www.e-rara.ch

Traité des projections des cartes géographiques

Germain, Adrien Adolphe Charles

Paris, [1865]

ETH-Bibliothek Zürich

Shelf Mark: Rar 18793

Persistent Link: https://doi.org/10.3931/e-rara-74932

Chapitre VII.

www.e-rara.ch
Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien – von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material – from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d'imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L'éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes – des débuts de l'imprimerie jusqu'au 20e siècle.

e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

Nutzungsbedingungen Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titelinformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

Terms of Use This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

Conditions d'utilisation Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

Condizioni di utilizzo Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]

Visual Library

CHAPITRE VII.

1° PROJECTION DITE DE BONNE OU DU DÉPOT DE LA GUERRE (1).

1. Nous avons vu précédemment que cette projection, qui possède la propriété de représenter les surfaces en véritable grandeur, se traçait de la manière suivante.

Sur une droite OA′ (fig. 102) on porte à partir d'un point C choisi pour centre de la carte et auquel on assigne d'avance une latitude l_1, les longueurs des arcs de méridien calculées d'après la formule (2)

$$S=a(1-e^2)\,[A(l-l_1)-B\sin(l-l_1)\cos(l+l_1)+\tfrac{1}{2}C\sin 2(l-l_1)\cos 2(l+l_1)].$$

et réunies dans la table I. Puis d'un centre commun O situé à une distance de C égale à la cotangente de la latitude l_1 calculée sur l'ellipsoïde, c'est-à-dire à

$$\rho_1=N_1\operatorname{cotang} l_1=\frac{a\operatorname{cotang} l_1}{(1-e^2\sin^2 l_1)^{\frac{1}{2}}},$$

formule dans laquelle N_1 représente la grande normale au point C, on décrit des arcs de cercle passant par chacun des points de division de la droite OA′ ; ces arcs représentent les parallèles.

On porte ensuite sur chacun d'eux, à partir de la droite OA′ qui représentera le méridien du milieu pris pour premier méridien, les longueurs respectives des degrés de chaque parallèle, calculées par la formule

$$d=\frac{2\pi}{360}N\cos l=\frac{\pi a\cos l}{180(1-e^2\sin^2 l)^{\frac{1}{2}}},$$

et réunies dans la table I, et l'on fait passer des courbes par les

(1) *Voir* 1re partie, chap. III, § 12, et chap. VI, § 14.
(2) *Voir* 1re partie, chap. I, § 3.

points correspondants de chaque parallèle ; ces courbes représentent les méridiens ; elles tournent leur concavité vers le méridien du milieu seul figuré par une droite. La projection n° XVII représente l'hémisphère nord.

Pour éviter les petites erreurs dues à ce que, en portant bout à bout les longueurs des arcs de 1°, on regarderait chacun de ces arcs comme égal à sa corde, il convient de calculer l'amplitude de chaque parallèle correspondant à une longitude totale $2t$.

Soit 2θ l'angle, au centre commun O (fig. 103), sous-tendu par cet arc de parallèle à la latitude l. Sur l'ellipsoïde, l'arc représenté par A'M est exprimé par

$$\frac{2\pi}{360} t \mathrm{N} \cos l,$$

et, sur la carte, l'arc A'M a pour valeur

$$\frac{2\pi}{360} \rho\theta.$$

En égalant ces deux expressions on obtient la valeur de θ

$$\theta = \frac{\mathrm{N}t}{\rho} \cos l,$$

formule dans laquelle on devra remplacer ρ par

$$\rho = \mathrm{OA'} = \mathrm{OC} - \mathrm{A'C} = \rho_1 \pm \mathrm{S} = \mathrm{N}_1 \operatorname{cotang} l_1 \pm \mathrm{S},$$

le signe + correspondant au cas où la latitude l est moindre que l_1, et le signe — au cas contraire.

Les valeurs de ρ_1, c'est-à-dire des cotangentes aux diverses latitudes, ont été calculées et réunies dans la table I ainsi que les valeurs de la grande normale ; il sera donc très-facile d'obtenir ρ et par suite θ. On n'aura plus alors qu'à partager chaque arc A'M en un nombre t de parties égales pour obtenir les points d'intersection avec les méridiens de degré en degré.

2. Dans la plupart des cartes que l'on a à construire, le centre O sort des limites de la feuille et il est impossible de décrire les parallèles d'un mouvement continu ; on calcule alors les coordonnées de leurs intersections avecles méridiens en les rapportant à deux axes rectangulaires qui sont le méridien moyen et la tangente au parallèle moyen.

