www.e-rara.ch

Traité des projections des cartes géographiques

Germain, Adrien Adolphe Charles

Paris, [1865]

ETH-Bibliothek Zürich

Shelf Mark: Rar 18793

Persistent Link: https://doi.org/10.3931/e-rara-74932

Chapitre VII.

www.e-rara.ch
Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien – von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material – from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d'imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L'éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes – des débuts de l'imprimerie jusqu'au 20e siècle.

e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

Nutzungsbedingungen Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titelinformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

Terms of Use This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

Conditions d'utilisation Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

Condizioni di utilizzo Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]

Visual Library

CHAPITRE VII.

ÉTUDE GÉNÉRALE DES ALTÉRATIONS DANS UNE PROJECTION QUELCONQUE.

1. Nous avons donné aux §§ 11-15 du chapitre V les formules qui permettent d'évaluer en un point quelconque d'une projection zénithale les altérations d'angles, de longueurs et de surfaces; nous allons maintenant étudier la même question d'une manière générale et chercher la loi de déformation en un point quelconque, lorsqu'on passe d'une figure tracée sur le sphéroïde à celle qui la représente sur la carte.

Considérons un point quelconque du sphéroïde défini par sa latitude l et sa longitude t, et le plan tangent en ce point; toute courbe infiniment petite tracée autour de ce point peut être considérée comme située tout entière dans ce plan tangent qui se confond avec la surface jusqu'à des distances infiniment petites du point de contact; supposons que cette courbe soit une circonférence dont ce point occupe le centre. Un arc quelconque tracé du centre à la circonférence, c'est-à-dire un rayon quelconque de cette dernière, aura pour longueur

$$ds = \sqrt{r^2 dt^2 + \rho^2 dl^2},$$

r désignant le rayon du parallèle du point (l, t) et ρ le rayon de courbure du méridien en ce point; r et ρ sont donc des fonctions connues de l.

Soit, sur la carte, x et y les coordonnées rectangulaires du point correspondant au point (l, t) du sphéroïde; l'élément considéré aura pour projection un arc dont la longueur sera exprimée par

$$\sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Désignons par m le rapport de la seconde distance à la première, rapport variable d'un point à l'autre de la carte, et variable aussi en

chaque point avec l'orientation de l'élément mesuré ou avec le rapport $\frac{rdt}{\rho dl}$, tangente trigonométrique de l'angle α formé sur le sphéroïde par la direction considérée et le méridien.

Nous aurons donc l'équation

$$r^2dt^2+\rho^2dl^2=\frac{1}{m^2}(dx^2+dy^2), \qquad (I)$$

dans laquelle

$$dx=\frac{dx}{dt}dt+\frac{dx}{dl}dl=pdt+qdl,$$

$$dy=\frac{dy}{dt}dt+\frac{dy}{dl}dl=p'dt+q'dl.$$

Exprimons m en fonction de l'angle α défini par l'égalité

$$\operatorname{tang}\alpha=\frac{rdt}{\rho dl}.$$

L'équation (I) prend la forme

$$m^2=\frac{p^2+p'^2}{r^2}\sin^2\alpha+\frac{2(pq+p'q')}{\rho r}\sin\alpha\cos\alpha+\frac{q^2+q'^2}{\rho^2}\cos^2\alpha. \qquad (II)$$

Sous cette forme elle met d'abord en évidence une propriété importante. Si l'on calcule deux valeurs de m^2 correspondantes à deux valeurs de α différant entre elles de $\frac{\pi}{2}$, leur somme sera indépendante de α; on a en effet pour l'une

$$m^2=\frac{p^2+p'^2}{r^2}\sin^2\alpha+\frac{2(pq+p'q')}{\rho r}\sin\alpha\cos\alpha+\frac{q^2+q'^2}{\rho^2}\sin^2\alpha,$$

et pour l'autre

$$m^2_1=\frac{p^2+p'^2}{r^2}\cos^2\alpha-\frac{2(pq+p'q')}{\rho r}\sin\alpha\cos\alpha+\frac{q^2+q'^2}{\rho^2}\sin^2\alpha,$$

et, en ajoutant,

$$m^2+m^2_1=\frac{p^2+p'^2}{r^2}+\frac{q^2+q'^2}{\rho^2}, \qquad (III)$$

égalité remarquable dont nous aurons occasion de faire usage un peu plus loin.

Cherchons la valeur de α qui rend le rapport m maximum ou mi-

nimum en un point donné (l, t). Il faut pour cela laisser p, p', q, q', ρ et r constants dans l'équation (II), et égaler à zéro la dérivée du second membre prise par rapport à la seule variable α, ce qui donne

$$\left(\frac{p^2+p'^2}{r^2}-\frac{q^2+q'^2}{\rho^2}\right)\sin 2\alpha+\frac{2(pq+p'q')}{\rho r}\cos 2\alpha=0,$$

ou bien

$$\operatorname{tang} 2\alpha=-\frac{2(pq+p'q')\rho r}{\rho^2(p^2+p'^2)-r^2(q^2+q'^2)}. \qquad \text{(IV)}$$

On a donc pour tang 2α une valeur unique, mais il en résulte pour α, entre 0 et π, deux valeurs distinctes dont la différence est $\frac{\pi}{2}$.

