www.e-rara.ch

Traité des projections des cartes géographiques

Germain, Adrien Adolphe Charles

Paris, [1865]

ETH-Bibliothek Zürich

Shelf Mark: Rar 18793

Persistent Link: https://doi.org/10.3931/e-rara-74932

Chapitre IX.

www.e-rara.ch
Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien – von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material – from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d'imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L'éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes – des débuts de l'imprimerie jusqu'au 20e siècle.

e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

Nutzungsbedingungen Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titelinformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

Terms of Use This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

Conditions d'utilisation Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

Condizioni di utilizzo Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]

Visual Library

CHAPITRE IX.

PROJECTION ZÉNITHALE ÉQUIVALNTE DE LAMBERT (1).

1. Nous avons dit que, pour tracer cette projection autour d'un point choisi arbitrairement pour centre, il suffisait de placer chaque point du contour dans l'azimut du point correspondant sur la sphère par rapport au centre adopté et à une distance de ce centre égale à la corde du grand cercle mené du l'un à l'autre de ces deux points.

Prenons d'abord le pôle de la sphère pour centre du tracé. Les parallèles se transforment sur la carte en cercles concentriques, dont chacun a pour rayon la corde de complément de la latitude, soit

$$\rho = 2a \sin \frac{\theta}{2},$$

en posant $\theta = 90^\circ - l$. Les méridiens sont représentés par des lignes droites passant par le centre commun des parallèles et font entre eux les mêmes angles que sur la sphère.

2. Prenons maintenant le centre de la projection sur l'équateur ; en désignant par θ la distance angulaire de ce centre à un point quelconque de la sphère, par ρ cette distance OM sur la carte (fig. 107), on aura pour ce point

$$\rho = 2a \sin \frac{\theta}{2}.$$

En outre, l'angle azimutal z de ce point M, c'est-à-dire l'angle formé par la droite OM avec le méridien du point O, lequel est représenté par une droite et pris pour méridien principal, est le même que sur la sphère.

(1) *Voir* 1re partie, chap. III, § 14.

Nous allons chercher à exprimer z et θ en fonction de la longitude t et de la latitude l du point considéré. Nous avons trouvé que les formules étaient, pour ce cas particulier,

$$\cos\theta = \cos t \cos l, \quad \text{et} \quad \operatorname{tang} z = \sin t \operatorname{cotang} l,$$

et nous avons donné la table IV, qui renferme les valeurs de θ et de z pour les valeurs de t et de l de 10 en 10 degrés. On déduira ensuite chaque valeur de ρ de la valeur correspondante de θ à l'aide de l'équation

$$\rho = 2a \sin \frac{\theta}{2}.$$

Rappelons que θ et par suite ρ ne changent pas pour deux points tels que la latitude de l'un soit égale à la longitude de l'autre et réciproquement, parce qu'alors le produit $\cos t \cos l$ reste constant.

Ayant calculé ρ et z, il sera facile de placer le point sur la projection : on mènera par le centre une droite faisant avec le méridien principal un angle égal à z, et l'on portera sur cette droite une longueur OM égale à ρ.

Le tableau suivant renferme les valeurs de ρ correspondantes aux valeurs de z et de θ de la table IV, c'est-à-dire à toutes les valeurs de l et de t de 10 en 10 degrés entre 0 et 90 degrés. Le rayon de la sphère est pris pour unité.

Valeurs du rayon vecteur ρ.

l	$t=0°$	10	20	30	40	50	60	70	80	90
0°	0,00000	0,17432	0,34730	0,51764	0,68404	0,84524	1,00000	1,14716	1,28588	1,41422
10	0,17432	0,24557	0,38622	0,54246	0,70015	0,85671	1,00756	1,15167	1,28763	1,41422
20	0,34730	0,38622	0,48369	0,61025	0,74854	0,88992	1,02472	1,16499	1,29369	1,41422
30	0,51764	0,54246	0,61025	0,70629	0,82047	0,94163	1,06488	1,18642	1,30355	1,41422
40	0,68404	0,70085	0,74854	0,82047	0,90904	1,00757	1,11083	1,21490	1,31680	1,41422
50	0,84524	0,85671	0,88992	0,94163	1,00757	1,08335	1,16499	1,24913	1,33295	1,41422
60	1,00000	1,00756	1,02472	1,06488	1,11083	1,16499	1,22474	1,28759	1,35142	1,41422
70	1,14716	1,15167	1,16499	1,18642	1,21490	1,24913	1,28759	1,32893	1,37159	1,41422
80	1,28558	1,28763	1,29369	1,30355	1,31680	1,33295	1,35142	1,37159	1,39273	1,41422
90	1,41422	1,41422	1,41422	1,41422	1,41422	1,41422	1,41422	1,41422	1,41422	1,41422

Le méridien central et l'équateur sont divisés de la même manière et le méridien qui limite l'hémisphère est divisé en arcs égaux ; les méridiens coupent à angles droits l'équateur, et les parallèles coupent à angles droits le méridien central et celui qui limite la mappemonde.