Les formules sont évidemment

$$x = \mathrm{MQ} = \mathrm{CP} = \rho \sin \theta,$$
$$y = \mathrm{A_1Q} = \rho_1 - \rho \cos \theta,$$

ou

$$x = \rho \sin \theta,$$
$$y = \mathrm{S} + x \operatorname{tang} \frac{\theta}{2}.$$

Il faudra donc, après avoir tracé deux droites perpendiculaires OC et Cx passant par le milieu de la feuille, porter sur la première, comme nous l'avons indiqué, les longueurs des arcs de méridien répondant à 1°, 2°, 3° de distance au point C, puis calculer les rayons ρ des parallèles projetés par la simple formule

$$\rho = \rho_1 \pm \mathrm{S},$$

et les amplitudes θ qui répondent à des valeurs de l et de t variant aussi par degrés, à l'aide de la formule

$$\theta = \frac{\mathrm{N}t}{\rho} \cos l;$$

on pourra alors déterminer les valeurs correspondantes des coordonnées x et y qui fixent la position de chaque sommet des quadrilatères de la projection, c'est-à-dire les points d'intersection des divers méridiens et parallèles.

Des tables étendues ont été calculées par ***Plessis*** et servent de base aux constructions des cartes du Dépôt de la guerre (1). Comme l'aplatissement y est supposé de $\frac{1}{334}$, elles ont été corrigées depuis dans l'hypothèse de l'aplatissement $\frac{1}{308}$, mais ces nouvelles tables, en usage aujourd'hui au Dépôt de la guerre, sont restées manuscrites et n'ont pas été publiées ; elles supposent comme les précédentes la division centésimale du cercle ; toutes les constructions des feuilles dont l'ensemble compose la carte de France se font donc dans cette hypothèse, et la division en degrés, minutes et secondes sexagésimales ne se retrouve que sur le cadre de chaque feuille à côté de la division centésimale.

(1) *Voir* ces tables à la fin de la topographie de Puissant. La circonférence vaut alors 400 grades, le grade 100 minutes, la minute 100 secondes.

Il est facile de faire servir aux calculs en degrés et fraction les tables calculées en grades en se rappelant que pour convertir

un nombre de degrés en grades il faut le multiplier par $\frac{10}{9}$,

» de minutes de degrés en minutes de grades, par $\frac{10}{6}$,

» de secondes de degrés en secondes de grades par $\frac{10}{6}$.

En cherchant les coordonnées des points d'intersection des méridiens et des parallèles, nous avons résolu le problème de

« Trouver sur la carte les coordonnées rectangulaires d'un point du sphéroïde donné par sa latitude et sa longitude. »

3. Nous allons maintenant résoudre la question inverse :

« Déterminer la latitude et la longitude d'un point de la carte dont on connaît les coordonnées rectangulaires x, y. »

Supposons d'abord la terre sphérique; changeons l'origine des coordonnées et transportons-la au centre commun O des parallèles; les nouvelles coordonnées auront avec les précédentes les relations

$$X = x; \quad Y = \rho_1 - y = a \operatorname{cotang} l_1 - y.$$

On aura alors

$$\rho = \frac{Y}{\cos \theta} = \frac{X}{\sin \theta},$$

et l'angle θ se déterminera par la relation

$$\operatorname{tang} = \frac{X}{Y}.$$

On pourra donc déterminer le rayon ρ du parallèle du point donné. On aura ensuite

$$S = a \operatorname{cotang} l_1 - \frac{Y}{\sin \theta};$$

la valeur de S convertie en degrés et fraction fera connaître la différence des latitudes du parallèle moyen et de celui sur lequel se trouve le point considéré, et par suite la latitude de ce point.

Enfin, tirant la valeur de t de la relation

$$\theta = \frac{t a \cos l}{a \operatorname{cotang} l_1 - S},$$

nous aurons la longitude cherchée t par la formule

$$t = \theta \frac{a \operatorname{cotang} l_1 - S}{a \cos l};$$

où tout est connu dans le second membre.

En tenant compte de l'aplatissement de la terre, les calculs seraient plus compliqués, mais on arriverait encore à déterminer l et t. Mais, pour les besoins ordinaires de la géographie, il sera suffisamment exact d'employer la méthode générale que nous avons donnée (1) et qui suppose seulement que le quadrilatère formé par les deux méridiens et les deux parallèles qui comprennent le point donné, peut être, sans erreur sensible, assimilé à un quadrilatère rectiligne.

