

www.e-rara.ch

Lehrbuch der Karten-Projektion

Gretschel, Heinrich Friedrich

Weimar, 1873

ETH-Bibliothek Zürich

Shelf Mark: Rar 18806

Persistent Link: <https://doi.org/10.3931/e-rara-75268>

Drittes Kapitel.

www.e-rara.ch

Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien – von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material – from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d'imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L'éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes – des débuts de l'imprimerie jusqu'au 20e siècle.

e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

Nutzungsbedingungen Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titelinformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

Terms of Use This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

Conditions d'utilisation Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

Condizioni di utilizzo Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]

Drittes Kapitel.

Die Abbildungen durch Abwicklung.

§. 13.

Cylindrische Abbildungen.

1. Der einfache Gedanke, welcher den hierher gehörigen Abbildungen ursprünglich zu Grunde liegt, besteht darin, eine mehr oder minder breite Zone der Erd- (oder Himmels-) Kugel zu ersetzen durch einen geraden Cylinder, auf welchem man die Meridiane als gerade Linien, den Aequator und die Parallelkreise aber als Kreise von gleicher Länge darstellt, welche die ersteren rechtwinklig schneiden. Wenn man dann den Cylinder längs einer Meridianlinie aufschneidet und in eine Ebene abwickelt, so erhält man zwei unter rechten Winkeln sich schneidende Systeme von geraden Linien, welche die Parallelkreise und Meridiane repräsentiren. Solche Karten nennt man im Allgemeinen Plattkarten. Die ältesten derartigen Karten sind die folgenden beiden Arten.

I. Quadratische Plattkarten.

2. Man nimmt einen Cylinder an, welcher die Kugel längs des Aequators berührt. Der Aequator wird dann in seiner wahren Länge dargestellt; senkrecht durch die einzelnen Theilpunkte legt man die Meridiane, auf denen man die Breitengrade ebenfalls in ihrer wahren Länge darstellt. Bei der Abwicklung erhält man dann ein Netz mit lauter quadratischen Maschen, wie uns auf **Taf. II Fig. XI** in einer Ausdehnung vom nördlichen Pol bis zu 70° südlicher Breite und von 0° bis 90° Länge zeigt.

3. Ein solches Kartennetz zeichnet sich nun allerdings durch die grosse Einfachheit seiner Konstruktion aus, ist aber sehr fehlerhaft, sobald man die Karte einigermaßen weit vom Aequator ausdehnt. Denn nehmen wir die Länge eines Aequatorbogens von

einer bestimmten Längenausdehnung, z. B. unserer Karte entsprechend von 10° , als Einheit an, so ist der Bogen des Parallelkreises von der Breite φ von gleicher Längenausdehnung gleich $\cos \varphi$. Wie sich diese Werthe mit wachsender Breite ändern, zeigt folgende kleine Tabelle.

φ	$\cos \varphi$	φ	$\cos \varphi$
0°	1,0000	50°	0,6428
10	0,9848	60	0,5000
20	0,9397	70	0,3420
30	0,8660	80	0,1736
40	0,7660	90	0,0000

Des erwähnten Uebelstandes wegen sind solche Karten seit dem Anfange des sechszehnten Jahrhunderts nicht mehr im Gebrauch. Früher wurden sie seit Beginn des dreizehnten Jahrhunderts namentlich von den genuesischen Seefahrern viel benutzt, weil sie für die Schifffahrt mit dem Kompass eine Bequemlichkeit gewähren, die wir noch weiter unten besprechen werden, die ihnen aber mit den übrigen Plattkarten gemein ist.

II. Rechteckige Plattkarten.

4. Wenn man einen geraden Cylinder annimmt, der die Kugel längs eines mittleren Parallelkreises von der geographischen Breite φ schneidet, so werden alle Parallelkreise diesem gleich, ein Längengrad erhält also die Grösse

$$\frac{a\pi}{180} \cos \varphi.$$

Die Breitengrade dagegen bekommen, wie bei der vorigen Darstellungsform, ihre wahre Länge. Die Maschen des Kartennetzes sind demnach lauter gleich grosse Rechtecke, deren Breite sich zur Länge wie $1 : \cos \varphi$ verhält.

Auf **Taf. II** zeigt uns **Fig. XIII** ein derartiges Kartennetz in gleicher Ausdehnung wie das Netz **Fig. XII**; der Cylinder, welcher der Darstellung zu Grunde liegt, schneidet die Kugel längs der Parallelkreise von 45° Breite. Die Figur zeigt uns noch ausserdem den Quadranten des Parallelkreises von 45° nördl. Breite und einzelne Theile desselben, deren Längen dann auf dem stark ausgezogenen Aequator abgetragen sind.

5. Auch diese Karten dürfen nicht über viele Breitengrade ausgedehnt werden, wenn sie nicht ganz wesentlich falsch werden sollen. Am brauchbarsten sind sie für die Nähe des Aequators, weil für kleine Werthe von φ der Cosinus sich nicht sehr ändert, die Parallelkreise also wirklich nahezu gleich gross sind. Beispielsweise hat der verdiente Geograph I. B. Bourguignon d'Anville sich dieser Abbildungsweise mit Vortheil zum Entwurfe seiner im Jahre 1776 publicirten Karte von Guinea bedient.

Uebrigens ist diese Darstellungsweise sehr alt und schon bei den Geographen des Alterthums viel im Gebrauch. Sie rührt vielleicht schon von Anaximander her (um die Mitte des sechsten Jahrhunderts v. Chr.), welcher der erste gewesen sein soll, der eine Karte der damals bekannten Erde zeichnete. Ptolemäus, der sich ihrer gleichfalls bediente, nahm als mittleren Parallelkreis den von Rhodus an.

6. Bei derartigen Plattkarten, mag man nun den Aequator oder irgend einen andern Parallelkreis als Basis des abzuwickelnden Cylinders betrachten, hat es nicht die geringste Schwierigkeit, der ellipsoidischen Gestalt der Erde Rechnung zu tragen. Man hat nur nöthig dem Breitengrade statt der Grösse

$$\frac{a\pi}{180^\circ} = 0,0174533 \cdot a = \mu a$$

die Grösse

$$\frac{a(1 - \varepsilon^2)\mu}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi^3}}$$

beizulegen, wo φ die mittlere Breite bedeutet (vergl. S. 42), und die so berechneten, nach den Polen hin zunehmenden Längen auf den Meridianen abzutragen.

Eine von den beiden vorhergehenden wesentlich verschiedene ist

III. Lambert's normale isocylindrische Projektion.

7. Bei derselben nimmt man an, dass der abzuwickelnde Cylinder die Kugel längs des Aequators berührt. Die verlängerten Meridianebenen schneiden den Cylinder in parallelen Geraden, welche die Meridiane darstellen, und die verlängerten Ebenen der Parallelkreise schneiden denselben in Kreisen, welche die Parallelkreise repräsentiren. Nach der Abwicklung zeigt uns die Karte ein Netz rechtwinklig sich kreuzender gerader Linien. Die Längengrade besitzen auf allen Parallelkreisen dieselbe Grösse, nämlich diejenige, die sie im Originale auf dem Aequator haben; die Breitengrade dagegen werden nach den Polen hin immer kleiner, denn es ist die Entfernung der Geraden, welche den Parallelkreis von φ° Breite repräsentirt, vom Aequator durch die Gleichung gegeben

$$y = a \sin \varphi.$$

Auf Taf. II zeigt Fig. XIV die Konstruktion dieser Karte und ein Stück derselben, von Pol zu Pol und von 0° bis 30° Länge.

8. Da die Fläche einer Kugelzone gleich der Länge des Aequators multiplicirt mit der Höhe der Zone ist, und da bei der vorliegenden Darstellungsweise sowohl die Länge des Aequators als die Höhe der verschiedenen Zonen unverändert auf die Karte übertragen werden, wo diese Zonen sich als Rechtecke darstellen, so erscheinen alle Kugelzonen auf der Karte mit ihrer wahren Fläche. Daraus ergibt sich weiter, dass überhaupt jedes Flächenstück auf der Karte gleich ist dem entsprechenden Stück der Kugeloberfläche. Die Projektion wahrt also die Grösse der Flächen oder ist äquivalent (S. 4).

Gretschel, Karten-Projektion.

9. Wie schon in der Ueberschrift angedeutet, rührt diese Cylinderverprojektion, auf die wir im nächsten Kapitel nochmals zurückkommen werden, von dem um die Kartographie hoch verdienten deutschen Mathematiker Joh. Heinr. Lambert (1728 — 1777) her, der dieselbe in seinen Beiträgen zum Gebrauche der Mathematik zuerst angegeben hat. Neuerdings hat der englische Astronom C. Piazzzi Smyth dieselbe in einer besondern Schrift wieder empfohlen oder vielmehr als neu in Vorschlag gebracht.*)

IV. Zweck der Plattkarten. Die Loxodromie.

10. Der eigentliche Grund der frühzeitigen Verbreitung der Plattkarten, namentlich im Mittelalter, war nicht die Einfachheit ihrer Konstruktion, sondern ihre Zweckmässigkeit für den Seefahrer; wir sehen sie daher vorzugsweise gern zu Seekarten verwendet. Für den Seefahrer hat es weniger Interesse, die Umrisse und Gestalten der Ländermassen naturgetreu auf der Karte angegeben zu finden, wenn er nicht an den Küsten hinfährt, sondern auf das offene Meer hinaus geht. Schon seit dem zwölften Jahrhunderte war aber den Europäern das einfache Instrument bekannt, welches zur See, wenn alle andern Mittel fehlen, gestattet, jederzeit die Himmelsrichtung zu erkennen: die Magnetnadel. Im Besitze derselben konnte also der Schiffer stets beobachten, nach welcher Himmelsrichtung sich sein Schiff bewegte und war so im Stande, für die Beibehaltung des richtigen Courses Sorge zu tragen. Es musste dabei als das Einfachste erscheinen, soweit als möglich immer dieselbe Richtung des Schiffes beizubehalten, und nun stellte sich die Nothwendigkeit heraus, auf einfache Weise mittelst der Karte diejenige Richtung zu ermitteln, in welcher das Schiff von einem bestimmten Punkte *A* nach einem andern gegebenen Punkte *B* gelangt. Dies kann aber am einfachsten geschehen, wenn die Linie, welche das Schiff auf der Erdoberfläche beschreibt, wenn es immer nach derselben Himmelsrichtung geht, sich auf der Karte als eine gerade Linie darstellt. Dazu ist aber nothwendig, dass die Meridiane durch äquidistante Parallelen und die Parallelkreise durch Gerade dargestellt werden, die auf jenen senkrecht stehen. Um diese Verhältnisse besser zu übersehen, wollen wir uns jetzt zunächst mit der Linie etwas näher bekannt machen, die ein Schiff auf der Kugelfläche beschreibt, wenn es immer nach derselben Himmelsrichtung segelt, also alle Meridiane unter demselben Winkel schneidet.

11. Wenn ein Punkt sich auf einer Kugelfläche so bewegt, dass er die verschiedenen Meridiane unter gleichen Winkeln schneidet, so beschreibt er eine krumme Linie, die den Namen loxodromische Linie oder Loxodromie (Linie des schiefen Laufes, von $\lambda\omicron\zeta\acute{o}\varsigma$ = schief und \acute{o} $\delta\rho\acute{o}\mu\omicron\varsigma$ der Lauf abgeleitet) führt; Leibniz hat sie auch als rhombische Linie (*rhombus*, französ. *rumb* = Windstrich) bezeichnet.

*) *On an equal-surface projection for maps of the world and its application to certain anthropological questions. Edinburgh, Edmonston 1870*

Es sei P ein Punkt der Kugeloberfläche, φ seine Breite, λ die Länge, M ein benachbarter Punkt der loxodromischen Linie, φ_1 und λ_1 Breite und Länge desselben; ferner werde durch M der Parallelkreis gelegt, welcher den Meridian von P im Punkte P_1 schneidet. Bezeichnet man dann den konstanten Winkel, welchen die loxodromische Linie mit dem Meridiane einschliesst, mit α , so ist

$$\frac{P_1 M}{PP_1} = \tan \alpha.$$

Da aber $P_1 M = a \cos \varphi \cdot (\lambda_1 - \lambda)$, $PP_1 = a (\varphi_1 - \varphi)$ ist, so hat man die Gleichung

$$(1) \quad \frac{\lambda_1 - \lambda}{\varphi_1 - \varphi} \cos \varphi = \tan \alpha,$$

in welcher $\varphi_1 - \varphi$, sowie $\lambda_1 - \lambda$ bis zur Grenze Null abnehmend zu denken sind.

Um aus der Gleichung (1) eine Gleichung zwischen der Breite φ und der Länge λ abzuleiten, welche gestattet, zu jedem Werthe der einen den zugehörigen der anderen abzuleiten, führen wir eine neue Grösse ω ein, welche wir durch die Gleichung

$$(2) \quad \omega = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}$$

definiren. Bezeichnet man mit ω_1 denjenigen Werth von ω , welcher dem Werth φ_1 entspricht, so findet man

$$\frac{\omega_1 - \omega}{\varphi_1 - \varphi} = \frac{2 \cos \frac{\varphi_1 + \varphi}{2}}{(1 - \sin \varphi_1)(1 - \sin \varphi)} \cdot \frac{\sin \frac{\varphi_1 - \varphi}{2}}{\frac{\varphi_1 - \varphi}{2}},$$

und wenn man hier $\varphi_1 - \varphi$ in Null übergehen lässt, so verwandelt sich, wie schon oft erwähnt, der zweite Faktor der rechten Seite in die Einheit und man erhält

$$\frac{\omega_1 - \omega}{\varphi_1 - \varphi} = \frac{2 \cos \varphi}{(1 - \sin \varphi)^2} = \frac{2 \omega}{\cos \varphi},$$

Multiplicirt man diese Gleichung und die Gleichung (1) oder bestimmter

$$\frac{\omega_1 - \omega}{\varphi_1 - \varphi} = \frac{2 \omega}{\cos \varphi} \text{ mit } \tan \alpha = \frac{\lambda_1 - \lambda}{\varphi_1 - \varphi} \cos \varphi,$$

so verschwindet φ ganz und man erhält die neue Gleichung

$$(3) \quad (\omega_1 - \omega) \tan \alpha = 2 \omega (\lambda_1 - \lambda).$$

Wir wollen uns jetzt das ganze Intervall von $\lambda = 0$ bis zu einem bestimmten Werthe λ in eine sehr grosse Anzahl n gleich grosser Theile getheilt denken; $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n = \omega$ mögen diejenigen Werthe sein, welche den Werthen der Länge

$$0, 1 \cdot \frac{\lambda}{n}, 2 \cdot \frac{\lambda}{n}, \dots, n \cdot \frac{\lambda}{n} = \lambda$$

entsprechen. Statt der Gleichungen (3) kann man dann die folgenden schreiben

$$\begin{aligned}(\omega_1 - \omega_0) \tan \alpha &= 2 \omega_0 \cdot \frac{\lambda}{n}, \\(\omega_2 - \omega_1) \tan \alpha &= 2 \omega_1 \cdot \frac{\lambda}{n}, \\&\vdots \\(\omega_n - \omega_{n-1}) \tan \alpha &= 2 \omega_{n-1} \cdot \frac{\lambda}{n},\end{aligned}$$

die man auch wie folgt umwandeln kann.

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \omega_0 \left(1 + 2 \cot \alpha \cdot \frac{\lambda}{n} \right) \\ \omega_2 &= \omega_1 \left(1 + 2 \cot \alpha \cdot \frac{\lambda}{n} \right) \\ &\dots \\ \omega &= \omega_n = \omega_{n-1} \left(1 + 2 \cot \alpha \cdot \frac{\lambda}{n} \right).\end{aligned}$$

Die Multiplikation dieser n -Gleichungen ergibt sofort

$$(4) \quad \omega = \omega_0 \left(1 + 2 \cot \alpha \cdot \frac{\lambda}{n} \right)^n,$$

wo wir n unendlich gross zu nehmen haben, um ein richtiges Resultat zu erlangen.

Nehmen wir nun als ersten Meridian denjenigen an, in welchem die Loxodromie den Aequator schneidet, setzen also $\varphi = 0$ für $\lambda = 0$, so ergibt sich mittelst der Gleichung (2)

$$(5) \quad \omega_0 = 1.$$

Um ferner die Bedeutung der rechten Seite der Gleichung (4) zu erkennen, wollen wir vorläufig statt des dort stehenden Ausdruckes den einfacheren

$$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

in Betracht ziehen. Da nun nach dem binomischen Lehrsatz allgemein

$$(1 + x)^n = 1 + \frac{n}{1} x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots$$

so kann man vorstehenden Ausdruck für $x = \frac{1}{n}$ in eine Reihe entwickeln, der man die Form geben kann

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n &= 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \\ &+ \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(1 - \frac{2}{n} \right) + \dots\end{aligned}$$

und, wenn man $n = \infty$ setzt, so verschwinden alle die Brüche $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots$ und man erhält

$$(5) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots, n = \infty.$$

Den Werth der rechts stehenden unendlichen Reihe bezeichnet man herkömmlicher Weise mit dem Buchstaben e ; bei wirklicher Ausrechnung erhält man

$$e = 2,71828 \ 18284 \ 59 \dots$$

Was nun den allgemeineren Ausdruck

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

anlangt, so kann man demselben die Form geben

$$\left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{z}}\right)^{\frac{n}{z}}\right]^z$$

und da $\frac{n}{z}$ ebenfalls unendlich gross ist, so ist für $n = \infty$

$$\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{z}}\right)^{\frac{n}{z}} = e$$

und mithin

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z.$$

Für $z = 2 \cot \alpha \cdot \lambda$ erhält man die rechte Seite der Gleichung (4). Mithin ist

$$\omega = e^{2 \cot \alpha \cdot \lambda}$$

oder umgekehrt

$$2 \cot \alpha \cdot \lambda = l \omega,$$

wo das Zeichen l den sogenannten natürlichen Logarithmus bedeutet, dessen Basis die Zahl e ist. Durch Einsetzung des Werthes von ω aus Gleichung (2) ergibt sich schliesslich die gesuchte Gleichung der loxodromischen Linie

$$(6) \quad \lambda = \frac{1}{2} \tan \alpha \ l \ \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} = \tan \alpha \ l \ \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right).$$

Es mag noch besonders daran erinnert werden, dass in dieser Formel λ nicht in Graden, sondern als Bogen auf einem Kreise mit dem Halbmesser 1 angegeben ist, so dass man also $\frac{\pi}{2}$ statt

90° , $\frac{\pi}{4}$ statt 45° schreibt etc.

12. Im Bezug auf die Form der Loxodromie ergeben sich aus der Gleichung (6) sofort zwei Eigenschaften.

Zunächst erkennt man, dass es zu jedem Werthe von φ nur einen einzigen Werth von λ giebt; die Loxodromie schneidet also einen bestimmten Parallelkreis nur ein einziges Mal, indem sie sich, vom Aequator ausgehend, immer weiter von diesem entfernt und dem Pole nähert.

Dagegen kann man einen bestimmten Werth λ um 2π , $2 \cdot 2\pi$, $3 \cdot 2\pi$, \dots , überhaupt um jede beliebige Anzahl ganzer Umläufe vermehren und wird immer einen zugehörigen, im ersten Quadranten liegenden Werth von φ erhalten. Die loxodromische Linie schneidet also den Meridianquadranten unzählige Male, indem sie sich dem Pole immer mehr und mehr in spiralförmigen Windungen nähert.

13. Nach dieser Betrachtung der loxodromischen Linie auf der Kugelfläche kehren wir zu unserer Plattkarte zurück.

Es sei P ein Punkt der Kugel, N der Schnittpunkt seines Meridianes mit dem Aequator, A der Schnittpunkt des ersten Meridianes. Dann ist

$$AN = a\lambda, \quad NP = a\varphi.$$

Die entsprechenden Punkte der Karte mögen P' , N' , A' heissen. Nehmen wir dann an, dass der Aequator der Karte nicht gerade die Abwicklung des Kugeläquators, sondern diejenige eines beliebigen Parallelkreises vom Halbmesser b ist, so haben wir

$$A'N' = x = b\lambda,$$

und $N'P'$ wollen wir mit y bezeichnen, wobei wir uns diese Größen in irgend einer Weise von der Breite φ abhängig denken. Ist dann ψ der Winkel, den eine durch P gehende loxodromische Linie mit dem Meridiane einschliesst, so ist zufolge Gleichung (1), wenn man dort α mit ψ vertauscht

$$(7) \quad \tan \psi = \frac{\lambda_1 - \lambda}{\varphi_1 - \varphi} \cos \varphi, \quad \varphi_1 - \varphi = 0.$$

Wenn man dagegen mit ψ' die Abbildung dieses Winkels bezeichnet, so hat man die Gleichung

$$(8) \quad \tan \psi' = \frac{x_1 - x}{y_1 - y} = \frac{b(\lambda_1 - \lambda)}{y_1 - y}$$

und durch Vergleichung der beiden letzten Gleichungen erhält man weiter

$$(9) \quad \tan \psi' = \frac{b(\varphi_1 - \varphi)}{(y_1 - y) \cos \varphi} \cdot \tan \psi.$$

Bei den quadratischen Plattkarten ist $b = a$ und $y = a\varphi$, folglich

$$(10) \quad \tan \psi' = \sec \varphi \cdot \tan \psi,$$

bei den rechteckigen Plattkarten bleibt b , aber y hat ebenfalls den Werth $a\varphi$, mithin ist

$$(11) \quad \tan \psi' = \frac{b}{a} \sec \varphi \cdot \tan \psi;$$

bei Lambert's isocylindrischer Projektion endlich ist $b = a$ und $y = a \sin \varphi$, mithin

$$\frac{y_1 - y}{\varphi_1 - \varphi} = a \frac{\sin \varphi_1 - \sin \varphi}{\varphi_1 - \varphi}$$

und für $\varphi_1 - \varphi = 0$ geht, wie wir schon oft gesehen haben, die rechte Seite dieser Gleichung in $a \cos \varphi$ über. Sonach hat man für diese Karte.

$$(12) \quad \tan \psi' = \sec^2 \varphi \cdot \tan \psi.$$

Aus diesen Gleichungen ersieht man, dass nur für $\psi = 0^\circ$ oder 90° die beiden Winkel ψ und ψ' gleich sind bei den oben besprochenen drei Karten; dieselben geben also die Winkel gegen den Meridian im Allgemeinen nicht richtig an, eine Bemerkung, die rücksichtlich der quadratischen und rechteckigen Plattkarten im Alterthum schon Ptolemäus gemacht hat und die im Anfange des sechszehnten Jahrhunderts von Martin Cortes und später von Pedro Nunez wiederholt worden ist, bis endlich Mercator die richtige Abhilfe fand.

