www.e-rara.ch

Vorträge über Geschichte der technischen Mechanik und theoretischen Maschinenlehre sowie der damit in Zusammenhang stehenden mathematischen Wissenschaften

Rühlmann, Moritz

Leipzig, 1885

ETH-Bibliothek Zürich

Persistent Link: https://doi.org/10.3931/e-rara-75270

Viertes Capitel.

www.e-rara.ch
Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien – von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material – from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d'imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L'éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes – des débuts de l'imprimerie jusqu'au 20e siècle.

e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

Nutzungsbedingungen Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titelinformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

Terms of Use This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

Conditions d'utilisation Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

Condizioni di utilizzo Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]

Visual Library

‚Philosophiae naturalis principia mathematica' berührt wird und zwar in den Axiomata (Grundsätze oder Gesetze der Bewegung) nach Corollarium VI im Scholium (Anmerkung, S. 40 der Wolfers'schen Uebersetzung).

Viertes Capitel.

Von Mitte des siebzehnten bis Anfang des achtzehnten Jahrhunderts.

§. 14.
Newton.

Nachdem Galilei das Beharrungsgesetz (S. 61, Nr. 1) zwar ausgesprochen, aber nicht entscheidend erörtert hatte, Huyghens (S. 98) das Gesetz der Centralbewegung (Centrifugalkraft) viel besser als Aristoteles (S. 6) nachzuweisen vermochte, jedoch ebenfalls nur auf Kreisbahnen beschränkte und Wren, Halley[1]) und Hooke[2]) das Gravitationsgesetz zwar mehr oder weniger ahnten, jedoch bestimmt nicht nachzuweisen im Stande waren; fehlte es an einer gewaltigen geistigen Größe, welche Alles, was Vorgänger und Zeitgenossen einzeln in den mathematischen, physischen, astronomischen und optischen Wissenschaften gedacht, aufgestellt und entdeckt hatten, in einen Brennpunkt zu vereinigen verstand. Diese Größe war der Engländer Isaac Newton (geb. 1643; gest. 1727). Indem wir hinsichtlich der Specialitäten Newton's sämmtlicher Leistungen, auf dessen später folgende Biographie und auf die übrigens angegebene Literatur verweisen, werde hier besonders das hervorgehoben, was vor Allem die technische Mechanik dem Newton zu verdanken hat. Diese Verdienste bestehen hauptsächlich in der ganz entschiedenen

---

1) Halley, geb. 1656 in Haggerston bei London, gest. 1724 zu Greenwich, Astronom, Professor in Oxford, zuletzt kgl. Astronom der Sternwarte zu Greenwich.

2) Hooke, geb. 1635 auf der Insel Wight, gest. 1703 zu London. Auf der Universität Assistent von Wallis und Boyle, nachher Professor der Geometrie in London, später Secretär der königl. Societät etc. Er hatte die schwache Seite sich so ziemlich jede zu seiner Zeit gemachte Entdeckung anzueignen!

Feststellung der mechanischen Principien und Fundamentalsätze und in der universellen Theorie der krummlinigen Bewegungen, welche durch beliebige Kräfte von veränderlichen Intensitäten erzeugt werden.

In diesen beiden Beziehungen (und selbstverständlich im Gebiete der Gravitations-Mechanik) wird sein S. 108 bereits genanntes Werk ‚Philosophiae naturalis principia mathematica' (welches erst 1687 veröffentlicht wurde) für alle Zeiten hoch zu achten sein, obwohl die darin eingeschlagene, schwer verständliche geometrische Behandlungsweise das Studium derselben sehr erschwerte und deshalb auch der erste Erfolg der ‚Principia' nicht so groß war als man hätte erwarten sollen. Bezeichnete doch selbst Leonhard Euler [1]) Newton's gelehrtes Werk als eine schwierige Lecture, so daß es lange dauerte, ehe es zur verdienten allgemeinen Anerkennung gelangte.

Zu bedauern war es namentlich, daß Newton in den ‚Principien' nirgends von der von ihm wahrscheinlich schon 1666 erfundenen Fluxionsrechnung (Method of Fluxions), Gebrauch machte, da diese Methode im Wesentlichen (für gewisse einfache Fälle) dasselbe leistete, wie die nachher (von Leibnitz) erfundene Differenzialrechnung.

Mit vortrefflichen Erläuterungen und mit Anwendungen der Differenzialrechnung versehen erschienen von 1739—1760 (in zwei Auflagen) die ‚Principia' in drei Quartbänden von den Franzosen Le Seur und Jacquier herausgegeben, eine Arbeit, die noch heute die Beste ihrer Art genannt zu werden verdient [2]).

---

1) Welches Urtheil beispielsweise die Astronomen Mädler und Wolf über dieses Werk haben, erhellt aus des letzteren ‚Geschichte der Astronomie', wo es S. 462, wie folgt lautet:

„Newton's ‚Philosophiae naturalis principia mathematica' enthalten die Grundlage seiner Attractionstheorie, in der alles, was bis dahin Wahres und Richtiges in Beziehung auf Bewegung der Weltkörper gefunden war, seinen vollständigen und entscheidenden Beweis, seinen allgemeinen Zusammenhang, seine innere Begründung fand, und wodurch eine Menge bis dahin ungekannter und ungeahnter Wahrheiten, die sonst nur in Zwischenräumen von Jahrhunderten ans Licht getreten wären, wie mit einem Schlage entdeckt wurden".

2) Merkwürdiger Weise erschien erst 1872 eine deutsche Ausgabe der ‚Principien' (mit Bemerkungen und Erläuterungen) von Wolfers, wobei nur bedauert werden muß, daß in dieser sonst sehr guten, verdienstvollen Arbeit die einzelnen Sätze mit Paragraphen versehen wurden, was das Nachschlagen ungemein erschwert, während anderwärts überall nach der Newton'schen Originaleintheilung citirt wird.

An die Spitze seiner ‚Principia‘ stellte Newton ausdrücklich folgende drei Grundgesetze der Bewegungs- oder Erfahrungsaxiome (axiomata sive leges motus wie er sie nannte):

1) „Jeder Körper beharrt in seinem Zustande der Ruhe oder der gleichförmigen geradlinigen Bewegung, wenn er nicht gezwungen wird, seinen Zustand zu ändern (Princip der Trägheit an der Materie)“.

2) „Die Aenderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach welcher jene Kraft wirkt“.

3) „Die Wirkung ist stets der Gegenwirkung gleich oder die Wirkungen zweier Kräfte auf einander sind stets gleich und von entgegengesetzter Richtung“.

Die ersten beiden dieser Principien wurden bereits von Galilei in den ‚Discorsen‘ [1]) ausgesprochen, während das dritte Princip, das der Gleichheit zwischen Wirkung und Gegenwirkung von Huyghens in seinem ‚Horologium oscillatorium‘ zwar nicht ausdrücklich genannt, jedoch in der Aufstellung der Gesetze der Centrifugalkraft und in der Berechnung des Schwingungsmittelpunktes des physischen Pendels, stillschweigend gebraucht wurde.

Gestützt auf diese Principien, welche die Grundlage der Dynamik bilden, brachte Newton in mehr als hundert Theoremen alle wichtigen Fragen der Dynamik zur Erörterung und berührt in beinahe eben so vielen Problemen, die er vorlegt und löst, fast alle Zweige der Physik des Himmels und der Erde.

Unter derselben Ueberschrift („Grundsätze oder Gesetze der Bewegung“) erörtert Newton noch mehrere Zusätze (Corollarien), wovon hier zwei, als für uns besonders wichtig, Platz finden mögen [2]):

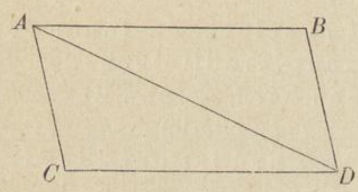
Zusatz 1. „Ein Körper beschreibt in derselben Zeit durch Verbindung zweier Kräfte die Diagonale eines Parallelogrammes, in welcher er, vermöge der einzelnen Kräfte die Seiten beschrieben haben würde“.

Newton fügt diesem Satze folgende Erläuterung bei: „Wird der Körper durch eine Kraft M allein von A (Figur 24) nach B,

1) Man sehe vorher S. 62, Note 2.

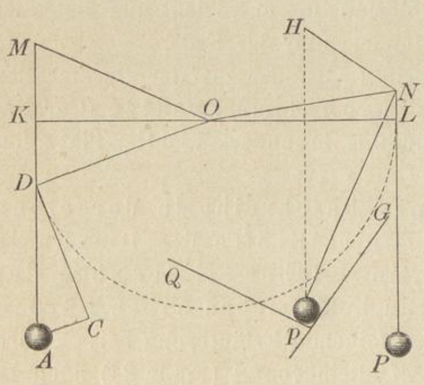
2) Der Verfasser giebt hier die Wolfers'sche Uebersetzung unverändert wieder.

und durch eine Kraft N allein von A nach C gezogen, so vollende man das Parallelogramm $ABCD$, und es wird der Körper durch beide vereinte Kräfte in derselben Zeit von A nach D gezogen. Da nämlich die Kraft N längs der Linie $AC \parallel BD$ wirkt, so wird diese Kraft, nach den zweiten der vorstehenden Gesetze, nichts an der Geschwindigkeit ändern, mit welcher sich der Körper vermöge der Kraft M, jener Linie BD nähert. Der Körper wird daher in derselben Zeit zur Linie BD gelangen, die Kraft N mag einwirken oder nicht, und wird daher am Ende jener Zeit sich irgendwo auf BD befinden. Auf dieselbe Weise folgt, daß er am Ende jener Zeit sich irgendwo auf der Linie CD befinden wird; er muß sich also nothwendig in dem Punkte D befinden, wo beide Linien zusammentreffen. Nach dem 1. Gesetze der Bewegung wird er geradlinig von A nach D fortgehen".



24.

Zusatz 2. Hieraus ergiebt sich die Zusammensetzung der geradlinig wirkenden Kräfte AD, aus irgend welchen zwei schiefwirkenden AB und BD und umgekehrt die Zerlegung einer geradlinigen Kraft AD in die beliebigen schiefen AB und BD. Diese Zusammensetzung und Zerlegung wird in der Mechanik vollständig bestätigt.



25.

Newton reiht hieran folgende Bemerkungen:

„Gehen vom Mittelpunkte O (Figur 25) eines Rades ungleiche Radien OM[1]) ON aus und tragen dieselben an Fäden MA, NP die Gewichte A und P, so werden die Kräfte gesucht, welche diese Gewichte zur Bewegung des Rades hervorbringen. Hierzu ziehe man durch den Mit-

1) Durch ein Versehen ist $\overline{MO}$ zu groß gezeichnet. Es sollte $MO \angle NO$ sein.

telpunkt O die gerade Linie KOL, welche in K und L auf der Richtung der Fäden normal ist. Aus O beschreibe man mit OL als Radius einen Kreis, welcher den Faden MA in D schneidet. Ferner ziehe man $AC \parallel OD$ und DC rechtwinklig auf DO. Da es gleichgültig ist, ob die Punkte K, L, D der Fäden an die Ebene des Rades befestigt sind oder nicht, so werden die Gewichte dasselbe bewirken, man mag sie an den Punkten K und L oder an denen D und L anfügen. Die Kraft des Gewichtes A werden durch die Länge AD ausgedrückt und dieselbe in die beiden Seitenkräfte AC und CD zerlegt, von denen AC den Radius DO geradlinig vom Centrum fortzieht und daher nichts zur Umdrehung des Rades beitragen kann, DC hingegen den Radius DO normal angreift und dasselbe bewirkt, als wenn sie rechtwinklig auf $OL = OD$ wirkte. Ihre Wirkung wird daher derjenigen der Kraft P gleich sein, wenn sich verhält:

$$P : A = CD : DA.$$

Da nun $\triangle\, ADC \backsim \triangle\, DOK$ ist, so haben wir:

$$CD : DA = KO : OD = KO : OL.$$

Demnach werden die Gewichte A und P, welche sich umgekehrt wie die in gerader Linie liegenden Radien OK und OL verhalten, gleiche Intensität besitzen, und so im Gleichgewicht stehen. (Dies ist die sehr bekannte Eigenschaft der Waage, des Hebels und der Winde). Ist eins von beiden Gewichten größer, als diesem Verhältnisse entsprechend, so wird seine Kraft, in Bezug auf Drehung des Rades, um so größer sein".

Vorstehende Untersuchung ist insofern von nicht geringer Wichtigkeit, als sie die erste ihrer Art ist, welche zeigt wie man das Hebelgesetz aus dem Satze vom Parallelogramme der Kräfte ableiten kann. Allerdings muß Newton um das Gleichgewicht der Kräfte A und P am geradlinigen Hebel KOL nachzuweisen, letzteren erst in einen Winkelhebel LOD verwandeln.

In ähnlicher Weise leitet Newton noch die Gesetze der schiefen Ebene und des Keiles aus dem Satze vom Parallelogramm der Kräfte ab, indem er sich ein Gewicht $p = P$ (Figur 25) zwischen zwei schiefen Ebenen pQ und pG in einer Lage befindlich denkt wie ein Keil zwischen den inneren Flächen eines gespaltenen Körpers [1]) etc.

1) Hierzu gehören auch die übrigen Theile der Figur 25. Insbesondere

Uebrigens hat Newton durch vorstehende Sätze zwar das Parallelogramm der Kräfte als Basis der ganzen Mechanik bezeichnet, hierdurch aber keineswegs Ansprüche auf eine wichtige Entdeckung gemacht, vielmehr zu erkennen gegeben, daß die Entdeckung dieser bedeutsamen Wahrheit durchaus nicht einer einzigen Persönlichkeit zugeschrieben werden kann.

Newton selbst spricht sich über den Inhalt seiner in drei Bücher getheilten ‚Mathematische Principien der Naturlehre‘, wie folgt aus):

„In den ersten beiden Büchern haben wir die allgemeinen Sätze der Dynamik entwickelt[2]) und im dritten Buche[3]) ein Bei-

---

denkt sich Newton pN als einen Faden, woran das Gewicht p befestigt wurde, pH als eine Senkrechte auf dem Horizonte etc.

1) ‚Principia, Auctoris Praefatio‘ XII und Wolfers S. 2.

2) Soweit es hier Zweck und Raum gestatten, entlehnen wir den beiden ersten Büchern einige der beachtenswerthesten Sätze und Angaben.

a) Lib. I, Sect. III, Prop. XI (W., §. 29) löst Newton die Aufgabe der Centralkräfte, d. h. er findet aus der gegebenen Bahn des beweglichen Körpers, das Gesetz der Kraft, welches also lautet:

„Bewegt sich der Körper in einer Ellipse und ist die Centripetalkraft nach dem Brennpunkte der Ellipse gerichtet, so verhält sich die Centripetalkraft umgekehrt wie das Quadrat der Entfernung“.

b) Ebenfalls Lib. I, Sect. VII, Prop. XXXIX (W., §. 79) leitet Newton auf synthetischem Wege den bereits vorher S. 71 unter Nr. VIII (nach Varignon analytisch) entwickelten Werth j für die Acceleration oder Beschleunigung (der veränderlichen Bewegung) $j = \frac{v\,dv}{ds}$ ab.

Im 2. Buche, welches besonders vom Widerstande bewegter Körper in flüssigen Mitteln und von der Hydraulik handelt, finden sich für die techn. Mechanik u. A. folgende interessante und werthvolle Abschnitte.

c) Sect. VII, Prop. XXXVI (W., S. 326, §. 49). „Ausfluß und Stoß des Wassers, wenn solches aus Bodenöffnungen cylindrischer Gefäße fließt und zwar mit Beachtung der Contraction des Wassers in der Ausflußmündung.“

Die hier zu stellende Aufgabe löste Newton leider nicht glücklich (man sehe deshalb die 2. Auflage der ‚Hydromechanik‘ des Verfassers, S. 188 und S. 575) und bestätigte recht eigentlich den Erfahrungssatz, daß Niemand so hoch steht, um sich nicht einmal irren zu können.

