www.e-rara.ch

Traité des projections des cartes géographiques

Germain, Adrien Adolphe Charles

Paris, [1865]

ETH-Bibliothek Zürich

Shelf Mark: Rar 18793

Persistent Link: https://doi.org/10.3931/e-rara-74932

Chapitre premier.

www.e-rara.ch
Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien – von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material – from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d'imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L'éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes – des débuts de l'imprimerie jusqu'au 20e siècle.

e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

Nutzungsbedingungen Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titelinformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

Terms of Use This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

Conditions d'utilisation Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

Condizioni di utilizzo Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]

Visual Library

CHAPITRE PREMIER.

PROJECTION STÉRÉOGRAPHIQUE.

1. La projection stéréographique est une projection perspective dans laquelle l'œil est supposé à la surface de l'hémisphère opposé à celui que l'on veut représenter, à l'extrémité du diamètre passant par le point choisi pour centre de la carte.

Nous avons montré que la position du plan de projection ne pouvait apporter de changement que dans l'échelle de la construction; nous supposerons dans ce qui va suivre que ce plan passe par le centre de la sphère.

Nous ne tiendrons pas compte de l'aplatissement de la terre; il est toujours suffisant, en effet, dans le tracé des mappemondes, de supposer la terre sphérique; la considération de l'aplatissement compliquerait beaucoup les calculs et les constructions, et les différences seraient inappréciables aux échelles que l'on adopte ordinairement. Dans les cartes particulières, pour lesquelles, du reste, la projection stéréographique n'est que rarement employée, il sera toujours plus commode et suffisamment exact d'appliquer la méthode de Prony (1), qui remplace la portion de sphéroïde à représenter par une portion de sphère dont il est facile de calculer le rayon, et qui ne change par conséquent rien aux règles établies dans l'hypothèse de la sphéricité. Si nous supposons le périmètre du pays à représenter à peu près circulaire, il suffira presque toujours de prendre pour rayon de la sphère au point central de la carte

$$R = a\left(1 - \frac{1}{2}e^2 + e^2 \sin^2\lambda\right),$$

en appelant λ la latitude de ce point central.

2. Nous avons déjà montré, en étudiant les projections orthomorphes, que la projection stéréographique jouissait de la propriété

(1) *Voir* 1re partie, chap. I, § 4.

de conserver les angles tracés sur la surface de la sphère; nous allons donner une nouvelle démonstration géométrique et directe de ce théorème que :

« Les angles tracés sur la surface de la sphère conservent leur grandeur en projection. »

Soit (fig. 62) V le point de vue, EGF le plan de projection perpendiculaire au rayon OV, A le sommet de l'angle considéré qui est formé par deux courbes quelconques tracées sur la surface de la sphère. Cet angle étant mesuré par celui des tangentes aux deux courbes au point A, cherchons comment se projettent ces deux droites AD, AD'.

Le point A se projette en *a*. Le plan DAD' perpendiculaire au rayon OA est tangent à la sphère en A et contient la tangente AT au grand cercle passant par A et V et perpendiculaire lui-même au plan de projection; DD' intersection du plan tangent et du plan de projection, tous deux perpendiculaires au grand cercle passant par A et V, est donc perpendiculaire à ce cercle et par suite aux droites AT et *a*T. En outre *a*T = AT, car le triangle *a*AT est isocèle, puisque les angles en *a* et A ont même mesure; les deux triangles *a*TD, ATD, tous deux rectangles en T, sont donc égaux; il en est de même des triangles ATD', *a*TD'; de là résulte l'égalité des angles DAD', D*a*D' formé par les deux courbes considérées sur la sphère et par leurs projections.

Il résulte de ce théorème général que, dans la projection stéréographique, la projection d'un cercle tracé sur la surface de la sphère est elle-même un cercle.

Pour le démontrer, considérons le cône tangent à la sphère le long de ce cercle (fig. 63). Chaque génératrice de ce cône est perpendiculaire à la tangente correspondante au cercle de base. Or ces génératrices ont pour projections des droites passant toutes par le point *s*, projection du sommet S du cône; les tangentes au cercle de la sphère se projettent évidemment suivant les tangentes à la courbe de projection. D'après la propriété générale, AT étant perpendiculaire à AS, *at* devra être perpendiculaire à *sa*; *sa* sera donc une normale à la courbe; toutes ces normales passant par un même point *s*, il en résulte que la courbe projection est une circonférence. Ainsi la projection d'une circonférence est une autre circonférence.