Uebrigens bemerkt man, dass die Beziehung zwischen ψ' und ψ die allgemeine Form

$$\tan \psi' = k \tan \psi$$

besitzt, woraus (nach §. 10, Nr. 15) folgt, dass die Winkeländerung $\psi' - \psi$ ihren grössten Werth erreicht für

$$\tan \psi = \pm \sqrt{\frac{1}{k}}, \quad \tan \psi' = \pm \sqrt{k}.$$

Auch giebt es zu jedem Winkel ψ einen konjugirten Winkel υ im Sinne der Nr. 15 des §. 10, so dass $\psi = \upsilon = \psi' - \upsilon'$ und zwar ist

$$\tan \psi \tan \upsilon = \frac{1}{k}, \quad \tan \psi' \tan \upsilon' = k.$$

Noch wichtiger aber ist folgende Betrachtung. Bewegt man sich auf der loxodromischen Linie, welche im Punkte P den Meridian unter dem Winkel ψ schneidet, so bleibt ψ unverändert, auch wenn φ sich ändert. In letzterem Falle aber wird $\tan \psi'$ und mithin auch ψ' selbst sich ändern, weil die rechte Seite der Gleichungen (10), (11) und (12) einen von φ abhängigen Faktor hat. Die Abbildung der Loxodromie schneidet also die Abbildungen der verschiedenen Meridiane unter verschiedenen Winkeln und kann folglich keine Gerade sein.

Nur wenn der von φ abhängige Faktor $\sec \varphi$ oder $\sec^2 \varphi$ nahezu unveränderlich ist, was für kleine Werthe von φ , also in der Nähe des Aequators der Fall ist, kann man die Abbildung der Loxodromie annähernd als eine gerade Linie betrachten.

V. Mercator's Projektion.

14. Sonach entsprechen die betrachteten Karten dem Zwecke, zu welchem man sie bestimmt hat, nur annäherungsweise innerhalb eines eng begrenzten Gebietes. Dagegen wird dieser Zweck vollständig erreicht, die Abbildung der Loxodromie wird eine gerade Linie, welche die Abbildungen der Meridiane unter demselben Winkel schneidet, wie die Loxodromie die Meridiane selbst, wenn man y so wählt, dass in Gleichung (9) der Faktor von $\tan \psi$ den Werth 1 erhält. Man kann diese Bedingung in der Form schreiben

$$(13) \quad \frac{y_1 - y}{\varphi_1 - \varphi} \cos \varphi = b.$$

Diese Gleichung hat aber ganz die Form von Gleichung (1), nur dass

y_1 und y statt λ_1 und λ , sowie b statt $\tan \alpha$ gesetzt ist. Auf demselben Wege, wie man von Gleichung (1) auf Gleich. (6) gelangt, lässt sich daher aus (13) der Werth von y ableiten:

$$(14) \quad y = b \lambda \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right),$$

während $x = b \lambda$ ist. Man sieht, dass die Wahl von b statt a nur den Maassstab der Karte ändert.

15. Die erste Karte dieser Art wurde von Gerhard Mercator im August 1569 in Duisburg konstruirt. Wiewohl Mercator keine ausführliche Theorie dieser Projektionsart gegeben hat, so hat er doch das Princip derselben vollständig bestimmt und klar in den Worten ausgedrückt: „*Gradus latitudinum versus utrumque polum auximus pro incremento parallelorum supra rationem, quam habent ad aequinoctialem.*“ (Wir lassen die Breitengrade in demselben Grade wachsen, wie die Parallelkreise grösser sind, als dem Verhältnisse entspricht, in welchem sie zum Aequator stehen). Um diese Erklärung zu verstehen, erinnere man sich, dass ein Parallelkreis gleich ist dem Aequator multiplicirt mit $\cos \varphi$; macht man nun auf der Karte den Parallelkreis ebenso lang, wie den Aequator, so vergrössert man ihn im Verhältnisse von $1 : \sec \varphi$; und in demselben Maasse hat man nach Mercators Vorschrift den Meridiangrad von der Breite φ zu vergrössern im Verhältnisse zum Aequatorgrade.

Natürlich ist die Konstruktion nur angenähert, wenn man auf die angedeutete Weise die Vergrösserung nur von Grad zu Grad ändert; bei weitem genauer wird das Netz, wenn man von Minute zu Minute fortgeht und die absolute Länge einer Minute von der Breite φ gleich setzt der Länge einer Minute auf dem Aequator, multiplicirt mit $\sec \varphi$.

Uebrigens führt die Gleichung (13) ohne weiteres auf diese Formel, wenn man $\varphi_1 - \varphi$ nicht gleich Null setzt, sondern als eine Minute annimmt; dann ist $y_1 - y$ eine Meridianminute, und wenn man die Gleichung in der Form

$$y_1 - y = b \cdot 1' \cdot \sec \varphi$$

schreibt, so drückt $b \cdot 1'$ eine Aequatorminute aus und man hat genau die vorstehende Regel.

Diese Regel ist zuerst von dem Engländer Eduard Wright in seinem Werke *Certain Errors in Navigation detected and corrected. London 1589*, angegeben worden, wo sich auch eine Tafel der Werthe von y , von Minute zu Minute fortschreitend findet. Man hat deswegen irrthümlich Wright bisweilen als den Erfinder dieser Karten bezeichnet, wiewohl derselbe in der Vorrede des erwähnten Werkes ausdrücklich angeibt, dass er seine Regel von der Karte Mercators abgeleitet hat.

Die richtige Formel zur Berechnung von y hat zuerst Henry Bond im Jahre 1645 angegeben.

16. Da überall $\psi = \psi'$ ist, so sind überhaupt alle Winkel auf der Karte den entsprechenden Winkeln auf der Erdoberfläche gleich, die Karte liefert also eine konforme Abbildung. Wir werden daher der Mercator-Projektion im fünften Kapitel nochmals begegnen, wo wir auch die Abplattung der Erde berücksichtigen werden.

Um die Linearvergrößerung κ für einen Punkt der Breite φ zu finden, haben wir das Meridianelement auf der Karte gleich $y_1 - y$, auf der Kugel dagegen $a (\varphi_1 - \varphi)$, und mithin ist, weil die Vergrößerung um einen Punkt herum der Konformität wegen nach allen Richtungen gleich ist,

$$\kappa = \frac{y_1 - y}{a (\varphi_1 - \varphi)} \text{ für } \varphi_1 - \varphi = 0.$$

Wir wissen aber, dass die rechte Seite den Werth $\sec \varphi$ hat. Mithin ist

$$\kappa = \sec \varphi.$$

Die Flächenvergrößerung hat demnach den Werth $\sec^2 \varphi$.

Rücksichtlich der Verwendung ist zu bemerken, dass die Karten nach Mercators Projektion gegenwärtig bei den Seefahrern allgemein im Gebrauche sind. Da sie konform sind, also eine in den kleinsten Theilchen dem Originale ähnliche Abbildung geben und die Formen nicht verzerren, so eignen sie sich auch zu physikalischen Uebersichtskarten sehr gut; nur ist hier in manchen Fällen der Uebelstand störend, dass diese Karten sich nicht bis an die Pole fortsetzen lassen. Da nämlich $\tan 90^\circ = \infty$ ist, so ist für $\varphi = 90^\circ$ auch $y = \infty$. Die Grade werden daher in hohen Breiten sehr gross und man muss die Karte schliesslich abbrechen. Bei den gewöhnlichen Seekarten sind aber gerade die Partien in der Nähe der Pole am ehesten entbehrlich, da ja jenseits des 83. Grades der Breite unsere Kenntniss der Erdoberfläche ohnedies vorläufig aufhört.

17. In folgender Tabelle geben wir die Werthe von y , von 5 zu 5° fortschreitend für $a = 1$.

Werthe von $y = l \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)$.

φ	y	φ	y
0°	0	50°	1,01
5	0,0874	55	1,1542
10	0,1754	60	1,3170
15	0,2648	65	1,5065
20	0,3564	70	1,7354
25°	0,4509	75	2,0276
30	0,5493	80	2,4362
35	0,6528	85	3,1313
40	0,7629	90	∞
45	0,8814		

VI. Aequivalente Cylinderprojektion einer Kugelzone.

18. Wenn es sich um die Abbildung einer Kugelzone handelt, deren mittlerer Parallelkreis die Breite ψ besitzt und also den Umfang

$$2a\pi\cos\psi$$

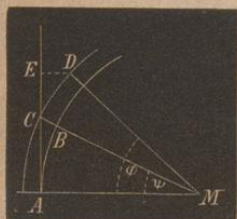
hat, so kann man sich einen normalen, der Erdachse parallelen Cylinder denken, dessen Basis jener Kreis ist und man kann nun eine Kugelzone, die sich von der Breite ψ bis zur Breite φ erstreckt, durch eine cylindrische Zone von der Höhe y repräsentiren. Es ist dann

$$\begin{aligned} \text{die Fläche der Cylinderzone} &= 2a\pi\cos\psi \cdot y, \\ \text{,, ,, ,, Kugelzone} &= 2a^2\pi(\sin\varphi - \sin\psi) \\ &= 4a^2\pi\sin\frac{\varphi - \psi}{2}\cos\frac{\varphi + \psi}{2}. \end{aligned}$$

Stellt man nun die Bedingung der Aequivalenz, der Gleichzeit der Kugel- und Cylinderzone, so erhält man für y die Formel

$$y = \frac{a(\sin\varphi - \sin\psi)}{\cos\psi} = \frac{2a\sin\frac{\varphi - \psi}{2}\cos\frac{\varphi + \psi}{2}}{\cos\psi}.$$

Fig. 50.



Der mittlere Parallelkreis wird natürlich in seiner wahren Grösse dargestellt, die Meridiane dagegen erscheinen als äquidistante, parallele Gerade.

Den Werth y kann man übrigens leicht konstruiren. Ist in Fig. 50 $MA = a$, $\angle AMB = \psi$ und verlängert man die in A auf MA errichtete Senkrechte bis zum Schnittpunkte C mit dem verlängerten Halbmesser MB , so ist

$$MC = \frac{a}{\cos\psi},$$

und wenn man nun mit MC als Halbmesser einen Kreis um M schlägt, $\angle AMD = \varphi$ macht und DE parallel zu MA zieht, so ist $CE = y$.

§. 14.

Fortsetzung.

I. Allgemeines.

1. Im vorhergehenden Paragraphen haben wir eine Anzahl Cylinderprojektionen kennen gelernt, bei denen die Cylinderachse mit der Achse der Erd- oder Himmelskugel zusammenfällt. Es giebt aber noch analoge Darstellungen, bei denen als Achse des Cylinders irgend ein Durchmesser des Aequators oder auch irgend ein beliebiger Durchmesser der Kugel angenommen wird. Im gegenwärtigen Paragraphen sollen einige derartige Abbildungsweisen näher besprochen werden.

2. Wir wollen zunächst annehmen, ein Durchmesser BB_1 des Aequators sei die Achse des Cylinders und letzterer berühre die Kugel längs des Meridianes, der von B und B_1 um 90° absteht.

Die Abbildung dieses Meridianes, des ersten Meridianes, ist eine gerade Linie, die Achse der y , deren Theile gleich den Theilen des Meridianes selbst sind.

Der Aequator erscheint als eine auf der vorigen senkrechte Gerade, als Achse der x .

Legt man auf der Kugel durch die Endpunkte B und B_1 des Aequatordurchmessers, welcher die Cylinderachse bildet, grösste Kreise, etwa von 10 zu 10 Grad, so erscheinen dieselben in der Abbildung als Gerade, die parallel zur x -Achse gehen und gleichweit von einander abstehen.

Legt man ferner Kreise auf der Kugel, welche zum Aequator parallel gehen, so erscheinen diese als Gerade, welche parallel zur y -Achse gehen.

3. Es geht hieraus hervor, dass ein Punkt der Kugel als Durchschnitt zweier Kreise erscheint, die analog den Meridianen und Parallelkreisen liegen, nur dass an die Stelle des Aequators der erste Meridian getreten ist.

Es sei in Fig. 51 M der Mittelpunkt der Kugel vom Halbmesser a , AQ ein Quadrant des ersten Meridianes, AB ein Quadrant des Aequators. Ist nun P ein beliebiger Punkt des abgebildeten Kugeloktanten, so hat man zu seiner Bestimmung nach alter Weise

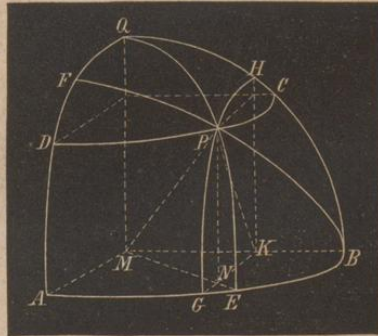


Fig. 51.

den durch P gehenden Meridian QE und den Parallelkreis CD und die Koordinaten sind

die Breite $EP = AD = \varphi$ und

die Länge $DP = AE = \lambda$.

Nach der neuen Weise ist aber P bestimmt mittels des durch B und P gehenden grössten Kreises BF und des zum ersten Meridiane parallelen Kreises GH ; Koordinaten sind

$FP = AG = \varphi_1$ und $GP = AF = \lambda_1$.

4. Um ein Paar Formeln zur Verwandlung der neuen Koordinaten in die alten und umgekehrt zu erhalten betrachten wir die von P auf die Aequatorebene gefällte Senkrechte PN , welche man zunächst aus dem rechtwinkligen Dreiecke MPN mittelst der Formel

$$PN = MP \sin EMP = a \sin \varphi$$

erhalten kann. Andererseits ist aber auch im rechtwinkligen Dreiecke PKN

$$PN = KP \sin GKP = KP \sin \lambda_1,$$

und da im rechtwinkligen Dreiecke MPK

$KP = MP \sin BP = a \sin (90^\circ - \varphi_1) = a \cos \varphi_1$
 ist, so hat man auch

$$PN = a \cos \varphi_1 \sin \lambda_1.$$

Die Gleichsetzung beider Werthe von PN giebt

$$\sin \varphi = \cos \varphi_1 \sin \lambda_1.$$

Aus der vollständigen Analogie zwischen φ und λ einer- und φ_1 und λ_1 andererseits folgt, dass auch

$$\sin \varphi_1 = \cos \varphi \sin \lambda$$

ist. Aus diesen zwei Gleichungen entwickelt man noch durch einfache Rechnung

$$\cot \lambda = \cos \lambda_1 \cot \varphi_1$$

$$\cot \lambda_1 = \cos \lambda \cot \varphi$$

und hat nunmehr die Transformationsformeln

$$(1) \quad \begin{cases} \sin \varphi_1 = \cos \varphi \sin \lambda, & \sin \varphi = \cos \varphi_1 \sin \lambda_1 \\ \cot \lambda_1 = \cos \lambda \cot \varphi, & \cot \lambda = \cos \lambda_1 \cot \varphi_1. \end{cases}$$

Nach diesen Vorbereitungen gehen wir gleich zur Besprechung einiger hierher gehörigen Projektionen über.

II. Die Cassini'sche Projektion.

5. Diese Projektion ist von dem Astronomen *César-François Cassini de Thury* (1714 — 1784) bei der grossen Karte von Frankreich in Anwendung gebracht worden, die unter seiner, seines Sohnes Jean Dominique und Maraldi's Leitung im Jahre 1745 begonnen und 1793 von dem jüngeren Cassini vollendet wurde.*)

Es ist verhältnissmässig leicht, die Richtung eines Meridianes auf der Erde anzugeben und ebenso kann man ohne grosse Schwierigkeit eine Linie senkrecht zu diesem Meridiane angeben. Letztere liegt aber in dem grössten Kreise, der senkrecht auf dem Meridiane steht, im sogenannten ersten Vertikalkreise des Schnittpunktes beider Kreise. Der Parallelkreis berührt diesen Vertikalkreis nur in einem Punkte. Wenn man nun (**Fig. 51**) auf einem festen Meridiane, den man als ersten annimmt, den Bogen $AF = \lambda_1$ und auf dem ersten Vertikal von F den Bogen $FP = \varphi_1$ misst, so ist der Ort P bestimmt. Statt des Punktes A des Aequators kann man auch irgend einen anderen festen Punkt O des ersten Meridianes annehmen und von ihm aus die Koordinaten bis zum Punkte F messen.

Cassini nahm als ersten Meridian den durch die Pariser Sternwarte gehenden an, diese Sternwarte selbst bildete den Anfangspunkt O für die Messung der Koordinaten auf dem ersten Meridiane. Auf der Karte erscheint der erste Meridian als gerade Linie (y -Achse) und die darauf senkrechten Bögen grösster Kreise erscheinen als senkrechte Gerade; die Koordinaten OF und FP jedes Punktes P sind nach ihrem richtigen Grössenverhältniss, im Verhältnisse 86400 : 1 verkleinert, auf der Karte dargestellt. Letz-

*) *Carte géométrique de la France. 184 flls. 1750 — 1793. Paris, Longuet.*
 (Maassstab $\frac{1}{86400}$.)

tere enthält gar keine Meridiane und Parallelkreise, sondern nur die beiden Systeme sich rechtwinklig kreuzender Geraden.

6. Es ist leicht von den Koordinaten der Cassini'schen Karte auf die Länge und Breite überzugehen.

Ist φ_0 die geographische Breite des Anfangspunktes O und wird der Bogen OF mit y bezeichnet (und auf der Karte durch die geradlinige Strecke y dargestellt), so ist $\varphi_0 + y$ identisch mit der Grösse $AF = \lambda_1$ unserer Formel (1), wogegen $FP = x$ mit φ_1 zusammenfällt. Wir haben daher die Formeln

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin x = \cos \varphi \sin \lambda \\ \cot(\varphi_0 + y) = \cos \lambda \cot \varphi. \end{array} \right.$$

Aus diesen zwei Gleichungen erhält man durch Elimination von λ die Gleichung der Abbildung des Parallelkreises von der Breite φ

$$(3) \quad \sin^2 x + \cot^2(\varphi_0 + y) \sin^2 \varphi = \cos^2 \varphi$$

und durch Elimination von φ ergibt sich die Gleichung der Abbildung des Meridianes von der Länge λ

$$(4) \quad [\cos^2 \lambda + \cot^2(\varphi_0 + y)] [\sin^2 \lambda - \sin^2 x] = \sin^2 \lambda \cos^2 \lambda.$$

Meridiane wie Parallelkreise stellen sich daher auf der Karte als transcendente Linien dar.

7. Wie man sieht, ist diese Projektion im Grunde nichts weiter als eine quadratische Plattkarte, nur dass der Aequator durch den ersten Meridian ersetzt ist. Man darf daher diese Darstellungsweise, will man nicht in grobe Fehler verfallen, nur auf eine verhältnissmässig schmale Zone zu beiden Seiten des ersten Meridians beschränken.

Setzen wir ausserdem noch voraus, dass auch in der Richtung des ersten Meridianes die Karte nur eine geringe Ausdehnung besitzt, so nehmen die vorstehenden Gleichungen eine etwas einfachere Gestalt an.

In den Formeln (2) und (4) ist der Erdhalbmesser $= 1$ gesetzt worden; setzen wir ihn $= a$, so müssen wir $\frac{x}{a}$ und $\frac{y}{a}$ an die Stelle von x und y in diese Formeln einsetzen. Unter der Annahme, dass sowohl x als $\varphi - \varphi_0$ sehr klein sind, werden aber auch $\frac{x}{a}$ und $\frac{y}{a}$ sehr kleine Brüche sein, und man kann dann in den vorstehenden Formeln

$$\begin{array}{llll} \text{statt} & \sin x & \cos x & \tan y \\ \text{schreiben} & \frac{x}{a} & 1 - \frac{1}{2} \frac{x^2}{a^2} & \frac{y}{a}. \end{array}$$

Setzt man diese Werthe ein, so ergeben sich nach einigen einfachen Entwicklungen, bei denen höhere Potenzen von $\frac{x}{a}$ und $\frac{y}{a}$ als die zweite vernachlässigt werden, anstatt (3) und (4) die beiden Formeln

$$(3a) \quad (y - a \cot \varphi_0)^2 + x^2 = a^2 \cot \varphi_0 [\cot \varphi_0 + 4 \sin \frac{1}{2}(\varphi - \varphi_0)].$$

$$(4a) \quad (y + a \tan \varphi_0)^2 + 2a \sec \varphi_0 \cot \lambda \cdot x = a^2 (2 + \tan^2 \varphi_0).$$

Man sieht daraus, dass man für kleine x und y die Abbildungen der Parallelkreise als kreisförmig, die der Meridiane als Parabelbögen ansehen darf.

