www.e-rara.ch

Traité des projections des cartes géographiques

Germain, Adrien Adolphe Charles

Paris, [1865]

ETH-Bibliothek Zürich

Shelf Mark: Rar 18793

Persistent Link: https://doi.org/10.3931/e-rara-74932

Chapitre VI.

www.e-rara.ch
Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien – von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material – from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d'imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L'éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes – des débuts de l'imprimerie jusqu'au 20e siècle.

e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

Nutzungsbedingungen Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titelinformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

Terms of Use This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

Conditions d'utilisation Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

Condizioni di utilizzo Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]

Visual Library

CHAPITRE VI.

PROJECTION DE CASSINI (1).

1. La projection imaginée par Cassini et employée par lui pour la grande carte de France est précisément celle que nous avons décrite sous le nom de projection des plans provisoires de construction et qui est employée en hydrographie pour la représentation des ports, des îles de peu d'étendue, etc. Chaque point est déterminé par ses distances à la méridienne et à la perpendiculaire d'un point central qui, dans la carte de France de Cassini, était l'Observatoire de Paris. Pour pouvoir projeter plus commodément les points trigonométriques très-éloignés de l'origine des coordonnées, on comptait leurs abscisses et leurs ordonnées à partir des parallèles à la méridienne et à la perpendiculaire tracées à 60,000 toises les unes des autres; si donc un lieu était à 148,000 toises à l'est de la méridienne et à 88,600 toises au sud de la perpendiculaire, il suffisait, pour fixer ce lieu sur la carte, de mener vers l'est une parallèle à 28,000 toises de la seconde parallèle à la méridienne, et de tracer au sud une autre parallèle à 28,600 toises de la première parallèle à la perpendiculaire; l'intersection de ces deux droites était la position du lieu proposé.

Cassini ne traçait ni les méridiens ni les parallèles sur sa projection, ce qui dispensait de calculer les coordonnées géographiques des sommets des triangles et réduisait les calculs à ceux de leurs coordonnées rectilignes; nous allons réparer cette omission en cherchant les équations à l'aide desquelles on pourra construire les méridiens et les parallèles.

Nous supposerons d'abord la terre sphérique. Soit O (fig. 100) le point pris pour origine des coordonnées; supposons les longitudes

(1) *Voir* 1re partie, chap. VI, § 24.

comptées à partir du méridien de ce point, ce qui revient à ne considérer que les différences des longitudes des points de la carte et de cette origine O. Soit l_0 la latitude de ce point, soit M un point quelconque dont les coordonnées géographiques sont l et t, et les coordonnées rectilignes

$$y = \mathrm{O'A} = \mathrm{OA} = l - l_0,$$
$$x = \mathrm{M'A'} = \mathrm{MA}.$$

Si l'on considère le triangle sphérique rectangle PAM formé par le méridien principal, celui du point M et l'arc de grand cercle MA qui est perpendiculaire à la méridienne, on a

$$\operatorname{tang} x = \cos(l_0 + y) \operatorname{tang} t,$$
$$\sin l = \sin(l_0 + y) \cos x.$$

La première opération est celle du méridien de la projection, la seconde celle des parallèles. Il sera donc facile de construire ces courbes en faisant varier soit l, soit t. Mais dans la pratique, il sera plus commode de déterminer les coordonnées des points d'intersection des méridiens et des parallèles menés, par exemple, de dix en dix minutes; on se servira pour cela des deux équations

$$\operatorname{cotang}(l_0 + y) = \operatorname{cotang} l \cos t,$$
$$\sin x = \cos l \sin t.$$

On convertira en secondes les arcs qu'on aura obtenus pour x et y, puis on multipliera ces derniers résultats par $a \sin 1''$, afin d'avoir leurs valeurs exprimées en mesures linéaires. Si le méridien rectiligne ou l'axe principal de la carte est divisé en secondes, il sera inutile de réduire ces valeurs en mètres; elles seront prises immédiatement sur cet axe ou sur l'échelle divisée de la même manière.

