www.e-rara.ch

Traité des projections des cartes géographiques

Germain, Adrien Adolphe Charles

Paris, [1865]

ETH-Bibliothek Zürich

Shelf Mark: Rar 18793

Persistent Link: https://doi.org/10.3931/e-rara-74932

Chapitre III.

www.e-rara.ch
Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien – von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material – from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d'imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L'éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes – des débuts de l'imprimerie jusqu'au 20e siècle.

e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

Nutzungsbedingungen Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titelinformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

Terms of Use This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

Conditions d'utilisation Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

Condizioni di utilizzo Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]

Visual Library

CHAPITRE III.

PROJECTION CENTRALE OU GNOMONIQUE.

1. La projection centrale est une projection perspective faite sur un plan tangent à la sphère, et dont le point de vue est au centre du globe ; chaque point de la carte est donc à l'extrémité de la sécante passant par le point correspondant de la surface sphérique. Il en résulte que la projection de tout grand cercle de la sphère est une ligne droite.

Ce tracé ne peut convenir pour représenter un hémisphère entier, les sécantes s'approchant de plus en plus d'être parallèles au plan de projection à mesure que le point considéré s'éloigne du point central ; aussi cette projection exige-t-elle pour représenter la surface entière du globe *au moins* quatre plans différents (1).

Nous ne tiendrons pas compte de l'aplatissement parce que cette projection ne devant être, à cause de ses défauts, employée que fort rarement en géographie et seulement pour de grandes cartes physiques comme l'a fait M. Élie de Beaumont, la forme sphéroïdale de la terre ne peut apporter de modifications appréciables.

2. Rappelons en quelques mots les altérations d'angles et de longueurs que nous avons déjà calculées (2).

L'angle le plus altéré de la sphère est exprimé par

$$\operatorname{tang} A = \pm \sqrt{\frac{1}{\cos \theta}},$$

en désignant par θ l'arc de grand cercle qui unit sur la sphère le sommet de cet angle au point central. L'angle correspondant B de la carte est donné par

$$\operatorname{tang} B = \pm \sqrt{\cos \theta},$$

(1) *Voir* 1re partie, chap. IV, § 8.
(2) *Voir* 1re partie, chap. V, § 11-14.

de sorte que

$$\operatorname{tang}(B - A) = -\frac{1 - \cos\theta}{2\sqrt{\cos\theta}}.$$

Cette dernière formule montre que l'angle de la sphère est toujours diminué en projection, que l'altération, nulle au centre. va en croissant avec θ, et qu'à 90° du centre elle est de 90°. Quant à l'angle le plus altéré A, il est de 45° au centre et croît jusqu'à 90°.

Le rapport maximum des distances élémentaires correspondantes de la carte et de la sphère se rapporte à l'arc de grand cercle qui unit le point considéré au centre de la projection et s'exprime par

$$m_0 = \frac{1}{\cos^2\theta};$$

le rapport minimum, qui se rapporte à l'almicantarat de ce point, est exprimé par

$$m_{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\cos\theta},$$

le rapport M^2 des surfaces élémentaires par

$$M^2 = \frac{1}{\cos^3\theta}.$$

On voit donc que chacun de ces rapports est égal à l'unité au centre de la projection, et infini pour $\theta = 90°$.

3. Les points de la projection centrale peuvent toujours se construire à l'aide de leurs coordonnées x et y exprimées par les formules suivantes que l'on obtient en faisant dans les équations générales des projections perspectives $D = 0$, et multipliant le résultat par a pour exprimer que le plan de projection ne passe plus par le centre, mais est tangent à la sphère :

$$x = \frac{a(\sin\lambda\cos l\cos t - \cos\lambda\sin l)}{\cos\lambda\cos l\cos t + \sin\lambda\sin l},$$

$$y = \frac{a\cos l\sin t}{\cos\lambda\cos l\cos t + \sin\lambda\sin l}.$$

Ces formules générales se modifient dans les deux cas particuliers de projection équatoriale et de projection méridienne que nous allons étudier d'abord.

PROJECTION CENTRALE POLAIRE OU ÉQUATORIALE.

4. Le pôle étant pris pour centre, le plan de projection est parallèle à l'équateur; faisons donc dans les formules précédentes $\lambda = 90°$; il vient

$$x = a \operatorname{cotang} l \cos t,$$
$$y = a \operatorname{cotang} l \sin t.$$

L'équation des méridiens est alors

$$y = x \operatorname{tang} t;$$

les méridiens sont donc des droites passant toutes par le centre et faisant avec l'une d'elles, prise pour premier méridien, les angles qui expriment leurs longitudes.

