

www.e-rara.ch

Elementarbuch der Differential- und Integralrechnung

Autenheimer, Friedrich

Weimar, 1887

ETH-Bibliothek Zürich

Shelf Mark: Rar 23285

Persistent Link: <https://doi.org/10.3931/e-rara-75272>

Zweiter Teil der Integralrechnung.

www.e-rara.ch

Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien – von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material – from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d'imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L'éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes – des débuts de l'imprimerie jusqu'au 20e siècle.

e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

Nutzungsbedingungen Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titelinformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

Terms of Use This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

Conditions d'utilisation Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

Condizioni di utilizzo Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]

Zweiter Teil der Integralrechnung.

I. Differentialformeln mit einer Variablen.

306. Rationale, gebrochene algebraische Differential-Formeln. Dieselben können immer mittelst der Zerlegung in Partialbrüche (§ 269) auf eine der einfachen Formen gebracht werden

$$\frac{A dx}{a+x}, \frac{A dx}{(a+x)^n}, \frac{Ax+B}{(a+x)^2+b^2} dx, \frac{Ax+B}{[(a+x)^2+b^2]^n} dx.$$

Das Integral von der ersten dieser Formen ist bereits in § 76 angegeben.

Um die übrigen Formeln zu integrieren, setze man $a+x=y$, also auch $dx=dy$, so erhält man für die zweite Formel

$$\frac{A dx}{(a+x)^n} = \frac{A dy}{y^n} = A y^{-n} dy.$$

Folglich indem man integriert

$$\int \frac{A dx}{(a+x)^n} = \frac{A y^{-n+1}}{-n+1} + C$$

und wieder x statt y einführt:

$$(1) \quad \int \frac{A dx}{(a+x)^n} = -\frac{A}{n-1} \cdot \frac{1}{(a+x)^{n-1}} + C.$$

Für die dritte der obigen Differentialformeln erhält man

$$(2) \quad \frac{Ax+B}{(a+x)^2+b^2} dx = \frac{A y dy}{y^2+b^2} + \frac{B-ay}{y^2+b^2} dy.$$

Nun ist aber nach § 76

$$(3) \quad \int \frac{A y dy}{y^2 + b^2} = \frac{A}{2} \int \frac{2 y dy}{y^2 + b^2} = \frac{A}{2} \log(y^2 + b^2) + C \\ = \frac{A}{2} \log[(a+x)^2 + b^2] + C$$

und nach § 78, Formel (6)

$$(4) \quad \int \frac{B - A a}{y^2 + b^2} dy = \frac{B - A a}{b} \operatorname{Arc tang} \frac{y}{b} + C \\ = \frac{B - A a}{b} \operatorname{Arc tang} \frac{x+a}{b} + C.$$

Setzt man diese Werte aus (3) und (4) in (2), so folgt

$$(5) \quad \int \frac{A x + B}{(a+x)^2 + b^2} dx = \frac{A}{2} \log[(x+a)^2 + b^2] \\ + \frac{B - A a}{b} \operatorname{Arc tang} \frac{x+a}{b} + C.$$

Endlich erhält man für die vierte der obigen Formeln

$$(6) \quad \frac{(A x + B) dx}{[(a+x)^2 + b^2]^n} = \frac{A y dy}{(y^2 + b^2)^n} + \frac{B - A a}{(y^2 + b^2)^n} dy.$$

Um den ersten Teil rechts zu integrieren, setze man $y^2 + b^2 = z^2$, also auch $y dy = z dz$, so wird

$$(7) \quad \frac{A y dy}{(y^2 + b^2)^n} = \frac{A z dz}{z^{2n}} = a z^{-2n+1} dz. \\ \int \frac{A y dy}{(y^2 + b^2)^n} = \frac{A z^{-2n+2}}{-2n+2} = \frac{A}{2(1-n)} \cdot \frac{1}{(y^2 + b^2)^{n-1}} + C.$$

Nun bleibt noch nach Formel (6) die Differentialformel

$$(8) \quad \frac{dy}{(y^2 + b^2)^n}$$

zu integrieren. Man multipliziere und dividiere (8) mit $y^2 + b^2$, so kommt

$$(9) \quad \int \frac{dy}{(y^2 + b^2)^n} = \int \frac{y^2 dy}{(y^2 + b^2)^{n+1}} + \int \frac{b^2 dy}{(y^2 + b^2)^{n+1}}.$$

Integriert man nun den ersten Teil rechts nach der Formel (1) des § 82

$$(10) \quad \int u dv = uv - \int v du,$$

indem man annimmt

$$u = y, \quad dv = \frac{y dy}{(y^2 + b^2)^{n+1}},$$

so erhält man zunächst aus der letzten Formel vermitteltst (7)

$$v = -\frac{1}{2n(y^2 + b^2)^n}.$$

Folglich unter Anwendung von (10)

$$\int \frac{y^2 dy}{(y^2 + b^2)^{n+1}} = \frac{-y}{2n(y^2 + b^2)^n} + \frac{1}{2n} \int \frac{dy}{(y^2 + b^2)^n}.$$

Führt man diesen Wert von $\int \frac{y^2 dy}{(y^2 + b^2)^{n+1}}$ in (9) und zieht die gleichartigen Glieder zusammen, so erhält man

$$(11) \quad \int \frac{b^2 dy}{(y^2 + b^2)^{n+1}} = \frac{y}{2n(y^2 + b^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} \int \frac{dy}{(y^2 + b^2)^n}.$$

Vermöge dieser Formel ist das Integral $\int \frac{dy}{(y^2 + b^2)^{n+1}}$ auf $\int \frac{dy}{(y^2 + b^2)^n}$ zurückgeführt. Durch wiederholte Anwendung dieser Formel gelangt man zuletzt zum Integral $\int \frac{dy}{y^2 + b^2}$, dessen Wert bekannt ist. Folglich kann auch vermitteltst (7) und (11) das Differential (6) integriert werden. Das in Formel (11) dargestellte Verfahren nennt man die Methode der Rekursion.

307. Irrationale, algebraische Differentialformeln. Enthält die Differentialformel algebraische Polynome, in welchen die Variable mit gebrochenen Exponenten vorkommt, so kann die Formel durch passende Substitutionen rational gemacht werden. Es sei z. B. zu integrieren

$$dy = \frac{a + \sqrt{x}}{b - \sqrt[3]{x}} dx.$$

Man setze $x = z^6$, also $\sqrt{x} = z^3$, $\sqrt[3]{x} = z^2$, $dx = 6z^5 dz$, so ist

$$dy = \frac{a + z^3}{b - z^2} \cdot 6z^5 dz.$$

Diese Formel ist rational und kann nach dem vorhergehenden Paragraphen integriert werden.

Die binomische Differentialformel

$$(1) \quad x^{m-1} (a + bx^n)^{\frac{p}{q}} dx$$

kann in gewissen Fällen durch eine der beiden Substitutionen

$$a + bx^n = z^q \quad \text{oder} \quad a + bx^n = z^q x^n$$

rational gemacht werden.

Für die erste Substitution erhält man

$$n b x^{n-1} dx = q z^{q-1} dz;$$

$$dx = \frac{q}{n b} \left(\frac{z^q - a}{b} \right)^{\frac{1-n}{n}} z^{q-1} dz; \quad x^{m-1} = \left(\frac{z^q - a}{b} \right)^{\frac{m-1}{n}}.$$

Somit

$$x^{m-1} (a + b x^n)^{\frac{p}{q}} dx = \frac{q}{n b} \left(\frac{z^q - a}{b} \right)^{\frac{m-n}{n}} z^{q+p-1} dz.$$

Diese Formel wird rational, wenn $\frac{m-n}{n}$ eine ganze Zahl ist.

Wendet man die zweite Substitution an, so wird man finden, dass die Formel (1) rational wird, wenn $\frac{p}{q} + \frac{m}{n}$ eine ganze Zahl ist.

308. Differentialformeln mit der Grösse $\sqrt{A + Bx + Cx^2}$. Diese Grösse kann auch geschrieben werden

$$\sqrt{C} \sqrt{\frac{A}{C} + \frac{B}{C}x + x^2},$$

weshalb man, der Allgemeinheit unbeschadet, die Quadratwurzel aus obigem quadratischen Ausdruck in der Form $\sqrt{a + bx + x^2}$ voraussetzen kann.

Es ist bereits im § 78 eine Differentialformel, welche diese Wurzelgrösse enthält, integriert worden. Auf demselben Wege, auf welchem diese entstanden ist, erhält man auch das Integral von $dx \sqrt{a + bx - x^2}$.

Setzt man in Formel (8) von § 82

$$b + y = x, \quad dy = dx, \quad b^2 + 2by + y^2 = x^2,$$

so kommt

$$\int dy \sqrt{a^2 - b^2 - 2by - y^2} = \frac{b+y}{2} \sqrt{a^2 - b^2 - 2by - y^2} + \frac{a^2}{2} \text{Arc sin } \frac{b+y}{a}.$$

Setzt man hierin $a^2 - b^2 = A$, $-2b = B$, so wird

$$(1) \quad \int dy \sqrt{A + By - y^2} = \frac{2y - B}{4} \sqrt{A + By - y^2} + \frac{4A + B^2}{8} \text{Arc sin } \frac{2y - B}{\sqrt{4A + B^2}} + C.$$

Um die Integrale der Formeln

$$\frac{dx}{\sqrt{a + bx + x^2}}, \quad dx \sqrt{a + bx + x^2}$$

zu erhalten, setze man in Formel (3) des § 80 und Formel (9) des § 82, wie oben, die Grössen $b + y = x$, $dy = dx$, so erhält man

$$\int \frac{dy}{\sqrt{a^2 + b^2 + 2by + y^2}} = \log(b + y + \sqrt{a^2 + b^2 + 2by + y^2}) + C,$$

$$\int dy \sqrt{a^2 + b^2 + 2by + y^2} = \frac{b+y}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + 2by + y^2} + C$$

$$+ \frac{a^2}{2} \log(b + y + \sqrt{a^2 + b^2 + 2by + y^2}).$$

Setzt man hierin $a^2 + b^2 = A$, $2b = B$, so wird

$$(2) \int \frac{dy}{\sqrt{A + By + y^2}} = \log\left(\frac{B}{2} + y + \sqrt{A + By + y^2}\right) + C.$$

$$(3) \int dy \sqrt{A + By + y^2} = \frac{B + 2y}{4} \sqrt{A + By + y^2} + C$$

$$+ \frac{4A - B^2}{8} \log\left(\frac{B}{2} + y + \sqrt{A + By + y^2}\right).$$

Es sei das Integral der Formel $\frac{x^{m+1} dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}}$ zu finden, in welcher c positiv oder negativ sein kann. Durch Differentiation folgt

$$d(x^m \sqrt{a + bx + cx^2}) = mx^{m-1} dx \sqrt{a + bx + cx^2}$$

$$+ \frac{x^m(b + 2cx) dx}{2\sqrt{a + bx + cx^2}}.$$

Man bringe die Glieder rechts unter den gleichen Nenner und ordne, so kommt

$$d(x^m \sqrt{a + bx + cx^2}) = \frac{m a x^{m-1} dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}} + \frac{(2m+1) b x^m dx}{2\sqrt{a + bx + cx^2}}$$

$$+ \frac{(m+1) c x^{m+1} dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}}.$$

Dividiert man mit $(m+1)c$, versetzt die Glieder und integriert, so erhält man

$$(4) \int \frac{x^{m+1} dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}} = \frac{x^m \sqrt{a + bx + cx^2}}{(m+1)c}$$

$$- \frac{(2m+1)b}{2(m+1)c} \int \frac{x^m dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}}$$

$$- \frac{ma}{(m+1)c} \int \frac{x^{m-1} dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}} + C.$$

Für $m=0$ geht diese Formel über in

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{a + bx + cx^2}} = \frac{\sqrt{a + bx + cx^2}}{c} - \frac{b}{2c} \int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}}.$$

Das letzte Glied kann nach dem Vorhergehenden integriert werden und zwar nach (2), wenn c positiv oder nach (7) des § 78, wenn c negativ ist. Auf eben diese Formeln wird man geführt, wenn man $m = 1, 2, 3, \dots$ in (4) einführt. Formel (4) ist daher eine Rekursionsformel.

Für $a=1$, $b=0$, $c=-1$ erhält man aus (4)

$$(5) \int \frac{x^{m+1} dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^m}{m+1} \sqrt{1-x^2} + \frac{m}{m+1} \int \frac{x^{m-1} dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Um den Ausdruck $x^{n-1} dx \sqrt{a+bx+cx^2}$ zu integrieren, multipliziere und dividiere man mit $\sqrt{a+bx+cx^2}$, so erhält man als Differential

$$\frac{x^{n-1} dx (a+bx+cx^2)}{\sqrt{a+bx+cx^2}},$$

welches nach (4) integriert werden kann.

309. Transcendente Differentiale. Um die Differentiale $\frac{dx}{\sin x}$ und

$\frac{dx}{\cos x}$ zu integrieren, schreibe man

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x dx}{\sin^2 x} = -\int \frac{d(\cos x)}{1-\cos^2 x},$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x dx}{\cos^2 x} = \int \frac{d(\sin x)}{1-\sin^2 x}.$$

Man setze $\cos x = y$ und $\sin x = z$, so erhält man

$$\int \frac{dx}{\sin x} = -\int \frac{dy}{1-y^2}; \quad \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dz}{1-z^2}.$$

Nun erhält man aber durch die Methode der Zerlegung in Partialbrüche

$$\frac{1}{1-y^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+y} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-y}.$$

Folglich wird

$$\int \frac{dx}{\sin x} = -\frac{1}{2} \int \frac{dy}{1+y} - \frac{1}{2} \int \frac{dy}{1-y} = -\frac{1}{2} \log \frac{1+y}{1-y} + C.$$

$$(1) \quad \int \frac{dx}{\sin x} = -\frac{1}{2} \log \frac{1+\cos x}{1-\cos x} + C.$$

Ganz ebenso ergibt sich

$$(2) \quad \int \frac{dx}{\cos x} = \frac{1}{2} \log \frac{1+\sin x}{1-\sin x} + C.$$

Setzt man $-n$ statt $+n$ in die Formeln (8) und (9) des § 80 und versetzt die Glieder, so erhält man wie dort

$$(3) \quad \int \frac{dx}{\sin^{n+1} x} = -\frac{1}{n} \frac{\cos x}{\sin^n x} + \frac{n-1}{n} \int \frac{dx}{\sin^{n-1} x} + C.$$

$$(4) \quad \int \frac{dx}{\cos^{n+1} x} = \frac{1}{n} \frac{\sin x}{\cos^n x} + \frac{n-1}{n} \int \frac{dx}{\cos^{n-1} x} + C.$$

Für $n=0$ sind diese Formeln unbrauchbar. In diesem Falle sind die Formeln (1) und (2) anzuwenden. Allein (1) und (2) kommen auch zur Anwendung, wenn man $n=2, 4, 6, \dots$ in (3) und (4) einführt.

Man erhält für $n = 1$ und 2 :

$$(5) \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\frac{\cos x}{\sin x} + C; \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} + C.$$

$$(6) \quad \int \frac{dx}{\sin^3 x} = -\frac{1}{2} \frac{\cos x}{\sin^2 x} - \frac{1}{4} \log \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} + C.$$

$$(7) \quad \int \frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{1}{2} \frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{4} \log \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} + C.$$

Es sei der Ausdruck $\sin^m x \cos^q x dx$, in welchem m und q ganze Zahlen bezeichnen, zu integrieren. Man betrachte zunächst q als eine gerade Zahl, setze also $q = 2n$, so kann man schreiben

$$(8) \quad \sin^m x \cos^{2n} x dx = \sin^m x (1 - \sin^2 x)^n dx.$$

Entwickelt man $(1 - \sin^2 x)^n$ nach dem binomischen Satze, so enthält der vorstehende Ausdruck eine endliche Anzahl Glieder von der Form $\sin^p x dx$, welche mittelst Formel (8) des § 80 integriert werden können.

Ist q eine ungerade Zahl, so setze man $q = 2n + 1$, wodurch man erhält

$$(9) \quad \sin^m x \cos^{2n+1} x dx = \sin^m x (1 - \sin^2 x)^n \cos x dx.$$

Wird hier nach dem binomischen Satze entwickelt, so erhält man Glieder von der Form $\sin^p x \cos x dx$, welche nach Formel (6) des § 80 integriert werden können.

Auf demselben Wege können die Ausdrücke

$$\frac{\cos^q x}{\sin^m x} dx, \quad \frac{\sin^q x}{\cos^m x} dx$$

integriert werden. Wenn q eine gerade Zahl ist, so erhält man die Formen

$$\frac{(1 - \sin^2 x)^n dx}{\sin^m x}, \quad \frac{(1 - \cos^2 x)^n}{\cos^m x},$$

welche nach (3) und (4) dieses Paragraphen oder nach (8) und (9) des § 80 zu integrieren sind.

Wenn $q = 2n + 1$ eine ungerade Zahl ist, so wird

$$\frac{\cos^q x}{\sin^m x} dz = \frac{(1 - \sin^2 x)^n d \sin x}{\sin^m x}.$$

Setzt man hierin $\sin x = z$, so kommt

$$(10) \quad \frac{\cos^q x}{\sin^m x} dx = \frac{(1 - z^2)^n dz}{z^m}.$$

Diese rechte Seite ist eine rationale algebraische Funktion, welche integriert werden kann.

Wendet man auf den Ausdruck

$$x^n \text{Arc sin } x dx$$

die Formel $\int u dv = uv - \int v du$ des teilweisen Integrierens an, indem man setzt

$$dv = x^n dx, \quad u = \text{Arc sin } x,$$

so erhält man zunächst

$$v = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Führt man die Werte von u , v und du ein, so folgt

$$\int x^n \text{Arc sin } x dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \text{Arc sin } x - \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1} dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Allein das zweite Glied rechts kann nach Formel (5) des §. 308 integriert werden.

Es sei das Integral $\int e^{-x^2} dx$, das in der Wahrscheinlichkeitsrechnung vorkommt, abzuleiten. Man entwickle e^{-x^2} nach Formel (4) des § 62 in eine Reihe, so kommt

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1} + \frac{x^4}{1 \cdot 2} - \frac{x^6}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

Folglich wird, indem man mit dx multipliziert und integriert

$$(11) \quad \int_0^x e^{-x^2} dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^5}{5} - \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots$$

Die erste dieser beiden Reihen ist für jeden endlichen Wert von x konvergent, also ist es auch die zweite Reihe.

310. Reihe von Johann Bernoulli. Durch Anwendung der Formel

$$\int u dv = uv - \int v du$$

des teilweisen Integrierens erhält man

$$\int f(x) \cdot dx = f(x) \cdot x - \int f'(x) \cdot x dx,$$

$$\int f'(x) \cdot x dx = f'(x) \cdot \frac{x^2}{2} - \int f''(x) \cdot \frac{x^2}{2} dx,$$

$$\int f''(x) \cdot \frac{x^2}{2} dx = f''(x) \cdot \frac{x^3}{2 \cdot 3} - \int f'''(x) \cdot \frac{x^3}{2 \cdot 3} dx,$$

.

und durch Addition dieser Gleichungen

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= f(x) \cdot x - f'(x) \cdot \frac{x^2}{2} + f''(x) \cdot \frac{x^3}{2 \cdot 3} \\ &\quad - f'''(x) \cdot \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + C. \end{aligned}$$

Dies ist die von Johann Bernoulli zuerst angegebene Reihe. Sie ist, wie jede Reihe überhaupt, nur zulässig unter der Bedingung ihrer Konvergenz.

Um das Integral $\int \log x \, dx$ nach dieser Formel abzuleiten, hat man

$$\begin{aligned} f(x) &= \log x; & f'(x) &= x^{-1}; & f''(x) &= -x^{-2}; \\ f'''(x) &= 2x^{-3}; & f^{IV}(x) &= -6x^{-4}; & f^V(x) &= 24x^{-5}, \text{ etc.} \end{aligned}$$

Setzt man diese Werte in die vorstehende Reihe, so ergibt sich

$$\int \log x \, dx = x \left(\log x - \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} - \dots \right) + C.$$

II. Ueber bestimmte Integrale.

311. Ableitung von Integralformeln durch Variation einer Konstanten. Die gegebene Gleichung sei

$$(1) \quad u = \int_a^b f(x, \alpha) \, dx,$$

in welcher α eine Konstante bezeichnet, welche in irgend einer Weise mit der Variablen x zusammenhängt. Setzen wir voraus, es sei α von den Grenzen a und b unabhängig. Denkt man sich α veränderlich und bezeichnet man den Wert von u , welcher entsteht, wenn α in $\alpha + \triangle \alpha$ übergeht, mit $u + \triangle u$, so ist

$$u + \triangle u = \int_a^b f(x, \alpha + \triangle \alpha) \, dx.$$

Folglich durch Subtraktion

$$\triangle u = \int_a^b [f(x, \alpha + \triangle \alpha) - f(x, \alpha)] \, dx.$$

Oder indem man mit $\triangle \alpha$ dividiert

$$(2) \quad \frac{\triangle u}{\triangle \alpha} = \int_a^b \frac{f(x, \alpha + \triangle \alpha) - f(x, \alpha)}{\triangle \alpha} \, dx.$$

Allein es ist nach § 6

$$\lim \frac{f(x, \alpha + \triangle \alpha) - f(x, \alpha)}{\triangle \alpha} = \frac{df(x, \alpha)}{d\alpha}.$$

Geht man daher in (2) von der Differenz zum Differential über, so ist

$$\frac{du}{d\alpha} = \int_a^b \frac{df(x, \alpha)}{d\alpha} \, dx.$$

Um daher die Gleichung (1) in Hinsicht einer Konstanten α zu differenzieren, kann die Differentiation der Grösse hinter dem Integralzeichen, ohne Rücksicht auf dieses Zeichen, ausgeführt werden. Die Konstante wird häufig Parameter und das Verfahren die Differentiation nach einem Parameter oder auch die Differentiation von Kurve zu Kurve genannt.

Dieser von Leibnitz ausgesprochene Satz kann dazu benutzt werden, um aus bereits bekannten Integralformeln andere abzuleiten, wie folgende Beispiele zeigen.

I. Es ist

$$\int e^{-\alpha x} dx = -\frac{1}{\alpha} \int e^{-\alpha x} d(-\alpha x) = -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x} + C,$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha}.$$

Differenziert man in Hinsicht α , so kommt nach 1, 2, ... maliger Wiederholung

$$\int_0^{\infty} x e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha^2}; \quad \int_0^{\infty} x^2 e^{-\alpha x} dx = \frac{2}{\alpha^3}; \dots$$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-\alpha x} dx = \frac{2 \cdot 3 \dots n}{\alpha^{n+1}}.$$

II. Es ist

$$\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}.$$

Differenziert man 1, 2, ... mal, so kommt

$$\int_0^1 x^n \log x dx = -\frac{1}{(n+1)^2}; \quad \int_0^1 x^n \log^2 x dx = \frac{2}{(n+1)^3};$$

$$\int_0^1 x^n \log^m x dx = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m}{(n+1)^{m+1}}.$$

312. Vereinfachung gewisser Reduktionsformeln durch Anwendung von Integrationsgrenzen. Nach Formel (5) des § 308 ist z. B.

$$\int \frac{x^{m+1} dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^m}{m+1} \sqrt{1-x^2} + \frac{m}{m+1} \int \frac{x^{m-1} dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Hieraus folgt

$$(1) \quad \int_0^1 \frac{x^{m+1} dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{m}{m+1} \int_0^1 \frac{x^{m-1} dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Nun beachte man, dass man nach § 78 und 80 hat

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = 1.$$

Mit Hilfe dieser Integrale ergeben sich nun aus (1) folgende neue, wenn $m = 1, 2, 3, \dots$ gesetzt wird

$$\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2} \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^1 \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{3},$$

$$\int_0^1 \frac{x^4 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^1 \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5},$$

$$\int_0^1 \frac{x^6 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^1 \frac{x^7 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7},$$

und daher allgemein

$$(2) \quad \int_0^1 \frac{x^{2n} dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \frac{\pi}{2}.$$

$$(3) \quad \int_0^1 \frac{x^{2n+1} dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n+1)}.$$

Diese Formeln können noch wie folgt umgewandelt werden. Man setze $x = \sin \varphi$, führe also den Bogen φ statt x ein, so entspricht der untern Integrationsgrenze der Wert $\sin \varphi = 0$, also auch Bogen $\varphi = 0$; dagegen der obern Grenze der Wert $\sin \varphi = 1$, also der Bogen $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Das neue Integral ist also von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \frac{\pi}{2}$ zu nehmen.

Aus $x = \sin \varphi$ folgt aber

$$dx = \cos \varphi d\varphi, \quad \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\cos \varphi d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2 \varphi}} = d\varphi.$$

Somit gehen (2) und (3) über in

$$(4) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \varphi d\varphi = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \frac{\pi}{2}.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} \varphi d\varphi = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n+1)}.$$

Man erhält daher für $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \, d\varphi &= \frac{1}{2} \frac{\pi}{2}, & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi \, d\varphi &= \frac{2}{3}, \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \varphi \, d\varphi &= \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{\pi}{2}, & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 \varphi \, d\varphi &= \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

Eine andere Umwandlung ergibt sich, indem man $y = a(1 - \cos \varphi)$ in (4) setzt. Man erhält

$$\begin{aligned} dy &= a \sin \varphi \, d\varphi, \quad \cos \varphi = 1 - \frac{y}{a}, \quad \sin^2 \varphi = \frac{2ay - y^2}{a^2} \\ \sin^{2n} \varphi \, d\varphi &= \frac{1}{a^{2n}} (2ay - y^2)^{n-1} \sqrt{2ay - y^2} \, dy. \end{aligned}$$

Die Grenzen der Integration von (4) ändern sich wie folgt. Für die untere Grenze $\varphi = 0$ wird $y = a(1 - 1) = 0$; für die obere $\frac{\pi}{2}$ dagegen $y = a\left(1 - \cos \frac{\pi}{2}\right) = a$. Daher erhält man aus (4)

$$\int_0^a (2ay - y^2)^{n-1} \sqrt{2ay - y^2} \, dy = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \frac{\pi}{2} a^{2n}.$$

Zu einem weitem Beispiel dieser Art kann Formel (6) des § 82 benutzt werden. Man erhält allgemein

$$\int_0^1 x^{n-1} \, dx \sqrt{1-x^2} = \frac{1}{1+n} \int_0^1 \frac{x^{n-1} \, dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

und speziell für $n = 1, 2, 3, \dots$ der vorstehenden Resultate

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \sqrt{1-x^2} &= \frac{1}{2} \frac{\pi}{2}, & \int_0^1 x \, dx \sqrt{1-x^2} &= \frac{1}{3}, \\ \int_0^1 x^2 \, dx \sqrt{1-x^2} &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \frac{\pi}{2}, & \int_0^1 x^3 \, dx \sqrt{1-x^2} &= \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 5}, \\ \int_0^1 x^4 \, dx \sqrt{1-x^2} &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{\pi}{2}, & \int_0^1 x^5 \, dx \sqrt{1-x^2} &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 4}{3 \cdot 5 \cdot 7} \text{ etc.} \end{aligned}$$

313. Bestimmte Integrale für besondere Grenzen. Wenn allgemein

$$\int f(x) \, dx = F(x) + C,$$

so erhält man nach § 84 als bestimmtes Integral

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Bei Anwendung dieser Formel hat man sich jedoch immer zu überzeugen, ob die Natur der Funktion die Grenzen a und b zulässt. In welchem Sinne dies gemeint ist, mögen folgende Beispiele zeigen.

I. Bei der Quadratur der gleichseitigen Hyperbel, § 105, wurde als Fläche zwischen der Kurve und der Abscissenachse gefunden

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \log\left(\frac{b}{a}\right).$$

Dehnt man hierin die obere Grenze ins Unendliche aus, so wird der Wert des Integrals unendlich gross, also unbestimmt, während es zum Wesen des bestimmten Integrals gehört, immer einen bestimmten endlichen Wert zu besitzen. Lässt man a der Null sich nähern, so nähert sich der Wert des Integrals wieder der Grösse ∞ . Dabei wurde a positiv vorausgesetzt. Nimmt man aber a negativ an, so wird das Integral imaginär. In der That zeigt auch die Figur zu § 105, dass die Kurve keine Punkte, also auch keine Flächenelemente auf der negativen Seite der Abscissenachse hat. Es können also auf dieser Seite auch keine Flächenelemente summiert werden. Somit müssen im vorstehenden Integral die Grenzen a und b positiv und endlich sein.

II. Aus dem unbestimmten Integral

$$\int \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2} + C$$

folgt

$$\int_a^b \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right).$$

Dehnt man hierin die Grenze b bis $b = \infty$ aus, so geht der Wert des Integrals rechts über in den Grenzzustand $\frac{1}{2a^2}$. Dieser Wert ist ein bestimmter endlicher Wert, es kann daher auch die obere Grenze bis $b = \infty$ ausgedehnt werden.

Nimmt die untere Grenze a , als positiv gedacht, gegen Null ab, so nähert sich das Integral der Grösse ∞ und erreicht sie für $a = 0$. Dieser Grenzwert darf also nicht in Anwendung kommen. Allein es kann auch a nicht negativ und b positiv sein, weil sonst die Variable x sich von $-a$ bis $+b$ ändern, also durch 0 gehen müsste. Sind dagegen a und b negative Abscissenwerte, so gilt für diese was für positive. Wenn daher α ein sehr kleiner, der Null nahe liegender Wert, so kann das vorstehende Integral wie folgt genommen werden

$$\int_{-\infty}^{-\alpha} \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\alpha^2}, \quad \int_{+\alpha}^{+\infty} \frac{dx}{x^3} = +\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\alpha^2}.$$

314. Näherungsweise Bestimmung bestimmter Integrale. Lässt sich das bestimmte Integral

$$\int_a^b f(x) dx$$

durch keine der bisher in Anwendung gekommenen Methoden finden, so bestimme man seinen Wert näherungsweise wie folgt. Es sei x die Abscisse und $f(x)$ die Ordinate einer Kurve BE (Fig. 114). Diese Kurve sei stetig zwischen den Grenzen

$$x = a = OA \quad \text{und} \quad x = b = OD,$$

so werden die diesen Grenzen entsprechenden Ordinaten $AB = f(a)$ und $DE = f(b)$ sein.

I. Trapezmethode. Man teile den Unterschied $AD = b - a$ in n gleiche Teile h , mache also $h = AA' = A'A'' = \dots$, bezeichne der Einfachheit wegen die Ordinaten, welche den Abscissen $a, a + h, a + 2h, \dots, a + nh$ entsprechen mit $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ und betrachte die Flächenteile zwischen je zwei benachbarten Ordinaten als Trapeze; so sind die Inhalte dieser Trapeze

$$\frac{h}{2} (y_0 + y_1), \quad \frac{h}{2} (y_1 + y_2), \dots, \quad \frac{h}{2} (y_{n-1} + y_n).$$

Die Summe dieser Trapeze ist annähernd der Wert des bestimmten Integrals. Folglich wird die Formel

$$\int_a^b f(x) dx = h \left[\frac{1}{2} y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2} y_n \right]$$

um so näher den Wert des gesuchten Integrals geben, je kleiner das Intervall h genommen wird.

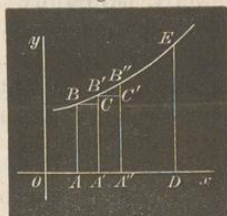
II. Simpson'sche Regel. Es gelte die bisherige Bezeichnung. Man teile den Abschnitt $AA'' = 2h$ in drei gleiche Teile und errichte in den beiden Teilpunkten die Ordinaten v und u , betrachte die dadurch zwischen den Ordinaten y_0 und y_2 entstandenen drei Flächenteile als Trapeze, so ist ihr Inhalt gleich

$$\frac{h}{3} (y_0 + v) + \frac{h}{3} (v + u) + \frac{h}{3} (u + y_2) = \frac{h}{3} (y_0 + 2v + 2u + y_2).$$

Diese drei Trapeze geben den Wert der Fläche $ABB''A''$ genauer als die beiden Trapeze zwischen den Ordinaten y_0, y_1 und y_1, y_2 .

Dieser Wert ist jedoch zu gross oder zu klein, je nachdem die Kurve ihre konvexe oder konkave Seite der Abscissenachse zukehrt. Setzt man noch $v + u = 2y_1$, was sehr nahe richtig ist, so wird der Ausdruck für die Fläche im ersten Fall kleiner, im zweiten grösser, so dass eine teilweise Ausgleichung der Fehler entsteht.

Fig. 114.



Dadurch wird die zwischen y_0 und y_2 liegende Fläche

$$AA''B''B = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Ganz ebenso ist die Fläche zwischen je zwei weitem Ordinaten mit geraden Stellenzeigern

$$\frac{h}{3} (y_2 + 4y_3 + y_4), \quad \frac{h}{3} (y_4 + 4y_5 + y_6), \dots$$

Durch Summation dieser Ausdrücke erhält man den angenäherten Wert der ganzen Fläche zwischen y_0 und y_n gleich

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} [y_0 + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}) + y_n].$$

Diese Formel nennt man die Simpson'sche Regel.

III. Methode von Poisson. Das unbestimmte Integral von $f(x) dx$ sei $\varphi(x)$, so wird sein

$$(1) \quad \int f(x) dx = \varphi(x) + C$$

und somit für die Grenzen a und b

$$(2) \quad \int_a^b f(x) dx = \varphi(b) - \varphi(a).$$

Man differentiire (1), so kommt

$$(3) \quad f(x) = \frac{d\varphi(x)}{dx} = \varphi'(x).$$

Der Wert von $\varphi(b) - \varphi(a)$ des bestimmten Integrals kann nun aus der Relation (3) ermittelt werden. Man erhält vermöge des Taylor'schen Satzes

$$\varphi(a+h) = \varphi(a) + hf(a) + \frac{h^2}{2} f'(a) + \frac{h^3}{6} f''(a) + \dots$$

$$\varphi(a+2h) = \varphi(a+h) + hf(a+h) + \frac{h^2}{2} f'(a+h) + \dots$$

$$\varphi(a+nh) = \varphi(a+nh-h) + hf(a+nh-h) + \frac{h^2}{2} f'(a+nh-h) + \dots$$

Man setze in diesen Gleichungen $nh = b - a$ und addiere sie, so kommt

$$(4) \quad \begin{aligned} \varphi(b) - \varphi(a) &= h[f(a) + f(a+h) + \dots + f(a+nh-h)] \\ &\quad + \frac{h^2}{2}[f'(a) + f'(a+h) + \dots + f'(a+nh-h)] \\ &\quad + \frac{h^3}{6}[f''(a) + f''(a+h) + \dots + f''(a+nh-h)] + \dots \end{aligned}$$

Ganz ebenso wird sein

$$(5) \quad f(b) - f(a) = h[f'(a) + f'(a+h) + \dots + f'(a+nh-h)] \\ + \frac{h^2}{2}[f''(a) + f''(a+h) + \dots + f''(a+nh-h)] + \dots$$

$$(6) \quad f'(b) - f'(a) = h[f''(a) + f''(a+h) + \dots + f''(a+nh-h)] + \dots$$

Man multipliziere (5) mit $-\frac{h}{2}$ und (6) mit $\frac{h^2}{12}$ und addiere nachher diese Gleichungen zu (4), setze dabei h als eine sehr kleine Grösse voraus, so dass in der Summe die Glieder, welche h in einer höhern als der zweiten Potenz enthalten, vernachlässigt werden können, so erhält man mit Rücksicht auf (2)

$$(7) \quad \int_a^b f(x) dx = h \left[\frac{1}{2} f(a) + f(a+h) + \dots + f(a+nh-h) + \frac{1}{2} f(b) \right] \\ - \frac{h^2}{12} [f'(b) - f'(a)].$$

Das erste Glied rechts in (7) stimmt mit der Formel der Trapez-Methode überein. Wegen des zweiten Gliedes rechts bietet diese Formel jedoch eine grössere Genauigkeit dar als jene der Trapez-Methode.

Beispiel. Es soll der Wert des bestimmten Integrales

$$u = \int_0^{1,2} \frac{dx}{1+x^3}$$

näherungsweise berechnet werden.

Man teile die Abscissendifferenz $b - a = 1,2 - 0$ in sechs gleiche Teile, so erhält man als Werte der Abscissen und entsprechenden Ordinaten

Absc. = 0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2
Ord. = 1	0,9920	0,9398	0,8224	0,6614	0,5000	0,3665

Setzt man diese Ordinaten von y_0 an bis y_6 in die vorstehenden Formeln und nimmt $h = 0,2$, so erhält man als Wert des Integrales:

I. Nach der Trapez-Methode

$$u = 0,2 \cdot 4,5991 = 0,9198.$$

II. Nach der Simpson'schen Regel

$$u = \frac{0,2}{3} \cdot 13,8267 = 0,9218.$$

III. Nach der Poisson'schen Formel hat man zunächst

$$f(x) = \frac{1}{1+x^3}, \quad f'(x) = -\frac{3x^2}{(1+x^3)^2}.$$

Der Wert von $f'(x)$ wird für $x=0=a$ und $x=1,2=b$ zu

$$f'(a)=0, \quad f'(b)=-0,5803.$$

Folglich das Glied

$$-\frac{h^2}{12} [f'(b) - f'(a)] = \frac{0,04}{12} \cdot 0,5803 = 0,0019$$

und da das erste Glied rechts in der Formel (7) den gleichen Wert hat wie derjenige der Trapez-Methode, so ist der verbesserte Wert

$$u = 0,9198 + 0,0019 = 0,9217.$$

Man sieht, dass die drei Werte, namentlich die beiden letztern, nur wenig von einander abweichen.

III. Länge der Kurven im Raum.

315. Ausdruck für das Bogenelement. Denkt man sich die Kurve aus unendlich kleinen, geradlinigen Bogenelementen zusammengesetzt, so kann man durch je zwei aufeinander folgende eine Ebene legen. Eine solche Ebene heisst Krümmungsebene (Oskulationsebene) und der Winkel, welchen die zwei Bogenelemente einer Krümmungsebene bilden, Krümmungswinkel (§ 292). Dieser Winkel ist das Mass der ersten Krümmung. Je zwei aufeinander folgende Krümmungsebenen schneiden sich und bilden einen Winkel, welcher als Mass der zweiten Krümmung der Kurve betrachtet wird.

Ist die Kurve auf drei rechtwinkelige Achsen bezogen, so kann sie als gegeben angesehen werden durch ihre Projektionen auf zwei der drei Koordinatenebenen xy, xz, yz .

Nun seien x, y, z und $x+dx, y+dy, z+dz$ die Koordinaten zweier einander unendlich nahe gelegener Punkte der Kurve, so kann man das dazwischen liegende Bogenstück, das wir mit ds bezeichnen wollen, als geradlinig ansehen. Alsdann ist ds die Diagonale eines rechtwinkligen Prismas, dessen Kanten dx, dy und dz sind. Folglich wird sein

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \text{ oder} \\ (1) \quad ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}.$$

Die Winkel, welche das Bogenelement ds mit den drei Achsen x, y, z macht, seien α, β, γ , so ist

$$(2) \quad \cos \alpha = \frac{dx}{ds}; \quad \cos \beta = \frac{dy}{ds}; \quad \cos \gamma = \frac{dz}{ds}.$$

Durch (1) wird die Länge und durch (2) die Richtung der Kurve im Punkte x, y, z bestimmt. Erhebt man die Gleichungen (2) ins Quadrat und addiert sie, so folgt

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Um den Bogen s der Kurve zwischen den Abscissen x_0 und x zu finden, hat man nur das Integral

$$(3) \quad s = \int_{x_0}^x dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

auszuführen, zu welchem Zwecke die Verhältnisse $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ aus den Gleichungen der Kurve abzuleiten, in einer Variabeln x auszudrücken und in Formel (3) einzuführen sind.

316. Länge einer Geraden im Raum. Die Gleichung der Geraden auf der Ebene xy und xz seien

$$y = ax + a'; \quad z = bx + b'.$$

Hieraus folgt

$$\frac{dy}{dx} = a; \quad \frac{dz}{dx} = b; \quad ds = dx \sqrt{1 + a^2 + b^2}$$

und mithin die gesuchte Länge

$$\int_{x_0}^x dx \sqrt{1 + a^2 + b^2} = (x - x_0) \sqrt{1 + a^2 + b^2}.$$

317. Länge einer Schraubenlinie. Die Achse eines Kreiscylinders vom Halbmesser a falle in die z Achse und seine Grundfläche in die Ebene xy . Es befinde sich auf der Cylinderfläche eine Schraubenlinie, welche den konstanten Winkel α mit der Ebene xy bildet und in der x Achse beginnt. Die Koordinaten eines Kurvenpunktes seien x, y, z . Man lege durch diesen Punkt und die z Achse eine Ebene. Sie bilde mit der Ebene xz den Winkel φ , wobei φ im Bogenmass ausgedrückt wird, so ist

$$x = a \cos \varphi, \quad y = a \sin \varphi, \quad z = a \varphi \operatorname{tg} \alpha.$$

Hieraus folgt

$$dx = -a \sin \varphi d\varphi, \quad dy = a \cos \varphi d\varphi, \quad dz = a \operatorname{tg} \alpha d\varphi,$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = a^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) d\varphi^2,$$

$$s = a \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = a (\varphi - \varphi_0) \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

318. Schnittlinie zweier Cylinderflächen. Die Achsen zweier Cylinders, welche gleichen Halbmesser a haben, sollen sich schneiden und zwar unter rechtem Winkel. Es ist die Länge der Kurve zu bestimmen, längs welcher sich die Cylinderflächen durchdringen.

Man nehme die Achse des ersten Cylinders in der z Achse, die des zweiten in der x Achse an, so ist die Gleichung der ersten Cylinderfläche auf der Ebene xy

$$(1) \quad x^2 + y^2 = a^2$$

und die der zweiten auf der Ebene yz

$$(2) \quad y^2 + z^2 = a^2.$$

Für die Durchschnittskurve müssen die Werte von x, y, z in beiden Gleichungen gleich sein. Setzt man die Werte von a^2 einander gleich, so folgt

$$(3) \quad x^2 = z^2,$$

woraus sich ergibt $x = \pm z$, d. h. die beiden Durchschnittskurven projizieren sich auf der Ebene xz längs zwei geraden Linien, welche die z Achse unter Winkeln von 45° schneiden. Mithin liegen diese Kurven in Ebenen, welche zur Ebene xz senkrecht stehen. Diese Ebenen schneiden sich längs der y Achse.