La projection n° XX a été construite dans ce système.

3. Arrivons maintenant au cas général où la sphère est supposée projetée sur l'horizon d'un point quelconque O dont nous désignerons la latitude par λ et dont nous prendrons le méridien, représenté par une droite, pour méridien principal.

Les formules de transformation de coordonnées qui expriment θ et z en fonction de l et de t sont

$$\cos\theta = \frac{\sin(l+\varphi)}{\cos\varphi}\sin\lambda, \quad \text{et} \quad \sin z = \frac{\sin t}{\sin\theta}\cos l,$$

dans lesquelles l'angle auxiliaire φ est donné par la relation

$$\operatorname{tang}\varphi = \cos t \operatorname{cotang}\lambda.$$

Le rayon ρ de chaque almicantarat, c'est-à-dire la distance du point considéré au centre de la carte, s'exprimera ensuite à l'aide de la formule

$$\rho = 2a\sin\frac{\theta}{2}.$$

On pourrait aussi employer les formules suivantes

$$\operatorname{tang}\frac{z+M}{2} = \operatorname{cotang}\frac{t}{2}\frac{\cos\frac{l-\lambda}{2}}{\sin\frac{l+\lambda}{2}}; \qquad \operatorname{tang}\frac{z-M}{2} = \operatorname{cotang}\frac{t}{2}\frac{\sin\frac{l-\lambda}{2}}{\cos\frac{l+\lambda}{2}},$$

$$\sin\theta = \frac{\cos l}{\sin z}\sin t = \frac{\cos\lambda}{\sin M}\sin t;$$

les deux premières formules donnent les arcs $\frac{z+M}{2}$ et $\frac{z-M}{2}$ dont la somme est z et la différence M.

Quand on connaîtra z et θ, et par suite ρ, il sera facile de placer le point M en menant par le centre une droite faisant avec le méri-

dien principal l'angle z, et en portant ensuite de O en M la longueur ρ.

L'emploi de l'un quelconque des deux systèmes de formules donne des résultats très-exacts, mais la méthode est assez laborieuse dès qu'on doit calculer les coordonnées d'un grand nombre de points. Nous avons dit (1) que sur toute projection zénithale les méridiens et les parallèles pouvaient se construire par *analogie* lorsqu'on possédait une projection stéréographique ayant pour centre le même point de la sphère que la projection zénithale. Cette construction atteint une grande exactitude pour la projection qui nous occupe. Lorsqu'on aura, en effet, déterminé comme nous l'avons dit la grandeur de l'arc de grand cercle qui unit le point considéré au point central, la longueur de la corde de cet arc, que l'on obtiendra immédiatement sans avoir à s'inquiéter du nombre de degrés et minutes correspondant, sera la longueur que l'on devra porter sur le rayon vecteur préalablement tracé.

On pourrait aussi dresser une échelle numérique en remarquant que si l'on pose dans la figure 41 (2)

$$cK' = a \operatorname{tang} \varphi = \rho_s,$$

on aura

$$\text{corde BK} = \rho_c = 2a \sin \varphi = \frac{2\rho_s}{\sqrt{1+\rho_s^2}}.$$

Il est très-facile de dresser une table qui donne un certain nombre de valeurs de ρ_c en fonction de ρ_s et qui sera la clef de la transformation ; et il est utile de remarquer que cette transformation est générale, c'est-à-dire qu'elle s'applique à la projection stéréographique sur un horizon quelconque, de sorte que le tracé peut être exécuté au moyen de cette formule ou de cette table en prenant un point quelconque du globe pour centre du tracé. La seule condition nécessaire est que les deux projections aient pour centre les projections d'un même point de la sphère.

---

(1) *Voir* 1re partie, chap. IV, § 3.
(2) *Voir* page 143.