Von Prop. XXXVII bis LX incl. (W., S. 334, §. 50 bis S. 353) behandelt Newton den Widerstand der Körper bei ihrer Bewegung im Wasser und in der atmosphärischen Luft, vorzugsweise unter der Annahme, daß dieser Widerstand dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist, wobei über auch selbst angestellte Versuche berichtet wird. (Auch hierüber sehe man die ‚Hydromechanik‘ des Verfassers, S. 732).

3) Im 3. Buche erörtert er u. A. (Prop. XXIV, W., §. 28) den Lehrsatz:

spiel dieser Sache durch die Erklärung des Weltsystems vorgelegt [1]). Denn dort wird nämlich aus den Erscheinungen am Himmel mit Hülfe der, in den ersten Büchern mathematisch bewiesenen Sätze die Kraft der Schwere abgeleitet, vermöge welcher die Körper sich bestreben, der Sonne und den einzelnen Planeten sich zu nähern. Aus derselben Kraft werden dann, gleichfalls in mathematischer Entwicklung, die Bewegungen der Planeten, Kometen, des Mondes und des Meeres als Folgen abgeleitet".

Gleichsam zur Ergänzung des Vorstehenden und als Schluß der Mittheilungen über Newton folgt hier noch eine (möglichst) kurze Biographie dieses ausgezeichneten Mannes.

Isaac Newton wurde geboren [2]) am 25. December 1642 altenglischen, oder 5. Januar 1643 neuen Stiles, zu Woolsthorpe, einem Dörfchen im Kirchspiel Colsterworth in Lincolnshire, ungefähr 6 Meilen südlich von Grantham. Bei seiner Geburt (die nach dem Tode seines Vaters erfolgte), war er so klein und schwach, daß man wenig Hoffnung für ein langes Leben hatte. In seinem zwölften Jahre besuchte er die Stadtschule zu Grantham, wo er weder für fleißig noch talentvoll galt. Ein Streit mit seinen Mitschülern wurde Veranlassung, daß er anhaltend fleißig zu arbeiten anfing. Während sich dann seine Mitschüler in den Erholungsstunden mit ihren Spielen belustigten, beschäftigte er sich mit der Anfertigung von kleinen Maschinen, worunter seine Biographen [3])

„Die Ebbe und Fluth des Meeres werden durch die Wirkungen der Sonne und des Mondes hervorgebracht." Ferner

Prop. XIX bis XXXV die geometrische Auflösung des „Problemes der drei Körper", ursprünglich die Störungen umfassend, welche die Anziehung der Sonne in der Bewegung des Mondes um die Erde hervorbringt. Allgemein betrachtet enthält dies Problem die Bestimmung der Bewegung von drei Körpern, die sich gegenseitig im Verhältniß ihrer Massen und verkehrt, wie die Quadrate ihrer Entfernungen anziehen.

Obwohl dies Problem in seiner Allgemeinheit analytisch noch nicht gelöst ist, so kann man doch die geometrische Auflösung desselben ausschließlich Newton zuerkennen.

1) Als eine der kostbarsten Früchte der von Newton aufgestellten Lehre der allgemeinen Anziehung, ist der Nachweis von Leverrier und Adams, aus den Störungen, welche sich im Laufe des Uranus durch Beobachtungen gezeigt hatten, den Ort eines noch unbekannten Planeten herzuleiten. Es gelang nämlich (1846) den genannten zwei Astronomen, mit Hülfe der Rechnung, den Ort des Planeten Neptuns so genau anzugeben, daß es nur einer Nachsuchung an betreffender Stelle bedurfte, um den bis dahin unbekannten Planeten aufzufinden. Letzteres gelang zuerst dem Dr. Galle in Berlin. (Man sehe deshalb auch Mädler's ‚Geschichte der Astronomie Bd. II, S. 150).

2) Ein Jahr nach dem Tode Galilei's, der nach S. 76 am 8. Januar 1642 starb.

3) Brewster, ‚The Life of Sir Isaac Newton', London 1831, p. 5 etc.

eine Windmühle, eine Wasseruhr und einen Karren hervorheben, der von einer sitzenden Person in Bewegung gesetzt wurde. Auch soll er ein Laufrad erbaut haben, welches durch eine Maus in Umdrehung gesetzt wurde, sowie Papierdrachen verfertigt haben, wobei er die beste Form und Proportion zu ermitteln suchte, sowie die vortheilhafteste Lage und Zahl der Punkte, woran die Zugschnur befestigt werden mußte.

Die Unvollkommenheit seiner Wasseruhr hatte ihn wahrscheinlich auf den Gedanken gebracht, ein genaueres Zeitmaaß zu schaffen, was er auch in der Herstellung von Sonnenuhren fand, die er an den Wänden mehrerer Gebäude zu Woolsthorpe zeichnete; dieselben sollen noch nach seinem Tode existirt haben.

Obwohl von seiner Mutter zur Landwirthschaft bestimmt, überzeugte man sich doch bald von seiner Abneigung und Unfähigkeit zu diesem Stande und schickte ihn deshalb nach einiger Vorbereitung, im Juni 1660, also 18 Jahre alt, auf die Universität Cambridge. Hier studirte er besonders die Werke von Descartes, Wallis, Kepler und erwarb sich daselbst 1665 den Grad eines Baccalaureus.

Eins der wichtigsten Jahre in Newton's Leben war das von 1666, da er in dieser Zeit seine Gedanken auf jene drei wichtigen Entdeckungen richtete, die seinen Namen zu einem der gefeiertsten unter den Gelehrten aller Völker gemacht haben, nämlich auf die Entdeckung, daß das weiße Licht aus unzählig vielen (oder sieben) Farben von verschiedener Brechbarkeit bestehe, auf die Methode der Fluxionen und die Entdeckung der allgemeinen Gravitation der Massen.

Auf letzteres Gesetz soll er durch folgenden Vorfall geleitet worden sein: Eines Tages im Garten eines Landhauses in Woolsthorpe, wohin er sich von Cambridge, um der herrschenden Pest zu entfliehen zurückbegeben hatte, unter einem Apfelbaume ruhend, soll das Herabfallen eines Apfels von diesem Baume ihn zuerst auf den Gedanken geführt haben, daß die Ursache dieses Falles in einer von der Erdmasse ausgehenden Kraft liege, daß eine solche Anziehungskraft allen Massen des Universums eigen sein möchte und daß die Weltkörper durch eben diese Kraft in ihren Bahnen erhalten werden [1]).

1669 wurde Newton Professor der Mathematik in Cambridge [2]), wo er die Kraft seines Geistes vorzüglich der Optik und der physischen Astronomie

---

Deutsch von Goldberg, mit Anmerkungen von Brandes, Leipzig 1833, S. 2. Brewster's Biographie ist die umfangreichste und (abgesehen von etwas englischer Färbung) auch die beste. Nächstdem ist Biot's Lebensbeschreibung in der ‚Biographie universelle' von besonderem Werthe.

1) Die Richtigkeit dieser Erzählung ist von mehreren Seiten bezweifelt worden (u. A. von Gauß in Göttingen). Zuerst erzählt dieselbe Voltaire und zwar gestützt auf die Angaben der Nichte Newton's, einer Madame Conduit, worüber Wilde in seiner ‚Geschichte der Optik' (Th. II, S. 5) speciell berichtet. In den neuesten Werken über ‚Geschichte der Astronomie' von Mädler und Wolf findet sich die Erzählung ebenfalls. Mädler (Bd. I, S. 361) berichtet speciell, daß der merkwürdige Baum — von ihm ein Baum des Erkenntnisses genannt — noch im Anfange dieses Jahrhunderts existirt habe. Wolf (a. a. O. S. 447) erwähnt noch Newton's Freund, Henri Pemberton, als Erzähler der Sache.

2) Isaac Barrow (geb. 1630 zu London; gest. 1677 ebendaselbst) war als

zuwandte. Im Januar 1672 wählte man ihn zum Mitgliede der königlichen. Societät der Wissenschaften in London.

Ungeachtet seiner Leistungen, trotz der ihm gewordenen Auszeichnungen und des Rufes seiner Gelehrsamkeit der weit über England hinaus reichte, hatte er so geringe Einnahmen, daß er fortwährend mit Nahrungssorgen kämpfen mußte. 1675 war Newton noch so arm, daß ihm die Personensteuer von wöchentlich einem Schilling, aus Rücksicht auf seine Dürftigkeit erlassen werden mußte [1].

Im Monat Mai 1687 erfolgte auf Kosten der königlichen Societät der Druck seines ausgezeichneten Werkes ‚Philosophiae naturalis Principia mathematica‘, worüber vorher bereits ausführlich berichtet wurde.

Durch seinen Gönner Lord Montague wurde Newton im Jahre 1695 zur Regulirung des Münzwesens nach London gerufen, erst zum Aufseher der Münze und nachher 1699 zum Münzmeister mit einem bedeutenden jährlichen Gehalte (1200 bis 1500 Pfd. St.) ernannt.

In demselben Jahre wurde Newton auch Mitglied der Pariser Akademie der Wissenschaften.

Im Jahre 1701 wurde er Parlamentsmitglied für die Universität Cambridge und 1703 Präsident der königlichen Societät der Wissenschaften, welche Stellung er auch bei jährlich erneuter Wahl, bis an seinen Tod behielt. Erst 1704 erscheint Newton's berühmtes Werk über Optik in englischer Sprache unter dem Titel ‚Optics or a treatise of the reflections, refractions, inflections and colours of light‘ [2]. Im folgenden Jahre 1705 ehrte die Königin Anna Newton durch Verleihung der Ritterwürde.

Als Georg I. 1714 auf den Thron Großbritanniens gelangte, wurde Sir Isaac Newton Gegenstand besonderen Interesses am Hofe, wozu nicht nur seine hohe Stellung in der Verwaltung, sein glänzender wissenschaftlicher Ruhm, sondern vor Allem sein fleckenloser Charakter (namentlich gegenüber Leibniz) und seine ungeheuchelte Frömmigkeit wesentlich beitrugen. In letzterer Beziehung hat Newton viel falsche und ungerechte Beurtheilungen erfahren müssen und man hat namentlich seine theologischen Forschungen als Zeichen von Geistesabwesenheit zu erklären sich bemüht.

Von vielen Umständen, welche auf das Gegentheil letzterer Behauptungen schließen lassen, verdient die Thatsache besonders erwähnt zu werden, daß er noch 1726, wo er durch Dr. Pemberton eine dritte Auflage seiner ‚Principien‘ besorgen ließ, mancherlei nützliche Bemerkungen und Verbesserungen persönlich

---

Professor der Mathematik in Cambridge der Lehrer Newton's. 1669 entsagte Barrow seiner Professur zu Gunsten Newton's, um ganz der Theologie zu leben, 1670 ward Barrow Kaplan Karls II., Mitglied der Royal Soc. etc.

1) Littrow in der Uebersetzung von Whewell's ‚Geschichte der inductiven Wissenschaften‘, Th. II, S. 162.

2) Newton hat von seinen mathematischen Arbeiten selbst wenig veröffentlicht; sie sind größtentheils durch Andere, sogar erst nach seinem Tode dem Drucke übergeben worden. Aus seinem Werke über Optik ist zugleich zu entnehmen, daß die von Newton adoptirte Emanationstheorie (gegenüber der Undulationstheorie des Huyghens u. A. S. 79, Note 1) später nicht so entschieden vertheidigt wurde als dies früher der Fall war. (Man sehe hierüber auch Poggendorff's ‚Geschichte der Physik‘, S. 644 und 649).

anzubringen vermochte, welche zwar zuweilen von Abnahme des Gedächtnisses, nicht aber von Mangel an Geisteskraft zeugten.

Ungeachtet sich seit 1722 bei Newton mancherlei körperliche Leiden einstellten, versammelte er dennoch in seinem Hause in kleinen Kreisen die angesehensten und geistreichsten Männer um sich, deren Mittelpunkt allerdings seine Nichte Catharine Barton (nachherige Conduit) bildete.

Im Jahre 1725 verlegte er auf den Rath der Aerzte seinen Aufenthalt von London nach Kensington, wo sich sein Zustand zum Wohlbefinden besserte. Noch am 28. Februar 1727 konnte er sich nach London begeben, um einer Sitzung der königlichen Societät zu präsidiren. Indeß stellten sich die alten Uebel mit vergrößerter Heftigkeit bald wieder ein, demzufolge er am 20. März 1726, 85 Jahre alt, dem Gesetze der Natur unterlag, die sich gegen ihn so wohlthätig, wie gegen wenig andere Sterbliche erwiesen hatte.

Er wurde in der Westminster-Abtei zu London unter allgemeiner Trauer beigesetzt mit allen den Ehrenbezeugungen, welche man sonst nur den Mitgliedern des königlichen Hauses zu erweisen pflegt.

Im Jahre 1731 setzten ihm seine Verwandten in der genannten Abtei den Sarkophag als Denkmal, welcher heute noch an derselben Stelle zu finden ist[1]).

§. 15.
Leibniz.

Mit Vorstehendem sind wir bereits in eine der allerbedeutendsten Perioden eingetreten, welche in der Geschichte der reinen und angewandten Mathematik zu verzeichnen ist, zu der, worin Newton die Fluxionsrechnung und Leibniz die Differenzialrechnung erfand[2]) und wodurch eine gänzliche Um-

1) Die lateinische Inschrift dieses Denkmals lautet in deutscher Uebersetzung (nach Goldberg a. a. O., S. 271), folgendermaßen:

Hier ruht
Der Ritter Sir Isaac Newton
Welcher durch fast himmlische Geisteskraft der Planeten Bewegung, Gestalten,
Der Cometen Bahnen, des Oceans Ebbe und Fluth,
Indem seine Mathematik ihm den Weg zeigte,
Zuerst bewies;
Der Lichtstrahlen Ungleichheiten,
Der daraus entstehenden Farben Eigenthümlichkeiten,
Die keiner vorher auch nur gemuthmaßt hatte, erforschte.
Der Natur, der Alterthümer, der heiligen Schrift
Fleißiger, scharfsinniger und treuer Erklärer,
Des allmächtigen Gottes Majestät verherrlichte er in seiner Philosophie,
Die Einfalt des Evangeliums zeigte er in seinem Wandel.
Mögen die Sterblichen sich freuen, daß unter ihnen lebte
Diese Zierde des Menschengeschlechtes.
Geboren d. 25. December 1642, gestorben d. 20. März 1727.

2) Zur Differenzialrechnung bedurfte Leibniz den Begriff des Unendlich-

gestaltung der gesammten höheren mathematischen Wissenschaften erfolgte.

Newton hatte bald bemerkt, daß die Mathematik in dem Zustande, in welchem sie sich in der Mitte des siebzehnten Jahrhunderts befand, die wichtigsten Probleme nicht zu lösen vermochte und daß alle damaligen, eigenthümlichen Rechnungsmethoden (wie die des Archimedes, Kepler, Cavalieri, Roberval[1]), Fermat[2]), Pascal, Barrow[3]) u. A.) nicht hinreichten, um überall Rectificationen, Quadraturen, Cubaturen,

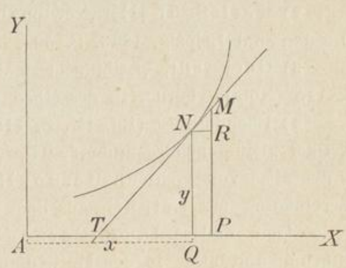
---

kleinen. Newton vermied letzteres, indem er die betreffenden mathematischen Größen wie durch eine Bewegung erzeugt, wachsend dachte und Fluentes nannte. Die Geschwindigkeiten, mit welchen die Fluenten durch die sie erzeugende Bewegung zunehmen, nannte er Fluxionen und bezeichnete sie durch Buchstaben für die Fluenten, mit Punkten darüber. Sind z. B. die veränderlichen Größen x und y, so sind ihre Fluxionen $\dot{x}$ und $\dot{y}$. Ueberdies waren Newton's Fluxionen endliche den unendlich kleinen Veränderungen der Größen proportionale Glieder eines Verhältnisses. Während Newton durch Geometrie und allgemeine Bewegungslehre auf seine Fluxionsrechnung geführt wurde, gelangte Leibniz durch die Betrachtung der Unterschiede und Summen in den Reihen der Zahlengrößen auf seine Differenzialrechnung. Anfänglich bezeichnete Leibniz das Differenzial einer Veränderlichen durch $\frac{x}{d}$, wofür er später (wie jetzt gebräuchlich) dx setzte.