La même hypothèse permettra, dans les cartes dont les méridiens et les parallèles seront tracés de 10 en 10 minutes par exemple, de placer graphiquement, à l'aide de leur latitude et de leur longitude, les points qui tombent dans l'un des quadrilatères dont les sommets ont été déterminés, et de projeter les sommets d'une triangulation secondaire dont on n'aura pas calculé les coordonnées géographiques.

ÉTUDE DE L'ALTÉRATION DES ANGLES OU CALCUL DE LA PROJECTION D'UN ANGLE DONNÉ.

4. Nous allons maintenant nous proposer d'évaluer, en un point quelconque M de la projection de Bonne, l'altération produite sur les angles (fig. 104).

Cherchons d'abord de combien les angles sous lesquels les méridiens coupent les parallèles diffèrent d'un angle droit, c'est-à-dire de 90°.

Cette différence φ est égale à l'angle de la tangente en M à la courbe qui représente le méridien avec le rayon $OM = \rho$ du parallèle, et l'expression de la tangente trigonométrique de l'angle φ est, en général,

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{\rho d\theta}{d\rho},$$

et comme $\rho = \rho_1 \pm S$, il s'ensuit que

$$d\rho = \pm dS;$$

(1) *Voir* 1re partie, chap. I, § 5.

donc

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\rho d\theta}{dS};$$

or

$$\rho\theta = Nt\cos l = \frac{at\cos l}{(1-e^2\sin^2 l)^{\frac{1}{2}}}.$$

En différentiant cette équation il vient

$$\rho d\theta + \theta d\rho = \frac{at\sin l(1-e^2)dl}{(1-e^2\sin^2 l)^{\frac{3}{2}}} = \rho d\theta + \theta dS;$$

or la géodésie donne la formule

$$dS = \frac{a(1-e^2)dl}{(1-e^2\sin^2 l)^{\frac{3}{2}}};$$

on peut donc écrire

$$\frac{\rho d\theta}{dS} + \theta = t\sin l,$$

et par conséquent

$$\operatorname{tang}\varphi = t\sin l - \theta.$$

pour le calcul on devra multiplier le second membre par $\frac{\pi}{180}$ et écrire.

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\pi}{180}(t\sin l - \theta).$$

Il est facile de prouver que l'angle φ est nul pour les points du parallèle moyen d'une carte quelconque; en effet, lorsque $l = l_1$, on a

$$\theta = \frac{at\cos l_1}{\rho_1(1-e^2\sin^2 l_1)^{\frac{1}{2}}}, \qquad \rho_1 = \frac{a\operatorname{cotang} l_1}{(1-e^2\sin^2 l_1)^{\frac{1}{2}}};$$

par conséquent

$$\theta = \frac{t\cos l_1}{\operatorname{cotang} l_1} = t\sin l_1,$$

donc

$$\operatorname{tang}\varphi = 0, \quad \text{d'où} \quad \varphi = 0.$$

Il est en outre facile d'assigner le signe de φ pour les régions boréale et australe dont le parallèle moyen forme la limite commune; car lorsque $l = 0$, on a

$$\operatorname{tang}\varphi = -\frac{\pi\theta}{180}.$$

φ est donc négatif; ainsi, dans toute l'étendue de la région australe, c'est-à-dire pour les latitudes inférieures à l_1, l'angle HMT $= (90° - \varphi)$ est plus grand que 90°; dans celle du nord, au contraire, cet angle est plus petit.

Si nous n'avions pas tenu compte de l'aplatissement de la terre, nous aurions trouvé

$$\operatorname{tang}\varphi = t \sin l - \frac{t \cos l}{\operatorname{cotang} l_1 - (l - l_1)},$$

expression qui converge vers zéro à mesure que $l - l_1$ diminue, et qui reste toujours très-petite tant que t et $l - l_1$ ne dépassent pas 7 à 8° comme cela a lieu pour la carte de France dont le parallèle moyen est celui de 45° de latitude et le méridien moyen celui de l'Observatoire de Paris; aux extrémités de cette carte l'angle φ n'atteint pas 18′.

