; elle est due à *Jean Werner*, de Nüremberg, qui, en 1514, à la suite d'une traduction avec commentaire du premier livre de la Géographie de Ptolemée, indique trois systèmes de représentation du monde entier avec des parallèles concentriques autour du pôle et équidistants; dans le premier cas l'équateur est représenté par un cercle entier et divisé en 360° plus grands évidemment que les degrés de latitude, dans le rapport du quadrant au rayon (projection n° XIX); dans le second cas, dont nous venons de parler et qui seul conserve les surfaces, les degrés de l'équateur sont faits égaux aux degrés de latitude, ce qui réduit à environ 229° 11′ l'angle au pôle sous-tendu par l'arc qui représente l'équateur; enfin, dans le troisième cas, les 360° de l'équateur sont représentés par un arc de cercle de 240°, ce qui attribue aux degrés de longitude une valeur un peu plus forte qu'aux degrés de latitude, à peu près dans le rapport de l'arc de 30° à son sinus. Dans les trois cas les degrés de longitude sont déterminés sur chaque parallèle conformément à leur rapport réel avec le degré équatorial.

---

(1) *Voir* l'atlas in-folio n° 3377, au département géographique de la bibliothèque Impériale. Ces cartes ont été plusieurs fois rééditées.

Le canevas n° XXXII donne l'application de la troisième projection de Werner à la représentation de la surface entière du globe.

17. Les projections coniques et leurs modifications dont nous avons parlé jusqu'ici ont toutes pour but principal de substituer à la zone sphérique que l'on veut représenter une zone développable sur laquelle les méridiens et les parallèles sont supposés tracés de manière que le développement jouisse de telle propriété que l'on veut. Ces projections conviennent surtout pour représenter des zones étroites, c'est-à-dire peu étendues de part et d'autre d'un parallèle moyen que les méridiens coupent à angle droit et sur lequel la projection atteint son plus grand degré de perfection.

Il n'en est plus de même lorsque le pays à représenter est très-étendu en latitude ou composé d'États détachés tels que les États-Unis, parce qu'il devient alors impossible de choisir un même parallèle central pour chacun d'eux ; aussi l'Amérique et l'Angleterre ont-elles adopté, pour le tracé des cartes embrassant une grande portion de la surface terrestre, un système qui a pour but de remplacer chaque zone terrestre élémentaire par la zone conique élémentaire correspondante et de conserver la rectangularité des méridiens et des parallèles.

Cette projection a reçu en Amérique le nom de *projection polyconique rectangulaire* qui en peint de suite le tracé.

Considérons le cas général du sphéroïde entier développé le long d'un méridien central quelconque. Au pôle nord le cône tangent se confond avec le plan tangent et, à mesure qu'on s'éloigne du pôle, son sommet se recule le long de l'axe terrestre prolongé en donnant à chaque parallèle du développement un centre de plus en plus reculé et un rayon qui croît à mesure que la latitude diminue et qui est partout égal à la cotangente de cette latitude. A 45° de latitude les rayons de la terre et du parallèle sont égaux ; enfin, le cône devient un cylindre à l'équateur qui est représenté par une droite perpendiculaire aux méridiens. Dans l'hémisphère austral le cône occupe par rapport à l'équateur des positions symétriques à celles qu'il a occupées dans l'hémisphère boréal ; la courbure des parallèles croît ainsi en sens inverse jusqu'au pôle antarctique représenté comme le pôle nord par un point situé à 90° de l'équateur. On obtient ainsi une figure à deux axes rectangulaires (proj. n° XXXVI) dont le plus petit est le méridien central rectifié, et dont le plus grand, double du premier, représente l'équateur entier développé.

Le méridien-limite, qui est en réalité la seconde moitié du méridien central, s'allonge, de chaque côté de la figure, de plus de deux fois et demie sa longueur véritable. Les méridiens sont comme sur la sphère et sur chacun des cônes assujettis à couper chaque parallèle à angles droits. Mais comme il est impossible de conserver à la fois les angles et les surfaces, il en résulte une altération très-sensible dans les longueurs des degrés de parallèles dont l'équateur est le seul qui conserve ses véritables dimensions.

Un autre défaut important consiste dans l'inégalité des distances méridiennes entre les parallèles successifs et dans l'accroissement des degrés des méridiens à mesure que l'on s'éloigne du méridien central seul développé en vraie grandeur. Ce défaut rend impossible l'emploi d'une échelle pour la mesure, même approchée, des longueurs, dans des directions autres que l'équateur et le méridien central.

Nous étudierons plus loin cette projection d'après l'exposé qui en a été donné en 1860 par le colonel *H. James*, directeur du Département topographique du bureau de la Guerre (1), et nous donnerons des tables qui en facilitent la construction.