Les éléments de longueurs qui correspondent à ces deux valeurs de α sont, l'un l'élément le plus augmenté sur la carte, l'autre l'élément le plus réduit; on peut s'assurer en effet que les deux valeurs de α font de signes contraires la dérivée seconde du second membre de l'équation (II).

Les éléments de longueurs qui subissent sur la carte les plus grandes altérations font donc un angle droit sur la surface du sphéroïde.

Cherchons aussi l'angle qu'ils font sur la carte. Nous aurons pour l'un d'eux

$$dx'=pdt+qdl=\left(\frac{\rho}{r}p\operatorname{tang}\alpha+q\right)dl,$$

$$dy'=\left(\frac{\rho}{r}p'\operatorname{tang}\alpha+q'\right)dl;$$

pour l'autre, en augmentant α de $\frac{\pi}{2}$,

$$dx''=\left(-\frac{\rho}{r}p\operatorname{cotang}\alpha+q\right)dl,$$

$$dy''=\left(-\frac{\rho}{r}p'\operatorname{cotang}\alpha+q'\right)dl.$$

Faisons ensuite

$$\operatorname{tang}\beta'=\frac{dy'}{dx'} \quad \text{et} \quad \operatorname{tang}\beta''=\frac{dy''}{dx''},$$

et il viendra, en multipliant ces deux équations membre à membre,

$$\operatorname{tang}\beta'\operatorname{tang}\beta''=\frac{\frac{1}{2}(r^2q'^2-\rho^2p'^2)\sin 2\alpha-\rho rp'q'\cos 2\alpha}{\frac{1}{2}(r^2q^2-\rho^2p^2)\sin 2\alpha-\rho rpq\cos 2\alpha},$$

fraction qui se réduit à -1 en vertu de l'équation (IV). Donc les deux directions correspondantes aux angles β' et β'' font entre elles un angle droit, ou, en d'autres termes, les éléments de longueur les plus altérés ont sur la carte comme sur le sphéroïde des directions rectangulaires; ces directions ne coïncident avec les méridiens et les parallèles que dans les projections où ces deux lignes se coupent à angle droit.

2. Revenons à l'équation (III)

$$m^2 + m_1^2 = \frac{p^2 + p'^2}{r^2} + \frac{q^2 + q'^2}{\rho^2}.$$

Si nous prenons pour unité le rayon de la petite circonférence que nous avons décrite sur le sphéroïde, les longueurs des projections de deux rayons rectangulaires seront précisément m et m_1, et l'égalité précédente exprime que la somme des carrés de ces rayons est constante quelle que soit la valeur de l'angle α. Or si l'on considère une ellipse (fig. 61) et la circonférence décrite sur son grand axe, on sait que les rayons vecteurs de l'ellipse correspondant à deux rayons rectangulaires du cercle sont deux demi-diamètres conjugués, et que la somme de leurs carrés est constante et égale à la somme des carrés des axes. Comme cette propriété suffit réciproquement pour définir l'ellipse, et que cette courbe peut toujours être considérée comme la section oblique d'un cône droit, on voit que, autour d'un même point, la déformation est soumise à une loi qui ne dépend ni de la nature des surfaces, ni de la position du point que l'on considère, ni de la manière dont on a tracé le canevas; voici comment M. Tissot l'a énoncée (1) :

« Toute représentation du sphéroïde sur un plan peut être remplacée en chaque point par une projection orthogonale faite à une échelle convenable (2). »

3. Nous avons montré précédemment, et il est facile de vérifier à l'aide de cette loi, que, quelle que soit la projection adoptée, il existe en chaque point du sphéroïde deux directions et par conséquent deux tangentes perpendiculaires entre elles, et, à moins que les angles ne soient tous conservés, il n'en existe que deux, telles que les directions qui leur correspondent sur l'autre surface se coupent aussi à angle droit. M. Tissot leur a donné le nom de *tangentes principales.*

(1) *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. XLIX, p. 673.

(2) La même loi s'applique à la représentation d'une surface quelconque sur une autre.

C'est pour ces directions que le rapport des longueurs de deux éléments infiniment petits, qui se correspondent sur les deux surfaces, atteint sa plus grande et sa plus petite valeur. Désignons respectivement ces deux valeurs par a et b et supposons $a > b$; a sera le demi grand axe de l'ellipse projection de la petite circonférence décrite sur le sphéroïde, et b sera le demi petit axe; on aura d'abord

$$a^2 = \frac{p^2 + p'^2}{r^2} = \frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}{N^2 \cos^2 l},$$

$$b^2 = \frac{q^2 + q'^2}{\rho^2} = \frac{\left(\frac{dx}{dl}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dl}\right)^2}{\rho^2},$$

et l'on pourra calculer a et b quand on connaîtra les formules de la projection dont on s'occupe, c'est-à-dire les expressions des coordonnées rectangulaires de chaque point en fonction de l et de t. Les deux rayons de courbures N et ρ de l'ellipsoïde en ce point se calculeront facilement en fonction de la latitude l.