1) Roberval's S. 82 erwähnte Methode der Tangenten, wozu er das Parallelogramm der Bewegungen in Anwendung brachte, hat eine merkwürdige Analogie mit der der Fluxionen.

2) Fermat (S. 82) gebrauchte bei seiner herrlichen Methode de maximis et minimis eine Rechnung, worin die Differenz zweier Größen, und dadurch mittelbar auch die Differenz zweier zugehöriger Größen, verschwindend gesetzt wird, zur Bestimmung des größten oder kleinsten Werthes einer Function, und der Berührenden an einer Curve. Diese Methode ist die Veranlassung, daß man Fermat als den ersten Erfinder der Infinitesimalrechnung oder der Analysis des Unendlichen betrachtet.

3) Mit Hülfe des sogenannten Differenzialen Dreiecks NMR (Figur 26) (auch tri angulum characteristicum genannt), wenn man $\overline{NR} = dx$ und $\overline{MR} = dy$ setzt, fand Barrow (Gerhardt ‚Die Entdeckung der höheren Analysis', Halle 1855, S. 47) die Größe $\overline{QT}$, d. h. die Subtangente einer Curve ANM, durch die Proportion $\overline{QT} : \overline{NQ} = \overline{NR} : \overline{MR}$, woraus $\overline{QT} : y = dx : dy$, und ferner folgt: $\overline{QT} = \frac{y\,dx}{dy}$. Natürlich bezeichnet Barrow $\overline{NR}$ und $\overline{MR}$ noch nicht durch die Zeichen dx und dy.



26.

Tangentenprobleme, Maxima und Minima, noch weniger aber um bedeutsame Themata aus der Mechanik des Himmels und der Erde entsprechend zu behandeln.

Newton scheint bereits 1665[1]) im Besitze aller derjenigen Hülfsmittel gewesen zu sein, welche er zur Auflösung schwieriger, mathematischer Probleme als Werkzeug bedurfte. Indeß behielt er diese Wissenschaft für sich, führte die Beweise (in der Regel synthetisch) durch die bis dahin allgemein bekannten Hülfsmittel der Mathematik, oder er theilte auch, wenn dies zuweilen nicht durchzuführen war, seine Resultate ohne Beweis mit, woher es auch kam, daß er in seinen ‚Principien der Naturphilosophie' von der höheren Analysis keinen Gebrauch machte. Es fallen deshalb auch viele Beweise, wie sie Newton in den ‚Principien' giebt, so weitläufig und schwierig aus, daß wohl ein Mann wie Newton hinterher solche Beweise ausdenken konnte, daß aber auch ein mehr als gewöhnlicher menschlicher Scharfsinn dazu gehört haben würde, die Wahrheiten selbst auf diesem Wege zu finden[2]).

Die Entdeckung des Algorithmus der höheren Analysis durch Leibniz datirt vom 29. October 1675, nach einem Manuscripte, welches später in seinen hinterlassenen Schriften (in der Archivbibliothek zu Hannover) aufgefunden wurde[3]). Daraus ergiebt sich, daß er zuerst die Integralrechnung fand, die er „Calculus summatorius" (die summatorische Rechnung) nannte und alsdann den Algorithmus der Differenzialrechnung ausbildete. Erst später (1696) gab Leibniz (nach dem Vorgange Jacob Bernoulli's) die Benennung „summatio" auf und ließ sich den Namen „integralis" gefallen[4]). Das jetzt überall gebräuchliche Summenzeichen $\int$ ist durchaus Leibniz' Erfindung, was

1) Gerhardt, ‚Geschichte der Mathematik', S. 178. Auch Brewster, a. a. O., S. 14.

2) Karl Schnell, ‚Newton und die mechanischen Naturwissenschaften', Dresden und Leipzig, 1843, S. 59.

3) Gerhardt, ‚Leibnizens mathematische Schriften', erste Abth., Bd. III, S. 115 (Note). Ferner in desselben Autors ‚Geschichte der Mathematik', S. 117.

4) Ebendaselbst (Bd. III, S. 116) und in Klügel's ‚mathem. Wörterbuche', Artikel „Differenzialrechnung", Th. I, S. 845, wird angegeben, daß die Benennung „integralis" von Johann Bernoulli herrühre und zwar datire die betreffende Vereinigung mit Leibniz aus dem Jahre 1696. Diese Angaben sind dahin zu berichtigen, daß es Jacob Bernoulli war, der schon 1690 in den ‚Actis Eruditorum' und zwar in der Mai-Nummer p. 218 dieser Zeitschrift die Benennung „Integralia" gebrauchte.

auch später Johann Bernoulli annahm, der anfänglich das Zeichen *I.* (als ersten Buchstaben des Wortes Integral) benutzte. Der wissenschaftlichen Welt allgemein bekannt wurden die beiden neuen Rechenmethoden die Differenzial- und die Integralrechnung (zusammen die Infinitesimalrechnung genannt) beziehungsweise jedoch erst in den Jahren 1684 und 1686. Die eine der beiden für alle Zeiten denkwürdigen Abhandlungen ist der Differenzialrechnung gewidmet und hat (in der unten notirten Zeitschrift)[1]) den Titel: „Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus“. In dieser Abhandlung trägt Leibniz die Differenzialrechnung in der Form vor, wie sie seitdem auf dem festen Lande üblich ist. Er zeigt, wie die Differenziale eines Products, eines Quotienten und einer Potenz von irgend einer Beschaffenheit ausgedrückt werden etc., lehrt die Differenziation einer Gleichung zwischen zwei veränderlichen Größen an einem verwickelten Falle, giebt für die Erfindung der Minimis ein Beispiel aus der Optik etc.

Zwei Jahre (1686) später veröffentlichte Leibniz in derselben Zeitschrift[2]) die ersten Andeutungen zur Integralrechnung unter der Ueberschrift: „De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum“.

Hier zeigt er u. A., daß der Barrow'sche Satz, es sei die Summe der Rechtecke aus dem Intervall der Achse zwischen Ordinate und Normale jeden Curvenpunktes in das Element der Achse, dem halben Quadrate der Ordinate gleich, mit Hülfe seines Algorithmus sofort bewiesen werden könne.

Nach Figur 27 verhält sich nämlich $DG : DB = CE : BE$, d. i. wenn man DG (die Subnormale) $= p$ setzt:

$$p : x = dx : dy, \text{ d. i.}$$

$$p = \frac{x\,dx}{dy} \text{ und daher}$$

$$\int p\,dy = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}.$$ [3])

1) ‚Acta Eruditorum anno MDCLXXXIV‘ und daraus aufgenommen in ‚Leibnizens mathematischen Schriften‘, herausgegeben von C. J. Gerhardt, zweite Abth., Bd. I, S. 220.

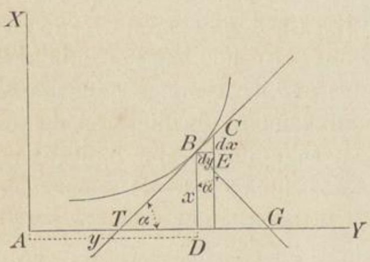
2) ‚Acta Eruditorum, anno 1686‘ und Gerhardt, ‚Leibnizens mathematische Schriften‘, zweite Abth., Bd. I, S. 226.

3) Es werde die Gelegenheit benutzt, auf das sogenannte umgekehrte

Ferner hebt er hervor, wie man durch den Gebrauch seiner Bezeichnungsweise die Eigenschaften der Curven auf's vollständigste in Gleichungen ausdrücken, beispielsweise durch

$$y = \sqrt{2x - x^2} + \int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}},$$

die Cykloide charakterisiren könne[1]), wenn x und y die rechtwinkligen Coordinaten dieser Curve sind.



27.

In demselben Aufsatze erzählt Leibniz auch, wie ein Beweis des Satzes von der Größe der Oberfläche einer Kugel ihn auf das (hier bereits oben erwähnte) charakteristische Dreieck BEC (Figur 27) geleitet habe u. s. w.[2]).

Um von den höchst vielseitigen Anwendungen, die Leibniz von der Infinitesimalrechnung machte, wenigstens ein einziges für die technische Mechanik

---

Tangentenproblem aufmerksam zu machen (d. h. auf das Verfahren ausgegebenen Eigenschaften der Tangente an eine Curve oder der Normalen die Gleichung der Curven zu finden), was sich nach der Erfindung der Infinitesimalrechnung so gestaltet wie aus nachstehendem Beispiel erhellt. Mit Bezug auf Figur 27 erhält man für die Subtangente FD, weil sich verhält: $FD : DB = BE : EC$, $FD = \frac{x\,dy}{dx}$. Soll man nun die Curve finden deren Subtangente $= \frac{x^2}{a + y}$ ist, so erhält man $\frac{x\,dy}{dx} = \frac{x^2}{a+y}$, d. i. $(a + y)\,dy = x\,dx$ und hier aus durch Integration: $x^2 = 2ay + y^2$. Die fragliche Curve ist sonach eine gleichseitige Hyperbel.

1) Wählt man den Scheitel der gemeinen Cykloide zum Ursprunge der rechtwinkligen Coordinaten, nimmt die Abscissen (x) vertikal und die Ordinaten (y) horizontal, so hat man bekanntlich, wenn der Halbmesser des Rollkreises $= 1$ gesetzt wird:

$$y = arc\ (sin\,vers. = x) + \sqrt{2x - x^2}.$$ Da ferner

$$d\,arc\ (sin\,vers. = x) = \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}$$ und

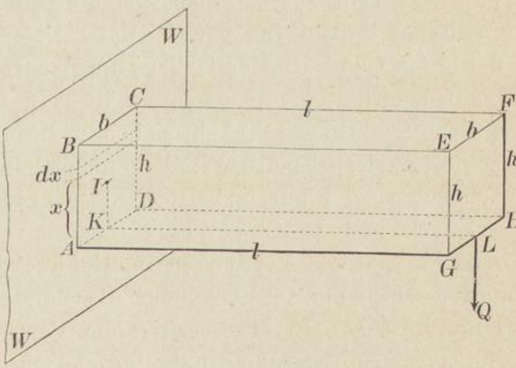
$$arc\ (sin\ vers.) = \int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}$$ ist, so hat man auch

$$y = \int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}} + \sqrt{2x - x^2},$$ wie oben.

2) Bezeichnet man das Bogenelement BC in Figur 27 mit ds, so erhält man aus dem Dreieck BCE (auch Leibniz-Dreieck genannt nach Gerhardt ‚Die Entdeckung der höheren Analysis', S. 151) : $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

wichtiges Beispiel in Erinnerung zu bringen [1]), entlehnen wir den betreffenden Stoff der ‚Act. Erud.' Jahrg. 1684, S. 385, welcher dort die Ueberschrift trägt: „Demonstrationes novae de Resistentia solidorum" [2]).

Wie bereits vorher Mariotte [3]), so erörtert Leibniz in dieser Abhandlung die Bruchfestigkeit prismatischer Körper unter der Voraussetzung, daß dem Bruche eines jeden Körpers eine größere oder kleinere Biegung vorausgehe und zwar nach dem schon 1661 vom Dr. Hooke ausgesprochenen Gesetze, daß (innerhalb gewisser Grenzen), die Ausdehnung der dehnenden Kraft proportional sei. Hiermit wurde zugleich die Behandlung desselben Gegenstandes von Galilei (S. 63, Figur 12) berichtigt, der die Körper als völlig unelastisch, d. h. die Fasern als unausdehnbar voraussetzte. Mit Galilei übereinstimmend legte jedoch Leibniz die Drehungsachse für den Augenblick des Bruchs wieder in die untere Kante AD des Balkens (Figur 28) an der Stelle, wo er an der vertikalen Wand WW befestigt ist.



28.

Ist hier k der Widerstand der Fasern vom Querschnitte $= 1$, im Augenblick des Zerreißens an der oberen Schicht BC, wo das Abreißen beginnen muß und k_1 dieser Widerstand der Faser in der Entfernung $IK = x$ von der

1) Ein gebildeter Ingenieur ersten Ranges im Gebiete der mathematischen Behandlung des Widerstandes elastischer Körper, Herr Professor Winkler an der technischen Hochschule in Berlin, erklärt in seinem werthvollen Artikel „Abriß der Geschichte der Elastizitätslehre" in der Zeitschrift ‚Technische Blätter', III. Jahrg. (1871), S. 26: „daß Leibniz der Elastizitätslehre, durch die Erfindung der Differenzialrechnung einen Dienst von unschätzbarer Wichtigkeit geleistet habe".

2) Gerhardt, ‚Leibnizens mathem. Schriften', Bd. II (1860), S. 106.

3) Grundlehren der Hydrostatik und Hydraulik, deutsch von Meinig, S. 394 etc. Mariotte machte von der Infinitesimalrechnung keinen Gebrauch.

Drehachse AD, so hat man, nach der erwähnten Voraussetzung $k_1 = k \frac{x}{h}$ (wenn wir übrigens die Bezeichnungen von Figur 12 beibehalten). Der Widerstand einer Schicht von der Höhe dx und der Breite b ist daher $k_1 b\,dx = k \frac{b}{h} x\,dx$ und das Widerstandsmoment, in Bezug auf die Achse $AD: k \frac{b}{h} x^2 dx$. Man erhält daher wie S. 63, die Gleichung

$$Ql = k \frac{b}{h} \int x^2 dx + \text{Const., d. i.}$$

$$Ql = \tfrac{1}{3} k \frac{bh^2}{l} \text{ und } Q = \tfrac{1}{3} k \frac{bh^2}{l}\ ^{1)}.$$

Obwohl hiernach die Bruchfestigkeit desselben Balkens in Bezug auf die Theorie Galilei's im Verhältnisse von 3 : 2 verschieden ausfällt, so stimmen sie doch unter einander mit der Erfahrung darin überein, daß sich die Bruchfestigkeiten parallelepipedischer Balken von einerlei Material, gerade wie die Breiten, und wie die Quadrate der Höhen, umgekehrt aber wie die Längen derselben verhalten. Dagegen erhält man nach beiden Theorien von der Erfahrung sehr abweichende Resultate, wenn man die Bruchfestigkeit prismatischer Balken bestimmt, deren Querschnitte unsymmetrische Figuren, beispielsweise etwa Dreiecke sind.

Zweck und Umfang dieses Buches verhindern leider über Leibniz specielle Leistungen im Gebiete der reinen und angewandten Mathematik, hier mehr als Vorstehendes aufzunehmen. Als nothdürftigen Ersatz verweist der Verfasser nochmals auf die Gerhardt'sche Ausgabe von ‚Leibnizens mathematischen Schriften', sieben Bände, Berlin 1849—1863, worin sich nicht nur die Abhandlungen abgedruckt vorfinden, welche Leibniz in den ‚Leipziger Acten' veröffentlichte, sondern auch sein Briefwechsel mit Huyghens, Oldenburg, Collins, Newton etc., sowie mit Wallis, Varignon, Herrmann, Tschirnhausen, den Bernoullis, dem Marquis de l'Hospital u. A. und endlich sehr viele Abhandlungen aus den Manuscripten der königlichen Archiv-Bibliothek zu Hannover.

---

1) Später (in den ‚Memoiren der Pariser Akademie' von 1708) ging zuerst Parent in Bezug auf die Frage nach der sogenannten Drehungs- oder neutralen-Achse von dem richtigen Satze aus, daß die Summe der Spannungen auf der ausgedehnten Seite gleich der auf der zusammengedrückten Seite sein müßte.