Le colonel James, pour rendre compte de cette projection, suppose d'abord la terre représentée par un globe creux et très-mince, en papier par exemple, que l'on coupe par un grand nombre de plans parallèles passant par les parallèles terrestres équidistants en latitude; on coupe encore ce globe le long du demi-méridien opposé à celui qui doit servir de méridien central, et l'on ouvre le globe entier sur un plan de manière à considérer chaque bande de la surface du globe comme une portion d'une ceinture circulaire, à l'exception de l'équateur qui se développe en ligne droite. Tous les points de chaque parallèle se placent sur un arc de cercle dont le rayon est égal à la cotangente de la latitude correspondante, et les centres de tous ces cercles sont sur la droite qui représente le méridien central. Cette manière d'envisager la projection polyconique rectangulaire laisse beaucoup à désirer, car, après le développement de chaque ceinture circulaire, il reste nécessairement un espace qui provient de

(1) *Description of the Projection used in the Topographical Department of the War Office for maps embracing large portions of the Earth's Surface (drawn up by Capt.* Clarke, R. E. *and) communicated by Colonel Sir Henry* James, R. E. *Director of the Topographical Department;* dans *the Journal of the Royal Geographical Society*, Vol. XXX, Londres, 1860, in-8, p. 106 à 111.

la différence des rayons de chacune d'elles, et qui n'est négligeable à aucune limite puisqu'il est du même ordre de grandeur que l'accroissement du rayon de chaque zone ; il n'est possible de le faire disparaître, lorsque l'on veut conserver la rectangularité des méridiens et des parallèles, que par une déformation en longueur de chaque cercle de latitude.

18. Il peut être préférable, dans certains cas, de conserver les longueurs des degrés de tous les parallèles en renonçant à leur perpendicularité sur les méridiens. On obtient ainsi une nouvelle projection dite *polyconique ordinaire*, qui appliquée à la représentation de la surface entière du globe (proj. n° XXXVII) présente une figure à deux axes rectangulaires et à quatre quadrants égaux comme la projection rectangulaire. Le méridien central, seul perpendiculaire aux parallèles, est encore développé en vraie grandeur; sur chaque parallèle décrit avec la cotangente de sa latitude, on porte les véritables longueurs des degrés de longitude et l'on fait passer, par les points correspondants, des courbes qui représentent les méridiens.

Nous reviendrons sur cette projection (1), et nous donnerons les moyens de tenir compte de l'aplatissement de la terre à l'aide de tables qui rendent la construction très-rapide.

La projection polyconique ordinaire a été adoptée en Amérique par le *Coast Survey Office* parce que « les opérations de l'hydro-« graphie étant limitées à une bande étroite et longue de la côte et « n'ayant pas pour but de former une carte d'ensemble des pays en « feuilles régulières et uniformes, il est préférable de faire une pro-« jection indépendante pour chaque lever et pour chaque feuille hy-« drographique à l'aide de son méridien central; chaque feuille est « ainsi projetée comme une carte locale et se relie aux autres par les « sommets de la triangulation (2). »

La carte du congrès a été dressée en 1855 en projection polyconique à l'échelle de $\frac{1}{1500000}$ (3).

---

(1) *Voir* 2e part., chap. XIII, § 3.

(2) *Report of the Superintendant of the Coast Survey during the year* 1853. Washington, 1854; *Appendice* n° 39, p. 99.

(3) Les méridiens et les parallèles y sont tracés de minute en minute; le méridien central pour la côte orientale a été pris à 84° à l'ouest de Greenwich (86° 20′ 9″ à l'ouest de Paris), et pour la côte occidentelle à 120° de Greenwich (122° 20′ 9″ à l'ouest de Paris); les deux côtes ont ainsi été projetées séparément. Cette carte comprend la côte entière des États-Unis depuis la baie de Passamaquoddy (limite nord du Maine) jusqu'au Mexique (embouchure de Rio Grande), et depuis le Rio Frazer jusqu'à San Diego.

19. La méthode de projection employée au *Coast Survey Office* pour les cartes de localités ou pour les petits levers hydrographiques prend le nom de *projection polyconique équidistante*. Les parallèles provisoires et les méridiens y sont d'abord tracés comme dans la projection polyconique ordinaire, puis on porte sur chaque méridien au-dessus et au-dessous du parallèle central, les longueurs des divisions du méridien central, et l'on fait passer les parallèles définitifs par les points ainsi obtenus. Il en résulte une projection dans laquelle les parallèles sont partout à des distances méridiennes égales. Si on la suppose appliquée à la représentation de la surface entière du globe, et que l'on prenne l'équateur pour parallèle central, tous les parallèles tournent leur concavité vers l'équateur, car les distances méridiennes des parallèles étant égales à ces distances mesurées sur le méridien central qui est une ligne droite, il est évident que les parallèles devront converger en s'éloignant du méridien central. Le parallèle de 90°, c'est-à-dire le pôle, sera représenté par une courbe dont la longueur approchera de celle de l'équateur développé.

En comparant une projection polyconique équidistante avec une projection de Bonne ayant même méridien central et même parallèle moyen, il est facile de voir que, sur la première, l'aire projetée est moindre que la surface correspondante de la sphère. Cette projection a en outre l'inconvénient d'augmenter d'une manière exagérée les arcs de parallèle et de rendre impossible l'emploi d'une même échelle autour d'un même point; les intersections des méridiens et des parallèles n'y sont pas rectangulaires et les angles sont difficiles à calculer. Il en résulte que ce système ne doit être employé que dans les limites les plus restreintes. Dans le bureau hydrographique des États-Unis il n'est employé que pour représenter des surfaces de *un* degré carré *au plus*, à une échelle ne dépassant par $\frac{1}{10000}$.