Arrivons maintenant à la question générale et cherchons la projection a (fig. 105) d'un angle A formé sur le sphéroïde par un méridien AA′ et une direction quelconque AB qui est projetée en ab. Considérons les deux parallèles infiniment voisins AM, A′M′ projetés en am, $a'm'$; ils déterminent sur le sphéroïde un triangle infiniment petit rectangle en A′ qui donne

$$\operatorname{tang} A = \frac{A'B}{AA'}.$$

D'après le tracé de la projection, l'arc $a'b$ est égal à A′B et les deux triangles $aa'd$, adb formés par le rayon oa du parallèle de a sont rectangles en d; de plus $ad = AA' = d\rho$. Ainsi

$$\text{angle } a'ab = \alpha = a'ad + dab,$$

et

$$A'B = a'd + db;$$

par suite

$$\operatorname{tang} A = \frac{a'd}{d\rho} + \frac{db}{d\rho};$$

or nous avons montré précédemment que

$$\frac{a'd}{d\rho} = \operatorname{tang}\varphi,$$

l'angle φ étant donné par la relation

$$\operatorname{tang}\varphi = (t \sin l - \theta)\frac{\pi}{180},$$

et

$$\text{tang } bad = \text{tang}(a - \varphi) = \frac{db}{d\rho},$$

donc

$$\text{tang A} = \text{tang}\,(a - \varphi) + \text{tang}\,\varphi,$$

et enfin

$$\text{tang}\,(a - \varphi) = \text{tang A} - \text{tang}\,\varphi = \frac{\sin(\text{A} - \varphi)}{\cos \text{A} \cos \varphi}.$$

Il est donc facile de calculer l'angle a projection de A.

Lorsque l'angle φ est fort petit, comme cela a lieu, même aux limites de la carte de France, l'angle A et sa projection a diffèrent fort peu l'un de l'autre.

ALTÉRATION DES LONGUEURS.

5. Si l'on cherche l'expression de la différentielle d'un arc Σ du méridien dont la longitude est t, on trouve, à l'aide de la formule générale,

$$d\varepsilon = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

$$d\Sigma = d\rho \sqrt{1 + \left(\frac{\rho d\theta}{d\rho}\right)^2} = d\rho \sqrt{1 + \text{tang}^2 \varphi} = \frac{d\rho}{\cos \varphi},$$

et puisque $d\rho = d\text{S}$, on a

$$d\Sigma = \frac{d\text{S}}{\cos \varphi}.$$

Cette équation montre que, si l'angle φ était invariable, on aurait en intégrant

$$\Sigma = \frac{\text{S}}{\cos \varphi},$$

sans constante, puisque Σ et S sont nuls à la fois ; mais cet angle φ variant très-peu d'un point à un autre très-voisin, il s'ensuit que les petits arcs de méridien très-proches les uns des autres conservent sensiblement sur la carte les mêmes rapports que sur le sphéroïde terrestre et y sont à fort peu près rectilignes.

Il résulte de cette égalité approximative des arcs de méridiens et de l'égalité parfaite des arcs de parallèles, que près du centre du développement dans les limites de 7 à 8 degrés de distance, les distances respectives des lieux sont à fort peu près les mêmes sur la carte que sur le sphéroïde. Comme les angles sont aussi fort peu al-

térés, on peut poser en principe que, non loin de l'intersection du méridien et du parallèle moyen, les petites figures formées sur le globe terrestre et leurs projections sont à fort peu près semblables ; aussi est-on autorisé, dans de semblables conditions, à figurer le terrain sur les minutes mêmes assujetties à la projection de Bonne, c'est-à-dire à former les cartes particulières par la simple réduction des levés, à l'échelle convenue. « Au surplus, ainsi que le fait re-« marquer Puissant (1), quoique dans la rigueur mathématique cette « projection et l'orthogonale ne puissent jamais coïncider, les er-« reurs commises dans les levés en procédant de la sorte, au lieu de « s'accroître sans cesse, s'arrêtent au contraire à tous les sommets « des triangles qui servent de point de raccordement et qui ont été « projetés exactement sur les minutes. »

2° PROJECTION SINUSOIDALE DE NICOLAS SANSON, DITE DE FLAMSTEED (2).

6. Nous avons dit que cette projection n'était qu'un cas particulier de la projection dite de Bonne ; l'équateur est pris pour parallèle moyen de la carte ; tous les parallèles sont alors des droites parallèles à l'équateur et conservant les mêmes distances que sur le sphéroïde. On détermine les méridiens en portant sur ces droites les longueurs des arcs de longitude aux latitudes considérées. La table I permettra d'effectuer cette construction avec beaucoup d'exactitude et de rapidité.