Les tangentes principales sont bissectrices des mêmes angles sur le sphéroïde et sur la carte, et les rapports de longueurs sont égaux sur les côtés de chacun de ces angles.

La représentation diminue tous les angles aigus dont l'un des côtés coïncide avec la tangente principale qui se rapporte au maximum a. Si on représente par φ l'un de ces angles, par ψ l'angle modifié et par m le rapport de longueurs pour son second côté, il viendra

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{b}{a}\operatorname{tang}\varphi; \qquad \operatorname{tang}(\varphi - \psi) = \frac{(a-b)\sin 2\varphi}{a+b+(a-b)\cos 2\varphi},$$

$$m\cos\psi = a\cos\varphi; \qquad m\sin\psi = b\sin\varphi;$$

$$m^2 = a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi.$$

Le maximum de l'altération $\varphi - \psi$ est l'angle θ pour lequel on a

$$\sin\theta = \frac{a-b}{a+b}; \qquad \cos\theta = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}, \qquad \operatorname{tang}\theta = \frac{a-b}{2\sqrt{ab}}.$$

En appelant Φ et Ψ les valeurs correspondantes de φ et ψ, et M celle de m, on trouve

$$\Phi = 45^\circ + \frac{\theta}{2}; \quad \Psi = 45^\circ - \frac{\theta}{2}; \quad \operatorname{tang}\Phi = \sqrt{\frac{a}{b}}; \quad \operatorname{tang}\Psi = \sqrt{\frac{b}{a}}; \quad M = \sqrt{ab}.$$

L'angle le plus altéré est celui que forme la direction ainsi obtenue avec la droite qui lui est symétrique par rapport à l'une des tangentes principales. Cet angle se trouve remplacé par son supplément dans la représentation, et l'altération est égale à 2θ.

A toute autre direction il en correspond une seconde seulement, faisant avec la première un angle qui n'est pas modifié ; l'une étant donnée par l'angle φ, l'autre le sera par l'angle $90° - \psi$.

Pour tous les angles non modifiés, le produit des rapports de distances m et m' qui conviennent aux deux côtés, est le même, et l'on a

$$mm' = ab.$$

Si l'on représente par m et m_1 les rapports pour deux directions à angle droit, et par δ l'altération de cet angle, on aura, ainsi que nous l'avons déjà vu,

$$m^2 + m_1^2 = a^2 + b^2; \qquad mm_1 \cos\delta = ab.$$

Lorsqu'on passe de la première surface à la seconde, le rapport M^2, suivant lequel l'élément superficiel est modifié, est donné par le rectangle des deux axes. On a

$$M^2 = ab;$$

ce rapport est donc le carré du rapport des longueurs des seconds côtés de l'angle le plus altéré Φ et de sa projection Ψ.

On a

$$a = M \operatorname{tang}\left(45° + \frac{\theta}{2}\right); \qquad b = M \operatorname{tang}\left(45° - \frac{\theta}{2}\right).$$

Si les surfaces sont conservées en projection, il vient

$$M^2 = mm' = mm_1 \cos\delta = 1,$$

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{a-b}{2}; \qquad a = \operatorname{tang}\left(45° + \frac{\theta}{2}\right).$$

Dans ce cas, les deux éléments de longueur, dont l'angle est le plus altéré, n'éprouvent pas de modification.

Tous ces résultats, que nous avons donnés sans démonstration parce qu'ils se déduisent immédiatement de la loi de la déformation et de la considération de la circonférence infiniment petite et de l'ellipse projection, sont généraux et se vérifient dans une transformation quelconque.

Lorsque la projection est orthomorphe, l'ellipse devient une circonférence, et le rapport m des longueurs est indépendant de l'orientation de l'élément considéré.

4. Reprenons l'équation (III).

$$m^2 + m_1^2 = \frac{p^2 + p'^2}{r^2} + \frac{q^2 + q'^2}{\rho^2}.$$

M. Collignon (1) remarque que, si en un point donné d'une projection *équivalente*, il n'y a pas altération dans les longueurs, m étant égal à m_1 et à l'unité, la fonction $\frac{p^2 + p'^2}{r^2} + \frac{q^2 + q'^2}{\rho^2}$ est égale à deux unités. Réciproquement, si en un point particulier d'une carte conservant les surfaces, cette fonction a pour valeur deux unités, il n'y a pas d'altération dans les longueurs autour de ce point, car les équations

$$mm_1 = 1 \quad \text{et} \quad m^2 + m_1^2 = 2,$$

ne sont satisfaites que par

$$m = m_1 = 1.$$

La fonction $\frac{p^2 + p'^2}{r^2} + \frac{q^2 + q'^2}{\rho^2}$ est donc la fonction caractéristique du mérite propre d'un système quelconque de tracé conservant les surfaces. Si l'on calcule les valeurs numériques de cette fonction en différents points, l'écart de ces nombres par rapport au nombre 2, leur limite inférieure, indique pour chaque point le degré d'altération résultant du tracé.