Lorsque le plan se trouve renfermé entre deux méridiens et deux parallèles fort rapprochés, les équations de ces courbes peuvent se présenter sous la forme suivante, vu la petitesse des quantités x et y par rapport au rayon a de la sphère et le peu de différence qu'on suppose exister entre l et l_0 :

$$(y + a \operatorname{tang} l_0)^2 + \frac{2a}{\cos l_0 \operatorname{tang} t} x = a^2(2 + \operatorname{tang}^2 l_0),$$

$$(y - a \operatorname{cotang} l_0)^2 + x^2 = a^2 \operatorname{cotang} l_0 [\operatorname{cotang} l_0 + 4 \sin \tfrac{1}{2}(l - l_0)].$$

On voit alors que les méridiens deviennent des arcs de parabole et les parallèles des arcs de cercle.

DÉTERMINATION DE L'ANGLE FORMÉ PAR DEUX COURBES DE PROJECTION.

2. Désignons par φ l'angle qu'une tangente à un méridien, en un point quelconque M (fig. 101), fait sur la projection avec la ligne des y, et par φ' celui qu'une tangente au parallèle de ce même point fait avec cette même ligne. On aura

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{dx}{d\mathrm{Y}},$$

en désignant par Y la somme algébrique $y + l_0$, et tirant de l'équation des méridiens la valeur du rapport $\frac{dx}{d\mathrm{Y}}$, on obtiendra

$$\operatorname{tang}\varphi = -\operatorname{tang} t \cos x \sin l;$$

ou aura aussi

$$\operatorname{tang}\varphi = -\frac{\operatorname{tang} t \sin \mathrm{Y}}{1 + \cos^2 \mathrm{Y} \operatorname{tang}^2 t} = -\sin x \cos x \operatorname{tang} \mathrm{Y}.$$

Tirant pareillement de l'équation des parallèles la valeur du rapport $\frac{dx}{d\mathrm{Y}}$, on aura

$$\operatorname{tang}\varphi' = \frac{1}{\operatorname{tang} \mathrm{Y} \operatorname{tang} x}$$

mais, à cause de $\operatorname{tang} x = \cos \mathrm{Y} \operatorname{tang} t$, il s'ensuit que

$$\operatorname{tang}\varphi' = \frac{1}{\sin \mathrm{Y} \operatorname{tang} t} = \frac{\cos x \operatorname{cotang} t}{\sin l}.$$

De cette valeur et de la précédente, il est aisé de conclure que, en général, les méridiens et les parallèles de la carte ne se coupent point à angle droit comme sur la terre, car il faudrait pour cela que l'équation $\operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\varphi' = 1$ fût satisfaite ; or, au contraire, on a

$$\operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\varphi' = \cos^2 x;$$

mais ces intersections sont rectangulaires lorsque $x = 0$; donc toutes les projections des parallèles sont perpendiculaires à celles du méridien principal.

Si l'on fait $\mathrm{Y} = 90°$, on obtient

$$\varphi = t;$$

on voit donc que les méridiens forment entre eux, sur la carte, les mêmes angles que sur le globe.

Lorsque $x = 90°$, on a aussi nécessairement $t = 90°$ et $l = 0$, alors les valeurs de tang φ et tang φ' deviennent nulles; ce qui montre que la projection de Cassini défigure très-rapidement les surfaces en allant du milieu de la carte vers ses limites orientale et occidentale. Les longueurs ne sont pas altérées avec moins de rapidité, puisque la distance de deux perpendiculaires au méridien principal, au lieu d'être nulle à la longitude de 90° comme sur le globe terrestre, est toujours égale à celle qui les sépare sur ce méridien.