Wir gedenken daher nur noch zweier in den ‚Leipziger Acten, vom Jahre 1686 und 1695 abgedruckter Aufsätze [1]), wo Leibniz dem Descartes (S. 69) gegenüber, nicht nur ein neues Kräftemaaß aufstellte, sondern dabei auch behauptete, man müsse todte und lebendige Kräfte unterscheiden. Unter todter Kraft verstand er den Druck, den die Körper im Zustande des Gleichgewichts an ihren Berührungsstellen auf einander ausübten, dagegen unter lebendiger Kraft eine solche, welche mit wirklicher Bewegung verbunden ist. Die Alten, sagt er, hätten bloß todte Kraft betrachtet, ihre Mechanik sei daher nur Statik gewesen. Das Maaß der todten Kraft sei das Produkt mv (S. 70, Note), als das der Masse in die Geschwindigkeit, das Maaß der lebendigen Kraft dagegen sei das Product der Masse in das Quadrat der Geschwindigkeit, also mv^2 (S. 71, Note). Merkwürdiger Weise gingen die Streitigkeiten hierüber erst nach Leibniz' Tode zu Ende, als im Jahre 1743 das berühmte Werk d'Alembert's ‚Traité de dynamique' erschien. In der Vorrede (Préface) dieses Werkes [2]), wies d'Alembert nach, daß die ganze Controverse nur auf Mißverständniß beruhe, oder gar auf Wortstreit hinauslaufe.

In der That erhellt ohne Weiteres aus der Note 6 (S. 69 bis 71), daß man setzen kann:

$$p : p_1 = mv : m_1 v_1,$$

sobald die Geschwindigkeiten v und v_1 am Ende gleicher Zeiten erlangt werden, dagegen sich verhält

$$p : p_1 = mv^2 : m_1 v_1{}^2,$$

wenn die Geschwindigkeiten v und v_1 nach Zurücklegung gleich großer Wege erreicht wurden.

Es ist also eine offenbare Ungereimtheit (in die gegenwärtig wohl Niemand mehr verfällt) wollte man setzen:

$$p : p_1 = mv : m_1 v_1 = mv^2 : m_1 v_1{}^2.$$

Wir wenden uns nunmehr zur Biographie Leibniz'.

Gottfried Wilhelm Leibniz [3]) wurde Sonntag den 21. Juli 1646 in der Universitätsstadt Leipzig geboren, welcher Ort seit der Reformation als

---

1) Gerhardt, ‚Leibnizens mathematische Schriften', zweite Abth., Bd. II, S. 117 und S. 234.

2) In der Pariser Ausgabe von 1743, S. XVI etc.

3) Bei Abfassung dieser Biographie wurden insbesondere folgende Quellen benutzt: Guhrauer, ‚Leben von Leibniz'. — Grote, ‚Leibniz und seine Zeit'. — Pfleiderer, ‚Gottfried Wilhelm Leibniz als Patriot, Staatsmann und Bil-

ein hervorragender Sitz deutscher Cultur und Wissenschaft galt. Leibniz' Vater war Professor der Moral, Subsenior der philosophischen Facultät und gleichzeitig Notar und in diesem doppelten Berufe als Gelehrter und Geschäftsmann bekannt als rechtschaffener Christ und frommer Hausvater. Leider starb der Vater schon 1652, so daß die Erziehung des Knaben der sorgsamen Mutter allein überlassen blieb.

Auf dem Gymnasium seiner Vaterstadt (der Thomasschule) that sich Leibniz bereits durch seine großen angeborenen Fähigkeiten hervor, zeigte sich aber auch hier schon, nicht bloß als gewandter Autodidakt, sondern namentlich als der zukünftige Polyhistor.

Seinen Talenten entsprechend kam es denn auch, daß er bereits Ostern 1661, also erst $14^3/_4$ Jahre alt, der Universität Leipzig immatrikulirt wurde. Während sich hier seine Fachstudien insbesondere auf philosophische und juristische Gegenstände erstreckten, blieb er in der Mathematik wie in noch anderen Wissenschaften Autodidakt.

Mit den Ehren des ersten akademischen Grades (eines Baccalaureus) geschmückt, ging Leibniz Ostern 1663 nach Jena, um dort unter Weigel[1]) Mathematik, namentlich niedere Analysis und Philosophie zu studiren. Bemerkenswerth ist hierbei, daß Weigel ein entschiedener Feind der Scholastik war, jedoch den Aristoteles nicht völlig verwarf, sondern sich bemühte, ihn mit der Philosophie und Physik der neueren Zeit zu versöhnen. Letztere Aufgabe hatte sich bekanntlich später auch Leibniz gestellt.

Nach Leipzig zurückgekehrt, konnte er dort nicht den für ihn höchsten akademischen Grad, den eines Doctors beider Rechte erlangen, woran allerlei ihm gespielte Ränke hinderten und als letzten Grund der Verweigerung, das einfältige „zu jung" hingestellt wurde.

Bereits 1666 (also 20 Jahre alt) verließ Magister Leibniz seine Vaterstadt gänzlich und ging auf Reisen „brennend vor Begierde größeren Ruhm in den Wissenschaften zu gewinnen und die Welt kennen zu lernen".

Gleich am Anfange der Reise erwirbt er sich bei der zur freien Reichsstadt Nürnberg gehörigen Universität Altdorf[2]), durch glanzvolle Disputationen (5. November 1666), den juristischen Doctorhut, lehnte jedoch die ihm angebotene Professur ab, da ihm die stille Laufbahn eines akademischen Lehrers widerstrebte. Leibniz wendete sich nach Nürnberg und machte dort die Bekanntschaft des Barons v. Boineburg, eines der bedeutendsten Gelehrten und Staatsmänner seiner Zeit, der ihn wieder dem Schauplatze der großen Welt zuführte. Boineburg's Einfluß brachte Leibniz 1670 nach Mainz und 1672

---

dungsträger. Ein Lichtpunkt aus Deutschlands trübster Zeit'. — Gerhardt, ‚Geschichte der Mathematik in Deutschland'.

1) Man sehe die Specialschrift ‚Erhard Weigel, der Lehrer von Leibniz und Pufendorf. Ein Lebensbild aus der Universitäts- und Gelehrten-Geschichte des 17. Jahrhunderts'. Nach Quellen bearbeitet von Dr. Spieß, Leipzig 1881.

2) Südöstlich von Nürnberg 1578 gegründet, 1809 aufgehoben und mit Erlangen vereinigt.

im Auftrage des Kurfürsten von Mainz nach Paris, um Ludwig XIV. zur Eroberung Aegyptens zu bewegen und damit einerseits einen drohenden Krieg von Deutschland abzuwenden, anderseits zur Lösung der orientalischen Frage (Ausbreitung der christlichen Civilisation im Oriente) beizutragen.

In Paris widmete sich Leibniz (ernstlicher als bisher) dem speciellen Studium der höheren Mathematik, wobei er auch mit Huyghens bekannt wurde, der ihm ein Exemplar seines 1673 erschienenen Werkes ‚Horologium oscillatorium' schenkte [1]).

Eine Fülle von Anregungen und insbesondere das Studium der Cartesiani'schen Geometrie, hatte in ihm das Bedürfniß geeigneterer Mittel als die gebräuchlichen zur Ausführung höherer Rechnungen hervorgerufen, wobei er auf die Erfindung der Differenzial- und Integralrechnung, im October 1675 aber zuerst auf die höchst glücklichen Bezeichnungen dieser Rechnungsoperationen (auf die Erfindung des Algorithmus [2]) der höheren Analysis) gekommen sein soll.

Im October 1676 verließ Leibniz Paris, um nach Deutschland zurückzukehren. Er nahm seinen Weg über London, wo er die persönliche Bekanntschaft von Collins machte, der damals Secretair der Royal Society war und sich im Besitze einer Abhandlung von Newton: ‚De Analysi per aequationes numero terminorum infinitas' befand, von welcher Leibniz Kenntniß genommen haben soll [3]).

In demselben Jahre (December 1676) folgte Leibniz dem Rufe des gelehrten Herzogs Johann Friedrich von Calenberg, Göttingen und Grubenhagen (Fürstenthum Hannover) nach Hannover, um hier als Rath und Bibliothekar zu wirken.

Hier wurde er bald, wie früher zu Mainz, neben seinen bibliothekarischen Arbeiten in die höheren Staatsangelegenheiten eingeweiht, wobei die undeutsche Politik dieses Fürsten Leibniz sehr oft schmerzlich berührte. Indeß starb schon 3 Jahre nachher (1679) der Herzog und sein Bruder Ernst August gelangte zur Regierung. Diesem hochgebildeten, männlichen und deutschgesinnten Fürsten stand Sophie, die geistreiche und liebenswürdige Tochter des unglücklichen Kurfürsten von der Pfalz (Friedrich V.) zur Seite. Beide verstanden es Leibniz zu würdigen, der es seinerseits eben so verstand sich schnell bei ihnen in Gunst zu setzen.

Von hier ab entwickelte Leibniz eine bewunderungswürdige Thätigkeit, sowohl als treuer Diener seines Fürstenhauses, als auch in dem Gebiete der

---

1) Gerhardt, ‚Leibnizens mathematische Schriften', erste Abth., Bd. II, Briefwechsel zwischen Leibniz und Huyghens.

2) Mit dem Namen Algorithmus bezeichnet man (jetzt) jedes wiederkehrende zur Regel gewordene Rechnungswesen. (Man sehe hierüber auch Klügel's ‚mathem. Wörterbuch', Bd. I, S. 67).

3) Gerhardt a. a. O., S. 153 bemerkt, daß die Möglichkeit nicht bestritten werden kann es habe Leibniz von der Newton'schen Abhandlung Kenntniß genommen. Brewster in seinem Werke ‚Das Leben Newtons' bemerkt im 3. Capitel, daß dem Collins die Newton'sche Methode der Fluxionen bereits im Anfange des Jahres 1669 von Dr. Barrow mitgetheilt worden wäre.

Wissenschaften. Insbesondere war es Sophiens fein gebildeter Geist, welcher den großen Philosophen, den kenntnißreichen Gelehrten, gewandten Schriftsteller und Dichter zu schätzen verstand. Ueberhaupt beginnt von hier die glänzendste Laufbahn und die fruchtbarste Periode seines Wirkens.

In diese Zeit (October 1681), die trübste Deutschlands, fällt auch eine Hauptheldenthat Ludwig XIV. von Frankreich, nämlich der Raub Straßburgs, worüber Leibniz seinen Schmerz und seine tiefste Entrüstung aussprach, wo er immer nur konnte[1]).

Im Jahre 1682 begründet der Leipziger Professor Mencke die erste in Deutschland erschienene gelehrte Zeitschrift unter dem Titel ‚Acta Eruditorum‘, worin Leibniz die vorzüglichsten seiner mathematischen Arbeiten nach und nach veröffentlichte.

1684 erscheint in der Octobernummer dieser Zeitschrift die bereits vorher erörterte Abhandlung, welche die Entdeckung der Differenzialrechnung enthält[2]).

Neben seinen politischen, historischen und mathematischen Arbeiten finden wir Leibniz auch jahrelang beschäftigt mit der Construction einer Rechenmaschine[3]), mit Plänen zur Verbesserung der Harzbergwerke, mit Arbeiten über das Münzwesen und mit geologischen Studien, die er mit Beobachtungen

---

1) Leibniz machte auf jenen niederträchtigen Act folgenden Vers, den Straßburg an Deutschland richtet und welcher (nach Pfleiderer, a. a. O., S. 135) also lautet:

„Schandfleck, welchen der Rhein mit all' seinen Wogen nicht abwascht
Daß daliegen im Schlaf allzumal Kaiser und Reich!"

Der Verfasser bringt hier für die deutsche studirende Jugend in Erinnerung, daß Straßburg am 28. September 1870 nach siebenwöchentlicher regelmäßiger Belagerung von den Deutschen wiedergewonnen wurde.

Von Leibniz Bemühungen für den Ruhm und die seiner Zeit so sehr nothwendige Erhebung Deutschlands zu wirken, giebt u. a. auch eine Schrift Zeugniß, welche mein verstorbener Freund Archivrath Dr. Grotefend aus den Handschriften der königlichen Bibliothek zu Hannover im Jahre 1846 veröffentlichte. Diese Abhandlung trägt den Titel:

‚Ermahnung an die Teutschen, ihren Verstand und Sprache besser zu üben, sammt beigefügtem Vorschlag zur Stiftung einer Teutschgesinnten Gesellschaft‘

und beginnt mit folgenden Worten:

„Es ist gewiß, daß nächst der Ehre Gottes einem jeden tugendhaften Menschen die Wohlfahrt seines Vaterlandes billig am meisten zu Gemüthe gehen sollte".

2) Diese gelehrte Zeitschrift wurde leider mit dem Jahrgange 1776 geschlossen, woran Kriegsunruhen und die sorglose Redaction die Hauptschuld trugen. In den mathematischen Theilen derselben finden sich als fruchtbarste Mitarbeiter genannt: Leibniz, Huyghens, Jacob und Johann Bernoulli, l'Hospital u. A. Mit allen Supplementen und Registern bildet das Werk eine Reihe von 117 Quartbänden.

3) Leibniz lernte in Paris die primitive und nur zur Addition und Sub-

im Harz begann und deren Frucht seine Protogaea war, eine Theorie über die Entstehung und Bildung der Erde.

Um diese Zeit hatte auch der für die Entwicklung und den Ausbau der höheren Analysis wichtige Briefwechsel von Leibniz mit Huyghens, Wallis, Varignon, den Gebrüdern Bernoulli, dem Marquis de L'Hospital und Anderen begonnen[1]). Unter allen diesen Correspondenzen war die zwischen Leibniz und Johann Bernoulli die umfangreichste geworden; sie erstreckte sich ohne Unterbrechung von 1693 bis zum Tode Leibniz'. Vielleicht ist sie auch die wichtigste unter allen, da sie besonders der Integralrechnung, d. i. derjenigen Disciplin gewidmet war, die Johann Bernoulli die bedeutendsten Erweiterungen zu verdanken hat.

Während dieser Zeit (2. Sept. 1692) war der Herzog Ernst August zur Kurfürstenwürde gelangt, wozu Leibniz wesentlich in Wien mitwirkte.

Im Jahre 1698 starb Kurfürst Ernst August und es folgte ihm sein Sohn Georg Ludwig in der Regierung. Obwohl dieser neue Kurfürst Leibniz immer sein „lebendiges Dictionnaire" nannte, so herrschte doch zwischen Letzterem und seinem neuen Herrn eine Entfremdung, die es zwischen Beiden nie zu einer vertraulichen Annäherung und persönlichen Hingabe kommen ließ, wovon der Grund vorzugsweise in dem kalten, verschlossenen Charakter des Kurfürsten lag.

Dafür beginnt zu dieser Zeit die Entfaltung der geistigen Freundschaft zwischen Leibniz und der Tochter des Kurfürsten Ernst August, Sophie Charlotte, die sich inzwischen mit dem Kurfürsten Friedrich von Brandenburg verheirathet hatte. Letzterer Fürstin hatte man es auch mit zu verdanken, daß der Kurfürst von Brandenburg nicht nur einen von Leibniz entworfenen Plan zur Gründung einer Societät der Wissenschaften in Berlin genehmigte und am 11. Juli 1700 den Stiftungsbrief vollzog, sondern auch daß Leibniz zum beständigen Präsidenten der Societät ernannt wurde.

Nicht ohne Einfluß blieb Leibniz bei den Verhandlungen am kaiserlichen Hofe in Wien, welche von Berlin aus zur Gewinnung der Königskrone stattfanden und sich insofern nach Wunsch gestalteten, als schon am 18. Januar 1701 zu Königsberg die Krönung Friedrich's, als erster König von Preußen, erfolgen konnte.

Auch ging Leibniz' Wunsch, in unmittelbarer Nähe der neuen Königin von Preußen verweilen zu können, im Herbst und Winter des Jahres 1701 in

---

traction brauchbare Pascal'sche Rechenmaschine kennen und kam sofort auf den Gedanken, eine andere zu construiren die für alle vier Species eingerichtet war. Im Frühjahr 1673 war bereits ein Modell dieser Maschine fertig, während erst 1694 unter Mitwirkung des Pariser Mechanikers Olivier die Maschine selbst fertig wurde, die sich heute auf der königl. Bibliothek in Hannover vorfindet. Diese Maschine ist dem Principe nach gleich der des Mechanikers Thomas in Colmar. Man sehe hierüber einen Aufsatz des Ingenieur Gerke in Bd. IX der ‚Zeitschrift für Vermessungswesen', S. 305.