III. Lambert's isocylindrische Transversal-Projektion.

8. Dieselbe bildet das Seitenstück zu der unter III. des vor. §. behandelten Lambert'schen Projektion, nur dass an die Stelle des Aequators der erste Meridian tritt.

Rechnen wir die y und x vom Durchschnittspunkte der beiden Geraden an, die den ersten Meridian und den Aequator darstellen, so ist (zufolge III. des vor. §.)

$$y = \lambda_1 \quad \text{und} \quad x = \sin \varphi_1,$$

wenn der Radius a der Kugel als Einheit genommen wird. Mittelst der Gleichungen (1) erhält man sonach

$$(8) \quad \cot y = \cos \lambda \cot \varphi \quad \text{und} \quad x = \cos \varphi \sin \lambda.$$

In den beiden nachstehenden Tabellen sind die diesen Formeln entsprechenden Werthe von x und y angegeben.

Mittelst der in dieser Tafel angegebenen Werthe von x und y lässt sich das Netz auf **Taf. III, Fig. XVI** zeichnen.

9. Aus den Gleichungen (8) erhält man durch Elimination von φ , beziehentlich von λ die Gleichungen der Abbildungen des Meridianes von der Länge λ

$$(9) \quad x^2 (1 + \cos^2 \lambda \tan^2 y) = \sin^2 \lambda$$

und des Parallelkreises von der Breite φ

$$(10) \quad \tan^2 y (\cos^2 \varphi - x^2) = \sin^2 \varphi.$$

Beide Kurven sind hiernach transcendent. Man erkennt aber aus den beiden Gleichungen, dass beide Kurven symmetrisch sind zur x - wie zur y -Achse; man kann also die vier Punkte, welche die gleiche südliche oder nördliche Breite und dieselbe östliche oder westliche Länge besitzen, auf einmal zeichnen. Der Meridian von $\pm 90^\circ$ stellt sich ferner in Form zweier zum Aequator parallelen Geraden dar, welche die Parallelkreise und die Meridiane symmetrisch theilen. Wenn man die ganze Erdoberfläche darstellt, wie unser Netz, **Fig. XVI**, es thut, so erscheint die Abbildung in vier immer paarweise symmetrische Figuren getheilt; die oberste und unterste Begrenzungslinie bildet wieder der Aequator. Der Mittelmeridian (erste Meridian) wird durch die Parallelkreise in gleiche Abschnitte getheilt; ausserdem erkennt man aus der Vergleichung der obersten Horizontal- und der letzten Vertikalreihe in der Tabelle für x , dass der Meridian von 90° in derselben Weise wie der Aequator getheilt wird. Die Aequatorgrade nehmen von der Mitte aus bis zu 90° Länge ab; an der ersteren Stelle sind sie den Breitengraden gleich, bei 90° Länge dagegen Null.

10. Aus dem vorigen Paragraphen wissen wir, dass diese Darstellungsweise äquivalente oder flächengleiche Abbildungen giebt.

Wir haben dort auch gesehen, wie die Winkel geändert werden. Ist ψ der Winkel, den eine gewisse Richtung mit dem durch die beiden Aequatorpunkte B und B_1 und durch den Punkt mit den sphärischen Koordinaten φ_1 und λ_1 gehenden grössten Kreise einschliesst, so ist die Abbildung ψ' dieses Winkels durch die Gleichung bestimmt

$$\tan \psi' = \sec^2 \varphi_1 \cdot \tan \psi$$

[vergl. Nr. 13 des vorigen §., Gleich. (12)].

Man sieht hieraus, dass nur für $\varphi_1 = 0$ die Winkel ψ und ψ' einander gleich sind; also längs des ersten Meridianes werden die Winkel nicht geändert.

Für jeden andern Werth von φ_1 ist ψ' grösser als ψ und zwar ist die Differenz $\psi' - \psi$ am grössten, wenn

$$\tan \psi = \pm \cos \varphi_1, \quad \tan \psi' = \pm \sec \varphi_1$$

ist. Ausserdem giebt es zu jeder Richtung ψ eine konjugirte ν , so dass $\psi - \nu = \psi' - \nu'$ ist, und zwar ist

$$\tan \psi \tan \nu = \sec^2 \varphi_1.$$

11. Aus dem, was über die Aenderung der Winkel gesagt worden, ergibt sich, dass die Darstellungsweise vorzugsweise in der Nähe des ersten Meridianes brauchbar ist. Sie eignet sich also

namentlich zur Abbildung von Ländern, die eine grosse Ausdehnung in der Richtung von Süd nach Nord besitzen und nur eine relativ geringe von Ost nach West, wie dieses beispielsweise mit den amerikanischen Kontinenten der Fall ist. Für diesen Fall ist sie auch von ihrem Urheber, Lambert, empfohlen worden. Zur Darstellung einer ganzen Halbkugel oder auch nur eines Stückes der Erdoberfläche, das sich auf 60° etwa zu jeder Seite des Mittelmeridianes erstreckt, würde sie sich wegen der bedeutenden Verzerrungen, die sich dann nach dem Rande hin geltend machen, nicht mehr eignen.

IV. Lambert's konforme Cylinderprojektion.

12. Es ist dies Nichts weiter, als die Projektion Mercators, angewandt auf die Koordinaten φ_1 und λ_1 anstatt φ und λ . Hier- nach ist, wenn man den Kugelhalbmesser $a = 1$ setzt

$$y = \lambda_1, \quad x = l \tan \left(\frac{\pi}{4} + \varphi_1 \right) = \frac{1}{2} l \frac{1 + \sin \varphi_1}{1 - \sin \varphi_1},$$

und wenn man auf diese Gleichungen die Transformationsformeln (1) anwendet, so erhält man sofort die beiden Gleichungen

$$(11) \quad \cot y = \cos \lambda \cot \varphi, \quad x = \frac{1}{2} l \frac{1 + \cos \varphi \sin \lambda}{1 - \cos \varphi \sin \lambda}.$$

Die folgenden beiden Tafeln geben uns die Werthe von x und y , welche verschiedenen Längen und Breiten entsprechen.

13. Die Abbildung, welche eine derartige Karte giebt, ist, wie bei Mercator's Projektion, konform; es wird also die Aehnlichkeit in den kleinsten Theilchen gewahrt. Die Linearvergrößerung in einem Punkte mit der Koordinate φ_1 ist (zufolge Nr. 15 des vorigen §.)

$$\kappa = \frac{1}{\cos \varphi_1},$$

d. i. zufolge der Gleich. (1) dieses Paragraphen

$$\kappa = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi \sin^2 \lambda}}.$$

Für kleine Werthe von λ ist dieser Werth nicht zu sehr von der Einheit verschieden, mit wachsenden Werthen von λ aber nimmt er rasch zu und ist bei $\lambda = 90^\circ$ gleich $\sec \varphi$.

Diese Projektion eignet sich daher, wie die vorige, vorzugsweise zur Darstellung grosser, in der Richtung von Nord nach Süd sich erstreckender Gebiete der Erdoberfläche, die aber nur eine relativ geringe Ausdehnung von Ost nach West besitzen. Den Hauptvorzug der Mercator's-Projektion, dass die Loxodrome als gerade Linie erscheint, besitzt diese Lambert'sche Darstellungsweise nicht, sie entspricht daher nicht den Bedürfnissen der Seefahrer; dagegen giebt sie die Polarregionen in ganz brauchbarer Weise wieder.

Die Fig. XVII zeigt uns das Gradnetz, auf Grund vorstehender Tabellen mittels der Koordinaten x und y zu konstruieren.

V. Die Cylinderprojektion von I. Wetch.

14. Wenn man einen Cylinder um die Kugel legt, der dieselbe längs des Aequators berührt und vom Mittelpunkte als Projektionscentrum aus die Meridiane und Parallelkreise auf diesen Cylinder projicirt, denselben darauf abwickelt, so erscheinen die Parallelkreise in der Abbildung als parallele Gerade, deren Abstand vom Aequator durch die Gleichung

$$y = \tan \varphi$$

bestimmt ist, wenn der Kugelhalbmesser $a = 1$ gesetzt und mit φ die Breite bezeichnet wird, während der Meridian von der Länge λ durch eine senkrechte Gerade repräsentirt wird, deren Abstand von der Abbildung des ersten Meridianes

$$x = \lambda$$

ist. Diese Abbildungsweise ist weder äquivalent noch konform, sie hat überhaupt keinerlei Vorzüge, ausser der Leichtigkeit ihrer Konstruktion und würde sich nur zur Darstellung einer schmalen Aequatorialzone eignen.

Diese Projektion ist von I. Wetch in Vorschlag gebracht worden mit der Modifikation, dass er die Berührung längs eines Meridianes stattfinden lassen will. Es wird dann

$$x = \tan \varphi_1 \text{ und } y = \lambda_1,$$

mithin zufolge Gleich. (1)

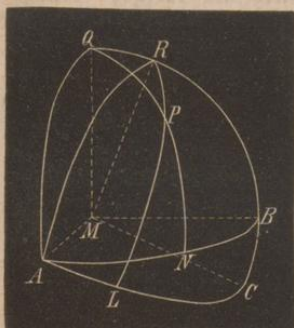
$$(12) \quad x = \frac{\cos \varphi \sin \lambda}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi \sin^2 \lambda}}, \quad y = \text{Arc cot} (\cos \lambda \cot \varphi).$$

Wir haben diese Projektion nur der Vollständigkeit halber erwähnt.

VI. Abbildung einer gegen den Aequator geneigten Zone.

15. Wenn man eine von zwei Parallelkreisen begrenzte Kugelzone darzustellen hat, die aber weder mit dem Aequator, noch mit einem Meridian parallel liegt, so kann man sich einen grössten Kreis denken, der mit der Zone parallel geht, längs desselben einen Cylinder um die Kugel beschreiben und auf diesem Cylinder die Kugel abbilden.

Fig. 52.



In Fig. 52 stelle AB einen Quadranten des Aequators, AQ einen solchen des ersten Meridianes, AC einen Quadranten des grössten Kreises, der mit dem Aequator einen Winkel ν einschliesst, AR einen Quadranten des darauf senkrechten grössten Kreises vor. Ein Punkt P kann dann bestimmt werden

entweder durch die Koordinaten

$$AN = \lambda \text{ und } NP = \varphi$$

oder durch die Koordinaten

$$AL = \lambda_1 \text{ und } LP = \varphi_1.$$

In dem sphärischen Dreiecke PQR ist dann

$$PQ = 90^\circ - \varphi, \quad PR = 90^\circ - \varphi_1, \quad QR = \nu,$$

$$\angle PQR = 90^\circ - \lambda, \quad \angle QRP = 90^\circ + \lambda_1$$

und man hat daher den beiden ersten Fundamentalsätzen der sphärischen Trigonometrie (erweiterter Pythagoreischer und Sinus-Satz) zufolge die zwei Formeln

$$(13) \quad \begin{cases} \sin \varphi_1 = \cos \nu \sin \varphi + \sin \nu \cos \varphi \sin \lambda \\ \cos \lambda_1 = \frac{\cos \lambda \cos \varphi}{\cos \varphi_1} \end{cases}$$

Wenn man $\nu = 90^\circ$ annimmt, so geht die erste dieser Formeln ohne Weiteres in die erste der Formeln (1) über und aus der andern erhält man nach leichter Transformation die zweite der Gleichungen (1).

Wenn man nun auf dem längs AC umschriebenen Cylinder ein Stück der Kugeloberfläche abbildet, so erscheint die geradlinige Abwicklung von AC als x -Achse, die darauf senkrechte geradlinige Abbildung von AR als y -Achse und man erhält die rechtwinkligen Koordinaten x und y so wie im vorigen Paragraphen besprochen worden, mittels φ_1 und λ_1 ausgedrückt. Mittels der Gleichungen (13) kann man diese sphärischen Koordinaten durch φ und λ ersetzen.

16. Für die quadratische Plattkarte $x = \lambda_1$, $y = \varphi_1$ erhält man so

$$(14) \quad \begin{cases} \sin y = \cos \nu \sin \varphi + \sin \nu \cos \varphi \sin \lambda \\ \cos x = \frac{\cos \lambda \cos \varphi}{\sqrt{1 - (\cos \nu \sin \varphi + \sin \nu \cos \varphi \sin \lambda)^2}}, \end{cases}$$

für die äquivalente Projektion Lambert's ist $x = \lambda_1$, $y = \sin \varphi_1$, mithin

$$(15) \quad \begin{cases} y = \cos \nu \sin \varphi + \sin \nu \cos \varphi \sin \lambda \\ \cos x = \frac{\cos \lambda \cos \varphi}{\sqrt{1 - (\cos \nu \sin \varphi + \sin \nu \cos \varphi \sin \lambda)^2}} \end{cases}$$

und für Mercator's Projektion

$$x = \lambda_1, \quad y = \frac{1}{2} l \frac{1 + \sin \varphi_1}{1 - \sin \varphi_1}$$

oder

$$(16) \quad \begin{cases} y = \frac{1}{2} l \frac{1 + \cos \nu \sin \varphi + \sin \nu \cos \varphi \sin \lambda}{1 - (\cos \nu \sin \varphi + \sin \nu \cos \varphi \sin \lambda)} \\ \cos x = \frac{\cos \lambda \cos \varphi}{\sqrt{1 - (\cos \nu \sin \varphi + \sin \nu \cos \varphi \sin \lambda)^2}}. \end{cases}$$

Mittels der aus diesen Formeln berechneten Koordinatenwerthe kann man hinlänglich viele Punkte der Kurven konstruiren, welche die Meridiane und Parallelkreise repräsentiren, und durch gehörige Verbindung dieser Punkte erhält man dann diese Kurve selbst. Freilich bleibt die Berechnung der Koordinaten immer eine sehr umständliche Arbeit, auch wenn man den vorstehenden Formeln durch Einführung von Hilfswinkeln eine für die Rechnung bequemere Gestalt giebt.

§. 15.

Die Kegelprojektion.

I. Allgemeine Bemerkungen.

1. Die Kegelprojektionen sind ganz analog den Cylinderprojektionen: eine bestimmte Zone der Erdkugel, um deren Darstellung es sich handelt, wird ersetzt durch eine Zone auf der Mantelfläche eines normalen Kegels, der entweder die Kugel berührt, oder sie schneidet. Auf die Kegelfläche werden die Kreise, welche sich auf der Erde befinden, nach bestimmten Regeln übertragen, doch immer so, dass die Parallelkreise als parallele Kegelkreise und die Meridiane als gerade Linien, als Erzeugende der Kegelfläche auftreten. Dann wickelt man den Kegelmantel ab, legt ihn in eine Ebene, und nun erscheinen die Parallelkreise als Bögen konzentrischer Kreise, deren gemeinsamer Mittelpunkt die Spitze des Kegels ist; die Meridiane aber stellen sich als gerade Linien dar, welche nach diesem Mittelpunkte konvergiren.

2. Abgesehen von der Einfachheit der Konstruktion solcher Karten, haben sie noch die Vortheile,
 dass die rechtwinklige Lage der Parallelkreise und Meridiane und ebenso die parallele Lage der Parallelkreise gewahrt bleibt,
 und dass gleiche Winkel zwischen Meridianen oder gleiche Unterschiede in der geographischen Länge auch auf der Karte gleich gross, wenn auch nicht in wahrer Grösse, erscheinen.
3. Da übrigens die Parallelkreise auf dem Kegel an Grösse abnehmen, wenn man sich der Spitze nähert, ähnlich wie dieselben auch auf der Kugel mit der Annäherung an den Pol kleiner werden, so ist von Haus aus einleuchtend, dass man bei der Kegelprojektion mehr Mittel zur möglichst genauen Darstellung in der Hand hat, als bei der Cylinderprojektion.

II. Die Abwicklung des Tangentialkegels.

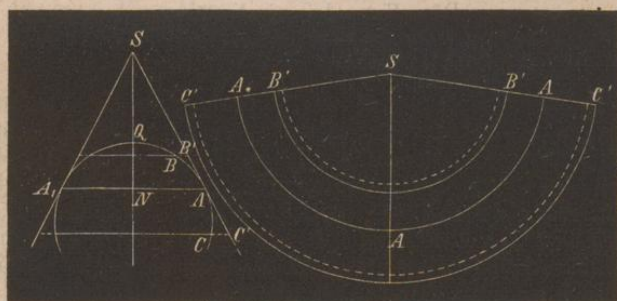
4. Man nimmt einen normalen Kreiskegel an, welcher die Kugel längs des Mittelmeridianes der abzubildenden Zone berührt; dann verlängert man die Ebene der Parallelkreise und Meridiane bis zum Durchschnitt mit der Mantelfläche des Kegels und wickelt zuletzt die letztere ab.

Fig. 53 zeigt hinlänglich deutlich dieses Verfahren und sein Ergebniss. AA_1 bedeutet in dem linken Theile der Figur den Durchmesser des mittleren Parallelkreises von der Breite φ_1 , AS und A_1S sind die beiden Erzeugenden des Berührungskegels, welche in der Ebene des Meridianes AQA_1 liegen. Der mittlere Parallelkreis, der in seiner wahren Ausdehnung in der Abwicklung erscheint, ist mit dem Halbmesser

$$(1) \quad AS = a \cot \varphi_1$$

beschrieben. Der Winkel am Centrum S des Sektors, den die Abwicklung der Mantelfläche bildet, ist (vergl. die Fig. links)

Fig. 53.



$$360^\circ \cdot \frac{AN}{AS} = 360^\circ \sin \varphi_1.$$

Wenn also zwei Meridiane auf der Kugel den Winkel λ einschliessen, so bilden die beiden Halbmesser der Abwicklung, die ihnen entsprechen, einen Winkel

(2)

$$\lambda \cdot \sin \varphi_1$$

miteinander. Die Abbildungen der Parallelkreise sind übrigens mit Ausnahme des mittleren, sämmtlich grösser als die Originale auf der Kugel, was schon daraus folgt, dass die Kugel innerhalb des Kegels liegt, und auch die Abschnitte, welche die Parallelkreise auf den Meridianen bilden, werden in der Karte unrichtig angegeben.

5. Dem letzteren Uebelstande begegnet man indessen durch eine einfache Modifikation der Konstruktion.

Man trägt nämlich auf einem der Meridiane, z. B. auf dem mittelsten von A aus nach Süd und Nord die wahren Längen der Meridianbögen ab und legt dann durch die so erhaltenen Punkte Kreisbögen, deren Mittelpunkt S ist. Diese letzteren, in der **Fig. 53** rechts punktirt dargestellt, sind dann die Abbildungen der Parallelkreise, während die Meridiane ungeändert bleiben.

Damit wird gleichzeitig auch dem anderen Uebelstande, dass nämlich die Parallelkreise zu lang werden, bis zu einem gewissen Grade abgeholfen.

Der Radius, mit welchem die Abbildung des Parallelkreises von der Breite φ konstruirt wird, beträgt jetzt

$$(3) \quad \rho = a [\cot \varphi_1 - (\varphi - \varphi_1)]$$

und die lineare Ausdehnung dieses Kreisbogens ist

$$(4) \quad u' = 2 \rho \pi \sin \varphi_1 = 2 a \pi [\cos \varphi_1 - (\varphi - \varphi_1) \sin \varphi_1].$$

Da nun der Umfang des Parallelkreises auf der Kugel

$$u = 2 a \pi \cos \varphi$$

ist, so hat der Unterschied $u' - u$ den Werth

$$(5) \quad u' - u = 2 a \pi [\cos \varphi_1 - \cos \varphi - (\varphi - \varphi_1) \sin \varphi_1].$$

In diesen Formeln hat man, wenigstens in der Differenz $\varphi - \varphi_1$, die Grösse φ und φ_1 nicht nach Graden, sondern in Bogenmaass ausgedrückt zu denken, d. h. es bedeutet φ denjenigen Bogen eines Kreises vom Halbmesser 1, dessen Centriwinkel $360^\circ \cdot \frac{\varphi}{2\pi}$ Grad misst. Ist ein Winkel, etwa φ in Graden angegeben, so findet man seine Grösse in Bogenmaass, wenn man die Anzahl seiner Grade mit 0,01745329 multiplicirt.

Da nun $\cos \varphi_1 - \cos \varphi$ nichts weiter bedeutet, als die senkrechte Projektion des Bogens $\varphi - \varphi_1$ auf den Radius, von welchem aus man die Centriwinkel und die Bogen zählt, und da das Bogenelement im Anfange von $\varphi - \varphi_1$ mit jenem Radius den Winkel $90^\circ - \varphi_1$, am Ende aber den Winkel $90^\circ - \varphi$ einschliesst, so liegt der absolute Werth der Differenz $\cos \varphi_1 - \cos \varphi$ zwischen den Grenzen

$$(6) \quad (\varphi - \varphi_1) \sin \varphi \text{ und } (\varphi - \varphi_1) \sin \varphi_1,$$

wo bei der Differenz $\varphi - \varphi_1$ ebenfalls der absolute Werth in Betracht kommt.