3. Le rapport entre les longueurs élementaires correspondantes de la projection et de la sphère reste le même autour de chaque point

et ne varie qu'avec la distance de ce point au centre de la projection; il est exprimé par la formule

$$m = \frac{1}{2\cos^2\frac{\theta}{2}},$$

dans laquelle θ désigne l'arc de grand cercle qui réunit le point considéré au centre de la carte (1). En appelant λ la latitude de ce centre, on pourra toujours exprimer θ en fonction de la latitute l et de la longitude t du point considéré, à l'aide de la formule

$$\cos\theta = \frac{\sin(l+\varphi)}{\cos\varphi}\sin\lambda,$$

dans laquelle l'angle auxiliaire φ est donné par la relation

$$\operatorname{tang}\varphi = \cos t \operatorname{cotang}\lambda,$$

et les longitudes t sont supposées comptées à partir du méridien du point central.

Nous n'avons pas besoin d'ajouter que si le plan de projection, au lieu de passer par le centre de la sphère, est à une distance du point de vue égale à D', ce rapport m, de même que toutes les lignes de la projection, devra être multiplié par le rapport $\frac{D'}{a}$.

Le rapport M^2 des surfaces élémentaires de la projection et de la sphère a pour expression

$$M^2 = \frac{1}{4\cos^4\frac{\theta}{2}},$$

ou, plus généralement,

$$M^2 = \frac{D'^2}{4a^2\cos^4\frac{\theta}{2}};$$

ce rapport est égal à $\frac{D'^2}{4a^2}$ au centre de la projection, croît avec θ, est égal à $\frac{D'^2}{a^2}$ à 90° du centre, et continue à croître jusqu'à ce que $\theta = 180°$.

---

(1) *Voir* 1re partie, chap. V, § 12.

4. Les méridiens et les parallèles de la projection devant toujours être des arcs de cercle, pourront toujours se tracer à l'aide du compas lorsqu'on connaîtra leur centre et leur rayon ; nous allons nous occuper de déterminer ces deux éléments. Disons d'abord que les coordonnées x et y de la projection, sur l'horizon d'un lieu dont la latitude est λ, d'un point de la sphère défini par sa latitude et sa longitude, pourront toujours être calculées à l'aide des formules générales des projections perspectives que nous avons établies et dans lesquelles il suffit de faire $D = a$

$$x = \frac{a(\sin\lambda\cos l\cos t - \cos\lambda\sin l)}{1 + \cos\lambda\cos l\cos t + \sin\lambda\sin l},$$

$$y = \frac{a\cos l\sin t}{1 + \cos\lambda\cos l\cos t + \sin\lambda\sin l}.$$

On pourra donc toujours construire les méridiens et les parallèles par abscisses et ordonnées, et réunir les points ainsi déterminés à l'aide du pistolet à arcs de cercles.

Nous allons d'abord étudier les deux cas particuliers de la projection stéréographique polaire ou équatoriale (l'œil à l'un des pôles) et de la projection méridienne (l'œil à l'équateur).

PROJECTION STÉRÉOGRAPHIQUE POLAIRE OU ÉQUATORIALE.

5. Le plan de l'équateur étant pris pour plan de projection, nous devons faire dans les formules générales de la projection stéréographique $\lambda = 90°$; nous obtenons alors

$$x = \frac{a\cos l\cos t}{1 + \sin l},$$

$$y = \frac{a\cos l\sin t}{1 + \sin l}.$$

Donc, en appelant z le complément de la latitude,

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tang} t,$$

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2\sin^2 z}{(1+\cos z)^2} = a^2\operatorname{tang}^2\frac{z}{2}.$$

Ces formules montrent que les parallèles sont représentés par des

circonférences ayant toutes pour centre le pôle opposé à l'œil et pour rayon

$$\rho = a \operatorname{tang} \frac{z}{2},$$

c'est-à-dire la tangente de la moitié du complément de la latitude; les méridiens équidistants de la sphère sont représentés par des rayons équidistants de l'équateur, qui a pour rayon le rayon même de la sphère.