L'équation des parallèles est

$$\rho^2 = x^2 + y^2 = a^2 \operatorname{cotang}^2 l;$$

les parallèles sont donc des cercles concentriques ayant pour rayons les cotangentes de leurs latitudes.

La construction graphique est des plus simples (fig. 87). On partage la circonférence de la carte en degrés et l'on joint le centre aux points de division qui expriment les latitudes comptées à partir du diamètre AA′ perpendiculaire au premier méridien; ces rayons prolongés interceptent sur la tangente TT′ parallèle à ce diamètre, les rayons des parallèles.

La projection n° XXIV a été dressée dans ce système.

PROJECTION CENTRALE MÉRIDIENNE.

5. Nous prenons pour plan de projection le plan tangent en un point de l'équateur et perpendiculaire au premier méridien; faisons donc dans les formules générales $\lambda = 0$; il vient

$$x = -a \frac{\operatorname{tang} l}{\cos t}, \quad \text{et} \quad y = a \operatorname{tang} t.$$

L'équation des méridiens est donc

$$y = a \operatorname{tang} t;$$

celle des parallèles est

$$y^2 - x^2 \operatorname{cotang}^2 l + a^2 = 0;$$

les méridiens sont donc des droites parallèles faciles à construire, et les parallèles des hyperboles dont l'axe transverse dirigé dans l'axe des x est égal à $2a \operatorname{tang} l$, et dont l'autre axe perpendiculaire au premier méridien est égal à $2a$.

Le moyen le plus commode et le plus exact de construire ces hyperboles par points sera d'employer la coordonnée x qui se calculera facilement à l'aide de la formule

$$x = a \frac{\operatorname{tang} l}{\cos t},$$

et de calculer les intersections des parallèles avec les méridiens déjà tracés en donnant à l une certaine valeur, puis faisant venir t de de 5 en 5 degrés ou de 10 en 10 degrés.

La projection n° XXV a été construite dans ce système

PROJECTION CENTRALE HORIZONTALE.

6. Arrivons au cas général où le plan de projection est tangent en un point quelconque dont la latitude est λ

L'équation des méridiens est

$$y \cos t - x \sin\lambda \sin t = a \cos\lambda \sin t,$$

équation d'une droite faisant avec le premier méridien, qui est l'axe de x, un angle θ tel que

$$\operatorname{tang}\theta = \sin\lambda \operatorname{tang} t,$$

et coupant ce premier méridien en un point p, projection du pôle, distant du centre de

$$Op = a \operatorname{cotang}\lambda.$$

L'équation des parallèles est

$$y^2 \sin^2 l + x^2(\sin^2 l - \cos^2\lambda) + 2ax \cos\lambda \sin\lambda + a^2 \cos^2\lambda - a^2 \cos^2 l = 0,$$

équation d'une section conique dont le grand axe coïncide avec le premier méridien et qui est

une ellipse	si $\sin l > \cos\lambda$	ou	$l > 90^\circ - \lambda$,
hyperbole	$\sin l < \cos\lambda$		$l < 90^\circ - \lambda$,
parabole	$\sin l = \cos\lambda$		$l = 90^\circ - \lambda$.

Considérons successivement ces trois cas.

1er CAS. $l > 90° - \lambda$. Les demi-axes A′ et B′ de l'ellipse sont

$$A' = \frac{a}{2}\frac{\sin 2l}{(\sin^2 l - \cos^2\lambda)}; \qquad B' = \frac{a\cos l}{\sqrt{\sin^2 l - \cos^2\lambda}};$$

les coordonnés α' et β' du centre

$$\alpha' = -\frac{a}{2}\frac{\sin 2\lambda}{(\sin^2 l - \cos^2 l)}; \qquad \beta' = 0.$$

2e CAS. $l < 90° - \lambda$. Les demi axes de l'hyperbole sont

$$A' = \frac{a\sin 2l}{\cos(l-\lambda)\cos(l+\lambda)}; \qquad B' = \frac{a\sin\lambda}{\sqrt{\cos(l-\lambda)\cos(l+\lambda)}},$$

et le centre est à une distance du centre de la carte égale à

$$\alpha' = -\frac{a}{2}\frac{\sin 2\lambda}{\cos(l-\lambda)\cos(l+\lambda)}.$$

3e CAS. $l = 90° - \lambda$. L'équation des parallèles est alors

$$y^2\sin^2\lambda + ax\sin 2\lambda - a^2\cos 2\lambda = 0.$$

En appelant P le demi paramètre, c'est-à-dire le double de la distance du sommet au foyer de la courbe, et α' et β' les coordonnées du sommet, on a

$$P = -2a\operatorname{cotang}\lambda; \qquad \alpha' = a\operatorname{cotang} 2\lambda; \qquad \beta' = 0.$$

Pour l'équateur on a $l = 0$; son équation est donc

$$x = a\operatorname{tang}\lambda,$$

équation d'une droite perpendiculaire au premier méridien, et située à une distance du centre égale à $a\operatorname{tang}\lambda = 0\varepsilon$ (fig. 88).