Ist nun φ grösser, als φ_1 , so sind beide Differenzen

$$(7) \quad \cos \varphi_1 - \cos \varphi \text{ und } \varphi - \varphi_1$$

positiv und von den beiden Grenzen (6) ist $(\varphi - \varphi_1) \sin \varphi_1$ die kleinere, also

$$\cos \varphi_1 - \cos \varphi > (\varphi - \varphi_1) \sin \varphi_1$$

und mithin die Differenz $u' - u$ positiv.

Ist dagegen φ kleiner als φ_1 , so sind die beiden Differenzen (7) beide negativ, und da φ_1 der grössere Winkel ist, so ist

$$(\varphi_1 - \varphi) \sin \varphi_1$$

die obere der beiden Grenzen, zwischen denen $\cos \varphi - \cos \varphi_1$ liegt; mithin ist

$$\cos \varphi - \cos \varphi_1 - (\varphi_1 - \varphi) \sin \varphi_1$$

negativ, und also die Differenz $u' - u$ auch in diesem Falle positiv.

Man sieht also, dass die Abbildung eines Parallelkreises im Allgemeinen immer grösser ist, als dieser selbst, dass also die Karte in Richtung der geographischen Länge stets die Dimensionen relativ vergrössert. Nur auf dem mittleren Parallelkreise werden die Längengrade in dem richtigen Verhältnisse zu den Breitengraden dargestellt; hier werden daher auch die richtigen Werthe der Winkel gewahrt.

Daraus ergibt sich, dass man derartige Karten, will man nicht zu grosse Fehler erhalten, auf eine schmale Zone einschränken muss, die den Mittelparallelkreis enthält.

6. Bei dieser Darstellungsweise lässt sich übrigens der Abplattung der Erde in sehr einfacher Weise Rechnung tragen. zufolge S. 42 hat nämlich der Halbmesser NA des mittleren Parallelkreises (Fig. 53) den Werth

$$r_1 = \frac{a \cos \varphi_1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi_1}}$$

und mithin ist der Halbmesser des Kreisbogens, welcher in der Abwicklung den mittleren Parallelkreis darstellt,

$$(8) \quad SA = r_1 \operatorname{cosec} \varphi_1 = \frac{a \cot \varphi_1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi_1}}$$

Der Winkel zwischen den beiden äussersten Radien des Sektors, der die Abwicklung des Kegelmantels giebt, hat auch hier den Werth

$$360^\circ \cdot \sin \varphi_1,$$

und die Abbildungen der verschiedenen Parallelkreise findet man nach der im Eingange der Nr. 5 gegebenen Regel, nur muss man diejenigen Bogenlängen abtragen, welche der elliptischen Form der Meridiane zukommen.

7. Als Erfinder der konischen Projektion gilt Claudius Ptolemäus, weil derselbe im 24. Kapitel des ersten Buches seiner Geographie ein Verfahren zur Abbildung der damals bekannten Welt angiebt, was als Abwicklung eines Kegels betrachtet werden kann, der die Erde längs des Parallels von Rhodus (36° nördl. Breite) berührt.

Wird nämlich die Länge eines Meridiangrades als Einheit genommen, so erscheint nach der Konstruktion des Ptolemäus der Parallel von 36° als ein Kreisbogen, dessen Halbmesser 79 Ein-

heiten zählt. Nun ist aber, wenn ein Meridiangrad gleich Eins gesetzt wird, der Halbmesser $a = \frac{360}{2\pi} = 57,30$, und weiter $79 = 1,3788 \cdot 57,30 = 1,3788 \cdot a$; da aber $\cot 36^\circ = 1,3764$ ist, so ist der Halbmesser der Parallelkreis-Abbildung nahezu gleich $a \cot 36^\circ$, entsprechend unserer Formel (1).

Die Meridiangrade trägt Ptolemäus alle von gleicher Länge, als Einheiten auf, und zwar trägt er von dem Parallel von Rhodus aus 36 Theile nach Süden ab, um den Aequator zu erhalten, und $63 - 36$ oder 27 Theile nach Norden, um den Parallel von Thule (63° nördl. Br.) zu bekommen; diese Kreise erscheinen daher als Bogen, deren Halbmesser $79 + 36 = 115$ und $79 - 27 = 52$ Einheiten haben.

Ferner trägt Ptolemäus auf dem Parallel von 36° auf jeder Seite des mittleren Meridianes 18 Bogen von der Länge 4 ab, deren jeder 5 Längengrade darstellt, und vereinigt die so erhaltenen Endpunkte mit dem gemeinsamen Mittelpunkte der Parallelen. Mit andern Worten, er giebt auf dem Parallel von 36° jedem Längengrade die Grösse $\frac{4}{5}$, was nahezu mit $0,8192 = \cos 36^\circ$ übereinstimmt, als derjenigen Länge, die ein solcher Grad wirklich hat.

Durch diese Konstruktion bekommen die Längengrade des Parallels von Thule und des Aequators das Verhältniss $52 : 115$ oder $0,4522 : 1$, während dieses Verhältniss in Wirklichkeit $\cos 63^\circ : 1$ oder $0,4540 : 1$ ist, was nicht erheblich von dem vorigen abweicht. Doch sind die Grade sowohl auf dem Parallel von Thule als auf dem Aequator zu gross im Vergleich zu den Meridiangraden; auf dem Aequator z. B. ist ein Grad $= \frac{4}{5} \cdot \frac{115}{79} = 1,1646$, anstatt dass er der Einheit gleich sein sollte.

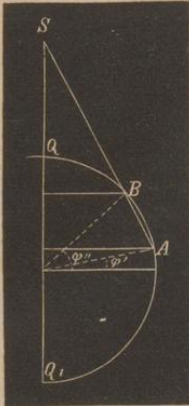
Auf diese Weise erfüllt Ptolemäus, wenn auch nicht in aller Strenge, die beiden Forderungen, die er an die Karte stellt: dass nämlich 1) die einzelnen Längengrade des Parallels von Rhodus in dem richtigen Verhältnisse zur Grösse der Meridiangrade dargestellt werden, und dass 2) die Grade auf dem äussersten Parallel, dem von Thule, zu denen des Aequators in dem richtigen Verhältnisse stehen.

III. Die Kegelprojektion von Mercator.

8. Wenn es sich um die Abbildung einer schmalen Zone handelt, so liegt es nahe, dieselbe auf den Kegel zu übertragen, der durch die beiden äussersten Parallelkreise dieser Zone geht. Wickelt man dann diesen Kegel ab, so erscheinen die Längengrade auf den beiden begrenzenden Parallelkreisen der Zone in ihrer wahren Grösse, die dazwischen liegenden Parallelen aber sind alle verkleinert.

Sind φ' und φ'' die Breiten der begrenzenden Parallelkreise, A und B die Punkte, in denen sie den ersten Meridian schneiden und ist S die Spitze des Kegels (Fig. 54), so ist der Winkel zwischen SA und der Verlängerung der Achse $Q_1 Q = \frac{1}{2}$ (Bog. $Q_1 A - \text{Bog. } BQ) = \frac{1}{2} (\varphi' + \varphi'')$, und da

Fig. 54.



$$SA \sin \frac{1}{2} (\varphi' + \varphi'') = a \cos \varphi' \text{ und}$$

$$SB \sin \frac{1}{2} (\varphi' + \varphi'') = a \cos \varphi''$$

ist, so hat man zur Ermittlung der Halbmesser SA und SB der beiden Parallelkreise die Gleichungen

$$SA = \frac{a \cos \varphi'}{\sin \frac{1}{2} (\varphi' + \varphi'')} \text{ und}$$

$$SB = \frac{a \cos \varphi''}{\sin \frac{1}{2} (\varphi' + \varphi'')}.$$

9. Man hat aber diese Art der Kegelprojektion, die Uebertragung der Erdoberfläche auf einen eingeschriebenen Kreiskegel und Abwicklung der Mantelfläche desselben in eine Ebene, auch zur Darstellung grösserer Stücke der Erdoberfläche, die zwischen weit entfernten Parallelen liegen, benutzt. Durch eine passende

Wahl der beiden Parallelkreise, längs deren dieser Kegel die Kugel schneidet und die daher in der Abwicklung in ihrer wahren Grösse erscheinen, kann man dabei bewirken, dass die Fehler, welche an den Rändern der Karte und gegen die Mitte derselben stattfinden, gewissen Bedingungen genügen. Der Erste, welcher hierauf aufmerksam gemacht hat, ist der berühmte Geograph Gerhard Mercator, den wir schon als Erfinder der nach ihm benannten Seekarten kennen gelernt haben. Bei der grossen Karten von Europa, welche derselbe im Jahre 1554 veröffentlichte, sind die Längengrade auf den Parallelen von 40° und 60° Breite im richtigen Verhältnisse zu den Meridiangraden dargestellt, während sie auf den dazwischen liegenden Parallelen verkleinert, auf den südlich oder nördlich darüber hinaus liegenden aber vergrössert sind.

Ungefähr zwei Jahrhunderte später hat der Franzose Jos. Niclas de l'Isle, erster Astronom der Petersburger Akademie, dieselbe Projektionsmanier wieder in Anwendung gebracht, daher sie auch öfters mit seinem Namen bezeichnet wird. Auf der von demselben im Jahre 1745 publicirten grossen Karte von Russland, die sich vom Parallel von 40° Breite bis zu dem von 70° erstreckt, sind nämlich auf den Parallelen von $47\frac{1}{2}$ Grad und $62\frac{1}{2}$ Grad Breite die Längengrade in ihrem wahren Verhältnisse zu den Meridiangraden abgetragen und die Meridiane, auf denen alle Grade von gleicher Länge sind, erscheinen in Form konvergirender gerader Linien.

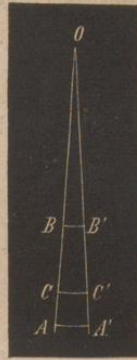
10. Diese Arbeit von de l'Isle hat dem grossen Mathematiker Leonhard Euler Anlass gegeben, zu untersuchen, welche Kegelprojektion man wählen muss, wenn die Vergrösserungen auf den äussersten Parallelkreisen einander gleich sein und auch übereinstimmen sollen, nur im entgegengesetzten Sinne, mit dem extremen Werthe der Verkleinerung gegen die Mitte der Karte hin.

Wir geben hier die Hauptgedanken dieser Euler'schen Arbeit, die im Jahre 1778 veröffentlicht wurde (*De projectione geogra-*

phica de l'Isliana in mappa generali Imperii Russici usitata. — Acta Acad. Petrop. pro anno MDCCLVII, p. 143 ff.).

Es sei φ' die Breite des südlichsten, φ'' diejenige des nördlichsten Parallelkreises; als Längeneinheit wollen wir betrachten die Ausdehnung eines Meridiangrades. Es mag nun in Fig. 55 $AB = a$ ($\varphi'' - \varphi'$) das Stück des ersten Meridianes sein, welches in Form einer geraden Linie zwischen den Abbildungen der beiden extremen Parallelkreise liegt; AA' und BB' mögen die Abbildungen von Bögen von je 1° auf diesen Parallelkreisen sein. Die beiden Geraden AB und $A'B'$ schneiden sich in einem Punkte O , dem gemeinschaftlichen Centrum der Kreisbögen, welche die Parallelkreise repräsentiren sollen. Bezeichnet man OB mit x und den zwischen OA und OA' um O mit Halbmesser 1 beschriebenen Bogen mit ω , so ist

Fig. 55



$$AA' = (x + \varphi'' - \varphi') \omega \text{ und } BB' = x \omega.$$

Da nun die wahre Grösse eines Längengrades auf den Parallelen von der Breite φ' und φ'' durch

$$\cos \varphi' \text{ und } \cos \varphi''$$

ausgedrückt wird, wenn der Meridian- oder Aequatorgrad die Einheit bildet, so sind die Fehler, welche auf den genannten Parallelen auf der Karte begangen werden, gleich

$$(x + \varphi'' - \varphi') \omega - \cos \varphi' \text{ und } x \omega - \cos \varphi''.$$

Nach der ersten von Euler gestellten Forderung sollen aber beide Fehler gleich gross sein; das giebt die Gleichung

$$(x + \varphi'' - \varphi') \omega - \cos \varphi' = x \omega - \cos \varphi'',$$

aus welcher sich ergibt

$$(9) \quad \omega = \frac{\cos \varphi' - \cos \varphi''}{\varphi'' - \varphi'}.$$

In dieser Formel sind φ'' und φ' im Nenner in Graden ausgedrückt, ω aber erhält man in Bogenmaass; will man es statt dessen in Graden haben, so hat man noch mit $57^\circ, 2959$ ($57^\circ 17' 44''$, 8) zu multipliciren, als der Grösse des Centriwinkels, dessen Bogen dem Halbmesser gleich ist.

Das Bemerkenswerthe an der Formel (8) ist der Umstand, dass die Grösse ω nicht abhängt von der Wahl der Parallelkreise, auf deren Abbildungen die Längengrade im richtigen Verhältnisse zu den Meridiangraden stehen.

Ist nun weiter CC' die Abbildung eines Längengrades von der Breite φ , also $CB = \varphi'' - \varphi$, so ist

$$CC' = (x + \varphi'' - \varphi) \omega$$

und da die wahre Länge eines solchen Längengrades gleich $\cos \varphi$ ist, so hat der Fehler, den man begeht, den Werth

$$\delta = (x + \varphi'' - \varphi) \omega - \cos \varphi.$$

Für einen nur wenig grösseren Werth φ_1 , hat man die entsprechende Formel

$$\delta_1 = (x + \varphi'' - \varphi_1) \omega - \cos \varphi_1,$$

und aus diesen beiden Gleichungen folgt

$$\frac{\delta_1 - \delta}{\varphi_1 - \varphi} = -\omega - \frac{\cos \varphi_1 - \cos \varphi}{\varphi_1 - \varphi},$$

in welcher Gleichung $\varphi_1 - \varphi$ in Bogenmaass zu verstehen ist. Lässt man die Differenz $\varphi_1 - \varphi$ in Null übergehen, so wird

$$\frac{\cos \varphi_1 - \cos \varphi}{\varphi_1 - \varphi} = -\frac{\sin \frac{\varphi_1 + \varphi}{2} \cdot \sin \frac{\varphi_1 - \varphi}{2}}{\frac{\varphi_1 - \varphi}{2}} = -\sin \varphi$$

und es geht daher vorstehende Gleichung über in

$$\frac{\delta_1 - \delta}{\varphi_1 - \varphi} = -\omega + \sin \varphi, \quad \varphi_1 - \varphi = 0.$$

So lange $\sin \varphi$ kleiner ist als ω ist die rechte Seite dieser Gleichung negativ, und es ist daher δ_1 kleiner als δ , oder δ nimmt ab; ist aber $\sin \varphi$ grösser als ω , so ist δ_1 grösser als δ , δ nimmt also zu. Den kleinsten Werth von δ erhält man also für den Werth φ_0 von φ , der sich aus der Gleichung

$$(10) \quad \sin \varphi_0 = \omega$$

ergiebt, wo ω in Graden ausgedrückt ist. Nach der weiter oben aufgestellten Gleichung ist dieser Werth

$$\delta_0 = (x + \varphi'' - \varphi_0) \omega - \cos \varphi_0.$$

Da bei der Kegelprojektion in der Mitte Verkleinerung eintritt, so ist dieser Werth von δ negativ. Nach der zweiten Eulerschen Forderung soll nun der positiv gerechnete Werth dieser Aenderung gleich der Vergrösserung auf einem der äussersten Parallelkreise sein. Dies giebt die Gleichung

$$\cos \varphi_0 - (x + \varphi'' - \varphi_0) \omega = x \omega - \cos \varphi'',$$

aus der man

$$(11) \quad x = \frac{\cos \varphi_0 + \cos \varphi''}{2 \omega} - \frac{1}{2} (\varphi'' - \varphi_0)$$

erhält. Bedeutet ferner Q in **Fig. 54** den Pol, ist also $BQ = 90^\circ - \varphi''$, so ist der Abstand z des Poles Q vom Mittelpunkte O durch die Gleichung

$$(12) \quad z = x - (90^\circ - \varphi'')$$

gegeben.

11. Die Gleichungen (9), (10) und (11) oder (12) geben uns alle zur eigentlichen Konstruktion der Karte nöthigen Elemente.

Ist $\varphi' = 40^\circ$ und $\varphi'' = 70^\circ$, so ist zufolge Gleichung (9)

$$\omega = \frac{0,76604 - 0,34202}{30} = 0,014134$$

n Bogenmaass, oder in Gradmaass = $0,014134 \cdot 57^\circ, 2959 = 0,80982$ oder

$$\omega = 48' 35''.$$

Der Winkel φ_0 , für welchen die Verkleinerung am bedeutendsten ist, ergibt sich aus der Gleichung (10) oder

$$\sin \varphi_0 = 0,80982;$$

man findet $\varphi_0 = 54^\circ 4' 40''$. Man sieht, dass dieser Werth ungefähr mit der Breite des mittleren Parallels, 55° , zusammenfällt.

Berechnet man mittels der Formel (11) den Werth x , indem man $\omega = 0,014134$ setzt, so ergibt sich

$$x = \frac{0,58669 + 0,34202}{2 \cdot 0,014134} = \frac{1}{2} (70 - 51,0777) = 32,8538 - 7,9611$$

d. i. $x = 24^\circ, 8927,$

und hieraus folgt schliesslich nach Gleich. (12)

$$z = 4^\circ, 8927 = 4^\circ 53' 34''.$$

Die Grösse eines Längengrades ist hierbei auf dem Parallel von $\varphi' = 40^\circ$

$$(x + \varphi'' - \varphi') \omega = 54,8927 \cdot 0,014134 = 0,77586,$$

und auf dem Parallel von $\varphi'' = 70^\circ$

$$x \omega = 24,8927 \cdot 0,014134 = 0,35184;$$

da nun die Längengrade auf der Erde die Grösse von 0,76604 und beziehentlich 0,34202

besitzen, so beträgt der Unterschied zwischen der Abbildung und der wahren Grösse auf jedem der äussersten Meridiane 0,00982, oder es sind die Längengrade auf dem Parallel von 70° um ungefähr $\frac{1}{78}$, auf dem von 40° aber um ungefähr $\frac{1}{36}$ ihres wahren Werthes vergrößert. Da in der Breite φ_0 dieselbe Aenderung eintritt, wie in den Breiten φ' und φ'' nur im entgegengesetzten Sinne, als Verkleinerung, und da $\cos \varphi_0 = 0,58669$ ist, so findet dort eine Verkleinerung des wahren Werthes des Längengrades um etwa $\frac{1}{59}$ statt.

12. Statt des obigen Werthes von z kann man ohne allzu-grosse Abweichung von den von Euler ausgesprochenen Forderungen auch 5° abnehmen, und unter dieser Voraussetzung ist das Netz auf **Taf. III** in **Fig. XVIII** gezeichnet, welches 180 Längengrade vom Nordpol bis 10° südl. Breite umfasst. Da alle Parallelkreise von demselben Centrum aus beschrieben werden, die Meridiangrade unter sich und ebenso auf jedem Parallel die Längengrade gleich sind, so kann man die Karte leicht weiter fortsetzen. Geht man indessen aus der Zone zwischen 70° und 40° n. Br. heraus, so nehmen die Vergrößerungen beträchtlich zu; z. B. ein Grad des Aequators bekommt die Länge 1,34122, statt der Länge 1, ist also um mehr als den dritten Theil seines wahren Werthes zu gross.

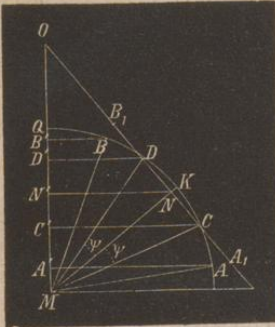
IV. Murdoch's Kegelprojektionen.

13. Der englische Mathematiker Patrick Murdoch (gest. 1774) hat in den *Philosophical Transactions for the year 1758* verschiedene Vorschläge zur Konstruktion konischer Erdkarten gemacht, die hier der Vollständigkeit halber Erwähnung finden mögen, wenn gleich

sie keine bemerkenswerthen Vorzüge besitzen und in ihrer Brauchbarkeit von anderen übertroffen sind.

Murdoch stellt sich bei den verschiedenen Kartenprojektionen, die er vorschlägt, die Aufgabe, eine gewisse Kugelzone so auf einen die Kugel schneidenden Kegel zu übertragen, dass die Gesamtfläche der Zone auch auf der Karte in ihrer wahren Grösse erscheint. Zur Erreichung dieses Zieles hat er aber verschiedene Mittel vorgeschlagen.

Fig. 56.



14. Erste Murdoch'sche Projektion. In Fig. 56 sei M der Mittelpunkt der Kugel mit dem Radius a , AA' und BB' seien die Halbmesser der beiden Parallelkreise von der Breite φ' und φ'' , welche die abzubildende Erdzone begrenzen, der Punkt K , dessen Breite gleich $\frac{1}{2}(\varphi' + \varphi'')$ ist, sei der Mittelpunkt des Bogens AB auf dem Meridiane $ACDBQ$. Ferner soll die Kegelseite den Meridian in den zwei von K gleichweit abstehenden Punkten C und D schneiden, O soll der Scheitel des Kegels sein, KA_1 und KB_1 sind die Abwickelungen der Bögen KA und KB auf die Seite des Kegels.