Appliquant cette méthode à la comparaison de différentes projections équivalentes, M. Collignon trouve que, pour la projection zénithale de Lambert, en prenant le pôle pour centre, cette fonction a pour expression

$$\cos^2 \frac{90^\circ - l}{2} + \frac{1}{\cos^2 \frac{90^\circ - l}{2}},$$

résultat auquel nous sommes parvenus directement. Elle prend la valeur 2 au pôle, centre du tracé, et atteint son maximum $2 + \frac{1}{2}$ à l'équateur.

---

(1) *Journal de l'École Polytechnique*, 41e cahier.

Pour la projection sur le cylindre circonscrit à l'équateur, la fonction est représentée par l'expression

$$\sin^2 l + \frac{1}{\sin^2 l};$$

elle est égale à 2 en tous points de l'équateur, mais elle devient infinie au pôle pour $l = 90^0$.

Pour le tracé homalographique de Mollweide, on trouve

$$\frac{p^2 + p'^2}{r^2} + \frac{q^2 + q'^2}{\rho^2} = \frac{8\cos^2\varphi}{\pi^2\cos^2 l} + \frac{\pi^2}{8}\frac{\cos^2 l}{\cos^2\varphi} + \frac{\sin^2\varphi\cos^2 l}{2\cos^4\varphi}\,t^2.$$

Cette fonction atteint ses moindres valeurs pour une valeur donnée de l lorsque $t = 0$, c'est-à-dire le long du méridien central; sur ce méridien elle atteint son minimum en deux points, lorsque $\varphi = l$, ce qui a lieu à l'équateur et au pôle. Elle prend alors la valeur 2,048 supérieure à deux unités; mais cette valeur n'est pas applicable au pôle, car, en ce point, t est indéterminé, et le dernier terme de la fonction a une valeur infinie. Pour $t = 0$ et $l = 65^\circ\ 30'$, latitude qui correspond à peu près à la plus grande différence entre l et φ, la valeur de la fonction atteint 2,82. Pour un point placé à cette latitude, mais sur le bord de la carte, la valeur de la fonction s'élève à 4,11.

Ces résultats mettent en évidence les profondes altérations inhérentes au tracé homalographique.

La meilleure carte d'égale superficie serait celle pour laquelle la fonction $\frac{p^2 + p'^2}{r^2} + \frac{q^2 + q'^2}{\rho^2}$ serait égale à deux unités, soit en un point donné, soit en tous points d'une ligne définie par une relation donnée entre l et t et serait en outre la plus petite possible pour tous les autres points de la carte. La détermination des fonctions arbitraires par cette condition constitue un problème d'analyse beaucoup trop compliqué pour que nous essayions de le résoudre.

CHOIX DE LA PROJECTION.

5. Nous n'avons pas la prétention de donner ici des règles fixes sur le choix de la projection qui convient le mieux à la carte que l'on se propose de tracer, et nous disons même que de telles règles ne sauraient exister, car ce choix doit dépendre de plusieurs circonstances qu'il est impossible de prévoir d'une manière générale.

Malte-Brun disait avec raison que le premier objet des méditations du géographe-dessinateur est de déterminer le genre et le but de sa carte; nous ne saurions, de notre côté, trop insister sur l'importance de pareilles considérations, et c'est dans ce but que nous allons passer rapidement en revue les principaux cas qui peuvent se présenter.

Lorsqu'on veut construire une carte terrestre, on doit se demander tout d'abord si elle doit représenter : 1° la surface entière du globe ou seulement un hémisphère; 2° une vaste portion du monde; 3° un empire ou une province seulement.

Pour chacune de ces grandes divisions, le but que doit atteindre le tracé permettra de restreindre beaucoup le nombre des projections qui peuvent tout d'abord paraître convenables. Si l'on veut conserver les surfaces, c'est dans la classe des projections équivalentes que l'on devra borner son choix; si, au contraire, il importe de conserver la similitude des configurations, la projection devra être orthomorphe; mais le plus souvent il sera nécessaire d'accepter en même temps les erreurs de surfaces et de configurations, afin de ne pas exagérer l'une des deux en détruisant l'autre entièrement; et c'est alors que le choix à faire exigera une étude approfondie et intelligente.

6. Nous allons passer rapidement en revue les différents systèmes qui peuvent convenir à la représentation de la surface entière du globe au moyen d'une ou de deux cartes seulement; toute projection pourrait, à la rigueur, être appliquée à la représentation d'un hémisphère, ainsi que nous l'avons fait dans les planches qui accompagnent cet ouvrage ; mais quelques-unes entraînent avec elles, à cette limite, des erreurs beaucoup trop grandes pour que l'emploi, quelle que soit d'ailleurs la simplicité du tracé, puisse en être avantageux ; nous n'avons pas eu d'autre but, en projetant un hémisphère entier, que de mieux faire ressortir les inconvénients de chaque canevas et d'indiquer ainsi dans quelles limites chacun d'eux peut être employé.