Comme $0p = a\operatorname{cotang}\lambda$,

$$p\varepsilon = p0 + 0\varepsilon = a\operatorname{cotang}\lambda + a\operatorname{tang}\lambda = \frac{a}{\cos\lambda\sin\lambda}.$$

donc

$$\varepsilon e = p\varepsilon\operatorname{tang}\theta, \qquad \text{ou} \qquad \varepsilon e = \frac{a\operatorname{tang} t}{\cos\lambda}.$$

Au lieu de tracer directement les parallèles, il est plus commode

de déterminer dans les méridiens pm, pm', pm'' préalablement tracés les points dont la latitude est l, puis de joindre ces points par une courbe.

Cherchons donc la projection m du point M dont la longitude est $t = \text{OPM}$ et dont la latitude est $l = 90° - \text{PM}$; la question revient à trouver la distance pm.

D'abord, dans le triangle CpO,

$$\text{C}p = \frac{\text{CO}}{\sin\lambda} = \frac{a}{\sin\lambda}$$

Dans le triangle Cpm,

$$\text{C}mp + \text{C}pm = 180° - p\text{C}m = 90° + l,$$

ou

$$\text{C}mp = 90° + l - \text{C}pm.$$

Appelant k l'angle Cpm et θ l'angle Opm ; le trièdre dont les arrêtes sont pP, pO, pm, nous donnera

$$\cos k = \cos\theta\cos\lambda,$$

et le triangle Cpm

$$pm = p\text{C}\,\frac{\sin p\text{C}m}{\sin \text{C}mp} = \frac{a\cos l}{\sin\lambda\cos(l-k)},$$

expression qui donne la distance cherchée en fonction de λ, l, t.

Nous déterminerons d'abord k par la formule

$$\cos k = \frac{\cos\lambda}{\sqrt{1+\sin^2\lambda\,\text{tang}^2 t}},$$

qui montre que k reste constant pour tous les points d'un même méridien. Pour chaque valeur de l on déterminera ensuite pm par l'expression

$$pm = \frac{a\cos l}{\sin\lambda\cos(l-k)}.$$

7. Voyons comment on peut construire graphiquement ces différentes valeurs.

A partir du point central O (fig. 89), on portera sur le premier méridien Op une largeur Op égale à la cotangente de la latitude λ de ce point, cotangente que l'on construira facilement en élevant OC perpendiculaire sur Op et égal au rayon a réduit à l'échelle de la carte, et faisant en C l'angle pCO égal à $90° - \lambda$. On construira de même

$C\varepsilon = a \operatorname{tang} \lambda$ en menant $C\varepsilon$ perpendiculaire sur Cp. On élèvera ensuite εe perpendiculaire sur $C\varepsilon$, et, en menant de C des droites faisant avec $C\varepsilon$ des angles égaux aux longitudes des méridiens que l'on veut construire, on déterminera sur εe les longueurs que ces méridiens intercepteront sur l'équateur représenté par εE perpendiculaire sur $p\varepsilon$.

Si nous nous reportons en effet à la figure qui précède celle que nous construisons, nous voyons que la droite εe est perpendiculaire sur $C\varepsilon$ et que, dans le triangle de l'espace $C\varepsilon e$ situé dans l'équateur, les intersections des méridiens doivent faire avec $C\varepsilon$ des angles égaux à leurs longitudes respectives.

On portera donc sur εE les longueurs $\varepsilon\mu'$ interceptées sur εe, en décrivant de ε des arcs de cercle, et en joignant les points μ ainsi obtenus au point p, on aura tracé les méridiens de la projection.

Il est facile, du reste, de vérifier que $\varepsilon\mu$ est égal à $\dfrac{a \operatorname{tang} t}{\cos \lambda}$, valeur que nous avons trouvée par le calcul.

Cherchons maintenant le point de chaque méridien dont la latitude l est donnée. Revenons encore à la figure qui précède et considérons le triangle de l'espace Cpe dont le côté Ce est dans l'équateur et qui est, par conséquent, rectangle en C. Son intersection PM avec la sphère est le méridien dont la projection est pm et sur lequel le point M est situé à une distance MP du pôle P égale à $90° - l$. La droite CM prolongée détermine par son intersection avec l'hypoténuse pe le point m cherché. Il est facile de construire ce triangle Cpe sur la figure auxiliaire. Il suffira de porter sur la ligne $C\varepsilon$, déjà tracée perpendiculairement à pC, la distance $Cb = C\mu'$ qui correspond à la droite Ce de la figure précédente. La droite pb sera égale à la distance du pôle à l'équateur de la carte et par suite à $p\mu$, et pourrait donc s'obtenir en décrivant de p un arc de cercle avec $p\mu$ pour rayon ; mais la construction précédente sera toujours préférable.