1) Diese Briefwechsel finden sich sämmtlich abgedruckt in der Gerhardtschen Ausgabe von ‚Leibnizens mathem. Schriften', erste Abth., Bd. I bis IV. 1849 bis 1859.

Erfüllung, wo er in Berlin und Lützenburg (Charlottenburg) die schönsten, innerlich reichsten Tage seines Lebens mit seiner königlichen Schülerin und Freundin in den Gebieten der Wissenschaften verlebte.

Die philosophischen Unterredungen, welche damals Leibniz mit der preußischen Königin führte, gaben die Veranlassung und bildeten die Grundlage zu Leibniz' populärstem Werke, zu seiner ‚Theodicee', oder der Idee einer Rechtfertigung Gottes wegen des Uebels in der Welt'. Leider starb die erhabene Frau schon 1705 bei einem Besuche in Herrenhausen, so daß die ‚Theodicee', welche erst 1710 erschien, gleichsam ein bleibendes Denkmal bildete, welches Leibniz seiner königlichen Freundin nach ihrem Tode setzte.

Ungeachtet des hohen Ansehens, in welchem Leibniz bei den damaligen Monarchen Europas (Peter dem Großen, dem deutschen Kaiser Karl VI.[1]) u. s. w.) stand, mußte Leibniz erfahren, daß ihn sein Kurfürst zwar schätzte, aber ihn niemals nach dem Beispiele seines Vaters, seiner Mutter und seiner Schwester, zu seinem Freunde erhob. Leider steigerte sich dieses Mißverhältniß ganz besonders, als seine erhabene Freundin die Kurfürstin Sophie am 8. Juni 1714 starb und auch der Tod der Königin Anna von England (12. August 1714) erfolgte, wonach der Kurfürst Georg Ludwig, unter dem Namen Georg I. den englischen Thron bestieg.

Von hierab betrachtete man Leibniz eigentlich nur als eine aus der fürstlichen Gunst gefallene Größe.

Zu mancherlei noch anderen geistigen Aufregungen, insbesondere seinem Streit mit Newton über die Erfindung der Infinitesimalrechnung, gesellten sich im Anfange des Jahres 1716 bei Leibniz auch kleinere und größere körperliche Leiden, die ihn allerdings nur selten hinderten, die Arbeit an der Vollendung seines geschichtlichen Werkes ‚Origines Guelficae' zu unterbrechen.

Leider erfolgte sein Tod bereits am 14. November 1716 in Hannover (im Eckhause der Schmiede- und Kaiserstraße)[2]). Leibniz' Asche ruht in der Neustädter (St. Johannes) Kirche. Eine kupferne Platte in einem der Gänge der Kirche mit der Inschrift „Ossa Leibnitii" zeigt die betreffende Stelle an. Im Jahre 1790 wurde ihm am Waterlooplatze und zwar unweit der königlichen öffentlichen Bibliothek im Archivgebäude, welcher Leibniz vorstand, ein Denkmal errichtet.

Wir schließen unsere Biographie mit Leibniz' Wahlspruche, welcher seinen Sarg ziert und also lautet:

„Pars vitae, quoties perditur hora, perit".

(So oft eine Stunde verloren geht, verliert man einen Theil des Lebens).

---

1) Leibniz wirkte damals für die Gründung einer Societät der Wissenschaften in Wien, deren Errichtung sich jedoch gewisse ehrwürdige Väter derartig widersetzten, daß die Sache unterblieb. Es vergingen über 130 Jahre ehe sich Oesterreich einer Akademie der Wissenschaften erfreuen konnte. Erst am 30. Mai 1846 wurde dieselbe in Wien gegründet und von 1848 ab datiren sich ihre Sitzungsberichte.

2) Der König Ernst August von Hannover ehrte Leibniz' Andenken durch den Ankauf dieses Hauses, welches heute noch unverändert erhalten ist.

Obgleich der Verfasser dieses Buches der Ansicht ist, daß beide ausgezeichnete Männer Newton und Leibniz die Infinitesimalrechnung, ganz unabhängig von einander, von ganz verschiedenen Gesichtspunkten ausgehend, erfunden haben, so hält er es doch für angemessen, die Urtheile einiger später lebenden berühmten Mathematiker über diese Erfindung hier anzuführen.

Leonhard Euler sagt hierüber in dem unten genannten Werke[1]) Folgendes:

„Spuren von dieser Untersuchung (die Grenze zu finden denen das Verhältniß der Zunahme zweier Veränderlichen sich immer mehr nähert, je kleiner diese Zunahme wird) finden wir schon bei den ältesten Mathematikern, welchen man daher auch nicht alle Kenntniß in der Analysis des Unendlicheu absprechen kann. Nach und nach bekam diese Wissenschaft Wachsthum, und sie hat sich nicht plötzlich oder auf einmal zu der Größe empor geschwungen, in welcher wir sie jetzt erblicken; obgleich immer noch mehr in ihr zu entdecken als bereits wirklich gefunden ist. Denn da sich die Differenzialrechnung über alle Arten der Functionen verbreitet, sie mögen so zusammengesetzt sein, wie sie irgend wollen, so konnte die Methode, die verschwindenden Elemente aller Functionen untereinander zu vergleichen, nicht auf einmal entdeckt werden, sondern man sah sich gezwungen die zusammengesetzten Functionen nach und nach zu untersuchen. Was nämlich die rationalen Functionen betrifft, so kannte man das letzte Verhältniß ihrer verschwindenden Incremente schon lange vor Newton und Leibniz, so daß die Differenzialrechnung, insofern sie die rationalen Functionen zum Gegenstande hat, schon geraume Zeit vor ihrer Periode erfunden worden ist. Dagegen leidet es keinen Zweifel, daß wir denjenigen Theil der Differenzialrechnung, welcher sich mit den irrationalen Functionen beschäftigt, dem unsterblichen Newton verdanken und der binomische Lehrsatz war es vorzüglich, wodurch er der Differenzialrechnung diese glückliche Erweiterung verschaffte. Leibniz sind wir nicht weniger verpflichtet. Er brachte nämlich diesen Calcul, den man bis dahin bloß als einen besonderen Kunstgriff betrachtet hatte, in die Form einer Wissenschaft, bildete aus den Regeln derselben ein System und stellte dasselbe in einem hellen Lichte dar. Hiernach bekam man die schätzbarsten Hülfsmittel denselben zu erweitern und das Fehlende, aus gewissen Principien abgeleitet, hinzuzufügen. Bald darauf wurden durch die Bemühungen von Leibniz und der von ihm dazu ermunterten Bernoullis die transcendenten Functionen in das Gebiet der Differenzialrechnung aufgenommen und nun auch ein fester Grund zur Integralrechnung gelegt. Es hatte aber auch schon Newton sehr wichtige Versuche aus der Integralrechnung geliefert und man kann eigentlich den Ursprung dieser Wissenschaft, wegen ihrer so engen Verbindung mit der Differenzialrechnung gar nicht genau angeben“.

---

1) ‚Vollständige Anleitung zur Differenzial-Rechnung‘, aus dem lateinischen übersetzt von J. A. C. Michelsen, Professor der Mathem. etc. in Berlin, Th. I, S. LXXI der Vorrede.

Lagrange theilt in seinen ‚Leçons sur le calcul des functions' S. 321 ff. und 326, folgende Ansichten über den betreffenden Gegenstand mit:

„Man kann Fermat als den ersten Erfinder des neuen Calculs ansehen. Aber seine Zeitgenossen faßten den Geist dieser neuen Rechnungsart nicht ganz auf, sondern sahen sie nur als einen besonderen Kunstgriff, nur auf wenige Fälle mit Schwierigkeiten anwendbar an". —

Barrow führte unendlich kleine Größen ein und benutzte diese bereits 1674 in seiner Tangentenmethode unter Anwendung des bereits S. 119 (Note 3) erörterten kleinen Dreiecks. Allein seine Methode war nur einzeln dastehend, indem sie sich nur auf rationelle Functionen anwenden ließ und die Entwicklung einer Reihe erforderte, in welcher man die höheren Potenzen, der unendlich kleinen Größen wegließ. Es fehlte noch ein allgemeiner Algorithmus, anwendbar auf alle Arten von Ausdrücken, durch den man direct und ohne eine Reduction der algebraischen Formeln zu ihren Differenzialen übergehen konnte. Diesen stellte Leibniz (1675) auf und Newton scheint unstreitig etwas früher auf eben diese Abkürzungen der Rechnung für die Differenziationen gekommen zu sein. Aber in der Bildung der Differenzial-Gleichungen und ihrer Integration besteht das große Verdienst und die eigentliche Gewalt der neuen Rechnungsarten, und in diesem Punkte scheint mir der Ruhm der Erfindung fast einzig Leibniz zuzukommen und vornehmlich (surtout) den Bernoullis.

Endlich spricht sich Laplace in dem unten genannten Werke [1]) über diese Entdeckungen wie folgt aus:

„Ein hochwichtiger Gegenstand, den wir Leibniz verdanken, ist die höchst glückliche Bezeichnung, die sich fast von selbst auf die große Erweiterung anwandte, welche die Differenzial-Rechnung durch die Betrachtung der partiellen Differenziale erhielt". Und ferner: „Die Sprache der Analysis, die vollkommenste aller Sprachen, ist schon an sich selbst ein mächtiges Hülfsmittel und Werkzeug der Entdeckung und ihre Bezeichnungen, wenn sie glücklich gewählt sind und mit dem Gegenstande in nothwendiger Beziehung stehen, enthalten die Keime neuer Rechnungsweisen".

Schließlich citirt der Verfasser hier noch den etwas starken Ausdruck, welchen Gerhardt in seiner ‚Geschichte der Mathematik', S. 182, bei der Beurtheilung des Gegenstandes, braucht und der wie folgt lautet:

„Newton's Fluxionsrechnung verhält sich zu Leibnizens Differenzialrechnung, wie ein roher Marmorblock zu der durch Künstlerhand daraus geschaffenen Statue" [2]).

---

1) ‚Théorie analytique des probabilités'. Troisième Edition, Paris 1820. Introduction, p. XXX und XXXV.

2) Beachtenswerth ist dennoch Gerhardt's Schrift ‚Die Entdeckung der höheren Analysis', Halle 1855. In einer Note S. 86 dieser Schrift wird der An-

Aus Allem, was im Vorstehenden über Leibniz berichtet wurde, dürfte hervorgehen, daß der Schluß nicht falsch ist, diesen, zu seiner Zeit einzigen berühmten Gelehrten Deutschlands im Gebiete der Mathematik, Philosophie und der Staatswissenschaften, einen Polyhistor im wahren Sinne des Wortes und zwar „den deutschen Aristoteles“ zu nennen, der gewiß noch viel mehr geleistet haben würde, wäre er so vom Glücke begünstigt worden, wie Aristoteles durch die Gunst Alexander's des Großen, dessen Begleiter er überall sein konnte beim Zuge durch die damalige civilisirte Welt und wären Leibniz' letzte Lebenstage nicht durch allerlei (hohe und niedrige) Intriguen, durch Einschränkungen und Zurücksetzungen verbittert worden, wie dies in der That der Fall war, die um so lähmender und verderblicher auf den großen Geist wirkten, als derselbe von dem Fehler einer gewissen Ruhmredigkeit und Eitelkeit [1]) nicht freigesprochen werden konnte.

§. 16.

Die Brüder Bernoulli und der Marquis de L'Hospital.

Wir haben jetzt zunächst der Männer zu gedenken, welche sich in der Leibniz-Zeit um die Weiterbildung und Anwendung der Differenzialrechnung und Integralrechnung ganz besonders verdient machten. Obenan stehen in dieser Beziehung die Brüder Jacob und Johann Bernoulli [2]) und nächst diesen der Marquis de L'Hospital.

---

merkung (des Scholium) gedacht, womit Newton die erste Section des ersten Buches seiner ‚Principien‘ schließt und worin derselbe erklärt, daß ihm Leibniz ungefähr zehn Jahr früher ein Rechnungsverfahren mitgetheilt habe, welches dasselbe leiste, als seine Fluxionsrechnung. In der 3. Ausgabe der ‚Principia‘, welche 1725 (also zwei Jahre vor Newton's Tode) erschien, entfernten die englischen Herausgeber dieses Scholium und ersetzten es durch ein anderes. (Man sehe auch die Wolfers'sche Uebersetzung, S. 598).

1) Gerhardt, ‚Geschichte der Mathematik in Deutschland‘, S. 175.

2) Die Familie Bernoulli verließ, wahrscheinlich um den Bedrückungen des grausamen Alba zu entgehen, 1568 Antwerpen, wo sie, dem Kaufmannsstande angehörig, glücklich gelebt hatte. Sie siedelte erst nach Frankfurt a. M. über, nachher (1622) vertauschte das damalige Haupt, ebenfalls ein Jacob, letztere Stadt mit Basel. Der älteste Sohn dieses Jacob, Nicolaus mit Namen, wurde Stammvater der berühmten Mathematiker, war ebenfalls Kauf-

Jacob Bernoulli[1]) gelangte, nachdem er Leibniz' Abhandlung (S. 121) von 1684 in den ‚Act. Erud.' kennen gelernt hatte, durch eigenes Nachdenken zur Einsicht in die Mysterien des Leibniz und eröffnete seine desfallsigen Arbeiten mit der

---

mann, zugleich aber auch Mitglied des großen Rathes der Stadt Basel. Er hinterließ 11 Kinder, von denen das fünfte unser Jacob und das zehnte der ebenfalls bereits genannte Johann war. Die bedeutendsten Männer dieser Familie bekleideten nach einander über 100 Jahre Lehrstühle der Mathematik an der Universität Basel und zeigten das höchst seltene Beispiel, wie auf berühmte Großväter ebenso tüchtige Söhne, Enkel und Urenkel folgen können. Folgende kleine Geschlechtstafel dieser Familie dürfte nicht überflüssig sein:

Nicolaus (! 1623; † 1708).

Jacob I. (! 1654; † 1705) — Nicolaus. (! 1687; † 1759).

Nicolaus — Nicolaus I.

Johann I. (! 1667; † 1748) — Nicolaus II. (! 1695; † 1726); Daniel I. (! 1700; † 1782); Johann II. (! 1710; † 1790).

Johann II. — Johann III. (! 1744; † 1807), Jacob II. (! 1759; † 1789).

Ausführlicher berichten Poggendorff im ‚Biograph-liter. Handwörterb.', ferner Wolf in seinen ‚Biographien' und Cantor in der ‚Allgem. deutsch. Biographie'. Bd. II, S. 470 etc.