Ce premier cas particulier ne présente donc aucune difficulté. On décrira (fig. 64), avec un rayon égal au rayon de la sphère réduit à l'échelle de la carte que l'on veut construire, une circonférence que l'on divisera en degrés et fractions à partir du diamètre (0°,180°), qui doit représenter le méridien principal ou premier méridien; en joignant les points de division au centre, on aura les méridiens de la projection. Pour construire le rayon de chaque parallèle, on joindra le point de la circonférence de la carte qui exprime sa latitude au point (90°) situé dans le demi-cercle opposé : la distance Pn sera le rayon cherché, égal du reste à $a \operatorname{tang} \frac{90^\circ - l}{2}$.

On peut avoir à tracer sur la carte un grand cercle tel que l'horizon d'un lieu défini par sa latitude l et sa longitude t, ou l'écliptique. Nous traiterons ce problème d'une manière générale au paragraphe 10 (4°), sous le titre : Construire la projection de l'horizon d'un lieu donné sur la carte. Résumons ici la solution.

On joindra le point donné A au pôle qui est ici le centre; on élèvera sur cette droite le diamètre $\alpha\alpha'$ perpendiculaire; on joindra le point α' au point A, et à partir du point A' de cette droite on portera sur la circonférence de la carte un arc de 90° de A' en A'_1; le point a, intersection des diamètres qui passent par A et par A'_1, sera un point de l'arc cherché qui devra passer aussi par les deux points $\alpha\alpha'$; il sera donc facile d'en déterminer le centre.

Dans le cas où le centre de ce cercle sortirait des limites de la feuille, on tracerait la circonférence $\alpha a\alpha'$, soit avec une équerre dont les branches mobiles s'appuieraient en α et α' et feraient entre elles l'angle $\alpha a\alpha'$, soit par points en menant des droites telles que αd, $\alpha' d$ faisant entre elles l'angle $\alpha a\alpha'$. Remarquons que cet angle constant est égal au supplément de la latitude du lieu A dont on veut tracer l'horizon, ou bien à 90° + H, H étant l'inclinaison de ce grand cercle sur l'équateur. Le centre est à une distance du centre de la carte

égale à la cotangente de la latitude du lieu A, et le rayon est égal à la cosécante de cette latitude.

Dans la projection stéréographique polaire, la projection d'une courbe loxodromique, c'est-à-dire d'une courbe faisant, en chacun de ses points, un angle constant avec le méridien de ce point, doit être une spirale logarithmique. Cette courbe est en effet la seule qui jouisse de la propriété de couper ses rayons vecteurs sous un angle constant.

La mappemonde n° 1 a été tracée en projection équatoriale.

Le tableau suivant, dressé à l'aide de la formule

$$\rho = a \operatorname{tang} \frac{90° - l}{2},$$

donne les valeurs des rayons des parallèles de 5° en 5° de latitude en supposant $a = 1$, c'est-à-dire en prenant pour unité le rayon de la sphère.

l	ρ	l	ρ
0°	1,00000	45	0,41421
5	0,91633	50	0,36397
10	0,83910	55	0,31530
15	0,76733	60	0,26795
20	0,70021	65	0,22169
23° 27′ 30″	0,65616	66° 32′ 30″	0,20762
25	0,63707	70	0,17633
30	0,57735	75	0,13165
35	0,52057	80	0,08749
40	0,46631	85	0,04366

PROJECTION STÉRÉOGRAPHIQUE MÉRIDIENNE.

6. La projection est supposée faite sur le plan du méridien perpendiculaire au méridien principal et comptant par conséquent 90° de longitude. Le méridien principal et l'équateur sont représentés par deux droites perpendiculaires qui sont deux axes de symétrie de la figure; la première est prise pour axe des x, la seconde pour axe des y.

En faisant, dans les formules générales, $\lambda = 0$, on obtient

$$x = \frac{a \sin l}{1 + \cos l \cos t}, \qquad y = \frac{a \cos l \sin t}{1 + \cos l \cos t} = x \sin t \operatorname{cotang} l.$$

