www.e-rara.ch

Traité des projections des cartes géographiques

Germain, Adrien Adolphe Charles

Paris, [1865]

ETH-Bibliothek Zürich

Shelf Mark: Rar 18793

Persistent Link: https://doi.org/10.3931/e-rara-74932

Chapitre XIII.

www.e-rara.ch
Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien – von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material – from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d'imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L'éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes – des débuts de l'imprimerie jusqu'au 20e siècle.

e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

Nutzungsbedingungen Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titelinformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

Terms of Use This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

Conditions d'utilisation Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

Condizioni di utilizzo Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]

Visual Library

CHAPITRE XIII.

PROJECTIONS POLYCONIQUES (1)

1° PROJECTION POLYCONIQUE RECTANGULAIRE

Adoptée au *Topographical Department of the War Office* pour les cartes embrassant une grande portion de la surface de la terre.

1. Nous avons dit que ce système, tout de convention, représente les parallèles par des arcs de cercle, et les méridiens par des courbes qui coupent les parallèles à angles droits; de sorte que chaque petit carré de la sphère compris entre deux parallèles et deux méridiens, est représenté par un petit rectangle curviligne dont les deux bases sont des arcs de cercle. Les rayons des parallèles sont égaux aux cotangentes de leurs latitudes, et les centres sont tous sur la droite qui représente le méridien central que nous prendrons pour méridien de départ. Sur ce méridien les parallèles conservent les mêmes distances que sur la sphère.

Soit M (fig. 114) un point du méridien central dont la latitude est $l = 90° - z$, P le pôle distant de M de l'arc $PM = az$; le centre du parallèle du point M sera déterminé par la distance $CM = a \operatorname{tang} z$.

Pour déterminer les méridiens, cherchons maintenant la nature de la courbe qui coupera à angles droits les arcs de cercle qui représentent les parallèles. Considérons un point M′ infiniment voisin de M, de telle sorte que $MM' = adz$; soit C′ le centre du parallèle de M′; $C'M' = a \operatorname{tang} (z + dz)$. Enfin supposons tracé un méridien PAA′ et joignons CA et C′A′; ces droites devront être tangentes à ce méridien puisqu'elles sont normales aux parallèles. Appelons θ l'angle MCB; l'angle MC′A′ sera $\theta + d\theta$, le petit angle C′BC, inclinaison des tangentes sera $d\theta$.

Nous cherchons une relation entre z et θ; or

$$CC' = C'M' - CM - MM' = a \operatorname{tang}(z + dz) - a \operatorname{tang} z - adz,$$
$$CC' = a \operatorname{tang}^2 z dz.$$

(1) *Voir* 1re partie, chap. VI § 17.

Le triangle BCC′ donne

$$\frac{CC'}{\sin B} = \frac{C'B}{\sin \theta};$$

et, en remplaçant les sinus des arcs infiniment petits par ces arcs eux-mêmes et négligeant les infiniment petits de second ordre, il vient

$$\frac{\operatorname{tang}^2 z\,dz}{d\theta} = -\frac{\operatorname{tang} z}{\sin \theta};$$

d'où

$$-\operatorname{tang} z\,dz = \frac{d\theta}{\sin \theta}.$$

En intégrant les deux membres de cette équation nous obtenons

$$\log \cos z = \log \operatorname{tang} \frac{\theta}{2} + \text{C}^{\text{te}},$$

expression qui peut se mettre sous la forme

$$\operatorname{tang} \frac{\theta}{2} = \text{K} \cos z,$$

dans laquelle la constante K détermine chaque courbe particulière.

Cherchons en quel point cette courbe coupe l'équateur EE′. Pour cela remarquons que la distance d'un point quelconque A de la courbe au méridien central est exprimée par

$$a \operatorname{tang} z \sin \theta = 2a \frac{\operatorname{tang} z \operatorname{tang} \frac{\theta}{2}}{1 + \operatorname{tang}^2 \frac{\theta}{2}} = 2\text{K} \frac{a \sin z}{1 + \text{K}^2 \cos^2 z},$$

à l'équateur, c'est-à-dire pour $z = 90°$, cette distance est égale à $2\text{K}a$; la constante K représente donc la moitié de la longitude du méridien considéré, de telle sorte que l'équateur sera développé en véritable grandeur et divisé en parties égales comme le méridien central.

Il en résulte la construction suivante pour tracer par points un méridien d'une longitude donnée $t = 2\text{K}$.

Soit P le pôle, M un point du méridien central à la latitude $l = 90° - z$, AMA_1 l'arc qui représente son parallèle. Traçons la tangente $n\text{M}n_1$ perpendiculaire à PM en M. Pour déterminer le point A dont la longitude t est donnée, soit $t = 32°$, portons sur la tangente Mn de cha-

que côté de M deux longueurs $Mn = Mn_1$ égales à la moitié de la vraie longueur de l'arc de parallèle de la sphère (soit ici l'arc de 16° décrit avec le rayon $a \sin z$), et des points n et n_1 décrivons des arcs de cercle qui couperont le parallèle aux points cherchés A et A_1.