1° Le développement des cartes réduites de Mercator et celui du cylindre droit de Lambert sont les seuls qui représentent les méridiens et les parallèles par des droites perpendiculaires entre elles; le premier conserve les angles, le second les surfaces, mais tous les deux ont l'inconvénient de déformer d'une manière exagérée les régions polaires, et ne peuvent donner une idée même approchée des

positions relatives des différents points du globe; cependant le premier est souvent employé pour les planisphères, parce qu'il indique immédiatement la route à suivre pour se rendre par mer d'un point à un autre du globe, ainsi que la longueur de cette route.

2° La projection homalographique, qui conserve les surfaces et permet de représenter le globe entier dans une ellipse dont l'axe équatorial est double de l'autre, modifie trop les angles pour être employée exclusivement; au delà de 50° de latitude, les altérations croissent très-rapidement, et rendent ce système impropre à représenter d'une manière satisfaisante les configurations des régions plus élevées en latitude.

3° Les proportions zénithales, que nous avons étudiées séparément avec tous les détails nécessaires, possèdent ce grand avantage que les azimuts relatifs au point central sont conservés; que les erreurs, de quelque nature qu'elles soient, y sont égales à égale distance du centre, nulles à ce centre qui peut être pris arbitrairement, et par conséquent d'autant plus faibles que les régions considérées sont plus voisines de ce point; ces erreurs sont, en outre, très-faciles à calculer.

Parmi ces projections, la plus facile à tracer est la projection stéréographique, qui n'altère pas les angles et permet de résoudre très-rapidement par des constructions planes les problèmes de la sphère; quoique ce système double les longueurs et quadruple les surfaces le long de la circonférence qui limite un hémisphère, il est bon qu'il figure dans les atlas, mais il ne devrait pas y figurer seul; la projection zénithale équivalente de Lambert et la projection équidistante, employées simultanément avec la projection stéréographique, permettraient de se rendre un compte exact des surfaces et des distances, non-seulement au point central, mais encore des différents points entre eux, lorsque ces points ne sont pas à plus de 30 à 40 degrés du centre. Sur la circonférence de l'hémisphère projeté dans le système équidistant, les surfaces élémentaires de la carte et de la sphère sont entre elles dans le rapport de 1,57 à 1, au lieu de 4 à 1, comme dans la projection stéréographique. Nous donnons aux chapitres IX et XIV (2e partie) le moyen de construire rapidement ces deux projections, soit directement, soit à l'aide d'une projection stéréographique déjà tracée et ayant pour centre le même point du globe.

Lorsque l'on veut représenter un hémisphère sous l'aspect méridien, il est souvent suffisant de remplacer le système équidistant par

le système globulaire, plus facile à tracer, et qui ne présente avec lui que des différences très-faibles, tantôt dans un sens, tantôt dans un autre.

La projection équidistante est celle qui convient le mieux au tracé d'un hémisphère sous l'aspect polaire, parce que les parallèles y sont représentés par des circonférences concentriques et équidistantes, comme sur la sphère, et que dans toute la zone limitée par le cercle polaire les erreurs de tous genres y sont tellement faibles qu'elles peuvent y être négligées; car, à 25 degrés du pôle, c'est-à-dire sur le parallèle de 65 degrés de latitude, le rapport maximum des distances élémentaires de la carte et de la sphère, de même que le rapport des surfaces élémentaires, est exprimé par 1,032, valeur très-peu différente de l'unité.

La projection orthographique altère beaucoup trop les surfaces et les angles pour qu'on puisse l'employer avantageusement pour la représentation d'un hémisphère ; à 60 degrés du centre, les surfaces ne sont que la moitié de celles qui leur correspondent sur la sphère, et la plus grande altération d'angle est déjà de 19° 28′. Cette projection est adoptée pour la carte de la lune, parce qu'elle figure les astres comme nous les voyons en réalité.

Les autres projections perspectives ne sont que rarement employées pour la construction des mappemondes; celle de la Hire et de Parent ne s'écartent que très-peu de la projection équidistante, qui n'est pas plus difficile à construire ; la projection du colonel James, où les erreurs sont à peu près uniformément réparties, peut être avantageusement employée pour les cartes physiques figurant plus d'un hémisphère, de manière à embrasser d'un seul coup d'œil l'ensemble des grands continents.

La projection de sir Airy, *Balance of Errors*, n'a pas encore été employée ; sa formule, très-compliquée, nécessite des calculs très-pénibles, et les problèmes de la sphère ne peuvent s'y résoudre facilement.

4° Les projections coniques seront très-utiles pour figurer un hémisphère entier, boréal ou austral parce que, les parallèles étant représentés par des cercles concentriques, les régions situées sous les mêmes latitudes sont comparables entre elles. Les projections coniques orthomorphes de Lambert conservant les angles (excepté aux pôles) et par conséquent les formes des parties peu étendues, conviennent très-bien pour cet objet : elles pourraient même être pro-

longées au delà de l'équateur ; mais, comme les erreurs croissent très-rapidement à cette limite, il sera préférable, si l'on veut représenter la surface entière du globe, de recourir à deux cartes se terminant à l'équateur, l'une pour l'hémisphère boréal, l'autre pour l'hémisphère austral. En prenant pour λ la valeur $\frac{3}{4}$, l'angle au pôle d'un hémisphère entier est de 281° 59″ 38′ ; les degrés de longitude sont conservés sur deux parallèles qui diffèrent peu de ceux de 30 et de 70 degrés de latitude ; le rapport d'agrandissement, le même à ces deux latitudes, est le plus petit possible sous le parallèle de 51° 30′ environ ; enfin, le parallèle de 45° de latitude partage tous les méridiens en deux parties à peu près égales.