Lorsque l'on veut représenter en projection polyconique ordinaire un hémisphère entier à une échelle peu considérable, on peut figurer le méridien de 90° de longitude, qui doit limiter la carte, par une circonférence décrite sur la distance des pôles comme diamètre, et partager en parties égales les arcs de parallèle interceptés; les autres méridiens seront des courbes passant par les points correspondants ainsi obtenus.

PROJECTIONS CYLINDRIQUES.

20. Jusqu'à présent, dans l'étude des projections par développement, nous ne nous sommes occupé que de celles qui peuvent être considérées comme obtenues par le développement d'un ou de plusieurs cônes tangents ou sécants au sphéroïde, et des projections qui peuvent être considérées comme des modifications des projections coniques. Au lieu de considérer le tronc de cône qui, sous certaines conditions dépendant du but que doit atteindre la carte, se rapproche le plus possible de la portion du sphéroïde à représenter, il est naturel de chercher à représenter une portion de la surface du globe par le développement d'une portion de surface cylindrique soit inscrite, soit circonscrite à la zone considérée et dont l'axe coïncide avec celui du globe. Les méridiens, qui résultent des sections du cylindre par des plans passant par son axe, seront représentés par des droites parallèles à cet axe, les parallèles par des droites perpendiculaires aux premières.

Les défauts des projections cylindriques sont plus considérables encore que ceux de la projection conique, car, dans celle-ci, on peut donner à deux parallèles leur véritable longueur par rapport aux degrés de latitude, tandis que dans la projection cylindrique le parallélisme des méridiens ne permet d'observer cette proportion qu'à l'égard d'un seul qui est l'inférieur, si l'on considère le développement du cylindre circonscrit, et le supérieur si l'on considère au contraire le développement du cylindre inscrit.

Pour remédier à cet inconvénient, on a employé le cylindre construit sur l'un des parallèles intermédiaires et qui est par conséquent en partie intérieur et en partie extérieur à la sphère ; de cette manière l'étendue en longitude est exacte vers le milieu, mais trop petite du côté de l'équateur et trop grande du côté opposé.

21. Dans la *projection cylindrique proprement dite*, on donne aux degrés de latitude leur véritable longueur de façon que chaque méridien $A_1 B_1$ de la projection (fig. 55) soit égal au développement de l'arc correspondant AB du méridien de la sphère.

En appelant l la latitude du parallèle Mm commun à la sphère et au cylindre, les degrés de longitude seront sur tous les parallèles de la projection égaux à

$$\frac{2\pi}{360} a \cos l_1.$$

La figure 55 montre bien les défauts de ce système, l'agrandissement des parallèles supérieurs et la diminution des parallèles inférieurs. La projection n° XXXIV donne la représentation de l'hémisphère Nord développé sur le parallèle de 45° de latitude.

Les cartes projetées d'après ce système portent le nom de *cartes plates parallélogrammatiques ;* elles ne peuvent convenir que, à des parties du globe très-peu étendues en latitude, mais autant qu'on le veut en longitude ; les moins défectueuses sont celles qui représentent les portions voisines de l'équateur, parce que, à peu de distance de ce cercle, les cosinus de latitude ne varient pas beaucoup ; d'*Anville* s'en est servi avec avantage pour la carte de Guinée publiée en 1776. Cette construction est la plus ancienne de toutes ; son origine semble remonter jusqu'à *Anaximandre* (550 ans environ av. J.-C.) qui, le premier peut-être, traça une carte géographique du monde connu de son temps ; elle continua à être employée par les géographes de l'antiquité (*Hécatée*, *Dicéarque*, *Eratosthènes*, *Agrippa*, *Strabon*, *Marin de Tyr*, *Ptolémée*) qui prenaient pour parallèle moyen celui de Rhodes.

22. Lorsque le cylindre est tangent le long de l'équateur, le réseau est formé de carrés parfaits ; il en résulte une projection très-simple de construction, mais très-erronée dès qu'on s'écarte de l'équateur puisque les degrés de longitude y sont partout égaux aux degrés de latitude (proj. n° XXXIII) ; on la désigne sous le nom de *projection plate carrée ;* l'invention en a à tort été attribuée au prince *Henri* de Portugal (1438) ; elle était connue, dès le commencement du XIVe siècle, des navigateurs génois (1), qui la communiquèrent aux Catalans ; mais elle n'est plus employée depuis le commencement du XVIe siècle. Elle offrait aux marins cet avantage de représenter par une ligne droite la *loxodromie*, c'est-à-dire la direction que suit le navire naviguant pendant quelque temps sous le même rumb de vent et coupant par conséquent tous les méridiens sous le même angle (2).

---

(1) Les cartes nautiques les plus célèbres qui nous sont parvenues de cette époque sont : l'atlas de *Petrus Vesconte de Janua* (1318), les cartes de *Marin Sanuto* (1321), l'atlas anonyme de 1351 de la bibliothèque Laurentienne de Florence, l'atlas catalan de 1375, l'atlas vénitien de 1384, etc. *Voir* les *Monuments de la géographie*, par JOMARD, 4e livraison.