En effet Mn est, par construction, égal à $\frac{t}{2}\sin z$ ou à $K \sin z$, et puisque $CM = a \operatorname{tang} z$, l'angle MCn est tel que

$$\operatorname{tang} MCn = \frac{K \sin z}{\operatorname{tang} z} = K \cos z,$$

et par conséquent

$$\operatorname{tang} MCn = \operatorname{tang} \frac{\theta}{2},$$

ou

$$MCn = \frac{\theta}{2}.$$

Par suite

$$ACM = \theta,$$

et la distance du point A au méridien central est

$$\operatorname{tang} z \sin \theta,$$

ce qu'il fallait démontrer (1).

2. Il est facile de trouver le rayon de courbure d'un méridien quelconque de longitude $2K = t$ à la colatitude z.

On sait que le rayon de courbure ρ est égal à $\frac{ds}{d\theta}$, $d\theta$ étant l'angle de deux normales ou de deux tangentes infiniment voisines. Or, dans la figure 114

$$C'A' = CA + CC' \cos\theta + AA',$$

$$AA' = ds; \quad CC' = a \operatorname{tang}^2 z dz, \quad \text{et} \quad \operatorname{tang} \frac{\theta}{2} = K \cos z.$$

$$ds = a(\sec^2 z - \operatorname{tang}^2 z \cos\theta) dz = a \frac{1 + K^2 + K^2 \sin^2 z}{1 + K^2 \cos^2 z} dz,$$

$$\sec^2 \frac{\theta}{2} d \frac{\theta}{2} = - K \sin z dz;$$

d'où

$$d \frac{\theta}{2} = - \frac{K \sin z}{1 + K^2 \cos^2 z} dz;$$

(1) Cette ingénieuse construction a été donnée par M. O' Farrell.

donc

$$\rho = a\frac{1+K^2+K^2\sin^2 z}{K\sin z}.$$

Cette formule montre que le rayon de courbure est infini au pôle.

Occupons-nous maintenant de la déformation en surface. Comparons pour cela le petit carré compris sur la sphère entre deux méridiens et deux parallèles infiniment rapprochés, et le rectangle correspondant sur la projection. Les côtés du carré sphérique étant $2ad\,K\sin z$ et adz, sa surface est $2a^2\sin z\,dK\,dz$. Sur la projection nous avons vu que l'élément de courbe méridienne était égal à

$$a\frac{1+K^2+K^2\sin^2 z}{1+K^2\cos^2 z}\,dz;$$

l'élément de courbe parallèle est égal à

$$2ad\,\frac{\theta}{2}\,\text{tang}\,z;$$

mais puisque $\text{tang}\,\frac{\theta}{2} = K\cos z$, on obtient en différentiant sans faire varier z

$$\text{séc}^2\frac{\theta}{2}\,d\,\frac{\theta}{2} = \cos z\,.\,dK,$$

d'où

$$d\,\frac{\theta}{2} = dK\,\frac{\cos z}{1+K^2\cos^2 z}.$$

L'élément de courbe parallèle est donc exprimé par

$$a\,\frac{2dK\sin z}{1+K^2\cos^2 z}.$$

La surface du petit rectangle est alors égale à

$$2a^2\sin z(dK\,.\,dz)\,\frac{1+K^2+K^2\sin^2 z}{(1+K^2\cos^2 z)^2}.$$

La surface du rectangle de la carte est donc à la surface du petit carré correspondant sur la sphère dans le rapport de

$$\frac{1+K^2+K^2\sin^2 z}{(1+K^2\cos^2 z)} \quad \text{à} \quad 1.$$

Si nous faisons ce rapport égal à l'unité, il en résulte l'équation

$$K^4 \cos^4 z + 3K^2 \cos^2 z - 2K^2 = 0,$$

qui est satisfaite, soit par $K = 0$, soit par l'égalité

$$K^2 \cos^4 z + 3 \cos^2 z - 2 = 0. \qquad (E)$$

On en conclut qu'il n'y a pas d'exagération de surface le long du méridien central et le long de la courbe particulière définie par l'équation (E). Cette courbe coupe le méridien central à angles droits à la lalitude de 54° 44′ environ. A partir de ce point elle s'incline peu à peu vers le sud ; à 90° de longitude elle atteint 50° 26′ de latitude, et à 180°, c'est-à-dire sur le méridien qui limite le planisphère, elle atteint 43° 46′.