Bezeichnet man dann noch mit N den Schnittpunkt von MK mit CD und zieht NN' senkrecht zur Achse, so wird die Bedingung, dass die Gesamtfläche in der Abbildung gewahrt bleibe, durch die Gleichung ausgedrückt

$$2 NN' \cdot \pi \cdot \text{Bog. } AB = 2 a \pi \cdot A'B'$$

Bezeichnet man nun jeden der gleichen Winkel DMN und NMC mit ψ , so ist

$$NN' = MN \cdot \cos \frac{1}{2}(\varphi' + \varphi'') = a \cos \psi \cos \frac{1}{2}(\varphi' + \varphi'');$$

andererseits ist aber

$$A'B' = a (\sin \varphi'' - \sin \varphi') = 2 a \cos \frac{\varphi'' + \varphi'}{2} \sin \frac{\varphi'' - \varphi'}{2}$$

und

$$\text{Bog. } AB = a (\varphi'' - \varphi')$$

Sonach geht die obige Gleichung über in

$$\cos \psi = \frac{2}{\varphi'' - \varphi'} \cdot \sin \frac{\varphi'' - \varphi'}{2}$$

wodurch der Winkel ψ bestimmt ist.

Es ist nunmehr auch möglich, den Halbmesser $ON = r$ zu berechnen, mit welchem der mittlere Parallelkreis auf der Karte beschrieben wird. Es ist nämlich

$$r = MN \tan OMN = MN \cot \frac{\varphi' + \varphi''}{2},$$

oder, wenn man für MN seinen Werth

$$MN = a \cos \psi = \frac{2a}{\varphi'' - \varphi'} \cdot \sin \frac{\varphi'' - \varphi'}{2}$$

einsetzt,

$$(13) \quad r = \frac{2a}{\varphi'' - \varphi'} \cdot \sin \frac{\varphi'' - \varphi'}{2} \cdot \cot \frac{\varphi' + \varphi''}{2}.$$

Wickelt man nun den Kegel, dessen Basis der Kreis vom Halbmesser NN' ist, ab, so erhält man einen Sektor, dessen beide begrenzende Radien einen Winkel von

$$360^\circ \cdot \frac{NN'}{NO} = 360^\circ \cdot \sin \frac{\varphi' + \varphi''}{2}$$

mit einander einschliessen. Wenn demnach ein Paar Meridiane auf der Kugel den Winkel λ mit einander bilden, so schliessen die beiden ihnen entsprechenden Geraden auf der Karte den Winkel

$$\lambda \sin \frac{\varphi' + \varphi''}{2}$$

miteinander ein.

Die verschiedenen Parallelkreise erhält man nach der gewöhnlichen Methode, wenn man auf dem mittlern Meridiane von dem Punkte N aus, welcher dem Meridianpunkte K entspricht, nach Nord und Süd die richtigen Längen der Meridianbögen aufträgt und von dem Punkte O aus durch die erhaltenen Punkte Kreisbogen schlägt bis zu den beiden begrenzenden Halbmessern (Meridianen).

15. Diese von Murdoch angegebene Konstruktion der Parallelkreise ist ganz konform dem Verfahren, welches bei den andern bisher betrachteten Kegelprojektionen einhalten wird. Aber es entspricht dieselbe nicht der Bedingung, die Murdoch gleichfalls gestellt hat, dass nämlich die beiden Parallelen, längs deren der Kegel die Kugel schneidet, und welche die Breite

$$\frac{\varphi' + \varphi''}{2} \pm \psi$$

haben, in ihrer wahren Grösse abgebildet werden sollen. Dazu ist nöthig, dass die Abbildungen dieser Kreise mit den Radien OC und beziehentlich OD beschrieben werden, oder, was dasselbe ist, mit den Radien

$$r \mp MC = r \mp a \sin \psi.$$

Setzt man für r seinen Werth

$$a \cos \psi \cot \frac{\varphi' + \varphi''}{2},$$

so erhält man für OC und OD die beiden von Joh. Tobias Mayer (dem jüngeren) angegebenen Formeln

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} OC = a \frac{\cos \left(\frac{\varphi' + \varphi''}{2} + \psi \right)}{\sin \frac{\varphi' + \varphi''}{2}} \\ OD = a \frac{\cos \left(\frac{\varphi' + \varphi''}{2} - \psi \right)}{\sin \left(\frac{\varphi' + \varphi''}{2} \right)}. \end{array} \right.$$

Vergl. J. T. Mayer, Gründl. u. vollst. Anweisung zur Verzeichnung der Land-, See- und Himmelskarten etc. Erlangen 1794 (spätere Ausgabe 1804, 1815 und 1828), Kap. III.

Natürlich können, wenn man zur Konstruktion der erwähnten Parallelkreise sich der vorstehenden zwei Formeln bedient, die Meridiangrade nicht alle gleich gross genommen werden; vielmehr werden dieselben in der Mitte kleiner als nach dem Rande hin ausfallen, weil der mittlere Bogen CD durch die gerade Linie CD repräsentirt wird. Will man dies zulassen, so bedarf es dann noch einer besondern Annahme über die Art und Weise, wie die Meridiangrade auf die Karte übertragen werden, einer Annahme, durch welche aber die oben gemachte Voraussetzung, dass $A_1B_1 =$ Bogen AB ist, nicht alterirt werden darf; denn sonst wird die erste der Gleichungen in Nr. 14, aus der sich die Formeln für $\cos \psi$ etc. ergeben, ungültig.

Dem gegenüber scheint es am einfachsten, die Meridiangrade, wie Murdoch thut, gleich lang abzutragen und die Abbildung der beiden Parallelkreise in wahrer Grösse fallen zu lassen.

Man kann aber auch umgekehrt die gleiche Länge der Meridiangrade gleichzeitig mit der Bestimmung, dass $A_1B_1 =$ Bogen AB ist, aufgeben und dafür das bei Murdoch's zweiter Methode angewandte Verfahren benutzen.

16. Zweite Murdoch'sche Projektion. Die einzelnen Punkte eines Meridianes werden derart auf die in dessen Ebene liegende Kegelseite übertragen, dass man — nach den Regeln der Perspektive — die Schnittpunkte der Kegelseite mit den nach den verschiedenen Meridianpunkten gezogenen Radien als Projektionen der Meridianpunkte betrachtet.

Zur Erläuterung wollen wir wieder die Fig. 56 benutzen, wobei wir aber voraussetzen, dass A_1 und B_1 die Schnittpunkte von MA und MB mit der Kegelseite sind. Die Bedingung der Bewahrung der Gesamtfläche lautet dann

$$2 \pi NN' \cdot A_1B_1 = 2 a \pi \cdot A'B'$$

Nun ist aber $A_1B_1 = 2 NA_1$ und

$$NN' = MN \cos \frac{\varphi' + \varphi''}{2} = NA_1 \cdot \cot AMN \cdot \cos \frac{\varphi' + \varphi''}{2},$$

und da der Winkel $AMN = \frac{\varphi'' - \varphi'}{2}$ ist, so erhält man unter Berücksichtigung von

$$A'B' = 2 a \sin \frac{\varphi'' - \varphi'}{2} \cos \frac{\varphi' + \varphi''}{2}$$

zur Bestimmung von NA_1 die Gleichung

$$(15) \quad NA_1 = a \tan \frac{\varphi'' - \varphi'}{2} \sqrt{\cos \frac{\varphi'' - \varphi'}{2}}$$

Ist P ein beliebiger Punkt des Meridianes, welcher um ψ Grad nördlicher oder südlicher liegt als der Punkt K von der Breite $\frac{\varphi' + \varphi''}{2}$, so ist die Projektion NP' des Bogens KP durch die Gleichung

$$NP' = MN \cdot \tan \psi = NA_1 \cdot \cot \frac{\varphi'' - \varphi'}{2} \cdot \tan \psi$$

gegeben, welche, wenn man für NA_1 den Werth (15) setzt, in

$$(16) \quad NP' = a \tan \psi \sqrt{\cos \frac{\varphi'' - \varphi'}{2}}$$

übergeht.

Bedeutet ψ_1 den Werth, welchen ψ für die beiden Punkte C und D besitzt, so ist einestheils

$$NC = a \sin \psi_1,$$

andernteils zufolge (16)

$$NC = a \tan \psi_1 \sqrt{\cos \frac{\varphi'' - \varphi'}{2}},$$

aus welchen zwei Gleichungen sich zur Bestimmung des Winkels ψ_1 ergibt

$$(17) \quad \cos \psi_1 = \sqrt{\cos \frac{\varphi'' - \varphi'}{2}}.$$

Mithin ist

$$(18) \quad NC = ND = a \sqrt{1 - \cos \frac{\varphi'' - \varphi'}{2}} = a \sqrt{2} \cdot \sin \frac{\varphi'' - \varphi'}{4}.$$

Zur Ermittlung des Halbmessers $ON = r_0$, mit welchem man den mittelsten Parallelkreis zu beschreiben hat, dient die Gleichung

$$r_0 = ON = MN \cdot \cot \angle MON = MN \cdot \cot \frac{\varphi' + \varphi''}{2},$$

und da

$$MN = a \cos \psi_1 = a \sqrt{\cos \frac{\varphi'' - \varphi'}{2}}$$

ist, so hat man

$$(19) \quad r_0 = a \cot \frac{\varphi' + \varphi''}{2} \sqrt{\cos \frac{\varphi'' - \varphi'}{2}}.$$

Für einen beliebigen Parallelkreis, welcher um $\pm \psi$ Grad nördlich von dem durch K gehenden Mittel-Parallel liegt, ist der Halbmesser, mit dem derselbe auf der Karte beschrieben werden muss,

$$r = r_0 \mp NP'$$

oder

$$r = a \left(\cot \frac{\varphi' + \varphi''}{2} \mp \tan \psi \right) \sqrt{\cos \frac{\varphi'' - \varphi'}{2}},$$

welcher Formel man auch die Gestalt

$$(20) \quad r = \frac{a \cos \varphi \sqrt{\cos \frac{\varphi'' - \varphi'}{2}}}{\sin \frac{\varphi' + \varphi''}{2} \cos \left(\varphi - \frac{\varphi' + \varphi''}{2} \right)}$$

geben kann, wo φ die Breite des Parallels bedeutet.

Was speciell die beiden äussersten Parallelkreise anlangt, so ist für den südlichsten $\varphi = \varphi'$ und der Halbmesser ist

$$(21) \quad r' = \frac{a \cos \varphi'}{\sin \frac{\varphi' + \varphi''}{2} \sqrt{\cos \frac{\varphi'' - \varphi'}{2}}}$$

für den nördlichsten Parallel, $\varphi = \varphi''$, dagegen ist der Halbmesser

$$(22) \quad r'' = \frac{a \cos \varphi''}{\sin \frac{\varphi' + \varphi''}{2} \sqrt{\cos \frac{\varphi'' - \varphi'}{2}}}$$

Die Abwicklung des Kegels giebt einen Sektor, dessen äusserste Halbmesser einen Winkel von

$$360^\circ \cdot \frac{NN'}{ON} = 360^\circ \cdot \sin \frac{\varphi' + \varphi''}{2}$$

mit einander einschliessen, gerade wie bei der ersten Murdoch'schen Projektion.

17. Die hier entwickelten Formeln reichen hin zur Berechnung derjenigen Elemente, welche zur Konstruktion einer derartigen Karte nöthig sind. Wie man leicht sieht, könnte man an die Stelle der Rechnung auch eine Konstruktion treten lassen. In der That hat man nur nöthig, in **Fig. 56** den Bogen AB des Meridianes, welcher zwischen den äussersten Parallelen von der Breite φ' und φ'' liegt, in K zu halbiren, den Halbmesser MK zu ziehen, von B (oder A) eine Senkrechte BL auf ihn zu fällen, so dass

$$ML = a \cos \frac{\varphi'' - \varphi'}{2}$$

ist, dann über MK einen Halbkreis zu konstruiren, welcher die Senkrechte BL oder ihre Verlängerung im Punkte J schneidet und schliesslich $MN = MJ$ zu machen, und man hat den Punkt N der vorigen Figur. Denn es ist

$$MN = MS = \sqrt{MK \cdot ML} = a \sqrt{\cos \frac{\varphi'' - \varphi'}{2}}$$

wie es nach den obigen Auseinandersetzungen sein muss. Errichtet man nun NO senkrecht auf MN , so hat man damit die Kegel-seite und kann nun die einzelnen Theilpunkte des Meridianes auf dieselbe übertragen, indem man die nach diesen Punkten hingehenden Radien zieht. Es bleibt dann nur noch die Abwicklung des Kegels übrig. Zu dem Zwecke schlägt man um O mit ON als Halbmesser einen Kreisbogen und trägt auf demselben die einzelnen Grade in der Grösse, wie sie sich auf einem Kreise mit dem Halbmesser NN' (**Fig. 56**) befinden ab. Dabei kann man sich, wenn es auf grössere Genauigkeit ankommt, der in §. 8, Nr. 13 (S. 55 unten) angegebenen Konstruktion bedienen, zuerst um die genauere Länge der Bogen auf dem Kreise mit dem Halbmesser NN' zu erfahren, und dann, bei umgekehrter Anwendung des Verfahrens, um diese Länge auf den Kreis vom Halbmesser ON abzutragen.

Alles weitere ist an sich klar.

18. Dritte Murdoch'sche Projektion. Zur Bestimmung der Geraden MN (Fig. 56), die nach dem Halbierungspunkte K des Meridianbogens AB hingeht, dient die Proportion

$$MN : MK = \text{Bog. } KA : \tan \angle AMK,$$

aus welcher sich ergibt

$$(23) \quad MN = \frac{a (\varphi'' - \varphi')}{2 \tan \frac{\varphi'' - \varphi'}{2}},$$

wo natürlich im Zähler $\varphi'' - \varphi'$ in Bogenmaass auszudrücken, oder, im Falle φ' und φ'' in Graden angegeben sind, mit 0,017453 . . zu multipliciren ist.

Da die Kegelseite senkrecht auf MN steht, so ergibt sich hieraus der Radius, den der durch N gehende Kegelkreis, welcher den durch K gehenden Parallelkreis darstellt, in der Abwicklung hat,

$$ON = r_0 = MN \cot \frac{\varphi' + \varphi''}{2}$$

oder

$$(24) \quad r_0 = \frac{a (\varphi'' - \varphi') \cot \frac{\varphi' + \varphi''}{2}}{2 \tan \frac{\varphi'' - \varphi'}{2}}.$$

Demnächst gilt es nun noch, die Abbildungen der äussersten Parallelkreise so zu wählen, dass die Gesamtfläche der Zone erhalten bleibt. Sind A_1 und B_1 die Abbildungen von A und B und wird $NA_1 = NB_1$ angenommen, so lautet die Bedingungsgleichung hierfür

$$2 NN' \cdot \pi \cdot 2 NA_1 = 2 a^2 \pi (\sin \varphi'' - \sin \varphi'),$$

und da

$$NN' = MN \cdot \cos \frac{\varphi' + \varphi''}{2}$$

$$\text{und } \sin \varphi'' - \sin \varphi' = 2 \sin \frac{\varphi'' - \varphi'}{2} \cos \frac{\varphi' + \varphi''}{2}$$

ist, so erhält man

$$NA_1 = \frac{a^2 \sin \frac{\varphi'' - \varphi'}{2}}{MN}.$$

Setzt man hier den Werth (23) ein, so ergibt sich schliesslich

$$(25) \quad NA_1 = NB_1 = \frac{2 a \sin \frac{\varphi'' - \varphi'}{2} \cdot \tan \frac{\varphi'' - \varphi'}{2}}{\varphi'' - \varphi'}.$$

Theilt man dann die Strecke $A_1 B_1$ in ebensoviele gleiche Theile, als der Bogen AB Grade hat, so bekommt man die Punkte, durch welche die Abbildungen der einzelnen Parallelkreise gehen.

Die Abwicklung des Kegels ist dann leicht zu bewerkstelligen.

19. Besondere Vorzüge haben diese Murdoch'schen Projektionen, wie schon oben angedeutet, in keiner Weise. Zu Gunsten der zweiten kann man allerdings die Einfachheit ihrer Konstruktion und dann den Umstand anführen, dass sie in gewissem Sinne perspektivisch ist, also ein anschauliches Bild gewährt. Doch würde dies bei ihrer Verwendung zu geographischen Zwecken nicht sonderlich ins Gewicht fallen; höchstens für die Anfertigung von Sternenkegeln könnte es beachtenswerth sein.

Für schmale Zonen geben übrigens diese Methoden ganz brauchbare Netze, ein Vorzug, der freilich auch den übrigen Kegelprojektionen zukommt. Ueber mehr als 8 bis 10 Breitengrade darf man die Karte aber nicht ausdehnen, wenn man grössere Fehler vermeiden will.

V. Die Kegelprojektion von Albers.

20. Die Forderung, welche Murdoch an seine Karten stellt, dass nämlich die Gesamtfläche der dargestellten Zone in ihrer richtigen Grösse abgebildet werden soll, ist eigentlich eine ziemlich unwesentliche. Wichtiger würde es sein, die Uebertragung auf den Kegel so zu bewirken, dass alle Flächentheile auf der Kugel den ihnen entsprechenden auf der Kegelfläche gleichkommen.

Für diese — an sich unbestimmte — Aufgabe hat im Anschlusse an die Murdoch'schen Konstruktionen, H. C. Albers in Lüneburg eine Lösung gegeben, bei welcher vorausgesetzt wird, dass der Kegel zwei Parallelkreise mit der Kugel gleich lang hat.

Vergl. Ueber Murdoch's drey Kegelprojektionen. Zachs monatl. Korrespondenz, Febr. und Nov. 1805. Beschreibung einer neuen Kegelprojektion. Daselbst, Nov. 1805.

Wir geben hier in Kürze die Theorie dieser Projektion, die eigentlich in das vierte Kapitel, zu den äquivalenten Abbildungen gehört.

21. Sind φ' und φ'' die Breiten der beiden Parallelkreise, welche auf der Karte in ihrer wahren Länge dargestellt werden sollen, und bedeutet l die Seite des abgestumpften Kegels, welcher die zwischen beiden Kreisen liegende Zone darstellt, so wird die Bedingung, dass die Gesamtflächen der Kugelzone und der Mantelfläche des abgestumpften Kegels gleich sein sollen, durch die Gleichung ausgedrückt

$$a\pi (\cos \varphi' + \cos \varphi'') l = 2 a^2 \pi (\sin \varphi'' - \sin \varphi'),$$

aus welcher sich nach einigen einfachen Transformationen ergibt

$$(26) \quad l = 2 a \tan \frac{\varphi'' - \varphi'}{2},$$

ein Werth, der sich höchst einfach konstruiren lässt, wenn man im Halbrüpfungspunkte des Meridianbogens, der zwischen beiden Parallelen liegt, eine Tangente an denselben legt und diese beiderseits bis zu den Schnittpunkten der Halbmesser verlängert, welche nach den Endpunkten des Meridianbogens gehen.

22. Bezeichnet man mit r' und r'' die Halbmesser, mit denen auf der Karte die Abbildungen der erwähnten Parallelkreise ge-

schlagen werden, so müssen sich beide verhalten, wie die wahren Längen der Umfänge der Parallelkreise. Dies giebt die Projektion

$$r' : r'' = \cos \varphi' : \cos \varphi''.$$

Da aber $r'' - r' = l$ ist, so kann man hieraus leicht die Werthe von r' und r'' ableiten:

$$(27) \quad \left\{ \begin{aligned} r' &= \frac{l \cos \varphi'}{\cos \varphi' - \cos \varphi''} = \frac{a \cos \varphi'}{\sin \frac{\varphi' + \varphi''}{2} \cos \frac{\varphi'' - \varphi'}{2}} \\ r'' &= \frac{l \cos \varphi''}{\cos \varphi' - \cos \varphi''} = \frac{a \cos \varphi''}{\sin \frac{\varphi' + \varphi''}{2} \cos \frac{\varphi'' - \varphi'}{2}} \end{aligned} \right.$$

Es ist übrigens leicht, diese Werthe zu konstruiren. Trägt man auf einer Geraden (Fig. 57) die Strecke $A'B' = l$ und darauf senkrecht die Gerade $A'A$ und $B'B$ gleich den Halbmessern der beiden Parallelkreise von den Breiten φ' und φ'' ab, zieht dann AB und verlängert diese Gerade bis zu ihrem Schnittpunkte O mit der Verlängerung von $A'B'$, so ist

$$OA' = r' \text{ und } OB' = r''.$$

23. Jeder der beiden Parallelkreise von den Breiten φ' und φ'' , und so auch jeder der andern Parallelkreise, wird durch einen Bogen von

$$360^\circ \cdot k$$

dargestellt, wo k aus der Proportion

$$r' : a \cos \varphi' = 1 : k$$

gegeben ist. Hiernach ist

$$(28) \quad k = \sin \frac{\varphi' + \varphi''}{2} \cos \frac{\varphi'' - \varphi'}{2}.$$

24. Es handelt sich jetzt noch um die Ermittlung des Halbmessers r , mit welchem vom gemeinsamen Centrum aus die Abbildung eines beliebigen Parallelkreises von der Breite φ zu beschreiben ist.