On peut aussi représenter l'hémisphère boréal ou l'hémisphère austral en proportion conique équivalente, d'après le système de Lambert, en déterminant le coefficient arbitraire n de manière que les degrés d'un parallèle donné conservent leur véritable rapport avec le degré de longitude ; si ce parallèle est celui de 45 degrés, le coefficient n prend la valeur 1,171, et par conséquent l'angle au pôle est de 307° 25′ environ.

Enfin les projections polyconiques représenteront avec une exactitude suffisante un hémisphère sous l'aspect méridien, soit que l'on veuille conserver les degrés de tous les parallèles, soit que l'on préfère sacrifier cette égalité à la perpendicularité des méridiens et des parallèles. Comme les deux systèmes diffèrent très-peu l'un de l'autre, on pourra se contenter de la construction abrégée d'un hémisphère que nous avons indiquée en parlant des systèmes polyconiques.

7. Supposons maintenant que l'on veuille représenter, non plus un hémisphère entier, mais une portion plus ou moins grande du monde. On devra tout d'abord considérer quelle est la position de cette contrée relativement à l'équateur, son étendue et la forme générale de son contour ; on voit que la question sera beaucoup plus difficile que celle de la construction d'un hémisphère, parce que, l'échelle étant nécessairement plus grande, les altérations résultant du canevas que l'on adoptera seront beaucoup plus apparentes, et auront une importance bien autrement considérable ; on devra donc étudier la question avec le plus grand soin, chercher à répartir les erreurs à peu près également dans les parties également importantes, en reportant les plus considérables dans les parties dont l'exacte représentation importe le moins, comme, par exemple, les grandes masses d'eau qui entourent un continent ; il faudra aussi éviter les

projections qui, par rapport au format, obligent le géographe à faire entrer dans sa carte plus de pays étrangers à son objet que tel autre système, parce qu'elles diminuent l'échelle de la carte, c'est-à-dire la proportion entre l'image et l'objet représenté.

Lorsque la carte ne doit embrasser qu'une petite portion de la surface du globe, les défauts de toutes les méthodes diminuent, car les quadrilatères formés par les méridiens et les parallèles approchent d'autant plus d'être des parallélogrammes rectangles équivalents qu'ils sont moins éloignés du centre de la contrée que l'on veut représenter ; c'est ainsi que toutes les projections viennent se confondre avec le plan levé géométriquement toutes les fois qu'il s'agit d'une étendue dans laquelle la courbure de la terre est peu sensible; il est donc toujours avantageux de multiplier les cartes d'un atlas, au lieu de chercher à représenter dans une même carte plusieurs États, plusieurs contrées dont l'ensemble importe peu à l'étude que l'on veut faire; mais, en se conformant à cette prescription, le choix de la projection n'en reste pas moins important, car il peut être nécessaire de réduire les erreurs le plus possible autour d'un point important, tel qu'une capitale, en les laissant s'accroître avec les distances à ce point, ou de conserver les distances relatives dans certaines directions plutôt que dans d'autres.

Il ne peut exister de règles fixes pour le choix de la projection la plus convenable; s'il était possible de dresser un tableau des altérations d'angles, de longueurs, de surfaces, en des points assez rapprochés de chaque canevas, un tracé rapide du contour de la contrée que l'on veut figurer montrerait, suivant le but que l'on veut atteindre, quel est le système qui convient le mieux à cette contrée ; mais on ne peut songer à dresser un pareil tableau, puisque, pour beaucoup de systèmes, les altérations dépendent de coefficients arbitraires et que l'on ne détermine que par les données mêmes de la question que l'on veut résoudre, par exemple, par la latitude du point important où l'on veut réduire les erreurs, ou par celle de deux parallèles dont on veut conserver les degrés de longitude, etc. L'intelligence du géographe peut donc seule suppléer à ce manque de règles et d'indications suffisantes, et ce n'est que par une connaissance approfondie des avantages et des défauts de chaque système en particulier qu'il pourra prononcer au milieu du grand nombre qui peuvent s'offrir à lui.

NOTE

SUR LES CARTES GÉOGRAPHIQUES,

Par M. A. Tissot (1).