En éliminant l entre ces équations, on obtient

$$(x^2 + y^2) \sin t + 2ay \cos t - a^2 \sin t = 0,$$

équation d'un cercle passant par les pôles et dont le rayon est

$$\rho_m = \frac{a}{\sin t} = a \operatorname{cosec} t.$$

Les coordonnées α et β du centre sont

$$\alpha = 0; \qquad \beta_m = -a \operatorname{cotang} t;$$

le centre est donc sur l'équateur à une distance du centre de la carte égale à la cotangente de la longitude. Enfin, en cherchant la distance du centre de la carte au point d'intersection du méridien considéré et de l'équateur, on trouve

$$\delta_m = a \operatorname{tang} \frac{t}{2}.$$

On peut arriver très-simplement à ces formules en se rappelant que, d'après la propriété générale de la projection stéréographique, l'angle des tangentes au premier méridien et au méridien considéré, angle qui mesure la longitude, doit être le même en projection que sur la sphère. Il suffira donc, pour avoir le centre d'un méridien donné par sa longitude t, de faire au pôle P (fig. 65), avec la ligne des pôles PP′ un angle égal au complément $90° - t$ de la longitude.

Pour déterminer les centres de tous les méridiens également espacés, de 5° en 5° par exemple, on décrira du pôle P avec un rayon quelconque une circonférence que l'on partagera en arcs égaux de 5° à partir du diamètre perpendiculaire à PP′; la rencontre des divers rayons prolongés avec EE′ déterminerait le centre de chaque méridien.

Le triangle rectangle PCO donne immédiatement les formules que nous avons trouvés analytiquement

$$\mathrm{CO} = \beta = \operatorname{cotang} t; \qquad \mathrm{PC} = \rho_m = a \operatorname{cosec} t; \qquad \delta = \mathrm{OM} = a \operatorname{tang} \frac{t}{2}.$$

7. Occupons-nous maintenant des parallèles. Leur équation est

$$(x^2 + y^2) \sin l + 2ax + a^2 \sin l = 0,$$

équation d'un cercle dont le rayon est

$$\rho_p = a \operatorname{cotang} l.$$

Les coordonnées du centre sont

$$\alpha_p = a \operatorname{cosec} l; \qquad \beta_p = 0;$$

le centre est donc sur la ligne des pôles à une distance du centre de la carte égale à la cosécante de la latitude; enfin en cherchant la distance du centre de la carte au point d'intersection le plus proche du parallèle considéré et du premier méridien, on trouve

$$\delta_p = a \operatorname{tang} \frac{l}{2}.$$

On peut arriver très-simplement à ces formules en remarquant que chaque parallèle doit couper le méridien de projection perpendiculairement au point qui marque sa latitude, de telle sorte que le centre doit se trouver sur la tangente CN′ au point N′ (fig. 66), dont la latitude est l. Le triangle rectangle CN′O donne immédiatement

$$CN' = \rho_p = a \operatorname{cotang} l; \qquad OC = \alpha_p = a \operatorname{cosec} l; \qquad On = \alpha = a \operatorname{tang} \frac{l}{2}.$$

Rappelons ici que le point n s'obtient immédiatement en joignant E′ et N, c'est-à-dire une des extrémités de l'équateur au point du demi-cercle opposé qui exprime la latitude du parallèle sur le méridien de projection préalablement divisé en degrés et fractions à partir du diamètre EE′. On déterminera donc le centre soit par la tangente, soit en élevant des perpendiculaires sur le milieu de nN et nN′.

Au lieu de construire les méridiens et les parallèles, il y a plus d'avantage, soit comme rapidité, soit comme exactitude, à se servir d'une table où l'on aura calculé d'avance le rayon ρ de chaque cercle, la distance de son centre au centre de la carte et, si l'on veut, la distance du centre de la carte au point le plus proche. Or la simple inspection des formules montre que la même table pourra servir pour les méridiens et pour les parallèles; en exprimant par les mêmes

nombres les latitudes l ou les longitudes t, les rayons ρ_m des méridiens et les distances α_p du centre des parallèles au centre de la projection seront exprimés respectivement par les mêmes nombres; il en sera de même des rayons ρ_p des parallèles et des distances β_m des centres des méridiens, et de même aussi des distances du centre de la projection aux points les plus proches des méridiens et des parallèles.