Aus (1) und (3) folgt durch Differentiation

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{x}{z} = 1.$$

Vermittelst dieser Werte erhält man

$$ds = dx \sqrt{2 + \frac{x^2}{y^2}}.$$

Führt man hierin den Wert von y aus (1), so kommt

$$(4) \quad ds = dx \sqrt{\frac{2a^2 - x^2}{a^2 - x^2}}.$$

Um diese Formel zu integrieren, setzen wir

$$x = a \sin \varphi, \quad dx = a \cos \varphi d\varphi,$$

so kommt aus (4)

$$ds = a \cos \varphi d\varphi \frac{\sqrt{2 - \sin^2 \varphi}}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi}} = a \sqrt{2} d\varphi \left(1 - \frac{\sin^2 \varphi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Entwickelt man die zweiteilige Grösse nach dem binomischen Satz in eine Reihe, so wird

$$(5) \quad ds = a \sqrt{2} d\varphi \left(1 - \frac{\sin^2 \varphi}{4} - \frac{\sin^4 \varphi}{32} - \frac{\sin^6 \varphi}{128} - \dots\right).$$

Um den vierten Teil einer der beiden Kurven zu erhalten, muss x von 0 bis a , also φ von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ genommen werden. Nun ist

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{\pi}{4}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \varphi d\varphi = \frac{3\pi}{16}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 \varphi d\varphi = \frac{5\pi}{32}.$$

Bezeichnet s die Länge einer ganzen Kurve, so erhält man vermittelst dieser Werte aus (5)

$$\frac{s}{a} = \pi \cdot 2 \sqrt{2} \left(1 - \frac{1}{8} - \frac{3}{256} - \frac{5}{2048} - \dots\right).$$

319. Schnittlinie einer Cylinderfläche und einer Kugelfläche. Ein Kreiscylinder gehe durch eine Kugel. Man soll die Länge der Kurve bestimmen, längs welcher sich beide Oberflächen schneiden und zwar unter der Voraussetzung, dass der Mittelpunkt der Kugel auf der Cylinderfläche liege und dass der Durchmesser des Cylinders gleich dem Halbmesser der Kugel sei.

Man nehme den Mittelpunkt M der Kugel (Fig. 115) zum Ursprung rechtwinkliger Koordinaten und lege die y Achse parallel zu den Kanten des Cylinders, so werden die Kugel- und Cylinderfläche geschnitten durch die Ebene xz längs zwei in der Figur abgebildeten Kreisen, die sich in A berühren.

Ein Punkt B des cylindrischen Schnittkreises habe zu Koordinaten $MC = x$, $BC = z$, so ist $(BC)^2 = MC \cdot AC$. Wenn der Halbmesser der Kugel $= a$, so wird $AC = x - a$; daher die Gleichung der Cylinderfläche auf der Ebene xz

$$(1) \quad z^2 = ax - x^2.$$

Die Gleichung der Kugelfläche aber ist

$$(2) \quad x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

Für die Kurve, längs welcher sich die Oberflächen schneiden, müssen die Koordinaten x, y, z einander gleich sein. Eliminiert man die Grösse z aus (1) und (2), so folgt als Gleichung der Kurve auf der Ebene xy

$$y^2 = a^2 - ax.$$

Die Kurve projiziert sich daher auf dieser Ebene als Parabel.

Dem Punkte B entspricht eine Ordinate y , liegend im Cylindermantel. Sie schliesst mit dem Kugelradius a und der Sehne $MB = r$ ein rechtwinkeliges Dreieck ein, das kongruent ist dem Dreieck MAB. Denn das erstere Dreieck mit den Seiten y, a und r gibt $y^2 = a^2 - r^2$; ebenso gibt das zweite Dreieck die Relation $(AB)^2 = a^2 - r^2$; folglich ist $y = AB$.

Nun sei Winkel $AMB = \alpha$, so wird

$$(3) \quad y = a \sin \alpha; \quad r = a \cos \alpha.$$

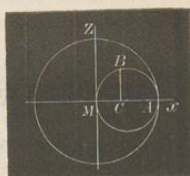
Lässt man nun x in $x + dx$ übergehen, so wird α zu $\alpha + d\alpha$ und r zu $r + dr$. Dabei rückt der Punkt B in der Richtung nach A hin vor um einen Bogen, der als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks angesehen werden kann mit den Katheten $r d\alpha$ und dr ; die Länge des Bogens ist daher $\sqrt{(r d\alpha)^2 + dr^2}$. Gleichzeitig ändert sich y um dy . Daher die Gleichung für das Bogenelement

$$ds^2 = dy^2 + r^2 d\alpha^2 + dr^2.$$

Nun folgt aber aus (3)

$$dy = a \cos \alpha d\alpha; \quad dr = -a \sin \alpha d\alpha.$$

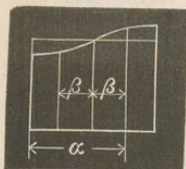
Fig. 115.



Daher

$$(4) \quad ds = a d\alpha \sqrt{1 + \cos^2 \alpha}.$$

Fig. 116.



Diese Gleichung kann nun wie folgt integriert werden. Man denke sich den Bogen α (Fig. 116) als Abscisse abgetragen; ebenso $\sqrt{1 + \cos^2 \alpha}$ als Ordinate. Lässt man α von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ wachsen, so beschreibt die Ordinate eine Fläche, deren Inhalt das Integral von $d\alpha \sqrt{1 + \cos^2 \alpha}$ ist. Diese Fläche hat

zur Länge $\frac{\pi}{2}$; ihre mittlere Höhe sei h , so ist das Integral (4) für die angegebene Ausdehnung

$$(5) \quad s = \frac{\pi}{2} a h.$$

Allein die Krümmung der Kurve, welche die Fläche begrenzt, lässt sofort erkennen, dass h die Ordinate ist für die Abscisse $\frac{\pi}{4}$. In der

That wenn man die Ordinate von $\frac{\pi}{4}$ aus um β vor- und rückwärts schiebt, so wird die Grösse $1 + \cos^2 \alpha$ zu $1 + \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} \pm \beta \right)$. Durch Zerlegung des Cosinus in zwei Teile und nachherige Potenzierung ergibt sich aber

$$(6) \quad 1 + \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} \pm \beta \right) = 1,5 \mp \sin \beta \cos \beta.$$

Jene zwei Ordinaten, welche gleich weit von den Endordinaten abstehen, weichen daher in ihrer Länge um gleich viel von der Ordinate ab für $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Für $\beta = \frac{\pi}{4}$ wird der Wert (6) zu $1,5 \pm \frac{1}{2}$, also zu 2 und 1. Diese Grössen entsprechen der End- und Anfangsordinate. Für $\beta = 0$ wird die Ordinate $= \sqrt{\frac{2+1}{2}} = \sqrt{1,5} = h$. Daher das Integral (5) für die ganze Länge der Kurve, liegend auf der einen Seite des Cylinders, also für die Grenzen $\alpha = 0$ bis $\alpha = \pi$:

$$S = a \pi \sqrt{\frac{3}{2}} = 3,848 a.$$

Würde sich die Durchschnittslinie auf der Ebene xy als gerade Linie projizieren, so wäre die Kurve ein ebener Schnitt durch die Cylinderfläche, also eine Ellipse und zwar mit den Achsen a und $a\sqrt{2}$ und, nach § 92, mit einer Länge $= 3,822 a$. Daher ist die wirkliche Schnittlinie nur um $0,026 a$ länger als diese Ellipse.

IV. Volumen der Körper.

320. Volumen eines Körpers in rechtwinkligen Koordinaten. Die Gleichung der Oberfläche, welche den Körper begrenzt, sei

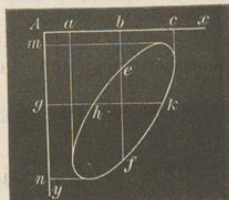
$$(1) \quad z = f(x, y).$$

Die Cylinderfläche, deren Kanten den Körper berühren und mit der z Achse parallel laufen, schneide die Ebene xy längs einer Kurve $ehfk$ (Fig. 117). Die Fläche, welche diese Kurve einschliesst, kann als die Projektion des Körpers auf der Ebene xy angesehen werden. Man ziehe von a und c aus Tangenten an diese Kurve, parallel zur y Achse und ebenso von m und n Tangenten an dieselbe, parallel zur x Achse, so wird die Kurve von diesen vier Geraden eingeschlossen.

I. Man lege einen ebenen Schnitt durch den Körper parallel zur Ebene yz im Abstände $Ab = x$ vom Anfangspunkt aus. Diese Schnittebene schneide die Projektion längs der Geraden ef . Die Fläche dieses Schnittes sei X . Lässt man x um dx zunehmen, d. h. rückt X um dx , parallel zu sich selbst fort, so beschreibt X das Volumenelement $X dx$. Dieses Volumenelement ist ein unendlich Kleines der ersten Ordnung. Lässt sich X in x allein ausdrücken, so hat man nur das Differential $X dx$ zu integrieren, um den Inhalt des ganzen Körpers zu erhalten. Die Grenzen von x sind hierbei die Werte Aa und Ac .

Man lege einen ebenen Schnitt durch den Körper, parallel zur Ebene xz , im Abstände $y = Ag$ vom Anfangspunkt aus. Diese Schnittebene schneide die Projektion längs der Geraden hk . Der Wert dieses Schnittes sei Y . Man lasse y um dy zunehmen, d. h. man schiebe Y um dy , parallel zu sich selbst, fort, so beschreibt Y das Volumenelement $Y dy$. Lässt sich Y durch die Variable y allein ausdrücken, so integriere man $Y dy$ und nehme das Integral zwischen den Grenzen Am und An und man erhält den Inhalt des ganzen Körpers.

Fig. 117.



II. Legt man Schnittebenen durch den ganzen Körper senkrecht zur x Achse, in den Abständen dx von einander, sodann Schnittebenen, senkrecht zur y Achse, welche je um dy von einander absteht; so teilen diese zwei Systeme von Schnittebenen den Körper in Prismen mit den Grundflächen $dx dy$ (diese Grundflächen parallel zur Ebene xy gedacht) und mit Höhen, welche den verschiedenen Werten von z entsprechen, die sich aus der Gleichung (1) ergeben. Deshalb ist der Inhalt eines solchen Körperelementes $= z dx dy$ oder auch $= f(x, y) dx dy$. Dieses Körperelement ist ein unendlich Kleines der zweiten Ordnung. Um daraus das unendlich Kleine $X dx$ der ersten Ordnung zu erhalten

ten, denke man sich im Ausdrucke $f(x, y) dx dy$ die Grösse x konstant und integriere in Hinsicht y . Man erhält

$$(2) \quad X dx = dx \int f(x, y) dy.$$

Hierin ist y zu nehmen von be bis bf , wenn $x = Ab$ ist.

Um den ganzen Körperinhalt zu erhalten, muss (2) integriert werden in Hinsicht x . Man erhält in Zeichen ausgedrückt

$$(3) \quad \int X dx = \int dx \int f(x, y) dy.$$

Die Grenzen von x sind Aa und Ac .

Um aus dem Differential $f(x, y) dx dy$ der zweiten Ordnung das Differential $Y dy$ der ersten Ordnung abzuleiten, nehme man y als konstant an und integriere $f(x, y) dx dy$ in Hinsicht x . Man erhält

$$(4) \quad Y dy = dy \int f(x, y) dx.$$

Hierbei ist x zu nehmen von $x = gh$ bis $x = gk$, wenn $Ag = y$ ist.

Um den ganzen Körperinhalt zu bestimmen, integriere man (4) in Hinsicht y zwischen den Grenzen $y = Am$ und $y = An$. Man erhält

$$(5) \quad \int Y dy = \int dy \int f(x, y) dx.$$

Beide Integrale (3) und (5) geben den Inhalt des ganzen Körpers für die bezeichneten Grenzen. Die Reihenfolge der Integrationen, welche an $f(x, y) dx dy$ auszuführen sind, ist dabei verwechselt. Schreibt man abgekürzt a und c für Aa und Ac ; ebenso m und n für Am , An ; h und k für gh und gk ; e und f für be und bf , so wird man durch Gleichsetzung der Werte aus (3) und (5) erhalten

$$(6) \quad \int_a^c dx \int_e^f f(x, y) dy = \int_m^n dy \int_h^k f(x, y) dx.$$

Setzt man bei den Integralen (3) und (5) die richtigen Grenzen stillschweigend voraus, so schreibt man auch statt dieser Integrale allgemein

$$(7) \quad \iint f(x, y) dx dy.$$

Ist die Projektion des Körpers in der Ebene xy ein Rechteck, dessen Ausdehnung längs der x -Achse von a bis c und längs der y -Achse von m bis n reicht, so verwandelt sich die vorstehende Formel (6) in

$$(8) \quad \int_a^c dx \int_m^n f(x, y) dy = \int_m^n dy \int_a^c f(x, y) dx.$$

Sind somit die Grenzen der Variablen x und y von einander unabhängig, so ist die Reihenfolge der beiden Integrationen, welche am

Differential $f(x,y)dx dy$ auszuführen sind, ohne Einfluss auf das Endresultat.

Die vorstehenden Integrale (6), (7), (8) nennt man zweifache oder doppelte Integrale.

III. Legt man durch den Körper Ebenen, senkrecht zur z Achse, welche je um dz von einander abstehen, so liegen zwischen den drei Systemen von Schnittebenen rechtwinkelige Prismen, deren Seiten dx , dy und dz sind. Das Volumen eines solchen Körperelementes ist $= dx dy dz$. Dieser Ausdruck ist ein unendlich Kleines der dritten Ordnung. Zur Herstellung des ganzen Körperinhaltes sind somit in diesem Falle drei Integrationen auszuführen. Die allgemeine Andeutung dieses Inhaltes ist

$$\int dx \int dy \int dz = \int dy \int dz \int dx, \dots$$

wofür man auch schreibt

$$(9) \quad \iiint dx dy dz.$$

Hierbei sind die Grenzen der Variablen ähnlich zu wählen wie in den Formeln (3), (5) oder (6), so dass schliesslich alle Körperelemente $dx dy dz$, welche den ganzen Körper zusammensetzen, durch diese Integrationen summiert werden. In jedem gegebenen Falle hat man sich bei jeder der drei Integrationen Rechenschaft abzulegen von der geometrischen Bedeutung des Integrals und somit auch von den Grenzen der Veränderlichen. Geschieht dies, so erhält man dasselbe Endresultat, in welcher Reihenfolge die Integrationen von (9) vorgenommen werden. Diese letztern Integrale werden dreifache genannt.

Sind die Grenzen der drei Variablen von einander unabhängig, so gilt für das dreifache Integral (9), was in diesem Falle von dem zweifachen Integral (8) gezeigt wurde.

321. Volumen einer Kugel. Die Gleichung der Kugelfläche ist, wenn ihr Mittelpunkt in den Anfangspunkt der Achsen fällt und der Radius mit a bezeichnet wird

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

Folglich wird der Inhalt eines prismatischen Körperelementes mit der Grundfläche $dx dy$ und der Höhe z gleich sein

$$dx dy \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}.$$

Betrachtet man hierin x als konstant und integriert diese Grösse in Hinsicht y , so erhält man ein scheibenförmiges Körperelement von der Dicke dx und der Grundfläche X . Man kann daher schreiben

$$X dx = dx \int dy \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}.$$

Allein die Schnittfläche X durch den Körper, senkrecht auf die x Achse, im Abstände x von der Ebene yz , ist ein Kreis vom Inhalt $\pi (z^2 + y^2)$. Also ist

$$X = \pi (y^2 + z^2) = \pi (a^2 - x^2).$$

Vermöge dieses Wertes von X ist das Doppelintegral $\int z dx dy$ auf das einfache $\int X dx$ zurückgeführt. Das Volumen der Kugel ist hiernach

$$\int_{-a}^{+a} X dx = \pi \int_{-a}^{+a} (a^2 - x^2) dx = \frac{4}{3} a^3 \pi.$$

322. Volumen eines Ellipsoides mit drei verschiedenen Achsen. Die Gleichung der Oberfläche dieses Körpers für den Mittelpunkt als Anfangspunkt ist

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

worin a, b, c die drei Halbachsen bezeichnen.

Ein Schnitt durch das Ellipsoid, senkrecht zur x Achse und im Abstand x vom Anfangspunkt, gibt eine Ellipse, deren Gleichung ist

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}.$$

In dieser Gleichung denke man sich x konstant, so wird für $z = 0$ die Grösse

$$y = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

zu der Halbachse dieser Ellipse, welche parallel zur y Achse; ebenso ist

$$z = c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

die Halbachse dieser Ellipse, welche parallel zur z Achse liegt.

Die Fläche einer Ellipse ist aber $= AB\pi$, worin A und B die halben Achsen bezeichnen. Daher ist die Fläche jenes Schnittes senkrecht zur x Achse, gleich

$$X = \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

und somit das Volumen des Ellipsoides für unbestimmte Grenzen

$$\int X dx = \pi bc \int \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \pi bc \left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right) + C.$$

Folglich das ganze Ellipsoid

$$\int_{-a}^{+a} X dx = \frac{4}{3} \pi abc.$$

Hiernach ist das Volumen eines Ellipsoides $\frac{2}{3}$ vom Volumen des umschriebenen geraden Cylinders, dessen Kanten parallel zu einer der Achsen liegen.

323. Volumen eines schief abgeschnittenen Cylinders. Der Halbmesser des Cylinders sei $=R$; die Cylinderachse falle zusammen mit der z Achse, so wird die Gleichung des Durchschnittes mit der Ebene xy sein

$$(1) \quad x^2 + y^2 = R^2.$$

Die Gleichung der Ebene, welche den Cylinder schneidet, sei

$$(2) \quad z = ax + by + c.$$

Es soll das Volumen des Cylinders bestimmt werden, welcher zwischen dieser Ebene und der Ebene xy liegt.

Das prismatische Volumenelement, dessen Grundfläche $dx dy$ auf der Ebene xy liegt, ist $= z dx dy$. Führt man hierin den Wert von z aus (2), so erhält man als Ausdruck des Volumenelementes

$$(ax + by + c) dx dy.$$

Das unbestimmte Integral dieser Formel in Hinsicht y ist gleich

$$(3) \quad \left(ax y + \frac{b y^2}{2} + cy \right) dx + C,$$

worin C die Konstante der Integration bezeichnet. Die Grenzen von y sind vermöge (1)

$$y = -\sqrt{R^2 - x^2} \quad \text{und} \quad y = +\sqrt{R^2 - x^2}.$$

Für diese Grenzen erhält man aus (3)

$$(4) \quad 2(ax + c) \sqrt{R^2 - x^2} dx.$$

Dies ist das Volumen eines Teiles des Cylinders, welcher zwischen zwei Ebenen liegt, die parallel zur Ebene yz laufen und von ihr um x und $x + dx$ abstehen. Das unbestimmte Integral von (4) ist

$$-\frac{2a}{3} (R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} + c \left[x \sqrt{R^2 - x^2} + R^2 \text{Arc sin } \frac{x}{R} \right] + C.$$

Um den Inhalt des ganzen Cylinders zu erhalten, ist hier x von $-R$ bis $+R$ zu nehmen. Mithin wird der Inhalt des ganzen Cylinders gleich

$$R^2 \pi c.$$

Nun ist $R^2 \pi$ die Grundfläche dieses Cylinders in der Ebene xy ; somit ist c , d. h. das Stück, welches die Ebene (2) auf der z Achse vom Anfangspunkt aus abschneidet, seine mittlere Höhe.

324. Volumen eines Körpers in Polarkoordinaten. Man nehme den Anfangspunkt der drei rechtwinkligen Achsen x, y, z als Pol an. Es sei

r der Radiusvektor eines Punktes, also der Abstand dieses Punktes vom Pol,

φ der Winkel, welchen die Ebene durch r und die z Achse mit der Koordinatenebene xz bildet und

θ der Winkel, welchen r mit der Ebene xy einschliesst.

Denkt man sich vom Pol aus mit dem Radius r eine Kugelfläche beschrieben, so kann man, gemäss der Bezeichnung eines Punktes oder Ortes auf der Erdoberfläche, die Grösse φ die Länge und θ die Breite des fraglichen Punktes auf der Kugelfläche nennen. In diesem Sinne wird die Ebene xy zur Aequatorebene, die z Achse zur Drehachse und $r \cos \theta$ zum Halbmesser des Parallelkreises, der durch den Punkt geht. Die Bogenelemente $r d\theta$ auf dem Meridian und $r \cos \theta d\varphi$ auf dem Parallelkreis können als Seiten eines rechtwinkligen Flächenelementes angesehen werden, dessen Inhalt $= r^2 \cos \theta d\theta d\varphi$. Dieses Flächenelement kann als Grundfläche einer Pyramide betrachtet werden, deren Spitze im Pol liegt. Beschreibt man mit dem Radius $r + dr$ eine zweite Kugelfläche, so kann der Teil dieser verlängerten Pyramide, welcher zwischen diesen beiden Kugelflächen liegt, als ein Prisma angenommen werden, dessen Grundfläche $r^2 \cos \theta d\theta d\varphi$ und dessen Höhe dr ist. Das Volumen dieses Körperelementes ist daher gleich

$$r^2 dr \cos \theta d\theta d\varphi.$$

Dieser Ausdruck muss in Hinsicht der drei Variablen r, θ, φ zwischen den Grenzen integriert werden, welche sich aus der Form des zu suchenden Volumens ergeben. Macht man sich von Integration zu Integration eine Vorstellung von der geometrischen Bedeutung der Resultate, so findet man jene Grenzen leicht. In diesem Sinne ist die Reihenfolge der Integration ohne Einfluss auf das Endresultat.

325. Inhalt einer Kugel. Man nehme im vorstehenden Ausdrucke des Volumenelementes zuerst φ zwischen den Grenzen $\varphi = 0$ und $\varphi = 2\pi$, so erhält man dadurch einen Körperring längs des Parallelkreises vom Inhalt

$$2\pi r^2 dr \cos \theta d\theta.$$

Das unbestimmte Integral hiervon in Hinsicht θ ist

$$2\pi r^2 dr \sin \theta + C.$$

Nimmt man hierin θ von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$, d. h. vom Süd- bis zum Nordpol, so erhält man den Inhalt einer Kugelschale von der Dicke dr gleich

$$2\pi r^2 dr (1 + 1) = 4\pi r^2 dr.$$

Mithin wird der Inhalt einer hohlen Kugel mit den Radien r_0 und r sein

$$4\pi \int_{r_0}^r r^2 dr = \frac{4}{3}\pi (r^3 - r_0^3).$$

Wird die zweite Integration zwischen den Grenzen θ und $\frac{\pi}{2}$ ausgeführt, unter Beibehaltung des angegebenen Ganges, so erhält man als Inhalt eines Kugelausschnittes

$$\frac{2}{3}\pi (r^3 - r_0^3) (1 - \sin \theta).$$

V. Inhalt krummer Oberflächen.

326. Ausdruck für das Flächenelement und die Fläche. Die Gleichung der Oberfläche sei

$$(1) \quad z = f(x, y).$$

Man lege durch diese Oberfläche zwei Ebenen, parallel zur Ebene yz , in den Abständen x und $x + dx$ vom Anfangspunkte der Achsen; ebenso zwei Ebenen, parallel zur Ebene xz , in den Abständen y und $y + dy$ vom Anfangspunkte aus. Diese vier Ebenen schliessen ein Element der gegebenen Oberfläche ein, das als eben angesehen werden kann und das wir mit dF bezeichnen wollen. Die Projektion von dF auf der Ebene xy ist das Rechteck $dx dy$. Dieses Flächenelement bilde mit der Ebene xy einen Winkel α , so wird sein

$$(2) \quad dF = \frac{dx dy}{\cos \alpha}.$$

Hierin ist $\cos \alpha$ durch die Koordinaten der Fläche (1) auszudrücken. Zu diesem Zwecke lege man durch das Flächenelement dF eine Ebene, so wird diese Ebene die krumme Oberfläche im Punkte x, y, z berühren und den Winkel α mit der Ebene xy bilden. Die Gleichung dieser Berührungsebene sei (vergleiche die Aufgabe in § 289)

$$(3) \quad z = ax + by + c.$$

Irgend ein Lot auf diese Berührungsebene bildet mit der z Achse ebenfalls den Winkel α . Statt eines beliebigen Lotes nehme man dasjenige, welches durch den Anfangspunkt der Achsen geht, so sind die Gleichungen dieses Lotes (§ 289, Formeln 4 und 5)

$$(4) \quad x + az = 0; \quad y + bz = 0.$$

Allein die partiellen Differentialverhältnisse der Gleichung der Ebene (3) sind

$$(5) \quad \frac{dz}{dx} = a; \quad \frac{dz}{dy} = b.$$

Im Berührungspunkt sind die Koordinaten x, y, z der krummen Oberfläche und der Berührungsebene dieselben. Man kann daher die Vorzahlen a und b , welche in der Gleichung (3) der Berührungsebene und in den Gleichungen (4) des Lotes vorkommen, ableiten, wenn man die partiellen Differentialverhältnisse $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ der Gleichung (1) der krummen Oberfläche bildet.

Nun nenne man p die Länge des Lotes vom Anfangspunkte aus und x, y, z die Koordinaten seines Fusspunktes auf der Berührungsebene, so wird sein

$$(6) \quad p = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\cos \alpha = \frac{z}{p} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Führt man die Werte von x und y aus (4) in (6), so findet man

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+a^2+b^2}}$$

oder mit Rücksicht auf (5)

$$(7) \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}.$$

Setzt man diesen Wert von $\cos \alpha$ in (2), so folgt als Wert des Flächenelementes

$$(8) \quad dF = dx dy \sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}.$$

Wird hierin $\frac{dz}{dx} = a = 0$, so geht die Gleichung (3) über in $z = by + c$. Dies ist die Gleichung einer Ebene, welche parallel zur x Achse liegt. Mithin wird dF zum Element einer cylindrischen Fläche, deren Kanten parallel zur x Achse liegen.

Wird $\frac{dz}{dy} = b = 0$, so wird dF zum Element einer cylindrischen Fläche, deren Kanten parallel zur y Achse laufen.

Sind $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ zugleich $= 0$, so verwandelt sich die Formel (8) in

$$dF = dx dy$$

als Ausdruck des Elementes einer Fläche, welche in der Ebene xy liegt oder mit ihr parallel ist.

Die Gleichung (1) kann dazu benutzt werden, um z aus (8) zu eliminieren. Es kommen dann in diesem Differential nur die unabhängig Variablen x, y vor.

Um das Integral zu erhalten, sind zwei Integrationen nötig: eine nach x und eine nach y . Der Vorgang dabei ist folgender.

Die beiden Ebenen, welche in den Abständen x und $x+dx$ vom Anfangspunkt senkrecht zur x Achse gelegt sind, schliessen unendlich viele Flächenelemente wie dF ein. Sie haben, der x Achse nach gemessen, die Breite dx und dehnen sich über die Oberfläche aus, soweit dies die Grenzen von y zulassen. Integriert man daher in Hinsicht y , so erhält man den Teil der Oberfläche, welcher zwischen den genannten zwei Ebenen eingeschlossen ist. Die Andeutung für diese Ausdehnung ist

$$(9) \quad dx \int dy \sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}.$$

Lässt man nun x sich ändern zwischen zwei Grenzen, so reihen sich unendlich viele Flächenelemente aneinander, deren Ausdruck (9) ist und bilden die gesuchte Fläche. Diesem Vorgang entspricht die

Integration der Grösse (9) in Hinsicht x . Man erhält dann für unbestimmte Grenzen der Variabeln

$$(10) \quad F = \int dx \int dy \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}.$$

Man kann auch zuerst die Integration in Hinsicht x ausführen. Man erhält dann eine Fläche, welche zwischen zwei Ebenen eingeschlossen ist, die senkrecht zur y Achse stehen und zwar in den Abständen y und $y + dy$. Der Ausdruck dafür ist

$$dy \int dx \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}.$$

Solche Flächenstreifen reihen sich längs der y Achse unendlich viele an einander. Es muss daher der letzte Ausdruck in Hinsicht y integriert werden, was man andeutet durch

$$(11) \quad F = \int dy \int dx \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}.$$

Die Werte (10) und (11) sind für dieselben Grenzen von x und ebenso für y gleich gross. Die Reihenfolge der Integration ist mithin gleichgültig. Man kann daher auch schreiben

$$F = \iint dx dy \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}.$$

327. Teil einer Ebene. Die Gleichung einer Ebene ist

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

für diese wird

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{A}{C}; \quad \frac{dz}{dy} = -\frac{B}{C}.$$

Daher das Flächenelement

$$dF = dx dy \sqrt{1 + \left(\frac{A}{C}\right)^2 + \left(\frac{B}{C}\right)^2}.$$

Man denke sich hierin y , beziehungsweise dy konstant, integriere also nur in Hinsicht x und zwar zwischen den Grenzen x_0 und x_1 , so erhält man

$$(x_1 - x_0) \sqrt{1 + \left(\frac{A}{C}\right)^2 + \left(\frac{B}{C}\right)^2} \cdot dy$$

als Wert einer Fläche, deren Projektion auf der Ebene xy die Grösse $x_1 - x_0$ zur Länge und dy zur Breite hat. Integriert man nun noch in Hinsicht y zwischen den Grenzen y_0 und y_1 , so wird die gesuchte Fläche

$$F = (x_1 - x_0) (y_1 - y_0) \sqrt{1 + \left(\frac{A}{C}\right)^2 + \left(\frac{B}{C}\right)^2}.$$

Diese Fläche ist von zwei Paar parallelen Ebenen eingeschlossen. Zwei dieser Ebenen stehen senkrecht zur x Achse in den Abständen x_0 und x_1 vom Anfangspunkt und die beiden andern senkrecht zur y Achse in den Abständen y_0 und y_1 vom Anfangspunkt.

328. Oberfläche der Kugel. Aus der Gleichung der Kugel

$$(1) \quad x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

folgt durch Differentiation

$$(2) \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{x}{z}; \quad \frac{dz}{dy} = -\frac{y}{z}.$$

Hierfür wird das Element der Kugelfläche

$$dF = dx dy \sqrt{1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2}}$$

oder indem man auf gleiche Benennung bringt und Gleichung (1) berücksichtigt

$$(3) \quad dF = \frac{R dx dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

Um dieses Differential (3) in Hinsicht y zu integrieren, nimmt man x als konstant an. Man erhält

$$(4) \quad R dx \int \frac{dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} = R dx \operatorname{Arc} \sin \frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2}} + C.$$

Dieses Integral stellt ein Flächenelement dar, das über der Ebene xy liegt und von zwei Schnittebenen eingeschlossen wird, welche senkrecht zur x Achse liegen und um x und $x + dx$ vom Anfangspunkt abstehen. Dieses Element hat die Form eines abgekürzten Kegelmantels, dessen Kanten unendlich klein sind. Bei konstantem x werden die Grenzen für y aus (1) erhalten, wenn man $z = 0$ setzt. Dies gibt $y = \pm \sqrt{R^2 - x^2}$. Nimmt man das Integral (4) zwischen den Grenzen $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$ und $y = +\sqrt{R^2 - x^2}$, so erhält man als Wert des ganzen Flächenelementes über der Ebene xy :

$$\pi R dx.$$

Mithin wird die Kugelfläche über der Ebene xy

$$F = \pi R \int_{-R}^{+R} dx = 2\pi R^2.$$

Würde man das Differential (3) zuerst in Hinsicht x integrieren, so wäre y konstant zu nehmen. Man erhielte zunächst ein Flächenelement über der Ebene xy , das zwischen zwei Ebenen liegt, welche senkrecht sind zur y Achse und um dy aus einander stehen. Die Grenzen von x würden aus (1) erhalten, wenn man $z = 0$ setzt. Diese Grenzen wären also $x = \pm \sqrt{R^2 - y^2}$.

Bemerkung. Die Gleichung einer Ebene sei

$$z' = ax' + by' + c.$$

Damit diese Ebene die Kugel (1) im Punkte x, y, z berührt, muss sein

$$z = ax + by + c.$$

Durch Subtraktion dieser beiden Gleichungen folgt

$$z - z' = a(x - x') + b(y - y').$$

Führt man hierin obige Werte von $a = \frac{dz}{dx}$ und $b = \frac{dz}{dy}$, wie sie aus der Gleichung (1) der Oberfläche hervorgehen, ein, so kommt

$$z - z' = -\frac{x}{z}(x - x') - \frac{y}{z}(y - y')$$

oder indem man mit z multipliziert und die Gleichung (1) berücksichtigt

$$xx' + yy' + zz' = R^2.$$

Dies ist somit die Gleichung einer Ebene, welche die Kugel berührt.

329. Cylinderfläche in einer Kugelfläche. Ein Kreiscylinder gehe durch eine Kugel. Man soll den Teil der Cylinderfläche bestimmen, welcher innerhalb der Kugelfläche liegt, unter der Voraussetzung, dass der Mittelpunkt M der Kugel (Fig. 118) auf der Cylinderfläche liege und dass der Durchmesser MA des Cylinders gleich dem Halbmesser a der Kugel sei.

Es gelte die Bezeichnung von § 319, so erhält man als Gleichung der Kugel

$$(1) \quad a^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Die Kurve, längs welcher sich die Cylinder- und Kugelfläche schneiden, gibt auf der Ebene xz eine Projektion, deren Gleichung ist

$$(2) \quad z^2 = ax - x^2$$

und eine Projektion auf der Ebene xy , deren Gleichung sein wird

$$(3) \quad y^2 = a^2 - ax.$$

Für die Cylinderfläche ist $\frac{dz}{dy} = 0$, weil die Kanten derselben parallel zur y Achse sind (§ 326). Es folgt dies auch aus der Formel (2). Dagegen erhält man aus (2)

$$\frac{dz}{dx} = \frac{a - 2x}{2z} = \frac{a - 2x}{2\sqrt{ax - x^2}}.$$

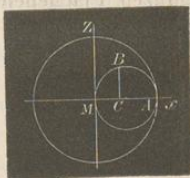
Mithin wird das Element der Cylinderfläche

$$dx dy \sqrt{1 + \frac{(a - 2x)^2}{4(ax - x^2)}} = \frac{a dx dy}{2\sqrt{ax - x^2}}.$$

Das unbestimmte Integral dieses Differentials in Hinsicht y ist

$$(4) \quad \frac{a dx}{2\sqrt{ax - x^2}} \cdot y + C.$$

Fig. 118.



Zwei Ebenen, welche senkrecht zur x Achse stehen und den Abstand dx von einander haben, schliessen zwei gleiche Flächenelemente des Cylinders ein. Das eine derselben liegt über, das andere unter der Ebene xy . Das Integral (4) stellt das eine dieser Elemente dar, das über der Ebene xy liegt. Um dieses Element in der Richtung der y Achse durch die Kugelfläche abzugrenzen, muss das Integral (4) genommen werden zwischen den Grenzen

$$- \sqrt{a^2 - ax} \text{ und } + \sqrt{a^2 - ax},$$

wie sie sich aus (3) ergeben. Für diese Grenzen wird (4) zu

$$(5) \quad \frac{a \sqrt{a^2 - ax}}{\sqrt{ax - x^2}} dx = a \sqrt{a} \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

Nun ist

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 \sqrt{x} + C.$$

Folglich das Integral (5) zwischen den Grenzen 0 und a

$$a \sqrt{a} \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2a^2.$$

Dieser Wert ist die Cylinderfläche über der Ebene xy . Somit ist die ganze Cylinderfläche, welche von der Kugelfläche eingeschlossen wird $= 4a^2$.

330. Kegelfläche. Es sei h die Höhe, a der Radius der Grundfläche und k die Kante eines senkrechten Kreiskegels. Man nehme die z Achse in der Achse des Kegels und die x - und y Achsen in der Grundfläche desselben an. Ein Punkt auf der Kante k habe zu Koordinaten x, y, z . Nun denke man sich das rechtwinkelige Dreieck, dessen Hypotenuse k und dessen Katheten a und h sind und ziehe vom Punkte x, y, z , der in der Hypotenuse liegt, eine Parallele zur Kathete a bis zur Achse, so ist die Länge dieser Parallelen $= \sqrt{x^2 + y^2}$ und der obere Abschnitt der Kathete $h = h - z$. Daher erhält man die Proportion

$$h : a = h - z : \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Hieraus ergibt sich folgende Gleichung der Kegelfläche

$$(1) \quad z = h - \frac{h}{a} \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Die partiellen Differentialverhältnisse von (1) sind

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{h}{a} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \frac{dz}{dy} = -\frac{h}{a} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Mithin wird das Element der Kegelfläche

$$dx dy \sqrt{1 + \frac{h^2}{a^2} \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{h^2}{a^2} \frac{y^2}{x^2 + y^2}} = \frac{k}{a} dx dy.$$

Das Integral dieses Ausdruckes in Hinsicht y ist

$$(2) \quad \frac{k}{a} dx \cdot y + C.$$

Dieses Integral stellt ein Flächenelement dar, das zwischen zwei Ebenen liegt, welche senkrecht zur x Achse stehen und um x und $x + dx$ vom Anfangspunkt der Achsen entfernt sind.

Die erstere dieser beiden Ebenen schneidet die Grundfläche längs einer Sehne, welche parallel zur y Achse liegt und eine Länge $= 2\sqrt{a^2 - x^2}$ hat. Die Grenzen von y im Integral (2) sind daher $-\sqrt{a^2 - x^2}$ und $+\sqrt{a^2 - x^2}$. Diese Grenzen ergeben sich aus Formel (1), wenn man in ihr $z = 0$ setzt. Für diese Grenzen erhält man daher aus (2)

$$\frac{2k}{a} dx \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Mithin wird ein Teil des Kegelmantels, welcher zwischen zwei Ebenen liegt, welche parallel zur Ebene yz sind und einen beliebigen Abstand von einander haben, gleich

$$\frac{2k}{a} \int dx \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{k}{a} \left[x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \text{Arc sin } \frac{x}{a} \right] + C.$$

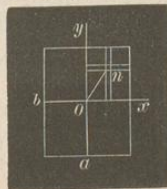
Wird dieses Integral von $x = 0$ bis $x = a$ genommen, so erhält man den halben Inhalt des Kegelmantels $= \frac{1}{2} a \pi k$. Also ist der ganze Kegelmantel $= a \pi k$.

VI. Physikalische Aufgaben über mehrfache Integrale.

331. Torsion eines rechtwinkligen Prismas. Die Kanten dieses Prismas seien a, b, c . Die Kante c stelle die Länge dar. Dieses Prisma werde an einem Ende seiner Länge festgehalten und am andern verdreht durch ein statisches Moment M , dessen Kraft in einer zur Kante c normalen Ebene liegt. Die Endfläche, in welcher das Moment M wirkt, sei ab (Fig. 119). Die Faser, welche durch die Schwerpunkte aller Querschnitte geht, bleibt während der Torsion geradlinig. Diese Gerade bildet die Drehachse. Alle andern Punkte des Körpers werden um diese Achse herum in der Richtung der Drehung verschoben. Auf die Verschiebungen in der Längenrichtung (§ 204) werde hier keine Rücksicht genommen.

Man lege durch die Mitte O des Querschnittes ab zwei rechtwinklige Achsen Ox, Oy , parallel zu den Kanten a, b . Es seien x, y die Koordinaten eines Punktes n der Rechtecksfläche. Ein Punkt dieses Querschnittes ab , im Abstände 1 von dem Drehpunkt O , erhalte eine Drehung $= \alpha$, so wird die Drehung des Punktes n , im Abstände $\sqrt{x^2 + y^2}$ von der Drehachse sein $= \alpha \sqrt{x^2 + y^2}$. Die Kraft, welche ein Flächenelement $dx dy$ in diesem Abstände um die Grösse $\alpha \sqrt{x^2 + y^2}$ verschiebt, ist proportional dieser Fläche, dieser Verschiebung, verkehrt proportional

Fig. 119.



der Länge des Körpers und abhängig von einer Konstanten T. Folglich ist diese Kraft gleich

$$\frac{T \alpha}{c} dx dy \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Multipliziert man diese Kraft mit dem Hebelsarm On, an welchem sie wirkt, so erhält man ihr statisches Moment gleich

$$\frac{T \alpha}{c} dx dy (x^2 + y^2).$$

Wird dieses Differential integriert in Hinsicht x von $-\frac{1}{2}a$ bis $+\frac{1}{2}a$ und das Resultat sodann in Hinsicht y von $-\frac{1}{2}b$ bis $+\frac{1}{2}b$, so erhält man die Summe der statischen Momente aller Kräfte, welche die Flächenelemente des ganzen Querschnittes ab verschieben. Da die Grenzen von x und y von einander unabhängig sind, so ist die Reihenfolge, in welcher die beiden Integrationen ausgeführt werden, ohne Einfluss auf das Ergebnis. In Zeichen ist daher

$$M = \frac{T \alpha}{c} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} dy \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} dx (x^2 + y^2).$$

Nun ist
$$\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} dx (x^2 + y^2) = \frac{a^3}{12} + a y^2$$

und
$$\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} dy \left(\frac{a^3}{12} + a y^2 \right) = \frac{a b}{12} (a^2 + b^2).$$

Folglich
$$M = \frac{T}{12} \frac{a b}{c} (a^2 + b^2) \alpha.$$

Drückt man α , statt im Bogenmass, in Graden aus, so erhält man

$$M = \frac{T}{12} \frac{a b}{c} (a^2 + b^2) \frac{\pi}{180} \alpha^0.$$

332. Trägheitsmoment einer Kugel. Man lege durch den Mittelpunkt der Kugel die drei rechtwinkeligen Achsen der x, y, z. Die Kugel drehe sich um die z Achse. Es sei r der Radiusvektor eines Punktes im Innern der Kugel, φ die Länge und θ die Breite dieses Punktes, so ist das Volumenelement der Kugel an dieser Stelle (§ 324)

$$r^2 dr \cos \theta d\theta d\varphi.$$

Es sei m die Masse der Kubikeinheit des Materials in diesem Punkte, so ist die Masse dieses Volumenelementes

$$m r^2 dr \cos \theta d\theta d\varphi.$$

Der Abstand dieses Elementes von der z Achse als Drehachse ist $= r \cos \theta$. Multipliziert man das Quadrat dieses Abstandes (§ 180) mit der vorstehenden Masse, so erhält man das Trägheitsmoment des Volumenelementes gleich

$$m r^4 d r \cos^3 \theta d \theta d \varphi.$$

Es sei die Kugel homogen, so wird m konstant sein. Das Integral hiervon in Hinsicht φ zwischen den Grenzen 0 und 2π ist

$$(1) \quad 2\pi m r^4 d r \cos^3 \theta d \theta.$$

Dieser Ausdruck ist das Trägheitsmoment eines unendlich dünnen körperlichen Ringes, längs eines Parallelkreises gelegen, der die nördliche Breite θ und den Abstand r vom Mittelpunkt hat.

Wird (1) integriert in Hinsicht θ von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$, so erhält man das Trägheitsmoment einer unendlich dünnen Kugelschale vom Halbmesser r. Nun ist, § 80, Formel (13)

$$\int \cos^3 \theta d \theta = \frac{1}{3} \cos^2 \theta \sin \theta + \frac{2}{3} \sin \theta + C,$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta d \theta = \frac{4}{3}.$$

Folglich ist das Trägheitsmoment dieser Kugelschale gleich

$$(2) \quad \frac{8}{3} \pi m r^4 d r$$

und somit das Trägheitsmoment der ganzen Kugel, wenn R den Halbmesser derselben bezeichnet

$$\frac{8}{3} \pi m \int_0^R r^4 d r = \frac{8}{15} \pi m R^5.$$

Es sei die Dichtigkeit des Materials eine Funktion von r, so dass man etwa hat

$$(3) \quad m = a \mp b r,$$

worin a die Masse der Kubikeinheit im Mittelpunkt und b die Ab- oder Zunahme der Masseneinheit für jede Längeneinheit des Radiusvektor bedeutet. Hiernach ist die Dichtigkeit in einer und derselben Kugel- fläche, die ihren Mittelpunkt im Mittelpunkt der Kugel hat, dieselbe.