« *Trouver le meilleur mode de projection pour chaque contrée particulière.* »

8. « Lorsqu'il s'agit d'une carte destinée aux services publics, comme celle qui a été dressée en France par le Dépôt de la Guerre, la première condition que l'on doit s'astreindre à remplir en faisant choix d'un système de projection, est relative à la reproduction des angles; il n'est pas nécessaire d'annuler complétement leurs altérations, mais il faut les rendre plus faibles que les erreurs admissibles en topographie dans la mesure des angles eux-mêmes; alors chaque feuille de la carte constituera un véritable levé topographique; seulement, les distances ne pouvant être conservées, l'échelle du dessin variera d'une feuille à l'autre. Une seconde condition se rapporte à cette variation de l'échelle; on doit, en la rendant aussi faible que possible, amener à son maximum l'étendue de chacune des régions à laquelle il est permis d'attribuer une échelle unique. Enfin, avant de tracer le canevas, on a à calculer les coordonnées d'un grand nombre de points rapportés à deux axes rectangulaires; une troisième condition réside dans la simplicité des formules employées à cet usage.

« Il existe une infinité de systèmes de représentation qui ne modifient pas les angles; mais s'il s'agit d'une contrée ayant, comme la Russie, des dimensions exceptionnelles dans tous les sens, quand même on prendrait celui de ces systèmes qui réduit à son minimum la plus grande altération de longueur, l'échelle subirait de fortes variations d'une extrémité du pays à l'autre, à moins qu'on ne le divisât en plusieurs régions ayant chacune leur carte particulière; c'est pourquoi, tout en évitant les difficultés d'analyse, on aura résolu la question dans les cas qu'il est utile de considérer, si l'on se borne aux trois suivants : celui d'une portion du globe peu étendue dans le sens des parallèles, et autant que l'on voudra dans le sens des mé-

(1) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 17 décembre 1860, p. 964-969.

ridiens ; celui d'une portion du globe peu étendue dans le sens des méridiens, et autant que l'on voudra dans le sens des parallèles ; celui d'une contrée peu étendue dans les deux sens, comme la France, l'Espagne, etc.

« Appelons L la latitude d'un point quelconque, L_0 celle d'un point central, m la longitude du premier point comptée à partir du méridien du second, r le rayon du parallèle dont la latitude est L, r_0 celui du parallèle dont la latitude est L_0, s l'arc de méridien compris entre ces deux parallèles, x et y les coordonnées rectangulaires du point de la carte qui correspond à la latitude L et à la longitude m.

« Dans le premier cas, le meilleur système de projection est donné par les formules

$$(I) \qquad x = s + \frac{1}{2} rm^2 \sin L, \qquad y = rm\left(1 + \frac{1}{6} m^2 \cos 2L\right).$$

« Dans le second cas, en posant

$$R_0 = r_0 \operatorname{cosec} L_0, \qquad R = R_0 - s - \frac{1}{6} s^3, \qquad \varphi = m \sin L_0,$$

on aura, pour les formules analogues,

$$(II) \qquad x = R_0 - R\cos\varphi, \qquad y = R\sin\varphi;$$

ici les méridiens de la carte sont des droites partant toutes d'un même point, et les parallèles des circonférences dont ce point occupe le centre.

« Dans le troisième cas, si l'on appelle N_0 la grande normale du méridien à la latitude L_0, et si l'on représente par μ la variable $m \cos L_0$, on devra employer les formules

$$(III) \quad \begin{cases} x = s + \frac{1}{2} N_0 \operatorname{tang} L_0 \mu^2 + \frac{1}{3} As^3 - Bs^2\mu + Cs\mu^2 + \frac{1}{3} B\mu^3, \\ y = rm + \frac{1}{3} Bs^3 + As^2\mu - Bs\mu^2 + \frac{1}{2} C\mu^3, \end{cases}$$

dans lesquelles on peut mettre $L - L_0$ à la place de s, excepté dans le premier terme de la valeur de x ; A, B, C sont des coefficients constants, dont le troisième est lié au premier par la relation

$$2(A + C)\cos^2 L_0 = \cos 2L_0 ;$$

quant à A et à B, ils dépendent de la forme du contour qui limite le pays, et voici comment ils s'obtiennent ; on trace d'abord ce contour en rapportant chacun de ses points à deux axes rectangulaires sur

lesquels on porte les coordonnées $L - L_0$ et μ; à l'aide de quelques tâtonnements graphiques, on détermine ensuite de grandeur et de position l'ellipse enveloppante pour laquelle le diamètre qui est incliné à 45° sur ses deux axes est le plus petit possible. Soient $2d$ la longueur de ce diamètre minimum, $2a$ celle du grand axe correspondant, α l'angle que fait cette dernière ligne avec l'axe des coordonnées sur lequel est comptée la variable μ; on aura

$$\text{(IV)} \qquad A = \frac{1}{2}\left(\cos^2\alpha - \frac{d^2}{2a^2}\cos 2\alpha\right), \qquad B = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{d^2}{a^2}\right)\sin 2\alpha;$$

le centre de l'ellipse donnera le point central de la carte, et par conséquent fera connaître la latitude moyenne L_0, dont une valeur approchée aura suffi dans cette recherche préliminaire.

« Pour certains contours exceptionnels, le mode de projection le plus avantageux sera fourni par des essais analogues au précédent, mais où les ellipses seront remplacées par des hyperboles ou même par des paraboles, et, dans le cas des paraboles, les formules (III) devront être un peu modifiées; la plupart du temps, on reconnaîtra d'avance l'inutilité de ces deux derniers essais.