1) Jacob B. wurde am 27. December 1654 alten, oder am 6. Januar 1655 neuen Stiles, in Basel geboren und sollte nach dem Willen seines Vaters Theologie studiren, während ihn die Natur zum Mathematiker bestimmt hatte. In Bezug auf letztere Wissenschaft war daher Jacob B. lange Zeit Autodidakt, wozu noch kam, daß er sich auch anfänglich fast ohne literarische Hülfsmittel befand. Nach glücklich bestandenem theologischen Examen verließ er 1676 das väterliche Haus, unterrichtete erst in Genf und dann im südlichen Frankreich nach eigenen Methoden als Informator und als Privatlehrer, bereiste hierauf Holland, England und Deutschland und veröffentlichte 1681 eine die Kometentheorie betreffende mathematische Schrift, die allerdings eine Erstlingsprobe genannt werden mußte. Nach einer zweiten Reise, die besonders Holland und England umfaßte, kehrte er 1682 bleibend nach Basel zurück, wo er Vorlesungen über Experimentalphysik mit großem Erfolge hielt und dabei zugleich der Lehrer der Mathematik seines 13 Jahr jüngeren Bruders Johann wurde. Erst 1687 gelangte Jacob B. zur mathem. Professur, die ihm leider auf kurze Zeit deshalb wieder entzogen wurde, weil er sehr übele Missbräuche der Universisät Basel öffentlich gerügt hatte. Während dieser Zeit hatte der für die mathem. Wissenschaften so fruchtbare Briefwechsel zwischen ihm und Leibniz begonnen, der bis zum Jahre 1705 fortdauerte und der sich ziemlich vollständig in Gerhardt's Werke ‚Leibnizens mathem. Schriften' abgedruckt vorfindet. Nicht minder thätig war Jacob B. schon vom Jahre 1684 an, als Mitarbeiter der Leipziger ‚Acta Eruditorum', worin er eine Reihe von Abhandlungen veröffentlichte über Gegenstände aus fast allen Zweigen der reinen und angewandten Mathematik, deren Inhalt einen großen Theil seiner ‚Opera om-

Auflösung des von Leibniz 1687 eigentlich den Cartesianern gestellten Problems der isochronischen Curve um diesen die Vortheile seiner neuen Rechnungsmethode darzuthun. Unter dieser Curve (nicht mit der Tautochrone, S. 91 zu verwechseln) verstand man diejenige krumme Linie, auf welcher ein schwerer Körper mit gleicher (constanter) Geschwindigkeit lothrecht herabfällt, also in gleichen Zeiten um gleiche Räume in verticaler Richtung herabsinkt. Jacob B. löste dieses Problem mit Hülfe der höheren Analysis (wie schon vorher Huyghens auf synthetischem Wege) im Jahre 1690 und veröffentlichte die Lösung in der Mai-Nummer der ‚Acta Erud.' desselben Jahres, indem er zeigte, daß die erforderliche Curve eine cubische Parabel bildet, deren Gleichung $y^3 = ax^2$ ist, wenn man ihre Achse in die horizontale Ebene legt und ihre concave Seite aufwärts kehrt. Sie heisst der angegebenen Eigenschaft wegen auch „curva descensus aequabilis"[1]). Leibniz legte hierauf eine noch schwierigere Aufgabe vor, nämlich diejenige Curve zu finden, in welcher ein Körper fallen müßte, um sich in gleichen Zeiten einem gegebenen Punkte gleichförmig zu nähern oder sich von ihm eben so zu entfernen. Leibniz nannte diese Curve „isochrona paracentrica"[2]). Auch diese Aufgabe löste Jacob B. 1694 (analytisch) mit besonderem Erfolge.

Durch diese Probleme hatte Leibniz eine früher in der Geschichte der Mathematik wohlbekannte Sitte wieder wach gerufen,

---

nia' ausmachen, die allerdings erst nach seinem Tode und zwar 1744 in Genf erschienen. 1696 wurde Jacob B. Mitglied der Pariser Akademie der Wissenschaften und 1701 auch in die Berliner Akademie aufgenommen.

Leider war dem auch hinsichtlich seines Charakters vortrefflichen Manne kein langes Leben beschieden; schon am 16. Aug. 1705 raffte ihn der unerbittliche Tod, erst 51 Jahre alt, dahin.

Ausführlichere Biographien über Jacob Bernoulli, sind u. A. folgende:

a) ‚Histoire de l'Académie royale des sciences'. Année 1705, p. 139 unter der Ueberschrift: „Eloge de M. Jacques Bernoulli".

b) „Vita Jacobi Bernoulli", in dem vorgenannten posthumen (Genfer) Werke.

c) Wolf in ‚Grunert's Archiv der Mathematik' etc. Th. 25 (1855), S. 312.

d) Cantor in der ‚Allgem. deutsch. Biographie', Bd. II, S. 470.

1) Diese Curve ist zugleich diejenige, welche unter allen Curven zuerst rectificirt wurde und zwar von Neil, Fermat u. A. Auch ist sie die Evolute der gemeinen Parabel. Man sehe deshalb u. A.: Klügel's ‚mathem. Wörterbuch', Artikel „höhere Parabel". Th. III, S. 724.

2) Jacob Bernoulli ‚Opera omnia', p. 627 und ‚Act. Erud.' 1694, Aug., p. 364.

nämlich die Aufgaben öffentlich zu stellen, um dadurch in eigenthümlicher Weise zur Förderung der mathem. Wissenschaften beizutragen. In Anwendung dieses mächtigen Mittels, die Geister zu beleben und zu schärfen, wurde Leibniz durch die damaligen Meister bald kräftig unterstützt. Von vielen Seiten wurden neue Probleme aufgestellt, um deren Auflösung man sich in erfreulicher Weise bemühte.

Vom technischen Standpunkte aus ist in dieser Beziehung zuerst das Problem der Kettenlinie zu erwähnen. Jacob B. stellte die betreffende Aufgabe in den ‚Acta Eruditorum‘ von 1690 (Maiheft, S. 219) und schon im folgenden Jahre lieferten Johann Bernoulli[1]), Leibniz und Huyghens in derselben Zeitschrift (‚Acta Erud.‘, 1691) entsprechende Auflösungen. Höchst wahrscheinlich hatte Johann B. nicht ohne Einfluß des

---

1) Johann B. wurde am 27. Juli 1667 (alten Stiles) in Basel geboren und obgleich von seinem Vater zum Kaufmannsstande und nachher zum Mediciner bestimmt, fühlte er sich doch so zur Mathematik hingezogen, daß er bald ein eifriger Schüler seines älteren Bruders Jacob wurde, der ihn in die Principien der höheren Analysis einweihte und den er gewissermaßen einholte, indem er zum selbständigen Schaffen großes Talent zeigte. Nach einer Reise in Frankreich, wo er u. A. auch die Bekanntschaft von L'Hospital machte, arbeitete er von 1692 ab (als Johann nach Basel zurückgekehrt war) mit dem Bruder in erfreulicher Eintracht zusammen und wobei er in Correspondenz mit Leibniz trat, die auch bis zu des Letzteren Tode fortdauerte. Krankheit des älteren Bruders und das hohe Selbstgefühl des jüngeren, verbunden mit großer Eitelkeit und Neid, lockerten bald das brüderliche Band, was endlich in die bitterste Feindschaft ausartete. 1695 kam Johann B. auf Huyghens Empfehlung als Professor der Mathematik und Physik nach Gröningen, wo er bis 1705 verblieb. Mancherlei Umstände veranlaßten ihn nach Basel zurückzukehren, wo ihm auch nach dem Tode seines Bruders Jacob dessen Professur angetragen und von ihm angenommen wurde. Diese Stelle verwaltete er 42 Jahre lang, ungeachtet an ihn Berufungen von Leyden, Padua, Gröningen und Berlin ergingen, bis zu seinem Tode, der am 1. Januar 1748 in Basel erfolgte.

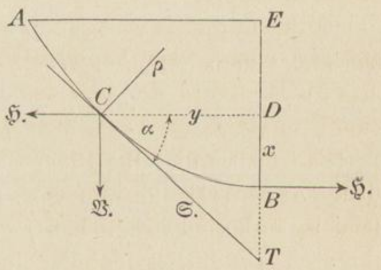
Johann B. war Mitglied der Akademie von Paris, Berlin, London, Bologna und St. Petersburg.

Seine Gesammtwerke (Johannis Bernoulli ‚Opera omnia‘, Tomus I—IV) erschienen 1742 in Lausanne und Genf.

Sein ausgedehnter Briefwechsel mit Leibniz findet sich in der Gerhardtschen Ausgabe der ‚mathem. Schriften‘ des Letztern, erste und zweite Abtheilung (Halle 1855 und 1856). Eine sehr gute Biographie schrieb in neuester Zeit M. Cantor, für die ‚Allgemeine deutsche Biographie‘, woselbst sich auch noch andere Abhandlungen über das Leben und Wirken Johann Bernoulli's angegeben finden.

älteren Bruders die Auflösung zu Stande gebracht, so daß das Urtheil der Geschichtsschreiber auch richtig sein wird, die Auflösung sei die Arbeit beider Brüder. Huyghens bewirkte die Auflösung nach eigner synthetischer Methode.

Zur Erinnerung an beide Bernoullis entwickeln wir im Nachstehenden das Differenzial der Kettenlinien-Gleichung in der Gestalt, wie es in den Werken sowohl des Jacob wie Johann B. zu finden ist [1]). Hierzu sei AB (Figur 29) ein beliebiges Ketten- oder Seil-Stück, wovon die Längeneinheit überall das Gewicht q besitzt. Ferner sei BC ein Stück der Kette von der Länge s, ihr Gewicht also qs, außerdem sei das Element bei B horizontal, das andere Endelement bei C unter dem Winkel $DCB = \alpha$ geneigt, so wie die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes C, d. i. $\overline{DB} = x$, $\overline{CD} = y$. Bezeichnet man dann mit $\mathfrak{H}$ die überall gleiche Horizontalspannung und die Achsenspannung bei C mit $\mathfrak{S}$, so wie die Verticalspannung daselbst mit $\mathfrak{V}$, so ist bekanntlich:



29.

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{S}\, cos\, \alpha = \mathfrak{S}\, \frac{dy}{ds} \text{ und}$$

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{S}\, sin\, \alpha = \mathfrak{S}\, \frac{dx}{ds}, \text{ also}$$

$$(1)\quad \frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{V}} = \frac{dx}{dy},$$

oder auch, da $\mathfrak{V} = qs$ ist und $\mathfrak{H} = qa$ gesetzt werden kann, sobald a eine noch näher zu bestimmende constante Größe bezeichnet:

$$(2)\quad \frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{V}} = \frac{a}{s} = \frac{dy}{dx}$$

1) ‚Jacobi Bernoulli Opera', p. 426 und ‚Johannis Bernoulli Opera omnia'. T. III, p. 495.

Da die Bernoulli'sche Auflösung im Wesentlichen mit der des Huyghens übereinstimmte, so wurde die Lösung dieser Aufgabe, ganz angemessen, als ein vortrefflicher Prüfstein für die Richtigkeit der neuen (höheren) Analysis betrachtet. Die von Leibniz gebrachte Auflösung findet sich auch in dessen von Gerhardt herausgegebenen mathematischen Schriften. Bd. I, p. 243 etc., wobei auch die Auflösungen der beiden Bernoullis und die des Huyghens von Leibniz erörtert werden.

Addirt man jetzt zu beiden Seiten der aus (2) sich ergebenden Gleichung $a^2\,dx^2 = s^2\,dy^2$ den Werth $s^2\,dx^2$, so erhält man

$$dx^2\,(a^2 + s^2) = s^2\,(dx^2 + dy^2) = s^2\,ds^2$$

und hieraus wieder
$$dx = \frac{s\,d\,s}{\sqrt{a^2 + s^2}}.$$

Das bestimmte Integral dieses Werthes ist aber

$$x = -a + \sqrt{a^2 + s^2},$$

daher auch
$$s = \sqrt{2\,a\,x + x^2}.$$

Verbindet man letzteren Werth mit (2) so ergiebt sich

$$\text{I. } dy = \frac{a\,d\,x}{\sqrt{2\,a\,x + x^2}}.$$

Dieses ist aber dieselbe Differenzialfunction, welche jeder der beiden Bernoullis an den vorher angegebenen Stellen der betreffenden Werke entwickelt hat [1]). Jacob B. zeigte später auch, daß für $s = qy$ die Kettenlinie eine gemeine Parabel bildet, indem dann aus (2) folgt: $qydy = adx$, d. i.

$$y^2 = \frac{2\,a}{q}\,x.$$

---

1) Die Integration der Gleichung I läßt sich leicht ausführen, wenn man $x + \sqrt{2\,a\,x + x^2} = z$ setzt, woraus $dy = \dfrac{a\,d\,z}{a + z}$ folgt und daher schließlich als bestimmtes Integral erhalten wird:

$$\text{II. } y = a \text{ Lgnt.} \left(\frac{a + x + \sqrt{2\,a\,x + x^2}}{a}\right)$$

Um die Kettenlinie hiernach zu zeichnen, muß man a (d. h. den Krümmungshalbmesser der Curve im Scheitel B) kennen. Ist aber dieser Werth unbekannt, so läßt er sich durch Annäherung wie folgt berechnen, sobald zwei zusammengehörige Coordinaten $\overline{BE} = m$ und $\overline{AE} = n$ gegeben sind.

Zunächst ist wegen II:

$$(\alpha)\ n = a \text{ Lgnt.} \left(\frac{a + m + \sqrt{2\,a\,m + m^2}}{a}\right)$$

Ferner werde gesetzt: $(\beta)\ \dfrac{a + m + \sqrt{2\,a\,m + m^2}}{a} = w$, so daß aus (α) wird

$(\gamma)\ n = a \text{ Lgnt. } w$. Reducirt man daher aus (β)

$a = \dfrac{2\,m\,w}{(w - 1^2)}$, so folgt endlich aus (γ):

$n = \dfrac{2\,m\,w}{(w - 1)^2}$ Lgnt. w und schließlich:

$$(\delta)\ \frac{n}{2\,m} = \frac{w}{(w - 1)^2} \text{ Lgnt. } w.$$

Ist beispielsweise $n = 8^m$, $m = 5^m$, also $\dfrac{n}{2\,m} = 0{,}8$, so erhält man zuerst für $w = 3$ und dann $w = 3{,}1$ aus (δ) Werthe, welche erkennen lassen, daß die erstere Satzung zu groß, die letztere zu klein ist und daher aus der Proportion der Differenzen für $w = 3{,}083$, richtiger folgt: $a = 7{,}105$.

Ebenfalls war es Jacob B. welcher das Problem auf ungleich schwere Ketten und Seile erweiterte, wo also das Gewicht der Längeneinheit nicht constant, sondern von einem Punkte der Curve zum andern veränderlich ist, worüber die unten notirten Werke Auskunft geben [1]).

An einer anderen Stelle [2]) (1691) findet Jacob B. zuerst, daß die sogenannte Segelcurve ebenfalls eine Kettenlinie ist, sobald der Wind, nachdem er die Segel in schiefer Richtung getroffen hat, auch völlige Freiheit besitzt wieder herauszukommen. Im folgenden Jahre (1692) brachte auch Johann B. eine Auflösung desselben Problems und zwar in dem Pariser ‚Journal des Savans' [3]), der er später (1714) eine zweite folgen ließ, die ein Theil seiner ‚Théorie de la manoeuvre des vaisseaux' bildet und welcher Briefe an Renau angeschlossen sind [4]). Naturgemäß wurde die Infinitesimalrechnung auch Veranlassung, daß man sich mit fernern Eigenschaften der Curven beschäftigte und war es Johann Bernoulli, der 1696 das desfallsige berühmte Problem der Brachistochrone [5]) vorlegte: „eine Curve von solcher Beschaffenheit zu finden, daß ein schwerer Körper, der auf ihrer concaven Seite herabfällt, von einem Punkte zu einem anderen, die beide nicht in einerlei Verticale liegen, in der möglichst kürzesten Zeit gelangt".

Leibniz soll die Auflösung sofort beschafft haben, verbarg jedoch dieselbe ebenso wie Johann B. selbst. Die von letzterem gestellte Frist von einem Jahre war noch nicht abgelaufen, als Newton, der Marquis de L'Hospital [6]) und Jacob B. ebenfalls

1) ‚Opera' p. 450 (Note) und ‚Acta Erud.' von 1691, p. 288.

2) ‚Opera', p. 481 und ‚Acta Erud.' von 161, p. 202.

3) Johann B. ‚Opera omnia', T. I, p. 59.

4) Ebendaselbst, T. II, p. 10 bis 107.

5) Von Bráchistos kürzeste (Superlativ von Bráchys, kurz) und chronos die Zeit. Also „Curve des schnellsten Falles".