Setzt man den Wert von m aus (3) in (2) und integriert, so erhält man das Trägheitsmoment der Kugel gleich

$$\frac{8}{3} \pi \int_0^R (a \mp b r) r^4 d r = \frac{8}{15} \pi r^5 (a \mp \frac{5}{6} b r).$$

333. Anziehung einer Kugel und eines materiellen Punktes nach dem Gesetze der Gravitation. Die Aufgabe, welche in § 213 unter gewissen Beschränkungen gelöst wurde, soll hier allgemein behandelt werden. Es seien

- m, m' zwei sich anziehende Massenteilchen in A und B (Fig. 120),
 a, r die Abstände dieser Teile vom Mittelpunkt M der Kugel,
 u der Abstand AB dieser Teile unter einander,
 φ der Winkel, welchen a und r bilden,
 ρ die Masse der Kubikeinheit der Kugel, welche in gleichen Abständen vom Mittelpunkt der Kugel gleichen Wert habe und
 c die Anziehung zweier Masseneinheiten im Abstände 1 von einander, so ist

$$(1) \quad c \frac{m m'}{u^2}$$

der Ausdruck für die Anziehung der Massen m, m' nach dem Gesetze der Schwere.

Man lege durch die Abstände a und r eine Ebene, beschreibe in ihr mit den Radien r und $r + dr$ zwei Kreise, lasse sodann φ in $\varphi + d\varphi$ übergehen, so dass der Radius BM nach CM kommt, so wird der Bogen $BC = r d\varphi$ sein. Zwischen jenen zwei Kreisen und diesen zwei Radien liegt ein Flächenelement $= r dr d\varphi$. Dreht man die Ebene des Kreises um A M als Achse um einen Winkel $d\theta$, so beschreibt der Punkt B einen Weg $= r \sin \varphi d\theta$, also die Fläche $r dr d\varphi$ ein Volumen $= r^2 dr \sin \varphi d\varphi d\theta$. Die Masse dieses Volumenelementes ist $= \rho r^2 dr \sin \varphi d\varphi d\theta$. Somit ist nach (1) die Anziehung dieses Massenelementes und der Masse m in A gleich

$$(2) \quad c \rho m \frac{r^2 dr \sin \varphi d\varphi d\theta}{u^2}.$$

Man zerlege diese Kraft in zwei Seitenkräfte, parallel und senkrecht zur Achse A M, so ist die erstere gleich

$$(3) \quad c \rho m \frac{r^2 dr \sin \varphi d\varphi d\theta}{u^2} \cos B A M.$$

Nun folgt aus dem Dreieck B A M

$$(4) \quad \begin{aligned} u^2 &= a^2 + r^2 - 2 a r \cos \varphi \\ \cos B A M &= \frac{a - r \cos \varphi}{u}. \end{aligned}$$

Eliminiert man hieraus $r \cos \varphi$, so folgt

$$\cos B A M = \frac{a^2 - r^2 + u^2}{2 a u}.$$

Führt man diesen Wert in (3), so erhält man

$$(5) \quad c \rho m \frac{r^2 dr \sin \varphi d\varphi d\theta}{2 a u^3} (a^2 - r^2 + u^2).$$

Durch Differentiation von (4) in Hinsicht φ und u folgt

$$u \, du = a r \sin \varphi \, d\varphi.$$

Führt man den Wert von $\sin \varphi \, d\varphi$ aus dieser Formel in (5), so ist die Anziehung des Massenelementes der Kugel und des Teilchens m parallel zur Achse AM :

$$\frac{c \, \varrho \, m}{2 \, a^2} \, r \, dr \, d\Theta \frac{a^2 - r^2 + u^2}{u^2} \, du.$$

Das Integral dieses Ausdruckes in Hinsicht Θ , zwischen den Grenzen $\Theta = 0$ und $\Theta = 2\pi$, ist die Anziehung der Masse m und der Masse eines Ringes, der vom Flächenelement $r \, dr \, d\varphi$ bei einer vollen Umdrehung um AM entsteht. Diese Anziehung ist daher

$$(6) \quad \frac{\pi c \, \varrho \, m}{a^2} \, r \, dr \left(1 + \frac{a^2 - r^2}{u^2} \right) \, du.$$

Die Seitenkräfte, welche die Massenelemente dieses Ringes auf m ausüben, in senkrechter Richtung zur Drehachse AM , heben sich gegenseitig auf.

Behufs der Integration der Formel (6) in Hinsicht u beachte man, dass

$$\int \frac{du}{u^2} = - \frac{1}{u}.$$

Folglich ist das Integral von (6) für unbestimmte Grenzen

$$(7) \quad \frac{\pi c \, \varrho \, m}{a^2} \, r \, dr \left(u - \frac{a^2 - r^2}{u} \right) + C.$$

Man wähle hier die Grenzen von u so, dass dieser Ausdruck die Anziehung der Masse m auf eine ganze Kugelschale vom Halbmesser r und der Dicke dr darstellt.

I. Befindet sich die Masse m ausserhalb der Kugelschale, so sind die Grenzen von u gleich $a - r$ und $a + r$. Für diese Grenzen wird

$$u - \frac{a^2 - r^2}{u} = 4r.$$

Folglich das Integral (7) gleich

$$(8) \quad c \frac{4\pi \, \varrho \, m}{a^2} \, r^2 \, dr.$$

Allein es ist $4\pi \, \varrho \, r^2 \, dr$ die Masse der Kugelschale. Bezeichnen wir sie mit $\mathcal{M}$, so geht der Ausdruck (8) über in

$$c \frac{m \, \mathcal{M}}{a^2}.$$

Also ist die Anziehung eines Massenteilchens, das sich ausserhalb der Kugelschale befindet, auf die Kugelschale gerade so, wie wenn die Masse der Kugelschale in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre.

Besteht die Kugel aus unendlich vielen konzentrischen Kugelschichten, sei es, dass die Dichtigkeit der Masse von Schicht zu Schichte sich ändert, oder dass sie für alle gleich ist, so wird die Anziehung aller Schichten, d. h. der ganzen Kugel auf den ausser ihr liegenden Punkt sein, wie wenn die Kugelmasse in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre.

Für eine homogene Kugel ist diese Anziehung nach (8)

$$c \frac{4 \pi \varrho m}{a^2} \int_0^r r^2 dr = \frac{4}{3} c \pi \varrho m \frac{r^3}{a^2} = c \frac{m M'}{a^2},$$

wenn M' die Masse der ganzen Kugel bezeichnet.

Ist ϱ nicht konstant, sondern eine Funktion von r , so dass z. B.

$$\varrho = p \mp q r,$$

so setze man diesen Wert von ϱ in (8) und man erhält als Anziehung der Kugel auf das ausser ihr liegende Massenteilchen m :

$$\frac{4 c \pi m}{a^2} \int_0^r (p \mp q r) r^2 dr = c \frac{4 \pi r^3 m}{3 a^2} (p \mp \frac{3}{4} q r).$$

II. Befindet sich der Punkt A, dessen Masse $= m$ ist, innerhalb der Kugelschale vom Halbmesser r und der Dicke dr , so müssen im Integral (7) die Grenzen von u zwischen $r - a$ und $r + a$ genommen werden. Hierfür wird

$$u - \frac{a^2 - r^2}{u} = 0.$$

Also verschwindet das Integral (7). Somit ist die Anziehung einer unendlich dünnen Kugelschicht mit gleichförmiger Dichte auf einen materiellen Punkt, der sich innerhalb der Kugelschicht befindet, gleich Null. Liegt der materielle Punkt innerhalb einer beliebigen Anzahl unendlich dünner, konzentrischer Kugelschichten, so gilt der Satz für jede dieser Schichten, gleichviel ob die Dichte der Masse von Schicht zu Schicht ändert oder gleich bleibt; also gilt er auch für eine Schicht von endlicher Dicke.

Hieraus folgt, dass sich die Anziehung einer Kugel auf einen Punkt in ihrem Innern reduziert auf die Anziehung derjenigen konzentrischen Kugel, deren Oberfläche durch diesen Punkt geht. Je näher daher dieser Punkt dem Mittelpunkt der Kugel liegt, um so schwächer wird er von ihr angezogen.

Ist die Masse der Kugel homogen, also ϱ konstant, so ist die Anziehung der Kugel vom Halbmesser r auf das Massenteilchen m , das den Abstand a vom Kugelmittelpunkt hat, nach (8)

$$c \frac{4 \pi \varrho m}{a^2} \int_0^a r^2 dr = c \frac{4 \pi a \varrho m}{3}.$$

Diese Anziehung hängt somit nicht vom Halbmesser der ganzen Kugel ab, sondern ist dem Abstand des anziehenden Punktes vom Mittelpunkt der Kugel proportional (Anwendung hiervon in § 158).

Aus dem Vorstehenden folgt ferner: Bestehen zwei Kugeln aus konzentrischen Schichten, wovon jede Schicht eine homogene Masse hat, so ziehen sich diese Kugeln an, wie wenn ihre Massen in ihren Mittelpunkten vereinigt wären.

334. Anziehung eines Berges und eines materiellen Punktes auf der Spitze des Berges. Der Berg habe die Form eines Rotationsparaboloides, dessen Achse AD (Fig. 121) vertikal liegt. Ein Schnitt durch den Berg längs der Achse wird eine Parabel ACE sein. Es seien

- x, y die Koordinaten AB und BC eines Parabelpunktes C,
- h, n h die Höhe AD und der Halbmesser DE der Grundfläche des Berges,
- m die Masse des materiellen Punktes in der Spitze A,
- ρ die Masse der Kubikeinheit des Berges, welche wir gleichförmig voraussetzen und
- c die Anziehung zweier Masseneinheiten im Abstände 1 von einander.

Da bei einer Parabel sich die Abscissen verhalten wie die Quadrate der Ordinaten, so ist $x:h = y^2:n^2h^2$, woraus als Gleichung der Oberfläche folgt

$$(1) \quad y^2 = n^2 h x.$$

Man lege in den Abständen x und $x + dx$ vom Scheitel A zwei Horizontalebene, und beschreibe zwei Cylinderflächen, deren Achsen mit AD zusammenfallen, mit den Radien $r = BF$ und $r + dr$, wobei $r < x$ sein soll; so schliessen diese vier Flächen einen Ring ein, dessen Querschnitt $dx dr$ ist. Endlich lege man noch zwei Ebenen längs der Achse AD, welche einen Winkel $d\varphi$ bilden, so schneiden diese Ebenen von jenem Ringe ein Volumenelement $= dx dr \cdot r d\varphi$ aus, dessen Masse $= \rho dx dr r d\varphi$ sein wird. Dieses Teilchen hat den Abstand $AF = \sqrt{x^2 + r^2}$ von der Bergspitze. Folglich ist die Anziehung zwischen diesem Teilchen und der Masse m gleich

$$(2) \quad c \frac{m \rho dx dr r d\varphi}{x^2 + r^2}.$$

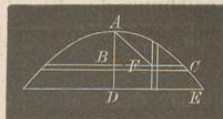
Diese Kraft zerlege man in eine vertikale und eine horizontale Seitenkraft. Die erstere wird erhalten, wenn man die Mittelkraft (2) multipliziert mit

$$\cos FAB = \frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2}}.$$

Fig. 121.

Mithin ist diese Seitenkraft gleich

$$(3) \quad c \frac{m \rho x dx dr r d\varphi}{(x^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}.$$



Dieses Differential muss nun in Hinsicht der drei Variablen φ , r und x integriert werden. Das Integral in Hinsicht φ , von 0 bis 2π genommen, nämlich der Ausdruck

$$(4) \quad 2 \pi c m \rho \frac{x dx r dr}{(x^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ist die Anziehung zwischen m und jenem Ringe, dessen Halbmesser r und dessen Querschnitt rdx ist. Die horizontalen Seitenkräfte, welche aus (2) hervorgehen und sich an den Teilen dieses Ringes geltend machen, heben sich gegenseitig auf.

Um das Integral von (4) in Hinsicht r zu erhalten, denke man sich x konstant und setze $r^2 + x^2 = v^2$, so wird durch Differentiation $rdr = v dv$, also auch

$$\int \frac{r dr}{(x^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{dv}{v^2} = -\frac{1}{v} = -\frac{1}{\sqrt{r^2 + x^2}}.$$

Diese Integration von (4) gibt die Anziehung von m und einer Summe von Körperringen, welche zwischen den Horizontalebenen liegen, die um x und $x+dx$ von der Spitze abstehen. Mithin ist das Integral zwischen den Grenzen $r=0$ und $r=BC=y$ zu nehmen. Nun ist

$$\int_0^y \frac{r dr}{(x^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{\sqrt{y^2 + x^2}} + \frac{1}{x}.$$

Folglich die Anziehung dieser horizontalen Schicht und der Masse m , nach (4) und (1)

$$(5) \quad 2 \pi c m \rho x dx \int_0^y \frac{r dr}{(x^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} = 2 \pi c m \rho \left(dx - \frac{x dx}{\sqrt{n^2 h x + x^2}} \right).$$

Dieser Ausdruck muss noch in Hinsicht x integriert werden. Es ist

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{n^2 h x + x^2}} = \sqrt{n^2 h x + x^2} - \frac{n^2 h}{2} \log \left(\frac{n^2 h}{2} + x + \sqrt{n^2 h x + x^2} \right) + C.$$

Allein das Integral von (5) in Hinsicht x ist von $x=0$ bis $x=h$ zu nehmen, um die Anziehung aller horizontalen Schichten des Berges auf m zu erhalten. Nun ist

$$\int_0^h \frac{x dx}{\sqrt{n^2 h x + x^2}} = h \sqrt{1 + n^2} - \frac{n^2 h}{2} \log \frac{n^2 + 2 + 2 \sqrt{1 + n^2}}{n^2}.$$

Die gesuchte Gesamttanziehung in vertikaler Richtung ist daher gleich

$$(6) \quad 2 \pi c m \rho h \left[1 - \sqrt{1 + n^2} + \frac{n^2}{2} \log \frac{n^2 + 2 + 2 \sqrt{1 + n^2}}{n^2} \right].$$

Dieser Ausdruck kann unter der Voraussetzung vereinfacht werden, dass der Berg sehr flach ist, d. h. dass die Zahl n bedeutend grösser ist als die Einheit. Man erhält zunächst aus (6)

$$(7) \quad 2\pi c m \rho \ln \left[\frac{1}{n} - \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + \frac{n}{2} \log \left(1 + \frac{2}{n^2} + \frac{2}{n} \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} \right) \right].$$

Entwickelt man nun $\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}$ nach dem binomischen Satze und vernachlässigt die Glieder von der vierten Potenz von $\frac{1}{n}$ an, so ist

$$\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} = 1 + \frac{1}{2n^2}.$$

Hierfür wird nach der Formel (4) des § 63

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

die logarithmische Grösse

$$\begin{aligned} \log \left[1 + \frac{2}{n} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} \right) \right] &= \frac{2}{n} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{n} \right)^2 \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} \right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{n} \right)^3 \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} \right)^3 - \dots \end{aligned}$$

Entfernt man rechts die Klammern, so heben sich die Glieder mit $\frac{1}{n^2}$ auf. Vernachlässigt man sodann alle Glieder von der vierten Potenz der Grösse $\frac{1}{n}$ an, so wird der Wert des vorstehenden logarithmischen Ausdruckes $= \frac{2}{n} \left(1 - \frac{1}{6n^2} \right)$, also das Integral (7), das wir mit a bezeichnen wollen

$$a = 2\pi c m \rho \ln \left[\frac{1}{n} - \left(1 + \frac{1}{2n^2} \right) + 1 - \frac{1}{6n^2} \right],$$

$$(8) \quad a = 2\pi c m \rho h \left(1 - \frac{2}{3n} \right).$$

Nun sei R der Halbmesser der Erde, diese als Kugel gedacht, ρ' die mittlere Dichtigkeit der Erdmasse und A die Anziehung der Erde auf das Massenteilchen m , das auf ihrer Oberfläche liegt, so ist nach § 333

$$A = c \frac{4\pi R \rho' m}{3}.$$

Mithin das Verhältnis zwischen den Anziehungen a und A

$$\frac{a}{A} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\rho}{\rho'} \cdot \frac{h}{R} \left(1 - \frac{2}{3n}\right).$$

Nun sei $n=5$, $h=0,5$ geographische Meilen und da man annähernd nehmen kann (§ 237)

$$\rho = 2,65, \quad \rho' = 5,56, \quad R = 860 \text{ Meilen},$$

so wird

$$\frac{a}{A} = \frac{1}{2776}.$$

Mithin ist die Anziehung der Erde 2776 mal grösser als die dieses Berges auf die Masse m .

335. Wärmeentwicklung bei der Bildung der Himmelskörper, nach der Hypothese der Entstehung dieser Körper durch Verdichtung aus Welt-dunst. Nehmen wir an, die Materie, welche die Himmelskörper bilden, habe sich ursprünglich im Weltraum im aufgelösten Zustande vorgefunden und sich sodann an einzelnen Stellen dieses Raumes, nach dem Gesetze der Gravitation, verdichtet. Jedes kleinste Teilchen der Materie hat hierbei auf alle übrigen eine anziehende Wirkung ausgeübt. Jeder dieser Anziehungen entspricht eine Arbeitsgrösse (§ 166), weil je eine Kraft längs eines Weges gewirkt hat. Denken wir uns alle diese Arbeitsgrössen, welche dem Verdichtungs Vorgang eines Himmelskörpers entsprechen, berechnet, und sodann diese Arbeitsgrössen nach der mechanischen Wärmetheorie in Wärme verwandelt. Diese Wärme wird sich über die verdichtete Masse des Körpers verbreitet und ihr eine entsprechend hohe Temperatur erteilt haben. Es sei

x_0 die ursprüngliche Entfernung zweier Massenteilchen m, m , welche sich anziehen,

x ihre Entfernung in irgend einem Augenblick ihrer Annäherung,

c die Anziehung in dem verdichteten Himmelskörper und

c die Anziehung zweier Masseneinheiten, welche den Abstand 1 haben,

so ist nach dem Gravitationsgesetze die Anziehung der Massen m, m , in der Entfernung x gleich

$$(1) \quad c \frac{m m}{x^2}$$

und somit die Arbeit beim Uebergang aus dem Abstand x_0 in den Abstand x ,

$$c m m \int_{x_0}^x \frac{dx}{x^2} = c m m \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right).$$

Wegen des ursprünglich aufgelösten Zustandes der Materie ist x_0 vielmal grösser als x . Deshalb kann man $\frac{1}{x_0}$ gegen $\frac{1}{x}$ vernachlässigen. Dadurch wird die vorstehende Arbeit gleich

$$(2) \quad \frac{c m m}{x}.$$

Nun seien $m_2, m_3, \dots$ Massenteilchen wie $m, m,$, welche an dem Vorgang der Verdichtung teilnehmen, so wird m auf $m, m_2, m_3, \dots$ wirken; ebenso $m,$ auf $m, m_2, m_3, \dots$, dann m_2 auf $m, m, m_3, \dots$ d. h. jedes Teilchen wirkt auf jedes der übrigen. Jeder dieser Anziehungen entspricht eine Arbeit, welche die Formel (2) zum Ausdruck hat.

Um alle die Arbeiten zu finden, welche zunächst aus der Anziehung von m auf alle übrigen Massenteile entspringen, lege man durch den Mittelpunkt der verdichteten Kugelmasse und durch das Teilchen m eine feste Ebene und nenne

$r, r,$ die Abstände der Teilchen $m, m,$ vom Mittelpunkt der Kugelmasse,

$x,$ wie oben den Abstand der Teile $m, m,$,

Θ den Winkel, welchen die Abstände r und $r,$ einschliessen,

φ den Winkel, welchen der Abstand $r,$ mit der festen Ebene durch den Mittelpunkt bildet,

ρ die Masse der Kubikeinheit der verdichteten Kugel, welche Masse wir als gleichförmig dicht voraussetzen und

R den Halbmesser dieser verdichteten Kugel,

so ist

$$(3) \quad x^2 = r^2 + r^2 - 2 r r, \cos \Theta.$$

Man beschreibe zwei Kugelflächen mit den Radien $r,$ und $r, + dr,$ und denke sich zwischen diesen Flächen ein rechtwinkeliges Volumenelement, dessen Dimensionen $dr,$ $r, d\Theta$ und $r, \sin \Theta d\varphi$ sind. Die Masse $m,$ dieses Volumenelementes ist daher

$$(4) \quad m, = \rho r,^2 dr, \sin \Theta d\Theta d\varphi.$$

Setzt man die Werte von $x,$ und $m,$ aus (3) und (4) in (2), so folgt als Arbeit, welche aus der Anziehung von m auf $m,$ entspringt

$$(5) \quad c m \rho \frac{r,^2 dr, \sin \Theta d\Theta d\varphi}{\sqrt{r^2 + r,^2 - 2 r r, \cos \Theta}}.$$

Integriert man diesen Ausdruck (5) der Reihe nach

in Hinsicht φ von 0 bis 2π

" Θ " 0 " π

" $r,$ " 0 " $R,$

so erhält man die Arbeit $a,$ welche aus der Anziehung des Teilchens m auf alle übrigen Teilchen, welche an der Verdichtung Anteil nehmen, hervorgeht. Diese Arbeit ist daher für die angegebenen Grenzen

$$a = c m \rho \iiint \frac{r,^2 dr, \sin \Theta d\Theta d\varphi}{\sqrt{r^2 + r,^2 - 2 r r, \cos \Theta}}.$$

Die Integration in Hinsicht φ gibt

$$a = 2 \pi c m \rho \iint \frac{r,^2 dr, \sin \Theta d\Theta}{\sqrt{r^2 + r,^2 - 2 r r, \cos \Theta}}.$$

Da $\sin \Theta d\Theta = -d(\cos \Theta)$, so kann man auch schreiben

$$(6) \quad a = 2\pi c m \varrho \int r,^2 dr, \int \frac{-d(\cos \Theta)}{\sqrt{r^2 + r,^2 - 2rr, \cos \Theta}}.$$

Um die Integration in Hinsicht Θ auszuführen, berücksichtige man, dass

$$d\sqrt{a - b \cos \Theta} = \frac{-b d(\cos \Theta)}{2\sqrt{a - b \cos \Theta}}$$

und folglich durch Umkehrung

$$\int \frac{-d(\cos \Theta)}{\sqrt{a - b \cos \Theta}} = \frac{2}{b} \sqrt{a - b \cos \Theta}.$$

Hiernach wird auch sein

$$\int \frac{-d(\cos \Theta)}{\sqrt{r^2 + r,^2 - 2rr, \cos \Theta}} = \frac{1}{rr,} \sqrt{r^2 + r,^2 - 2rr, \cos \Theta}.$$

Der Wert dieses Integrals zwischen den Grenzen $\Theta = 0$ und $\Theta = \pi$ ist

$$(7) \quad \frac{1}{rr,} \left(\sqrt{r^2 + r,^2 + 2rr,} - \sqrt{r^2 + r,^2 - 2rr,} \right).$$

Hierin kann nun $r,$ grösser oder kleiner als r sein. Wenn $r, < r$, so wird der Wert von (7) $= \frac{2}{r}$; es liegt alsdann die anziehende Masse m ausserhalb aller der Kugelschalen, deren Halbmesser variieren können zwischen 0 und r . Wenn $r, > r$, so wird der Wert von (7) $= \frac{2}{r,}$; in diesem Fall liegt die Masse m innerhalb aller Kugelschalen, deren Halbmesser von r bis R wachsen können. Wegen der verschiedenen Werte $\frac{2}{r}$ und $\frac{2}{r,}$ ist es daher nötig, die Integration in Hinsicht der dritten Variablen getrennt auszuführen. Man erhält mithin aus (6)

$$(8) \quad a = 2\pi c m \varrho \left(\int_0^r \frac{2r,^2 dr,}{r} + \int_r^R \frac{2r,^2 dr,}{r,} \right).$$

$$\text{Nun ist } \int_0^r \frac{2r,^2 dr,}{r} = \frac{2}{3} r^2, \quad \int_r^R 2r, dr, = R^2 - r^2; \text{ daher die}$$

Summe dieser Werte $= R^2 - \frac{1}{3} r^2$. Führt man diesen Wert in (8), so kommt

$$(9) \quad a = 2\pi c m \varrho \left(R^2 - \frac{1}{3} r^2 \right).$$

Man beschreibe vom Mittelpunkt der verdichteten Kugel aus zwei Kugelflächen mit den Radien r und $r + dr$, so schliessen beide Flächen unendlich viele Massenteile wie m ein. Denken wir uns alle diese Massenteile gleich gross, so entspricht jedem eine gleiche Arbeit $= a$. Die Arbeit, welche somit allen zwischen diesen zwei Kugelflächen eingeschlossenen Teilchen entspricht, ist der Anzahl dieser Teilchen, d. h. der eingeschlossenen Masse proportional. Vertauscht man daher in (9) die Masse m mit der Masse $4 \rho r^2 \pi dr$ jener Kugelschale, so erhält man als Arbeit, welche aus der Anziehung aller Teile jener Schale auf alle Teile überhaupt hervorgeht, den Wert

$$8 \pi^2 c \rho^2 \left(R^2 r^2 - \frac{r^4}{3} \right) dr.$$

Wird dieses Differential integriert von $r=0$ bis $r=R$, so erhält man die Arbeit, welche der Anziehung aller Teile auf alle Teile entspricht, gleich

$$(10) \quad \frac{32}{15} \pi^2 c \rho^2 R^5.$$

In diesem Ausdrucke sind die Arbeiten, welche aus der Anziehung von m auf m , und von m , auf m hervorgehen, gleich gross. Da sich dies für je zwei andere Teilchen ebenso verhält, so ist die gesammte Arbeit, welche aus dem Verdichtungsprozess entspringt, nur die Hälfte von (10). Bezeichnet man diese Arbeit mit A , so ist mithin

$$(11) \quad A = \frac{16}{15} \pi^2 c \rho^2 R^5.$$

Man nenne: s die mittlere Wärmemenge, welche nötig ist, um eine Masseneinheit des Stoffes um 1° nach Celsius zu erwärmen; $E = 436$ Kilogramm-Meter die mechanische Arbeit (§ 239), welche zur Hervorbringung einer Kalorie Wärme erforderlich ist, wenn sich die Arbeit vollständig in Wärme umsetzt und t die ursprüngliche Temperatur, welche der Himmelskörper infolge des Verdichtungsprozesses annehmen wird.

Nun ist die Masse des Himmelskörpers gleich

$$\frac{4}{3} R^3 \pi \rho.$$

Wird diese Masse von 0 auf 1 Grad erwärmt, so ist hierzu eine Wärmemenge nötig $= \frac{4}{3} R^3 \pi \rho s$ Kalorien; für eine Erwärmung von 0 auf t Grade steigt diese Wärme auf $\frac{4}{3} R^3 \pi \rho st$. Jede dieser Kalorien kann entstanden gedacht werden aus einer Arbeit $= E$, also jene im ganzen Ball enthaltene Wärme aus einer Arbeit $= \frac{4}{3} R^3 \pi \rho st E$. Diese Arbeit muss gleich sein der Grösse A in Formel (11), unter der Vor-

aussetzung, dass während des Verdichtungsprozesses keine Wärme durch Ausstrahlung an den Weltraum verloren gegangen sei. Hieraus folgt

$$\frac{4}{3} R^3 \pi \rho s t E = \frac{16}{15} \pi^2 \rho^2 c R^5.$$

$$(12) \quad t = \frac{4}{5} \frac{\pi \rho c}{s E} R^2.$$

Da die Grössen c und E konstant sind, so ist mithin die ursprüngliche Temperatur t eines Himmelskörpers proportional seiner Oberfläche πR^2 und seiner Dichtigkeit ρ .

Setzt man die Grösse s für alle Himmelskörper als konstant voraus und bezeichnet mit t , die ursprüngliche Temperatur, mit R , den Radius und mit ρ , die Masse der Kubikeinheit eines andern Himmelskörpers, so ist nach (12)

$$(13) \quad t, = \frac{4}{5} \frac{\pi c \rho,}{s E} R,^2.$$

Durch Division von (12) und (13) folgt

$$(14) \quad \frac{t,}{t} = \frac{\rho, R,^2}{\rho R^2}.$$

Um die ursprüngliche absolute Temperatur der Erde zu bestimmen, sei M die Masse der Erde, diese Masse als gleichförmig gedacht; G das Gewicht der Masse ρ , welche in der Kubikeinheit enthalten ist, wenn sich diese Masse auf der Erdoberfläche befindet, s die spezifische Wärme der Erdmasse, d. h. die Wärme, welche nötig ist, um 1 Kilogramm der Erdmasse um 1 Zentigrad zu erwärmen, so ist die Erdmasse gleich

$$(15) \quad \frac{4}{3} R^3 \pi \rho = M$$

und nach dem Gesetz der Gravitation, indem man G als Anziehungskraft der Massen M und ρ auffasst, welche sich im Abstände R von einander befinden, gleich

$$(16) \quad c \frac{M \rho}{R^2} = G.$$

Das Gewicht der Erdmasse ist $= \frac{4}{3} R^3 \pi G$. Wird dasselbe von 0 auf 1 Grad erwärmt, so ist eine Wärmemenge erforderlich $= \frac{4}{3} R^3 \pi G s$. Wird dieses Gewicht auf t Grad erwärmt, so bedarf es hierzu einer Wärmemenge $= \frac{4}{3} R^3 \pi G s t$. Dieser Wärme entspricht eine mechanische Arbeit $= \frac{4}{3} R^3 \pi G s t E$, da jede Kalorie Wärme eine Arbeit $= E$ produzieren kann. Diese Arbeit muss gleich der

sein, welche aus dem Verdichtungsprozesse der Erde entstanden ist. Man hat daher nach (11)

$$(17) \quad \frac{4}{3} R^3 \pi G s t E = A.$$

Multipliziert man die Gleichungen (11), (15), (16) und (17) mit einander, so folgt die gesuchte Formel

$$(18) \quad t = \frac{3}{5} \frac{R}{s E}.$$

Nun sei

$$s = 0,2, \quad E = 436 \text{ Kil.-Met.}, \quad R = 6365000 \text{ Met.},$$

so folgt als Wert der ursprünglichen Temperatur der Erde nach (18)

$$(19) \quad t = \frac{3 \cdot 6365000}{5 \cdot 0,2 \cdot 436} = 43796 \text{ Grade.}$$

Vermöge der Formel (14) und des Wertes von t aus (19) erhält man folgende Resultate (Halbmesser und Dichte der Himmelskörper nach dem Annuaire, 1864)

	Radius R.	Mittlere Dichte ρ .	Temperatur.	
			Relative.	Absolute t .
Merkur	0,391	2,940	0,449	19680 ⁰
Venus	0,985	0,923	0,895	39197
Erde	1,000	1,000	1,000	43796
Mars	0,519	0,948	0,255	11168
Jupiter	11,225	0,238	29,988	1313612
Saturn	9,022	0,138	11,233	491962
Uranus	4,344	0,180	3,397	129326
Sonne	112,060	0,252	3164,500	138592000
Mond	0,273	0,557	0,041	1795

VII. Differentialgleichungen der ersten Ordnung mit zwei Veränderlichen.

336. Sonderung der Veränderlichen. Die Differentialgleichungen, welche bisher integriert wurden, hatten die Form

$$(1) \quad f(x) dx = \varphi(y) dy$$

oder konnten auf einfache Weise auf diese Form gebracht werden. Diese Gleichung besteht zwischen zwei Differentialen, wovon jedes nur eine Variable enthält. Man sagt deshalb, die Variablen seien in der Gleichung (1) gesondert oder getrennt.

Wenn bei einer Differentialgleichung, welche die Grössen $x, y, \frac{dy}{dx}$ in beliebiger Verbindung enthält, diese Sonderung bewirkt werden kann, so hat man nur jedes der Differentiale (1) nach den in frühern Abschnitten angegebenen Regeln zu integrieren.

Diese Sonderung kann sehr oft durch blosse Umformung erzielt werden, so z. B. in den Gleichungen

$$Y dx + X dy = 0, \text{ woraus } \frac{dx}{X} + \frac{dy}{Y} = 0,$$

$$XY dx + X, Y, dy = 0, \quad , \quad \frac{X}{X} dx + \frac{Y}{Y} dy = 0,$$

worin Y eine Funktion von y und X eine Funktion von x bezeichnet.

Bei gewissen Funktionen lässt sich die Sonderung der Variablen erzielen durch Einführung einer neuen Veränderlichen. Wenn z. B.

$$(2) \quad dy = f\left(\frac{y}{x}\right) dx,$$

so setze man $\frac{y}{x} = t$, so kommt

$$y = xt, \quad dy = x dt + t dx.$$

Folglich durch Substitution in (2)

$$x dt + t dx = f(t) dx,$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{f(t) - t}.$$

337. Sonderung der Variablen bei linearen Differentialgleichungen.

Man nennt eine Gleichung von der Form

$$(1) \quad dy + f(x)y dx = \varphi(x) dx$$

eine lineare, weil die abhängig Variable y und ihr Differential dy nur in der ersten Potenz vorkommen.

Behufs der Sonderung setze man

$$(2) \quad y = Xt,$$

worin X eine Funktion von x und t eine neue Variable bezeichnet, so erhält man durch Differentiation von (2)

$$(3) \quad dy = X dt + t dX.$$

Führt man die Werte von y und dy aus (2) und (3) in (1), so kommt

$$X dt + t dX + X t f(x) dx = \varphi(x) dx.$$

Da der Wert von X willkürlich ist, so kann man denselben so wählen, dass die beiden Glieder, welche X enthalten, zusammen = 0 werden. Dies gibt folgende zwei Gleichungen

$$(4) \quad dt + t f(x) dx = 0.$$

$$(5) \quad t dX = \varphi(x) dx.$$

Aus (4) folgt

$$\frac{dt}{t} = -f(x) dx,$$

$$\log t = -\int f(x) dx.$$

$$(6) \quad t = e^{-\int f(x) dx}.$$

Setzt man diesen Wert von t in (5), so wird

$$(7) \quad dX = \varphi(x) dx e^{\int f(x) dx}.$$

Wird diese Formel (7) integriert, so erhält man X . Führt man diesen Wert von X und den von t aus (6) in (2), so erhält man den gesuchten Wert von y .

Es sei z. B. zu integrieren

$$dy + xy dx = a dx,$$

so ist $f(x) = x$, $\varphi(x) = a$. Setzt man $y = Xt$, so wird

$$\log t = -\int x dx = -\frac{x^2}{2}; \quad t = e^{-\frac{x^2}{2}};$$

$$dX = a e^{\frac{x^2}{2}} dx; \quad X = a \int e^{\frac{x^2}{2}} dx.$$

Folglich

$$y = a e^{-\frac{x^2}{2}} \int e^{\frac{x^2}{2}} dx.$$

338. Sonderung der Veränderlichen bei homogenen Differentialgleichungen. Eine Gleichung heisst homogen, wenn in ihr die Anzahl der Dimensionen der Veränderlichen in allen Gliedern dieselbe ist. Homogen sind demnach die Gleichungen

$$xy dy + x^2 dx + y^2 dx = 0,$$

$$dx + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy = 0.$$

Nun sei allgemein

$$(1) \quad f(x, y) dx = \varphi(x, y) dy$$

eine homogene Gleichung. Man setze in ihr $y = xz$, so wird x in jedem Gliede der Gleichung mit demselben Exponenten vorkommen. Ist die Summe der Exponenten in jedem Gliede $= n$, so ist mithin x^n ein gemeinschaftlicher Faktor der Gleichung. Nach Entfernung dieses Faktors werden die Vorzeichen von dx und dy in (1) nur noch Funktionen von z sein. Aus (1) folgt deshalb

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} = \psi(z),$$

wörin $\psi(z)$ eine Funktion von z allein bezeichnet. Differenziert man $y = xz$, so folgt

$$dy = x dz + z dx.$$

Folglich durch Substitution dieses Wertes von dy in (2)

$$x dz + z dx = \psi(z) dx,$$

woraus sich ergibt

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{\psi(z) - z}.$$

In dieser Gleichung ist nun die Sonderung der Variablen vollzogen. Man integriere sie und führe den Wert von z aus $y = xz$ ein, so erhält man das Integral von (1).

Es sei z. B. zu integrieren

$$(3) \quad (x - y) dx = x dy.$$

Man setze $y = xz$, so wird (3) zu

$$(x - xz) dx = x dy$$

oder nach Entfernung des gemeinschaftlichen Faktors x

$$(4) \quad (1 - z) dx = dy.$$

Aus $y = xz$ folgt aber $dy = x dz + z dx$; hierfür wird (4)

$$(1 - z) dx = x dz + z dx; \quad (1 - 2z) dx = x dz,$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{1 - 2z} = -\frac{1}{2} \frac{d(-2z)}{1 - 2z}.$$

Folglich durch Integration

$$\log x = -\frac{1}{2} \log(1 - 2z) + \frac{1}{2} \log a,$$

worin $\frac{1}{2} \log a$ die Konstante der Integration bezeichnen soll. Man kann auch schreiben

$$\log x = \frac{1}{2} \log \frac{a}{1 - 2z},$$

$$\log x^2 = \log \frac{a}{1 - 2z}; \quad x^2 = \frac{a}{1 - 2z}.$$

Führt man schliesslich noch $z = \frac{y}{x}$ ein, so kommt das gesuchte Integral

$$x(x - 2y) = a.$$

339. Vollständigkeit des Differentials einer Gleichung mit zwei Variablen. Es sei $f(x, y) = 0$ eine Funktion mit zwei Veränderlichen.

Man bezeichne sie mit u , so wird $u=0$ sein. Durch Differentiation erhält man

$$(1) \quad du = \left(\frac{du}{dx}\right)dx + \left(\frac{du}{dy}\right)dy = 0,$$

wobei die Grössen $\frac{du}{dx}$ und $\frac{du}{dy}$ die partiellen Differentialverhältnisse der Funktion in Hinsicht x und y sind (§ 257). Man setze nun

$$(2) \quad \frac{du}{dx} = P, \quad \frac{du}{dy} = Q,$$

so wird Gleichung (1)

$$(3) \quad du = P dx + Q dy = 0.$$

Man differenziere P in Hinsicht y und Q in Hinsicht x , so kommt

$$\frac{dP}{dy} = \frac{d^2u}{dx dy}; \quad \frac{dQ}{dx} = \frac{d^2u}{dy dx}.$$

Da nun aber $\frac{d^2u}{dx dy} = \frac{d^2u}{dy dx}$, indem es gleichgültig ist, ob man u zuerst in Hinsicht x , dann in Hinsicht y differentiiert oder umgekehrt, so wird sein

$$(4) \quad \frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}.$$

Wenn ein Differential zwischen zwei Variablen so beschaffen ist, dass die Bedingung (4) erfüllt wird, so nennt man das Differential ein vollständiges oder genaues. Ein vollständiges Differential kann so aufgefasst werden, als sei es durch unmittelbare Differentiation aus der ursprünglichen Funktion abgeleitet worden. Ein solches Differential kann immer integriert werden. Ein allgemeines Verfahren hierzu ist folgendes.

Man integriere zuerst die Gleichung

$$P = \frac{du}{dx} \quad \text{oder} \quad du = P dx$$

in Hinsicht x , so wird man erhalten

$$(5) \quad u = \int P dx + Y.$$

Die Grösse Y vertritt hier die Stelle der Konstanten, ist aber allgemein als eine Funktion von y zu betrachten, welche noch bestimmt werden muss. Man bezeichne das Integral $\int P dx$ mit U , so ist

$$u = U + Y.$$

Diese Gleichung, in Hinsicht y differentiiert, gibt

$$\frac{du}{dy} = \frac{dU}{dy} + \frac{dY}{dy}.$$

Da nun aber auch $\frac{du}{dy} = Q$, so wird mithin

$$dY = Q dy - \left(\frac{dU}{dy} \right) dy.$$

Somit erhält man durch Integration in Hinsicht y:

$$Y = \int \left[Q - \frac{dU}{dy} \right] dy.$$

Führt man diesen Wert von Y in (5), so erhält man den Wert von u, somit das gesuchte Integral.

340. Integrierender Faktor. Wenn ein Differential

$$(1) \quad M dx + N dy = 0$$

zwischen zwei Veränderlichen x, y kein vollständiges ist, so kann es durch einen Faktor z, der im allgemeinen eine Funktion von x, y sein wird, zu einem vollständigen gemacht werden.

Denn nach der Bedeutung von z wird also das Differential

$$(2) \quad Mz dx + Nz dy = 0$$

ein vollständiges sein, also die Bedingung erfüllen

$$(2a) \quad \frac{d(Mz)}{dy} = \frac{d(Nz)}{dx}.$$

Allein diese letzte Gleichung gibt, indem man die Differentiation ausführt

$$(3) \quad M \frac{dz}{dy} + z \frac{dM}{dy} = N \frac{dz}{dx} + z \frac{dN}{dx}.$$

Wenn die Grösse z, welche man den integrierenden Faktor nennt, aus dieser Gleichung (3) bestimmt werden kann, so multipliziert man (1) damit und es wird diese Formel integriert werden können.

Allein z lässt sich aus (3) nur in besondern Fällen ermitteln. Unter diesen Fällen heben wir diejenigen hervor, wo z eine Funktion von einer der Variablen x, y ist.

Es sei z eine Funktion von x, so wird $\frac{dz}{dy} = 0$. Hierfür folgt aus (3)

$$(4) \quad \frac{dz}{z} = \frac{\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}}{N} dx.$$

Ist z eine Funktion von y, so wird $\frac{dz}{dx} = 0$ und man erhält aus (3)

$$(5) \quad \frac{dz}{z} = \frac{\frac{dN}{dx} - \frac{dM}{dy}}{M} dy.$$

Wird der Ausdruck (4) oder (5) integriert, so erhält man den integrierenden Faktor z .