Les surfaces de toutes les contrées situées au nord de cette ligne sont diminuées et les surfaces des contrées situées au sud sont au contraire augmentées. Si l'on représente le globe entier dans ce système de projection, on trouve que l'aire est exprimée par

$$\left[(4+\pi^2)\,\text{tang}^{-1}\frac{\pi}{2} + 2\pi\right] a^2,$$

et que la véritable surface de la sphère est ainsi augmentée dans le rapport de 8 à 5. On trouve aussi que le périmètre de la représentation est égal à la circonférence du globe multipliée par

$$\sqrt{4+\pi^2} - 1 \quad \text{ou} \quad 2{,}72.$$

Ce méridien fait au pôle, avec le méridien central, et de chaque côté, un angle de 115° 2′ 16″. En resumé, cette projection a l'avantage de conserver les longueurs des degrés sur le méridien central et sur l'équateur, de figurer les parallèles et les méridiens par des courbes très-faciles à construire qui se coupent à angles droits comme sur la sphère, et de permettre de représenter des continents assez vastes, tels que les deux Amériques, sans déformation considérable.

Comme ce tracé n'est employé que pour les cartes embrassant une grande portion de la surface de la terre, il est inutile d'y tenir compte de l'aplatissement. On trouvera dans la table II, employée au *War office*, les valeurs des rayons des parallèles développés, c'est-à-dire les côtés des cônes tangents, et des degrés de longitude de

chaque parallèle de degré en degré. Cette table est calculée en prenant pour unité le degré de l'équateur supposé égal au degré de méridien ; le rayon de la sphère est alors exprimé par 57,2958.

La projection n° XXXVI représente la sphère entière.

2° PROJECTION POLYCONIQUE ORDINAIRE

Du *Coast Survey Office* des États-Unis.

3. Pour tracer le canevas de cette projection, on construit deux droites rectangulaires dont l'une représentera le méridien central et l'autre l'équateur ; à partir du point d'intersection on porte sur la première les longueurs des degrés de latitude calculées dans la 6e colonne de la table I dans l'hypothèse de l'aplatissement $\frac{1}{299,15}$, et sur la seconde les longueurs des degrés de longitude de l'équateur. A partir de chacun des points de division du méridien central on porte les longueurs des côtés des cônes tangents calculées dans la 8e colonne de la même table, et l'on obtient ainsi les centres des cercles qui représenteront les parallèles correspondants. Sur chacun de ces arcs de cercle on porte ensuite les longeurs des degrés de longitude données dans la 7e colonne, puis on fait passer par les points correspondants des cercles qui représentent les méridiens.

On peut, pour plus d'exactitude, calculer la corde de chaque arc de parallèle, mais il vaut encore mieux construire les parallèles par points aussi bien que les méridiens, en les rapportant à deux axes de coordonnées rectangulaires, le méridien central et la tangente à chaque parallèle. Il est très-facile de tenir compte de l'aplatissement de la terre.

Appelons t la différence des longitudes du point considéré M (fig. 115) et du méridien central, l la latitude de ce point, θ l'angle correspondant sous-tendu au centre C du parallèle par l'arc OM. On aura

$$\text{arc OM} = t\text{N}\cos l = \theta\text{C} = \theta\text{N}\operatorname{cotang} l,$$

d'où

$$\theta = t\sin l,$$

et alors

$$x = C \sin \theta = \frac{a \operatorname{cotang} l}{(1 - e^2 \sin^2 l)^{\frac{1}{2}}} \sin \theta,$$

$$y = C - C \cos \theta = \frac{2a \operatorname{cotang} l}{(1 - e^2 \sin^2 l)^{\frac{1}{2}}} \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

Les valeurs en mètres des coordonnées x et y pour 30° de longitude sur chaque parallèle de 1° à 54° de latitude ont été calculées au *Coast survey office* (bureau de l'hydrographie) des États-Unis et publiées par ce bureau (1); nous ne les reproduisons pas, mais nous donnons ici une table des valeurs des rayons des parallèles de 10° en 10°, des longueurs des arcs de 10° de longitude et des coordonnées x et y des extrémités de chacun de ces parallèles entiers développés, en prenant pour axes la tangente au milieu de chaque parallèle et le méridien central; cette table, qui permet de construire très-facilement la projection polyconique de la surface entière du globe, est calculée en prenant le rayon de la sphère pour unité; elle suppose donc au méridien central une longueur de 3,1416 d'un pôle à l'autre (2). Dix degrés de latitude ont pour longueur 0,17453.