(2) L'emploi de la boussole rend presque exclusive la navigation loxodromique ; la courbe décrite à la surface des mers par un navire se rendant d'un point à un autre n'est donc pas un arc de grand cercle, mais une courbe à double courbure dont la principale

Mais les cartes plates avaient l'énorme inconvénient non-seulement de déformer beaucoup les configurations terrestres, mais encore de fausser les directions et les gisements de telle sorte que les directions E.-O. et N.-S. de la rose des vents étaient seules conservées et que les autres étaient difficiles à tracer exactement. Cet inconvénient avait déjà été remarqué par Ptolémée; il fut de nouveau signalé au commencement du XVIe siècle par Martin *Cortès*, puis par *Pero Nunès;* enfin, en 1569, *Gérard Mercator*, considérant que les marins n'emploient pas leurs cartes pour connaître la figure des pays, mais seulement pour y tracer exactement le chemin parcouru d'après sa longueur et sa direction, et pour déterminer la distance où ils sont des divers points des îles et la direction qu'ils doivent suivre soit pour y arriver, soit pour les éviter, imagina la *projection des cartes réduites.*

23. La nécessité de représenter la loxodromie par une ligne droite mettait dans l'obligation de figurer les méridiens par des droites parallèles équidistantes perpendiculaires aux parallèles et de considérer par conséquent la projection comme le développement d'un cylindre tangent à la sphère le long de l'équateur ; en outre, l'obligation de conserver partout les directions devait faire conserver le rapport exact des degrés de latitude aux degrés de longitude ; or comme les derniers, par suite du parallélisme des méridiens, sont tous augmentés dans le rapport de l'unité au cosinus de leur latitude, il faut augmenter aussi les degrés de latitude dans le même rapport.

Or, en supposant la terre sphérique, on a

$$\frac{\text{un degré de parallèle}}{\text{un degré de l'équateur}} = \frac{\text{cosinus latitude}}{1} = \frac{1}{\text{sécante } l},$$

donc

$$\text{un degré de méridien} = \text{un degré de parallèle} \times \text{séc } l;$$

de même

$$\text{une minute de méridien} = \text{une minute de parallèle} \times \text{séc } l.$$

Il résulte de là qu'en faisant constamment sur la carte réduite la minute de parallèle égale à celle de l'équateur, l'intervalle entre

---

propriété est de couper sous le même angle tous les méridiens qu'elle traverse; ainsi une ligne loxodromique qui fait un angle oblique avec un méridien est une sorte de spirale qui s'approche sans cesse de l'un des pôles sans jamais l'atteindre; s'il était possible en effet qu'une telle ligne passât par le pôle, il faudrait qu'elle fît en ce point le même angle avec tous les méridiens, ce qui est impossible.

deux parallèles consécutifs ou la différence de leurs distances à l'équateur répondant à une minute doit être égale à

une minute de l'équateur $\times$ séc l.

L'intervalle entre deux parallèles quelconques sera par conséquent égal à la longueur d'une minute de l'équateur multipliée par la somme des sécantes faite de minute en minute depuis la plus petite latitude jusqu'à la plus grande.

C'est sur ce principe que Mercator fit construire une grande mappemonde publiée à Duysbourg en août 1569 (1) ; *Edouard Wright*, auquel on a à tort attribué l'invention des cartes réduites (2), expliqua le premier en 1589 les procédés de calcul comme nous venons de le faire et dressa une table des parties du méridien ; mais ce procédé pour calculer les accroissements des parties méridiennes n'est pas rigoureux, puisque l'arc d'*une minute*, malgré sa petitesse, diffère sensiblement de sa corde ; il faudrait donc supposer la minute elle-même divisée en un nombre infini de parties et faire la somme de tous les accroissements successifs ; *Henry Bond*, en 1645, montra le premier que les longueurs des méridiens projetés croissent comme le logarithme de la tangente de la moitié du compliment de la latitude. Le calcul intégral conduit très-rapidement à ce résultat et permet de tenir compte de l'aplatissement de la terre ; nous reviendrons sur ce sujet en traitant de la construction et de l'usage des cartes réduites. Remarquons de suite que, comme la sécante de 90° est infinie, le pôle ne peut être représenté sur ces cartes et que les parallèles s'écartent de plus en plus et jusqu'à l'infini à mesure que la latitude augmente. Cet inconvénient est peu sensible dans la navigation parce que le 83e degrés de latitude constitue la limite de notre connaissance des terres à la surface du globe.

24. Le célèbre astronome *César-François Cassini* a employé, pour l'exécution de sa carte de France commencée en 1745 et terminée en 1793 par son fils (*Jacques-Dominique*), une modification de la projection plate dans laquelle le cylindre est tangent le long du

(1) Cette carte, large de 2 mètres sur 1m,26, se trouve reproduite en fac-simile dans les *Monuments de la géographie* de Jomard (8e livraison) et dans un appendice à la *Géographie du moyen âge*, de Lelewel (t. II, p. 225 à 233).

(2) Édouard Wright dans son ouvrage, *Certain Errors in Navigation detected and corrected*, p. 12 et 13 de la préface, reconnaissait lui-même que la carte de Mercator lui avait servi de guide et qu'il avait seulement deviné la méthode dont le géographe allemand n'avait pas fait part au public.

méridien principal ; par les divisions de l'équateur on imagine des plans parallèles à ce méridien, et par les divisions du méridien des grands cercles qui ont un diamètre commun situé dans le plan de l'équateur ; ce diamètre est, dans la projection de Cassini, ce qu'est la ligne des pôles dans la projection plate. On imagine ensuite le cylindre développé, et les génératrices passant par les divisions du méridien représentent les grands cercles perpendiculaires à ce méridien, tandis que les petits cercles qui lui sont parallèles ont pour projections les développements des intersections du cylindre par leurs plans.