La mappemonde n° II a été construite à l'aide de la table suivante, qui donne les éléments nécessaires pour les valeurs de l et t de 5° en 5°, en supposant le rayon de la sphère pris pour unité :

l ou t	ρ_m ou α_p	ρ_p ou β_m	δ_m ou δ_p	l ou t
0°	∞	∞	0,00000	0°
5	11,47371	11,43005	0,04366	5
10	5,75877	5,67128	0,08749	10
15	3,86370	3,73205	0,13165	15
20	2,92380	2,74748	0,17633	20
23° 27′ 30″	2,51204	2,30442	0,20762	23° 27′ 30″
25	2,36620	2,14451	0,22169	25
30	2,00000	1,73205	0,26795	30
35	1,74345	1,42815	0,31530	35
40	1,55572	1,19175	0,36397	40
45	1,41421	1,00000	0,41421	45
50	1,30541	0,83911	0,46631	50
55	1,22077	0,70021	0,52057	55
60	1,15470	0,57735	0,57735	60
65	1,10338	0,46631	0,63707	65
66° 32′ 30″	1,09009	0,43395	0,65616	66° 32′ 30″
70	1,06418	0,36397	0,70021	70
75	1,03528	0,26795	0,76733	75
80	1,01543	0,17633	0,83910	80
85	1,00382	0,08749	0,91633	85
90	1,00000	0,00000	0,10000	90

Lorsque l'échelle de la projection est très-grande, il devient difficile de décrire les méridiens et les parallèles à l'aide du compas, et il est plus exact de construire par coordonnées leurs points d'intersection à l'aide des formules générales. Nous avons donné au § 5 du chapitre IV (1re partie) le moyen de construire graphiquement dans

les projections perspectives méridiennes les valeurs de x et de y; nous n'y reviendrons pas.

PROJECTION STÉRÉOGRAPHIQUE HORIZONTALE.

8. Considérons maintenant le cas général où l'on veut construire la projection d'un hémisphère sur l'horizon d'un lieu Z donné par sa latitude λ, en supposant les longitudes comptées à partir du méridien de ce lieu. Le point de vue est le point diamétralement opposé au point Z.

Les équations des parallèles sont

$$(x^2+y^2)(\sin\lambda+\sin l)+2ax\cos\lambda+a^2(\sin l-\sin\lambda)=0,$$

équation d'un cercle dont le rayon est

$$\rho_p=\frac{a\cos l}{2\sin\dfrac{l+\lambda}{2}\cos\dfrac{l-\lambda}{2}};$$

les coordonnées du centre sont

$$\alpha_p=-\frac{a\cos\lambda}{2\sin\dfrac{l+\lambda}{2}\cos\dfrac{l-\lambda}{2}} \quad \text{et} \quad \beta_p=0.$$

Ces cercles coupent l'axe des x (fig. 67) qui représente le premier méridien en deux points n et n' dont les distances δ et δ' au centre de la carte sont

$$\delta=a\operatorname{tang}\frac{l-\lambda}{2}; \qquad \delta'=a\operatorname{cotang}\frac{l+\lambda}{2}$$

pour l'équateur $l=0$; on obtient donc

$$\rho_0=a\operatorname{cosec}\lambda,$$
$$\alpha_0=-a\operatorname{cotang}\lambda,$$
$$\delta_0=-a\operatorname{tang}\frac{\lambda}{2}; \qquad \delta'_0=a\operatorname{cotang}\frac{\lambda}{2}.$$

Les coordonnées des pôles s'obtiendront en faisant $l=\pm 90^0$ dans l'expression de α_p; on aura ainsi

$$p=a\operatorname{tang}\frac{90^0-\lambda}{2},$$
$$p'=-a\operatorname{cotang}\frac{90^0-\lambda}{2}.$$

La distance des pôles est donc

$$pp' = 2a \operatorname{séc} \lambda.$$

Le milieu F de pp' sera donné par sa distance f au centre 0

$$f = \frac{pp'}{2} - 0p = a \operatorname{tang} \lambda.$$

L'équation des méridiens est

$$(x^2 + y^2) \sin t \cos \lambda + 2ay \cos t - 2ax \sin \lambda \sin t - a^2 \sin t \cos \lambda = 0,$$

ou

$$(x^2 + y^2) \cos \lambda + 2ay \operatorname{cotang} t - 2ax \sin \lambda - a^2 \cos \lambda = 0,$$

équation d'un cercle dont le rayon ρ_m est

$$\rho_m = \frac{a}{\cos \lambda \sin t} = a \operatorname{séc} \lambda \operatorname{cosec} t,$$

et dont les coordonnées du centre sont

$$\alpha_m = a \operatorname{tang} \lambda; \qquad \beta_m = -\frac{a \operatorname{cotang} t}{\cos \lambda}.$$

On voit donc que les centres de tous les méridiens sont sur une perpendiculaire au premier méridien passant par le milieu de la distance des pôles, à une distance de ce point égale à

$$a \operatorname{cotang} t \operatorname{séc} \lambda.$$

Nous allons maintenant nous occuper de la construction graphique.