Es sei zu integrieren die Differentialgleichung

$$(6) \quad (1 + a\sqrt{1+x^2})dx + 2by\sqrt{1+x^2}dy = 0.$$

Da mit M die Vorzahl von dx , mit N diejenige von dy bezeichnet wird, so ist

$$\frac{dM}{dy} = 0, \quad \frac{dN}{dx} = \frac{2by}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Die Werte von $\frac{dM}{dy}$ und $\frac{dN}{dx}$ sind verschieden. Die Formel (6) ist also kein genaues Differential. Gesetzt, es gebe einen integrierenden Faktor z dieser Gleichung, welcher nur eine Funktion von x ist, so wird man nach (4) erhalten

$$\frac{dz}{z} = -\frac{x dx}{1+x^2}.$$

Somit

$$\log z = -\frac{1}{2} \log(1+x^2) + \frac{1}{2} \log c,$$

wenn die Integrationskonstante mit $\frac{1}{2} \log c$ bezeichnet wird. Dies gibt auch

$$\log z = \log \sqrt{\frac{c}{1+x^2}}, \quad z = \sqrt{\frac{c}{1+x^2}}.$$

Multipliziert man die gegebene Gleichung mit diesem Werte von z , so kommt

$$\sqrt{c} \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + a \right) dx + 2b\sqrt{c}y dy = 0.$$

Das Integral dieser Gleichung ist

$$\sqrt{c} [\log(x + \sqrt{1+x^2}) + ax] + by^2 \sqrt{c} = c'$$

oder indem man mit $\sqrt{c}$ dividiert und $c' : \sqrt{c}$ mit h bezeichnet

$$(7) \quad \log(x + \sqrt{1+x^2}) + ax + by^2 - h = 0.$$

Wird diese Formel differentiiert, so erhält man in der That die gegebene Gleichung (6). Somit ist (7) das Integral von (6).

Man sieht übrigens, dass in der vorgelegten Gleichung die Sonderung der Variabeln durch Division mit $\sqrt{1+x^2}$ ausgeführt, die Integration somit ohne einen integrierenden Faktor bewirkt werden kann.

341. Differentialgleichung mit dem Quadrat des Differentialverhältnisses. Eine Differentialgleichung zwischen den Variabeln x, y enthalte

das Differentialverhältnis $\frac{dy}{dx}$ in der ersten und zweiten Potenz, so kann diese Gleichung auf die allgemeine Form

$$(1) \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + P\left(\frac{dy}{dx}\right) + Q = 0$$

gebracht werden, wo P und Q Funktionen von x oder y oder beiden Variablen sein können.

Man löse Gleichung (1) wie eine quadratische in Hinsicht $\frac{dy}{dx}$ auf, so erhält man zwei Wurzelwerte. Diese seien A und B, so geht die gegebene Gleichung über in das Produkt

$$\left(\frac{dy}{dx} - A\right)\left(\frac{dy}{dx} - B\right) = 0.$$

Diese Gleichung kann nur bestehen, wenn der eine oder andere der Faktoren = 0 ist. Daher entstehen folgende zwei Differentialgleichungen der ersten Ordnung

$$(2) \quad dy = A dx; \quad dy = B dx.$$

Lassen sich diese integrieren, so multipliziere man ihre Integrale mit einander und das Produkt ist das Integral der gegebenen Gleichung (1).

Als Beispiel diene die Gleichung $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - a^2 = 0$, so folgt durch Zerlegung in ein Produkt

$$(3) \quad \left(\frac{dy}{dx} - a\right)\left(\frac{dy}{dx} + a\right) = 0.$$

Daher ergeben sich die Gleichungen der ersten Ordnung

$$dy = a dx; \quad dy = -a dx$$

und, da a konstant ist, durch Integration

$$(4) \quad y = ax + C; \quad y = -ax + C'.$$

Diese Gleichungen entsprechen zwei Geraden; die eine hat a, die andere -a zur trigonometrischen Tangente des Winkels, den sie mit der Abscissenachse macht. Die Linien liegen daher zu beiden Seiten dieser Achse und bilden mit ihr gleiche Winkel. Die Konstanten C, C' sind die Stücke, welche sie auf der Ordinatenachse, vom Anfangspunkt aus, abschneiden. Hiernach geht Gleichung (3) über in

$$(y - ax - C)(y + ax - C') = 0$$

oder durch Ausführung der Multiplikation in

$$y^2 - (C + C')y - a^2x^2 - a(C - C')x + CC' = 0.$$

Diese Gleichung ist das Integral der gegebenen Differentialgleichung. Sie stellt eine Hyperbel dar für jenen speziellen Fall, wo die beiden Kurven in zwei Gerade übergehen, die sich für $C' = C$ im Mittelpunkt schneiden.

In vielen Fällen führt jedoch die Auflösung der Gleichung (1) auf zwei solche Gleichungen (2), bei welchen eine Sonderung der Veränderlichen nicht gelingt. Man kann alsdann folgendes Verfahren versuchen.

Es werde Gleichung (1) in Hinsicht x oder y aufgelöst und so dann $\frac{dy}{dx} = p$ eingeführt, so erhält man den Zusammenhang zwischen x , y und p unter einer der beiden Formen

$$x = \varphi(y, p); \quad y = \varphi(x, p).$$

Gesetzt es gelinge die Herstellung der zweiten dieser Gleichungen, so liefert ihre Differentiation eine Gleichung der ersten Ordnung zwischen x und p . Denn die Grösse dy , welche links noch vorkommt, kann sofort durch $p dx$ ersetzt werden. Man ermittle nun das Integral dieser Gleichung und eliminiere p aus dieser Integralgleichung und der gegebenen Gleichung, so erhält man das gesuchte Resultat. Zwei Beispiele mögen das Verfahren erläutern.

I. Es sei zu integrieren

$$(5) \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + ax - by = 0.$$

Nach dem im vorhergehenden Paragraphen angegebenen allgemeinen Verfahren erhält man folgende zwei Gleichungen der ersten Ordnung

$$\frac{dy}{dx} = +\sqrt{by - ax}; \quad \frac{dy}{dx} = -\sqrt{by - ax}.$$

Da aber in denselben die Sonderung der Veränderlichen nicht direkt möglich ist, so wende man das soeben angegebene spezielle Verfahren an. Zu diesem Zwecke setze man $\frac{dy}{dx} = p$ in (5), so folgt

$$by = p^2 + ax$$

also durch Differentiation, nachdem noch dy durch $p dx$ ersetzt worden

$$dx = \frac{2p dp}{bp - a}.$$

Diese Gleichung kann aber integriert werden. Man setze $bp - a = bz$, so wird

$$dp = dz; \quad p = \frac{a + bz}{b}$$

$$dx = \frac{2}{b^2} \left[\frac{adz}{z} + b dz \right]$$

und durch Integration

$$x = \frac{2}{b^2} [a \log z + bz] + C$$

$$x = \frac{2}{b^2} \left[a \log \left(p - \frac{a}{b} \right) + bp - a \right] + C.$$

Eliminiert man nun aus dieser und der gegebenen Gleichung die Grösse p , so erhält man das Integral von (5).

II. Es sei ferner zu integrieren

$$(6) \quad y \, dx - x \sqrt{dx^2 + dy^2} = 0.$$

Man erhält zunächst durch Einführung von p

$$(7) \quad y = x \sqrt{1 + p^2}$$

und durch Differentiation

$$dy = dx \sqrt{1 + p^2} + x \frac{p \, dp}{\sqrt{1 + p^2}}.$$

Daher, wenn dy durch $p \, dx$ ersetzt wird

$$(p - \sqrt{1 + p^2}) \, dx = x \frac{p \, dp}{\sqrt{1 + p^2}}.$$

Multipliziert man noch auf beiden Seiten mit $p + \sqrt{1 + p^2}$, so geht die Gleichung über in

$$\frac{dx}{x} = -p \, dp - \frac{p^2 \, dp}{\sqrt{1 + p^2}}.$$

Die Integration dieser Gleichung gibt unter Benutzung von Formel (5), § 82

$$\log x = \frac{1}{2} [\log (p + \sqrt{1 + p^2}) - p^2 - p \sqrt{1 + p^2}] + C.$$

Setzt man den Wert $p = \pm \frac{\sqrt{y^2 - x^2}}{x}$ aus (7) hier ein, so erhält man das Integral von (6).

342. Integration der Differentialgleichungen durch Reihen. Bisweilen gelingt es eine Differentialgleichung durch eine konvergente Reihe zu integrieren. Wir zeigen das Verfahren nach der Maclaurin'schen Reihe und nach dem Satz der unbestimmten Koeffizienten.

I. Die Maclaurin'sche Reihe, § 253, Formel (3), ist

$$(1) \quad f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + f''(a) \frac{(x - a)^2}{1 \cdot 2} + \dots$$

Dafür schreibt man auch häufig

$$(2) \quad y = y_a + \left(\frac{dy}{dx}\right)_a (x - a) + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_a \frac{(x - a)^2}{1 \cdot 2} + \dots$$

wobei die Bedeutung von y_a , $\left(\frac{dy}{dx}\right)_a$, ... durch Vergleichung mit (1) sich leicht ergibt.

Nach dieser Reihe soll die Differentialgleichung

$$(3) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2x} - \frac{1}{y}$$

integriert werden. Man erhält durch Differentiation von (3)

$$\begin{aligned}\frac{d^2 y}{dx^2} &= -\frac{3}{2x^2} + \frac{1}{y^2}, & \frac{d^3 y}{dx^3} &= \frac{3}{x^3} - \frac{2}{y^3}, \\ \frac{d^4 y}{dx^4} &= -\frac{9}{x^4} + \frac{6}{y^4}, & \frac{d^5 y}{dx^5} &= \frac{36}{x^5} - \frac{24}{y^5}, \dots\end{aligned}$$

Man bezeichne nun denjenigen Wert von y , welcher für $x=a$ entsteht, mit y_a und führe diese gleichzeitigen Werte von x und y in die vorstehenden Differentialverhältnisse ein und sodann die entstandenen Resultate in die Reihe (2), so erhält man

$$y = y_a + \left(\frac{3}{2a} - \frac{1}{y_a} \right) (x-a) + \left(-\frac{3}{2a^2} + \frac{1}{y_a^2} \right) \frac{(x-a)^2}{1 \cdot 2} + \dots$$

In dieser Reihe vertritt die Grösse y_a die Stelle der Integrationskonstanten.

Nehmen wir an, es werde für $a=1$ die Grösse $y_a=1$, so geht die vorstehende Reihe über in

$$\begin{aligned}(4) \quad y &= 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{2 \cdot 2}(x-1)^2 + \frac{1}{2 \cdot 3}(x-1)^3 \\ &\quad - \frac{1}{2 \cdot 4}(x-1)^4 + \frac{1}{2 \cdot 5}(x-1)^5 - \dots\end{aligned}$$

Diese Reihe ist konvergent für Werte von $x-1$, welche zwischen -1 und $+1$ liegen, also für Werte von x zwischen 0 und 2 .

II. Behufs der Integration durch Reihen wendet man oft mit Vorteil die hypothetische Gleichung

$$(5) \quad y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \dots$$

an, worin $A, B, C, \dots$ konstante, von x und y unabhängige Faktoren bezeichnen, welche nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten bestimmt werden.

Es sei zu integrieren

$$(6) \quad \frac{dy}{dx} = ax - y^2.$$

Aus (5) folgt $\frac{dy}{dx} = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \dots$

Setzt man diese beiden Werte von $\frac{dy}{dx}$ einander gleich, so kommt

$$y^2 = ax - (B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \dots).$$

Ersetzt man hierin y^2 durch den aus (5) hervorgehenden Wert, so erhält man

$$\begin{aligned}A^2 + 2ABx + 2ACx^2 + 2ADx^3 + \dots &= ax - (B + 2Cx + 3Dx^2 + \dots) \\ &\quad + B^2 + 2BCx + \dots\end{aligned}$$

In dieser Gleichung müssen die Vorzahlen gleich hoher Potenzen der Variablen gleich sein. Dies führt zu folgenden Relationen

$$B = -A^2, \quad 2AB = a - 2C, \quad 2AC + B^2 = -3D, \dots$$

$$C = A^3 + \frac{a}{2}, \quad D = -A^4 + \frac{Aa}{3}, \dots$$

Setzt man diese Werte $B, C, D, \dots$ in (5), so erhält man die gesuchte Reihe

$$y = A - A^2 x + \left(A^3 + \frac{a}{2}\right)x^2 - \left(A^4 - \frac{Aa}{3}\right)x^3 + \dots$$

Diese Formel ist das Integral von (6). Die unbestimmte Grösse A bezeichnet die Konstante der Integration.

343. Integration der Differentialgleichungen durch Konstruktion.

Es sei eine Gleichung von der allgemeinen Form

$$(1) \quad f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

gegeben. Man soll durch Konstruktion den Zusammenhang zwischen den Variablen x, y angeben.

Damit die Aufgabe bestimmt wird, muss ein Punkt B (Fig. 122) durch seine Koordinaten $OA = a, AB = b$, durch welchen die aus (1) hervorgehende Kurve BE gehen soll, gegeben sein. Setzt man nun die Werte $x = a, y = b$ in (1), so findet man den entsprechenden Wert von $\frac{dy}{dx}$. Dieser Wert ist die trigonometrische

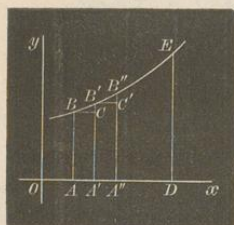


Fig. 122.

Tangente des Winkels, welchen die Kurve im Punkte B mit der Abscissenachse Ox bildet. Ist deshalb BB' eine Tangente an die Kurve und BC parallel zu Ox , so ist jener Wert von $\frac{dy}{dx} = \tan B'BC$. Lässt man nun a um eine

sehr kleine Grösse $\Delta x = AA' = BC$ zunehmen, so wird der Zuwachs CB' der Ordinate AB aus dem rechtwinkligen Dreieck CBB' sehr annähernd erhalten gleich

$$CB' = BC \tan CBB'.$$

Allein $\tan CBB'$ ist berechnet und Δx angenommen; also ist auch die Ordinate $A'B' = AB + B'C$ als gefunden zu betrachten. Entsprechende Werte der Gleichung (1) sind also

$$x = a + \Delta x; \quad y = b + \left(\frac{dy}{dx}\right) \Delta x.$$

Setzt man dieses Paar Werte in (1), so erhält man einen neuen Wert von $\frac{dy}{dx}$. Dieser ist die trigonometrische Tangente des Winkels $C'B'B''$, welchen die Tangente $B'B''$ durch den Punkt B' mit

der Abscissenrichtung $B'C'$ bildet. Lässt man also die Abscisse um die sehr kleine Grösse $A'A'' = B'C'$ zunehmen, so erhält man als Zuwachs $C'B''$ der Ordinate

$$C'B'' = B'C' \tan C'B'B''.$$

Hieraus ergibt sich der ganze Wert der Ordinate $A''B'' = A'B' + C'B''$.

Auf diese Weise kann man eine hinreichende Anzahl von Punkten der Kurve konstruieren. Folglich kann man auch für irgend einen Wert von x den entsprechenden von y finden. Die Resultate werden um so richtiger, je kleiner die Abscissenzuwächse Δx genommen werden.

Beispiel. Man soll die Differentialgleichung

$$(2) \quad 2xy \, dy - 3y \, dx + 2x \, dx = 0$$

konstruieren, unter der Voraussetzung, dass die Kurve durch den Punkt $x=1, y=1$ gehe.

Man erhält aus (2)

$$(3) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2x} - \frac{1}{y}.$$

Für $x=1, y=1$ wird $\frac{dy}{dx} = 0,5$. Ist deshalb $OA = AB = 1$, so ist $\tan CBB' = 0,5$. Nun nehme man $\Delta x = 0,05$, so wird

$$CB' = 0,05 \cdot 0,5 = 0,025,$$

$$A'B' = 1 + 0,025 = 1,025.$$

Setzt man $x = OA' = 1,05$ und $y = 1,025$ in (3), so wird

$$\frac{dy}{dx} = \tan C'B'B'' = 0,452962.$$

Nimmt man daher den Zuwachs $A'A'' = 0,05$, so wird

$$B''C' = 0,050 \cdot 0,452962 = 0,022648,$$

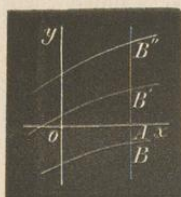
$$A''B'' = 1,025 + 0,022648 = 1,047648, \text{ u. s. w.}$$

Das Integral dieser Differentialgleichung (3) ist in § 342, Formel (4), für die hier gemachten Voraussetzungen angegeben. Für $x=1,1$ erhält man vermittelt jener Reihe $y=1,047655$. Dieser Wert weicht von dem obigen von $A''B''$ erst in der fünften Dezimalstelle ab.

344. Allgemeines Integral einer Differentialgleichung. Aus § 343 ergibt sich, dass jeder Differentialgleichung $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$ eine Kurve entspricht. Die Gleichung dieser Kurve ist das Integral der gegebenen Differentialgleichung.

Allein da der Punkt B (Fig. 123), durch welchen die Kurve gehen soll, beliebig gewählt werden kann, so entsprechen der Differentialgleichung unendlich viele Kurven $B, B', B'', \dots$. Diese Kurven sind

Fig. 123. in ihrer Lage und im allgemeinen auch in ihrem



Laufe verschieden. Sie haben die allen gemeinsame Eigenschaft, dass ihre Neigung zur Abscissenachse für irgend einen Punkt der Kurven eine Funktion ist der Koordinaten dieses Punktes, d. h. sobald die Koordinaten eines Punktes gewählt sind, ist auch der Lauf der Kurve, welche durch denselben geht, bestimmt. Das Integral, um ebenso allgemein zu sein wie die Differentialgleichung, muss daher alle diese

Kurven darstellen. Dies ist der Fall, wenn das Integral eine willkürliche Konstante enthält, welche nicht in der Differentialgleichung vorkommt und durch deren Wahl zu irgend einer Kurve übergegangen werden kann.

Der fragliche Uebergang ist aber auch in der That durch eine einzige wirkliche Konstante möglich. Um das einzusehen, ziehe man in der Ebene der Kurven eine Gerade $AB'B'' \dots$ parallel zur Achse Oy , im Abstände $x=a$ zur Ordinatenachse. Alle Kurven werden diese Gerade schneiden und zwar in Punkten, welche verschiedene Abstände von der Abscissenachse haben. Sobald nun auf dieser Geraden die Abstände $AB, AB', \dots$ gewählt sind, ist auch die entsprechende Kurve bestimmt.

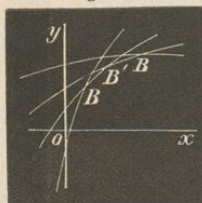
Das Integral mit der willkürlichen Konstanten heisst das allgemeine Integral. Legt man den Konstanten einen bestimmten Wert bei, so wird das Integral zu einem partikulären (§ 84).

345. Singuläres Integral zu einer Differentialgleichung. Es sei

$$(1) \quad F(x, y, c) = 0$$

das Integral einer Differentialgleichung und die Grösse c die Konstante der Integration. Gibt man dieser Konstanten verschiedene Werte, so erhält man aus dem allgemeinen Integral (1) ebenso viele partikuläre Integrale. Diese stellen Kurven (Fig. 124) derselben Art dar, die sich möglicherweise schneiden können. Lässt man in dem Falle,

Fig. 124.



dass sie sich schneiden, die Grösse c durch unendlich kleine Intervalle sich ändern, so werden die aufeinander folgenden Durchschnittspunkte $B, B', B'', \dots$ der entsprechenden Kurven eine neue Kurve bilden, welche jede der andern Kurven berührt und deshalb einhüllende Kurve genannt wird. Die Gleichung dieser einhüllenden Kurve ist das singuläre Integral der gegebenen Differentialgleichung. Das Differentialverhältnis $\frac{dy}{dx}$, wie es aus

dem singulären und dem allgemeinen Integral (1) folgt, erhält den gleichen Wert für den Berührungspunkt der einhüllenden und der eingehüllten Kurve.

Um das singuläre Integral aus dem allgemeinen zu bestimmen, gehe man von einer Kurve aus, welche einem bestimmten Wert von c

entspricht, lasse sodann c in $c + dc$ übergehen, so verwandelt sich die Gleichung (1) in

$$(2) \quad F(x, y, c) + \frac{dF(x, y, c)}{dc} dc = 0.$$

Diese Gleichung stellt eine Kurve dar, welche der angenommenen unendlich nahe liegt. Durch Vergleichung von (2) und (1) folgt, dass der zweite Teil von (2) gleich Null sein muss. Dies ist der Fall, wenn entweder $dc = 0$ oder wenn das Differentialverhältnis

$$(3) \quad \frac{dF(x, y, c)}{dc} = 0$$

gesetzt wird. Aus $dc = 0$ folgt, dass c konstant sei, was zu keiner weitem Relation führt. Eliminiert man dagegen die Grösse c aus (1) und (3), wodurch man die Grössen x, y in beiden Gleichungen als gleich, d. h. als Koordinaten der Durchschnittspunkte zweier Kurven ansieht, so erhält man eine Gleichung zwischen x, y , welche der einhüllenden Kurve angehört.

Man differentiire daher das allgemeine Integral in Hinsicht der Konstanten c , setze das entstandene Differentialverhältnis $= 0$ und eliminiere hieraus und aus (1) die Konstante c . Erhält man auf diese Weise eine Relation zwischen x und y , so ist diese das singuläre Integral. Erhält man auf diesem Wege keine Relation zwischen x und y , so durchschneiden sich die Kurven der partikulären Integrale nicht, somit fehlt auch ein singuläres Integral.

Bei Anwendung dieser Regel ist darauf zu achten, dass die Gleichung (1) nicht aufgelöst sei in Hinsicht c , also nicht in der Form

$$c + \varphi(x, y) = 0$$

vorkomme. Denn in dieser Form erhielte man

$$\frac{d[c + \varphi(x, y)]}{dc} = 1$$

statt der Gleichung (3). Es könnte also c nicht eliminiert werden.

Das singuläre Integral nennt man auch die besondere Auflösung der Differentialgleichung.

Beispiel 1. Es sei

$$(4) \quad y = ax + a^2$$

das allgemeine Integral einer gewissen Differentialgleichung und a die Konstante der Integration. Diese Gleichung stellt eine gerade Linie dar. Lässt man a sich stetig ändern von $-\infty$ bis $+\infty$, so erhält man unendlich viele gerade Linien. Die Durchschnittspunkte dieser Geraden bilden eine Kurve. Um die Gleichung dieser Kurve zu erhalten, differentiire man (4) in Hinsicht a und setze das Differentialverhältnis $= 0$. Man erhält

$$(5) \quad x + 2a = 0.$$

Eliminiert man a aus (4) und (5), so folgt

$$(6) \quad y = -\frac{x^2}{4}.$$

Diese Gleichung ist das singuläre Integral. Die einhüllende Kurve ist somit eine Parabel, deren Scheitel im Anfangspunkt liegt und deren Achse mit der negativen Richtung der Ordinatenachse zusammenfällt.

Das Differentialverhältnis von (4) ist $\frac{dy}{dx} = a$ und das von

(6) $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2}$. Für $a = -\frac{x}{2}$, welcher Wert aus (5) folgt, sind diese zwei Differentialverhältnisse einander gleich. Das Eigentümliche des singulären Integrals besteht hiernach darin, dass sein Differentialverhältnis gleich ist demjenigen des allgemeinen Integrals für einen bestimmten Wert von x .

Beispiel 2. Es sei die Differentialgleichung

$$y dx - x dy = a \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

gegeben. Man dividiere mit dx , so kommt

$$(7) \quad y - x \frac{dy}{dx} = a \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Setzt man $\frac{dy}{dx} = p$, so geht diese Gleichung über in

$$y - px = a \sqrt{1 + p^2}$$

und indem man differenziert

$$dy - x dp - p dx = \frac{a p dp}{\sqrt{1 + p^2}}.$$

Da aber $dy = p dx$, so folgt hieraus

$$x dp + \frac{a p dp}{\sqrt{1 + p^2}} = 0.$$

Diese Gleichung zerfällt, wegen des gemeinschaftlichen Faktors dp , in folgende zwei Gleichungen

$$(8) \quad dp = 0, \quad x + \frac{a p}{\sqrt{1 + p^2}} = 0.$$

Aus $dp = 0$ folgt, dass p gleich einer konstanten Grösse c sei. Setzt man c für p in (7), so erhält man

$$(9) \quad y - cx = a \sqrt{1 + c^2}.$$

Aus der zweiten der Gleichungen (8) folgt dagegen

$$p = \pm \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

wobei jedoch, vermöge der Bedingung, welche in der zweiten der Gleichungen (8) ausgedrückt ist, nur das untere Zeichen genommen werden darf. Hierfür wird die Gleichung (7) zu

$$(10) \quad y + \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad y^2 + x^2 = a^2.$$

Nun können die Gleichungen (9) und (10) als Integrale von (7) angesehen werden. Gleichung (9) enthält eine willkürliche Konstante, welche der Gleichung (10) fehlt. Die letztere geht nicht aus der ersteren hervor, indem man der Konstanten c einen besondern Wert beilegt, d. h. es ist (10) kein partikuläres Integral von (9).

Um zu zeigen, dass (10) ein singuläres Integral zu (9) ist, differenziere man (9) in Hinsicht c und setze das Differentialverhältnis $= 0$, so kommt

$$(11) \quad -x = \frac{ac}{\sqrt{1 + c^2}}.$$

Eliminiert man c aus (9) und (11), so erhält man in der That die Gleichung (10). Das allgemeine Integral (9) und das singuläre

(10) geben denselben Wert des Differentialverhältnisses $\frac{dy}{dx}$ für

$$c^2 = \frac{x^2}{a^2 - x^2},$$

welcher Wert von c^2 aus (11) folgt. Die Gerade der Gleichung (9) berührt den Kreis der Gleichung (10).

VIII. Differentialgleichungen der zweiten Ordnung mit zwei Variablen.

346. Form der Gleichungen. Eine Gleichung von der Form

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

heisst eine Differentialgleichung der n^{ten} Ordnung, weil das höchste Differentialverhältnis, das in ihr vorkommt, von dieser Ordnung ist. Hiernach wird die allgemeine Form der Differentialgleichung der zweiten Ordnung sein

$$(1) \quad f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0,$$

wofür man auch schreiben kann

$$f(x, y, dx, dy, d^2y) = 0 \quad \text{und} \quad \varphi(x, y, y', y'') = 0.$$

Gelingt es, diese Gleichung zu integrieren, so entsteht eine Differentialgleichung der ersten Ordnung. Kann diese wieder integriert

werden, so erhält man die primitive Gleichung oder das zweite Integral. Da bei jeder dieser Integrationen, der Allgemeinheit des Resultates wegen, eine willkürliche Konstante in die Gleichung treten muss, so wird das zweite Integral einer Differentialgleichung der zweiten Ordnung zwei solche willkürliche Konstante enthalten.

Die Gleichung (1) kann in ihrer vollen Allgemeinheit nicht integriert werden. Die Behandlung beschränkt sich daher auf gewisse spezielle Fälle. Sie entstehen, wenn eine oder zwei oder alle drei der Grössen $x, y, \frac{dy}{dx}$ in der Gleichung fehlen. Die zu integrierenden Gleichungen sind also

$$\begin{aligned} f(y'') &= 0; & f(x, y'') &= 0; & f(y, y'') &= 0; \\ f(y', y'') &= 0; & f(x, y', y'') &= 0; & f(y, y', y'') &= 0; \\ f(x, y, y'') &= 0; & f(x, y, y' y'') &= 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen werden in solche der ersten Ordnung mittels gewisser Substitutionen verwandelt, die im Folgenden, soweit hier nötig, gezeigt werden. Am allgemeinsten wird die Substitution verwertet

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} = p, \text{ woraus } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}.$$

347. Integration der ersten Gleichung. Diese wird sein

$$(1) \quad \frac{d^2y}{dx^2} - a = 0,$$

worin a eine Konstante bezeichnet. Für $dy = p dx$ geht sie über in

$$\frac{dp}{dx} = -a, \text{ oder } dp = -a dx.$$

Folglich erhält man durch Integration

$$p = -ax + c.$$

Führt man hier den Wert von p ein, so wird

$$\frac{dy}{dx} = -ax + c \text{ oder } dy = (-ax + c) dx;$$

daher durch Integration

$$(2) \quad y = -\frac{ax^2}{2} + cx + c'.$$

Diese Gleichung (2) ist das Integral von (1). Denn durch zweimalige Integration von (2) entsteht die Gleichung (1). Das Integral, geometrisch dargestellt, liefert eine Parabel.

Wird $a = 0$ vorausgesetzt, so entsteht die Gleichung einer Geraden.

348. Integration der zweiten Gleichung. Diese Gleichung hat die Form

$$(1) \quad \frac{d^2y}{dx^2} + \varphi(x) = 0.$$

Setzt man $dy = p dx$, so geht sie über in

$$dp = -\varphi(x) dx,$$

woraus man durch Integration erhält

$$p = -\int \varphi(x) dx + c.$$

Gesetzt man finde $\int \varphi(x) dx = f(x)$, so wird, wenn man p durch

$\frac{dy}{dx}$ ersetzt

$$dy = -f(x) dx + c dx$$

und durch Integration

$$(2) \quad y = -\int f(x) dx + cx + c'.$$

Diese Gleichung ist nun das gesuchte Integral von (1).

Beispiel. Es sei $\varphi(x) = -ax$, also $\frac{d^2 y}{dx^2} - ax = 0$, so erhält man nach diesem Verfahren

$$y = \frac{ax^3}{6} + cx + c'.$$

349. Integration der dritten Gleichung. Ihre allgemeine Form wird sein

$$(1) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + a\varphi(y) = 0.$$

Setzt man $\frac{dy}{dx} = p$, also $\frac{d^2 y}{dx^2} = dp$, so wird

$$\frac{dp}{dx} + a\varphi(y) = 0.$$

Da aber $dx = \frac{dy}{p}$, so geht diese Gleichung über in

$$p dp = -a\varphi(y) dy,$$

woraus sich durch Integration ergibt

$$p^2 = -2a \int \varphi(y) dy + c.$$

Bezeichnet man $\int \varphi(y) dy$ mit $f(y)$, so wird

$$p = \sqrt{c - 2af(y)}$$

und indem man p ersetzt durch $\frac{dy}{dx}$

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{c - 2af(y)}},$$

woraus als Integral der Gleichung (1) entsteht

$$(2) \quad x = \int \frac{dy}{\sqrt{c - 2af(y)}} + c'.$$

Beispiel. Es sei $\varphi(y) = \mp b^2 y$, so erhält man folgende in den Anwendungen vorkommende Gleichung

$$(3) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} \mp b^2 y = 0.$$

Durch Einführen von p ergibt sich

$$p dp = \pm b^2 y dy; \quad \frac{p^2}{2} = \pm \frac{b^2 y^2}{2} + c,$$

oder indem man mit 2 multipliziert und die willkürliche Konstante $2c = a^2$ setzt

$$p = \sqrt{a^2 \pm b^2 y^2}$$

und hieraus

$$(4) \quad dx = \frac{dy}{\sqrt{a^2 \pm b^2 y^2}}.$$

Diese Gleichung ist nun zu integrieren. Das Integral hängt aber vom Zeichen der Grösse b^2 ab.

I. Es sei b^2 positiv, so gibt die Integration von (4) nach § 80

$$(5) \quad x = \frac{1}{b} \log(b y + \sqrt{a^2 + b^2 y^2}) + c'.$$

Dieses Integral der gegebenen Gleichung enthält die willkürlichen Konstanten a und c' .

Die Gleichung (5) kann auch auf folgende Form gebracht werden. Man versetze c' auf die linke Seite, multipliziere mit b und gehe von den Logarithmen zu den Zahlen über, so kommt

$$e^{bx - bc'} = by + \sqrt{a^2 + b^2 y^2}.$$

Nun ist aber $e^{bx - bc'} = e^{bx} \cdot e^{-bc'} = m e^x \cdot m' = M e^x$, wo m, m' und M Konstante bezeichnen. Führt man diesen Wert ein, so wird

$$M e^x - by = \sqrt{a^2 + b^2 y^2}$$

und indem man diese Gleichung quadriert und nach y auflöst

$$y = \frac{M}{2b} e^x - \frac{a^2}{2bM} e^{-x}.$$

Bezeichnet man schliesslich die konstanten Faktoren von e^x und e^{-x} mit A und B , so erhält man als gesuchte Gleichung

$$(6) \quad y = A e^x + B e^{-x}.$$

II. Es sei b^2 negativ, so erhält man durch Integration von (4) nach § 78

$$x = \frac{1}{b} \text{Arc sin } \frac{by}{a} + c.$$

Hieraus folgt, indem man die willkürliche Konstante c versetzt, mit b multipliziert und vom Bogen zum Sinus übergeht

$$\sin(bx - bc) = \frac{by}{a}.$$

Allein durch Entwicklung des Sinus erhält man

$$y = \frac{a}{b} (\sin bx \cos bc - \cos bx \sin bc)$$

und hieraus, indem man die konstanten Faktoren von $\sin bx$ und $\cos bx$ mit A und B bezeichnet, als gesuchtes Integral

$$(7) \quad y = A \sin bx + B \cos bx.$$

Die Gleichung (3) kann auch in folgender Weise integriert werden. Man führe eine neue Variable z ein, welche der Bedingung

$$(8) \quad y = e^{\int z dx}$$

entspricht, so wird hieraus zunächst das zweite Differentialverhältnis abzuleiten sein. Dabei beachte man, dass das Differential von $\int z dx$ gleich $z dx$ ist. Man erhält

$$\frac{dy}{dx} = z e^{\int z dx}; \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dz}{dx} e^{\int z dx} + z^2 e^{\int z dx},$$

somit durch Einführen des Wertes von y aus (8) und des vorstehenden von $\frac{d^2 y}{dx^2}$ in (3)

$$\frac{dz}{dx} + z^2 + b^2 = 0.$$

Nun nehme man der Einfachheit wegen z konstant an, so wird in der letzten Gleichung $dz = 0$; also geht sie über in

$$z^2 + b^2 = 0.$$

Hier sind wieder die beiden Zeichen von b^2 aus einander zu halten.

I. Es sei b^2 positiv, so wird $z = \pm b$; daher der Exponent von (8)

$$\int b dx = bx + c \quad \text{und} \quad \int -b dx = -bx + c'.$$

Es entstehen daher zwei Werte für y , die mit y_1 und y_2 bezeichnet seien. Diese Werte sind nach (8)

$$y_1 = e^{bx+c} = A e^x; \quad y_2 = e^{-bx+c'} = B e^{-x}.$$

Jeder dieser Werte ist ein partikuläres Integral von (1), enthält jedoch nur je eine der willkürlichen Konstanten A und B . Daher wird

das Integral die Summe dieser partikulären Integrale sein. Diese Summe entspricht der Gleichung (1) in der That in allgemeiner Weise; daher ist

$$y = A e^x + B e^{-x},$$

eine Gleichung, die genau mit (6) übereinstimmt.

II. Es sei b^2 negativ, so wird $z = \pm b \sqrt{-1}$; daher

$$\int b \sqrt{-1} dx = b x \sqrt{-1} + c \text{ und } \int -b \sqrt{-1} dx = -b x \sqrt{-1} + c'.$$

Die beiden Werte von y sind daher

$$y_1 = e^{bx \sqrt{-1} + c} = m e^{bx \sqrt{-1}}; \quad y_2 = n e^{-bx \sqrt{-1}},$$

worin m und n willkürliche Konstante bezeichnen. Daher ist das allgemeine Integral

$$(9) \quad y = m e^{bx \sqrt{-1}} + n e^{-bx \sqrt{-1}}.$$

Nach dem Moivre'schen Satze (§ 72) ist aber

$$e^{bx \sqrt{-1}} = \cos bx + \sqrt{-1} \sin bx; \quad e^{-bx \sqrt{-1}} = \cos bx - \sqrt{-1} \sin bx.$$

Daher durch Einführen dieser Werte in (9)

$$y = (m + n) \cos bx + (m - n) \sqrt{-1} \sin bx$$

und indem die Faktoren von $\sin bx$ und $\cos bx$ mit A und B bezeichnet werden

$$y = A \sin bx + B \cos bx.$$

Diese Gleichung stimmt mit (7) überein.

350. Integration der vierten Gleichung. Es sollen folgende zwei Formen integriert werden.

I. Gegeben

$$(1) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} = 0,$$

worin a eine Konstante bezeichnet. Führt man $p = \frac{dy}{dx}$ ein, so folgt

$$\frac{dp}{dx} + ap = 0$$

und durch Sonderung der Veränderlichen und nachherige Integration

$$\frac{dp}{p} = -a dx; \quad \log p = c - ax.$$

Geht man von den Logarithmen zu den Zahlen über, so wird

$$p = e^{c-ax}; \quad dy = e^{c-ax} dx,$$

daher durch Integration als gesuchte Gleichung

$$(2) \quad y = -\frac{1}{a} e^{c-ax} + c',$$

worin c und c' die willkürlichen Konstanten bezeichnen.

II. Zum Integrieren vorgelegt

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - a \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = 0.$$

Für $dy = p dx$ geht diese Gleichung über in

$$\frac{dp}{dx} = a \sqrt{1 + p^2} \text{ oder } a dx = \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}};$$

daher durch Integration die Gleichung

$$ax + c = \log(p + \sqrt{1 + p^2}),$$

worin c die willkürliche Konstante bezeichnet. Geht man hier von den Logarithmen zu den Zahlen über, so wird

$$e^{ax+c} = p + \sqrt{1 + p^2}.$$

Man bringe p auf die linke Seite und quadriere, so kommt

$$e^{2ax+2c} - 2pe^{ax+c} = 1$$

und indem man p ersetzt und mit e^{ax+c} dividiert

$$2dy = (e^{ax+c} - e^{-ax-c}) dx.$$

Die Integration dieser Gleichung gibt

$$y = \frac{1}{2a} (e^{ax+c} + e^{-ax-c}) + c'.$$

Setzt man noch $e^c = A$, so wird diese Gleichung als gesuchtes Integral zu

$$y = \frac{1}{2a} \left(A e^{ax} + \frac{1}{A} e^{-ax} \right) + c'.$$

351. Integration der fünften Gleichung. Diese enthält die Grössen x, y' und y'' und habe die Form

$$(1) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + f(x) \frac{dy}{dx} + \varphi(x) = 0.$$

Setzt man $dy = p dx$, so geht sie in folgende der ersten Ordnung über

$$(2) \quad \frac{dp}{dx} + p f(x) + \varphi(x) = 0.$$

Kann man diese Gleichung integrieren und p durch x darstellen, so entsteht ein Ausdruck von der Form $p = F(x, c)$ und daraus, wenn p ersetzt wird, $dy = F(x, c) dx$; daher durch Integration

$$y = \int F(x, c) dx + c'.$$

Diese Gleichung ist das Integral der gegebenen Gleichung (1).

Ist (2) integriert und lässt sich x durch p ausdrücken, so erhalte man die Gleichung $x = F(p, c)$. Daraus entsteht durch Differentiation

$$dx = F'(p, c) dp.$$

Da aber $dx = \frac{dy}{p}$, so geht diese Gleichung über in

$$dy = p F'(p, c) dp.$$

Kann man diese Gleichung integrieren, so eliminiere man aus ihrem Integral und aus dem von (2) die Grösse p und man erhält den Zusammenhang zwischen x und y .

Beispiel. Es sei zu integrieren

$$(3) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + x \left(a + \frac{dy}{dx} \right) = 0.$$

Durch Einführen von p erhält man sofort

$$\frac{dp}{dx} + x(a + p) = 0; \quad \frac{dp}{a + p} = -x dx.$$

Folglich durch Integration

$$\log(a + p) + \log c = -\frac{x^2}{2},$$

wo $\log c$ die willkürliche Konstante bezeichnet. Allein es ist $\log(a + p) + \log c = \log c(a + p)$. Geht man sodann von den Logarithmen zu den Zahlen über, so wird

$$(4) \quad c \left(a + \frac{dy}{dx} \right) = e^{-\frac{x^2}{2}}; \quad c dy = \left(e^{-\frac{x^2}{2}} - ca \right) dx.$$

Lässt sich das Integral von $e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ darstellen, so ist dadurch das Integral der Gleichung (3) gewonnen.

Entwickelt man die Exponentialgrösse nach § 62 in eine Reihe, so kommt

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2 \cdot 4} x^4 - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 8} x^6 + \dots$$

$$\int e^{-\frac{x^2}{2}} dx = x - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 8} \frac{x^7}{7} + \dots$$

Daher gibt die zweite der Gleichungen (4)

$$(5) \quad y = -ax + \frac{1}{c} \left(x - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} - \dots \right) + c'.$$

Diese Gleichung ist in der That das Integral von (3), was sich leicht durch Vornahme der Probe ergibt. Leitet man nämlich aus (5) die Verhältnisse $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2 y}{dx^2}$ ab und setzt ihre Werte in (3), so heben sich die Glieder gegenseitig auf.

352. Integration der sechsten Gleichung. Die Gleichung habe die Form

$$(1) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + A \frac{dy}{dx} + B y = 0.$$

Hierin können nun die Grössen A und B konstant oder auch Funktionen von y sein, dürfen aber x nicht enthalten.

I. Es seien A und B konstant. Da in (1) die Grössen y und ihre Ableitungen in der ersten Potenz vorkommen, nennt man sie eine lineare Gleichung.

Behufs der Integration setze man

$$(2) \quad y = ce^{mx},$$

wo c und m konstante Zahlen bezeichnen, so wird sein

$$\frac{dy}{dx} = cme^{mx}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = cm^2e^{mx}.$$

Setzt man diese Werte in (1), so geht diese Gleichung über in

$$(3) \quad m^2 + Am + B = 0.$$

Hiernach ist die Grösse m in (2) nur abhängig von A und B. Die Wurzeln der Gleichung (3) sind

$$(4) \quad m = -\frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{A^2}{4} - B}.$$

Hier begründet nun die Grösse unter dem Wurzelzeichen drei Fälle.

Erster Fall: $\frac{A^2}{4} - B$ sei positiv. Es entstehen zwei Wurzelwerte für m. Diese seien a und b, so entsprechen ihnen nach (2) auch zwei Werte, die mit y' und y'' bezeichnet seien; daher gibt (2)

$$y' = ce^{ax}; \quad y'' = c'e^{bx}.$$

Jeder dieser Werte leistet der Gleichung (1) Genüge; dasselbe ist auch der Fall mit ihrer Summe

$$(5) \quad y = ce^{ax} + c'e^{bx},$$

welche mit ihren zwei willkürlichen Konstanten c und c' als das allgemeine Integral von (1) zu betrachten ist.

Zweiter Fall: $\frac{A^2}{4} - B$ sei negativ. Es entstehen zwei Wurzelwerte von der Form

$$a + b\sqrt{-1} \quad \text{und} \quad a - b\sqrt{-1}.$$

Daher werden die entsprechenden Werte von y sein

$$y' = ce^{ax} \cdot e^{bx\sqrt{-1}}; \quad y'' = c'e^{ax} \cdot e^{-bx\sqrt{-1}},$$

welche nach § 72 übergehen in

$$y' = c e^{ax} (\cos bx + \sin bx \sqrt{-1});$$

$$y'' = c' e^{ax} (\cos bx - \sin bx \sqrt{-1}).$$

Daher die Summe y' + y'' oder das allgemeine Integral

$$y = e^{ax} [(c + c') \cos bx + (c - c') \sin bx \sqrt{-1}].$$

Bezeichnet man nun die konstanten Faktoren von $\cos bx$ und $\sin bx$ mit M und N , so wird

$$(6) \quad y = e^{ax} (M \cos bx + N \sin bx).$$

Dritter Fall: $\frac{A^2}{4} - B = 0$. Daher wird jede Wurzel der Gleichung (4) $= -\frac{A}{2}$ und die Gleichung (5) gibt als Integral

$$y = (c + c') e^{-\frac{Ax}{2}} = c'' e^{-\frac{Ax}{2}}.$$

Allein hierin kommt nur eine willkürliche Konstante c'' vor. Es kann also dieser Wert von y nicht als das allgemeine Integral von (1) angesehen werden.