VALEURS de ρ_s	VALEURS de ρ_e	DIFFÉRENCES des valeurs de ρ_e
0,00	0,000	
0,05	0,100	100
0,10	0,199	99
0,15	0,297	98
0,20	0,392	95
0,25	0,485	93
0,30	0,575	90
0,35	0,661	86
0,40	0,743	82
0,45	0,821	78
0,50	0,894	73
0,55	0,964	70
0,60	1,029	65
0,65	1,090	61
0,70	1,147	57
0,75	1,200	53
0,80	1,249	49
0,85	1,295	46
0,90	1,338	43
0,95	1,378	40
1,00	1,414	36

L'emploi de cette table donne une méthode graphique très-sûre et très-rapide pour la construction de la projection zénithale équivalente. On construira d'abord le réseau des méridiens et des parallèles de la projection stéréographique sur l'horizon du lieu pris pour centre. On divisera ensuite le rayon de la sphère en cent parties égales par exemple, et la table précédente montrera quelle longueur il faudra substituer à chacun des rayons vecteurs de la projection auxiliaire mesurée sur cette échelle pour obtenir les rayons vecteurs correspondants du tracé zénithal.

Si la projection auxiliaire, au lieu d'être stéréographique était orthographique, l'échelle numérique se dresserait à l'aide de la formule

$$\text{corde BK} = \frac{2\text{CK}'}{\sqrt{3}}.$$

Quelle que soit la projection auxiliaire que l'on emploiera, on

pourra obtenir non seulement les projections des méridiens et des parallèles à l'aide de leurs intersections, mais encore la projection d'un cercle ou d'une courbe quelconque dont on connaîtra déjà la représentation sur la projection auxiliaire. Il est donc inutile de nous arrêter à chercher l'équation de la projection d'un cercle de la sphère.

La projection n° XXI a été construite dans ce système sur l'horizon de Paris.

Nous avons jusqu'à présent supposé la terre sphérique; cette hypothèse est nécessaire pour l'existence même de toute projection zénithale qui suppose que les almicantarats sont des circonférences sur la surface à représenter ; si donc dans le tracé des cartes particulières on veut tenir compte de l'aplatissement aux pôles, on devra appliquer la méthode de Prony qui substitue à la surface de l'ellipsoïde terrestre la portion de surface sphérique qui en diffère le moins possible dans l'étendue de cette surface. Nous avons montré qu'il était le plus souvent suffisant de prendre pour rayon de cette surface sphérique une moyenne, soit géométrique, soit arithmétique, entre les deux rayons de courbure principaux de l'ellipsoïde au point central, c'est-à-dire entre la grande normale et le rayon de courbure du méridien.

Pour construire l'échelle on calculera, avec le rayon de la sphère que l'on aura adopté, la longueur en mètres de la corde d'un arc de grand cercle correspondant à un angle de 20°, par exemple. La distance de la station centrale à l'almicantarat qui en est écarté de 20° en latitude sera ensuite mesurée sur la carte, suivant le méridien central, avec cette même unité de longueur; le rapport de cette distance à la corde calculée sera le coefficient de la réduction du tracé, et l'unité de longueur devra subir cette même réduction pour être applicable à la carte.

4. Occupons-nous maintenant des altérations inhérentes à ce tracé.

L'altération des angles s'évalue facilement ; nous avons vu en effet (1) que si en un point M de la sphère situé à une distance θ du point pris pour centre de projection, on appelle α l'angle d'une direction quelconque avec le grand cercle qui passe par ces deux points, et β l'angle

(1) *Voir* 1re partie, chap. V, § 11.

correspondant sur la projection, c'est-à-dire l'angle formé par la projection de la direction avec la droite menée au centre de la carte, on a

$$\operatorname{tang}\beta = \frac{\rho d\theta}{\sin\theta d\rho}\operatorname{tang}\alpha = K\operatorname{tang}\alpha.$$

Dans la projection équivalente de Lambert

$$K = \frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}.$$

Donc

$$\operatorname{tang} B = \frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}\operatorname{tang}\alpha.$$

L'angle le plus altéré A est exprimé par

$$\operatorname{tang} A = \pm\cos\frac{\theta}{2},$$

et l'angle correspondant B sur la projection par

$$\operatorname{tang} B = \pm\frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}},$$

les signes + et — se correspondant. Il en résulte

$$\operatorname{tang}(B - A) = \frac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}.$$

L'angle A de déviation maximum est égal à 45° pour $\theta = 0$, c'est-à-dire au centre de la carte: il décroît ensuite sur la sphère tandis que l'angle B augmente d'autant sur la carte, et la déviation va en croissant; à 90° du centre on a

$\operatorname{tang} A = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\operatorname{tang} B = \sqrt{2}$, ou $A = 35°15'52''$ et $B - A = 19°28'16''$.