On décrira d'abord (fig. 68) avec un rayon égal à celui de la sphère réduit à l'échelle de la carte une circonférence qui représentera l'horizon du lieu pris pour centre, et à partir d'un diamètre (0,180°) qui représentera le méridien du lieu, pris pour premier méridien, on divisera cette circonférence en degrés de chaque côté. On portera alors la latitude λ du lieu central de 0° en P et 180° en P′ et en joignant le point H′ (90°) à P et à P′ on obtiendra en p et p' les projections des pôles. On vérifie de suite sur la figure que

$$op = a \operatorname{tang} \frac{90° - \lambda}{2}, \qquad op' = a \operatorname{cotang} \frac{90° - \lambda}{2}.$$

On déterminera deux points de chaque parallèle en portant sur la

circonférence de la carte, à droite et à gauche de P, le complément de sa latitude, et joignant ces points N et N′ au point H′ (90°). On voit ainsi que

$$On = \text{tang}\,\frac{l-\lambda}{2}; \qquad On' = \text{cotang}\,\frac{l+\lambda}{2}.$$

Le centre C de la projection de ce parallèle sera au milieu de nn' à une distance CO du centre de la carte égale à

$$CO = \frac{a\cos\lambda}{2\sin\frac{l+\lambda}{2}\cos\frac{l-\lambda}{2}};$$

le rayon sera la moitié de nn'

$$\rho_p = \frac{a\cos l}{2\sin\frac{l+\lambda}{2}\cos\frac{l-\lambda}{2}}.$$

Pour déterminer l'équateur on aura de même les deux points e et e' et l'on remarquera que le cercle cherché devra passer par les deux points marqués 90°; d'ailleurs,

$$Oe = \text{tang}\,\frac{\lambda}{2}; \qquad Oe' = \text{cotang}\,\frac{\lambda}{2}.$$

Rappelons ici que lorsque la droite NN′ qui correspond à une latitude l rencontre le diamètre (0,180°), c'est-à-dire lorsque la latitude du parallèle est plus petite que le complément de la latitude du lieu sur l'horizon duquel on construit, on a immédiatement deux autres points AA′ de la projection, en élevant au point de rencontre α une perpendiculaire au diamètre (0,180°) jusqu'à la rencontre de la circonférence de l'hémisphère. Les trois points A,n,A′ toujours situés dans l'intérieur de la carte, suffiront pour construire le cercle dont le centre C devra, comme vérification, se trouver sur pp'.

Le parallèle tel que la droite NN′ passera par le point H′ (90°), c'est-à-dire dont la latitude sera égale à la latitude du point central, mais de dénomination contraire (boréale si λ est austral, austral si λ est boréal), sera seul représenté par une droite BB′ perpendiculaire à l'axe (0,180°).

9. Occupons-nous maintenant de la projection des méridiens. Tous les cercles que nous voulons construire passeront par les deux points p et p' et auront, par conséquent, leur centre sur la perpendiculaire KFK′ élevée sur le milieu de pp'. L'angle des tangentes au pôle au

méridien principal et au méridien considéré étant conservé en projection, la tangente en p au cercle cherché fera avec pp' un angle égal à la longitude t; on élèvera donc la droite pK faisant avec le diamètre (0,180°) qui contient déjà les pôles un angle $90° - t$ égal au complément de la longitude, et son intersection K avec la droite KFK′ sera le centre cherché.

Il suffira donc, pour tracer tous les méridiens, de décrire du point p une circonférence que l'on divisera en arcs égaux de 1°, 5°, 10°, etc. de joindre les points de division au centre p et de prolonger ces rayons jusqu'à la droite KFK′; chaque intersection sera le centre d'un méridien dont Kp sera le rayon.

Lorsque la longitude du méridien diminue de 90° à 0°, le centre K s'éloigne de plus en plus du point F, et il devient alors difficile de décrire chaque circonférence. On détermine dans ce cas les deux points où chaque méridien rencontre l'horizon sur lequel on construit et l'on trace le cercle à l'aide de ces deux points et du pôle p, soit par points, soit d'un mouvement continu à l'aide d'une équerre mobile.