Cassini a été conduit à adopter cette projection parce que, dans les levers trigonométriques, s'il est facile de tracer le méridien d'un lieu, il ne l'est plus autant de tracer le parallèle à l'équateur ; si, par un alignement, dirigé au moyen de piquets verticaux, et perpendiculaire au méridien d'un lieu on détermine une suite de points, ils appartiennent au grand cercle que détermine le plan vertical mené perpendiculairement au méridien dont il s'agit et qui, sur la terre, répond au cercle céleste que l'on nomme premier vertical ; le parallèle ne fait que toucher ce cercle au point où il coupe le méridien. La méridienne et ses perpendiculaires étant donc les lignes qui se tracent le plus facilement par les opérations astronomiques et géodésiques, c'est au méridien de l'Observatoire de Paris et à ses perpendiculaires qu'ont été rapportés immédiatement les points de la carte de France ; leurs latitudes et leurs longitudes n'ont été conclues qu'*à posteriori* et par le calcul.

Nous reviendrons sur cette projection pour donner les équations exactes des méridiens et des parallèles, évaluer les erreurs des surfaces et des angles et tenir compte de l'aplatissement. Mais nous pouvons dès à présent nous rendre compte de ses principaux défauts.

En supposant la terre sphérique, les grands cercles perpendiculaires au méridien, au lieu de se couper aux pôles de ce méridien et par conséquent de converger tous les uns vers les autres, sont, en projection, tous parallèles entre eux ; il en résulte que les portions déterminées par deux cercles perpendiculaires au méridien sont représentées par des rectangles de même longeur, mais plus larges vers les extrémités. Ainsi les distances et les aires ne peuvent être mesurées immédiatement sur la carte de Cassini que par approximation, et quoique l'étendue en longitude ne soit pas assez considérable pour que la convergence des perpendiculaires au méridien entraîne

une erreur importante, il faut être très-réservé dans l'emploi de cette projection, qui n'est excellente que pour la réunion immédiate des levés trigonométriques.

25. Nous avons déjà parlé, au chapitre des projections équivalentes (1), d'une projection cylindrique due à Lambert, et jouissant de la propriété de représenter les surfaces de la sphère par des surfaces égales. Elle est basée sur ce principe que si l'on circonscrit un cylindre circulaire droit à une sphère et que l'on coupe les deux surfaces par une série de plans parallèles au grand cercle de contact, on détachera des zones qui seront toutes respectivement égales.

On a en effet (fig. 56), en considérant le cylindre tangent le long de l'équateur,

$$\text{surf. cylindr. AIEE'A'} = 2\pi a C\alpha = 2\pi a \sin l,$$
$$\text{zone sphérique } a\text{EE}'a' = 2\pi a C\alpha = 2\pi a \sin l;$$

et comme les méridiens interceptent sur les deux surfaces des parties proportionnelles à leurs différences de longitude, les surfaces élémentaires sont respectivement égales.

Cette projection a l'inconvénient de faire croître les distances en latitude comme les sinus de ces latitudes, et par conséquent de rapprocher de plus en plus les parallèles à mesure que l'on s'éloigne de l'équateur, tandis que les degrés de longitude conservent partout la longueur qu'ils ont à l'équateur et sont par conséquent partout augmentés.

Si l'on appelle α l'angle d'une direction quelconque avec le méridien d'un point M sur la sphère, β l'angle correspondant sur la carte, l la latitude de ce point M, on trouve facilement par une méthode semblable à celle que nous avons employée (2) pour étudier les altérations des projections zénithales

$$\operatorname{tang}\beta = \operatorname{tang}\alpha \frac{1}{\cos^2 l}.$$

Il en résulte que la déviation maximum correspond en chaque point à

$$\operatorname{tang} A = \pm \cos l,$$

ou à

$$\operatorname{tang} B = \pm \frac{1}{\cos l},$$

(1) *Voir* chap. III, § 2.
(2) *Voir* chap. V, § 11.

les signes se correspondant, et qu'en chaque point il existe une infinité de groupes de deux directions définies par la relation

$$\text{tang}\,\alpha_1 \,\text{tang}\,\alpha = \cos^2 l,$$

sur la sphère, et par la relation

$$\text{tang}\,\beta_1 \,\text{tang}\,\beta = \frac{1}{\cos^2 l}$$

sur la carte. On voit en outre que les éléments du méridien sont réduits sur la carte dans le rapport de cos l à l'unité, et que les éléments du parallèle sont augmentés dans le même rapport (1).

En résumé, ce système n'est applicable qu'aux zones comprenant l'équateur et peu étendues en latitude.

26. Nous avons parlé (2) de la modification proposée par Lambert pour les pays tels que l'Amérique qui ont leur plus grande étendue du nord au sud; on suppose le cylindre tangent non plus le long de l'équateur mais le long du méridien moyen; dans le développement l'équateur est représenté par une droite divisée suivant les sinus des longitudes et le méridien central par une droite divisée en degrés égaux.