Tout ce que nous avons dit de la projection de Bonne peut s'appliquer ici en faisant seulement $l_1 = 0$. Il en résulte que les coordonnées sont exprimées par

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\pi}{180}\, ta \cos l \\ y &= \frac{\pi}{180}\, al \end{aligned}\right\} \quad \text{ou par} \quad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{\pi}{180}\, \frac{at \cos l}{(1 - e^2 \sin^2 l)^{\frac{1}{2}}} \\ y &= \frac{\pi}{180}\, \frac{al(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 l)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}\right.$$

L'angle φ que fait un méridien avec la perpendiculaire au paral-

---

(1) *Traité de topographie*, p. 130.
(2) *Voir* 1re part., chap. III, § 6, et chap. VI, § 15.

lèle, c'est-à-dire le complément de l'angle d'un méridien et d'un parallèle, est exprimé par

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{\pi}{180}\,(t \sin l).$$

En appelant A l'angle formé sur le sphéroïde par un méridien et une direction quelconque, et a la projection de cet angle, on trouvera encore

$$\text{tang}(a - \varphi) = \text{tang}\,A - \text{tang}\,\varphi = \frac{\sin(A - \varphi)}{\cos A \cos \varphi}.$$

Un arc infiniment petit $d\Sigma$ de méridien est exprimé par

$$d\Sigma = \frac{dS}{\cos \varphi},$$

c'est-à-dire, en supposant la terre sphérique, par

$$d\Sigma = a dl \sqrt{1 + t^2 \sin^2 l},$$

et par conséquent

$$\Sigma = a \int dl (1 + t^2 \sin^2 l)^{\frac{1}{2}},$$

intégrale qui dépend de la rectification d'un arc d'ellipse dont les demi-axes sont a et $a\sqrt{1+t^2}$.

Cette projection a, comme la projection de Bonne, l'avantage de conserver les surfaces; mais son emploi doit être beaucoup plus restreint, car l'altération des angles et des arcs de méridien y croît beaucoup plus rapidement à mesure qu'on s'éloigne de l'équateur, seul parallèle coupé à angles droits par les parallèles.

La projection n° XVIII représente la sphère entière développée dans ce système.

3° PROJECTION ÉQUIVALENTE DE WERNER (1).

7. Nous avons dit que cette projection prenait le pôle pour centre commun des parallèles qui ont ainsi pour rayons leurs véritables distances au pôle mesurées sur la sphère, c'est-à-dire les complé-

(1) *Voir* 1re part., chap. III, § 11.

ments des arcs qui mesurent leurs latitudes. On détermine les méridiens en portant sur ces arcs de cercle les longueurs des arcs de longitudes aux latitudes considérées, ou plus exactement en calculant l'angle sous-tendu au pôle par le développement de 90° de longitude et partageant l'arc ainsi obtenu en degrés égaux.

Cet angle est donné par la formule

$$\theta = 57°2958\, t \frac{\cos l}{l} = 90°.(57,2958)\frac{\cos l}{l}.$$

Voici sa valeur pour les valeurs de l de 90° lat. N. à 90° lat. S.

l	θ	l	θ
90	90° 0′	0	57° 18′
80	89 33	10	50 45
70	88 11	20	44 3
60	85 57	30	37 12
50	82 53	40	30 23
40	79 1	50	23 40
30	74 26	60	17 10
20	69 12	70	11 1
10	63 27	80	5 16
0	57 18	90	0 0

NOTE

SUR LE DÉVELOPPEMENT MODIFIÉ DE FLAMSTEED,

(Projection du Dépot de la guerre),

Par M. A. Tissot (1).

8. « Les angles s'écartant d'autant plus d'être droits que le rectangle correspondant au parallèle considéré est plus éloigné du point de croisement du méridien et du parallèle moyen, cherchons quelle condition doit remplir la position de ce point de croisement pour que les plus grandes altérations d'angles et de distances soient aussi faibles que possible.

(1) *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences*, 29 mars 1858.

« Soit α la déviation azimutale du parallèle en un point de la carte. Posons $\text{tang}\,\frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}\,\text{tang}\,\alpha$; on peut démontrer que, en ce point, la plus grande altération d'angle sera égale à β, et que le rapport des longueurs d'un élément de courbe sur la carte et sur le globe y sera représenté par $\text{tang}\left(45° + \frac{\beta}{4}\right)$ ou par $\text{tang}\left(45° - \frac{\beta}{4}\right)$ suivant qu'il s'agira de l'élément qui a subi l'allongement le plus considérable, ou de celui pour lequel la diminution est la plus forte. Quand α décroît, β décroît, et les deux rapports marchent vers l'unité. Il suffira donc, pour remplir les deux conditions énoncées, de rendre aussi faible que possible la plus grande valeur de α.