Man mache daher statt der Voraussetzung (2) die folgende

$$(7) \quad y = (cx + c') e^{mx},$$

so leistet dieser Wert der Gleichung (1) Genüge. Denn es folgt aus (7)

$$\frac{dy}{dx} = c e^{mx} + (cx + c') m e^{mx},$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 2 c m e^{mx} + (cx + c') m^2 e^{mx}.$$

Führt man diese Werte in (1), so gibt die linke Seite

$$(cx + c') [m^2 + Am + B] + c (2m + A).$$

Da nun der Voraussetzung nach $m = -\frac{A}{2}$, so werden die zwei letzten Klammerfaktoren $= 0$, also wird die ganze linke Seite von (1) zu Null.

Setzt man daher $m = -\frac{A}{2}$ in (7), so wird das allgemeine Integral von (1) sein

$$(8) \quad y = (cx + c') e^{-\frac{Ax}{2}}.$$

II. Es seien A und B Funktionen von y . Man habe

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + f(x) \frac{dy}{dx} + \varphi(y) = 0.$$

Für $dy = p dx$ wird diese Gleichung sein

$$\frac{dp}{dx} + f(x)p + \varphi(y) = 0.$$

Ersetzt man hierin noch dx durch $\frac{dy}{p}$, so erhält man

$$p dp + p f(y) dy + \varphi(y) dy = 0.$$

Kann diese Gleichung integriert werden, so verfähre man damit wie mit der Gleichung in § 351.

Beispiel. Es sei gegeben

$$(1) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} - (a + y) \frac{dy}{dx} = 0,$$

so wird

$$dp = (a + y) dy; \quad p = ay + \frac{y^2}{2} + c$$

und indem p ersetzt wird

$$(2) \quad dx = \frac{2 dy}{y^2 + 2ay + 2c}.$$

Dieses Differential kann wie folgt auf die Form $\frac{dz}{1+z^2}$ gebracht werden. Zunächst ist

$$\begin{aligned} 2c + 2ay + y^2 &= (2c - a^2) + (a + y)^2 \\ &= (2c - a^2) \left[1 + \left(\frac{a + y}{\sqrt{2c - a^2}} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Nun setze man

$$\frac{a + y}{\sqrt{2c - a^2}} = z,$$

so wird

$$dy = dz \sqrt{2c - a^2}.$$

Führt man diese Werte in (2), so folgt

$$dx = \frac{2}{\sqrt{2c - a^2}} \frac{dz}{1 + z^2},$$

also durch Integration als gesuchte Gleichung

$$x = \frac{2}{\sqrt{2c - a^2}} \text{Arc tang } \frac{a + y}{\sqrt{2c - a^2}} + c'.$$

353. Integration der siebenten Gleichung. Diese Gleichung sei

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + ay f(x) = 0.$$

Man setze $y = e^z$, wo z eine Funktion von x sein soll, so wird

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} e^z; \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 z}{dx^2} e^z + \frac{dz^2}{dx^2} e^z$$

und durch Einführen dieser Werte in die gegebene Gleichung

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2} + af(x) = 0.$$

Wenn $\frac{dz}{dx} = p$ angenommen wird, so geht diese Gleichung über in

$$\frac{dp}{dx} + p^2 + af(x) = 0,$$

also in eine solche der ersten Ordnung, die indessen nur in besondern Fällen integriert werden kann.

354. Integration der achten Gleichung. Diese Gleichung habe die Form

$$(1) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} - 2f(x) \frac{dy}{dx} + y \varphi(x) = 0.$$

Man suche sie auf eine der frühern Formen zurückzuführen, was durch verschiedene Substitutionen erreicht wird.

I. Es sei

$$(2) \quad y = uz,$$

in welcher Gleichung u und z von x abhängige Grössen bezeichnen. Durch Differentiation von (2) folgt

$$\frac{dy}{dx} = z \frac{du}{dx} + u \frac{dz}{dx}; \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = z \frac{d^2 u}{dx^2} + 2 \frac{du}{dx} \frac{dz}{dx} + u \frac{d^2 z}{dx^2}.$$

Führt man diese Werte in (1), so kommt

$$(3) \quad u \frac{d^2 z}{dx^2} + 2 \left[\frac{du}{dx} - u f(x) \right] \frac{dz}{dx} + z \left[\frac{d^2 u}{dx^2} - 2 f(x) \frac{du}{dx} + u \varphi(x) \right] = 0.$$

Man wähle nun die Grösse u so, dass sie der Bedingung

$$(4) \quad \frac{du}{dx} - u f(x) = 0$$

entspricht, so verschwindet in (3) das Glied mit dem Faktor $\frac{dz}{dx}$.

Aus (4) aber folgt sofort

$$\frac{du}{u} = f(x) dx; \quad \log u = \int f(x) dx,$$

und daher, wenn von den Logarithmen zu den Zahlen übergegangen wird

$$(5) \quad u = e^{\int f(x) dx}.$$

Durch diesen Wert von u kann nun die Gleichung (3) umgeformt werden. Zunächst folgt aus (5) durch Differentiation

$$\frac{du}{dx} = f(x) e^{\int f(x) dx}; \quad \frac{d^2 u}{dx^2} = [f'(x) + f(x)^2] e^{\int f(x) dx}.$$

Mittels dieser Werte und derjenigen aus (5) und (4) geht Gleichung (3) über in

$$(6) \quad \frac{d^2 z}{dx^2} + [f'(x) - f(x)^2 + \varphi(x)] z = 0,$$

welche Gleichung mit der des § 353 übereinstimmt. Wenn in besondern Fällen die Klammergrösse konstant wird, so stimmt die Gleichung mit der in § 349 überein.

II. Es sei ferner

$$(7) \quad y = u e^v,$$

wo u und v Funktionen von x sein sollen. Die Differentiation von (6) gibt

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= e^v \frac{du}{dx} + e^v u \frac{dv}{dx} \\ \frac{d^2 y}{dx^2} &= e^v \frac{d^2 u}{dx^2} + 2 e^v \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} + e^v u \frac{d^2 v}{dx^2} + e^v u \frac{dv^2}{dx^2}. \end{aligned}$$

Durch Einführen des Wertes von y aus (7) und dessen Ableitungen in (1) kommt

$$(8) \quad \frac{d^2 u}{dx^2} + 2 \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} + u \frac{d^2 v}{dx^2} - 2 f(x) \left(\frac{du}{dx} + u \frac{dv}{dx} \right) + u \left(\frac{d^2 v}{dx^2} + \varphi(x) \right) = 0.$$

Nun bestimme man die Grösse v dadurch, dass man die letzte Klammergrösse zu Null macht. Dies gibt

$$(9) \quad \frac{d^2 v}{dx^2} + \varphi(x) = 0.$$

Diese Gleichung stimmt nun der Form nach mit der in § 348 überein. Man erhalte durch zweimalige Integration von (9)

$$(10) \quad v = F(x),$$

also auch durch Differentiation dieser Gleichung

$$\frac{dv}{dx} = F'(x).$$

Mit Hilfe dieser Werte und der Relation (9) geht nun Gleichung (8) über in

$$(11) \quad \frac{d^2 u}{dx^2} + 2 [F'(x) - f(x)] \frac{du}{dx} + [F''(x) - 2 f(x) F'(x)] u = 0.$$

Diese Gleichung hat die nämliche Form wie (1), allein die Klammergrössen können unter Umständen auf spezielle Formen führen.

Gesetzt man finde aus (11) als Integral $u = X$, so erhält man schliesslich, indem man diesen Wert von u und denjenigen von v aus (10) in (7) einführt, das gesuchte Integral

$$y = X e^{F(x)}.$$

Beispiel. Es sei die Gleichung zu integrieren

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{2n}{x} \frac{dy}{dx} + \left[\frac{n(n-1)}{x^2} + b^2 \right] y = 0.$$

Durch Vergleichung mit (1) ergibt sich

$$f(x) = -\frac{n}{x}; \quad \varphi(x) = \frac{n(n-1)}{x^2} + b^2.$$

Man benutze die erstere der beiden Substitutionen, so wird der Exponent in Gleichung (5)

$$\int f(x) dx = \int -n \frac{dx}{x} = -n \log x.$$

Daher gibt Gleichung (5)

$$u = e^{-n \log x}.$$

Man kann aber diese Exponentialgrösse noch umformen. Nimmt man nämlich die Logarithmen, so wird $\log u = -n \log x = \log x^{-n}$. Daher, indem man wieder zu den Zahlen zurückgeht

$$(12) \quad u = x^{-n}.$$

Zur Bestimmung der Klammergrösse in (6) hat man

$$f'(x) - f(x)^2 + \varphi(x) = \frac{n}{x^2} - \frac{n^2}{x^2} + \frac{n(n-1)}{x^2} + b^2 = b^2.$$

Daher geht Gleichung (6) über in

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + b^2 z = 0,$$

deren Integral nach Formel (7) des § 349 ist

$$(13) \quad z = A \sin bx + B \cos bx.$$

Da aber nach (2) sein soll $y = uz$, so wird durch Multiplikation der Gleichungen (12) und (13) das gesuchte Integral sein

$$y = x^{-n} (A \sin bx + B \cos bx).$$

355. Ableitung des allgemeinen Integrals aus einem partikulären.
Für die Differentialgleichung der zweiten Ordnung

$$(1) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + f(x) \frac{dy}{dx} + y \varphi(x) = 0$$

sei ein partikuläres Integral gefunden, d. h. ein solches, das der Gleichung (1) Genüge leistet und nur eine willkürliche Konstante enthält.

Es sei P dieses partikuläre Integral, so wird P eine Funktion von x sein, so beschaffen, dass, wenn die Grössen P , dP und d^2P in (1) eingesetzt werden, der Ausdruck links sich auf Null reduziert.

Nun sei aus P ein allgemeines Integral zu (1) abzuleiten. Man gehe von der Voraussetzung aus, es lasse sich darstellen durch

$$(2) \quad y = Pz,$$

worin der Faktor z eine Funktion von x bezeichnet, welche bestimmt werden soll. Durch Differentiation von (2) erhält man

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= P \frac{dz}{dx} + z \frac{dP}{dx}, \\ \frac{d^2 y}{dx^2} &= P \frac{d^2 z}{dx^2} + 2 \frac{dP}{dx} \frac{dz}{dx} + z \frac{d^2 P}{dx^2}. \end{aligned}$$

Führt man diese Werte von y , $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ in (1) ein, so kommt

$$z \left(\frac{d^2P}{dx^2} + f(x) \frac{dP}{dx} + P \varphi(x) \right) + P \frac{d^2z}{dx^2} + \left(2 \frac{dP}{dx} + P f(x) \right) \frac{dz}{dx} = 0.$$

Hier ist nun die erste Klammergrösse $= 0$, weil P ein Integral von (1) ist, ihr also Genüge leistet. Daher muss sein

$$P \frac{d^2z}{dx^2} + \left(2 \frac{dP}{dx} + P f(x) \right) \frac{dz}{dx} = 0.$$

Man setze nun $\frac{dz}{dx} = p$, so geht diese Gleichung über in

$$P \frac{dp}{dx} + \left(2 \frac{dP}{dx} + P f(x) \right) p = 0$$

und durch Sonderung der Veränderlichen in

$$\frac{dp}{p} + 2 \frac{dP}{P} + f(x) dx = 0.$$

Die Integration dieser Gleichung gibt

$$\log p + 2 \log P - \log k = - \int f(x) dx,$$

worin $\log k$ die Konstante der Integration bezeichnet. Das Integral rechts könne ausgeführt werden; man bezeichne es mit $F(x)$, so wird sein

$$(3) \quad \log \frac{p P^2}{k} = - \int f(x) dx = F(x).$$

Geht man von den Logarithmen zu den Zahlen über und ersetzt p durch $\frac{dz}{dx}$, so wird

$$dz = k P^{-2} e^{F(x)} dx$$

und daher der gesuchte Wert

$$(4) \quad z = k \int P^{-2} e^{F(x)} dx,$$

der nur noch mit P multipliziert werden muss, um das allgemeine Integral zu geben.

Beispiel. Für die Gleichung des § 352

$$(5) \quad \frac{d^2y}{dx^2} + A \frac{dy}{dx} + B y = 0,$$

worin A und B konstant sind, wurde das partikuläre Integral

$$(6) \quad P = c e^{-\frac{A x}{2}}$$

für den Fall gefunden, dass $\frac{A^2}{4} - B = 0$ ist. Es soll aus diesem Werte (6) das allgemeine Integral von (5) abgeleitet werden.

Hier ist $f(x) = A$; daher nach (3)

$$F(x) = - \int A dx = - Ax; \quad e^{F(x)} = e^{-Ax}.$$

Ferner folgt aus (6)

$$P^{-2} = \frac{1}{c^2} e^{Ax}.$$

Mithin nach (4)

$$z = k \int \frac{1}{c^2} e^{Ax} \cdot e^{-Ax} dx = \frac{k}{c^2} x + c'.$$

Das gesuchte allgemeine Integral nach (2) ist daher

$$y = \left(\frac{k}{c^2} x + c' \right) e^{-\frac{Ax}{2}}.$$

Es stimmt dasselbe mit dem in § 352 in Formel (7) angegebenen überein.

356. Integration nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten.

Wie die Differentialgleichungen der ersten Ordnung, so können auch solche höherer Ordnung durch Reihen integriert werden. Man wendet hierzu vorzugsweise die Methode der unbestimmten Koeffizienten an.

Es sei folgende Gleichung zu integrieren

$$(1) \quad f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0.$$

Man setze voraus, das Integral habe die Form

$$(2) \quad y = A_0 x^n + A_1 x^{n+1} + A_2 x^{n+2} + A_3 x^{n+3} + \dots,$$

worin sowohl die Vorzahlen $A, A_1, A_2, \dots$ als auch der Exponent n als konstant, jedoch als noch unbestimmt vorausgesetzt werden. Die Differentiation von (2) gibt

$$(3) \quad \frac{dy}{dx} = n A_0 x^{n-1} + (n+1) A_1 x^n + (n+2) A_2 x^{n+1} + \dots$$

$$(4) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = n(n-1) A_0 x^{n-2} + (n+1)n A_1 x^{n-1} + (n+2)(n+1) A_2 x^n + \dots$$

Führt man nun die Werte von $y, \frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ aus (2), (3) und (4) in (1), so entsteht eine Gleichung, welche es möglich macht, die Konstanten bis auf zwei oder eine zu bestimmen. Die unbestimmt verbleibenden Konstanten sind dann diejenigen der Integration. Verbleiben zwei, so ist das Resultat das allgemeine Integral von (1); bleibt nur eine Konstante unbestimmt, so entsteht ein partikuläres Integral

I. Die gegebene Differentialgleichung sei

$$(5) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + a x y = 0.$$

Führt man hier die obigen Werte von y , $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2 y}{dx^2}$ ein, so kommt

$$0 = n(n-1)A_0 x^{n-2} + (n+1)nA_1 x^{n-1} + (n+2)(n+1)A_2 x^n \\ + (n+3)(n+2)A_3 x^{n+1} + (n+4)(n+3)A_4 x^{n+2} + \dots \\ + aA_0 \quad + aA_1$$

Da die linke Seite dieser Gleichung fehlt, so müssen die Vorfaktoren aller Potenzen von x auf der rechten Seite zu Null werden.

Nimmt man auch $n=0$ an, so geben zunächst die beiden ersten Glieder

$$0 \cdot A_0 = 0; \quad 0 \cdot A_1 = 0.$$

Daher bleiben A_0 und A_1 unbestimmt. Aus den folgenden Gliedern rechts ergeben sich die Bedingungen

$$2 \cdot 1 A_2 = 0; \quad \text{somit} \quad A_2 = 0.$$

$$3 \cdot 2 A_3 + a A_0 = 0 \quad A_3 = -\frac{a A_0}{2 \cdot 3}.$$

$$4 \cdot 3 A_4 + a A_1 = 0 \quad A_4 = -\frac{a A_1}{3 \cdot 4}.$$

$$5 \cdot 4 A_5 + a A_2 = 0 \quad A_5 = 0.$$

$$6 \cdot 5 A_6 + a A_3 = 0 \quad A_6 = +\frac{a^2 A_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6}.$$

$$7 \cdot 6 A_7 + a A_4 = 0 \quad A_7 = +\frac{a^2 A_1}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}.$$

$$8 \cdot 7 A_8 + a A_5 = 0 \quad A_8 = 0.$$

$$9 \cdot 8 A_9 + a A_6 = 0 \quad A_9 = -\frac{a^3 A_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9}.$$

$$10 \cdot 9 A_{10} + a A_7 = 0 \quad A_{10} = -\frac{a^3 A_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10}.$$

Setzt man diese Werte von n, A_0, A_1 etc. in (2), so erhält man als gesuchtes allgemeines Integral

$$y = A_0 \left(1 - \frac{ax^3}{2 \cdot 3} + \frac{a^2 x^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} - \frac{a^3 x^9}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} + \dots \right) \\ + A_1 \left(x - \frac{ax^4}{3 \cdot 4} + \frac{a^2 x^7}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} - \frac{a^3 x^{10}}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10} + \dots \right).$$

Die Grössen A_0 und A_1 sind hier die Konstanten der Integration.

II. Es sei ferner die Gleichung zu integrieren

$$(6) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{a}{x} \frac{dy}{dx} + by = 0.$$

Setzt man die Werte von y , $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2 y}{dx^2}$ aus (2), (3) und (4) hier ein, so wird

$$0 = n(n-1)A_0 \left| x^{n-2} + (n+1)nA_1 \left| x^{n-1} + (n+2)(n+1)A_2 \left| x^n + \dots \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \begin{array}{c} naA_0 \\ (n+1)aA_1 \\ (n+2)aA_2 \\ bA_0 \end{array} \right| \right| \right|$$

Hier müssen wieder die Vorzahlen der Potenzen von x gleich Null sein. Das erste Glied gibt

$$n(n-1+a)A_0 = 0.$$

Soll daher A_0 unbestimmt bleiben, so muss entweder $n=0$ oder $n=1-a$ sein. Für diese Werte von n wird der Koeffizient des zweiten Gliedes: für den ersten $aA_1=0$, für den zweiten $(2-a)A_1=0$. In beiden Fällen muss daher $A_1=0$ sein.

Für $n=0$ bleibt also A_0 unbestimmt und A_1 wird zu Null. Hierfür geben die folgenden Glieder

$$\begin{aligned} 2(1+a)A_2 + bA_0 &= 0; \text{ folgl. } A_2 = -\frac{bA_0}{2(1+a)} \\ 3(2+a)A_3 + bA_1 &= 0 & A_3 &= 0 \\ 4(3+a)A_4 + bA_2 &= 0 & A_4 &= \frac{b^2 A_0}{2 \cdot 4(1+a)(3+a)} \\ 5(4+a)A_5 + bA_3 &= 0 & A_5 &= 0 \\ 6(5+a)A_6 + bA_4 &= 0 & A_6 &= -\frac{b^3 A_0}{2 \cdot 4 \cdot 6(1+a)(3+a)(5+a)} \\ & & & \dots \end{aligned}$$

Für diese Werte geht (2) über in

$$(7) \quad y = A_0 \left(1 - \frac{bx^2}{2(1+a)} + \frac{b^2 x^4}{2 \cdot 4(1+a)(3+a)} - \frac{b^3 x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6(1+a)(3+a)(5+a)} + \dots \right).$$

Da diese Gleichung nur eine unbestimmte Konstante A_0 enthält, so ist sie ein partikuläres Integral von (6). Zu einem solchen wird das vorstehende Verfahren immer führen, welchen Wert von n man auch annehmen mag. Es zeigt dies, dass das Integral noch andere Glieder enthalten muss als solche, wie sie Gleichung (2) voraussetzt.

Das allgemeine Integral soll nun aus (7) nach dem in § 355 angegebenen Verfahren bestimmt werden. Dort ist mit P das partikuläre Integral bezeichnet. Daher kann man aus (7) ableiten

$$P^{-2} = A_0^{-2} (1 + \alpha x^2 + \beta x^4 + \dots),$$

worin $\alpha, \beta, \dots$ konstante Faktoren sind, die sich durch a und b ausdrücken lassen. Ferner ist im vorliegenden Fall

$$f(x) = \frac{a}{x}; \quad F(x) = - \int \frac{a \, dx}{x} = -a \log x;$$

daher

$$e^{F(x)} = e^{-a \log x} = x^{-a}.$$

Da aber allgemein

$$z = k \int P^{-2} e^{F(x)} \, dx,$$

so wird

$$z = k A_0^{-2} \int (1 + \alpha x^2 + \beta x^4 + \dots) x^{-a} \, dx,$$

$$z = k A_0^{-2} \left(\frac{x^{1-a}}{1-a} + \alpha \frac{x^{3-a}}{3-a} + \beta \frac{x^{5-a}}{5-a} + \dots \right) + c'.$$

Setzt man diesen Wert von z in die Gleichung $y = Pz$, so wird das gesuchte allgemeine Integral sein

$$y = \left[1 - \frac{bx^2}{2(1+a)} + \frac{b^2 x^4}{2 \cdot 4 (1+a)(3+a)} - \dots \right] \\ \times \left[c \left(\frac{x^{1-a}}{1-a} + \alpha \frac{x^{3-a}}{3-a} + \dots \right) + c' \right].$$

IX. Aufgaben über die Kettenlinie.

357. Allgemeine Gesetze der Kettenlinie. Wenn eine vollkommen biegsame Kette an beiden Endpunkten befestigt wird, so senkt sie sich vermöge der Gewichte, welche an ihren Teilen hängen und bildet eine Kurve, welche Kettenlinie genannt wird. Sie liegt in einer Vertikalebene, welche durch die Aufhängepunkte geht. Die Form der Kurve wird bedingt durch das Gesetz, nach welchem die Gewichte an der Kette über ihre Länge verteilt sind.

Es sei CAB (Fig. 125) eine solche Kettenlinie, C einer der Aufhängepunkte und A der tiefste Punkt. Man lege durch letztern Punkt in der Ebene der Kurve zwei rechtwinkelige Achsen Ax, Ay , wovon Ax horizontal ist und bezeichne mit

x, y die Koordinaten DE und AE eines Kurvenpunktes D ,

h, b dasselbe für den Aufhängepunkt C ,

α, φ die Winkel, welche die Kurve in den Punkten C und D mit der horizontalen Richtung bildet und

P, Q die Spannungen der Kette in den Punkten C und D , in der Richtung der Tangenten an die Kurve wirksam.

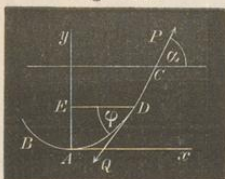
Man zerlege die Kräfte P und Q in die horizontalen Seitenkräfte $P \cos \alpha, Q \cos \varphi$ und die vertikalen $P \sin \alpha, Q \sin \varphi$. Damit das Kurvenstück CD keine horizontale Bewegung mache, müssen die Kräfte,

welche an dessen Endpunkten in horizontaler Richtung wirken, einander gleich sein, so dass man hat

$$(1) \quad Q \cos \varphi = P \cos \alpha.$$

Da hierin P und α konstant sind, so wird auch das Produkt $Q \cos \varphi$ konstant sein, wo auch der Angriffspunkt D der Kraft Q gedacht wird. Hieraus folgt, dass die Spannung der Kette in horizontaler Richtung konstant ist. Rückt der Punkt D abwärts, so wird φ kleiner, also auch die Spannung Q kleiner. Im tiefsten Punkt ist $\varphi = 0$, also $Q = P \cos \alpha$. Die Spannung der Kette nimmt somit von oben nach unten ab und wird im tiefsten Punkt ein Minimum.

Fig. 125.



Die Kraft $P \sin \alpha$, welche das Kurvenstück DC in C aufwärts zieht, muss gleich sein der Kraft $Q \sin \varphi$, welche in D abwärts wirkt, vermehrt um die Last G des Kurvenstückes CD . Diese Last G setzt sich zusammen aus dem Eigengewicht des Kurvenstückes und dem Gewicht, das ausserdem an ihm hängt oder auf dasselbe drückt. Hiernach muss sein

$$(2) \quad Q \sin \varphi + G = P \sin \alpha.$$

Rückt der Punkt D der Kurve entlang abwärts, so vergrössert sich G , während φ , also auch $\sin \varphi$ abnimmt. Im tiefsten Punkt ist $\varphi = 0$ und $G = P \sin \alpha$. Rückt umgekehrt D aufwärts, so nimmt G ab und $Q \sin \varphi$ zu. Für den Punkt C ist $G = 0$ und $Q = P$.

Die Voraussetzungen, welche im Folgenden gemacht werden, beziehen sich ausschliesslich auf die Grösse G .

358. Die parabolische Kettenlinie. Das Gewicht G sei der Länge der horizontalen Projektion des Kurvenstückes CD (Fig. 125), also der Abscissendifferenz $h - x$ proportional.

Die Gesetze dieser Kurve sind bereits in § 132 behandelt. Es entsteht eine Parabel.

359. Die gemeine Kettenlinie. Das Gewicht G sei der Länge des Kurvenstückes proportional, mithin gleichförmig über die Kette verteilt.

Auch dieser Fall ist in § 132 behandelt; doch soll hier eine etwas allgemeinere Darstellung eingereicht werden. Es seien (Fig. 125)

s, s' die Längen der Kurvenstücke AD und CD und

q das Gewicht der Kette für jede Längeneinheit derselben, also qs und qs' die Gewichte der Stücke AD und CD .

Daher wird hier $G = qs'$. Für diesen Wert geht (2) von § 357 über in

$$(1) \quad Q \sin \varphi + qs' = P \sin \alpha.$$

Da die Länge der Kette $s + s'$, also ihr Gewicht $q(s + s')$ ist, so erhält man für den tiefsten Punkt

$$(2) \quad q(s + s') = P \sin \alpha,$$

und für den Punkt D, indem man diese Gleichung von (1) abzieht

$$(3) \quad Q \sin \varphi = q s,$$

d. h. die Vertikalkraft $Q \sin \varphi$ in D ist gleich dem Gewicht des Kurvenstückes AD.

Dividiert man (3) durch Gleichung (1) des § 357, so folgt

$$(4) \quad \tan \varphi = \frac{q s}{P \cos \alpha}.$$

Der Abkürzung wegen setze man

$$(5) \quad \frac{q}{P \cos \alpha} = m$$

in (4) und berücksichtige, dass $\tan \varphi = \frac{dy}{dx}$, so geht (5) über in

$$(6) \quad \frac{dy}{dx} = m s.$$

In dieser Gleichung kommen die drei Variablen x , y und s vor. Man kann aber die letztere durch die beiden ersten ausdrücken durch die Relation $ds^2 = dx^2 + dy^2$. Zu diesem Zwecke differentiire man Gleichung (6), indem man dx als konstant ansieht und ersetze ds , so folgt

$$(7) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = m \sqrt{dx^2 + dy^2} = m dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}.$$

Nun setze man $\frac{dy}{dx} = p$, also auch $\frac{d^2 y}{dx^2} = dp$ und $dx = \frac{dy}{p}$, so wird

$$\frac{p dp}{\sqrt{1 + p^2}} = m dy.$$

Das Integral dieser Gleichung ist nach § 80

$$(8) \quad \sqrt{1 + p^2} = m y + C.$$

Für $y=0$ wird $\varphi=0$, also auch $p=0$; daher die Konstante $C=1$. Hiernach wird die letzte Gleichung zu

$$(9) \quad \sqrt{1 + p^2} = m y + 1.$$

Die Ordinate des Aufhängepunktes C werde mit b bezeichnet, so wird für diesen Punkt $p = \tan \alpha$ und die letzte Gleichung zu

$$\sqrt{1 + \tan^2 \alpha} = m b + 1$$

oder indem man den Wert von m aus (6) einführt

$$P \cos \alpha \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} = q b + P \cos \alpha.$$

Allein es ist $\cos \alpha \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} = 1$; daher wird

$$(10) \quad b = \frac{P}{q} (1 - \cos \alpha).$$

Man quadriere (9), so kommt

$$p^2 = m^2 y^2 + 2my.$$

Ersetzt man hierin p durch seinen Wert und zieht die Wurzel aus, so ist

$$(11) \quad dx = \pm \frac{1}{m} \frac{dy}{\sqrt{y^2 + \frac{2y}{m}}}.$$

Allein in dieser Gleichung darf für den Bogen AC von beiden Zeichen nur das obere genommen werden, weil dy mit dx zunimmt. Lässt man also das untere Zeichen weg und integriert nach § 308, Formel (2), indem man daselbst $A = 0$ nimmt, so wird

$$x = \frac{1}{m} \log \left(\frac{1}{m} + y + \sqrt{y^2 + \frac{2y}{m}} \right) + C.$$

Für den tiefsten Punkt wird $x = 0$ und $y = 0$, also auch

$$0 = \frac{1}{m} \log \frac{1}{m} + C.$$

Durch Subtraktion dieser Gleichung von der vorigen wird

$$(12) \quad x = \frac{1}{m} \log \left(1 + my + m \sqrt{y^2 + \frac{2y}{m}} \right).$$

Diese Gleichung erscheint aufgelöst in Hinsicht x . Man kann aber auch y durch x ausdrücken. Zu diesem Zwecke multipliziere man mit m und gehe von den Logarithmen zu den Zahlen über, so ist

$$e^{mx} = 1 + my + m \sqrt{y^2 + \frac{2y}{m}},$$

oder auch

$$\frac{e^{mx} - 1}{m} - y = \sqrt{y^2 + \frac{2y}{m}}.$$

Quadriert man diese Gleichung, so folgt

$$\left(\frac{e^{mx} - 1}{m} \right)^2 = \frac{2y}{m} e^{mx}$$

und daraus die gesuchte Gleichung

$$y = \frac{1}{2m} (e^{mx} + e^{-mx} - 2),$$

welche genau mit der in § 132 übereinstimmt.

Setzt man $y = b = \frac{P}{q} (1 - \cos \alpha)$ aus (10) in (12), so wird x zur Abscisse des Aufhängepunktes, welche mit h bezeichnet werde, so folgt nach einigen Reduktionen

$$h = \frac{P \cos \alpha}{q} \log \left(\frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} \right).$$

Setzt man die beiden Werte von $\frac{dy}{dx}$ aus (6) und (11) einander gleich, so folgt

$$s = \sqrt{y^2 + \frac{2y}{m}} = \sqrt{y^2 + \frac{P \cos \alpha}{q} y}.$$

Der Ausdruck für den Krümmungshalbmesser ρ einer ebenen Kurve ist nach § 291

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Setzt man hierin die Werte von $\frac{dy}{dx}$ aus (6) und von $\frac{d^2y}{dx^2}$ aus (7), so folgt unmittelbar

$$\rho = \frac{1}{m} + m s^2.$$

Für $s=0$ erhält man als Wert des Krümmungshalbmessers im tiefsten Punkt

$$\rho' = \frac{1}{m} = \frac{P \cos \alpha}{q}.$$

Setzt man für s die Länge der Kurve vom Aufhängepunkt bis zum tiefsten Punkt, also nach (3) die Grösse $\frac{P \sin \alpha}{q}$, so erhält man als Krümmungshalbmesser im Aufhängepunkt

$$\rho'' = \frac{P}{q \cos \alpha}.$$

Daher die Proportion

$$\rho' : \rho'' = \cos^2 \alpha : 1.$$

360. Form einer Kette, bei welcher der Querschnitt proportional der Spannung sich ändert. Die Kette habe nur ihr eigenes Gewicht zu tragen, soll aber in allen Querschnitten einen gleichen Grad der Sicherheit gegen das Zerreißen besitzen; also wird jede Flächeneinheit der Querschnitte gleich stark gespannt sein müssen. Es seien

z, z' die Querschnitte der Kette in C und D (Fig. 125),

q das Gewicht der Volumeneinheit der Kette,

so müssen der Voraussetzung nach die Querschnitte in C und D sich verhalten wie die Spannungen P und Q. Daher

$$z' = z \frac{Q}{P}.$$

Allein aus der Gleichung (1) des § 257 folgt $Q : P = \cos \alpha : \cos \varphi$; folglich wird

$$(1) \quad z' = z \frac{\cos \alpha}{\cos \varphi}.$$

Wir nehmen hier den Aufhängepunkt C als Anfangspunkt der Koordinaten, lassen x zunehmen um dx , so rückt der Querschnitt in D abwärts um den Weg ds' . Längs dieses Weges kann der Querschnitt z' als konstant betrachtet werden; es entsteht daher während dieses Vorganges das Volumenelement $z' ds'$. Dieses ist daher mit Rücksicht auf (1) gleich

$$z \frac{\cos \alpha}{\cos \varphi} ds'.$$

Allein es ist $ds'^2 = dx^2 + dy^2$ und $\cos \varphi = \frac{dx}{ds'}$; daher das Element dv des Volumens

$$(2) \quad dv = z \cos \alpha \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2} \right) dx.$$

Multipliziert man den Wert (2) mit q , so erhält man das Gewicht des Volumenelementes; integriert man sodann, so entsteht das Gewicht des Kettenstückes CD von der Länge s' . Dieses Gewicht ist aber nichts anderes als die Grösse G der Gleichung (2) des § 357. Daher wird diese Gleichung im vorliegenden Fall

$$Q \sin \varphi + qz \cos \alpha \int \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2} \right) dx = P \sin \alpha.$$

Versetzt man das zweite Glied von links nach rechts und dividirt mit $Q \cos \varphi = P \cos \alpha$, so wird

$$(3) \quad \tan \varphi = \frac{P \sin \alpha - qz \cos \alpha \int \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2} \right) dx}{P \cos \alpha}.$$

Für $\varphi = 0$ wird

$$P \sin \alpha = qz \cos \alpha \int_0^h \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2} \right) dx$$

zum Gewicht des Kettenstückes vom Aufhängepunkt bis zum tiefsten Punkt.

Setzt man $\tan \varphi = \frac{dy}{dx}$ in (3) und differentiirt man sodann, so folgt, da $P \sin \alpha$ und $P \cos \alpha$ konstant sind

$$(4) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{qz}{P} \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2} \right) dx.$$

Nun setze man

$$(5) \quad \frac{qz}{P} = m \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dx} = p,$$

so wird $\frac{d^2y}{dx} = dp$; daher geht (5) über in

$$\frac{dp}{1+p^2} = -m dx.$$

Hieraus folgt durch Integration

$$\text{Arc tang } p = -mx + C.$$

Für $x=h$ ist aber $p=0$; daher gibt die letzte Gleichung

$$0 = -mh + C.$$

Man erhält daher durch Subtraktion

$$\text{Arc tang } p = m(h-x).$$

Geht man vom Bogen zur Tangente über, so gibt diese Gleichung

$$(6) \quad p = \text{tang } m(h-x).$$

Für $x=0$ wird aber $p = \text{tang } \alpha$; daher

$$\text{tang } \alpha = \text{tang } mh$$

und hieraus $\alpha = mh$ oder

$$(7) \quad m = \frac{\alpha}{h}.$$

Setzt man die beiden Werte von m aus (5) und (7) einander gleich, so folgt

$$(8) \quad \alpha = \frac{qhz}{P}.$$

Allein hz ist das Volumen eines Prismas von der Länge h und dem Querschnitt z , also qhz das Gewicht desselben. Das Verhältnis dieses Gewichtes zur grössten Kettenspannung P gibt daher den Bogen α .

Für $p = \frac{dy}{dx}$ gibt Gleichung (6)

$$(9) \quad dy = \text{tang } m(h-x) dx.$$

Um diese Gleichung zu integrieren, beachte man, dass

$$\int \text{tang } x dx = \int \frac{\sin x dx}{\cos x} = -\log \cos x,$$

und da $\text{tang } m(h-x) dx = -\frac{1}{m} \text{tang } m(h-x) d(-mx)$, so gibt (9)

$$y = \frac{1}{m} \log \cos m(h-x) + C.$$

Für $x=h$ wird $y=b$; daher die Konstante $C=b$. Hierfür wird die letzte Gleichung

$$b-y = -\frac{1}{m} \log \cos m(h-x),$$

oder auch, indem man den Wert von m aus (7) einführt

$$(10) \quad b - y = -\frac{h}{\alpha} \log \cos \frac{h-x}{h} \alpha.$$

Dies ist die gesuchte Gleichung der Kurve. Darin ist $\frac{h-x}{h}$ ein echter Bruch, dessen Wert für $x=0$ auf 1 steigt. Daher ist der Cosinus zu nehmen von einem Winkel, der kleiner als α ist. Der Logarithmus davon ist negativ, weshalb $b-y$ positiv erscheint, wie es sein soll.

Für $x=0$ wird auch $y=0$. Hierfür gibt Gleichung (10)

$$(11) \quad \alpha = -\frac{h}{b} \log \cos \alpha.$$

Durch Gleichsetzen der beiden Werte von α aus (8) und (11) gelangt man zu folgender Relation

$$\log \cos \alpha = -\frac{q b z}{P},$$

welche ähnlich wie (8) aufgefasst werden kann.

Sind b und h gegeben, so kann aus (11) die Grösse α berechnet und hierauf mit Hilfe von (10) die Kurve konstruiert werden.

Um das Volumen v der Kette zu finden, hat man nur Gleichung (2) zu integrieren. Zu diesem Zwecke führt man vorher den Wert von $\frac{dy}{dx}$ aus (9) ein, so folgt

$$(12) \quad v = z \cos \alpha \int [1 + \tan^2 m (h-x)] dx.$$

Nun ist $\int \tan^2 x dx = \tan x - x$, wie man sich durch Differentiation überzeugt, daher auch

$$\int \tan^2 m (h-x) dx = -\frac{1}{m} \tan m (h-x) - x.$$

Daher gibt (12)

$$v = -\frac{z \cos \alpha}{m} \tan m (h-x) + C.$$

Für $x=0$ wird auch $v=0$; daher

$$0 = -\frac{z \cos \alpha}{m} \tan m h + C$$

und durch Subtraktion, indem man noch m mittels (7) ersetzt

$$v = z h \frac{\cos \alpha}{\alpha} \left[\tan \alpha - \tan \frac{h-x}{h} \alpha \right].$$

Dehnt man x bis h aus, so erhält man das Volumen der Kette vom Aufhängepunkt bis zum tiefsten Punkt. Dieses ist daher

$$v' = zh \frac{\sin \alpha}{\alpha}.$$

Zur Bestimmung der Länge benutzt man die Gleichung

$$ds' = dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}},$$

von der schon bei Ableitung von (2) Gebrauch gemacht worden. Führt man den Wert von $\frac{dy}{dx}$ aus (9) ein, so folgt

$$ds' = \sqrt{1 + \tan^2 m(h-x)} dx = \frac{dx}{\cos m(h-x)}.$$

Allein es ist nach § 309, Formel (2)

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x},$$

Daher auch

$$s' = -\frac{1}{2m} \log \frac{1 + \sin m(h-x)}{1 - \sin m(h-x)} + C.$$

Für $x=0$ wird auch $s'=0$; mithin wird

$$0 = -\frac{1}{2m} \log \frac{1 + \sin mh}{1 - \sin mh} + C$$

und durch Subtraktion

$$s' = \frac{1}{2m} \left[\log \frac{1 + \sin mh}{1 - \sin mh} - \log \frac{1 + \sin m(h-x)}{1 - \sin m(h-x)} \right].$$

Ersetzt man m durch seinen Wert aus (7), so erhält man als gesuchte Bogenlänge der Kurve

$$s' = \frac{h}{2\alpha} \left[\log \frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha} - \log \frac{1 + \sin \frac{h-x}{h} \alpha}{1 - \sin \frac{h-x}{h} \alpha} \right].$$

Für $x=h$ entsteht hieraus die Länge s'' der Kurve vom Aufhängepunkt bis zum tiefsten Punkt. Daher

$$s'' = \frac{h}{2\alpha} \log \frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}.$$

Setzt man den Wert von $\frac{dy}{dx}$ aus (9) und denjenigen von $\frac{d^2y}{dx^2}$ aus (4) in den Ausdruck für den Krümmungshalbmesser (§ 291), so folgt unmittelbar für irgend einen Kurvenpunkt

$$\rho = \frac{h}{\alpha} \sqrt{1 + \tan^2 \frac{h-x}{h} \alpha};$$

Dividiert man diese Gleichung durch $Q \cos \varphi = P \cos \alpha$ (§ 357), so folgt

$$(2) \quad \tan \varphi = \frac{q}{P \cos \alpha} \int (b - y) dx.$$

Für $\varphi = 0$ muss auch die Fläche D A F H sich auf Null reduzieren, also $\int (b - y) dx = 0$ sein; für $\varphi = \alpha$ aber dehnt sich diese Fläche über A C F aus. Daher muss sein

$$(3) \quad \text{Fläche A C F} = \int_0^h (b - y) dx.$$

Man setze in Gleichung (2)

$$(4) \quad \tan \varphi = \frac{dy}{dx} \quad \text{und} \quad m = \frac{q}{P \cos \alpha},$$

so geht sie über in

$$\frac{dy}{dx} = m \int (b - y) dx.$$

Die Differentiation dieser Gleichung gibt, da dx konstant ist

$$(5) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = m(b - y) dx.$$

Führt man $\frac{dy}{dx} = p$, also $\frac{d^2 y}{dx^2} = dp$ ein und ersetzt dx durch $\frac{dy}{p}$, so wird

$$p dp = m(b - y) dy.$$

Folglich durch Integration

$$\frac{p^2}{2} = m \left(by - \frac{y^2}{2} \right).$$

Für $y = 0$ wird auch $p = 0$; daher ist die Konstante der Integration weggelassen. Man multipliziere mit 2, ziehe die Wurzel aus und ersetze p durch $\frac{dy}{dx}$, so folgt

$$(6) \quad dx \sqrt{m} = \frac{dy}{\sqrt{2by - y^2}},$$

welche Gleichung folgendes Integral liefert

$$x \sqrt{m} = \text{Arc sin } \frac{y - b}{b} + C.$$

Für $x = h$ wird $y = b$. Hierfür gibt die letzte Gleichung

$$h \sqrt{m} = C.$$

Daher durch Subtraktion

$$(h - x) \sqrt{m} = \text{Arc sin } \frac{b - y}{b},$$

oder auch, wenn man vom Bogen zum Sinus übergeht

$$(7) \quad b - y = b \sin(h - x) \sqrt{m}.$$

Für den tiefsten Punkt wird $x = 0$ und $y = 0$; ihm entspricht also die Gleichung $1 = \sin h \sqrt{m}$, welcher der Bogen $\frac{\pi}{2}$ Genüge leistet.