« Enfin, on peut introduire dans les seconds membres des équations (I), (II) et (III) un facteur qu'il est facile de déterminer pour chaque pays en particulier, et dont l'effet est de réduire de moitié la plus grande altération de longueur, en la rendant positive dans certaines régions et négative dans d'autres.

« Appliquées à la France, les recherches qui précèdent donnent

$$\text{(V)} \qquad A = 0{,}306, \qquad B = 0, \qquad C = -0{,}368, \qquad L_0 = 41^\circ 40',$$

et le méridien moyen est celui de Paris.

« Pour la carte d'Espagne, dont les opérations géodésiques sont en voie d'exécution, on est conduit à prendre comme méridien central celui de Madrid, et comme parallèle central celui de 40°; les formules sont

$$\text{(VI)} \qquad \begin{cases} x = s + 0{,}42013\mu^2 + 0{,}111s^3 - 0{,}185s^2\mu, \\ y = rm + 0{,}333s^2\mu - 0{,}062\mu^3. \end{cases}$$

« Voici maintenant un tableau contenant, pour six contrées différentes, la plus grand altération d'angle et la plus grande altération de distance produites par le mode de projection adopté lors de la

construction de la carte de France, et par l'un de ceux qui sont proposés dans ce Mémoire.

CONTRÉES.	VALEURS de la plus grande altération d'angle.	VALEURS de la plus grande altération de distance.	MODE DE PROJECTION.
Première contrée. . .	7° 30′	$\frac{1}{15}$	Celui du Dépôt de la Guerre.
Idem.	1′ 20″	$\frac{1}{230}$	Celui des formules (I).
Égypte.	25″	$\frac{1}{250}$	Dépôt de la Guerre.
Idem.	5″	$\frac{1}{2000}$	Formules (II).
Troisième contrée. . .	14° 40′	$\frac{1}{7}$	Dépôt de la Guerre.
Idem.	1′ 20″	$\frac{1}{230}$	Formules (II).
Algérie.	11′	$\frac{1}{600}$	Dépôt de la Guerre.
Idem.	3″	$\frac{1}{2000}$	Formules (II).
France.	18′	$\frac{1}{380}$	Dépôt de la Guerre (parallèle moyen de 45°).
Idem.	10′ 30″	$\frac{1}{650}$	Dépôt de la Guerre (parallèle moyen de 46° 30′).
Idem, ...	25″	$\frac{1}{1100}$	Formules (III) et (V).
Espagne.	11′	$\frac{1}{600}$	Dépôt de la Guerre (parallèle moyen de 41°).
Idem.	20″	$\frac{1}{1000}$	Formules (VI).

« Le premier et le troisième exemple ne se rapportent à aucune division territoriale ; je les ai choisis afin de montrer qu'avec un petit nombre de cartes on pourrait représenter toute la surface du globe, en ne donnant lieu qu'à de faibles déformations ; en effet, si de part et d'autre d'un méridien quelconque on porte sur tous les parallèles des longueurs égales à la moitié de l'arc de 15° à l'équateur, on détachera de la surface de la terre une portion qui en sera environ la huitième partie, et c'est de cette portion qu'il s'agit dans les deux premières lignes du tableau. Dans la cinquième et la sixième, on a considéré toute la zone comprise entre les parallèles

de 37° 30′ et 52° 30′ de latitude, zone dont fait partie l'Europe centrale, si on la prend dans l'hémisphère nord.

« Pour la seconde application, j'ai choisi la carte d'Égypte, parce que les travaux nécessaires à sa construction doivent être commencés prochainement. Le territoire de l'Égypte se compose, comme on sait, d'une longue vallée encaissée depuis Assouan jusqu'au Caire par deux chaînes de montagnes dont les versants extérieurs s'étendent dans de vastes déserts; il est à présumer que l'on n'effectuera dans ces déserts aucune triangulation, mais que par la suite on continuera au sud d'Assouan et en remontant le Nil des opérations géodésiques dont les résultats offriront beaucoup d'intérêt, tant pour l'étude de la forme de la terre qu'au point de vue géographique. J'ai donc supposé que la carte qu'il s'agissait d'établir était celle d'une contrée située entre le 9e et le 32e degré de latitude, avec une étendue de 5° en longitude.

« Le quatrième exemple est relatif à toute l'Algérie, c'est-à-dire au Tell et au Sahara algériens; en adoptant les formules proposées, on pourrait placer sur la même carte la régence de Tunis et la plus grande partie de l'empire du Maroc sans augmenter les altérations.

« Le parallèle moyen de 45° dont il est question pour la France est celui qui a été adopté par les commissions de 1803 et de 1818.

« Enfin, avec les formules (VI), les îles Baléares, le territoire de Ceuta et le Portugal se trouvent compris dans la région à laquelle se rapportent les altérations indiquées par le tableau; mais celles que produit le système de Flamsteed modifié augmenteraient, si on voulait compléter la carte de la Péninsule par l'addition du Portugal. »