On n'aura plus ensuite qu'à mener une droite telle que Cm' faisant avec $C\varepsilon$ l'angle $m'C\varepsilon$ égal à la latitude donnée l, son intersection m' avec la droite pb déterminera la distance pm' que l'on reportera de p en m sur le méridien déjà tracé $p\mu$.

Nous avons déjà supposé l'arc décrit de C avec $Co = a$ pour rayon, divisé en degrés à partir du rayon $C\varepsilon$ pour construire les méridiens ; on pourra donc lire immédiatement sur cet arc les latitudes données et diviser très-rapidement chaque méridien de 5° en 5° ou de 10° en

10°. Il ne restera plus ensuite qu'à faire passer des courbes par tous les points de même latitude.

Il est facile de vérifier que *pm* est égal à

$$pm = \frac{a \cos l}{\sin \lambda \cos (l - k)},$$

comme nous l'avons trouvé par le calcul.

La projection n° XXVI a été construite sur l'horizon de Paris.

8. La projection centrale est peu employée en géographie, mais elle l'est plus souvent pour représenter une partie du ciel. Supposons (fig. 90) que l'on prenne le plan de projection perpendiculaire sur l'horizon ORH d'un observateur C dont la latitude géographique est représentée par φ, et que ce plan de projection soit assujetti à la condition de rencontrer l'horizon au point O dont l'azimut est ω; soit Z le zénith de l'observateur C et P le pôle.

Menons le méridien PZR de l'observateur C, et le vertical ZO qui fait avec ce méridien l'azimut donné RZO $= \omega$. L'arc PZ est égal au complément de la latitude de C, c'est-à-dire à $90° - \varphi$.

Continuons, pour rendre les formules précédentes applicables à ce cas particulier, à appeler λ le complément de l'angle PCO. Dans le triangle sphérique PZO nous connaissons le côté PZ $= 90° - \varphi$; l'angle PZO $= 180° - \omega$, et le côté ZO qui est égal à 90°; nous pouvons donc calculer l'angle ZOP $= \psi$ et le côté PO $= 90° - \lambda$ à l'aide des formules

$$\sin \lambda = - \sin \varphi \cos \omega,$$
$$\operatorname{tang} \psi = \sin \omega \operatorname{cotang} \varphi.$$

Si, dans le plan de projection, O*p* représente la projection du méridien OP et O*z* la projection de l'arc de grand cercle OZ, l'angle *z*O*p* est égal à l'angle ZOP $= \psi$; de même O*h* perpendiculaire à O*z* représentera la projection de l'horizon ORH et *se* perpendiculaire à *p*= la projection de l'équateur EE'.

Traçons la ligne *oh* (fig. 91), projection de l'horizon; élevons la perpendiculaire *oz* et faisons l'angle *zop* $= \psi$, l'angle ψ étant calculé à l'aide de la formule

$$\operatorname{tang} \psi = \operatorname{cotang} \varphi \sin \omega;$$

op représentera le premier méridien. Pour trouver le point *p* on calculera d'abord λ à l'aide de la formule

$$\sin \lambda = - \sin \varphi \cos \omega,$$

puis *op* par la formule

$$op = a \operatorname{cotang} \lambda ;$$

on prolongera ensuite *op* d'une longueur *oe* égale à a tang λ et la perpendiculaire *zh* à *poe* représentera l'équateur. La construction s'achèvera alors comme précédemment.

9. Nous terminerons l'étude de la projection centrale en donnant la solution du problème suivant :

Trouver la distance de deux points donnés sur la carte.

Dans la projection centrale tout grand cercle étant représenté par une ligne droite, la plus courte distance de deux points se trace immédiatement ; il est très-facile d'en trouver la grandeur.

En appliquant ici la solution générale de ce problème que nous avons donnée pour toutes les projections perspectives, on voit qu'il faut élever en *o* (fig. 92), centre de la projection, deux perpendiculaires à *ao* et *ob*, rayons des deux points donnés, et les prendre égales au rayon de la sphère; puis avec les trois côtés *ab* déjà connus, *a*C′ et *b*C″ ainsi déterminés, construire le triangle *a*C*b*, et enfin décrire du point C avec un rayon égal à celui de la sphère, un arc de cercle AB qui mesurera la distance cherchée en degrés et fractions.