Lambert, après avoir exposé sa projection isocylindrique, est parvenu à celle-ci par une simple transformation de coordonnées que nous allons exposer parce que l'illustre géomètre l'a plusieurs fois appliquée pour passer d'un système de projection cylindrique à un autre analogue.

Soit A (fig. 57) un point quelconque pris pour pôle d'un grand cercle PKS, B l'autre pôle. Considérons deux grands cercles APBS, AKB passant par A et B et que nous pourrons appeler des méridiens relatifs à A et B ; PKS sera l'équateur. Supposons que dans ce système de coordonnées les longitudes t' soient comptées à partir du méridien AKB.

Pour représenter d'après la méthode isocylindrique de Lambert la surface de la sphère ainsi traversée par les méridiens et les parallèles, on portera (fig. 58) sur une droite ps, de part et d'autre du point K, des longueurs égales aux longitudes t', c'est-à-dire aux arcs de grand cercle PS rectifiés, et sur une perpendiculaire ab à ps, des longueurs

(1) L'étude des altérations dans cette projection a été faite par M. Collignon (*Journal de l'École Polytechnique*, 41e *cahier*) pour montrer la possibilité de construire les mappemondes mixtes en trois parties dont nous avons parlé au § 15 du chap. III.

(2) *Voir* chap. III, § 3.

kr égales aux sinus à sin *l'* des parallèles tels que WRE ; en élevant par les points de division ainsi obtenus des perpendiculaires ou des parallèles à *ps*, on achèverait la construction du réseau isocylindrique dont les degrés de longitude seraient égaux, mais dont ceux de latitude iraient en diminuant de K à *a*.

Soient maintenant P et S les pôles véritables de la sphère et AKB l'équateur véritable ; PKS est un méridien dont les pôles sont en A et B et qui est déjà représenté par une droite *ps* divisée en degrés égaux ; *p* et *s* figureront les pôles véritables. L'équateur réel AKB est représenté par une droite *ab* dont les arcs à partir du centre K sont dans le rapport des sinus des longitudes des méridiens tels que PYS, car les arcs qui, dans l'hypothèse des pôles en AB, mesurent sur le grand cercle AKB les latitudes, mesurent maintenant les longitudes dans l'hypothèse des pôles en P et S.

Considérons un point quelconque M de la surface de la sphère et menons l'arc de grand cercle AMD qui sera perpendiculaire sur le méridien du milieu PKS puisque le pôle de ce méridien est supposé en A. Ce grand cercle était, dans la première hypothèse, un méridien représenté par une perpendiculaire à *p* passant par un point *d* tel que K*d* est égal à l'arc KD ; et, sur cette perpendiculaire, le point M devait se trouver placé à une distance *md* de *ps*, égale au sinus de l'arc MD.

Cherchons donc à exprimer les arcs DK $= y$ et MD dont le sinus égale $md = x$, en fonction de la latitude l et de la longitude t du point M.

Dans le triangle sphérique PTD, rectangle en D, on connaît l'hypoténuse PM $= 90° - l$ et l'angle MPD $= t$; on calculera MD et PD $= 90° - y$ à l'aide des formules

$$\sin \mathrm{MD} = x = \cos l \sin t,$$

et

$$\operatorname{cotang} \mathrm{PD} = \operatorname{tang} \mathrm{KD} = \operatorname{tang} y = \frac{\operatorname{cotang} \mathrm{MP}}{\cos \mathrm{MPD}} = \frac{\operatorname{tang} l}{\cos t},$$

qui sont bien les mêmes que celles auxquelles nous sommes parvenus directement.

23. La même méthode de transformation de coordonnées permet d'obtenir immédiatement les équations de la projection *cylindrique orthomorphe de Lambert* (1) en la considérant comme une projection

(1) *Voir* chap. II, § 14.

de Mercator renversée. En se reportant en effet aux deux figures précédentes on voit que l'arc DK devra être projeté en vraie longueur et que l'arc de grand cercle MD devra être représenté par une droite perpendiculaire à *pks* et égale à

$$md = \log \operatorname{tang} \frac{90^\circ + \mathrm{MD}}{2} = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \sin \mathrm{MD}}{1 - \sin \mathrm{MD}};$$

or le triangle rectangle PMD nous a donné

$$\sin \mathrm{MD} = \cos l \sin t,$$
$$\operatorname{cotang} \mathrm{DK} = \cos t \operatorname{cotang} l.$$

Les équations de la projection seront donc

$$x = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \cos l \sin t}{1 - \cos l \sin t},$$
$$\operatorname{cotang} y = \cos t \operatorname{cotang} l,$$

qui sont bien les équations auxquelles nous sommes parvenus par la méthode des coefficients indéterminés.

28. Revenons aux projections cylindriques équivalentes. Lorsqu'il s'agit de représenter une portion de zone qui n'est pas contiguë à l'équateur, on imagine un cylindre sécant le long d'un parallèle de la zone à représenter, et, en partie inscrit, en partie circonscrit; on peut alors déterminer l'espacement des parallèles par la condition de conserver les surfaces élémentaires.

Appelons d (fig. 59) la distance en projection d'un parallèle de latitude l au parallèle commun MM′ dont nous désignerons la latitude par l_1.