Si nous considérons sur la sphère (fig. 69) le triangle PMH formé par le premier méridien PH, par l'horizon HM et par le méridien considéré PM, nous voyons qu'il est rectangle en H, que l'arc PH $= \lambda$, et que l'angle P $= t$; on peut donc calculer l'arc HM $= x$, par la formule

$$\text{tang } x = \sin \lambda \text{ tang } t.$$

En donnant donc à t les diverses valeurs des longitudes on déterminera par le calcul les points M et M′ où chaque méridien perce l'horizon. Cette formule se construit graphiquement de la manière la plus simple.

D'un point quelconque, F par exemple, (fig. 68) du diamètre qui contient les pôles de la projection et représente le premier méridien, abaissons FD perpendiculaire sur la ligne PP′. Portons FD de F en G; faisons l'angle FGI égal à la longitude t considérée et joignons le point I au centre O de la carte; cette droite coupera le cercle de projection aux points cherchés M et M′. En effet, l'arc PO° étant égal à la latitude λ du lieu pris pour centre, FD est égal à OA sin λ; FI, dans le triangle FGI, est égal à FG tang t; or FG = FD, donc

$$\text{FI} = \text{OA} \sin \lambda \text{ tang } t;$$

et par suite

$$\text{tang IOF} = \sin \lambda \text{ tang } t,$$

l'angle IOF est donc l'angle x que nous cherchions.

L'hémisphère (proj. n° III) a été tracé en projection stéréographique sur l'horizon de Paris.

10. Pour terminer ce qui a rapport à la projection stéréographique, nous allons traiter quelques problèmes qui se présentent souvent.

1° Par deux points a et b donnés sur la carte, faire passer un arc de grand cercle (fig. 70).

Joignons l'un quelconque des deux points au centre de la carte; élevons sur ce diamètre un autre rayon perpendiculaire OV et par le point V élevons VD perpendiculaire sur aV jusqu'à la rencontre du diamètre aO : le point D sera évidemment un troisième point de la circonférence qui doit passer par a et b et dont on pourra par conséquent déterminer le centre C. Si E et F sont les intersections de cette circonférence avec celle de la carte, il est facile de démontrer que les trois points EOF sont en ligne droite, ce qui servira de vérification.

2° Trouver le pôle d'un grand cercle donné (fig. 71).

Si le grand cercle n'est défini que par deux points, on commence par le tracer comme nous venons de l'indiquer et l'on détermine son diamètre EF commun à la circonférence de la carte ; on construit aussi le diamètre perpendiculaire à EF et l'on joint au point F son intersection a avec le grand cercle ; cette droite prolongée détermine sur la circonférence de la carte un point A à partir duquel on porte un arc de 90° de grand cercle ; on détermine ainsi un point B que l'on joint au point F ; le point b est le pôle cherché.

3° Par un point donné de la carte décrire un grand cercle faisant avec le plan de projection un angle donné φ (fig. 72).

Si le point donné a est sur la circonférence de la carte, il suffira de mener le diamètre de ce point et le diamètre perpendiculaire et de faire en a avec le premier un angle φ égal à l'angle donné ; on déterminera ainsi le centre cherché C du cercle qui passera par a et b.

Si le point donné a' n'est pas sur la circonférence, on décrira de ce point un arc de cercle avec $a \sec \varphi$ pour rayon, et du point central un second arc de cercle avec $a \tan \varphi$ pour rayon ; ces deux arcs détermineront par leur intersection le centre C du grand cercle cherché.

4° Construire l'horizon d'un lieu donné par sa projection a (fig. 73).

Il suffira de décrire du point central O un arc de cercle d'un rayon égal à la cotangente de la latitude du lieu donné ; son intersection C avec le rayon du point a sera le centre cherché. On pourrait aussi

faire en B, extrémité du diamètre perpendiculaire au rayon O*a*, un angle OBC égal au complément de la latitude du lieu donné ou à l'inclinaison de l'horizon cherché sur le cercle de projection.

5° Par un point donné *a* tracer un grand cercle perpendiculaire à un grand cercle donné.

On déterminera le pôle *p* du cercle donné et par les points *a* et *p* on mènera un grand cercle qui sera nécessairement perpendiculaire au cercle donné.