6) L'Hospital (oder wie spätere Schriftsteller schreiben L'Hôpital wurde 1661 in Paris von vornehmen Eltern geboren, dem entsprechend er die Beinamen führte Chevalier Marquis de Sainte Mesme, Comte d'Entremont, Seigneur d'Ouques etc. Großes Talent und Vorliebe zur Mathematik setzten ihn in den Stand, sich im 15. Jahre mit Erfolg an der Lösung, der damals beliebten Probleme der Cycloide zu betheiligen. Nachdem er einige Jahre Rittmeister der französischen Cavallerie gewesen war, gab er diese Stellung gänz-

Auflösungen einsandten, die sämmtlich darin übereinstimmten, daß die verlangte Curve eine Cycloide ist, deren Basis eine horizontale Linie bildet. Während sich Newton und de L'Hospital begnügten, das Resultat kurz anzugeben, veröffentlichte Jacob B. seine Auflösung im Maihefte der ‚Acta Erud.' von 1697 [1]). Da-

lich auf und zwar sowohl wegen seiner Kurzsichtigkeit als seiner Neigung zur Mathematik. So kommt es, daß er bereits 1690 mit Huyghens in Briefwechsel tritt und noch in demselben Jahre, also 29 Jahre alt, Mitglied der Pariser Akademie der Wissenschaften wird. 1691 machte er in Paris die Bekanntschaft von Johann Bernoulli, mit dem er vier Monate lang auf seinem Landgute Ouques in Touraine verlebte. Im Jahre 1692 tritt er in Correspondenz mit Leibniz, wobei er gleich im ersten Briefe erklärt, daß er die Differenzialrechnung für vollendet (achevé) hielt und nur noch die Ausbildung der Integralrechnung als erforderlich bezeichnet. Die weitere Correspondenz zwischen Leibniz und de L'Hospital erstreckt sich u. A. auch über das Princip der Dynamik, wie es von Leibniz in dem Streite gegen die Cartesianer (S. 125) aufgestellt worden war. (Specielles über diese Correspondenzen findet sich in ‚Leibnizens mathematischen Schriften', herausgegeben von Gerhardt. Erste Abtheilung, Bd. II, S. 211 etc.).

1696 erscheint in Paris sein berühmtes Werk: ‚Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes'. Dies Werk war das erste seiner Art, welches als wirklich brauchbar für den Unterricht in der Differenzialrechnung bezeichnet werden konnte und das selbst noch heut zu Tage zu den klassischen Büchern gezählt werden kann*). In diesem Buche wird auch zuerst die sinnreiche Regel vorgetragen, den Werth eines Bruches zu finden, dessen Zähler und Nenner zu gleicher Zeit verschwinden, wenn man der veränderlichen Größe einen gewissen bestimmten Werth giebt. Nachher nahm de L'Hospital auch Theil an der Lösung des von Johann Bernoulli gestellten Problemes über die Brachistochrone, sowie er sich später ebenfalls mit der Ausbildung der Integralrechnung beschäftigt zu haben scheint.

In solchen Thätigkeiten überraschte ihn, am 2. Februar 1704 zu Paris der Tod. Unter seinen hinterlassenen Manuscripten hat sich auch eine bis auf den Schluß vollendete Dynamik aufgefunden, worüber u. A. Gerhardt a. a. O., S. 215 von ‚Leibnizens mathematischen Schriften' berichtet.

Die ausführlichste Biographie von de L'Hospital findet sich in der ‚Histoire de l'Académie des sciences de Paris', année 1704, p. 125.

1) In Jacob B. ‚Opera' T. II, p. 768 findet sich diese Arbeit abgedruckt. Jacob Bernoulli's Beweis ist besonders gut (gestützt auf die einfachsten Sätze der Differenzialrechnung) wiedergegeben in Belanger's ‚Cours de mécanique', Paris 1847. Der studirenden Jugend empfiehlt der Verfasser recht sehr die von Gugler in Stuttgart besorgte deutsche Bearbeitung der Belanger'schen ‚Mechanik', woselbst sich der fragliche Beweis S. 152 bis 154 vorfindet. Unter Benutzung der Variationsrechnung findet sich in Navier-Wittstein's ‚Differenzial- und Integralrechnung', S. 591 ein sehr schöner Beweis.

*) Bossut in seinem Versuche einer Geschichte der Mathematik bemerkt

bei legte er zugleich zwei neue Probleme vor, wovon das isoperimetrische für uns das wichtigste ist und wodurch er überdies den Grund zur sogenannten Variationsrechnung legte [1]).

Bei Stellung dieser Aufgabe hatte Jacob zugleich beleidigende Aeußerungen gegen seinen Bruder Johann hinzugefügt, dahin gehend, als zweifle er an seiner Fähigkeit zur Auflösung, welcher Umstand den eitlen und ruhmsüchtigen Johann derartig bewegten, daß ein Bruderzwist in der Weise entstand, wie er bis dahin in der Geschichte der Mathematik nicht vorgekommen war. Johann knüpfte Unwahrheiten an Schimpfworte und zeigte überall seinen niedrigen Charakter, der seinen nicht zu verkennenden Verdiensten um die Wissenschaft so oft schadete [2]).

Allerdings kam es so wie Jacob Bernoulli erwartet hatte. Johann löste die Aufgabe falsch, was Jacob veranlasste, seine Auflösung zu veröffentlichen in der Schrift: ‚Analysis magni pro-

---

hierzu (I, S. 163): „Das Werk des Marquis de L'Hospital entschleierte die ganze Wissenschaft der Differenzialrechnung".

1) Etwas allgemeiner als Bernoulli selbst giebt Bossut seiner ‚Geschichte der Mathematik', Th. II (deutsche Uebersetzung, S. 170) diese Aufgabe in folgenden Worten:

„Unter allen isoperimetrischen Curven zwischen gegebenen Grenzen eine Curve von der Beschaffenheit zu finden, daß, wenn man eine zweite Curve construirt, deren Ordinaten beliebige Functionen der Ordinaten oder der Bogen jener sind, der Flächeninhalt der zweiten Curve ein Größtes oder Kleinstes bildet. Diesem Hauptprobleme fügte er noch ein anderes dem von der Brachistochrone mehr analoges bei, worüber die vorbezeichnete Quelle Auskunft giebt".

Es werde hier die Gelegenheit benutzt die studirende Jugend auf einen vortrefflichen, einfach und leicht verständlich geschriebenen Artikel Schlömilch's in Dresden aufmerksam zu machen, der unter der Ueberschrift „Isoperimetrisch" im 25. Theile der ‚Encyklopädie von Ersch und Gruber', S. 83—90 enthalten ist. Als Beispiele löst Schlömilch folgende drei Aufgaben:

a) Welche ist unter allen isoperimetrischen Curven diejenige, die die größte Fläche einschließt? Die fragliche Curve ist natürlich die Kreislinie.

b) Von welcher unter allen isoperimetrischen Curven zwischen zwei Punkten liegt der Schwerpunkt am tiefsten? Es wird nachgewiesen, daß dieser Anforderung die gemeine Kettenlinie (Note 1, S. 138) entspricht.

c) Welche ist unter allen Curven von gleicher Länge und gleichem Flächeninhalte diejenige, die bei ihrer Umdrehung um die Abscissenachse den größten Rotationskörper erzeugt? Die Rechnung zeigt, daß die größte Curve die (einfachste) elastische Linie ist.

2) Bossut (‚Geschichte der Mathematik', Th. II, deutsche Uebersetzung, S. 380) vergleicht deshalb Jacob Bernoulli mit Newton und Johann Bernoulli mit Leibniz.

blematis isoperimetrici' (Basilae, 1701). Diese Schrift, die letzte wissenschaftliche That Jacob B.'s, wurde überall für ein Meisterstück der Erfindung und des Scharfsinns und für die genialste Schöpfung auf dem Gebiete der höheren Analysis gehalten. Erst 13 Jahre nach seines Bruders Tode (der 1705 erfolgte), gab Johann B. den Irrthum selbst zu und lieferte dabei eine richtige Auflösung, die jedoch im Grunde mit der seines Bruders ganz einerlei ist [1]).

Um im Sinne unseres Buches, die besonders technisch wichtigen Arbeiten der Brüder Bernoulli, so weit als möglich, zu besprechen, kehren wir zuerst zum Jahre 1691 zurück, wo Jacob seine schönen Arbeiten über die logarithmische Spirale in den Leipziger ‚Acten' [2]) veröffentlichte.

Wurde diese Curve auch bereits von Descartes [3]), Mersenne [4]), entfernter auch von Wallis und Barrow betrachtet [5]), so war es doch zuerst Jacob B., der zum Nachweise der Eigenschaften derselben die neuen analytischen Methoden in Anwendung brachte [6]), die Längen der Bogen und die Flächenräume

---

1) ‚Jacobi Bernoulli Opera', T. II, p. 895.

Ueber diese ganze Angelegenheit berichten namentlich folgende Quellen: ‚Jacobi B. Opera', von p. 814 ab, ferner ‚Joh. B. Opera omnia', T. II, p. 235 und Bossut a. a. O., S. 164—181.

2) ‚Acta Erud.' 1691, mensis junii, p. 282 und ‚Jacobi B. Opera', p. 442.

3) Montucla a. a. O., T. II, p. 45.

4) Ebendaselbst, S. 45.

5) Klügel's ‚mathem. Wörterbuch', Artikel „Spirale", S. 439.

6) Der Verfasser bringt hier zunächst eine der technisch wichtigsten Eigenschaften der log. Spirale, nämlich die in Erinnerung, daß in jedem Punkte E (Figur 30) die Tangenten $\overline{ET}$ mit dem Leitstrahle $\overline{AE}$ (radius vector) einen constanten Winkel ψ bildet.

Um dies nachzuweisen hat man zuerst, mit Bezug auf die Bezeichnungen der Figur: $(1)\ tg.\,\psi = \frac{\overline{EF}}{\overline{GF}} = \frac{z\,d\varphi}{dz}$. Ferner ist bekanntlich:

$$z = a^{\varphi}, \text{ also } dz = d\varphi a^{\varphi} \text{ Lgnt. } a = z\,d\varphi \text{ Lgnt. } a \text{ und}$$

$$\text{daher } (2)\ \frac{z\,d\varphi}{dz} = \frac{1}{\text{Lgnt. } a}, \text{ demnach zufolge (1):}$$

$$tg.\,\psi = \frac{1}{\text{Lgnt. } a}.$$

Verlangt man beispielsweise, daß ψ constant $= 60^0$ sein soll, so wird $tg.\ 60^0 =$

$$1{,}732 \text{ und Lgnt. } a = \frac{1}{1{,}732} = 0{,}577, \text{ woraus folgt } a = 1{,}78,$$

deshalb aber schließlich $\quad z = 1{,}78^{\varphi},$

wonach die Curve leicht gezeichnet werden kann.

Auf dem Satze von dem constanten Winkel, welchen die Tangenten der bestimmte, den Zusammenhang dieser Curve mit der loxodromischen Linie auf der Kugel zeigte und ferner fand, daß die Evolute und die Caustica (Brennlinie) [1]) dieser Spirale dieselben Linien mit ihr sind und dass sie sich noch auf viererlei Art selbst erzeugt. Diese erzeugten Linien nannte Jacob B. Anticaustica, Pericaustica und Cycloidalis. Die Eigenschaft dieser Spirale sich auf vielerlei Arten selbst zu erzeugen, veranlaßte Jacob B. ihr den Namen „Spira mirabilis“ zu geben.

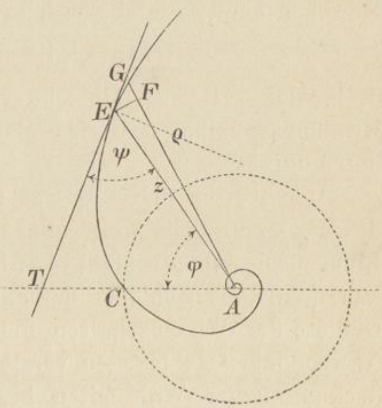
Um der Nachwelt nicht nur eine seiner schönsten Arbeiten, sondern auch seinen Glauben an die Unsterblichkeit in Erinnerung zu bringen, bat er seinen Grabstein mit der Inschrift zu versehen:

„Eadem mutata resurgo“.

(Zu deutsch etwa: „Ich selber ein Bild der Spirale werde auferstehen“, oder „Trotz der Verwandlung erhebe ich mich wieder als dasselbe Wesen“).

---

log. Spirale mit dem Lichtstrahle bilden, beruht die Construction der gekrümmten Messer, unter anderen der Häckselschneidemaschinen nach dem Systeme Lester (Rühlmann, ‚Allgem. Maschinenlehre‘, Bd. II, S. 675, zweite Auflage), die Bildung der gekrümmten Heuschläge auf den ebenen Flächen der Mühlsteine (Rühlmann, ebendaselbst, S. 228) etc.



30.

Ferner läßt sich zeigen, daß die Flügel (Schaufeln) der Schiffsanker auf das vortheilhafteste nach einer logarithmischen Spirale gekrümmt werden, sobald die Flügel mit Leichtigkeit in den Grund einschneiden und zugleich den größten Widerstand gegen das Schiff leisten sollen. Die theoretische Auflösung dieser Aufgabe (die richtige Form der Schiffsanker zu bestimmen) hat zuerst der berühmte schwedische Admiral Chapmann gegeben. Ein Auszug dieser Arbeit findet sich in Gilbert's ‚Annalen der Physik‘, Bd. VI (1800), S. 81 bis 95, unter der Ueberschrift „Von der richtigen Form der Schiffsanker“.

1) Mit dem Namen Caustica belegt man eine Curve, auf welcher die Durchschnittspunkte je zweier unmittelbar benachbarter, von einem Punkte ausgehender Lichtstrahlen liegen, welche von einer gegebenen Linie zurückgeworfen oder gebrochen werden, wenn man diese, wie die zugehörigen auffallenden Linien in steter Folge nimmt. Man sehe hierüber Klügel's ‚Mathem. Wörterbuch‘, Artikel „Brennlinie“ und Wilde's ‚Geschichte der Optik‘, Th. I, S. 340.

Für die Ingenieur-Mechanik von großer Wichtigkeit ist noch das zuerst von Jacob B. gelöste Problem der elastischen Linie, d. h. die Auffindung der Gestalt derjenigen Curve, welche die Achse eines elastischen Stabes (Streifens oder einer Ruthe) annimmt, wenn dessen Biegung durch äußere Kräfte erfolgt.

Galilei hielt die elastische Linie (ebenso wie die Kettenlinie) für eine Parabel und noch derselben Meinung waren spätere Schriftsteller, wie Gasto Pardies und Franciscus Tertius de Lanis [1]). Erst Jacob B. löste die Aufgabe und zeigte in der soeben citirten Zeitschrift und in den ‚Memoiren der Pariser Akademie der Wissenschaften', daß die fragliche Curve von ganz eigenthümlicher Beschaffenheit sei [2]). Indeß ist der bei der Auflösung des Problemes von Jacob B. eingeschlagene Weg derartig, daß wir hier nur des von ihm benutzten (noch heute gültigen) Hauptsatzes gedenken, welcher also lautet:

Das statische Moment (M) der äußeren Kräfte, multiplicirt mit dem Krümmungshalbmesser (ϱ) des Punktes der Curve, worauf das Moment bezogen wurde, ist gleich einer Constanten $= W$ [3]). Hiernach kann gesetzt werden:

$$M\varrho = W \text{ oder } \frac{W}{\varrho} = M,$$

d. h. das statische Moment verhält sich umgekehrt wie der Krümmungshalbmesser der elastischen Linie an dem bezeichneten Punkte.

Den Nutzen dieses Satzes für die Ermittlung des Widerstandes der Materialien, sowie aller Untersuchungen über die elastische Linie überhaupt, scheint Jacob B. offenbar nicht gekannt zu haben, wonach sich hier der Satz bestätigen würde, daß auch im Gebiete der Wissenschaften die Erfinder nicht immer die besten Anwendungen zu machen verstehen, vielmehr sich mit der Entdeckung neuer Wahrheiten begnügen und deren Anwendungen ihren Nachfolgern überlassen.

---

1) Nach Jacob Bernoulli's Angaben in den ‚Acta Erudit.' anno 1694, p. 263.

2) ‚Acta Erud.', ebendaselbst p. 263 und P. M. von 1705, p. 176. Auch in Jacob B.'s. ‚Opera', p. 576 unter der Ueberschrift „Curvatura laminae elasticae etc." und p. 987 als Problem „Trouver la courbure elastique etc."