Wir wollen uns zu dem Zwecke die Differenz $r' - r$ in n gleiche Theile

$$\frac{r' - r}{n} = \delta$$

getheilt denken, wo n eine sehr grosse Zahl ist. Es mögen ferner den Radien

$$r', \quad r' - \delta, \quad r' - 2\delta, \quad \dots, \quad r' - (n-1)\delta, \quad r' - n\delta = r$$

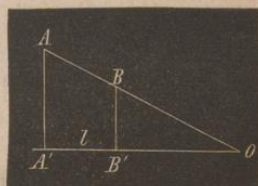
die Breiten

$$\varphi', \quad \varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \dots, \quad \varphi_{n-1}, \quad \varphi$$

entsprechen.

Die Bedingung, dass die schmalen Kegelzonen von der Höhe δ gleich sind den Kugelzonen von den Breitendifferenzen

Fig. 57.



$\varphi_1 - \varphi', \varphi_2 - \varphi_1, \varphi_3 - \varphi_2, \dots, \varphi - \varphi_{n-1}$,
wird dann, wenn man den Faktor 2π weglässt, durch die Gleichungen ausgedrückt:

$$\begin{aligned} r' k \delta &= a^2 (\sin \varphi_1 - \sin \varphi') \\ (r' - \delta) k \delta &= a^2 (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1) \\ (r' - 2\delta) k \delta &= a^2 (\sin \varphi_3 - \sin \varphi_2) \\ &\dots \\ &\dots \end{aligned}$$

$$[r' - (n-1)\delta] k \delta = a^2 (\sin \varphi - \sin \varphi_{n-1}).$$

durch Addition dieser Gleichungen ergibt sich aber

$$(29) \quad [nr' - (1+2+\dots+n-1)\delta] k \delta = a^2 (\sin \varphi - \sin \varphi').$$

Hier ist zunächst

$$1 + 2 + \dots + n-1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

und es geht daher der mit $k\delta$ multiplicirte Ausdruck auf der linken Seite von (29) in

$$nr' - \frac{n(n-1)}{2} \delta = nr' - (n-1) \frac{r' - r}{2}$$

oder in

$$n \left[r' - \left(1 - \frac{1}{n} \right) \frac{r' - r}{2} \right]$$

über und die linke Seite von (29) wird also

$$\left[r' - \left(1 - \frac{1}{n} \right) \frac{r' - r}{2} \right] k \cdot n \delta,$$

d. i., wenn man für $n\delta$ seinen Werth setzt und n dann über alle Grenzen wachsen lässt, wodurch $\frac{1}{n} = 0$ wird,

$$\left(r' - \frac{r' - r}{2} \right) k (r' - r) = \frac{r'^2 - r^2}{2} k.$$

Setzt man diesen Werth in die Gleichung (29) ein, so ergibt sich

$$\frac{r'^2 - r^2}{2} k = a^2 (\sin \varphi - \sin \varphi')$$

oder

$$(30) \quad r^2 = r'^2 - \frac{2 a^2}{k} (\sin \varphi - \sin \varphi').$$

Setzt man $\varphi = \varphi''$, so erhält man

$$r'^2 = r'^2 - \frac{2 a^2}{k} (\sin \varphi'' - \sin \varphi')$$

und aus diesen beiden letzten Gleichungen folgt weiter

$$(31) \quad r^2 = r''^2 + \frac{2 a^2}{k} (\sin \varphi'' - \sin \varphi).$$

Die Gleichungen (30) und (31) dienen zur Berechnung von r ; man kann aber diesen Werth auf Grund derselben Gleichungen auch konstruiren.

25. Dieses Verfahren liefert Karten, bei denen die Verzerrung nicht sehr bedeutend ist, wenn man sich nicht über etwa 5° von jedem der beiden Parallelkreise entfernt, welche in ihrer wahren Grösse abgebildet werden. Die Entfernungen können dann ohne merklichen Fehler mit Hilfe eines in gleiche Theile getheilten Maassstabes gemessen werden. Genau genommen werden die Entfernungen von Nord nach Süd in der Mitte der Karte vergrössert, diejenigen von West nach Ost aber verkleinert, während jenseits der Parallelkreise, welche unverändert bleiben, die Sache gerade umgekehrt ist, von Nord nach Süd Verkürzung, von Ost nach West Verlängerung eintritt. Diese Fehler werden um so bedeutender, je weiter die beiden Parallelen von der Breite φ' und φ'' von einander entfernt sind, wogegen sie natürlich von der Erstreckung der Karte in der Längenrichtung unabhängig sind, eine Eigenschaft, die übrigens allen Kegelprojektionen zukommt.

Setzt man das Kartennetz bis zum Pole und bis zum Aequator fort, so wird ersterer ($\varphi = 90^\circ$) durch einen Kreis dargestellt, dessen Halbmesser durch die Gleichung

$$r_{90}^2 = r''^2 + \frac{2 a^2}{k} \sin \varphi''$$

gegeben wird, während der Halbmesser, mit welchem der Aequator gezeichnet wird, durch

$$r_0 = r''^2 - \frac{2 a^2}{k} (1 - \sin \varphi'')$$

bestimmt ist.

Unsere Fig. XIX auf Taf. III stellt ein solches vom Pol bis zum Aequator sich erstreckendes Gradnetz dar, bei welchem die Parallelen von 30° und 60° Breite in wahrer Grösse abgebildet sind.

Es mag noch bemerkt werden, dass Christ. Gottl. Reichard diese Projektion bei seiner im Jahre 1817 in Nürnberg veröffentlichten Generalkarte von Europa in Anwendung gebracht hat.

VI. Lambert's äquivalente Kegelprojektion.

26. Denselben Zwecke, dass nämlich alle einzelnen Flächen der Karte gleich den entsprechenden Flächen der Kugel sein sollen, erreicht man auch, wenn man

$$(32) \quad r = 2 a \sqrt{m} \cdot \sin \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right)$$

oder

$$(33) \quad r^2 = 2 a^2 m (1 - \sin \varphi)$$

setzt.

Denn bedeutet r_1 den Werth des Halbmessers, welcher zu dem ein wenig grösseren Winkel φ_1 gehört, so ist

$$r_1^2 = 2 a^2 m (1 - \sin \varphi_1).$$

folglich

$$r^2 - r_1^2 = 2 a^2 m (\sin \varphi_1 - \sin \varphi).$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich aber

$$(r^2 - r_1^2) \frac{\pi}{m} = 2 a^2 \pi (\sin \varphi_1 - \sin \varphi)$$

und hier drückt die rechte Seite die Oberfläche der Kugelzone aus, welche zwischen den Parallelen von der Breite φ und φ' liegen, ganz gleich, wie gross die Differenz $\varphi_1 - \varphi$ ist. Die linke Seite aber bezeichnet den Flächenstreifen der Karte, der zwischen den beiden concentrischen Kreisen von den Halbmessern r und r_1 liegt, wenn wir beide in der Ausdehnung von

$$\frac{360^\circ}{m}$$

zeichnen. Beide Flächen sind also gleich, und damit ist die Aequivalenz bewiesen.

27. Die Grösse $2 a \sin \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right)$ lässt sich leicht zeichnen, sie wird nämlich dargestellt durch die Sehne des Meridianes, welche den Punkt von der Breite φ mit dem Pole verbindet.

Was die Grösse m anlangt, so haben wir schon gesehen, dass der Umfang eines Parallelkreises auf der Kugel durch den m ten Theil eines mit dem Halbmesser r beschriebenen Kreises auf der Karte dargestellt wird. Es geht daraus hervor, dass m die Seite des abzuwickelnden Kegels, dividirt durch den Halbmesser seiner Basis, darstellt.

Die Bestimmung von m kann auf die Weise erfolgen, dass auf einem bestimmten Parallelkreise von der Breite φ_1 die Längengrade im richtigen Verhältnisse zu den Breitengraden abgebildet werden.

Ist λ ein verschwindend kleiner Längenunterschied, so hat der zugehörige Bogen des Meridianges von der Breite φ_1 die Grösse $a \cos \varphi_1 \cdot \lambda$; die Abbildung dieses Bogens dagegen hat die Grösse $\frac{r_1 \lambda}{m}$, wenn r_1 den zu φ_1 gehörigen Werth von r bezeichnet.

Es sei ferner φ eine Breite, die nur wenig geringer ist als φ_1 , dann ist der zugehörige kleine Meridianbogen $a (\varphi_1 - \varphi)$ und die Abbildung desselben ist $r - r_1$ (weil offenbar r grösser als r_1 ist).

Obige Forderung giebt dann die Proportion

$$r - r_1 : \frac{r_1 \lambda}{m} = a (\varphi_1 - \varphi) : a \cos \varphi_1 \cdot \lambda,$$

aus welcher folgt

$$(34) \quad \frac{r - r_1}{\varphi_1 - \varphi} = \frac{r_1}{m \cos \varphi_1}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung geht, wenn man

$$r_1 = 2 a \sqrt{m} \sin \left(45^\circ - \frac{\varphi_1}{2} \right)$$

und

$$\cos \varphi_1 = \sin (90^\circ - \varphi_1) = 2 \sin \left(45^\circ - \frac{\varphi_1}{2} \right) \cos \left(45^\circ - \frac{\varphi_1}{2} \right)$$

setzt, in den Ausdruck

$$\frac{a}{V\bar{m} \cos \left(45^\circ - \frac{\varphi_1}{2} \right)}$$

über. Auf der rechten Seite dagegen ist

$$\begin{aligned} r - r_1 &= 2a V\bar{m} \left[\sin \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) - \sin \left(45^\circ - \frac{\varphi_1}{2} \right) \right] \\ &= 2a V\bar{m} \cdot 2 \cos \left(45^\circ - \frac{\varphi + \varphi_1}{4} \right) \sin \frac{\varphi_1 - \varphi}{4} \end{aligned}$$

und da für $\varphi_1 - \varphi = 0$

$$\frac{4 \sin \frac{\varphi_1 - \varphi}{4}}{\varphi_1 - \varphi} = 1$$

ist, so ist der Grenzwert, in den die linke Seite der Gleichung (34) für $\varphi_1 - \varphi = 0$ übergeht,

$$a V\bar{m} \cos \left(45^\circ - \frac{\varphi_1}{2} \right),$$

und diese Gleichung liefert also den Werth von m

$$(35) \quad m = \frac{1}{\cos^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi_1}{2} \right)}$$

28. Diese Projektion, die man als eine Kegelprojektion betrachten kann, aber nur wenn m grösser als die Einheit ist, ist von dem deutschen Mathematiker Joh. Heinrich Lambert in Berlin angegeben worden. Vergl. dessen Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung. Berlin 1772.

Wir kommen später nochmals auf diese Projektion zurück, welche uns auf **Taf. IV, Fig. XX** zeigt.

VII. Lambert's konforme Kegelprojektion.

29. Diese Methode wird uns ebenfalls später, in dem Kapitel, welches die konformen Projektionen behandelt, noch weiter beschäftigen; insbesondere werden wir dort sehen, wie sich die Sache gestaltet, wenn man statt der Kugel ein abgeplattetes Rotationsellipsoid in Betracht zieht.

Bei dieser Methode werden die Meridiane auf der Karte durch gerade Linien dargestellt, die von einem festen Punkte O ausgehen, und welche unter sich Winkel einschliessen, welche das μ fache von den Winkeln sind, welche die Meridiane auf der Kugel miteinander bilden.

Die Parallelkreise werden durch Bogen dargestellt, deren Mittelpunkt O ist, und zwar gehört zum Parallelkreise von der Breite φ der Halbmesser

$$(36) \quad r = c \tan^{\mu} \left(45^{\circ} - \frac{\varphi}{2} \right).$$

In dieser Gleichung sind c und μ konstante Grössen, von denen die erstere natürlich nur den Maassstab der Karte beeinflusst. Die Bedeutung von μ kennen wir bereits; wir werden aber später noch sehen, wie man diese Konstante so bestimmen kann, dass noch gewissen Nebenbedingungen genügt wird.

30. Wir müssen jetzt zunächst zeigen, dass diese Methode eine konforme Abbildung liefert.

Die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Konformität ist aber die folgende: Sind P_1 und M zwei Punkte der Kugelfläche, welche dem Punkte P benachbart sind und von denen der erste mit P auf demselben Meridiane, der letztere aber mit P auf demselben Parallelkreise liegt, und bedeuten ferner P' , P'_1 und M' die Projektionen von P , P_1 und M , so muss die Gleichung

$$(37) \quad \frac{PP_1}{PM} = \frac{P'P'_1}{P'M'}$$

um so genauer richtig sein, je kleiner die Strecken PP_1 und PM sind, und sie muss in aller Strenge bestehen, wenn dieselben beide gleich Null sind.

Bezeichnet man nun das Komplement der Breite, $90^{\circ} - \varphi$, mit χ und nimmt man an, dass zu P der Werth χ , zu P_1 der Werth χ_1 gehört, so ist

$$PP_1 = a (\chi_1 - \chi),$$

und wenn man ferner die Längendifferenz von P und M mit $\lambda_1 - \lambda$ bezeichnet, so ist

$$PM = a (\lambda_1 - \lambda) \sin \chi.$$

Die linke Seite von (37) liefert also den Bruch

$$\frac{\chi_1 - \chi}{(\lambda_1 - \lambda) \sin \chi}.$$

Ferner geht (36) über in

$$(36a) \quad r = c \tan^{\mu} \frac{\chi}{2},$$

und wenn man den zu χ_1 gehörigen Werth von r mit r_1 bezeichnet, so sieht man leicht ein, dass

$$P'P'_1 = r_1 - r$$

ist. Ausserdem ist nach der früheren Feststellung

$$P'M' = \mu r (\lambda_1 - \lambda).$$

Sonach geht die Bedingung der Konformität (37) über in die Gleichung

$$\frac{\chi_1 - \chi}{(\lambda_1 - \lambda) \sin \chi} = \frac{r_1 - r}{\mu r (\lambda_1 - \lambda)};$$

streicht man beiderseits $\lambda_1 - \lambda$, so nimmt die Gleichung die Gestalt an

$$(38) \quad \frac{r_1 - r}{r (\chi_1 - \chi)} = \frac{\mu}{\sin \chi}, \quad \chi_1 - \chi = 0.$$

Nun ist

$$\frac{r_1}{r} = \left(\frac{\tan \frac{\chi_1}{2}}{\tan \frac{\chi}{2}} \right)^\mu,$$

oder, was dasselbe ist,

$$1 + \frac{r_1 - r}{r} = \left(1 + \frac{\tan \frac{\chi_1}{2} - \tan \frac{\chi}{2}}{\tan \frac{\chi}{2}} \right)^\mu.$$

Bezeichnen wir den Bruch in der Klammer auf der rechten Seite dieser Gleichung mit z , so kann man statt dieser Gleichung auch schreiben

$$1 + \frac{r_1 - r}{r} = (1 + z)^\mu$$

und wenn man rechts nach dem binomischen Satze entwickelt und beiderseits die Einheit weglässt, so wird

$$(39) \quad \frac{r_1 - r}{r} = \frac{\mu}{1} \cdot z + \frac{\mu(\mu-1)}{1 \cdot 2} \cdot z^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot z^3 + \dots$$

Diese Gleichung dividiren wir mit $\chi_1 - \chi$ und erhalten dann links denselben Ausdruck wie in Gleich. (38). Rechts aber können wir schreiben

$$(40) \quad \frac{z}{\chi_1 - \chi} \left(\frac{\mu}{1} + \frac{\mu(\mu-1)}{1 \cdot 2} \cdot z + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot z^2 + \dots \right).$$

Nun ist

$$\frac{z}{\chi_1 - \chi} = \frac{\tan \frac{\chi_1}{2} - \tan \frac{\chi}{2}}{(\chi_1 - \chi) \tan \frac{\chi}{2}} = \frac{\sin \frac{1}{2}(\chi_1 - \chi)}{\frac{1}{2}(\chi_1 - \chi) 2 \sin \frac{1}{2} \chi \cos \frac{1}{2} \chi_1};$$

lässt man aber χ_1 in χ übergehen, so wird

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(\chi_1 - \chi)}{\frac{1}{2}(\chi_1 - \chi)} = 1$$

und man bekommt also

$$\frac{z}{\chi_1 - \chi} = \frac{1}{2 \sin \frac{\chi}{2} \cos \frac{\chi}{2}} = \frac{1}{\sin \chi}.$$

Mithin erhält man für $\chi_1 - \chi = 0$ statt (39) die Gleichung

$$(41) \quad \frac{r_1 - r}{(\chi_1 - \chi) r} = \frac{1}{\sin \chi} \left(\mu + \frac{\mu(\mu-1)}{1 \cdot 2} \cdot z + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} z^2 + \dots \right).$$

Nun ist aber für $\chi_1 - \chi = 0$ auch

$$z = \frac{\tan \frac{\chi_1}{2} - \tan \frac{\chi}{2}}{\tan \frac{\chi}{2}} = 0,$$

und es verschwinden also in (41) die mit z multiplicirten Glieder. Daraus folgt nun allerdings noch nicht, dass auch ihre Summe verschwindet; denn wenn μ keine ganze Zahl ist, so ist die Anzahl dieser Glieder unendlich gross und die Summe einer unendlichen Anzahl von Gliedern, welche einzeln sich der Grenze Null unbegrenzt nähern, kann alle möglichen Werthe haben. In der letzten Nummer des §. 4 haben wir z. B. gesehen, dass die Ellipsenfläche durch eine Summe von unendlich vielen schmalen Streifen dargestellt werden kann, deren jede in Null übergeht. In unserem Falle aber ist

$$\begin{aligned} & \frac{\mu(\mu-1)}{1 \cdot 2} z + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} z^2 + \dots \\ & = z \left(\frac{\mu(\mu-1)}{1 \cdot 2} + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} z + \dots \right) \end{aligned}$$

und hier ist die Summe der eingeklammerten Reihe jedenfalls eine positive Grösse, welche kleiner ist, als die Summe der Binomialkoefficienten

$$1 + \frac{\mu}{1} + \frac{\mu(\mu-1)}{1 \cdot 2} + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

Diese Summe hat aber den Werth

$$(1 + 1)^\mu = 2^\mu.$$

Multiplicirt man diesen endlichen Werth mit $z = 0$, so erhält man das Produkt Null. Grösser kann die Summe der mit z multiplicirten Glieder in (41) auch nicht sein, und da dieselbe auch nicht negativ sein kann, so muss sie den Werth Null haben. Mit hin erhält man aus (41) das Ergebniss

$$\frac{r_1 - r}{(\chi_1 - \chi)r} = \frac{\mu}{\sin \chi},$$

übereinstimmend mit Gleich. (38).

Sonach liefert die Lambert'sche Methode in der That eine konforme Abbildung.

31. Die lineare Vergrösserung in dem Punkte von der Breite φ und der Länge λ wird durch die Gleichung

$$\kappa = \frac{P'P'_1}{PP_1} = \frac{P'M'}{PM}$$

bestimmt. Aus den in voriger Nummer angeführten Werthen von $P'M'$ und PM ergibt sich

$$(42) \quad \kappa = \frac{\mu r}{a \cos \varphi} = \frac{\mu c}{a \cos \varphi} \cdot \tan^\mu \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right).$$

Die Flächenvergrösserung hat den Werth κ^2 .

Beide Werthe sind von der Länge λ unabhängig, wie dies bei allen Kegelprojektionen der Fall ist.

32. Die Bestimmung der Konstanten μ kann mittels der Bedingung erfolgen, dass auf zwei bestimmten Parallelkreisen von der Breite φ' und φ'' das Verhältniss der Längengrade auf der Karte und auf der Kugel einen und denselben Werth hat.

Bezeichnen r' und r'' die zu φ' und φ'' gehörigen Werthe von r , die wir analog (36a) uns in der Form

$$r' = c \tan^{\mu} \frac{\chi'}{2} \quad \text{und} \quad r'' = c \tan^{\mu} \frac{\chi''}{2}$$

denken wollen, so müssen diese beiden Radien sich wie die Radien der beiden Parallelkreise

$a \sin \chi'$ und $a \sin \chi''$
auf der Kugel verhalten. Dies giebt die Gleichung

$$\left(\frac{\tan \frac{\chi'}{2}}{\tan \frac{\chi''}{2}} \right)^{\mu} = \frac{\sin \chi'}{\sin \chi''}$$

aus welcher sich ergibt

$$(43) \quad \mu = \frac{l \sin \chi' - l \sin \chi''}{l \tan \frac{\chi'}{2} - l \tan \frac{\chi''}{2}}$$

In dieser Gleichung kann man selbstverständlich statt der natürlichen Logarithmen, die durch das Symbol l angedeutet werden, auch gemeine Logarithmen nehmen.

Auf **Taf. IV** zeigt **Fig. XXII** die ganze Erdoberfläche unter der Voraussetzung $\mu = \frac{1}{2}$.

§. 16.

Modifikationen der Kegelprojektion.

1. Von den im vorigen Paragraphen betrachteten Projektionen stehen einige nur sehr lose mit der Abwicklung eines Kegels in Verbindung; bei den beiden letzten z. B. kann man die Rücksicht auf den Kegel ganz ausser Acht lassen, ohne damit einen wesentlichen Punkt ihrer Theorie zu vernachlässigen.