6° Trouver la distance de deux points donnés en projection (fig. 74).

Nous avons traité cette question d'une manière générale dans les projections perspectives (1) ; la construction que nous avons indiquée sera toujours applicable et fort rapide. On peut aussi résoudre la question de la manière suivante : cherchons le pôle *p* du grand cercle passant par *a* et *b* ; joignons *pa* et *pb* ; l'arc AB mesurera la distance cherchée.

7° Porter une distance donnée dans une direction donnée à partir d'un point de la carte (fig. 75).

Cette direction sera donnée par rapport à un arc de grand cercle tracé ou que l'on pourra toujours déterminer avec les données du problème. On mènera alors par le point donné la tangente à ce cercle, puis une droite faisant avec la première l'angle donné ; cette droite devant être tangente au cercle cherché, il suffira de lui mener une perpendiculaire C*a* pour avoir un lieu de son centre. En joignant le point donné *a* au centre de la projection, élevant le rayon perpendiculaire OV, joignant *a*V et faisant l'angle droit *a*V*a'*, on déterminera en *a'* un second point du cercle cherché ; la rencontre du rayon déjà tracé C*a* avec la perpendiculaire élevée sur le milieu de *aa'* déterminera le centre C du grand cercle cherché.

Pour porter sur ce cercle une longueur donnée en degrés et fractions, on joindra *a*V et l'on portera sur la circonférence de la carte de A en B l'arc de grand cercle qui mesure la distance donnée ; on joindra VB et l'intersection *b* de cette droite avec le cercle que l'on aura tracé sera l'extrémité de la distance donnée.

8° Mesurer l'angle de deux grands cercles données (fig. 76). On détermine les deux pôles *p* et *p'* que l'on joint ensuite au point d'intersection *a* des deux cercles ; la distance AA' évaluée en degrés et fractions sera l'angle cherché.

---

(1) *Voir* 1re partie, chap. 4, § 7.

9° Par un point a donné sur la carte, mener un méridien et un parallèle (fig. 77).

Après avoir obtenu la ligne des centres des méridiens, KK', on élèvera une perpendiculaire sur le milieu de la droite pa qui joint le point a au pôle terrestre, et du point K comme centre on décrira avec Kp pour rayon l'arc ap qui sera la projection du méridien demandé.

Pour obtenir le parallèle du point a, remarquons d'abord que le centre doit se trouver sur la ligne des pôles po et qu'il suffirait d'un autre point de ce parallèle pour résoudre le problème. Si l'on avait la distance du point a au pôle p et que le méridien po fût gradué, le point de ce méridien situé à la même distance angulaire du pôle appartiendrait à ce parallèle. Cherchons donc (problème 6) la corde de l'arc de méridien qui, sur le globe, joint le pôle au point a, puis portons cette corde sur la circonférence de la carte supposée divisée afin de connaître le nombre de degrés qu'elle sous-tend. Le reste de la construction s'effectuera sans difficulté.

Le problème que nous venons de résoudre peut être énoncé ainsi :

Étant donnée la position d'un point en projection stéréographique, trouver sa longitude et sa latitude sur la sphère.

Si la construction que nous venons d'indiquer ne paraît pas donner une exactitude suffisante, on peut recourir aux équations des méridiens et des parallèles et calculer la longitude t et la latitude l en fonction des coordonnées x et y du point donné. On tire en effet de l'équation des méridiens

$$\operatorname{cotang} t = \frac{x}{y}\sin\lambda + \frac{\cos\lambda}{2ay}[a^2-(x^2+y^2)];$$

et de l'équation des parallèles

$$\sin l = \frac{a^2-(x^2+y^2)}{a^2+(x^2+y^2)}\sin\lambda - \frac{2ax}{a^2+(x^2+y^2)}\cos\lambda.$$

Dans le cas de la projection stéréographique polaire, ces équations se réduisent à

$$\operatorname{cotang} t = \frac{x}{y} \quad \text{et} \quad \sin l = \frac{a^2-(x^2+y^2)}{a^2+(x^2+y^2)}.$$

Dans le cas de la projection méridienne,

$$\operatorname{cotang} t = \frac{a^2-(x^2+y^2)}{2ay} \quad \text{et} \quad \sin l = -\frac{2ax}{a^2+(y^2+x^2)}.$$