3) Die Constante W wird gegenwärtig das Elasticitätsmoment genannt und durch das Product ET, d. i. aus dem Elasticitätsmodul (E) multiplicirt mit dem Trägheitsmomente T des normalen Querschnittes des betreffenden Körpers, dargestellt. Man sehe deshalb u. A. des Verfassers ‚Geostatik', 3. Aufl., S. 317.

Noch ist einer Reihe von Arbeiten Jacob Bernoulli's zu gedenken, welche sich auf die Theorie des Oscillationscentrums oder des Agitationscentrums (S. 94) beziehen und zwar aus folgenden besonderen Gründen: Erstens weil sich auch bei diesem ausgezeichneten Manne der Satz bestätigt, daß alle Menschen einmal irren können und zweitens weil Jacob B. von einem Satze Gebrauch machte, mittelst dessen später d'Alembert jede Aufgabe der Dynamik auf eine Aufgabe der Statik zurückführte. Mit der von Huyghens aufgestellten Behandlung des Problems vom Schwingungsmittelpunkte (S. 95) war man seiner Zeit nicht überall einverstanden, um so weniger als damals das Princip von der Erhaltung der lebendigen Kräfte noch nicht bewiesen war.

Daher versuchte auch Jacob B. eine andere Lösung, woraus jedoch nur erhellt, daß die gestellte Aufgabe nicht so leicht war, indem sich dieser sonst so ausgezeichnete Mathematiker in einem erheblichen Punkte irrte [1]. L'Hospital [2]) verbesserte den Irrthum, den Jacob B. begangen hatte. Nachher (1691) veröffentlichte auch Jacob B. neue Darstellungen seiner Auflösungsmethode [3]), die ihren Abschluß jedoch erst in den ausführlichen Darlegungen [4]) von 1703 und 1704 fanden. An letzteren Stellen löst Jacob B. das Problem nicht nur in seiner größten Allgemeinheit und (in der Abhandlung von 1704) mit Nachweisung der zufälligen Einerleiheit des Mittelpunktes des Schwunges mit dem des Stoßes (S. 104, Note 1), sondern auch unter Benutzung des Begriffes der verlorenen Kräfte, worauf nachmals (1743) d'Alembert das nach ihm benannte Princip der Dynamik gründete und worauf wir später zurückkommen.

Vorstehende Erwähnung L'Hospital's giebt uns Veranlassung, der Lösung einer Aufgabe dieses wackern Mannes zu gedenken, die ihm 1695 von Sauveur [5]) vorgelegt wurde und welche

---

1) Dühring, ‚Geschichte der Principien der Mechanik' (erste Auflage), S. 135, zweite Ausgabe S. 133. ‚Jacobi B. Opera'; T. I, p. 277 und ‚Acta Erud.' 1686, p. 356.

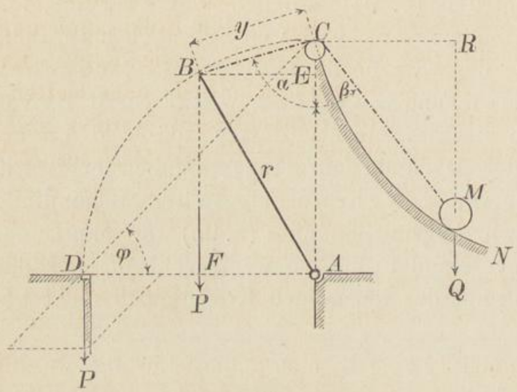
2) ‚Jacobi B. Opera', p. 454, nach der ‚Histoire des ouvrages des savans' von 1690, p. 440.

3) ‚Acta Erud.' 1691, p. 317.

4) ‚Mémoires de l'acad. des sciences de Paris' 1703, p. 78 und 1704, p. 1.

5) Sauveur, geb. 1653 zu La Flèche, gest. 1716 zu Paris, unterstützte Mariotte in seinen hydr. Versuchen, wurde darauf (1686) Professor der Mathe-

für die technische Mechanik eben so viel wissenschaftliches Interesse wie Werth für das Gebiet der Anwendung hat.



31.

Es ist dies folgende Aufgabe:

„Um einen Punkt A (Figur 31) ist eine sogenannte Klappbrücke AB drehbar, in deren einem Ende B ein Seil (oder eine Kette) BCM befestigt ist, welches man über eine vertical über dem Drehpunkt der Brücke befindliche feste Rolle C geschlagen hat. Am freien Ende M des Seiles wirkt ein Gewicht Q, man soll die Gleichung der krummen Linie CN finden, auf welcher dies Gewicht mit der Brücke AB überall im Gleichgewichte ist".

L'Hospital löste diese Aufgabe noch in demselben Jahre, veröffentlichte die betreffenden Resultate in den ‚Actis Erud.' von 1695, p. 56 und zeigte, daß die Gleichung der krummen Linie CN vom vierten Grade ist. Fast unmittelbar nach L'Hospital gab Johann Bernoulli[1]) nicht nur eine viel allgemeinere Auflösung des Problems der Gleichgewichtscurve[2]), sondern zeigte auch, daß sie zur Familie der Cycloiden gehört. Auch Jacob B. und Leibniz beschäftigten sich mit dieser Aufgabe[3]). Nach den

---

matik am Collège royale und 1696 Mitglied der Akademie der Wissenschaften. Irrt der Verfasser nicht, so war Sauveur der erste, welcher eine Abhandlung über die Reibung eines Seiles, das über einen festliegenden Cylinder läuft, schrieb. Diese Arbeit ist im Jahrgange 1703 der ‚Memoiren' p. 305 der erwähnten Akademie abgedruckt.

1) ‚Acta Erud.' von 1695, p. 59.

2) Dabei dachte sich Johann B. an jeden der Seilenden B und M Gewichte auf Curven laufend, welche beide verschieden von der Kreislinie sind und wobei auch die feste Leitrolle C in ganz beliebiger Höhe lag etc. Man sehe hierüber auch des Verfassers ‚Geostatik', 3. Auflage, S. 235, wo die betreffende Aufgabe in dieser Allgemeinheit gelöst ist.

3) ‚Acta Erud.' von 1695, p. 65 und p. 184.

Arbeiten dieser vier berühmten Autoren läßt sich die Gleichgewichtscurve, für den einfachsten Fall der Klappbrücke AB (Figur 31) ableiten, daß der Drehpunkt der festen Rolle auch der Anfang der Gleitbahn für das Gewicht Q ist, wie folgt: Es sei l die ganze zwischen B und M befindliche Seil- oder Kettenlänge, wovon das Gewicht (hier) vernachlässigt werden soll. Für die in Figur 31 gezeichnete Lage der Klappe AB sei $BC = y$ und $CM = z$, so daß sich $l = y + z$ und $y = l - z$ ergiebt. Für die gedachte Lage von AB sei ferner $\angle BCE = \alpha$ und $\angle ECM = \beta$. Denkt man sich das Gewicht der Klappe AB von deren Schwerpunkte nach dem Ende B reducirt und zu P ermittelt, so hat man nach einem zuerst von Johann B. aufgestellten Satze[1]):

$$(1)\quad P \, . \, \overline{BF} = Qz \cos\beta.$$

Nun ist aber $\overline{CE} = y \cos\alpha$ und daher $\overline{EA} = \overline{BF} = r - y \cos\alpha$ wenn man $\overline{AB} = r$ setzt.

Demnach aus (1):

$$(2)\quad P\,(r - y \cos\alpha) = Qz \cos\beta.$$

Da ferner $\cos\alpha = \frac{y}{2r} = \frac{l-z}{2r}$ ist, so läßt sich statt (2) auch schreiben:

$$(3)\quad P\left[r - \frac{(l-z)^2}{2r}\right] = Qz \cos\beta.$$

Ist $z =$ Null, so wird $y = l$ und P gelangt nach D, so wie Q nach C. Deshalb ist für diesen Fall $P = Q \sin\varphi$, wenn φ den Winkel CDA bezeichnet. Da nun $\varphi = 45^0$, also $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und daher $P = \frac{Q}{\sqrt{2}}$ und $l = r\sqrt{2}$ ist, so ergiebt sich schließlich:

$$\text{I.}\quad z = 2r\sqrt{2}\,[1 - \cos\beta].$$

Dieser Ausdruck ist aber nichts anderes als die Polargleichung einer Epicykloide, wobei der Grundkreis gleich dem wälzenden Kreise ist[2]). Dem französischen Ingenieur Belidor war das letztere Resultat 39 Jahre nachher, noch unbekannt, da in dessen

---

1) Princip der virtuellen Geschwindigkeit, von dem nachher gleich die Rede sein wird.

2) Es sei ACG (Figur 32) der Bogen einer Epicykloide, welche dem besonderen Falle entspricht, daß der Grundkreis AM und der Rollkreis ADE gleich groß sind und der Radius eines jeden dieser Kreise $= a$ ist. Nehmen wir den Berührungspunkt A der beiden Kreise als Pol, setzen für einen Punkt C des Bogens den Radius vector, d. i. $AC = z$ und den zugehörigen Polwinkel $CAH = \beta$, so läßt sich erst zeigen, daß auch $\angle HCA = \beta$ ist.

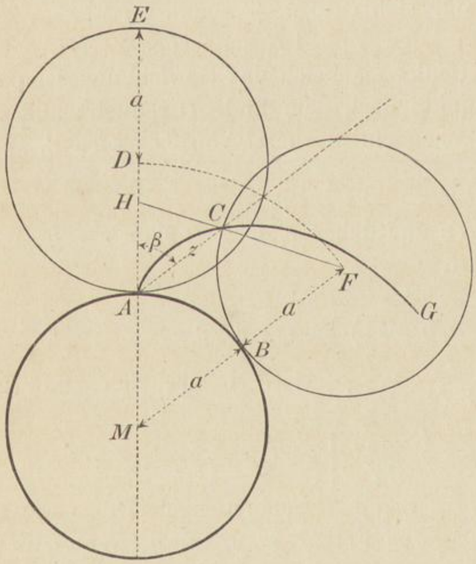
Werke über die Ingenieurwissenschaften, zweite Ausgabe. Haag 1734 die Curve CN als Sinusoide aufgeführt wird [1]).

Zu L'Hospital's Arbeiten zurückkehrend heben wir noch hervor, daß dieser sich auch um die Theorie der Brennlinien (Katacaustica und Diacaustica) S. 143, verdient machte, die er ausführlich mit so großer Klarheit behandelte [2]),

---

Der Entstehung des Cykloidenbogens ACG entsprechend, ist nämlich $AB = BC$, daher $\angle BMA = BFC$, folglich das $\triangle MHF$ gleichschenklig und folglich $MH = FH$. Weiter ist auch $AH = CH$ und demnach $\angle HCA = \angle CHA$ w. z. B. w.

Diesem zufolge verhält sich $z : AH = sin(180 - 2\,\beta) : sin\,\beta$), daher $AH = \frac{z}{2\,cos\,\beta}$. Ferner hat man $\overline{MH} : \overline{AH} = \overline{MF} : \overline{AC}$ oder $a + AH : AH = 2\,a : z$ demnach $a + \frac{z}{2\,cos\,\beta} : \frac{z}{cos\,\beta} = 2\,a : z$, d. i. $z = 2\,a\,(1 - cos\,\beta)$, die obige Gleichung I, sobald jeder der Radien der betreffenden Kreise $a = r\sqrt{2}$ genommen wird.



32.

1) Mit Bezug auf Figur 31 hat man für den Gleichgewichtszustand $P \,.\, \overline{BF} = Q \,.\, \overline{MR}$ und da $\overline{BF} = r\,sin \angle BAD$, auch

$$\overline{MR} = \frac{P}{Q}\, r\,sin \angle BAD.$$

Da hiernach die senkrechten Erhebungen $\overline{MR}$ des Gegengewichtes Q den Sinus des Erhebungswinkels BAD der Brückenklappe proportional sind, so gab Belidor der Curve den oben bemerkten Namen.

Statt der Gleichgewichtscurven mit constantem Gewichte wendet man jetzt bei Klapp- oder Zug-Brücken (nach Poncelet) ein sinnreiches System veränderlicher Gegengewichte ohne irgend welche Curven an. Man sehe deshalb Poncelet, ‚Mécanique appliquée aux machines', Sect. VIII, Nr. 28. Dagegen macht man selbst in neuerer Zeit bei transportabeln Krahnen von den sogenannten Gleichgewichtscurven Gebrauch, worüber u. A. in des Verfassers ‚Allgemeiner Maschinenlehre', Bd. IV, S. 469 ff. nachzulesen ist.

2) L'Hospital, ‚Analyse des infiniment petits', S. 104 und 120 unter den Ueberschriften: ‚Usage du calcul des différences pour trouver les caustiques par réflexion et par réfraction'.

daß die neuere Zeit hier wohl manches hinzufügen, seine Methode aber nicht übertreffen konnte [1]).

Von Johann Bernoulli sind jetzt noch zwei für die rationelle Technik wichtige Arbeiten zu erwähnen, seine Bemühungen um die Klarstellung des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten und seine Entwicklung der hydrodynamischen Grundgleichung für die Geschwindigkeit womit, im einfachsten Falle, das Wasser bei constanter Druckhöhe aus Bodenöffnungen der Gefäße fließt.

Das erstgenannte Princip erörterte Johann B. in einem im Jahre 1717 an Varignon [2]) gerichteten Briefe, woselbst es also heißt [3]): „Wenn irgend welche Kräfte auf irgend eine Art angebracht sind und zwar so, daß sie entweder mittelbar oder unmittelbar wirken, so ist Gleichgewicht vorhanden, wenn die Summe der positiven Energien gleich ist der Summe der negativen. Unter Energie ist zu verstehen das Produkt der Kraft in die Projection der Verschiebung auf die Kraftrichtung und diese ist negativ oder positiv zu nehmen, je nachdem die Projection auf die Verlängerung oder auf die Richtung der Kraft selbst fällt“.

Hierbei ist noch auf den Umstand aufmerksam zu machen, daß Johann B. den Ausdruck virtuelle Geschwindigkeit (vitesse virtuelle) hier zum ersten Male gebraucht.

Varignon war es auch, der den großen Nutzen dieses Satzes zur Berechnung des Gleichgewichtszustandes der Maschinen an sehr vielen Beispielen nachwies, weshalb wir auch im zweiten Theile unseres Buches auf diesen zweiten französischen nnter den zuerst auftretenden Kämpfern [4]) (nächst dem allerdings genialern L'Hospital) für die gute Sache der Infinitesimalrechnung zurückkommen mehrfach Veranlassung finden werden [5]).

Auch auf Johann Bernoulli's Verdienste um die Hydrodynamik kommen wir im Paragraph 18 (S. 162 u. 166) zurück.

---

1) Wilde, ‚Geschichte der Optik‘, Th. II, S. 342.

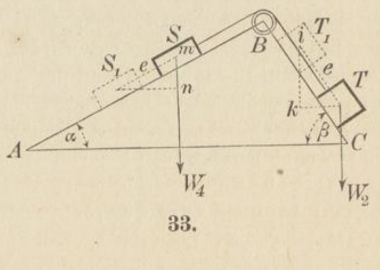
2) Varignon, geb. 1654 zu Caen, gest. 1722 zu Paris. Ursprünglich Theolog, dann 1688 Professor der Mathematik am Collége Mazarin, später auch am Collége royale in Paris. Mitglied der Akademie daselbst 1688.

3) Varignon, ‚Nouvelle mécanique ou statique‘, T. II, p. 174.

4) Man sehe hierüber auch das Lob, welches deshalb Montucla in seiner ‚Histoire des mathématiques‘, T. II, p. 397 und 489 dem Varignon ertheilt.

5) Zur Erläuterung und Illustration des Principes der virtuellen Geschwindigkeiten, wie es zuerst Johann B. bestimmt aussprach, erörtern wir nochmal den Stevin'schen Satz von der schiefen Ebene (S. 50, Figur 2). Wir fanden (S. 51), mit Bezug auf nebenstehende Figur 33:

(a) $W_4 \sin \alpha = W_3 \sin \beta$.



33.