Es muss daher sein

$$(8) \quad h \sqrt{m} = \frac{\pi}{2}.$$

Führt man den Wert von m aus (4) hier ein, so ergibt sich als Spannung des Tuches in horizontaler Richtung

$$P \cos \alpha = q \left(\frac{2h}{\pi} \right)^2.$$

Setzt man aber den Wert von $\sqrt{m}$ aus (8) in (7), so erhält man als gesuchte Gleichung der Kurve

$$(9) \quad b - y = b \sin \left(\frac{h - x}{h} \cdot \frac{\pi}{2} \right).$$

In der Figur ist $h - x = CH$ und $b - y = DH$. Nimmt man den Punkt C zum Anfangspunkt der Koordinaten und bezeichnet die genannten Werte mit x' und y' , so geht Gleichung (9) über in

$$(10) \quad y' = b \sin \frac{x'}{h} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Aus (6) folgt, indem man $\frac{dy}{dx}$ durch $\tan \varphi$ ersetzt

$$(11) \quad \tan \varphi = \frac{\pi}{2h} \sqrt{2by - y^2}$$

und hieraus für $y = b$, da φ in α übergeht

$$\tan \alpha = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{b}{h}.$$

Diese letzten Werte können ebenso aus (9) oder (10) abgeleitet werden.

Reduziert man die obere Grenze des Integrals (3) auf x , so erhält man als Ausdruck für die Fläche ADHF

$$(12) \quad \int_0^x (b - y) dx = b \int_0^x \sin \left(\frac{h - x}{h} \cdot \frac{\pi}{2} \right) dx = \frac{2bh}{\pi} \cos \left(\frac{h - x}{h} \cdot \frac{\pi}{2} \right)$$

und hieraus als Wert der ganzen Fläche ACF

$$\int_0^h (b - y) dx = \frac{2bh}{\pi}.$$

Nun ist $b h$ das um die Fläche beschriebene Rechteck; folglich die Fläche $\frac{\pi}{2} = 0,636 \dots$ von diesem Rechteck.

Das Gewicht der Masse, welche das Tuch auf eine Länge $= 1$, der Wand nach gemessen, zu tragen hat, wird erhalten, wenn man diese Fläche mit q multipliziert. Mithin wird z. B. das Gewicht der Masse CDH nach (12) sein

$$q \int_x^h (b - y) dx = q \frac{2 b h}{\pi} \left[1 - \cos \left(\frac{h - x}{h} \frac{\pi}{2} \right) \right].$$

Die Länge der Kurve ergibt sich wie folgt. Es ist das Bogenelement

$$ds = dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}.$$

Aus (9) folgt aber durch Differentiation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\pi b}{2 h} \cos \left(\frac{h - x}{h} \frac{\pi}{2} \right).$$

Folglich wird das Bogenelement

$$(13) \quad ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{\pi b}{2 h} \right)^2 \cos^2 \left(\frac{h - x}{h} \frac{\pi}{2} \right)}.$$

Um dieses Differential zu integrieren, wende man die Methode der Quadratur an, indem man Flächenelemente von der Form $u dx$ an einander reiht und zwar mit der Grundlinie dx und der Höhe $u =$ der Wurzelgrösse in (13). Dadurch entsteht eine Fläche, ähnlich derjenigen auf S. 346, mit der Grundlinie h , zwei Endordinaten und einer Kurve. Die erste Endordinate entspricht der Abscisse $x = 0$ und

hat einen Wert $= 1$; die letzte wird $= \sqrt{1 + \left(\frac{\pi b}{2 h} \right)^2}$ für $x = h$.

Der Abscisse $x = \frac{1}{2} h$ entspricht ein Bogen $= \frac{\pi}{4}$; allein es ist

$\cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1}{2}}$; also wird diese Ordinate $= \sqrt{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi b}{2 h} \right)^2}$. Diese

Ordinate ist nun das arithmetische Mittel aus den Höhen aller Flächenelemente. Denn geht man von dieser Ordinate aus um eine Grösse

$h' < \frac{1}{2} h$ rückwärts und vorwärts, so trifft man auf Ordinaten, die um

gleichviel abweichen von der mittleren und zwar im positiven und negativen Sinne, was sich aus der Eigenschaft der Funktion leicht nachweisen lässt. Daher ist die Fläche gleich einem Rechteck mit der

Grundlinie h und der Höhe $\sqrt{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi b}{2 h} \right)^2}$; also das Integral von (12), d. h. die Kurvenlänge vom Aufhängepunkt bis zum tiefsten Punkt

$$s = h \sqrt{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi b}{2 h} \right)^2}.$$

Der Ausdruck für den Krümmungshalbmesser einer Kurve ist

$$\varrho = \frac{ds^3}{dx d^2y}.$$

Nun gibt Gleichung (5) $d^2y = m(b-y) dx^2$; daher wird

$$\varrho = \frac{1}{m(b-y)} \left(\frac{ds}{dx} \right)^3.$$

Da aber gemäss der Figur $dx = ds \cos \varphi$, so ist auch

$$(14) \quad \varrho = \frac{1}{m(b-y) \cos^3 \varphi}.$$

Hier kann nun $\cos \varphi$ nach (11) durch $\tan \varphi$ ausgedrückt werden. Es ist nämlich

$$\cos^2 \varphi = \frac{1}{1 + \tan^2 \varphi} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\pi}{2h} \right)^2 (2by - y^2)}.$$

Mittels dieses Wertes und dem von m aus (8) erhält man aus (14) den gesuchten Krümmungshalbmesser

$$\varrho = \left(\frac{2h}{\pi} \right)^2 \frac{\left[1 + \left(\frac{\pi}{2h} \right)^2 (2by - y^2) \right]^{\frac{3}{2}}}{b-y}.$$

Für $y=0$ erhält man als Krümmungshalbmesser der Kurve im tiefsten Punkt

$$\varrho' = \frac{1}{b} \left(\frac{2h}{\pi} \right)^2,$$

und für $y=b$ als Krümmungshalbmesser im Aufhängepunkt $\varrho = \infty$.

II. Die Last reiche um a über die Ebene CF hinauf. Dadurch wird die Höhe des Flächenelementes in $DH = a + b - y$ und daher die Fläche über dem Bogen $AD = \int (a + b - y) dx$. Also geht Gleichung (5) über in

$$\frac{d^2y}{dx} = m(a + b - y) dx$$

und Gleichung (6) in

$$dx \sqrt{m} = \frac{dy}{\sqrt{2(a+b)y - y^2}},$$

deren Integral ist

$$x \sqrt{m} = \text{Arc sin } \frac{y - a - b}{a + b} + C.$$

Für $x=0$ wird $y=0$ und die letzte Gleichung gibt

$$0 = -\frac{\pi}{2} + C.$$

Folglich durch Subtraktion

$$x \sqrt{m} = \frac{\pi}{2} - \text{Arc sin } \frac{a+b-y}{a+b}.$$

Versetzt man $\frac{\pi}{2}$ und geht vom Bogen zum Sinus über, so wird

$$\frac{a+b-y}{a+b} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \sqrt{m} \right),$$

woraus als gesuchte Gleichung der Kurve folgt

$$(15) \quad a+b-y = (a+b) \cos x \sqrt{m}.$$

Für $x=h$ wird $y=b$. Dafür gibt (15)

$$(16) \quad \cos h \sqrt{m} = \frac{a}{a+b},$$

eine Gleichung, aus welcher $\sqrt{m}$ bestimmt werden kann. Dabei entspricht dem Bogen $h \sqrt{m}$ eine Anzahl Grade. Man kann nun für numerische Rechnungen die Grösse $\sqrt{m}$ in Graden ausdrücken und diese mit x multiplizieren, so erhält man die Anzahl Grade, deren Cosinus zu benutzen ist, um mittels (15) die entsprechende Ordinate zu erhalten. Da ferner

$$\text{tang } \varphi = \sqrt{m} \sqrt{2(a+b)y - y^2},$$

so ergibt sich zur Bestimmung des Bogens α die Gleichung

$$(17) \quad \text{tang } \alpha = \sqrt{m} \sqrt{2(a+b)b}.$$

Die Fläche, vertikal über dem Bogen AD gelegen, ist unter Benützung von (15)

$$\int_0^x (a+b-y) dx = (a+b) \int_0^x \cos x \sqrt{m} dx = \frac{a+b}{\sqrt{m}} \sin x \sqrt{m},$$

und daher die Gewichte der Massen über den Bogen AD und AC:

$$(18) \quad q \frac{a+b}{\sqrt{m}} \sin x \sqrt{m} \quad \text{und} \quad q \frac{a+b}{\sqrt{m}} \sin h \sqrt{m}.$$

Das Bogenelement der Kurve ist mit Rücksicht auf (15)

$$ds = dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = dx \sqrt{1 + (a+b)^2 m \sin^2 x \sqrt{m}}.$$

Daher das Integral nach dem auf S. 419 angewendeten Verfahren

$$s = h \sqrt{1 + (a+b)^2 m \sin^2 \frac{h \sqrt{m}}{2}},$$

Aus den Werten von $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ erhält man als Krümmungshalbmesser der Kurve

$$\varrho = \frac{[1 + m(2(a+b)y - y^2)]^{\frac{3}{2}}}{m(a+b-y)}.$$

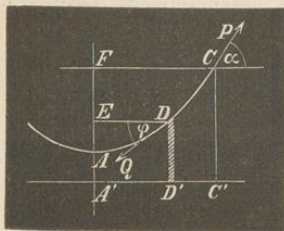
Für $a=0$ gehen die unter II. aufgestellten Gleichungen über in die bezüglich der Voraussetzung I.

362. Form eines von unten belasteten Tuches. Das Tuch sei wie in der vorigen Aufgabe angebracht, die Last jedoch von unten angehängt, so dass dieselbe bis auf eine wagerechte Ebene $A'C'$ (Fig. 127) reiche. Statt dass die homogene Masse den Raum $ADCF$ über dem Tuch ausfülle, nehme sie jetzt den Raum $CDAA'C'$ ein, wo CC' und AA' als vertikale Ebenen zu denken sind.

Im übrigen gelte die bisherige Bezeichnung. Es seien also A der Anfangspunkt, $AE=y$ und $ED=x$ die Koordinaten des Kurvenpunktes D und Abstand $AA'=a$. Man ziehe DD' vertikal, so ist $DD'=a+y$. Geht sodann x in $x+dx$ über, so beschreibt DD' das Flächenelement $(a+y)dx$ vom Gewicht $q(a+y)dx$; folglich ist das Gewicht der Last $ADD'A'=q\int(a+y)dx$. Daher nach (2) des § 357

$$Q \sin \varphi = q \int (a+y) dx.$$

Fig. 127.



Dividiert man mit Gleichung (1) des § 357, so folgt

$$(1) \quad \tan \varphi = \frac{q}{P \cos \alpha} \int (a+y) dx.$$

Setzt man wieder zur Abkürzung

$$m = \frac{q}{P \cos \alpha}$$

und schreibt $\frac{dy}{dx}$ für $\tan \varphi$, so geht (1)

über in folgende Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = m \int (a+y) dx,$$

woraus durch Vornahme der Differentiation folgt

$$(2) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = m(a+y) dx.$$

Für $p = \frac{dy}{dx}$, also $dx = \frac{dy}{p}$ gibt Gleichung (2)

$$p dp = m(a+y) dy.$$

Mithin durch Integration

$$p^2 = m(2ay + y^2).$$

Die Konstante der Integration fällt weg, weil für $y=0$ auch $p=0$ wird.

Diese Gleichung gibt, wenn p ersetzt wird

$$(3) \quad dx \sqrt{m} = \frac{dy}{\sqrt{2ay + y^2}},$$

also auch, indem man integriert

$$(4) \quad x \sqrt{m} = \log(a + y + \sqrt{2ay + y^2}) + C.$$

Zur Bestimmung der Konstanten C nehme man $x=0$, so wird $y=0$; daher

$$0 = \log a + C,$$

und durch Subtraktion folgende Gleichung der Kurve

$$(5) \quad x \sqrt{m} = \log \frac{a + y + \sqrt{2ay + y^2}}{a}.$$

Für $y=b$ wird $x=h$. Hierfür liefert (5) zur Bestimmung der Grösse m die Gleichung

$$(6) \quad \sqrt{m} = \frac{1}{h} \log \frac{a + b + \sqrt{2ab + b^2}}{a}.$$

Diese Gleichung kann auch auf folgende Form gebracht werden

$$(7) \quad y = \frac{a}{2} [e^{x\sqrt{m}} + e^{-x\sqrt{m}} - 2].$$

Aus (3) folgt, da $\frac{dy}{dx} = \tan \varphi$ ist, $\tan \varphi = \sqrt{m} \sqrt{2ay + y^2}$ und daher für die Aufhängestelle C

$$(8) \quad \tan \alpha = \sqrt{m} \sqrt{(2a + b)b},$$

eine Relation, mittels welcher der Winkel α bestimmt werden kann.

Die Fläche ADD'A' wird unter Benützung von (7)

$$(9) \quad \int (a + y) dx = \frac{a}{2} \int (e^{x\sqrt{m}} + e^{-x\sqrt{m}}) dx = \frac{a}{2\sqrt{m}} (e^{x\sqrt{m}} - e^{-x\sqrt{m}}).$$

Die Konstante der Integration ist $=0$, weil für $x=0$ die rechte und linke Seite der Gleichung verschwinden.

Diese Fläche kann aber auch noch wie folgt gefunden werden. Setzt man den Wert von dx aus (3) in den Ausdruck $(a + y) dx$ für das Flächenelement, so wird dieses gleich

$$(10) \quad \frac{(a + y) dy}{\sqrt{m} \sqrt{2ay + y^2}}.$$

Nun ist nach § 308

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{\sqrt{2ay + y^2}} &= \log(a + y + \sqrt{2ay + y^2}), \\ \int \frac{y dy}{\sqrt{2ay + y^2}} &= \sqrt{2ay + y^2} - \int \frac{a dy}{\sqrt{2ay + y^2}}. \end{aligned}$$

Folglich das Integral von (10) als gesuchte Fläche

$$(11) \quad \int (a + y) dx = \frac{1}{\sqrt{m}} \sqrt{2ay + y^2},$$

ein Ausdruck, der etwas einfacher erscheint als der obige.

Hiernach wird das Gewicht der am Bogen A C angehängten Last sein

$$(12) \quad P \sin \alpha = \frac{q}{V_m} \sqrt{2ab + b^2}.$$

Für den Krümmungshalbmesser der Kurve ergibt sich mit Hilfe von (2) und (3)

$$\varrho = \frac{[1 + m(2ay + y^2)]^{\frac{3}{2}}}{m(a + y)}.$$

Im tiefsten Punkt ist $y=0$; daher der Krümmungshalbmesser daselbst

$$(13) \quad \varrho' = \frac{1}{am}.$$

Für den Aufhängepunkt ist $y=b$; daher der bezügliche Krümmungshalbmesser

$$\varrho'' = \frac{[1 + m(2ab + b^2)]^{\frac{3}{2}}}{m(a + b)}.$$

Für den speziellen Fall, da $a=0$ ist, d. h. die untere Begrenzung der aufgehängten Masse durch den tiefsten Punkt der Kurve geht, wird nach (8)

$$\tan \alpha = b \sqrt{m};$$

ferner nach (12) das am Bogen A C hängende Gewicht

$$P \sin \alpha = \frac{bq}{V_m}$$

und endlich als bemerkenswert der Krümmungshalbmesser ϱ' im tiefsten Punkt nach (13) unendlich gross, d. h. dieser Punkt und die beiden benachbarten Punkte, welche um $+dx$ und $-dx$ von ihm abstehen, liegen in gerader Linie.

Dagegen werden die Gleichungen (5), (6), (7) und (9) unbrauchbar. Um eine allgemeine Gleichung der Kurve zu erhalten, welche auch auf den genannten speziellen Fall angewendet werden kann, bestimme man die Konstante C in (4) so, dass man $x=h$ und $y=b$ einführt. Dadurch geht (4) über in

$$h \sqrt{m} = \log(a + b + \sqrt{2ab + b^2}) + C$$

und daher durch Subtraktion die gesuchte Gleichung

$$(x - h) \sqrt{m} = \log \frac{a + y + \sqrt{2ay + y^2}}{a + b + \sqrt{2ab + b^2}}.$$

Wird hierin $a=0$ angenommen, so erhält man als Gleichung der Kurve für den speziellen Fall

$$(x - h) \sqrt{m} = \log\left(\frac{y}{b}\right).$$

Es werde die Kurve CDA durch eine starre Linie ersetzt und um CF als Achse gedreht, so dass sie vertikal über CF zu liegen komme. Dabei gehe die Last mit, so wird sie von oben die Kurve zusammen drücken und zwar mit den gleichen Kräften, mit welchen sie vorher verstreckt wurde. Die Kurve bildet dann die Drucklinie eines Gewölbes.

X. Aufgaben über die elastische Linie.

363. Krümmung der elastischen Linie im allgemeinen. Wird ein prismatischer Stab von elastischer Beschaffenheit gebogen, so dehnen sich die Fasern desselben auf der einen Seite aus und verkürzen sich auf der andern. Wo die Ausdehnungen in die Verkürzungen übergehen, liegt eine neutrale Schicht, welche keine Längenänderung erfährt. Die neutrale Schicht ist eine Cylinderfläche. Ein ebener Schnitt durch diese Fläche, senkrecht auf den Kanten der Cylinderfläche, heisst elastische Linie.

In den § 202 und 203 sind die Biegungsverhältnisse betrachtet, welche an einem Stabe von rechtwinkeligem und kreisförmigem Querschnitt eintreten, der am einen Ende eingespannt und am andern durch eine Kraft verbogen wird, welche senkrecht zur Längsrichtung des Stabes einwirkt. Es wurden daselbst folgende Gleichungen abgeleitet.

$$\text{für den rechtwinkelligen Stab} \quad . . . \quad \rho P x = \frac{E}{12} b h^3,$$

$$\text{für den Stab mit Querschnitt Fig. 71} \quad \rho P x = \frac{E}{12} b (h^3 - h'^3),$$

$$\text{für den cylindrischen Stab} \quad \quad \rho P x = \frac{E}{64} \pi d^4,$$

$$\text{für den hohlen Cylinder} \quad \quad \rho P x = \frac{E}{64} \pi (d^4 - d'^4)$$

und die Grössen rechts Momente der Elastizität genannt. Da diese nur vom Modul E und den Querschnittsdimensionen abhängen, so bleiben ihre Werte dieselben, wie auch der Stab in Anspruch genommen wird. Daher gilt auch das in diesen Gleichungen enthaltene Gesetz allgemein für irgend einen Teil eines gebogenen Stabes mit irgend einem Querschnitt, wenn nur unter ρ der Krümmungshalbmesser der elastischen Linie an einem bestimmten Punkte und unter Px das statische Moment der Kraft verstanden wird, das diese Krümmung veranlasst. Dabei kann Px auch als eine Summe von statischen Momenten aufgefasst werden, deren Glieder gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben.

Das Moment der Elastizität kann für jeden Querschnitt, der auf eine gesetzmässige Weise geformt ist, abgeleitet werden. Wir setzen dasselbe daher im Folgenden als bekannt voraus, bezeichnen es mit M und erhalten

$$(1) \quad \rho \cdot Px = M.$$

Nun ist der Krümmungshalbmesser der Kurve nach § 291

$$(2) \quad \varrho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Allein in den Anwendungen kommen nur sehr schwache Krümmungen vor; daher ist die Grösse $\frac{dy}{dx}$ im Zähler rechts gegenüber der Einheit sehr klein. Unter dieser Voraussetzung entwickle man diesen Zähler nach dem binomischen Satze in eine Reihe und vernachlässige die Glieder von der vierten oder zweiten Potenz der Grösse $\frac{dy}{dx}$ an. Für letzteres erhält man aus (2) als Annäherungsausdruck

$$(3) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\varrho}.$$

364. Elastische Linien eines Stabes, der in horizontaler Lage am einen Ende eingespannt und am andern belastet ist. Es sei AB (Fig. 128) die elastische Linie, A die Befestigungsstelle und B der Aufhängepunkt der Last P.

Man lege durch B zwei rechtwinkelige Achsen Bx und By in der Ebene der Kurve, wovon die erstere horizontal, die letztere vertikal aufwärts gerichtet ist. Es seien

x, y die Koordinaten BD und CD eines Kurvenpunktes C,

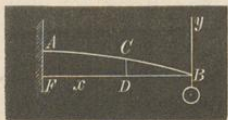
L, u dasselbe für den Kurvenpunkt A,

α, φ die Neigung der Kurve in B und C zur Achse Bx.

Denkt man sich den Stabteil AC von veränderlicher Länge fest eingemauert, ohne dass er seine Form ändert, so ragt das Stück CB über die Mauer hervor und wird somit gedreht um C mittels der Kraft P am Hebelsarm x, also mit dem Momente Px. Daher gilt unmittelbar die Gleichung (1) des vorigen Paragraphen, woraus folgt

$$(1) \quad \varrho = \frac{M}{Px}.$$

Fig. 128.



Für $x=0$ wird $\varrho = \infty$, d. h. der Stab ist am freien Ende geradlinig. Wächst x, so nimmt ϱ ab; die Krümmung nimmt also von B nach A hin zu. Der kleinste Krümmungshalbmesser wird erhalten, wenn man L für x in (1) einführt.

Setzt man den Wert von ϱ aus (1) in Gleichung (3) des letzten Paragraphen, so folgt

$$(2) \quad M \frac{d^2y}{dx^2} = Px.$$

Nun ist aber

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{dx} d \left(\frac{dy}{dx} \right).$$

Wenn aber x zunimmt, nimmt $\frac{dy}{dx}$ ab; deshalb haben die Differentiale dieser zwei Grössen entgegengesetzte Zeichen. Man wird deshalb in der Gleichung (2) das Zeichen rechts ändern, so dass man hat

$$(3) \quad M \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = -Px.$$

Multipliziert man mit dx und integriert, so kommt

$$(4) \quad M \frac{dy}{dx} = -\frac{Px^2}{2} + C.$$

Für $x=L$ wird wegen der horizontalen Lage des Stabes an der befestigten Stelle $\frac{dy}{dx}=0$, Hierfür erhält man aus (4)

$$0 = -\frac{PL^2}{2} + C.$$

Zieht man diese Gleichung von der vorigen ab, so kommt

$$(5) \quad M \frac{dy}{dx} = \frac{P}{2} (L^2 - x^2).$$

Multipliziert man mit dx und integriert, so erhält man als Gleichung der elastischen Linie

$$(6) \quad My = \frac{P}{2} \left(L^2 x - \frac{x^3}{3} \right).$$

Die Konstante der Integration ist weggelassen, weil für $x=0$ auch $y=0$ ist.

Setzt man $x=L$ in (6), so wird $y=u$. Mithin hat man zur Bestimmung der grössten Senkung

$$u = \frac{PL^3}{3M}.$$

Da $\frac{dy}{dx} = \tan \varphi$, so folgt aus (5)

$$\tan \varphi = \frac{P}{2M} (L^2 - x^2); \quad \tan \alpha = \frac{PL^2}{2M}.$$

365. Stab der vorigen Aufgabe, der noch eine über seine Länge gleichförmig verteilte Last zu tragen hat. Es gelte die bisherige Bezeichnung und Fig. 129.

Die Last, welche über die Länge gleichförmig verteilt ist, sei per Längeneinheit $=p$; so ist die Last, welche auf dem Kurvenstück BC liegt $=px$, da x für BC genommen werden kann. Den Angriffspunkt dieser Last px kann man in der Mitte von BC voraussetzen; also ist das statische Moment dieser Last in Bezug auf C als Drehpunkt $=\frac{1}{2} px^2$;

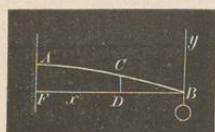
somit das gesammte statische Moment, welches den Stab um C zu drehen strebt $= Px + \frac{1}{2} p x^2$. Setzt man dasselbe an die Stelle von Px in die Gleichung (1) des § 363, so kommt

$$\varrho = \frac{M}{Px + \frac{1}{2} p x^2}.$$

Wenn $x=0$, so wird $\varrho = \infty$; also bleibt der Stab am freien Ende geradlinig. Die grösste Krümmung nimmt er am befestigten Ende. Für diese Stelle wird der Krümmungshalbmesser

$$\varrho = \frac{M}{PL + \frac{1}{2} p L^2}.$$

Fig. 129.



Wenn $p=0$, so werde $\varrho = \varrho'$; wenn $P=0$, so werde $\varrho = \varrho''$; deshalb wird sein

$$\varrho' = \frac{M}{PL}; \quad \varrho'' = \frac{M}{\frac{1}{2} p L^2}.$$

Setzt man die Last pL , welche gleichförmig über die ganze Länge verteilt ist, gleich der Last P am freien Ende voraus, so wird

$$\varrho' = \frac{1}{2} \varrho'',$$

d. h. es wird die Krümmung des Stabes am befestigten Ende zweimal grösser, wenn die Last am freien Ende wirkt, als wenn sie gleichförmig über die ganze Länge verteilt ist.

Vertauscht man in Gleichung (3) des vorigen Paragraphen das Moment $Px + \frac{1}{2} p x^2$ mit Px , so erhält man als Differentialgleichung der Kurve

$$(1) \quad M \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = -Px - \frac{1}{2} p x^2.$$

Multipliziert man mit dx und integriert, so kommt

$$M \frac{dy}{dx} = -\frac{Px^2}{2} - \frac{px^3}{6} + C.$$

Für $x=L$ wird $\frac{dy}{dx} = 0$; hierfür gibt die letzte Gleichung

$$0 = -\frac{PL^2}{2} - \frac{pL^3}{6} + C.$$

Durch Subtraktion folgt

$$(2) \quad M \frac{dy}{dx} = \frac{P}{2} (L^2 - x^2) + \frac{p}{6} (L^3 - x^3).$$

Multipliziert man mit dx und integriert, so erhält man als gesuchte Gleichung der elastischen Linie

$$(3) \quad My = \frac{P}{2} \left(L^2 x - \frac{x^3}{3} \right) + \frac{p}{6} \left(L^3 x - \frac{x^4}{4} \right).$$

Die Konstante der Integration ist weggelassen, weil für $x=0$ auch $y=0$ wird.

Für die grösste Senkung $u=AF$ des Stabes erhält man aus (3), indem man $x=L$ und $y=u$ setzt

$$(4) \quad u = \frac{PL^3}{3M} + \frac{pL^4}{8M}.$$

Ist keine Last am freien Ende aufgehängt, so wird $P=0$. Ist dagegen $p=0$, so gehen alle vorstehenden Formeln in die betreffenden der letzten Aufgabe über.

Wenn die gleichförmig verteilte Last gleich der am freien Ende ist, so wird $pL=P$ und somit die Senkung aus (4)

$$u = \frac{PL^3}{3M} + \frac{PL^3}{8M} = \frac{11}{24} \frac{PL^3}{M}.$$

Beträgt somit die Senkung 8 gleiche Teile, wenn nur die Last am freien Ende hängt, so bewirkt die ebenso grosse jedoch gleichförmig verteilte Last für sich allein 3 solcher Teile.

Soll die Last pL gleiche Senkung wie P hervorbringen, so muss nach (4) sein

$$\frac{PL^3}{3M} = \frac{pL^4}{8M}, \text{ also } P = \frac{3}{8} pL,$$

d. h. es muss in diesem Falle die Last am freien Ende $\frac{3}{8}$ sein von der gleichförmig verteilten Last.

Es sei α der Winkel, welchen die Tangente an die Kurve am freien Ende mit der horizontalen Richtung bildet, so ist $\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx}$ für $x=0$. Für diese Werte erhält man aus (2)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{PL^2}{2M} + \frac{pL^3}{6M}.$$

Für $p=0$ werde $\alpha=\alpha'$ und für $P=0$ werde $\alpha=\alpha''$. Hierfür erhält man aus der letzten Gleichung

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{PL^2}{2M}; \quad \operatorname{tg} \alpha'' = \frac{pL^3}{6M}.$$

Setzt man nun $pL=P$ voraus, so wird

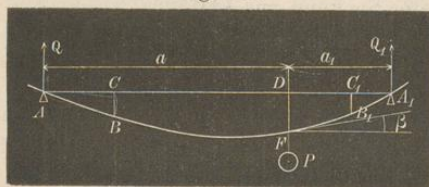
$$\operatorname{tg} \alpha' = 3 \operatorname{tg} \alpha''.$$

Also wird die Tangente des Winkels α am freien Ende dreimal grösser in dem Fall, wenn die Last an diesem Ende hängt, als wenn dieselbe Last gleichförmig über die ganze Länge verteilt wird.

366. Stab, der von zwei gleich hoch gelegenen Stützen getragen und durch eine gleichförmig verteilte und eine konzentrierte Last gebogen wird. Die Stützen A, A' (Fig. 130), an den Enden des Stabes angebracht, liegen in einer horizontalen Linie ADA'. Es seien:

- P die in F konzentrierte Last in den horizontalen Abständen $AD = a$,
 $A'D = a'$ von den Stützen,
 p die über den Stab gleichförmig verteilte Last per Längeneinheit, das Gewicht des Stabes inbegriffen,
 x, y die rechtwinkligen Koordinaten AC, BC eines Kurvenpunktes B,
 x', y' die Koordinaten A'C', B'C' eines Kurvenpunktes B',
 u die Senkung DF des Aufhängepunktes,
 β der Winkel, welchen die Tangente an die Kurve durch den Aufhängepunkt mit der horizontalen Richtung AA' bildet,
 $L = a + a'$ die Entfernung der Stützen,
 Q, Q' die Pressungen auf die Stützen A, A'.

Fig. 130.



Denkt man sich die Stütze in A weg und den Druck, welchen sie auszuhalten hat, durch die Kraft Q, welche aufwärts wirkt, ersetzt, so entsteht ein Hebel, der seinen Drehpunkt in A' hat. Daran wirkt Q am Hebelsarm L, P am Hebelsarm a' und pL

am Hebelsarm $\frac{1}{2}L$. Da nun das statische Moment von Q gleich sein muss der Summe der Momente der abwärts wirkenden Kräfte, so erhält man

$$QL = Pa' + \frac{1}{2}pL^2.$$

$$(1) \quad Q = P \frac{a'}{L} + \frac{1}{2}pL.$$

Ganz ebenso findet man

$$(2) \quad Q' = P \frac{a}{L} + \frac{1}{2}pL.$$

Hiernach kann man die Kräfte Q, Q' als bekannt betrachten.

Denkt man sich das Kurvenstück A'B eingemauert und AB hervorragend, so wirkt am letztern die Kraft Q aufwärts am Hebelsarm x und die Last $p \cdot AB$ oder annähernd px am Hebelsarm $\frac{1}{2}x$ abwärts. Somit ist das statische Moment dieser beiden Kräfte in Beziehung auf B als Drehpunkt $= Qx - \frac{1}{2}px^2$. Setzt man diesen Wert statt Px in die Formel (1) des § 363, so kommt

$$(3) \quad \varrho = \frac{M}{Qx - \frac{1}{2}px^2}.$$

Ganz ebenso findet man für das andere Kurvenstück

$$(4) \quad \varrho' = \frac{M}{Q'x' - \frac{1}{2} p x'^2}.$$

Für $x=0$ und $x'=0$ erhält man $\varrho=\infty$ und $\varrho'=\infty$, d. h. die elastische Linie ist an ihren Enden geradlinig.

Lässt man x' wachsen bis $x'=a'$, so nimmt ϱ' fortwährend ab. Also hat das kürzere Kurvenstück seine stärkste Biegung im Aufhängepunkt.

Lässt man x wachsen bis $x=a$, so nimmt ϱ bis zu einer gewissen Stelle hin ab. Um die Abscisse dieser Stelle zu finden, bezeichne man den Nenner $Qx - \frac{1}{2} p x^2$ des Wertes von ϱ in (3) mit z , so erhält man durch Differentiation

$$(5) \quad \frac{dz}{dx} = Q - px; \quad \frac{d^2z}{dx^2} = -p.$$

Wenn nun ϱ ein Minimum werden soll, so muss z ein Maximum sein. Dies ist nach (5) der Fall für

$$\frac{dz}{dx} = Q - px = 0,$$

woraus folgt

$$x = \frac{Q}{p} = \frac{Pa'}{pL} + \frac{L}{2}.$$

Dieser Wert von x ist grösser als $\frac{L}{2}$. Also wird die Stelle der stärksten Biegung nie zwischen der Stütze A und der Mitte der Kurve liegen. Sie wird aber zwischen die Mitte der Kurve und den Aufhängepunkt des Gewichtes P kommen, wenn dieser Wert von x kleiner als a ist. Sie wird in den Aufhängepunkt fallen, wenn dieser Wert von x gleich oder grösser als a wird.

An der Stelle des Stabes, wo der Krümmungshalbmesser der elastischen Linie ein Minimum ist, werden die Fasern auf der konvexen Seite am stärksten verstreckt und auf der konkaven am stärksten zusammengedrückt; es befindet sich also hier der gefährliche Querschnitt.

Bei einer schwachen Biegung des Stabes hat man auch hier wie in den beiden vorhergehenden Aufgaben nach (3) von § 363 zu setzen

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\varrho}.$$

Deshalb aus (3) und (4), da dx und $\frac{dy}{dx}$ sich entgegengesetzt ändern

$$(6) \quad M \frac{d^2y}{dx^2} = -Qx + \frac{1}{2} p x^2.$$

$$(7) \quad M \frac{d^2y'}{dx'^2} = -Q'x' + \frac{1}{2} p x'^2.$$

Multipliziert man (6) mit dx und integriert, so kommt

$$(8) \quad M \frac{dy}{dx} = -\frac{Qx^2}{2} + \frac{Px^3}{6} + C.$$

Setzt man hierin $x=a$, so wird $\frac{dy}{dx} = -\operatorname{tg} \beta$. Das negative Zeichen ist hier deshalb zu nehmen, weil der Aufhängepunkt F zwischen der Stütze A' und dem tiefsten Punkt der Kurve liegt, weil also die Ordinate y vom tiefsten Punkt an gegen F hin abnimmt, während x wächst. Für den Punkt F wird daher die Gleichung (8)

$$-M \operatorname{tg} \beta = -\frac{Qa^2}{2} + \frac{Pa^3}{6} + C.$$

Zieht man diese Gleichung von (8) ab, so folgt

$$(9) \quad M \frac{dy}{dx} = \frac{Q}{2}(a^2 - x^2) - \frac{P}{6}(a^3 - x^3) - M \operatorname{tg} \beta.$$

Wird hier mit dx multipliziert und sodann integriert, so kommt

$$(10) \quad My = \frac{Q}{2}\left(a^2x - \frac{x^3}{3}\right) - \frac{P}{6}\left(a^3x - \frac{x^4}{4}\right) - Mx \operatorname{tg} \beta.$$

Ganz ebenso findet man aus (7)

$$(11) \quad My' = \frac{Q'}{2}\left(a'^2x' - \frac{x'^3}{3}\right) - \frac{P'}{6}\left(a'^3x' - \frac{x'^4}{4}\right) + Mx' \operatorname{tg} \beta.$$

Die Formeln (10) und (11) sind die Gleichungen der Kurvenäste AF und $A'F$.

Setzt man $x=a$ in (10) und $x'=a'$ in (11), so werden y und y' zu u . Deshalb erhält man

$$(12) \quad u = \frac{Qa^3}{3M} - \frac{Pa^4}{8M} - a \operatorname{tg} \beta; \quad u = \frac{Q'a'^3}{3M} - \frac{Pa'^4}{8M} + a' \operatorname{tg} \beta.$$

Aus diesen beiden Werten von u folgt

$$(13) \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{Qa^3 - Q'a'^3}{3ML} - \frac{Pa^4 - Pa'^4}{8ML}.$$

Vermöge dieser Gleichung ist die Richtung der Kurve im Aufhängepunkt bestimmt. Wenn $a=a'$, so wird auch $Q=Q'$ und $\operatorname{tg} \beta=0$; d. h. wenn die Last P in der Mitte zwischen den Stützpunkten aufgehängt ist, so fällt der tiefste Punkt mit dem Aufhängepunkt zusammen.

Wenn aber a grösser ist als a' , so erhält man den tiefsten Punkt aus der Gleichung (9), indem man $\frac{dy}{dx}=0$ setzt. Dies gibt

$$0 = \frac{Q}{2}(a^2 - x^2) - \frac{P}{6}(a^3 - x^3) - M \operatorname{tg} \beta.$$

Der Wert von x , welchen diese Gleichung liefert, ist die Abscisse des tiefsten Punktes.

Wenn der Aufhängepunkt des Gewichtes P in der Mitte zwischen den Stützpunkten liegt, so sind die Kurvenäste zu beiden Seiten der grössten Ordinate symmetrisch und man erhält aus (1), (3), (10), (12)

$$Q = Q' = \frac{1}{2} (P + pL),$$

$$\varrho = \varrho' = \frac{2M}{Px + pLx - px^2},$$

$$My = \frac{x}{4} (P + pL) \left(\frac{L^2}{4} - \frac{x^2}{3} \right) - \frac{px}{24} \left(\frac{L^3}{2} - x^3 \right).$$

$$(14) \quad u = \frac{L^3}{384M} (8P + 5Lp).$$

Die letzte Gleichung (14) ist geeignet, um den Modul E der Elastizität eines Materials durch Versuche zu bestimmen.

Man mache die Versuche mit einem rechtwinkligen Stabe und bezeichne seine Höhe mit h , seine Breite mit b , und den Modul der Elastizität mit E , so ist nach § 202 das Moment der Elastizität

$$M = \frac{E}{12} b h^3.$$

Führt man diesen Wert von M in (14), so erhält man

$$E = \frac{L^3}{32 b h^3 u} (8P + 5Lp).$$

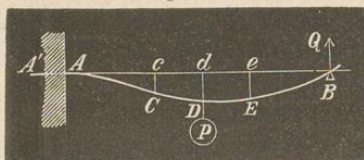
Bei Versuchen betrachtet man die Grösse p als das Gewicht der Längeneinheit des Stabes, der angewendet wird.

367. Prismatischer Stab, am einen Ende in horizontaler Lage eingespannt, am andern in gleicher Höhe unterstützt und in einem Punkte belastet. Das Stück $A'A$ des Stabes (Fig. 131) sei eingespannt (eingemauert), das Ende B unterstützt, so dass BAA' in horizontaler Richtung liegen. Die Last P sei im Punkte D angebracht; dadurch wird sich der Stab biegen und eine Kurve ADB bilden. Um ihre Gleichung abzuleiten, nehme man die Abscissen längs der Wagerechten AB und die Ordinaten darauf senkrecht an. Es seien

- L die Stablänge AB zwischen der Einmauerung und der Stütze,
- x, y die Koordinaten Ae, Ce des Kurvenpunktes C , zwischen A und D gelegen,
- a, u die Koordinaten Ad, Dd des Aufhängepunktes D ,
- x', y' die Koordinaten de, Ee des Kurvenpunktes E , zwischen D und B gelegen,
- ϱ, ϱ' die Krümmungshalbmesser der Kurve in C und E und
- β der Winkel, welchen das Kurvenelement in D mit der Abscissenrichtung bildet.

Man ersetze den Widerstand der Stütze in B durch eine Kraft Q , welche daher aufwärts gerichtet ist, so wird das Gleichgewicht am Stabe fortbestehen.

Fig. 131.



Nun denke man sich das Stück AC des Stabes eingemauert, so ragt noch das Stück cB hervor, das durch die Kräfte Q und P in entgegengesetzter Richtung gedreht wird um C als Drehachse. Dabei wirkt P abwärts am Hebelsarm $cd = a - x$ und Q aufwärts am Hebelsarm $cB = L - x$. Daher ist das resultierende statische Moment $= P(a - x) - Q(L - x)$. Setzt man diesen Wert in Gleichung (1) des § 363 an Stelle von Px, so folgt

$$(1) \quad \varrho = \frac{M}{P(a - x) - Q(L - x)}.$$

Daher hängt der Krümmungshalbmesser vom Verhältnis der Kräfte P und Q ab, das im Nachfolgenden bestimmt wird.

Mit Hilfe dieses Wertes von ϱ gibt Gleichung (3) des § 363

$$M \frac{d^2 y}{dx^2} = P(a - x) - Q(L - x).$$

Wird mit dx multipliziert und integriert, so kommt

$$(2) \quad M \frac{dy}{dx} = P \left(ax - \frac{x^2}{2} \right) - Q \left(Lx - \frac{x^2}{2} \right).$$

Eine Konstante der Integration ist nicht nötig, weil für $x=0$ auch $y=0$ wird.

Für den Aufhängepunkt D wird $x=a$ und $\frac{dy}{dx} = \tan \beta$; daher

$$(3) \quad M \tan \beta = \frac{1}{2} Pa^2 - \frac{1}{2} Qa(2L - a).$$

Das Integral von (2) gibt als Gleichung der elastischen Linie AD

$$(4) \quad My = P \left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) - Q \left(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right).$$

Auch hier fällt die Konstante der Integration weg, weil für $x=0$ und $y=0$ die Gleichung verschwindet.

Für den Punkt D gehen x in a und y in u über; daher

$$(5) \quad Mu = \frac{1}{3} Pa^3 - \frac{1}{2} Qa^2 \left(L - \frac{a}{3} \right).$$

Man denke sich nun die Einmauerung des Stabes von C bis E fortgesetzt, so reicht über die Mauer hinaus noch das Stück EB. Dasselbe wird durch die Kraft Q um E als Achse gedreht am Hebelsarm $eB = L - a - x'$. Das statische Moment dieser Kraft ist daher $= Q(L - a - x')$. Setzt man dasselbe in Gleichung (1) des § 363 für Px, so folgt

$$(6) \quad \varrho' = - \frac{M}{Q(L - a - x')}.$$

Da die Krümmungsmittelpunkte für die Kurvenelemente in A und E auf entgegengesetzter Seite der elastischen Linie liegen, so haben ϱ und ϱ' entgegengesetzte Zeichen, weshalb ϱ' in (6) negativ angenommen ist.

Mit Hilfe von (6) gibt Gleichung (3) des § 363 für das Kurvenstück DB

$$M \frac{d^2 y'}{d x'^2} = -Q (L - a - x') d x',$$

woraus durch Integration folgt

$$(7) \quad M \frac{d y'}{d x'} = -Q (L - a) x' + \frac{Q x'^2}{2} + C.$$

Für $x' = 0$ wird $\frac{d y'}{d x'} = \tan \beta$. Hierfür geht (7) über in

$$M \tan \beta = C$$

und durch Subtraktion in

$$(8) \quad M \frac{d y'}{d x'} = -Q (L - a) x' + \frac{Q x'^2}{2} + M \tan \beta.$$

Diese Differentialgleichung liefert folgendes Integral

$$M y' = -Q (L - a) \frac{x'^2}{2} + \frac{Q x'^3}{6} + M x' \tan \beta + C.$$

Für $x' = 0$ wird $y' = u$; daher $M u = C$ und somit die gesuchte Gleichung der Kurve

$$(9) \quad M y' = -Q (L - a) \frac{x'^2}{2} + \frac{Q x'^3}{6} + M x' \tan \beta + M u.$$

Setzt man in dieser Gleichung $x' = L - a$, so wird $y' = 0$, entsprechend dem Punkte B. Dafür gibt (9)

$$(10) \quad 0 = -\frac{1}{3} Q (L - a)^3 + M (L - a) \tan \beta + M u,$$

Diese Gleichung kann benutzt werden, um Q zu bestimmen. Zu diesem Zwecke eliminiere man $M \tan \beta$ und $M u$ aus ihr mittels (3) und (5), so folgt

$$(11) \quad Q = P \frac{a^2 (3L - a)}{2L^3}.$$

Im Punkte A ist $x = 0$; hierfür wird der Krümmungshalbmesser nach (1)

$$\varrho = \frac{M}{P a - Q L}.$$

Nun ist der Nenner dieses Bruches positiv, wie sich mit Hilfe von (11) ergibt. Daher ist auch ϱ positiv.