Sur le cylindre la zone $\mathrm{MM'D_1D'_1}$ a pour surface

$$2\pi a d \cos l_1,$$

et, sur la sphère, la zone MM′DD′ comprise entre les deux latitudes l et l_1 est exprimée par

$$2\pi a^2 (\sin l - \sin l_1) = 4\pi a^2 \sin \frac{l - l_1}{2} \cos \frac{l + l_1}{2}.$$

On aura donc

$$d = \frac{2a \sin \dfrac{l - l_1}{2} \cos \dfrac{l + l_1}{2}}{\cos l_1}.$$

Le parallèle MM′ commun aux deux surfaces et donné par la condition de conservation des degrés de longitude à la latitude l_1.

29. Lorsqu'on a à représenter une zone terrestre étroite et longue dirigée obliquement à l'équateur, on peut recourir au développement du cylindre tangent à la sphère le long du vertical qui coïncide avec la plus grande longueur de la zone à représenter. On forme ainsi un équateur et des méridiens provisoires que l'on projette sur le cylindre tangent pour le développer ensuite, et le tracé des méridiens et des parallèles véritables s'obtient par une transformation de coordonnées.

Le lieutenant *Textor* a traité cette question (1) dont l'idée première est due à Lambert, en s'imposant cette autre condition que la surface *totale* de la zone cylindrique fût égale à la zone sphérique à représenter ; il suffit pour cela d'imaginer un second cylindre, intérieur ayant un rayon un peu plus petit que celui de la sphère mais la même hauteur que le cylindre en contact, c'est-à-dire la longueur des méridiens auxiliaires contenus dans la bande étroite. Si des deux côtés de l'équateur auxiliaire on a à représenter n degrés, en appelant r le rayon de base du cylindre intérieur, g la longueur d'un degré évaluée en parties du rayon a, la surface de la zone cylindrique est exprimée par

$$2.\pi.r.2.n.g;$$

celle de la zone sphérique par

$$2\pi a\, 2a \sin n^\circ;$$

ce qui donne l'équation

$$rng = a^2 \sin n^\circ,$$

d'où

$$r = \frac{a^2 \sin n^\circ}{ng} = \frac{a.180.\sin n^\circ}{\pi n};$$

il faudra donc d'abord multiplier chacune des parties de l'équateur auxiliaire par le rapport $\frac{180 \sin n^\circ}{\pi n}$. On représentera ensuite cet équateur auxiliaire par une droite parallèle aux bords supérieur et inférieur de la carte à construire, et on la divisera en degrés comme nous venons de le voir; une droite perpendiculaire sur le milieu de la première représentera le méridien véritable qui passe par le pôle

(1) *Vorschlag zu einer Projection eines langen und schmalen Streifens der Erdfläche, dessen Richtung mit dem Æquator einen schiefen Winkel macht, von dem Premier Lieutenant von* Textor ; dans la *Monatliche Correspondenz* de Zach, septembre 1808, p. 185 à 196.

auxiliaire. En appelant λ la latitude de son point d'intersection avec l'équateur auxiliaire, θ la différence des longitudes de ce méridien et d'un autre considéré, μ la distance de ces points d'intersection de l'équateur auxiliaire et de ces deux méridiens, α l'inclinaison de ce méridien considéré sur cet équateur, l_1 la latitude du point d'intersection de ces deux cercles, on obtient

$$\cos\alpha = \sin\theta\cos\lambda,$$
$$\operatorname{tang}\mu = \operatorname{tang}\theta\cos\lambda,$$
$$\operatorname{tang} l_1 = \frac{\operatorname{tang}\lambda}{\cos\theta}.$$

On peut donc construire par points un méridien quelconque en prenant son point d'intersection avec l'équateur auxiliaire pour origine des abscisses x et cet équateur pour leur axe. Pour un point dont la latitude sera l on aura

$$\sin y = \sin(l - l_1)\sin\alpha,$$
$$\operatorname{tang} x = \operatorname{tang}(l - l_1)\cos\alpha.$$

Si $l < l_1$, x et y deviennent négatifs.

En réunissant par des courbes continues les points de même latitude, on obtiendra les parallèles de la projection.

Ce genre de projection, qui exige des calculs fort longs, est peu utile dans la pratique parce qu'il est rare que l'on cherche à conserver la surface totale d'un pays sans s'occuper de conserver aussi les surfaces élémentaires.

30. Mentionnons ici la *Projection of the Globe on the cylinder of a meridian, by* J. *Wetch* (1). C'est une projection perspective centrale sur un cylindre tangent à la sphère le long d'un méridien. Si le cylindre était tangent le long de l'équateur, les méridiens seraient représentés par des droites parallèles équidistantes perpendiculaires à l'équateur, et les parallèles par des droites perpendiculaires aux premières et dont la distance à l'équateur serait égale à la tangente de la latitude. Le cylindre étant en réalité tangent le long d'un méridien les degrés du méridien moyen conservent seuls leur véritable longueur, ceux de l'équateur varient comme les différences des tangentes des longitudes ; les méridiens et les parallèles sont des courbes faciles à tracer par points à l'aide des formules de transformation

(1) Bibliothèque impériale, Kl. 1112.

de coordonnées dont nous avons déjà fait usage pour les projections cylindriques transverses de Lambert.