La déviation continue à croître avec θ, et à l'antipode du centre, point qui sur la carte se transforme en un cercle, on trouve

$$A = 0 \quad \text{et} \quad B = 90°.$$

Voici le tableau des angles A et B qui correspondent à la déviation maximum pour des valeurs de θ de 0 à 90 degrés, de 10 en 10 degrés (1).

DISTANCE en degrés au centre de la carte θ.	ANGLE DE DÉVIATION MAXIMUM		DÉVIATION MAXIMUM.
	sur la sphère.	sur la carte.	
0°	45° 0′ 0″,0	45° 0′ 0″,0	0° 0′ 0″,0
10	44 53 26 8	45 6 33 2	0 13 6 4
20	44 33 41 1	45 26 18 9	0 52 37 8
30	43 0 25 3	45 59 34 7	1 59 9 4
40	43 13 9 0	46 46 51 0	3 33 42 0
50	42 11 10 5	47 48 49 5	5 37 39 0
60	40 53 36 2	49 6 23 8	8 12 47 6
70	39 19 21 6	50 40 38 4	11 21 16 8
80	37 27 31 4	52 32 46 6	15 5 33 2
90	35 15 51 8	54 44 8 2	19 28 16 4

Nous avons donné la relation générale qui doit exister entre deux angles α et α_1 sur la sphère pour que les directions définies par ces angles soient des directions conjuguées, c'est-à-dire pour que l'angle des directions correspondantes sur la projection zénithale soit le même que sur la sphère. Cette relation est

$$\operatorname{tang}\alpha_1 \operatorname{tang}\alpha = \frac{1}{K} = \frac{\sin\theta}{\rho}\frac{d\rho}{d\theta}.$$

Dans la projection zénithale équivalente elle devient

$$\operatorname{tang}\alpha_1 \operatorname{tang}\alpha = \frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}.$$

Nous renvoyons pour plus de détails au § 12 du chap. V.

5. Occupons-nous maintenant de l'altération des longueurs.

Nous avons trouvé (2), en appelant m le rapport des distances

(1) Ce tableau est extrait du mémoire de M. Collignon.

(2) *Voir* 1re partie, chap. V, § 14.

élémentaires ds et dS correspondantes de la carte et de la sphère, la relation

$$m^2 = \frac{ds^2}{dS^2} = \frac{d\rho^2}{d\theta^2}\cos^2\alpha + \rho^2\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\theta} = \cos^2\alpha\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\alpha\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}};$$

α désignant l'angle de l'élément considéré sur la sphère avec le grand cercle MO qui passe au centre du tracé ; cet angle est exprimé par la relation

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{dz}{d\theta}\sin\theta,$$

dans laquelle z désigne l'azimut du sommet de cet angle.

Le rapport m se réduit à l'unité quand $\text{tang}\,\alpha = \cos\frac{\theta}{2}$ ou quand, sur la carte, $\text{tang}\,\beta = \frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}}$, c'est-à-dire pour la direction qui subit la déviation maximum ; cette direction a donc la propriété de conserver les longueurs.

Par un point M donné on peut donc faire passer sur la carte et sur la sphère deux courbes *isopérimètres* qui se correspondent, coupant tous les arcs MO sur la sphère, tous les rayons MO sur la carte, sous certains angles α et β, de manière que ces courbes aient les mêmes longueurs entre deux points se correspondant chacun à chacun.

Pour les petites valeurs de θ l'angle α que fait la courbe avec l'arc MO est très-voisin de 45° ; cet angle décroît à mesure que θ augmente et est nul pour $\theta = 180°$ ou pour les antipodes du point O. Autour du point O la courbe sur la sphère se rapproche indéfiniment de la spirale logarithmique qui coupe à 45° tous ses rayons vecteurs ; la courbe passe par les antipodes du point o et revient ensuite tourner autour du point O lui-même.

Sur la carte la courbe isopérimètre se rapproche indéfiniment, pour les valeurs très-petites et décroissantes de θ, de la spirale logarithmique qui coupe à 45° ses rayons vecteurs. Pour les valeurs de θ croissantes l'angle β s'accroît et a pour limite 90° lorsque $\theta = 180°$; la courbe touche alors le cercle dans lequel se transforment les antipodes du centre, et se prolonge au delà par une branche indéfinie symétrique de la première.