Nous donnons aussi les valeurs de l'angle θ sous-tendu au centre de chaque parallèle par dix degrés de longitude et calculées d'après la formule

$$\theta = t \sin l.$$

Cette table rendra très-facile la construction de toute projection polyconique ordinaire, même en tenant compte de l'aplatissement de la terre; lorsqu'on aura décrit les cercles de latitude, on déterminera les méridiens par points beaucoup plus exactement qu'on ne pourrait le faire en portant à la suite les unes des autres les longueurs des degrés de longitude, car on évitera ainsi l'erreur que l'on commettrait en remplaçant l'arc par sa corde.

La projection n° XXXVII représente la sphère entière.

---

(1) *Report of the Superintendent of the Coast Survey during the year* 1859, Washington, 1860, in-4, p. 330 à 358. *Appendice n° 33 : Tables for projecting maps of large extent, arranged by J. E. Hilgard, assistant, U. S. C. S.*

(2) *Report of the Superintendent of the Coast Survey, during the year* 1856; *Appendice n° 58 by assistant J. E. Hilgard.*

Table pour le développement polyconique de la sphère entière.

LATITUDE.	x	y	LONGUEUR de 10° de parallèle.	RAYON des parallèles.
0°	3,142	0,000	0,1745	Infini.
10	2,942	0,823	0,1719	5,671
20	2,416	1,439	0,1640	2,747
30	1,732	1,732	0,1512	1,732
40	1,074	1,709	0,1337	1,192
50	0,563	1,461	0,1122	0,839
60	0,236	1,101	0,0873	0,577
70	0,069	1,721	0,0597	0,364
80	0,008	0,352	0,0303	0,176
85	0,001	0,175	0,0152	0,087
90	0,000	0,000	0,0000	0,000

Angles sous-tendus au centre de chaque parallèle par 10° de longitude.

Latitude l.	θ	l	θ	l	θ	l	θ
0°	0° 00′ 00″,0	23°	3° 54′ 26″,3	46°	7° 11′ 36″,2	69°	9° 20′ 08″,9
1	0 10 28 3	24	4 04 02 5	47	7 18 48 7	70	9 23 48 9
2	0 20 56 4	25	4 13 34 3	48	7 25 53 2	71	9 27 18 9
3	0 31 24 1	26	4 23 01 4	49	7 32 49 6	72	9 30 38 0
4	0 41 51 2	27	4 32 23 7	50	7 39 37 6	73	9 33 47 0
5	0 52 17 6	28	4 41 41 0	51	7 46 17 3	74	9 36 45 4
6	1 02 43 0	29	4 50 53 1	52	7 52 48 4	75	9 39 33 3
7	1 13 07 3	30	5 00 00 0	53	7 59 10 9	76	9 42 10 6
8	1 23 30 2	31	5 09 01 4	54	8 05 24 6	77	9 44 37 3
9	1 33 51 6	32	5 17 57 1	55	8 11 29 5	78	9 46 53 3
10	1 44 11 3	33	5 26 47 0	56	8 17 25 4	79	9 48 58 6
11	1 54 29 1	34	5 35 31 0	57	8 23 12 1	80	9 50 53 1
12	2 04 44 8	35	5 44 08 8	58	8 28 49 7	81	9 52 36 8
13	2 14 58 2	36	5 52 40 3	59	8 34 18 0	82	9 54 09 7
14	2 25 09 2	37	6 01 05 3	60	8 39 36 9	83	9 55 15 2
15	2 35 17 5	38	6 09 23 8	61	8 44 46 3	84	9 56 42 8
16	2 45 22 9	39	6 17 35 5	62	8 49 46 1	85	9 57 43 0
17	2 55 25 4	40	6 25 40 4	63	8 54 36 2	86	9 58 32 3
18	3 05 24 6	41	6 33 38 1	64	8 59 16 6	87	9 59 10 7
19	3 15 20 5	42	6 41 28 7	65	9 03 47 1	88	9 59 38 1
20	3 25 12 7	43	6 49 11 9	66	9 08 07 6	89	9 59 54 5
21	3 35 01 3	44	6 56 47 7	67	9 12 18 2	90	10 00 00 0
22	3 44 45 8	45	7 04 15 8	68	9 16 18 6		

4. Nous avons indiqué une construction plus rapide et suffisamment exacte pour tracer le canevas d'un hémisphère entier à une échelle peu considérable; on décrit les parallèles à la manière ordinaire et l'on représente le méridien de 90° de longitude qui doit limiter la carte, par une circonférence décrite sur la distance des pôles comme diamètre ; on partage ensuite en parties égales les arcs de parallèles ainsi interceptés, et l'on fait passer par les points de division correspondants des courbes qui représentent les méridiens.

3° PROJECTION POLYCONIQUE ÉQUIDISTANTE.

5. Nous avons exposé avec des détails suffisants au § 19 du chapitre VI (1re partie) la construction et les défauts de ce système qui ne doit être employé que dans des limites fort restreintes. Nous ne reviendrons pas sur ce sujet.