Im Punkte D dagegen ist $x = a$; also der Krümmungshalbmesser nach (1)

$$(12) \quad \varrho = - \frac{M}{Q(L-a)}.$$

Daher ist dieser Krümmungshalbmesser negativ. Es ändert also ϱ sein Vorzeichen, wenn x von 0 in a übergeht. Im Augenblick des Ueberganges zeigt die Kurve einen Wendepunkt. Für diesen muss der Nenner in (1) zu Null werden. Allein aus $P(a-x) - Q(L-x) = 0$ folgt als Abscisse des Wendepunktes

$$x = \frac{Pa - Qb}{P - Q}.$$

Von A bis zum Wendepunkt nimmt der Krümmungshalbmesser zu, von da bis zum Punkte D wieder ab.

Setzt man $x' = 0$ in (6), so erhält man als Krümmungshalbmesser der Kurve in D denselben Wert wie oben in (12).

Von D aus in der Richtung nach B hin wird der Nenner in (6) kleiner, weil x' zunimmt; daher wird der Krümmungshalbmesser grösser und wird in B, wo $x' = L - a$ ist, unendlich gross.

Die Kurve hat einen tiefsten Punkt; derselbe kann vor oder hinter dem Aufhängepunkt der Last liegen. Befindet er sich auf dem Stück DB, so muss für ihn das Differentialverhältnis $\frac{dy'}{dx'} = 0$ werden. Hierfür folgt aus (8), wenn der Wert von $M \tan \beta$ aus (3) eingeführt wird

$$0 = -Q(L-a)x' + \frac{Qx'^2}{2} + \frac{Pa^2}{2} - \frac{Qa}{2}(2L-a).$$

Löst man diese quadratische Gleichung auf, so erhält man als Abscisse des tiefsten Punktes, diese von d aus gezählt

$$x' = L - a \pm \sqrt{(L-a)^2 - \frac{P}{Q}a^2 + a(2L-a)}$$

und nach Umformung als Abscisse, von A aus gezählt

$$x' + a = L \left[1 - \sqrt{1 - \frac{P}{Q} \left(\frac{a}{L} \right)^2} \right].$$

Von den beiden Vorzeichen der Wurzelgrösse entspricht nur das negative dem Sinn der Aufgabe, weshalb auch nur dieses im letzten Ausdruck beibehalten ist. Wird die Grösse unter dem Wurzelzeichen negativ, so liegt der tiefste Punkt auf dem Kurvenstück AD und er kann dann mit Hilfe der Gleichung (2) bestimmt werden.

368. Biegung eines prismatischen Stabes, der in der Längenrichtung zusammengedrückt wird. Der Stab sei eine Säule, AH (Fig. 132) die vertikale Richtung derselben, H der Unterstützungspunkt und A der Angriffspunkt der Last P. Diese Last erteile dem Stab eine Biegung. Gesetzt eine Biegung würde nicht eintreten, so würden alle

Fasern, welche man sich als materielle gerade Linien, parallel zur Längenrichtung, denken kann, um gleichviel verkürzt. Sowie aber die Biegung eintritt, verkürzen sich die Fasern auf der konkaven Seite noch mehr, während die auf der konvexen sich wieder ausdehnen. Wie stark auch die Zusammendrückung auf der einen und die Ausdehnung auf der andern Seite sein mag (immer eine schwache Biegung vorausgesetzt), so bleibt der Wert des Elastizitätsmomentes M derselbe.

Es sei $ACFH$ die Krümmung der elastischen Linie des Stabes. Man bezeichne mit

- a die Höhe der Säule im gebogenen Zustande, also die Länge AH ,
- x, y die Koordinaten AB, BC eines Punktes C der Kurve,
- ρ den Krümmungshalbmesser der Kurve in C , und
- $u = DF$ die grösste Ausweichung oder auch die Pfeilhöhe der Kurve.

Denkt man sich den Kurventeil CH eingemauert, so wird die Last den hervorragenden Teil AC um C herum abzdrehen streben, mit einem statischen Moment $= Py$. Deshalb wird nach § 363 sein

$$(1) \quad \rho \cdot Py = M, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{\rho},$$

Fig. 132.

woraus folgt, da y und $\frac{dy}{dx}$ sich entgegengesetzt ändern

$$M \frac{d^2 y}{dx^2} = -Py.$$

Setzt man $\frac{P}{M} = c^2$, multipliziert mit $2dy$ und integriert, so kommt

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = C - c^2 y^2,$$

wobei C die Konstante der Integration bezeichnet. Für $y = u$ wird $\frac{dy}{dx} = 0$, da die Tangente durch den Punkt F der Kurve parallel zu AH liegt. Für den Punkt F wird daher die letzte Gleichung

$$0 = C - c^2 u^2.$$

Mithin erhält man durch Subtraktion

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = c^2 (u^2 - y^2).$$

und hieraus

$$c dx = \frac{dy}{\sqrt{u^2 - y^2}}.$$

In dieser Gleichung ist das Vorzeichen von dx und dy gleichgenommen, weil für den Bogen AF die Grössen x und y sich in gleichem Sinne ändern. Das Integral der letzten Gleichung ist

$$cx = \text{Arc sin } \frac{y}{u}.$$



Die Konstante der Integration ist weggelassen, weil für $y=0$ auch $x=0$ wird. Geht man von dem Bogen zum Sinus über, so folgt als Gleichung der Kurve

$$(2) \quad y = u \sin cx.$$

Setzt man hierin $y=0$, so bezeichnet x die Abscisse aller Durchschnittpunkte der Kurve mit der Abscissenachse. Man erhält für diese Punkte

$$0 = u \sin cx.$$

Diese Gleichung erfordert, dass entweder $u=0$, wodurch der Stab geradlinig bleibt oder dass der Bogen cx ein Vielfaches von π ist. Bezeichnet daher n irgend eine ganze positive Zahl, so muss sein

$$(3) \quad cx = n\pi; \quad x = \frac{n\pi}{c}.$$

Diese Gleichung gibt für x so viele Werte, als n Einheiten enthält. Für $n=0$ wird auch $x=0$. Dieser Wert von x entspricht dem Anfangspunkt A (Fig. 133). Für $n=1$ werde $x=AD$,



so ist $AD = \frac{\pi}{c}$. Für $n=2$ werde $x=AG$, so wird

$AG = \frac{2\pi}{c}$, woraus folgt, dass $AD=DG$. Ganz ebenso folgt $DG=GH, \dots$. Man sieht, dass die Abscissenachse von der Kurve in gleiche Teile geteilt wird.

Setzt man der Reihe nach $x = \frac{1}{2}AD, \frac{3}{2}AD, \frac{5}{2}AD, \dots$ in (2), so wird y abwechselnd $+u$ und $-u$, d. h. die Kurventeile weichen nach entgegengesetzter Seite gleichweit von der Abscissenachse ab und zwar in ihren Mitten, weil für $y=u$ in Formel (2) der Bogen $cx = \frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$ wird.

Bezeichnet n in Formel (3) die Anzahl aller Biegungen $AD, DG, \dots$, so wird $x=a$ und man erhält

$$(4) \quad ac = n\pi.$$

Hat die Kurve nur eine Biegung, so ist $n=1$ und man erhält aus (4)

$$(5) \quad c^2 = \frac{\pi^2}{a^2} = \frac{P}{M}.$$

Um die Ausweichung u zu bestimmen, berechne man die Länge s der Kurve. Man erhält aus (2)

$$\frac{dy}{dx} = cu \cos cx.$$

Hierfür wird das Element eines Bogens der Kurve

$$ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = dx (1 + c^2 u^2 \cos^2 cx)^{\frac{1}{2}}.$$

Entwickelt man nach dem binomischen Satze und vernachlässigt die Glieder von der vierten Potenz der Grösse u an, so wird

$$ds = dx \left(1 + \frac{c^2 u^2}{2} \cos^2 cx \right).$$

Um die ganze Länge s der Kurve zu erhalten, muss diese Gleichung von $x=0$ bis $x=a = \frac{n\pi}{c}$ (Formel 4) integriert werden. Nun ist

$$\cos^2 cx = \frac{1}{2} (1 + \cos 2cx),$$

$$ds = dx \left(1 + \frac{c^2 u^2}{4} + \frac{c^2 u^2}{4} \cos 2cx \right)$$

und da

$$\int_0^{\frac{n\pi}{c}} \cos 2cx \, dx = 0,$$

so wird

$$s = a \left(1 + \frac{c^2 u^2}{4} \right),$$

woraus die gesuchte Ausweichung folgt

$$u = \frac{2}{c} \sqrt{\frac{s}{a} - 1}.$$

Wenn der Stab sich nicht biegt, so wird $s=a$, also $u=0$, wie es sein soll.

Setzt man den Wert von P aus (5) in (1), so erhält man als Krümmungshalbmesser der Kurve

$$\varrho = \frac{a^2}{\pi^2 y}.$$

An den Endpunkten ist $y=0$, also $\varrho = \infty$. Den kleinsten Krümmungshalbmesser erhält man für $y=u$. Also nimmt die Krümmung des Stabes von den Endpunkten nach der Mitte hin zu.

XI. Aufgaben über fortschreitende Bewegungen.

369. Differentialformeln der Bewegung. Diese Formeln wurden für irgend eine Bewegung bereits in § 153 abgeleitet. Es ist hiernach

$$(1) \quad dx = v \, dt; \quad dv = g \, dt; \quad v \, dv = g \, dx,$$

wobei x den in der Zeit t durchlaufenen Weg und v und g die Geschwindigkeit und Beschleunigung nach der Zeit t bezeichnen.

Nimmt man t als die unabhängig Veränderliche, also dt als konstant an, so erhält man durch Differentiation der ersten Formeln (1)

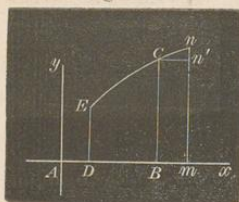
$$d^2x = dv \, dt.$$

Setzt man hierin den Wert von dv aus der zweiten der Formeln (1), so folgt

$$(2) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = g.$$

Es ist mithin die Beschleunigung g gleich dem zweiten Differentialverhältnis des Weges in Hinsicht der Zeit.

Fig. 134.



Es bewege sich ein Punkt in einer ebenen Kurve EC (Fig. 134), deren Gleichung für rechtwinkelige Koordinatenachsen gegeben sei. Die Koordinaten eines Kurvenpunktes C seien x, y , der Bogen $EC = s$. Es nehme x um $dx = Cn'$ zu, so ändert sich y um $dy = nn'$ und s um $ds = Cn$. Der Weg s werde in der Zeit t durchlaufen. Nach dieser Zeit sei die Geschwindigkeit $= v$. Man zerlege die Geschwindigkeit v , deren Richtung in das Kurven-

element ds fällt, in die zwei Seitengeschwindigkeiten $v \frac{dx}{ds}$ und $v \frac{dy}{ds}$ parallel und senkrecht zur Abscissenachse. Da nun aber $v = \frac{ds}{dt}$, vermöge der ersten der Gleichungen (1), so erhält man als Seitengeschwindigkeit

$$\text{in der Richtung der Abscissenachse} = \frac{dx}{dt},$$

$$\text{in der Richtung der Ordinatenachse} = \frac{dy}{dt},$$

und somit nach Formel (2) als Beschleunigung

$$\text{parallel zur Abscissenachse} \quad \dots = \frac{d^2x}{dt^2},$$

$$\text{parallel zur Ordinatenachse} \quad \dots = \frac{d^2y}{dt^2}.$$

370. Bewegung eines Körpers in einer Geraden, welche die Mittelpunkte zweier Himmelskörper verbindet. Die Himmelskörper ziehen sich an, als wenn ihre Massen in ihren Mittelpunkten AB (Fig. 135) vereinigt wären. Es seien

$a = AB$ der Abstand dieser Mittelpunkte,

$b = BC$ der Abstand eines Körpers in der Geraden AB, der von beiden Himmelskörpern nach dem Gesetze der Gravitation angezogen wird,

$x = CD$ der Weg, welchen dieser Körper in der Zeit t in der Richtung von C nach D durchläuft,

v_0, v die Geschwindigkeiten des Körpers am Anfang und Ende der Zeit t , also in den Punkten C und D,

g, g' die Beschleunigungen, welche die Himmelskörper in A und B im Abstände 1 von ihren Mittelpunkten aus dem beweglichen Körper beizubringen vermöchten.

Nach dem Gesetze der Gravitation sind die Beschleunigungen, welche von A und B aus in den Abständen $AD = a - b - x$ und $BD = b + x$ bewirkt werden

$$\frac{g}{(a - b - x)^2}; \quad \frac{g'}{(b + x)^2}.$$

Diese Beschleunigungen haben entgegengesetzte Richtungen. Die erstere wächst mit t , die letztere nimmt ab. Daher wird sein

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{g}{(a - b - x)^2} - \frac{g'}{(b + x)^2}.$$

Behufs der Integration dieser Gleichung setze man

$$BD = b + x = z, \quad dx = dz, \quad d^2x = d^2z,$$

so geht die vorstehende Gleichung über in

$$(1) \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{g}{(a - z)^2} - \frac{g'}{z^2}.$$

Man multipliziere mit $2dz$ und beachte, dass alsdann die linke Seite das Differential von $\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$ ist, so erhält man durch Integration

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{a - z} + \frac{2g'}{z} + C.$$

In dieser Gleichung ist C die Konstante der Integration und $\frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt}$ die Geschwindigkeit v . Mithin ist

$$v^2 = \frac{2g}{a - z} + \frac{2g'}{z} + C.$$

Für $z = b = BC$ wird v zu v_0 . Für diese Werte wird die letzte Gleichung

$$v_0^2 = \frac{2g}{a - b} + \frac{2g'}{b} + C.$$

Mithin erhält man durch Subtraktion der beiden letzten Gleichungen

$$(2) \quad v^2 = v_0^2 + 2g\left(\frac{1}{a - z} - \frac{1}{a - b}\right) + 2g'\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{b}\right).$$

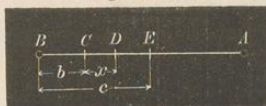
Auf der Geraden AB gibt es eine Stelle E , wo die Anziehung beider Himmelskörper gleich gross ist. Man setze den Abstand

$$BE = c, \quad AE = a - c,$$

so müssen die Beschleunigungen, welche beide Himmelskörper an dieser Stelle hervorbringen, gleich gross sein, so dass man hat

$$\frac{g'}{c^2} = \frac{g}{(a - c)^2}.$$

Fig. 135.



Diese Gleichung ist in Hinsicht c eine quadratische. Es entsprechen also der Grösse c zwei Werte. Der eine davon bestimmt die Stelle E zwischen A und B, der andere eine Stelle in der Verlängerung AB auf Seite des kleineren Himmelskörpers. Der erstere dieser Werte ist

$$(3) \quad c = \frac{a}{1 + \sqrt{\frac{g}{g'}}}.$$

Setzt man diesen Wert von c statt z in (2), so erhält man diejenige Geschwindigkeit v , mit welcher das Bewegliche die Stelle E passiert.

Es bezeichne u_0 den kleinsten Wert von v_0 , welchen das Bewegliche in C haben muss, um die Gleichgewichtslage in E gerade noch erreichen zu können. Vertauscht man daher v_0 mit u_0 und z mit c in (2), so muss $v=0$ werden. Dies gibt die Relation

$$(4) \quad u_0^2 = 2g \left(\frac{1}{a-b} - \frac{1}{a-c} \right) + 2g' \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right).$$

Ist v_0 kleiner als u_0 , so erreicht das Bewegliche die Stelle E nicht, sondern kehrt nach B zurück. Ist v_0 grösser als u_0 , so geht der Körper über E hinaus nach A hin.

Es sei A der Mittelpunkt der Erde, B der des Mondes. Daher ist

$$(5) \quad g' = \frac{g}{75}; \quad c = \frac{a}{1 + \sqrt{\frac{g}{75}}} = 0,1035 a.$$

Man denke sich nun, es werde ein Körper von der Oberfläche des Mondes aus mit einer solchen Geschwindigkeit u_0 in der Richtung BA abgeworfen, dass er die Gleichgewichtslage in E gerade erreichen kann.

Nun sei r der Halbmesser der Erde, so ist sehr annähernd

$$\text{Halbmesser des Mondes} = \frac{3}{11} r; \quad \text{Abstand AB} = 60 r.$$

Allein für $b = \frac{3}{11} r$; $g' = \frac{g}{75}$; $a = 60 r$; $c = 0,1035 \cdot 60 r$ gibt (4)

$$(6) \quad u_0^2 = 0,04489 \cdot \frac{2g}{r}.$$

Nun bezeichne G die Beschleunigung auf der Erdoberfläche. Da die Grössen G und g den Abständen r und 1 vom Mittelpunkt der Erde entsprechen, so erhält man nach dem Gesetze der Gravitation

$$(7) \quad \begin{aligned} G : g &= 1^2 : r^2, \\ g &= r^2 G. \end{aligned}$$

Führt man diesen Wert von g in (6), so folgt

$$(8) \quad u_0^2 = 0,04489 \cdot 2 G r.$$

Wird dieser Körper mit einer Geschwindigkeit, welche u_0 nur um unendlich wenig übertrifft, vom Monde aus abgeworfen, so dass er mit einer unendlich kleinen Geschwindigkeit die Stelle E überschreitet, so wird er gegen die Erde hin fallen.

Die Geschwindigkeit, mit welcher dieser Körper die Grenze der Atmosphäre erreiche, sei $=u$. Die Höhe der Atmosphäre ist höchstens $=0,01 r$. Führt man nun in Formel (2) die Werte ein

$$v_0 = u_0; \quad a = 60 r; \quad z = 58,99 r; \quad b = \frac{3}{11} r; \quad g' = \frac{g}{75},$$

so geht v in u über und man erhält

$$u^2 = u_0^2 + 0,92470 \cdot \frac{2g}{r}.$$

Setzt man hierin den Wert von u_0 aus (8) und den von g aus (7), so wird

$$(9) \quad u^2 = 0,96959 \cdot 2 Gr.$$

Durch Vergleichung von (8) und (9) folgt das Verhältnis

$$(10) \quad \frac{u}{u_0} = 4,6475,$$

d. h. der Körper, welcher auf der Geraden BA die Gleichgewichtslage mit einer unendlich kleinen Geschwindigkeit passieren würde, träfe die Grenze der Atmosphäre mit einer etwas mehr als $4\frac{1}{2}$ mal grösseren Geschwindigkeit als diejenige ist, mit der er abgeworfen würde. Setzt man noch

$$G = 9,808 \text{ Met.}; \quad r = 6365000 \text{ Met.},$$

so folgt aus (9) und (10)

$$u_0 = 2367 \text{ Met.}; \quad u = 11003 \text{ Met.}$$

Die Höhe der Atmosphäre beträgt, der obigen Voraussetzung gemäss, höchstens $0,01 r = 63650 \text{ Met.}$ Würde nun jener Körper die Atmosphäre gleichförmig durchfallen, so würde er hierzu nahe 6 Sekunden Zeit brauchen.

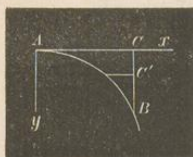
371. Bewegung eines Körpers in einer Kurve, die in einer vertikalen Ebene liegt, infolge seiner Schwere. Die Kurve AB (Fig. 136) gehe durch den Anfangspunkt A der rechtwinkeligen Achsen Ax , Ay . Es sei Ax horizontal und Ay vertikal abwärts gerichtet. In horizontaler Richtung wirkt keine Kraft auf den Körper, also ist die Beschleunigung in dieser Richtung $=0$. In vertikaler Richtung wirkt die Schwere auf ihn. Die konstante Beschleunigung durch die Schwere sei $=g$, so sind die Formeln für die Beschleunigung in der Richtung der Achsen

$$(1) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 0; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = g.$$

Man multipliziere die erste Formel mit dx , die zweite mit dy und addiere sie, so erhält man

$$(2) \quad \frac{dx \, d^2x + dy \, d^2y}{dt^2} = g \, dy.$$

Fig. 136.



Nun ist aber der Zähler links als Differential von

$$\frac{1}{2} (dx^2 + dy^2) = \frac{1}{2} ds^2.$$

Also kann man statt (2) schreiben

$$(3) \quad \frac{1}{2} \frac{d(ds^2)}{dt^2} = g \, dy.$$

Allein es ist $\frac{ds}{dt} = v$; mithin erhält man für (3)

$$\frac{1}{2} d(v^2) = g \, dy.$$

Multipliziert man mit 2 und integriert, so kommt

$$(4) \quad v^2 = 2gy + C.$$

Beginnt die Bewegung im Anfangspunkt, so ist für diesen Punkt $v=0$ und $y=0$, also auch die Konstante $C=0$. Ist daher $BC=y$, so erhält man aus (4)

$$(5) \quad v = \sqrt{2gy} = \sqrt{2g \cdot BC}.$$

Beginnt die Bewegung in einer Tiefe $CC'=y_0$ unter dem Anfangspunkt, so ist in (4) $v=0$ für $y=y_0$; hierfür folgt aus (4)

$$0 = 2gy_0 + C.$$

Zieht man diese Gleichung von (4) ab, so wird

$$(6) \quad v = \sqrt{2g(y - y_0)} = \sqrt{2g \cdot BC'}.$$

Man sieht aus den Formeln (5) und (6), dass die Geschwindigkeit an jener Stelle der Kurve dieselbe ist, wie wenn das Bewegliche die vertikale Höhe des durchlaufenen Bogens frei durchfallen hätte.

372. Anwendung des eben nachgewiesenen Gesetzes auf die Bewegung in der Cykloide. Die Cykloide liege in einer Vertikalebene, ihre Grundlinie BC (Fig. 137) sei horizontal, so wird der Scheitel A der tiefste Punkt der Kurve sein. Man lege die Abscissenachse Ax horizontal, die Ordinatenachse Ay vertikal aufwärts. Der Rollkreis bewege sich von der Mitte B der Grundlinie längs des Weges BC, so dass $BC = \text{Bogen } CD$ werde. Es seien CMF und DME zwei Durchmesser von der Länge $= 2a$, so wird Bogen $CD = \text{Bogen } EF = a\varphi$ sein, wenn φ den Rollwinkel im Bogenmass bezeichnet. Ferner seien

Von den beiden Vorzeichen, welche die Grösse rechts allgemein haben sollte, wurde nur das negative beibehalten, weil bei der Bewegung längs des Bogens HE die Zeit t zunimmt, während y abnimmt.

Das Integral von (5) ist nach Formel (8) des § 78

$$t = -\sqrt{\frac{a}{g}} \operatorname{Arc} \sin \frac{2y - h}{h} + C.$$

Für $t = 0$ ist $y = h$; folglich

$$0 = -\sqrt{\frac{a}{g}} \cdot \frac{\pi}{2} + C.$$

Zieht man diese Gleichung von der vorigen ab, so folgt

$$(6) \quad t = \sqrt{\frac{a}{g}} \left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arc} \sin \frac{2y - h}{h} \right].$$

Um die Zeit T zu erhalten, welche das Bewegliche nötig hat, um in den tiefsten Punkt zu gelangen, muss in (6) die Ordinate y von $y = h$ bis $y = 0$ abnehmen. Hierbei geht der Arcus sinus von $+\frac{\pi}{2}$

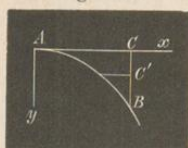
durch die Null in $-\frac{\pi}{2}$ über. Diese Grenzwerte von Arcus sinus heben sich daher auf und man hat

$$T = \pi \sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Man sieht hieraus, dass in der Formel für die Fallzeit T die Länge des Bogens HA nicht vorkommt. Es ist deshalb die Zeit zur Erreichung des tiefsten Punktes dieselbe, welcher cycloidische Bogen durchlaufen werde. Eine Kurve, welche diese Eigenschaft besitzt, heisst tautochron.

373. Horizontaler Wurf eines Körpers im leeren Raum. Es werde ein Körper im leeren Raum mit einer Anfangsgeschwindigkeit V in horizontaler Richtung abgeworfen. Von da an sei er nur der Einwirkung der Schwere ausgesetzt. Die Bahn AB des Körpers (Fig. 138) wird in einer vertikalen Ebene liegen, welche durch die anfängliche Richtung der Bewegung geht. Diese Richtung sei die Abscissenachse Ax und A der Anfangspunkt der Bewegung. Man nehme die Ordinatenachse Ay vertikal abwärts und bezeichne mit v die Geschwindigkeit nach der Zeit t , mit x, y die Koordinaten eines Kurvenpunktes B und mit g die Beschleunigung durch die Schwere, welche wir als konstant voraussetzen, so hat man

Fig. 138.



$$(1) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 0; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = g.$$

Um diese Formeln integrieren zu können, setze man

$$\frac{dx}{dt} = z; \quad \frac{dy}{dt} = u,$$

so gehen die Formeln (1) über in

$$\frac{dz}{dt} = 0; \quad \frac{du}{dt} = g.$$

Multipliziert man hier mit dt und integriert, so kommt

$$z = C; \quad u = gt + C',$$

oder indem man die Werte von z und u wiederherstellt

$$(2) \quad \frac{dx}{dt} = C; \quad \frac{dy}{dt} = gt + C'.$$

Für den Anfangspunkt der Bewegung ist

$$t = 0; \quad \frac{dx}{dt} = V; \quad \frac{dy}{dt} = 0.$$

Hierfür erhält man aus (2) $C = V$ und $C' = 0$. Deshalb gehen die Formeln (2) über in

$$(3) \quad \frac{dx}{dt} = V; \quad \frac{dy}{dt} = gt.$$

Es sind mithin V und gt die Geschwindigkeiten des Körpers parallel zu den Achsen Ax und Ay . Vermittelst des Parallelogramms der Geschwindigkeiten (unter Anwendung des pythagoräischen Lehrsatzes) erhält man daher

$$v^2 = V^2 + g^2 t^2.$$

Man sieht aus dieser Gleichung, dass die Geschwindigkeit v in der Richtung der Bahn vom Anfangspunkt aus im Wachsen begriffen ist, da die Zeit t zunimmt.

Multipliziert man (3) mit dt und integriert, so kommt

$$(4) \quad x = Vt; \quad y = \frac{g}{2} t^2.$$

Die Konstanten der Integration sind weggelassen, weil für $t = 0$ auch $x = 0$ und $y = 0$ wird.

Eliminiert man aus den beiden Formeln (4) die Zeit t , so erhält man als Gleichung der Kurve

$$y = \frac{g}{2 V^2} x^2.$$

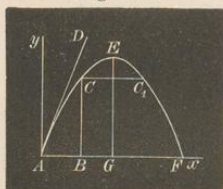
Die Bahn ist mithin eine Parabel, deren Scheitel im Anfangspunkt und deren Achse in der Ordinatenachse liegt.

374. Schiefer Wurf eines Körpers im leeren Raum. Es werde ein Körper in schräger Richtung AD (Fig. 139) aufwärts geworfen und sodann der Einwirkung der Schwere überlassen. Die Bahn AEF des Körpers liegt in einer Vertikalebene, welche durch die Anfangsrichtung der Bewegung geht. Man nehme in dieser Ebene, vom Anfangspunkte A aus, die beiden Achsen Ax, Ay an, wovon die erstere horizontal, die letztere vertikal aufwärts geht. Es seien

V, v die Geschwindigkeiten des Körpers am Anfang der Bewegung und nach der Zeit t ,
 x, y die Koordinaten AB, BC eines Kurvenpunktes C , der in der Zeit t erreicht wird,
 α der Winkel, welchen die Anfangsrichtung der Bewegung mit der Achse Ax bildet und
 g die Beschleunigung durch die Schwere,
 so muss im Sinne der Aufgabe sein

$$(1) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = 0; \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -g.$$

Fig. 139.



Man setze $\frac{dx}{dt} = z; \quad \frac{dy}{dt} = u,$

so gehen die Formeln (1) über in

$$\frac{dz}{dt} = 0; \quad \frac{du}{dt} = -g.$$

Multipliziert man mit dt und integriert, so kommt

$$z = C; \quad u = -gt + C', \text{ also}$$

$$(2) \quad \frac{dx}{dt} = C; \quad \frac{dy}{dt} = -gt + C'.$$

Man zerlege die Anfangsgeschwindigkeit in die horizontale Seitengeschwindigkeit $V \cos \alpha$ und die vertikale $V \sin \alpha$. Da nun aber $\frac{dx}{dt}$ die horizontale und $\frac{dy}{dt}$ die vertikale Seitengeschwindigkeit nach der Zeit t bezeichnen, so erhält man aus (2) für $t=0$

$$V \cos \alpha = C; \quad V \sin \alpha = C'.$$

Setzt man diese Werte der Konstanten C, C' in (2), so kommt

$$(3) \quad \frac{dx}{dt} = V \cos \alpha; \quad \frac{dy}{dt} = V \sin \alpha - gt.$$

Diese Seitengeschwindigkeiten sind die Seiten eines Rechtecks, dessen Diagonale die Geschwindigkeit v (in der Richtung der Tangente an die Bahn) ist. Man erhält deshalb nach dem pythagoräischen Lehrsatz

$$(4) \quad v^2 = V^2 - 2Vgt \sin \alpha + g^2 t^2.$$

Dieser Wert von v ist wegen der Einwirkung der Schwere veränderlich. Um das Minimum von v zu bestimmen, differenziere man diese Gleichung, indem man t als unabhängig und v als abhängig Variable betrachtet, und setze den ersten Differentialquotienten $=0$, so erhält man

$$\frac{dv}{dt} = \frac{-Vg \sin \alpha + g^2 t}{v} = 0.$$

Hieraus folgt, da der Nenner v nicht unendlich gross sein kann, dass der Zähler verschwinden, also

$$-Vg \sin \alpha + g^2 t = 0$$

sein muss. Bezeichnet man den hieraus hervorgehenden Wert von t mit T , so ist

$$(5) \quad T = \frac{V \sin \alpha}{g}.$$

Für diesen Wert von T wird die Geschwindigkeit v zu einem Minimum, weil das zweite Differentialverhältnis

$$\frac{d^2 v}{dt^2} = + \frac{g^2}{v}$$

positiv ist. Führt man T für t in (4), so erhält man den kleinsten Wert der Geschwindigkeit

$$v = V \cos \alpha.$$

Mithin ist diese kleinste Geschwindigkeit in der Richtung der Bahn gleich der konstanten horizontalen Seitengeschwindigkeit des Körpers (Formel 3).

Multipliziert man (3) mit dt und integriert, so kommt

$$(6) \quad x = V \cos \alpha \cdot t; \quad y = V \sin \alpha \cdot t - \frac{g}{2} t^2.$$

In diesen Wegformeln sind die Konstanten der Integration weglassen, weil für $t=0$ auch $x=0$ und $y=0$ werden.

Die Ordinate y wird in den Punkten A und F, wo die Kurve die Abscissenachse schneidet, zu Null. Setzt man nun $y=0$ in der zweiten der Gleichungen (6), so muss alsdann t die Zeit bezeichnen, welche diesen zwei Punkten entspricht. Man erhält zunächst

$$0 = t \left(V \sin \alpha - \frac{g}{2} t \right).$$

Das Produkt rechts wird nun aber zu Null, wenn der eine oder andere der Faktoren zu Null wird. Setzt man den ersten Faktor $t=0$, so entspricht diese Zeit dem Punkte A; setzt man aber den zweiten $=0$, so findet man als Zeit

$$(7) \quad t_0 = \frac{2 V \sin \alpha}{g}.$$

Die Länge AF, welche die Kurve auf der Abscissenachse abschneidet, heisst Wurfweite. Also bezeichnet t_0 die Zeit zum Durchlaufen der ganzen Kurve AEF über der Abscissenachse.

Eliminiert man t aus den beiden Formeln (6), so erhält man als Gleichung der Bahn

$$(8) \quad y = x \tan \alpha - \frac{g x^2}{2 V^2 \cos^2 \alpha}.$$

In den Punkten A und F der Bahn wird die Ordinate zu Null. Setzt man daher $y=0$ in (8), so bezeichnet x die Abscisse dieser zwei Punkte. Für diese wird daher

$$0 = x \left(\tan \alpha - \frac{g x}{2 V^2 \cos^2 \alpha} \right).$$

Macht man den ersten der Faktoren, nämlich x , gleich Null, so entspricht er dem Punkte A; macht man aber den zweiten zu Null, so erhält man als Abscisse des Punktes F

$$(9) \quad x_0 = \frac{2 V \sin \alpha \cos \alpha}{g}.$$

Es bezeichnet daher x_0 die Wurfweite A F.

Die Gleichung (8) zeigt, dass die Wurfbahn eine Parabel ist, deren Achse vertikal liegt.

Um den Scheitel oder höchsten Punkt E der Bahn zu finden, kann man nur den halben Wert von x_0 aus (9) als Abscisse A G derselben betrachten und denselben in (8) einführen, so erhält man die Ordinate G E des Scheitels.

Es kann aber auch die Abscisse des höchsten Punktes wie folgt aus (8) abgeleitet werden. Zu diesem Behufe bestimme man denjenigen Wert von x , welcher y zu einem Maximum macht. Man erhält aus (8)

$$\frac{d y}{d x} = \tan \alpha - \frac{g x}{V^2 \cos^2 \alpha}; \quad \frac{d^2 y}{d x^2} = - \frac{g}{V^2 \cos^2 \alpha}.$$

Setzt man das erste Differentialverhältnis $= 0$, so folgt, indem man x mit X vertauscht

$$(10) \quad X = \frac{V^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}.$$

Für diesen Wert von x wird y ein Maximum, weil das zweite Differentialverhältnis negativ ist. Somit ist $X = A G$ die Abscisse des höchsten Punktes. Setzt man diesen Wert von x in (8) und vertauscht y mit Y , so erhält man als Ordinate G E des höchsten Punktes

$$(11) \quad Y = \frac{V^2 \sin^2 \alpha}{2 g}.$$

Führt man den Wert von X aus (10) in die erste der Formeln (6) ein, so findet man für t gerade den Wert T , welcher in Formel (5) dargestellt ist. Mithin ist T die Zeit zur Erreichung des höchsten Punktes und es ist die Geschwindigkeit des Körpers in diesem Punkt ein Minimum. Es nimmt somit die Geschwindigkeit vom Anfangspunkte aus bis zum höchsten Punkte ab.

Wenn der Parabelpunkt C in der Zeit $T - t'$ erreicht wird, so muss, wegen der gleichförmigen Bewegung in horizontaler Richtung, ein Punkt C' der Bahn, der mit C gleichen Abstand von der Achse E G hat, erreicht werden in der Zeit $T + t'$. Setzt man diese beiden Zeiten für t in Formel (4), so erhält man gleiche Werte für v , d. h.

die Geschwindigkeiten des Körpers in gleicher Tiefe unter dem höchsten Punkt der Bahn sind gleich. Diese Werte sind

$$v = \sqrt{V^2 \cos^2 \alpha + g^2 t'^2}.$$

Da aber $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2 \alpha$, so ist die Wurfweite nach (9) auch

$$x_0 = \frac{V^2 \sin 2 \alpha}{g}.$$

Man denke sich hierin die Grössen V und g konstant, dagegen α veränderlich, so wird auch x_0 veränderlich. Für $2 \alpha = 90^\circ$ ist $\sin 2 \alpha = 1$, also x_0 ein Maximum. Wird somit ein Körper unter einem Winkel von 45° zum Horizont abgeworfen, so ist unter sonst gleichen Umständen seine Wurfweite grösser als für jeden andern Winkel.

Denken wir uns zwei Wurfwinkel, welche gleich weit über und unter 45° liegen, etwa um β , so ist für den einen Winkel

$$\sin 2 \alpha = \sin 2 (45 + \beta) = \sin (90 + 2 \beta)$$

und für den andern

$$\sin 2 \alpha = \sin 2 (45 - \beta) = \sin (90 - 2 \beta).$$

Allein diese beiden Werte von $\sin 2 \alpha$ sind gleich gross; also ist auch für beide Winkel $45 + \beta$ und $45 - \beta$ die Wurfweite gleich gross.

375. Schiefer Wurf eines Körpers in der Luft. Der Luftwiderstand sei dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional und wirke in der Richtung der Tangente an die Bahn. Wegen der letztern Voraussetzung wird die Bahn AC (Fig. 140) des Körpers eine ebene Kurve sein und in der Vertikalebene liegen, welche durch die Anfangsrichtung der Bewegung geht. Es gelte die Bezeichnung der vorigen Aufgabe. Ausserdem sei

$s = AC$ der Bogen der Kurve, welcher vom Anfangspunkt bis zum Punkte mit den Koordinaten x, y reicht,

$u = V \cos \alpha$ die horizontale Geschwindigkeit im Anfangspunkt,

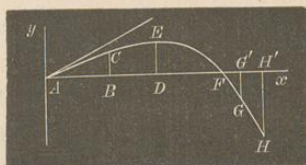
m die Beschleunigung, welche der Luftwiderstand dem Körper in der Richtung der Bahn entzieht, bei der Geschwindigkeit $= 1$.

Die Geschwindigkeit im Punkte C ist $= \frac{ds}{dt}$, also die Beschleunigung, welche in diesem Punkte dem Körper in der Richtung der Tangente an die Bahn entzogen wird $= m \left(\frac{ds}{dt} \right)^2$. Man zerlege sie in eine horizontale und vertikale Seitenbeschleunigung, so wird man dafür erhalten

$$m \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \frac{dx}{ds}; \quad m \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \frac{dy}{ds}.$$

Die erstere bewirkt, dass die Bewegung in horizontaler Richtung verzögert wird; daher die Beschleunigung in dieser Richtung

Fig. 140.



$$(1) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = -m \frac{ds}{dt} \frac{dx}{dt}.$$

Die letztere hat das entgegengesetzte Zeichen von dy , so dass in vertikaler Richtung sein muss

$$(2) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -g - m \frac{ds}{dt} \frac{dy}{dt}.$$

Man betrachte t als die unabhängig Variable, also dt als konstant, dividire Gleichung (1) mit $\frac{dx}{dt}$ und beachte, dass nunmehr der Zähler $\frac{d^2 x}{dt^2}$ links das Differential des Nenners $\frac{dx}{dt}$ ist, so erhält man als Differential dieser Gleichung

$$\log \left(\frac{dx}{dt} \right) = -ms + C.$$

Um die Konstante C zu bestimmen, sei $s=0$, so wird die Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt}$ zur Anfangsgeschwindigkeit in horizontaler Richtung, also zu u . Diese Werte geben $\log u = C$. Folglich durch Subtraktion dieser Gleichung von der vorstehenden

$$\log \frac{\frac{dx}{dt}}{u} = -ms,$$

oder indem man von den Logarithmen zu den Zahlen übergeht

$$(3) \quad \frac{dx}{dt} = u e^{-ms}.$$

Man multipliziere die Gleichungen (1) und (2) mit dt^2 , so kommt

$$d^2 x = -m ds dx; \quad d^2 y = -g dt^2 - m ds dy$$

und hieraus durch Elimination von $m ds$

$$d^2 y = -g dt^2 + \frac{dy}{dx} d^2 x,$$

woraus folgt

$$g dt^2 = \left(\frac{dy d^2 x - dx d^2 y}{dx^2} \right) dx.$$

Die Grösse in der Klammer ist das Differential von $-\frac{dy}{dx}$; daher wird sein

$$(4) \quad g dt^2 = -dx d \left(\frac{dy}{dx} \right).$$

Führt man den Wert von dt aus (3) hier ein, so kommt

$$(5) \quad g e^{2ms} ds = -u^2 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} d \left(\frac{dy}{dx} \right).$$

Gesetzt, die Bahn weiche nur wenig von der horizontalen Achse Ax ab, so dass man s mit x verwechseln und $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ gegen die Einheit vernachlässigen kann. Unter dieser Voraussetzung gehen die Formeln (3) und (5) über in

$$(6) \quad dt = \frac{1}{u} e^{mx} dx.$$

$$(7) \quad g e^{2mx} dx = -u^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Das Integral von (6) ist

$$t = \frac{1}{mu} e^{mx} + C.$$

Um die Konstante zu bestimmen, setze man $x=0$, so wird auch $t=0$. Dies gibt

$$0 = \frac{1}{mu} + C.$$

Zieht man diese Gleichung von der vorigen ab, so erhält man

$$(8) \quad t = \frac{1}{mu} (e^{mx} - 1).$$

Die Integration der Formel (7) liefert

$$\frac{g e^{2mx}}{2m} = -u^2 \left(\frac{dy}{dx}\right) + C.$$

Zur Bestimmung der Konstanten C hat man die gleichzeitigen Werte $x=0$, $\frac{dy}{dx} = \tan \alpha$. Hierfür wird die Gleichung

$$\frac{g}{2m} = -u^2 \tan \alpha + C.$$

Folglich durch Subtraktion und Auflösung in Hinsicht $\frac{dy}{dx}$

$$(9) \quad \frac{dy}{dx} = \tan \alpha + \frac{g}{2mu^2} (1 - e^{2mx}).$$

Multipliziert man mit dx und integriert, so kommt

$$y = x \tan \alpha + \frac{g}{2mu^2} \left(x - \frac{e^{2mx}}{2m}\right) + C.$$

Für $x=0$ wird auch $y=0$, so dass diese Gleichung wird

$$0 = -\frac{g}{4m^2u^2} + C.$$

Zieht man diese Gleichung von der vorigen ab, so kommt

$$(10) \quad y = \left(\tan \alpha + \frac{g}{2mu^2}\right)x - \frac{g}{4m^2u^2} (e^{2mx} - 1).$$

Die Gleichung (10) bestimmt die Bahn und (8) die Zeit.

Für den höchsten Punkt der Bahn ist $\frac{dy}{dx} = 0$. Hierfür folgt aus (9), wenn x mit x' vertauscht wird

$$e^{2mx'} = 1 + \frac{2mu^2}{g} \operatorname{tg} \alpha,$$

oder indem man die Logarithmen nimmt

$$x' = \frac{1}{2m} \log \left(1 + \frac{2mu^2}{g} \operatorname{tg} \alpha \right).$$

Dieser Wert von x' ist die Abscisse AD des höchsten Punktes E.

Setzt man in (10) $y=0$, so wird x zur Abscisse derjenigen Punkte A und F, in welchen die Bahn die Abscissenachse schneidet. Man bezeichne diesen Wert von x mit x'' , so erhält man

$$(11) \quad \left(\operatorname{tg} \alpha + \frac{g}{2mu^2} \right) x'' = \frac{g}{4m^2u^2} (e^{2mx''} - 1).$$

Diese Gleichung liefert zwei Werte von x'' . Der eine $x''=0$ entspricht dem Anfangspunkt A, der andere gibt die Wurfweite AF.