Pour avoir l'équation de cette courbe en coordonnées polaires, appelons ρ le rayon vecteur OM (fig. 108) et ω l'angle polaire formé par ce rayon avec un axe fixe Ox; nous aurons

$$\frac{\rho d\omega}{d\rho} = \operatorname{tang}\beta = \frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}};$$

or

$$\rho = 2a \sin\frac{\theta}{2},$$

donc

$$d\rho = a\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta,$$

et, en substituant,

$$d\omega = \frac{d\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{\frac{d\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

L'intégration donne

$$\omega = \log \text{nép.} \operatorname{tang}\frac{\theta}{4} + C,$$

ou, en logarithmes décimaux,

$$\omega = \frac{1}{M \sin 1''} \log \operatorname{tang}\frac{\theta}{4} + C,$$

$M = 0{,}4342945$, et l'angle ω est ainsi exprimé en secondes.

Cette dernière équation, jointe à

$$\rho = 2a \sin\frac{\theta}{2},$$

est, en termes finis, l'équation du lieu.

Pour $\theta = 180°$, on a

$$\omega = C \quad \text{et} \quad \rho = 2a.$$

Pour construire le patron de la courbe, il est commode de faire $C = \pi$; on trouve alors le tableau suivant :

Valeurs de ω.	Valeurs correspondantes de θ.	Valeurs correspondantes de $\frac{\rho}{a}$.
0°	9° 54′	0,17258
45	21 40	0,37590
90	46 56	0,79644
135	98 00	1,50942
180	180 00	2,00000

Il est inutile de s'occuper de la portion de courbe que donneraient les arcs négatifs, puisque cette portion est située dans une région où la déformation est presque nulle. Les arcs de π à 2π donneraient une branche symétrique de celle qu'on vient de calculer, par rapport au rayon correspondant à $\theta = \pi$.

Revenons maintenant à l'étude de l'altération des longueurs. Si l'on appelle m_0 et $m_{\frac{\pi}{2}}$ les rapports des longueurs élémentaires de la carte et de la sphère sur les rayons vecteurs et sur les almicantarats, on trouve que le premier est minimum et que le second est maximum ; leurs valeurs sont

$$m_0 = \cos\frac{\theta}{2}; \qquad m_{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}}.$$

Ainsi les longueurs des éléments des rayons vecteurs sont *réduites* sur la carte dans le rapport de $\cos\frac{\theta}{2}$ à l'unité, et les longueurs des éléments des almicantarats sont *augmentées* dans le même rapport; cette réciprocité est nécessaire pour conservation des surfaces.

Le tableau suivant, calculé par M. Collignon, donne les coefficients d'altération de l'élément de longueur dans le sens du rayon vecteur et dans le sens perpendiculaire, c'est-à-dire m_0 et $m_{\frac{\pi}{2}}$; il contient aussi la comparaison des distances d'un point quelconque au centre du tracé, mesurées sur la sphère de rayon égal à *un* et sur la carte.

DISTANCES en degrés au centre du tracé.	DISTANCES en parties du rayon sur la sphère.	DISTANCES sur la carte.	m_0	$m_{\frac{\pi}{2}}$
10°	0,174533	0,17432	0,99619	1,00382
20	0,349066	0,34730	0,98481	1,01542
30	0,523599	0,51764	0,96593	1,03527
40	0,698132	0,68404	0,93969	1,06417
50	0,872665	0,84524	0,90631	1,10338
60	1,047198	1,00000	0,86603	1,15470
70	1,221731	1,14716	0,81915	1,22077
80	1,396264	1,28558	0,76604	1,30541
90	1,570796	1,41422	0,70711	1,41422

Il est facile de construire graphiquement une échelle applicable à la mesure exacte des distances comptées le long d'un almicantarat, c'est-à-dire le long d'un cercle de la carte ayant pour centre le centre du tracé.

Sur la moitié OAO′ (fig. 109) d'un grand cercle de la sphère, portons de O en M le rayon de ce cercle ; joignons O′M. Sur le diamètre OO′, prenons une longueur OB égale à l'unité adoptée pour la mesure, puis élevons BC perpendiculaire sur OO′ ; la longueur O′C sera l'unité applicable au cercle décrit avec le rayon OM, car on voit facilement que

$$O'C = \frac{O'R}{\cos OO'M} = \frac{O'C}{\cos \frac{\theta}{2}};$$

l'unité de longueur est donc augmentée dans le même rapport que les éléments de longueur à mesurer sur le cercle de la carte.

En abaissant BD perpendiculaire sur O′M, on voit de même que O′D est l'unité applicable aux éléments de la carte qui aboutissent au point M dans le sens du rayon vecteur.

S'il s'agit de choisir une échelle moyenne applicable, abstraction faite des altérations, à toutes les mesures à prendre sur la carte, on n'a qu'à prendre l'échelle exacte qui convient pour le centre du tracé : les divisions de cette échelle sont partout moyennes proportionnelles entre les divisions applicables aux distances les plus altérées dans un sens et dans l'autre.