Pour comparer entre eux l'angle PAM et l'angle $m = 90° - \varphi$ que fait un méridien avec la perpendiculaire à la méridienne, remarquons que le triangle sphérique PMA donne

$$\text{tang M} = \frac{\text{cotang Y}}{\sin x},$$

et que, par ce qui précède

$$\text{tang } m = \frac{\text{cotang Y}}{\sin x \cos x} = \frac{\text{tang M}}{\cos x}.$$

On trouve la même relation entre l'angle V formé sur la terre par un parallèle et une perpendiculaire au méridien, et sa projection $v = 90° - \varphi'$:

$$\text{tang } v = \text{tang } x \text{ tang Y} = \frac{\text{tang V}}{\cos x};$$

Enfin la même relation a lieu encore entre un angle Ω d'un grand cercle quelconque avec le grand cercle perpendiculaire au méridien et la projection ω de cet angle, c'est-à-dire l'angle de la projection de l'arc de grand cercle considéré et de la perpendiculaire à la méridienne :

$$\text{tang } \omega = \frac{\text{tang } \Omega}{\cos x};$$

donc l'angle qu'une ligne géodésique fait avec une perpendiculaire à la méridienne diffère en général de sa projection, mais l'égalité de ces deux angles a lieu à l'origine A de la perpendiculaire, puisque alors $\cos x = 1$.

3. Il est facile, dans la projection de Cassini, de calculer les rayons de courbure des méridiens et des parallèles, en appliquant la formule générale

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

on trouve pour rayon de courbure des méridiens

$$\rho_m = \frac{a \sec \varphi}{\sin \varphi \,(\operatorname{cotang} Y \cos \varphi + 2 \operatorname{tang} x \sin \varphi)},$$

et pour celui d'un parallèle

$$\rho_p = \frac{a \sin^2 Y \sin^2 x}{\cos^3 \varphi' \operatorname{cotang} x \,(\sin^2 x + \cos^2 Y)}.$$

Au point où un méridien coupe l'équateur, on a $Y = 0$ et $\varphi = 0$, circonstance qui rend indéterminée la valeur précédente de ρ_m; mais on trouve dans ce cas

$$\rho_m = \frac{2a}{\sin 2l}.$$

Quant à la valeur de ρ_p, elle devient infinie à la même latitude $Y = 0$, mais elle se présente aussi sous une forme indéterminée pour tous les points où $x = 0$, c'est-à-dire pour tous ceux où les parallèles de la carte coupent le méridien principal entre l'équateur et le pôle. Cependant on a alors

$$\rho_p = \frac{a}{\operatorname{tang} Y} = \frac{a}{\operatorname{tang} l}.$$

Les rayons ρ_m et ρ_p permettent de rectifier facilement un arc de méridien ou un arc de parallèle. Supposons que, pour l'ordonnée $Y + 1$, l'abscisse x devienne x_1, et que φ se change en φ_1; alors l'amplitude de l'arc de méridien à rectifier et commençant à l'extrémité de l'abscisse x sera

$$(90^\circ - \varphi) - (90^\circ - \varphi_1) = \varphi_1 - \varphi = u,$$

et cet arc $\Delta\mu$ aura pour longueur

$$\Delta\mu = \frac{\pi}{180} \rho_m u.$$

Même observation pour la rectification d'un arc de parallèle et pour celle de la projection d'un arc de plus courte distance quelconque.

Dans la projection de Cassini, les surfaces de la carte ne sont pas égales à celles qui leur correspondent sur la sphère; mais lorsque les abscisses x et x' des extrémités de la projection de l'arc de méridien qui les limitent sont très-petites et très-peu distantes entre elles, ces surfaces sont peu différentes.

Nous n'étudierons pas la question de la quadrature des surfaces sur cette projection, et nous renvoyons à la *Topographie* de Puissant, que nous avons déjà citée.

Dans tout ce qui précède, nous n'avons pas tenu compte de l'aplatissement de la terre, dont la considération rendrait toutes ces questions beaucoup plus difficiles à résoudre. Puissant a refait les calculs dans cette hypothèse; mais comme la projection de Cassini ne doit être employée que pour les cartes particulières d'une petite étendue, il sera toujours suffisamment exact, dans les limites où cette projection jouit de tous ses avantages, d'appliquer la méthode de Prony (1), qui consiste à chercher le rayon de la sphère dont la surface s'écarte le moins possible de celle de la terre dans le lieu représenté par la carte. En prenant pour rayon la racine carrée du produit des rayons de plus grande et de plus petite courbe, au lieu pris pour centre, on ne commettra qu'une erreur qui sera le plus souvent négligeable.

(1) *Voir* 1re partie, chap. I, § 4.