Derartige Projektionen, bei denen die Abwicklung des Kegels eigentlich keine Rolle mehr spielt, die aber doch mehr oder minder mit den Kegelprojektionen verwandt sind, wollen wir in diesem Paragraphen noch eine Anzahl besprechen. Sie sind meist hervorgegangen aus dem Bestreben, eine grössere Genauigkeit in der kartographischen Darstellung zu erreichen, als durch eine eigentliche Kegelprojektion möglich ist.

I. Die zweite Projektion des Ptolemäus.

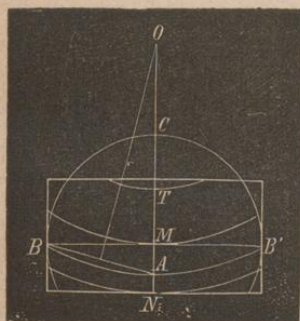
2. Ptolemäus hat im 24. Kapitel des ersten Buches seiner Geographie ausser der im vorigen Paragraphen erwähnten noch

eine zweite Kartenprojektion beschrieben, die er für vorzüglicher hält als die erste.

Ptolemäus begrenzt die damals bekannte Erdoberfläche südlich durch den Antiparallel von Meroë, $16^{\circ} 30'$ südl. Breite, nördlich durch den Parallel von Thule, 63° nördl. Breite. Ziemlich in der Mitte liegt der Parallel von Syena, $23^{\circ} 50'$ nördl. Breite, und wenn man sich daher das Auge eines Beobachters in der Ebene dieses Parallels denkt, so erscheint der Aequator als eine Linie, die ihre konkave Seite nach Norden kehrt und deren Mitte $23\frac{5}{6}^{\circ}$ südlich von der Mitte der Karte liegt. Diese Idee hat Ptolemäus, wie es scheint, bei seiner übrigens willkürlichen Konstruktion geleitet. (Fig. 58).

Als Einheit dient die Grösse eines Aequatorgrades. Man beschreibt nun zunächst um den Mittelpunkt M mit dem Halbmesser 90 einen Kreis, zieht in demselben den Halbmesser MB und einen darauf senkrechten MC , trägt auf der Rückwärtsverlängerung des letzteren $MA = 23\frac{5}{6}$ ab und bestimmt nun den Mittelpunkt O des Kreises, der durch B, A und den Punkt B' geht, der B diametral gegenüber liegt. Zu dem Zwecke halbirt man AB , errichtet im Halbierungspunkte eine Senkrechte auf AB und verlängert diese, bis sie die Verlängerung von MC in O schneidet.

Fig. 58.



Zur Berechnung von AO hat man

$$\tan \angle ABM = \frac{MA}{MB} = \frac{23\frac{5}{6}}{90}, \text{ also } \angle ABM = 14^{\circ} 51',$$

$$MO = \frac{MB}{\tan 2 \cdot 14^{\circ} 51'} = 157,79,$$

$$AO = 23,86 + 157,79 = 181,65,$$

wofür Ptolemäus $181\frac{1}{2}$ rechnet. Trägt man dann noch von OA aus nach Süden $AN = 16\frac{1}{2}$ und nach Norden $AT = 63$ ab und schlägt von O als Mittelpunkt aus durch die Punkte A, N, M und T Kreisbogen, so repräsentiren dieselben den Aequator und die Parallelen von $16\frac{1}{2}$ südl. Breite (Antiparallel von Meroë), $23\frac{5}{6}^{\circ}$ und 63° nördl. Breite (Syena und Thule). Die gerade Linie ON stellt den ersten Meridian dar. Ferner trägt man auf dem Aequator die Länge der einzelnen Grade ab, auf den übrigen Parallelen aber diese Längen multiplicirt jedesmal mit dem Cosinus der Breite. Verbindet man alsdann die Punkte gleicher Länge aus freier Hand durch eine stetige Kurve, so erhält man die Abbildungen der verschiedenen Meridiane. — Ptolemäus giebt seiner Karte übrigens eine Länge gleich 180 und eine Breite gleich 90.

II. Bonne's Projektion.

3. Diese Projektion blieb so ziemlich ganz vergessen, bis nach dem Wiederaufblühen der Wissenschaften und nach dem gewaltigen Impulse, welchen die Entdeckungen der Spanier und Portugiesen der geographischen Wissenschaft gegeben hatten, Bernhard de Sylva im Jahre 1507 in Venedig eine neue Ausgabe der Geographie des Ptolemäus herausgab, wobei er das Gradnetz des Ptolemäus erweiterte um die neuen Entdeckungen einzeichnen zu können. Das ganze Verfahren erfuhr dann durch verschiedene Geographen, namentlich durch Petrus Apianus (Peter Bienewitz oder Bennewitz, 1403 in der Gegend von Leisnig in Sachsen geboren, gestorben 1552 in Ingolstadt), Orontius Finäus (1532), Guillaume le Testu (1566) mancherlei Modifikationen, so dass schliesslich die Projektion entstand, welche man gewöhnlich als die Bonne'sche bezeichnet, weil der französische Geograph Rigobert Bonne (1727 — 1795) im Jahre 1752 zuerst ihre wesentlichen Vorzüge hervorgehoben hat.

4. Die Hauptpunkte bei dieser Projektion sind folgende:

Die Parallelkreise erscheinen als concentrische Kreise;

der erste Meridian wird durch eine gerade Linie dargestellt, welche alle Parallelkreise rechtwinklig schneidet;

der gemeinsame Mittelpunkt der verschiedenen Parallelkreise liegt auf dem ersten Meridiane in solcher Entfernung vom mittleren Parallel, als wäre die Karte die Abwicklung eines Kreiskegels, der die Kugel längs dieses Parallels berührt. Ist also φ' die Breite des mittleren Parallels, so ist

$$r' = a \cot \varphi'$$

der Halbmesser, mit welchem der mittlere Parallelkreis auf der Karte beschrieben wird.

Die Abschnitte, welche die einzelnen Parallelkreise auf dem ersten Meridiane bilden, sind den wirklichen Meridianabschnitten auf der Kugel gleich.

Die einzelnen Grade auf den verschiedenen Parallelkreisen haben ebenfalls auf der Karte dieselbe Grösse wie auf der Kugel, und die Meridiane sind deshalb, mit Ausnahme des ersten, sämtlich krumme Linien.

5. Aus dem Vorhergehenden ergibt sich, dass der Halbmesser des Parallelkreises von der Breite φ durch die Gleichung

$$r = a \cot \varphi' + a (\varphi' - \varphi)$$

gegeben ist.

6. Da man ferner einen verschwindend schmalen Streifen zwischen zwei Parallelen von der Breite φ und φ_1 auf der Kugel berechnet, wenn man die Länge des Parallels von der Breite φ mit $a (\varphi_1 - \varphi)$ multiplicirt, und da beide Längen auf der Karte in ihrer wahren Grösse und rechtwinklig zu einander erscheinen, so wird ein solcher Streifen in seiner wahren Grösse auf der Karte abgebildet. Was von dem einen Streifen oder einem bestimmten Theile desselben gilt, gilt auch von einer Summe solcher Streifen oder bestimmter Theile derselben. Und da man jede Fläche auf

der Kugel sich in schmale Streifen in Richtung der Parallelkreise zerlegt denken kann, so folgt, dass jede Fläche auf der Kugel auch auf der Karte in ihrer wahren Grösse erscheinen muss; die Bonne'sche Projektion liefert also eine äquivalente Abbildung und wird daher im nächsten Kapitel, namentlich was die Ausdehnung des Verfahrens auf das Sphäroid betrifft, nochmals besprochen werden.

7. Diese Darstellungsweise ist seit Bonne vielfach in Aufnahme gekommen und namentlich zur Abbildung ganzer Erdtheile beliebt.

Auf **Taf. IV** ist in **Fig. XXII** die nördliche Erdhälfte in dieser Weise dargestellt, wobei als mittelster Parallelkreis der von 45° angenommen ist. Man wird freilich die Bonne'sche Projektion nicht in solchem Umfange wirklich anwenden. Die Figur zeigt aber recht deutlich, wie in der Nähe des ersten Meridianes und des mittelsten Parallels die Formen gewahrt werden, während weiterhin merkliche Verzerrungen sich geltend machen.

III. Die Sanson-Flamsteed'sche Projektion.

8. Dieselbe ist nur ein besonderer Fall der vorigen. Wenn man nämlich als mittelsten Parallel den Aequator nimmt, so fällt der Punkt, von welchem aus die Abbildungen der Parallelkreise zu beschreiben sind, in unendliche Ferne und die Parallelkreise erscheinen dann als gerade Linien, die senkrecht auf dem ersten Meridiane stehen.

Auf **Taf. IV** ist in **Fig. XXIII** die ganze Erdoberfläche in dieser Weise dargestellt. Der erste Meridian erscheint in seiner wahren Länge, die darauf senkrechten, in Form von Geraden sich darstellenden Parallelkreise haben ebenfalls ihre wahre Länge, der Aequator ist also doppelt so lang als der erste Meridian. Die verschiedenen Meridiane theilen die Parallelkreise in gleiche Theile, auf der Karte von 10 zu 10 Grad.

9. Bezeichnet man den Abstand des Parallels von der Breite φ vom Aequator mit y , dagegen mit x den Abstand eines Kartenpunktes vom ersten Meridiane, so ist für den Punkt von der geographischen Breite φ und der Länge λ

$$x = a \lambda \cos \varphi \text{ und } y = a \varphi;$$

mithin wird der Meridian von der Länge λ durch die transcendente Kurve

$$x = a \lambda \cos \frac{y}{a}$$

dargestellt. Da man diese Gleichung auch in der Form

$$x = a \lambda \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{y}{a} \right)$$

schreiben kann, und da

$$x = k \sin \frac{y}{a}$$

eine Sinusoide darstellt, so hat D'Avezac diese Projektion nach der Gestalt der Meridiane als sinusoidale Projektion bezeichnet.

10. Nach dem was im ersten Kapitel in der Theorie der Kegelschnitte mitgetheilt worden, bedeutet der Grenzwert, dem sich der Ausdruck

$$\frac{x_1 - x}{y_1 - y}$$

nähert, wenn $y_1 - y$ in Null übergeht, die trigonometrische Tangente des Winkels τ , den die geometrische Tangente der Kurve im Punkte (x, y) mit der positiven Richtung der Achse der y , also hier mit dem ersten Meridiane bildet.

Nun ist

$$\begin{aligned} \frac{x_1 - x}{y_1 - y} &= \frac{a \lambda \left(\cos \frac{y_1}{a} - \cos \frac{y}{a} \right)}{y_1 - y} \\ &= -\lambda \frac{\sin \frac{y_1 - y}{2a} \sin \frac{y_1 + y}{2a}}{\frac{y_1 - y}{2a}}, \end{aligned}$$

und dieser Ausdruck geht für $y_1 - y = 0$ in

$$\frac{x_1 - x}{y_1 - y} = -\lambda \sin \frac{y}{a}$$

über. Für $y = \frac{a\pi}{2}$ erhält man

$$\frac{x_1 - x}{y_1 - y} = -\lambda,$$

eine Gleichung, durch welche der Winkel bestimmt wird, den der Meridian von der Länge λ im Pole mit der y -Achse bildet. Für den letzten Meridian der Fig. XXIII ist $\lambda = \pi$, daher ergibt sich für den Winkel τ der Werth

$$180^\circ - 72^\circ 20' 36''.$$

Die beiden äussersten Meridiane schneiden sich daher im Pole unter einem Winkel von

$$144^\circ 41' 12''.$$

11. Diese Projektion wurde von Nikolaus Sanson aus Abbeville erfunden, der sich ihrer beim Entwerfen der Karten von Europa, Asien, Afrika und Amerika bediente, die er im Jahre 1650 veröffentlichte.

Erst viel später hat auch der englische Astronom John Flamsteed sie gleichfalls angewandt, und zwar bei den Himmelskarten in seinem werthvollen *Atlas coelestis*, der 1629, neun Jahre nach seinem Tode, zum ersten Male veröffentlicht wurde. Seitdem wird diese Art der Darstellung häufig als Flamsteed'sche Projektion bezeichnet.

Sie eignet sich vorzugsweise für Länder nicht allzugrosser Ausdehnung nach Breite oder Länge, die vom Aequator durchschnitten werden, und ist namentlich für Karten von Afrika sehr beliebt.

Neuerdings ist dieselbe übrigens als angeblich neu unter dem Namen „isographische Projektion“ vom Medicinalrath Mohr in der am 6. Februar 1865 abgehaltenen Sitzung der Niederrheinischen Gesellschaft für Natur- und Heilkunde zur Darstellung der ganzen Erdoberfläche empfohlen worden. Dazu dürfte sie sich indessen weniger eignen.

IV. Die äquivalente Projektion von Joh. Werner.

12. Man erhält das Gegenstück der Sanson'schen Projektion, wenn man den Kegel statt in einen Cylinder in eine Ebene übergehen lässt, welche die Kugel im Pole berührt. Da die Spitze des Kegels alsdann mit dem Pole zusammenfällt, so ist der Radius, mit welchem die Abbildung eines Parallelkreises zu beschreiben ist, gleich dem Meridianbogen zwischen dem Parallel auf der Kugel und dem Pole:

$$r = a \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = a \chi;$$

die Parallelkreise werden in ihrer wahren Länge abgetragen. Es erscheint demnach der Quadrant des Parallelkreises von der Breite φ als ein Bogen, dessen Centriwinkel

$$\vartheta = 90^\circ \frac{a \sin \chi}{r} = 90^\circ \frac{\sin \chi}{\chi}$$

ist. In diesen beiden Formeln ist natürlich der Faktor, beziehentlich Divisor χ in Bogenmaass auszudrücken, $1^\circ = 0,0174533$. Die folgende Tafel enthält die Werthe von ϑ für die verschiedenen Werthe von χ von 0 bis 180° von 10 zu 10 Grad.

χ	ϑ	χ	ϑ
0°	$90^\circ \quad 0'$	100°	$50^\circ \quad 45'$
10	$89 \quad 33$	110	$44 \quad 3$
20	$88 \quad 11$	120	$37 \quad 12$
30	$85 \quad 57$	130	$30 \quad 23$
40	$82 \quad 53$	140	$23 \quad 40$
50	$79 \quad 1$	150	$17 \quad 10$
60	$74 \quad 26$	160	$11 \quad 1$
70	$69 \quad 12$	170	$5 \quad 16$
80	$63 \quad 27$	180	$0 \quad 0$
90	$57 \quad 18$		

Auf Taf. IV zeigt uns Fig. XXIV eine Darstellung der halben Erdoberfläche nach diesem Verfahren.

13. Dasselbe rührt von dem deutschen Geometer Johann Werner (1468 — 1528) aus Nürnberg her, der im Jahre 1514 bei Gelegenheit einer Uebersetzung und Erklärung des ersten Buches der

Geographie des Ptolemäus drei Projektionsarten aufgeführt hat, von denen die vorstehende die zweite ist.

Die beiden anderen Projektionen haben mit der obigen das gemein,

dass die Abbildungen aller Parallelkreise Kreisbogen mit dem einen Pole als gemeinsamem Mittelpunkte sind;

dass die Abstände dieser Bogen von einander gleich sind den Meridianbogen, welche auf der Kugel zwischen den einzelnen Meridianen liegen, und

dass die Grössen der Längengrade auf verschiedenen Parallelkreisen auf der Karte in demselben Verhältnisse stehen, wie auf der Kugel.

Bei der ersten von Werner angegebenen Projektion wird aber der Aequator durch einen vollen Kreis dargestellt, bei der dritten durch einen Bogen von 240° ; während er bei der zweiten als ein Bogen von $229^\circ 11'$ erscheint. Es sind daher bei der ersten sowohl als bei der dritten Projektion Werners die Parallelkreise im Verhältniss zu den Graden des ersten Meridianes zu gross.

Nur die zweite dieser drei Darstellungsweisen erscheint als besonderer Fall der Sanson'schen und ist daher äquivalent.

V. Die polykonischen Projektionen.

14. Die verschiedenen Kegelprojektionen eignen sich alle vorzugsweise zur Darstellung einer schmalen Zone, die auf beiden Seiten eines Mittelparallels liegt, welcher von den Meridianabbildungen rechtwinklig geschnitten wird.

Handelt es sich aber um die Darstellung einer viele Breitengrade umfassenden Partie der Erdoberfläche, so liegt der Gedanke nahe, dieselbe in verschiedene Zonen zu zerlegen, die nur eine geringe Breitenausdehnung besitzen und für jede dieser schmalen Zonen einen anderen Kegel in Anwendung zu bringen, worauf man das System dieser abgestumpften Kegelflächen abwickelt. Wenn man dabei die Breite der einzelnen Zonen verschwindend klein annimmt, so erscheint jeder Parallelkreis in der Abwickelung als ein Kreisbogen, dessen Mittelpunkt die Spitze des Kegels ist, der die Kugel längs dieses Parallelkreises berührt, und die ganze Karte lässt sich nach folgenden Regeln konstruiren.

Der erste Meridian erscheint in seiner wahren Länge als gerade Linie; senkrecht darauf und ihn halbirend steht die Gerade, welche den Aequator repräsentirt und welche die doppelte Länge hat. Die verschiedenen Parallelen, auf der Karte wie gewöhnlich von 10 zu 10 Grad angegeben, theilen den ersten Meridian in gleich grosse Theile. Sie erscheinen übrigens in ihrer wahren Länge und als Kreise, deren Mittelpunkte auf den Verlängerungen des ersten Meridianes liegen, für die nördliche Halbkugel jenseits des Nordpales, für die südliche jenseits des Südpales. Der Halbmesser des Parallels von der Breite φ ist unter Voraussetzung einer Kugel

$$r = a \cot \varphi.$$

Wie bei allen Kegelprojektionen sind hier die Längengrade auf einem und demselben Parallelkreise von gleicher Grösse, und zwar behalten sie bei dieser Darstellung ihre wahre Grösse bei.

Die Meridiane sind durch diese Bestimmungen unzweideutig gegeben.

In nachstehender Tabelle geben wir für die verschiedenen Breiten von Grad zu Grad die Werthe des Halbmessers r , mit welchem jeder Parallel zu beschreiben ist, sowie die Grösse eines Längengrades. Als Einheit dient dabei die Grösse des Aequatorgrades, daher sich für den Halbmesser der Kugel der Werth

$$a = 57,295779,$$

für den Halbmesser des Parallelkreises $57,295779 \cot \varphi$ und für die Grösse des Längengrades $\cos \varphi$

ergiebt.

Breite φ	Grösse des		Breite φ	Grösse des	
	Längen- grades.	Halbmessers r .		Längen- grades.	Halbmessers r .
0°	1,0000	∞	26°	0,8988	117,474
1	0,9998	3282,473	27	0,8910	112,449
2	0,9994	1640,736	28	0,8829	107,758
3	0,9986	1093,268	29	0,8746	103,364
4	0,9976	819,368	30	0,8660	99,239
5	0,9962	654,894	31	0,8572	95,356
6	0,9945	545,133	32	0,8480	91,692
7	0,9925	466,637	33	0,8387	88,228
8	0,9903	407,681	34	0,8290	84,944
9	0,9877	361,751	35	0,8192	81,827
10	0,9848	324,940	36	0,8090	78,861
11	0,9816	294,761	37	0,7986	76,034
12	0,9781	269,556	38	0,7880	73,335
13	0,9744	248,175	39	0,7771	70,754
14	0,9703	229,801	40	0,7660	68,282
15	0,9659	213,831	41	0,7547	65,911
16	0,9613	199,814	42	0,7431	63,633
17	0,9563	187,406	43	0,7314	61,442
18	0,9511	176,338	44	0,7193	59,331
19	0,9455	166,399	45	0,7071	57,296
20	0,9397	157,419	46	0,6947	55,330
21	0,9336	149,261	47	0,6820	53,429
22	0,9272	141,812	48	0,6691	51,589
23	0,9205	134,980	49	0,6561	49,806
24	0,9135	128,688	50	0,6428	48,077
25	0,9063	122,871			

Breite φ	Grösse des		Breite φ	Grösse des	
	Längen- grades.	Halbmessers r .		Längen- grades.	Halbmessers r .
51 ^o	0,6293	46,397	71 ^o	0,3256	19,729
52	0,6157	44,764	72	0,3090	18,617
53	0,6018	43,175	73	0,2924	17,517
54	0,5878	41,628	74	0,2756	16,429
55	0,5736	40,119	75	0,2588	15,352
56	0,5592	38,646	76	0,2419	14,285
57	0,5446	37,208	77	0,2250	13,228
58	0,5299	35,802	78	0,2079	12,179
59	0,5150	34,427	79	0,1908	11,137
60	0,5000	33,080	80	0,1736	10,103
61	0,4848	31,760	81	0,1564	9,075
62	0,4695	30,465	82	0,1392	8,052
63	0,4540	29,194	83	0,1219	7,035
64	0,4384	27,945	84	0,1045	6,022
65	0,4226	26,717	85	0,0872	5,013
66	0,4067	25,510	86	0,0698	4,007
67	0,3907	24,321	87	0,0523	3,003
68	0,3746	23,149	88	0,0349	2,001
69	0,3584	21,994	89	0,0175	1,000
70	0,3420	20,854	90	0,0000	0,000

15. Die Konstruktion des Netzes ist nach diesen Angaben sehr einfach.

Man errichtet zunächst zwei aufeinander senkrechte Gerade, von denen die eine den Aequator, die andere den ersten Meridian darstellt.