« On sait que la tangente de cet angle est proportionnelle à la longitude t comptée à partir du méridien moyen et qu'elle augmente en même temps que la différence $l - l_1$ entre la latitude du parallèle moyen et celle du point considéré ; l'augmentation, plus rapide au-dessous de cette ligne qu'au-dessus, s'effectue suivant une loi moins simple que la précédente ; mais il est facile de vérifier que si k représente le cosinus de la latitude du parallèle moyen, on a

$$\alpha = kt\,(l - l_1)\,(1 + \varepsilon),$$

ε étant une quantité assez petite composée de plusieurs termes dont les principaux sont dus à l'aplatissement. Par exemple, pour la carte de France et pour celle d'Espagne, ε est plus petit que $\frac{1}{300}$, fraction qu'il est permis de négliger ; il en est de même de la variation qu'éprouve le coefficient k quand on passe du parallèle moyen à un autre peu différent ; donc, pour atténuer le plus possible par le choix du méridien et du parallèle moyen les plus fortes altérations d'angles et de distances, il suffit de rendre minima la plus grande valeur du produit $t\,(l - l_1)$.

« Considérons deux cartes du même pays, l'une dans le système de Bonne, l'autre en représentant les méridiens par des parallèles équidistantes et les parallèles par des droites perpendiculaires aux premières, et formant en un mot le canevas d'une carte plate. L'ensemble des points de la première carte, pour lesquelles on aura la même valeur de α et par conséquent les mêmes altérations d'angles et de distances, formera sur la seconde deux hyperboles équilatères ayant pour asymptotes communes les deux lignes qui figurent le méridien et le parallèle moyen.

« Donc, pour tracer ces deux lignes par la condition énoncée, il faudra opérer ainsi :

« Sur une feuille divisée en carrés de 1 millimètre de côté, on trace les quelques portions du contour du pays où le produit $t\,(l - l_1)$ doit atteindre ses plus grandes valeurs, en adoptant les lignes de division de la feuille pour celles du canevas géographique. On rapporte sur papier transparent un petit nombre d'hyperboles équilatères ayant mêmes asymptotes ; il suffit pour cela d'avoir construit ailleurs la moitié de l'une des quatre branches : supposons ces courbes numérotées dans l'ordre de leurs distances au centre. On fait mouvoir la feuille ainsi obtenue sur la première, en maintenant l'une des asymptotes dans la direction des méridiens et, en observant les numéros des quatre branches qui se trouvent tangentes au contour du pays, on s'arrête à la position dans laquelle le plus élevé de ces quatre numéros a sa valeur la plus petite. Le méridien et le parallèle qu'il convient d'adopter coïncident alors avec les asymptotes.

« A ce même moment les deux plus grands des quatre numéros doivent être égaux entre eux et situés dans des angles opposés ; cette remarque permet d'arriver facilement à la position que l'on cherche.

« Pour tracer les hyperboles remarquons qu'en ayant tracé une il suffit de diviser en un même nombre de parties égales les perpendiculaires abaissées de quelques-uns de ses points sur l'asymptote et de réunir les points de division correspondants. La première branche elle-même peut être remplacée, dans une certaine étendue, par un arc de cercle ayant son centre sur le prolongement de l'arc transverse et un rayon égal à la moitié de cet axe ; l'erreur commise ainsi sur α a pour expression $8 \sin 2\gamma$, γ étant l'amplitude de l'arc à partir du sommet.

« Pour la carte de France, on trouve ainsi un méridien très-peu à l'est de celui de Paris et un parallèle très-peu au-dessus de celui de 46° 30′. Si l'on adopte le méridien de Paris et le parallèle de 46° 30′, la plus grande valeur de α sera moindre que 10′,30″ au N.-E., au N.-O, au S.-E., et que 9′,30″ au S.-O., tandis qu'avec le parallèle de 45° on a, dans la région N.-E., des valeurs de α plus grandes que 18′.

« Pour l'Espagne, le méridien que l'on obtiendrait ainsi serait à environ 45 minutes à l'ouest de celui de Madrid, le parallèle moyen

à 40° 45′ de latitude ; la plus grande valeur correspondante de α serait de 9,′30 ; elle augmente de 1′,30 quand on adopte le méridien de Madrid, en conservant le même parallèle, celui qui serait le plus convenable se trouvant plus au sud de quelques minutes seulement. »