MODIFICATION DE LA PROJECTION CYLINDRIQUE

31. Avant de déterminer ce qui a rapport aux développements cylindriques, nous dirons quelques mots d'une projection *trapéziforme* introduite dans la géographie au commencement du XIVe siècle (1) comme modification de la projection plate parallélogrammatique employée par Ptolémée pour les vingt-six cartes de son Hyphégèse géographique, et qui fut la plus employée pendant les XVe, XVIe et même XVIIe siècles. Elle consiste à remplacer les méridiens parallèles de la projection plate par des méridiens rectilignes, mais convergents d'après la condition de conserver les divisions exactes des parallèles extrêmes de la carte ou de deux parallèles pris à volonté.

Ainsi l'on porte sur le méridien principal ab (fig. 60) les degrés égaux g de latitude, on élève des perpendiculaires par les points de division, et sur deux des parallèles $Cc C'$, $Dd D'$ on porte en véritable grandeur les degrés de longitude de ces parallèles.

On a ainsi

$$c\gamma = \gamma\gamma' = \gamma'\gamma'' = \ldots\ldots = g\cos l_1,$$
$$d\delta = \delta\delta' = \delta'\delta'' = \ldots\ldots = g\cos l_2.$$

On voit de suite que les parallèles CC', DD' devront être très-éloignés pour bien déterminer les méridiens; mais, d'un autre côté, pour répartir aussi également que possible la déformation résultant de ce tracé, il conviendra de prendre ces deux parallèles de manière à partager en trois parties égales la hauteur en latitude de la carte, et alors

$$ac = cd = db.$$

Cherchons le point de convergence P et les angles des méridiens avec le méridien principal et avec les parallèles.

Soit XX' un parallèle de latitude l; on aura

$$\frac{c\gamma - d\delta}{cd} = \frac{c\gamma}{Pc}, \quad \text{ou} \quad \frac{g(\cos l_1 - \cos l_2)}{g(l_2 - l_1)} = \frac{g\cos l_1}{cP},$$

(1) Le manuscrit grec de la géographie de Ptolemée, n° 1401 de la bibliothèque Impériale, qui est réputé du XIVe siècle, offre la plupart de ses cartes ainsi modifiées, tandis que dans le ms. 1402 la projection est restée plate.

d'où

$$cP = \frac{g\cos l_1(l_2 - l_1)}{\cos l_1 - \cos l_2} = \frac{g\cos l_1(l_2 - l_1)}{2\sin\frac{l_2 - l_1}{2}\sin\frac{l_2 + l_1}{2}}.$$

De même

$$Pd = \frac{g\cos l_2(l_2 - l_1)}{\cos l_1 - \cos l_2} = \frac{g\cos l_2(l_2 - l_1)}{2\sin\frac{l_2 - l_1}{2}\sin\frac{l_2 + l_1}{2}}.$$

On déterminera ainsi le point P par l'une de ces deux équations. On a ensuite

$$Px = Pd - dx = Pd - g(l - l_2).$$

Appelons θ l'angle $x\mathrm{P}\xi$, on aura

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{c\gamma - d\delta}{cd} = \frac{(\cos l_1 - \cos l_2)}{l_2 - l_1},$$

donc

$$x\xi = Px\operatorname{tang}\theta = \frac{g\cos l_2(l - l_1) - g\cos l_1(l - l_2)}{l_2 - l_1},$$

telle est la valeur du degré de longitude à la latitude l. Sur la sphère ce degré de longitude est égal à

$$g' = g\cos l,$$

l'erreur commise sur le degré de longitude à la latitude l est donc

$$x\xi - g' = \frac{g\cos l_2(l - l_1) - g\cos l_1(l - l_2) - g\cos l(l_2 - l_1)}{l_2 - l_1}.$$

Par exemple, si les deux parallèles dont on veut conserver les grandeurs ont pour latitudes, l'un $l_1 = 55°$, l'autre $l_2 = 60°$, l'erreur commise sur le parallèle de 65° sera, en faisant $g = 1$, $\cos l_1 = 0{,}5736$, $\cos l_2 = 0{,}5000$, $\cos l = 0{,}4226$;

$$x\xi - g' = 0{,}0038.$$

De même, en appelant $\varphi = P\gamma c$ l'angle d'un méridien avec un parallèle, si γc contient t degrés de longitude,

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{dc}{c\gamma - d\delta} = \frac{l_2 - l_1}{t(\cos l_1 - \cos l_2)}.$$

Dans notre exemple, si $t = 10°$, on trouve

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{5}{10\,(0{,}0736)} \quad \text{ou} \quad \varphi = 81°,38';$$

l'erreur en moins est donc de 8° 22′.

Ainsi, dans cette projection, le méridien central est seul perpendiculaire aux parallèles dont deux conservent leurs véritables grandeurs ; les parallèles intermédiaires sont diminués, les autres sont augmentés, et les erreurs augmentent rapidement à mesure que l'on s'éloigne de ces deux parallèles ; de même l'angle des méridiens et des parallèles, au lieu d'être droit, décroît rapidement à mesure que l'on s'éloigne du méridien central. La simplicité du tracé permettra cependant l'emploi de cette projection pour des bandes peu étendues en latitude, lorsque la conservation rigoureuse des angles et des surfaces sera de peu d'importance.

La projection n° XXXV a été dressée dans ce système et représente l'hémisphère nord développé en conservant les degrés des parallèles de 30° et de 60° de latitude.