Soll nun die ganze Erdoberfläche abgebildet werden, so trägt man auf der ersten Geraden beiderseits 180, auf der letzten 90 gleich grosse Grade ab.

Auf dem ersten Meridiane trägt man ausserdem von jedem Punkte aus den in vorstehender Tabelle angegebenen Werth von r in der Richtung über den Pol hinaus ab; setzt dann im Endpunkte von r den Zirkel ein und schlägt einen durch den Theilpunkt gehenden Kreisbogen, auf dem man dann die Längengrade in der Grösse, wie die Tabelle angiebt, abträgt.

Indem man zuletzt noch die Punkte gleicher Länge verbindet, erhält man die Meridiane.

Bei nicht zu grossem Maassstabe kann man übrigens ohne merklichen Fehler den Meridian von 90° Länge als einen Kreis betrachten, der über der Entfernung der Pole als Durchmesser beschrieben ist. Wenn man diesen Kreis gleich Anfangs zeichnet,

ehe man auf jedem Parallel die Längengrade abträgt, so kann man letztere auch erhalten, indem man die innerhalb dieses Kreises gelegenen Parallelkreisbogen in gleiche Theile theilt, beispielsweise in 18, wenn man die Meridiane von 10 zu 10 Grad zu zeichnen wünscht.

Auf **Taf. IV** zeigt uns **Fig. XXV** diese Projektionsmethode, ausgedehnt über etwas mehr als $\frac{3}{4}$ der Kugeloberfläche; da die linke und rechte Hälfte symmetrisch sind, ebenso wie die obere und die untere, so ist es leicht sich die fehlenden Partien zu ergänzen.

16. Es ist bei dieser Abbildung leicht, der Abplattung der Erde Rechnung zu tragen.

In diesem Fall ist

$$\text{ein Aequatorgrad} = \frac{2a\pi}{360} = a \cdot 0,0174533 = a\mu,$$

$$\text{ein Längengrad von der Breite } \varphi = \frac{a\mu \cos \varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi}},$$

$$\begin{aligned} \text{ein Meridiangrad von der mittleren Breite } \varphi \\ = \frac{a(1 - \varepsilon^2)\mu}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi^3}}, \end{aligned}$$

der Halbmesser des Kreises, welcher auf der Karte den Parallelkreis von der Breite φ darstellt, $r = \frac{a \cot \varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi}}$.

17. Für grosse Karten ist es nicht gut möglich, die Parallelkreise mit dem Zirkel zu konstruiren. Dann zeichnet man einzelne Punkte mittels ihrer Koordinaten x und y . Bedeutet x den Abstand eines Punktes der Karte, dessen Länge λ und dessen Breite φ ist, vom ersten Meridian, während der Abstand vom Aequator, vermindert um die wahre Länge des Meridianbogens vom Parallelkreis bis zum Aequator durch y ausgedrückt wird, so ist

$$\begin{aligned} x = r \sin \theta &= \frac{a \cot \varphi \sin \theta}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi}} \\ y = r - r \cos \theta &= \frac{2a \cot \varphi \sin^2 \frac{1}{2} \theta}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi}}. \end{aligned}$$

In diesen Formeln bedeutet θ den Winkel zwischen dem ersten Meridiane und demjenigen Halbmesser des Parallelkreises der Karte, der nach dem Punkte von der Länge λ und der Breite φ hin-geht. Da

$$r \theta = \frac{a \lambda \cos \varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi}}$$

ist, so hat man zur Berechnung von θ die Gleichung

$$\theta = \lambda \sin \varphi.$$

Die folgende, von Germain gegebene Tabelle zeigt uns die Werthe von θ für $\lambda = 10$ Grad für die verschiedenen Breiten von Grad zu Grad.

φ	Θ für $\lambda = 10^\circ$		φ	Θ für $\lambda = 10^\circ$		φ	Θ für $\lambda = 10^\circ$	
0°	0°	00' 00.0''	31°	5°	09' 01.4''	61°	8°	44' 46.3''
1	0	10 28.3	32	5	17 57.1	62	8	49 46.1
2	0	20 56.4	33	5	26 47.0	63	8	54 36.2
3	0	31 24.1	34	5	35 31.0	64	8	59 16.6
4	0	41 51.2	35	5	44 08.8	65	9	03 47.1
5	0	52 17.6	36	5	52 40.3	66	9	08 07.6
6	1	02 43.0	37	6	01 05.3	67	9	12 18.2
7	1	13 07.3	38	6	09 23.8	68	9	16 18.6
8	1	23 30.2	39	6	17 35.5	69	9	20 08.9
9	1	33 51.6	40	6	25 40.4	70	9	23 48.9
10	1	44 11.3	41	6	33 38.1	71	9	27 18.9
11	1	54 29.1	42	6	41 28.7	72	9	30 38.0
12	2	04 44.8	43	6	49 11.9	73	9	33 47.0
13	2	14 58.2	44	6	56 47.7	74	9	36 45.4
14	2	25 09.2	45	7	04 15.8	75	9	39 33.3
15	2	35 17.5	46	7	11 36.2	76	9	42 10.6
16	2	45 22.9	47	7	18 48.7	77	9	44 37.3
17	2	55 25.4	48	7	25 53.2	78	9	46 53.3
18	3	05 24.6	49	7	32 49.6	79	9	48 58.6
19	3	15 20.5	50	7	39 37.6	80	9	50 53.1
20	3	25 12.7	51	7	46 17.3	81	9	52 36.8
21	3	35 01.3	52	7	52 48.4	82	9	54 09.7
22	3	44 45.8	53	7	59 10.9	83	9	55 15.2
23	3	54 26.3	54	8	05 24.6	84	9	56 42.8
24	4	04 02.5	55	8	11 29.5	85	9	57 43.0
25	4	13 34.3	55	8	17 25.4	86	9	58 32.3
26	4	23 01.4	57	8	23 12.1	87	9	59 10.7
27	4	32 23.7	58	8	28 49.7	88	9	59 38.1
28	4	41 41.0	59	8	34 18.0	89	9	59 54.5
29	4	50 53.1	60	8	39 36.9	90	10	00 00.0
30	5	00 00.0						

18. Diese polykonische Projektion ist vom Coast Survey Office der Vereinigten Staaten adoptirt worden und wird deshalb auch öfters als amerikanische polykonische Projektion bezeichnet. In dem *Report of the Superintendent of the Coast Survey* vom Jahre 1859 finden sich auch von I. E. Hilgard berechnete Tafeln der Koordinaten x und y .

Bei der Anwendung dieser Projektion zur Darstellung der hydrographischen Arbeiten der Amerikanischen Küstenvermessung handelt es sich nicht um Abbildung eines nach allen Seiten hin ausgedehnten Ländergebietes, sondern nur um Kartirung eines schmalen Küstensaumes. Man fertigt dann für jede Aufnahme eine besondere Karte mit ihrem eignen Mittelmeridian, und diese einzel-

nen Karten sind durch die Fixpunkte einer Triangulation mit einander verbunden.

19. Für Lokalkarten und kleinere hydrographische Aufnahmen wendet das Küstenvermessungs-Amt der Ver.-Staaten eine etwas modificirte Darstellungsweise an, die man als äquidistante polykonische Projektion bezeichnet.

Man konstruirt dann zunächst provisorische Parallelen und Meridiane, trägt aber dann auf jedem der letzteren vom Mittelparallel aus nach Norden und Süden dieselben Theile ab, die auf dem Mittel-Meridian angegeben sind. Durch die auf diese Weise erhaltenen Punkte gleicher Breite legt man dann die definitiven Parallelkreise. Auf die Weise erhält man eine konventionelle Darstellung, bei welcher die Meridianbögen ihre wahre Länge beibehalten.

Es liegt auf der Hand, dass man ohne erhebliche Fehler diese Projektion nicht über grosse Flächenräume ausdehnen darf. Die Amerikanische Küstenvermessung benutzt dieselbe auch nur bis zu Flächen von einem Quadratgrad in einem Maassstabe von höchstens $\frac{1}{10000}$.

20. Eine andere Art der polykonischen Projektion wird vom Topographischen Departement des Englischen Kriegsministeriums zur Darstellung grösserer Theile der Erde angewandt.

Vergl. *Description of the Projektion used in the Topographical Department of the War Office for maps embracing large portions of the Earth's surface, drawn up by Capt. Clarke, R. E. and communicated by Col. Sir Henry James, R. E. Director of the Topogr. Dep. — Journal of the Royal Geogr. Soc. Vol. XXX. London 1860.*

Diese Projektion führt den Namen rektanguläre polykonische Projektion, weil die Meridiane alle rechte Winkel mit den Abbildungen der Parallelkreise bilden.

Der Aequator und der Mittelmeridian werden wie bei der gewöhnlichen (amerikanischen) polykonischen Projektion gezeichnet und eingetheilt; auch die Parallelkreise werden, wie bei jener Projektion, durch Kreisbogen vom Halbmesser

$$r = a \cot \varphi$$

dargestellt, deren Centra auf dem Mittelmeridian liegen. Aber die Einteilung der Parallelkreise, oder die Abtragung der Längengrade, erfolgt in anderer Weise.

Denkt man sich zum besseren Verständnisse die verschiedenen Parallelkreise auf einer Halbkugel, etwa von Grad zu Grad angeben, so zerfällt die ganze Halbkugel in eine Anzahl Zonen. Jede der letztern wollen wir uns annäherungsweise ersetzt denken durch die Mantelfläche eines abgestumpften Kegels, dessen Grundflächen die beiden die Zone begrenzenden Parallelkreisebenen sind. Das System dieser Kegelzonen wollen wir aufschneiden in der Ebene des ersten Meridianes, aber auf der gerade abgewandten Seite, und dann die sämtlichen Kegelflächen abwickeln. Bei dieser Abwicklung in eine Ebene erhält man nun ein System von Flächen, deren jede von zwei Kreisbogen begrenzt ist, deren gemeinsamer

Mittelpunkt das Centrum der betreffenden Kegelfläche ist. Die sämtlichen Meridiane auf einem solchen Flächenstreifen sind Gerade, die nach dem Centrum der zwei Bogen gehen und letztere in gleiche Theile theilen. Diese Geraden stehen somit auch senkrecht auf den beiden Bogen, welche den Flächenstreifen begrenzen. Die Gesammtheit der Geraden, welche aus den Meridianen einer gewissen Länge, auf den verschiedenen Kegeln sich ergeben, würden nun eine gebrochene Linie bilden, deren Elemente senkrecht stehen auf den Parallelkreisen und jeden derselben in gleiche Theile theilen, und man könnte dann, indem man die Anzahl der Zonen ins Unendliche wachsen lässt, sich der Grenze nähern, so dass jeder Meridian eine stetig gekrümmte Gerade wird, wenn nicht ein Umstand diesem Verfahren entgegenstände. Es ist derselbe Umstand, der sich der Abwicklung der Kugelfläche überhaupt entgegenstellt. Die sämtlichen Flächenstreifen, welche durch Abwicklung der verschiedenen Kegel erhalten werden, hängen nämlich nur längs des ersten Meridianes zusammen, sind aber übrigens durch Zwischenräume getrennt, so dass also jeder Meridian aus soviel getrennten Stücken besteht, als man Zonen angenommen hat.

Hieraus ergibt sich, dass die rechtwinklige Lage der Meridiane gegen die Parallelkreise nur gewahrt werden kann, wenn man die gleiche Eintheilung der Parallelkreise in Theile, die den Längenbogen auf der Kugel entsprechen, aufgiebt.

21. Es handelt sich nun darum, die Gestalt der Meridiane näher zu bestimmen. Bei dieser Bestimmung wollen wir uns der Elemente der Infinitesimalrechnung bedienen.

Es sei M (Fig. 59) der Punkt der Karte, in welchem der Parallelkreis von der Breite φ den ersten Meridian schneidet, P sei der Punkt dieses Parallels, welcher der Länge λ entspricht, O sei der Mittelpunkt des Kreises.

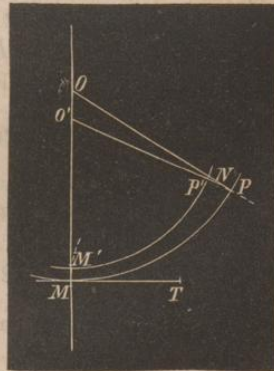
M' , P' und O' mögen dieselben Punkte für den benachbarten Parallelkreis von der Breite $\varphi + d\varphi$ sein, wo $d\varphi$, im Sinne der Differentialrechnung genommen, eine verschwindend kleine Zunahme von φ bezeichnet.

Die beiden Halbmesser OP und $O'P'$ müssen dann die Tangenten der Meridiankurve in den Punkten P und P' sein, und diese Kurve ist bestimmt, wenn man den Winkel $POM = \theta$ kennt, welchen OP mit dem ersten Meridiane einschliesst; denn P erscheint als Schnittpunkt des bekannten Kreisbogens MP und des Halbmessers OP . Es handelt sich also jetzt um Berechnung des Winkels θ .

Bezeichnet man nun den Schnittpunkt von OP und $O'P'$ mit N , so ist im Dreiecke $OO'N$ nach dem trigonometrischen Sinus-Satze.

$$OO' : ON = \sin ONO' : \sin OO'N.$$

Fig. 59.



Hier ist

$$\begin{aligned} OO' &= MO - M'O' - MM' \\ &= a \cot \varphi - a \cot (\varphi + d\varphi) - a d\varphi \\ &= a \frac{\cot \varphi - \cot (\varphi + d\varphi)}{d\varphi} d\varphi - a d\varphi \\ &= \frac{a}{\sin^2 \varphi} d\varphi - a d\varphi = a \cot^2 \varphi d\varphi, \end{aligned}$$

$$ON = a \cot \varphi,$$

$$ONO' = M'O'N - MON = (\theta + d\theta) - \theta = d\theta$$

und

$$\sin ONO' = \sin d\theta = d\theta,$$

endlich

$$\sin MON = \sin \theta,$$

so dass man erhält

$$a \cot^2 \varphi d\varphi : a \cot \varphi = d\theta : \sin \theta$$

oder

$$\cot \varphi \cdot d\varphi = \frac{d\theta}{\sin \theta}.$$

Die Integration dieser Differential-Gleichung liefert das Resultat

$$l \sin \varphi = l \tan \frac{1}{2} \theta + C,$$

wo der Buchstabe l , wie früher die natürlichen Logarithmen, C aber die Integrationskonstante bedeutet. Denkt man sich letztere in Form eines negativen Logarithmus

$$C = -lK,$$

und geht man nach dieser Substitution in vorstehender Gleichung von den Logarithmen zu den Zahlen über, so erhält man die Gleichung in der Gestalt

$$K \sin \varphi = \tan \frac{1}{2} \theta.$$

Die Bedeutung der Konstanten K erkennen wir leicht auf folgende Weise.

Der Abstand eines Punktes P von dem Mittelmeridian ist durch den Ausdruck

$$\begin{aligned} OP \cdot \sin \theta &= a \cot \varphi \cdot \sin \theta = \frac{2 a \cot \varphi \cdot \tan \frac{1}{2} \theta}{1 + \tan^2 \frac{1}{2} \theta} \\ &= 2 a K \frac{\cos \varphi}{1 + K^2 \sin^2 \varphi} \end{aligned}$$

gegeben. Setzt man nun $\varphi = 0$, so erhält man für diesen Abstand den Werth

$$2 a K.$$

Da aber auf dem Aequator, für $\varphi = 0$, die Abschnitte in ihrer wahren Grösse abgetragen werden, so ist

$$2 a K = a \lambda$$

und folglich

$$K = \frac{1}{2} \lambda,$$

so dass unsere Gleichung zwischen φ und θ nunmehr lautet:

$$\frac{1}{2} \lambda \sin \varphi = \tan \frac{1}{2} \theta.$$

22. Zur Konstruktion des Punktes P von der Breite $\lambda = 2K$, der auf einem gegebenen Parallel von der Breite φ liegt, hat O'Farrell die nachstehende einfache Konstruktion angegeben.

Im Punkte M errichte man auf dem Mittelmeridiane die Senkrechte MT , welcher man die Hälfte der wirklichen Länge des Parallelkreisbogens giebt, welcher durch MP dargestellt werden soll, also

$$MT = \frac{1}{2} a \lambda \cos \varphi.$$

Setzt man dann den Zirkel in T ein und schlägt mit der Oeffnung TM einen Bogen, so schneidet dieser den von O aus mit der Oeffnung OM geschlagenen Bogen im gesuchten Punkte P . Denn es ist

$$\tan TOM = \frac{MT}{OM} = \frac{\frac{1}{2} a \lambda \cos \varphi}{a \cot \varphi} = \frac{1}{2} \lambda \sin \varphi = \tan \frac{1}{2} \Theta$$

also $TOM = \frac{1}{2} \Theta$ und sonach $POM = \Theta$.

23. Wir wenden uns nun zu der Betrachtung der Linearvergrößerung für die verschiedenen Punkte der Karte.

a) Das Bogenelement des Parallelkreises auf der Kugel ist

$$a d\lambda \cos \varphi;$$

das entsprechende Element der Karte ist

$$OP \cdot \frac{d\Theta}{d\lambda} d\lambda.$$

Nun ist aber

$$\tan \frac{1}{2} \Theta = \frac{1}{2} \lambda \sin \varphi,$$

woraus folgt

$$\frac{d\Theta}{d\lambda} = \cos^2 \frac{1}{2} \Theta \sin \varphi = \frac{\sin \varphi}{1 + K^2 \sin^2 \varphi}.$$

Setzt man noch für OP seinen Werth $a \cot \varphi$, so erhält man für das Bogenelement des Parallelkreises auf der Karte den Werth

$$\frac{a d\lambda \cos \varphi}{1 + K^2 \sin^2 \varphi},$$

und sonach ist die Linearvergrößerung auf dem Parallelkreise

$$\kappa' = \frac{1}{1 + K^2 \sin^2 \varphi}.$$

Für $K = 0$, also $\lambda = 0$, und ebenso für $\varphi = 0$, also für den Mittelmeridian und den Aequator, hat κ' stets den Werth 1, sonst aber ist dieses Verhältniss stets ein echter Bruch.

b) Das Meridianelement auf der Kugel ist

$$a d\varphi;$$

das entsprechende Element auf der Karte ist PP' (Fig. 59) und möge ds heissen. Nun ist aber in der Figur

$$OP = OO' \cos \Theta + O'P' \cos OBO' + PP';$$

dabei ist $OP = a \cot \varphi$, $OO' = a \cot 2\varphi : d\varphi$, $O'P' \cos OBO' = O'P' = a \cot (\varphi + d\varphi)$ und also

$$PP' = ds = a \cot \varphi - a \cot 2\varphi \cdot d\varphi - a \cot (\varphi + d\varphi),$$

woraus sich nach einigen leichten Umwandlungen ergibt

$$ds = a d\varphi \cdot \frac{1 + K^2 + K^2 \cos^2 \varphi}{1 + K^2 \sin^2 \varphi}.$$

Sonach ist die Linearvergrößerung im Meridiane

$$\kappa'' = \frac{1 + K^2 + K^2 \cos^2 \varphi}{1 + K^2 \sin^2 \varphi}.$$

Dieses Verhältniss hat den Werth 1 für $K = 0$, also $\lambda = 0$, gerade so wie dies für κ' der Fall ist. Für $\varphi = 0$ oder den Aequator ist aber

$$\kappa'' = 1 + 2K^2,$$

die Linearvergrößerung im Meridiane nimmt also längs des Aequators vom Mittelmeridiane mit wachsender Länge stetig zu von

$$1 \text{ bis } 1 + \frac{\pi^2}{2} = 5,9348.$$

24. Endlich gedenken wir noch der Flächenvergrößerung. Diese ist

$$\kappa' \kappa'' = \frac{1 + K^2 + K^2 \cos^2 \varphi}{(1 + K^2 \sin^2 \varphi)^2}.$$

Längs des ersten Meridians, für $\lambda = 0$, also auch $K = 0$, ist dieselbe der Einheit gleich.

Längs des Aequators ändert sie sich in demselben Verhältnisse wie κ'' .

Ausserdem hat dieselbe den Werth 1 längs der sphärischen Kurve, die durch die Gleichung

$$1 + K^2 + K^2 \cos^2 \varphi = (1 + K^2 \sin^2 \varphi)^2$$

oder

$$K^2 \sin^4 \varphi + 3 \sin^2 \varphi - 2 = 0$$

definiert ist. Diese Kurve schneidet den ersten Meridian rechtwinklig unter $54^\circ 44'$ Breite, von da an wendet sie sich südlich, passiert den Meridian von 90° Länge in der Breite von $50^\circ 26'$ und erreicht den die Karte begrenzenden Meridian unter $43^\circ 46'$ Breite. In allen Punkten auf der Südseite dieser Kurve sind die Flächen vergrößert, nördlich davon aber verkleinert.

25. Da diese Projektion nur zur Darstellung grosser Theile der Erdoberfläche dient, so ist es nicht nöthig, die Abplattung in Betracht zu ziehen.

Auf unserer **Taf. V, Fig. XXV**, ist etwas über die Hälfte der Kugel in dieser Weise dargestellt.