Kennt man in einem besondern Fall x'' , α und u , so kann vermittlest (11) der Wert von m berechnet werden. Ebenso könnte m aus (8) ermittelt werden, wenn man entsprechende Werte von x und t durch Beobachtung finden würde.

Weicht die Bahn von der Horizontalachse so wesentlich ab, dass s nicht mit x verwechselt und $\left(\frac{dy}{dx} \right)^2$ nicht gegen 1 vernachlässigt werden kann, so werden die Differentialformeln der Bewegung sehr zusammengesetzt.

Man setze $\frac{dy}{dx} = p$ in (5), so erhält man

$$(12) \quad -\frac{ge^{2ms}}{u^2} ds = dp \sqrt{1+p^2}.$$

Das Integral ist nach § 76 und 82, Formel (9)

$$(13) \quad b - \frac{ge^{2ms}}{2mu^2} = \frac{p}{2} \sqrt{1+p^2} + \frac{1}{2} \log(p + \sqrt{1+p^2}),$$

worin b die Konstante der Integration bezeichnen soll. Um sie zu bestimmen, setze man $s=0$, so wird $p = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha$. Folglich ist

$$b - \frac{g}{2mu^2} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{1}{2} \log(\operatorname{tg} \alpha + \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \alpha}).$$

Diese Gleichung bestimmt den Wert von b . Der Einfachheit wegen wollen wir jedoch für diesen Wert das Zeichen b beibehalten.

Nun ist

$$ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} = dx \sqrt{1 + p^2}.$$

Setzt man diesen Wert von ds in (12), so folgt

$$-g e^{2ms} dx = u^2 dp.$$

Eliminiert man hieraus und aus (13) die Grösse e^{2ms} , so kommt

$$(14) \quad m dx = \frac{dp}{p \sqrt{1+p^2} + \log(p + \sqrt{1+p^2}) - 2b}.$$

Multipliziert man hier mit $\frac{dy}{dx} = p$, so wird

$$(15) \quad m dy = \frac{p dp}{p \sqrt{1+p^2} + \log(p + \sqrt{1+p^2}) - 2b}.$$

Aus (4) folgt

$$g dt^2 = -dx dp.$$

Setzt man hierin den Wert von dx aus (14) und zieht die Quadratwurzel aus, so erhält man

$$(16) \quad \sqrt{mg} \cdot dt = \frac{-dp}{[2b - p\sqrt{1+p^2} - \log(p + \sqrt{1+p^2})]^{\frac{1}{2}}}.$$

Hier ist deswegen das negative Zeichen der Quadratwurzel beibehalten, weil für die aufsteigende Bewegung p ab- und t zunimmt, also dp und dt ungleiche Zeichen haben müssen.

Da ferner

$$v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2},$$

so erhält man den Wert von v^2 , wenn man hierin die Werte von dx , dy und dt aus (14), (15) und (16) einführt. Es wird

$$(17) \quad v^2 = \frac{g}{m} \cdot \frac{1+p^2}{2b - p\sqrt{1+p^2} - \log(p + \sqrt{1+p^2})}.$$

Die Formeln (14), (15) und (16) können nur durch Annäherungsmethoden integriert werden. Eine dieser Methoden besteht in der Reihenentwicklung. Sie ist jedoch nur unter der Voraussetzung der Konvergenz der Reihen zulässig.

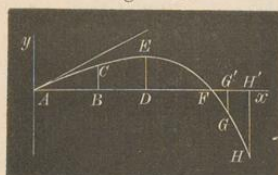
Eine andere Methode besteht darin, dass man diese Differentialgleichungen nach § 343 konstruiert. Man betrachtet für alle drei Kurven p als Abscisse, so wird x die Ordinate der Kurve (14), y diejenige von (15) und t die von (16). Alle drei Kurven gehen durch den Punkt $x=0$, $y=0$, $t=0$, $p=\operatorname{tg} \alpha$. Sind nun für aufeinander folgende Werte von $p=\operatorname{tg} \alpha$ bis $p=0$ die entsprechenden Werte von x, y, t gefunden, so erhält man den aufsteigenden Ast der Kurve und die Zeit zur Erreichung irgend eines Punktes dieser Kurve. Sodann bestimmt man für Werte von p , welche von 0 aus abnehmen, d. h. negativ werden, den absteigenden Ast, etc.

Man erhält auf diese Weise eine Kurve, deren Aeste nicht mehr symmetrisch sind zur Vertikalen ED (Fig. 140), welche durch den höchsten Punkt geht. Die Wurfweite ist nicht mehr so gross wie für

die Bewegung im leeren Raum, ihr Maximum tritt auch nicht mehr für einen Winkel α von 45° , sondern für einen kleinern ein. Der absteigende Ast neigt sich rascher gegen die Abscissenachse als der aufsteigende. Man denke sich die absteigende Bewegung bis ins Unendliche möglich, so wird das Verhältniss $\frac{dy}{dx} = p$ immer grösser und zuletzt unendlich gross. Für diese Bewegung ist aber p negativ. Vertauscht man deshalb $-p$ mit $+p$ in (14), so kommt

$$(18) \quad m dx = \frac{-dp}{-p\sqrt{1+p^2} + \log(-p + \sqrt{1+p^2}) - 2b}.$$

Fig. 140.



Nun ist aber $\log 1 = 0$; also auch $\log(1 + p^2 - p^2) = 0$; allein

$$1 + p^2 - p^2 = (\sqrt{1+p^2} - p)(\sqrt{1+p^2} + p).$$

Folglich

$$\log(\sqrt{1+p^2} - p) + \log(\sqrt{1+p^2} + p) = 0.$$

Hiernach wird (18) zu

$$m dx = \frac{dp}{p\sqrt{1+p^2} + \log(\sqrt{1+p^2} + p) + 2b}.$$

Denkt man sich hierin p so gross, dass $p\sqrt{1+p^2}$ mit p^2 vertauscht und $\log(\sqrt{1+p^2} + p) + 2b$ gegen p^2 vernachlässigt werden kann, so wird

$$m dx = \frac{dp}{p^2}.$$

Das Integral dieser Gleichung ist

$$(19) \quad mx = -\frac{1}{p} + C.$$

Es erfolge die Bewegung in dem sehr steilen Kurventeile GH. Hierbei gehe die Abscisse $AG' = x'$ über in $AH' = x$ und es verwandele sich p' in p , so sind x' und p' entsprechende Werte des Punktes G. Man erhält für denselben aus (19)

$$mx' = -\frac{1}{p'} + C.$$

Also durch Subtraktion und Division mit m

$$G'H' = x - x' = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} \right).$$

Da p ins Unendliche wächst, so nähert sich die Grösse

$$x = x' + \frac{1}{m} \left(\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} \right)$$

mehr und mehr der konstanten Grenze

$$x = x' + \frac{1}{m p'}.$$

Also nähert sich auch der absteigende Ast mehr und mehr einer vertikalen Geraden, welche diesen endlichen Abstand von der Ordinatenaxe hat. Diese vertikale Gerade ist mithin eine Asymptote dieses Astes.

Nimmt man auch in (17) die Grösse p negativ und so gross, dass der Nenner des zweiten Bruches rechts mit p^2 vertauscht werden kann, so erhält man

$$v = \sqrt{\frac{g}{m}}.$$

Somit ist $\sqrt{\frac{g}{m}}$ die Grenze, welcher sich die Geschwindigkeit des Körpers bei der absteigenden Bewegung mehr und mehr nähert. An dieser Grenze ist der Luftwiderstand gleich der Schwerkraft.

376. Wärmeleitung in einem prismatischen Stabe. Einem dünnen prismatischen Stabe werde am einen Ende Wärme mitgeteilt. Diese Wärme pflanzt sich im Stabe fort und vermindert sich durch Verluste an die umgebende Luft. Man soll das Gesetz der Temperaturabnahme von einem Ende des Stabes nach dem andern hin bestimmen.

Das Ende A des Stabes, Fig. 141, nehme von irgend einer Wärmequelle her in gleichen Zeiten gleiche Wärmemengen auf, so dass sich die Wärme über den Querschnitt in A gleichförmig verteile; ferner werde die Temperatur der umgebenden Luft, etwa durch Hinzuströmen neuer Luft, konstant auf Null erhalten. Nach einer gewissen Zeit muss in der Bewegung der Wärme durch den Stab der Beharrungszustand eintreten, so dass die Temperatur in einem und demselben Querschnitt des Stabes konstant bleibt. Es seien

q der Querschnitt des Stabes,

u der Umfang dieses Querschnittes,

T, t die Temperaturen in A und m und

$x = A m$ der veränderliche Abstand eines Quer-

schnittes durch den Stab von der Wärmequelle aus.

Die Temperatur t ist eine Funktion von x . Nimmt x um $dx = m n$ zu, so vermindert sich t vermöge der Abkühlung um dt . Zwischen den Querschnitten in m und n liegt ein Prisma von der Länge dx . Wegen dieser geringen Länge kann angenommen werden, es bewege sich die Wärme gleichförmig längs des Weges dx . In diesem Falle ist aber die durch den Querschnitt in m per Zeiteinheit gehende Wärmemenge proportional dem Querschnitt q , der Differenz dt der Temperaturen in m und n und verkehrt proportional der Länge dx des Prismas. Bezeichnet k eine von der Natur des Stabes abhängige Konstante, so ist also die in der Zeiteinheit durch den Querschnitt in m gehende Wärmemenge

$$(1) \quad k q \frac{dt}{dx}.$$

Fig. 141.



Lässt man hierin x in $x + dx$, also t in $t - dt$ übergehen, so erhält man, da dx konstant angenommen wird

$$kq \frac{d(t - dt)}{dx} = kq \left(\frac{dt}{dx} - \frac{d^2t}{dx^2} \right)$$

als Ausdruck für die Wärmemenge, welche durch den Querschnitt in n gleichzeitig geht. Die Differenz

$$(2) \quad kq \frac{d^2t}{dx^2}$$

dieser Wärmemenge ist offenbar gleich derjenigen Wärme, welche die Oberfläche des Prismas mn durch die Abkühlung in gleicher Zeit verliert.

Nun ist aber dieser Wärmeverlust proportional der sich abkühlenden Oberfläche $u dx$ und der Temperatur t des Prismas. Wenn also h den Wärmeverlust bezeichnet, welchen ein Prisma von derselben Substanz, von der Oberfläche 1, bei der Temperatur von 1 Grad, in der Zeiteinheit erleidet, so ist der Wärmeverlust des Prismas mn in derselben Zeit $= hut dx$. Mithin erhält man folgende Gleichung

$$qk \frac{d^2t}{dx^2} = hut dx,$$

$$(3) \quad \frac{d^2t}{dx^2} = \frac{uh}{qk} t.$$

Würde man die Wärme als eine Flüssigkeit betrachten, so wäre im Ausdruck (1) die Grösse $k \frac{dt}{dx}$ die Geschwindigkeit und im Ausdruck (3) die Grösse $k \frac{d^2t}{dx^2}$ die Beschleunigung der Wärmebewegung im Stabe. Diese Beschleunigung wäre daher der Temperatur t proportional. Wenn auf eine und dieselbe frei schwebende Masse Kräfte einwirken, so verhalten sich diese Kräfte wie die Beschleunigungen, welche sie hervorbringen. Bei der in Frage liegenden Wärmebewegung vertritt also die Temperatur die Stelle der Kraft.

Multipliziert man Gleichung (3) mit dt , so kommt

$$(4) \quad \frac{dtd^2t}{dx^2} = \frac{uh}{qk} \cdot t dt.$$

Man setze zur Abkürzung

$$\frac{uh}{qk} = m^2$$

und beachte, dass $dt d^2t = \frac{1}{2} d(dt)^2$, so ergibt sich durch Integration von (4)

$$\left(\frac{dt}{dx} \right)^2 = m^2 t^2 + b,$$

indem man mit b die Konstante der Integration bezeichnet. Hieraus folgt

$$(5) \quad dx = - \frac{dt}{\sqrt{b + m^2 t^2}}.$$

Von den beiden Vorzeichen, mit welchen hier die Quadratwurzel behaftet ist, muss nur das negative genommen werden, weil t abnimmt, wenn x wächst. Das Integral von (5) ist nach Formel (3) des § 80

$$x = - \frac{1}{m} \log [mt + \sqrt{b + m^2 t^2}] + c.$$

Um die Konstante c zu bestimmen, setze man $x=0$. Dadurch wird t zu T . Für diese Werte erhält man also

$$0 = - \frac{1}{m} \log [mT + \sqrt{b + m^2 T^2}] + c.$$

Zieht man diese Gleichung von der vorigen ab, so kommt

$$x = \frac{1}{m} \log \frac{mT + \sqrt{b + m^2 T^2}}{mt + \sqrt{b + m^2 t^2}}.$$

Man multipliziere mit m und gehe von den Logarithmen zu den Zahlen über, so wird

$$e^{mx} = \frac{mT + \sqrt{b + m^2 T^2}}{mt + \sqrt{b + m^2 t^2}}.$$

Der Zähler rechts ist eine konstante Grösse. Bezeichnet man sie mit a , so erhält man hieraus

$$\sqrt{b + m^2 t^2} = -mt + ae^{-mx}.$$

Wird diese Gleichung quadriert, so heben sich die Glieder mit t^2 auf und es wird

$$b = -2mate^{-mx} + a^2 e^{-2mx}.$$

Dividiert man mit dem Faktor von t und bezeichnet mit A und B die konstanten Faktoren der vorkommenden Exponentialgrössen, so erhält man

$$(6) \quad t = Ae^{-mx} + Be^{mx}.$$

Um die Werte der Konstanten A und B zu ermitteln, setze man zunächst $x=\infty$. Dadurch muss die Temperatur t unendlich klein werden. Der erste Teil rechts in (6) wird hierbei in der That unendlich klein, während der zweite unendlich gross ausfällt. Folglich muss $B=0$ sein. Hiernach folgt aus (6)

$$t = Ae^{-mx}.$$

Setzt man hierin $x=0$, so muss t in T übergehen; folglich ist $A=T$. Somit wird die Temperatur t in der Entfernung x von der Wärmequelle sein

$$(7) \quad t = Te^{-mx}.$$

Gesetzt man beobachte in den Abständen x' und x'' von der Wärmequelle die Temperaturen t' und t'' im Stabe, so ist nach (7), indem man den Wert von m wieder einführt

$$t' = T e^{-x' \sqrt{\frac{uh}{qk}}}; \quad t'' = T e^{-x'' \sqrt{\frac{uh}{qk}}}.$$

Man dividiere diese zwei Gleichungen durch einander und nehme die Logarithmen, so erhält man nach einer einfachen Reduktion

$$\sqrt{\frac{h}{k}} = \frac{\log t' - \log t''}{x'' - x'} \sqrt{\frac{q}{u}}.$$

Durch diese Relation kann das Verhältnis $\frac{h}{k}$ zwischen dem Abkühlungs- und Leitungsvermögen der Substanz ermittelt werden.

Es seien $t, t', t'' \dots$ die Temperaturen in Querschnitten, welche die Abstände $x, x + \alpha, x + 2\alpha, \dots$ von A aus haben, so wird nach (7) sein

$$t = T e^{-mx}; \quad t' = T e^{-m(x+\alpha)}; \quad t'' = T e^{-m(x+2\alpha)} \dots$$

Hieraus folgt

$$\frac{t + t''}{t'} = \frac{t' + t'''}{t''} = \dots = e^{m\alpha} + e^{-m\alpha}.$$

Nimmt man daher im Stab Querschnitte an, welche in gleichen Abständen aufeinander folgen, so bieten je drei benachbarte die Eigentümlichkeit, dass die Summe aus den Temperaturen der äussern Querschnitte dividiert durch die Temperatur des innern Querschnittes einen Wert liefert, welcher der ganzen Länge des Stabes nach konstant ist.

XII. Aufgaben über schwingende Bewegungen.

377. Längenschwingungen eines elastischen Stabes. Ein prismatischer Stab AB (Fig. 142) sei in vertikaler Lage am obern Ende befestigt. Am untern Ende B werde ein solches Gewicht P angehängt, dass der Stab eine kleine Ausdehnung BC annimmt. In dieser Stellung sind der Widerstand des Stabes und das Gewicht mit einander im Gleichgewicht. Wird ein zweites Gewicht angehängt, so dehnt sich der Stab um eine weitere Grösse CE aus. Nimmt man dieses zweite Gewicht ab, so zieht sich der Stab vermöge seiner Elastizität zusammen. Diese Elastizität wirkt beschleunigend auf das untere Ende des Stabes, bis dasselbe zur Stelle C zurückgekehrt ist. In C hat also das untere Ende seine grösste Geschwindigkeit; folglich wird es von hier aus die Bewegung aufwärts um eine gewisse Grösse CE' fortsetzen. Wenn der Modul der Elastizität für Ausdehnung und Kompression derselbe und die Elastizität für die eintretenden Längenänderungen eine vollkommene ist, so wird die Verkürzung CE' = CE. Auf die Verkürzung folgt wieder

Fig. 142.



die Ausdehnung, etc., so dass das untere Ende auf- und abgehende Schwingungen macht, welche in gleichen Zeiten vollendet werden. Es seien

L, q die primitive Länge AB und der Querschnitt des Stabes,
 $a = BC$ die durch das Gewicht P bewirkte Ausdehnung,
 $b = CE$ die durch ein zweites Gewicht hervorgebrachte Ausdehnung,
 $x = CD$ eine variable Ausdehnung, welche in der Zeit t von der Gleichgewichtslage C aus erreicht wird,
 E der Modul der Elastizität des Stabes und
 g die Beschleunigung beim freien Fall der Körper,

so ist nach dem in § 198 ausgesprochenen Gesetze die Kraft P , welche die Ausdehnung a bewirkt

$$(1) \quad P = E \frac{a}{L} q.$$

Folglich die Kraft, welche dem Stab eine Ausdehnung $= a + x$ beibringt, gleich

$$(2) \quad E \frac{a + x}{L} q.$$

Diese Kraft kann auch als Widerstand des Stabes angesehen werden, den er der Ausdehnung entgegensetzt. Folglich ist die Differenz

$$(3) \quad E \frac{a + x}{L} q - P = E \frac{x}{L} q$$

der Widerstand, welchen der Stab der Bewegung des Gewichtes P abwärts entgegensetzt.

Die Beschleunigung, mit welcher diese Bewegung in D erfolgt, sei g' . Statt dass also das Gewicht P frei herabfällt und die Beschleunigung g annimmt, bewegt es sich mit einer Beschleunigung g' . Die diesen Bewegungen entsprechenden Beschleunigungen verhalten sich wie die Kräfte, so dass man hat

$$g' : g = E \frac{x}{L} q : E \frac{a}{L} q,$$

$$g' = g \frac{x}{a}.$$

Da aber der Ausdruck für die Beschleunigung auch $\frac{d^2 x}{dt^2}$ ist, so hat man ohne Rücksicht auf das Gewicht des Stabes

$$(4) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = -g \frac{x}{a}.$$

Hier ist das negative Zeichen genommen, weil einer verzögerten Bewegung eine negative Beschleunigung entspricht.

Man multipliziere mit $2 dx$ und integriere, indem man dt als konstant betrachtet, so erhält man

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = C - g \frac{x^2}{a}.$$

Die Grösse $\frac{dx}{dt}$ bezeichnet die Geschwindigkeit des Stabes in D.
Für $x = CE = b$, d. h. für den tiefsten Punkt, wird $\frac{dx}{dt} = 0$. Dies gibt

$$0 = C - g \frac{b^2}{a}.$$

Folglich durch Subtraktion der beiden letzten Gleichungen

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{g}{a}(b^2 - x^2),$$

woraus folgt

$$dt = \sqrt{\frac{a}{g}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{b^2 - x^2}}. \quad (1)$$

Diese Quadratwurzel erhält das positive Zeichen, weil x und t beim Sinken von D gleichzeitig zunehmen. Die Integration gibt

$$t = \sqrt{\frac{a}{g}} \text{Arc sin } \frac{x}{b}. \quad (2)$$

Die Konstante der Integration ist weggelassen, weil für $x = 0$ auch $t = 0$ wird.

Für $x = b$ wird t zur halben Dauer T einer Schwingung. Die Schwingungszeit ist mithin

$$(5) \quad T = \pi \sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Diese Zeit stimmt überein mit der Schwingungszeit eines einfachen Pendels, dessen Länge $= a$ ist. Da nun aber a immer sehr klein ist, so fallen diese Schwingungen sehr rasch aus. Führt man den Wert von a aus (1) in (5), so erhält man

$$T = \pi \sqrt{\frac{PL}{gEq}}.$$

378. Querschwingungen eines elastischen Stabes. Ein prismatischer Stab AB (Fig. 143) sei in horizontaler Lage am einen Ende A befestigt, am andern hänge ein Gewicht P, so dass dadurch der Aufhängepunkt B eine kleine Senkung BC = a annehme. Wird noch ein zweites Gewicht angehängt, so nehme seine Senkung um den kleinen Wert CE = b zu. Wird dieses zweite Gewicht abgenommen, so geht der Aufhängepunkt, vermöge der Elastizität des Materials, in die Höhe und macht von da an um die Gleichgewichtslage C herum Schwingungen von gleicher Schwingungsdauer und gleicher Ausweichung von C aus, unter der Voraussetzung vollkommener Elastizität.

Fig. 143.



Die Bewegung beginne vom Punkte C aus abwärts. Nach der Zeit t lege der Aufhängepunkt einen Weg $CD = x$ zurück. Es sei L

die Länge des Stabes und M das Elastizitätsmoment (§ 363) desselben, so ist nach § 364 die Kraft, welche die Senkung a bewirkt

$$(1) \quad P = \frac{3M}{L^3} a,$$

somit auch die Kraft, welche einer Senkung $BD = a + x$ entspricht, gleich

$$(2) \quad \frac{3M}{L^3} (a + x).$$

Der Unterschied dieser Kräfte (1) und (2) ist der Widerstand, welchen der Stab der weitem Bewegung abwärts entgegengesetzt. Bezeichnen daher g' und g die Beschleunigungen des Gewichtes P , hervorgerufen am Stab und beim freien Fall, so erhält man ohne Rücksicht auf das Gewicht des Stabes $g' : g = \frac{3M}{L^3} x : P$; daher vermöge (1)

$$(3) \quad g' = \frac{g}{a} x.$$

Hiernach erhält man, wie in der vorigen Aufgabe, als Differentialformel der Bewegung, indem man wegen der verzögerten Bewegung g' mit negativem Zeichen einführt

$$(4) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = - \frac{g}{a} x,$$

somit auch als Wert T einer Schwingungszeit

$$T = \pi \sqrt{\frac{a}{g}} = \pi \sqrt{\frac{PL^3}{3gM}}.$$

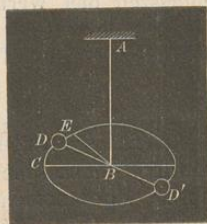
379. Schwingungen eines Torsionspendels. Ein elastischer Cylinder AB (Fig. 144) befinde sich in vertikaler Lage. Sein oberes Ende A sei befestigt. Durch das untere Ende B gehe eine horizontale Stange mit gleichen Armen BD, BD' , welche gleiche Gewichte tragen. Ist der Cylinder nicht verdreht, so besteht Gleichgewicht. Diese Gleichgewichtslage sei in BC . Dreht man den Arm BC in einer horizontalen Ebene um einen Winkel $EBC = \alpha$, so wird der Cylinder verdreht und es ist das statische Moment der Kraft, welche die Fasern des Cylinders verdreht, nach § 204 Formel (10)

$$(1) \quad \frac{\pi E r^4}{5L} \alpha,$$

wobei r den Halbmesser und L die Länge des Cylinders und E den Modul der Elastizität des Materials bezeichnen. Man überlasse nun das Pendel in der Lage BE sich selbst. Nimmt alsdann der Drehwinkel α während der Zeit t um $\alpha - \varphi$ ab, wobei φ den veränderlichen Winkel DBC bezeichnet, so ist jenes Torsionsmoment (1) nur noch

$$(2) \quad \frac{\pi E r^4}{5L} \varphi.$$

Fig. 144.



Mit diesem statischen Moment werden die Gewichte in D, D' gegen die Gleichgewichtslage getrieben. Die treibende Kraft hört erst auf für $\varphi = 0$, d. h. erst in der Gleichgewichtslage; also wird die Bewegung bis dahin beschleunigt; jenseits der Gleichgewichtslage wird sie verzögert. Es entsteht eine schwingende Bewegung mit konstanter Schwingungszeit und konstanter Schwingungsweite bei vollkommener Elastizität des Cylinders.

Man denke sich sämtliche schwingende Massen, unter Anwendung der Lehre vom Trägheitsmoment (§ 180) in ihren Mittelpunkt der Trägheit vereinigt, d. h. in einen Punkt, in welchem sie den gleichen Einfluss auf die Drehung ausüben, wie die vereinzelter Massen (der Arme und Gewichte) in ihren jetzigen Lagen. Der Abstand dieses Mittelpunktes der Trägheit von der Drehachse sei $= a$ und das Gewicht der in diesem Punkte vereinigten Massen $= P$. Denkt man sich das statische Moment (2) am Hebelsarm a , in der Richtung der Bewegung, wirkend, so ist die diesem Momente entsprechende Kraft gleich

$$\frac{\pi E r^4}{5 a L} \varphi.$$

Das Gewicht P drehe sich in D mit der Beschleunigung g' . Bezeichnet daher g die Beschleunigung beim freien Fall, so müssen sich die Kräfte, welche auf eine und dieselbe Masse wirken, wie ihre Beschleunigungen verhalten, so dass man hat

$$g' : g = \frac{\pi E r^4}{5 a L} \varphi : P; \quad g' = \frac{g}{P} \cdot \frac{\pi E r^4}{5 a L} \varphi.$$

Ist $x = \text{Bogen } CD = a \varphi$, so wird der Ausdruck für die Beschleunigung auch $\frac{d^2 x}{dt^2} = a \frac{d^2 \varphi}{dt^2}$. Daher erhält man in gleicher Weise wie in den beiden letzten Aufgaben

$$a \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = - \frac{g}{P} \cdot \frac{\pi E r^4}{5 a L} \varphi.$$

Bezeichnet man den konstanten Faktor von φ rechts mit u , so erhält man

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = - \frac{u}{a} \varphi.$$

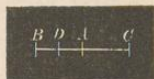
Diese Gleichung stimmt der Form nach mit den Formeln (4) der beiden letzten Aufgaben überein. Man erhält deshalb für die Schwingungszeit den Wert

$$T = \pi \sqrt{\frac{a}{u}} = \pi \sqrt{\frac{P}{g} \cdot \frac{a^2}{\left(\frac{\pi E r^4}{5 L}\right)}}.$$

380. Schwingungen eines elastischen Mittels. Dieses Mittel (Luft, Aether), habe überall gleiche Dichte. Eines seiner Teilchen werde durch eine momentane äussere Einwirkung in einer gewissen Richtung AB (Fig. 145) verschoben. Dadurch wird das Mittel in der

Richtung der Bewegung verdichtet. Die dadurch vergrößerte Expansivkraft des Mittels erschöpft die Bewegung des Teilchens und treibt es wieder in die Anfangslage A zurück. Bei dieser rückgängigen Bewegung wirkt die Expansivkraft des Mittels beschleunigend bis zum Punkte A. Also nimmt die Geschwindigkeit bis zu dieser Stelle zu und es muss das Teilchen über A hinaus in der Richtung nach C hin sich bewegen. Auf dieser Seite tritt die gleiche Erscheinung ein wie auf Seite von B. Also schwingt das Teilchen um die Gleichgewichtslage A hin und her.

Fig. 145.



Nach der Zeit t habe das Teilchen den Weg $AD = x$ von der Gleichgewichtslage aus durchlaufen. Der Widerstand des Mittels ist eine Funktion von x , welche für $x = 0$ verschwinden muss. Würde man also diese Funktion in eine Reihe nach ganzen Potenzen von x auflösen, so dürfte kein Glied ohne x vorkommen. Diese Reihe müsste also die Form haben

$$Ax + Bx^2 + Cx^3 + \dots$$

Da nun aber die grössten Werte von x als sehr klein vorausgesetzt werden, so kann man annehmen, es verschwinden die Glieder mit der zweiten und den höhern Potenzen von x gegen das erste Glied. Der Widerstand des Mittels kann deshalb $= Ax$ und die ihm proportionale Beschleunigung $= kx$ gesetzt werden. Allein diese Beschleunigung, als einer verzögerten Bewegung entsprechend, ist negativ. Deshalb wird die Differentialformel der Bewegung

$$(1) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx.$$

Man multipliziere mit $2dx$ und integriere, so kommt

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = C - kx^2.$$

Nun sei die grösste Ausweichung $AB = a$, so wird die Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt} = 0$ für $x = a$; dies gibt

$$0 = C - ka^2$$

und durch Subtraktion

$$(2) \quad \frac{dx^2}{dt^2} = k(a^2 - x^2).$$

Hieraus folgt

$$\sqrt{k} dt = \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

wobei der Quadratwurzel das positive Zeichen gegeben wird, weil x und t gleichzeitig wachsen. Man integriere, so kommt

$$t\sqrt{k} = \text{Arc sin } \frac{x}{a}.$$

Die Integrationskonstante ist weggelassen, weil für $x=0$ auch $t=0$ wird. Geht man vom Bogen zum Sinus über, so wird

$$(3) \quad x = a \sin t \sqrt{k}.$$

Wird diese Formel differentiiert und die Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt}$ mit v bezeichnet, so erhält man

$$(4) \quad v = a \sqrt{k} \cos t \sqrt{k}.$$

Man könnte auch diesen Wert von v erhalten, wenn man den Wert von x aus (3) in (2) einführt.

Nun sei T die Zeit, welche das Teilchen zu einer Hin- und Herbewegung braucht, so wird es überhaupt am Anfang und Ende der Zeitdauer T die nämliche Stelle der Bahn in der gleichen Richtung passieren. Diese Zeit wollen wir hier Schwingungszeit nennen.

Die Sinus und Cosinus von Bogen, welche um ein Vielfaches von 2π von einander abweichen, sind einander gleich mit gleichen Zeichen. Bezeichnet daher n irgend eine ganze Zahl und schreibt man

$$2\pi n + t \sqrt{k} = \left(\frac{2\pi n}{\sqrt{k}} + t \right) \sqrt{k},$$

so erhält man aus (3) und (4)

$$(5) \quad x = a \sin \left(\frac{2\pi n}{\sqrt{k}} + t \right) \sqrt{k},$$

$$(6) \quad v = a \sqrt{k} \cos \left(\frac{2\pi n}{\sqrt{k}} + t \right) \sqrt{k}. \quad (1)$$

Setzt man hierin der Reihe nach $n=1, 2, 3, \dots$, so wird die Zeit t je um $\frac{2\pi}{\sqrt{k}}$ vergrößert; dabei erhalten x und v für alle diese Substitutionen gleichen Wert. Folglich ist $\frac{2\pi}{\sqrt{k}}$ die konstante Schwingungszeit, so dass man hat

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k}}.$$

Führt man den Wert von $\sqrt{k}$ aus dieser Formel in (5) und (6), so kommt

$$(7) \quad x = a \sin \frac{2\pi t}{T}.$$

$$(8) \quad v = \frac{2a\pi}{T} \cos \frac{2\pi t}{T}.$$

Für $t=0, T, 2T, \dots$ wird $x=0$ und v ein Maximum. Bezeichnet man diesen grössten Wert, welchen das bewegliche Teilchen in der Gleichgewichtslage besitzt, mit V , so erhält man aus (8)

$$V = \frac{2\pi a}{T}.$$

Die Sinus und Cosinus von Bogen, welche um π von einander abweichen, haben gleiche Werte mit entgegengesetzten Vorzeichen. Lässt man daher in (7) und (8) die Zeit t um eine halbe Schwingungsdauer, also um $\frac{1}{2} T$, zunehmen, so erhält man

$$x = a \sin \frac{2\pi}{T} \left(t + \frac{T}{2} \right) = -a \sin \frac{2\pi t}{T},$$

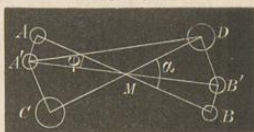
$$v = a \sqrt{k} \cos \left(\frac{2\pi t}{T} + \pi \right) = -a \sqrt{k} \cos \frac{2\pi t}{T}.$$

Somit hat das schwingende Teilchen nach jeder halben Schwingungszeit gleichen Abstand von der Gleichgewichtslage und gleiche Geschwindigkeit, beides jedoch in entgegengesetzter Richtung.

381. Bestimmung der mittleren Dichtigkeit der Erde, nach Cavendish.

Es sei AB (Fig. 146) ein sehr dünner, prismatischer Körper von Holz, an dessen beiden Enden A und B zwei gleiche Bleikugeln angebracht sind. In der Mitte M zwischen diesen Kugeln sei der Stab an einem dünnen Drahte aufgehängt, so wird der Stab eine horizontale Lage annehmen. Dreht man denselben in einer horizontalen Ebene in eine andere Lage A'B' und lässt ihn los, so wird er vermöge der Elastizität des Aufhängedrahtes zurückkehren und um die Gleichgewichtslage AB hin- und herschwingen.

Fig. 146.



Man bringe nun in der Schwingungsebene, in einer Geraden CMD, in gleichen Entfernungen von M, zwei gleiche Kugeln von dichtem Stoffe, z. B. von Blei, in fester Lage an, so werden die Kugeln A, B von diesen Kugeln angezogen und vermöge der Elastizität des Drahtes in Schwingungen versetzt. Diese Anziehung findet statt nach dem Gesetze der Gravitation, und zwar so, als wenn die Massen der Kugeln in ihren Mittelpunkten vereinigt wären. Es seien

$a = AM$ die Entfernung der beiden Kugeln A, B von der Drehachse,

$b = CM$ die Entfernung der Kugeln C, D von dieser Achse,

α der Winkel DMB, welchen die Anfangslage MB mit der Geraden MD bildet,

φ der veränderliche Winkel AMA', welchen die schwingende Pendelstange in der Zeit t von der Anfangslage AM aus beschreibt,

e die Beschleunigung, welche die Anziehung der Kugel A auf eine Masseneinheit der Kugel C hervorbringt, wenn beide Kugeln den Abstand 1 zu einander haben,

m die Masse einer der Kugeln C, D,

so werden die Beschleunigungen, welche die Kugeln C, D der Kugel A' beizubringen vermögen, sein

$$\text{Kugel C in der Richtung } CA' = e \frac{m}{CA'^2},$$

$$\text{Kugel D in der Richtung } DA' = e \frac{m}{DA'^2}.$$

Man zerlege diese Beschleunigungen in Seitenbeschleunigungen, welche senkrecht und parallel sind zur Pendelstange A'B'. Die letzteren gehen für die Drehung verloren, nur die erstern entsprechen der Drehung. Diese sind

$$em \frac{\sin MA'C}{A'C^2}, \quad em \frac{\sin MA'D}{A'D^2}.$$

Die erstere dieser Beschleunigungen nimmt mit φ zu, die letztere ab, sie haben also entgegengesetzte Vorzeichen. Die wirkliche Beschleunigung, welche die Kugeln C, D der Kugel A' beibringen, ist daher

$$(1) \quad em \left(\frac{\sin MA'C}{A'C^2} - \frac{\sin MA'D}{A'D^2} \right).$$

Allein die Dreiecke CMA' und DMA' geben die Proportionen

$$b : A'C = \sin MA'C : \sin(\alpha - \varphi),$$

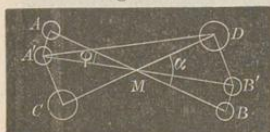
$$b : A'D = \sin MA'D : \sin(\alpha - \varphi).$$

Führt man hieraus die Werte von $\sin MA'C$ und $\sin MA'D$ in (1), so kommt

$$(2) \quad b \sin(\alpha - \varphi) \left[\frac{1}{A'C^3} - \frac{1}{A'D^3} \right].$$

Hierin sind noch die Abstände A'C und A'D durch a, b, α, φ auszudrücken. Es ist für die schon genannten Dreiecke

Fig. 146.



$$A'C^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\alpha - \varphi),$$

$$A'D^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos A'MD.$$

Allein $\cos A'MD = -\cos(\alpha - \varphi)$; folglich

$$A'D^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos(\alpha - \varphi).$$

Der Schwingungswinkel φ wird sehr klein ausfallen. Unter dieser Voraussetzung kann man daher annehmen

$$\cos \varphi = 1, \quad \sin \varphi = \varphi; \quad \cos(\alpha - \varphi) = \cos \alpha - \varphi \sin \alpha.$$

Deshalb wird sein

$$A'C^2 = a^2 + b^2 - 2ab(\cos \alpha - \varphi \sin \alpha),$$

$$A'D^2 = a^2 + b^2 + 2ab(\cos \alpha - \varphi \sin \alpha).$$

Setzt man zur Vereinfachung

$$(3) \quad p^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha; \quad q^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha,$$

so wird

$$A'C^2 = p^2 + 2ab \varphi \sin \alpha,$$

$$A'D^2 = q^2 - 2ab \varphi \sin \alpha.$$

Man erhebe diese Ausdrücke auf die Potenz $-\frac{3}{2}$ und vernachlässige die Glieder der Reihen, in welchen φ die erste Potenz überschreitet, so kommt

$$(4) \quad \frac{1}{A' C^3} = \frac{1}{p^3} - \frac{3 a b \sin \alpha}{p^5} \varphi.$$

$$(5) \quad \frac{1}{A' D^3} = \frac{1}{q^3} + \frac{3 a b \sin \alpha}{q^5} \varphi.$$

Zieht man (5) von (4) ab, nach Vorschrift von Formel (2), multipliziert sodann mit

$$\sin(\alpha - \varphi) = \sin \alpha - \varphi \cos \alpha,$$

indem man die Glieder mit φ^2 vernachlässigt, und setzt zur Abkürzung

$$(6) \quad \sin \alpha \left(\frac{1}{p^3} - \frac{1}{q^3} \right) = h,$$

$$(7) \quad -3 a b \sin^2 \alpha \left(\frac{1}{p^5} - \frac{1}{q^5} \right) - \cos \alpha \left(\frac{1}{p^3} - \frac{1}{q^3} \right) = k,$$

so wird der Ausdruck (2) für die Beschleunigung der Kugel A' vermöge der Anziehung sein

$$(8) \quad e m b (h + k \varphi).$$

Die Elastizität des Aufhängedrahtes widersteht der Drehung mit einer Kraft, welche dem Torsionswinkel φ proportional ist (§ 204). Also wird auch die dieser Kraft entsprechende Beschleunigung der Grösse φ proportional sein, also mit $n\varphi$ bezeichnet werden können. Da der Einfluss der Kugeln C, D auf die Kugel B' gleich gross ist wie auf A', so ist also vom Doppelten der Beschleunigung (8) die Grösse $n\varphi$ abzuziehen, um die wirkliche Beschleunigung zu erhalten.

Diese Beschleunigung ist aber auch $\frac{d^2 x}{dt^2}$, wo x den Bogen AA' = $a\varphi$ bezeichnet. Da nun $dx = a d\varphi$ und $d^2 x = a d^2 \varphi$, so wird mithin die Differentialgleichung der Bewegung sein

$$(9) \quad a \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = 2 e m b (h + k \varphi) - n \varphi.$$

Man multipliziere mit $2 d\varphi$ und integriere, indem man dt als konstant betrachtet, so kommt

$$(10) \quad a \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = 4 e m b h \varphi + (2 e m b k - n) \varphi^2.$$

Die Konstante der Integration ist = 0, weil für $\varphi = 0$ das Pendel in der Anfangslage AM sich befindet, also auch die Geschwindigkeit $\frac{a d\varphi}{dt}$ daselbst = 0 ist.

In einer bestimmten Lage der Pendelstange halten sich der Torsionswiderstand des Drahtes und die Anziehung der Kugeln das Gleichgewicht. In dieser Lage bilde die Stange mit der Anfangslage den Winkel φ' . Während also die Gerade AM die Ruhelage ist ohne Anziehung der Kugeln, so ist die Richtung, welche mit AM den Winkel φ' bildet, die Ruhelage unter Einwirkung der Kugeln.

Setzt man $\varphi = \varphi'$ in (9), so wird die Beschleunigung $a \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = 0$; dies gibt

$$2 e m b k - n = - \frac{2 e m b h}{\varphi'}.$$

Führt man diesen Wert von $2 e m b k - n$ in (10), so folgt

$$(11) \quad a \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \frac{2 e m b h}{\varphi'} (2 \varphi' \varphi - \varphi^2).$$

Da nun $\frac{a d\varphi}{dt}$ die Geschwindigkeit bezeichnet, so muss diese Grösse zu beiden Seiten eines Schwingungsbogens $= 0$ sein. Für $\frac{a d\varphi}{dt} = 0$ erhält man aber aus (11)

$$2 \varphi' \varphi - \varphi^2 = 0 \quad \text{oder} \quad \varphi (2 \varphi' - \varphi) = 0.$$

Das Produkt $\varphi (2 \varphi' - \varphi)$ kann aber nur $= 0$ werden, wenn einer der Faktoren $= 0$ ist. Daraus folgt

$$\varphi = 0, \quad \varphi = 2 \varphi'.$$

Der erstere Wert von φ entspricht dem Anfang, der andere dem Ende einer Schwingung; also ist der Schwingungsbogen das Doppelte von der Ablenkung φ' .

Sondert man die Veränderlichen in (11) und nimmt für $d\varphi$ und dt bei der Quadratwurzelziehung gleiche Zeichen, indem φ und t gleichzeitig wachsen, so wird

$$dt \sqrt{\frac{2 e m b h}{a \varphi'}} = \frac{d\varphi}{\sqrt{2 \varphi' \varphi - \varphi^2}}.$$

Das Integral dieser Gleichung ist nach § 78, Formel (8)

$$t \sqrt{\frac{2 e m b h}{a \varphi'}} = \text{Arc sin} \frac{2 \varphi - 2 \varphi'}{2 \varphi'} + C.$$

Für $t = 0$ ist $\varphi = 0$; folglich

$$0 = \text{Arc sin} (-1) + C,$$

$$0 = -\frac{\pi}{2} + C,$$

so dass man durch Subtraktion erhält

$$t \sqrt{\frac{2 e m b h}{a \varphi'}} = \frac{\pi}{2} + \text{Arc sin} \frac{\varphi - \varphi'}{\varphi'}.$$

Für $\varphi = 2 \varphi'$ wird t zur Zeit T einer einfachen Schwingung; folglich ist

$$T \sqrt{\frac{2 e m b h}{a \varphi'}} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}.$$

$$(12) \quad T = \pi \sqrt{\frac{a \varphi'}{2 e m b h}}.$$

Um diese Formel zur Bestimmung der mittleren Dichte der Erdmasse brauchbar zu machen, sei

L die Länge eines Sekundenpendels,

g die Beschleunigung beim freien Fall,

M die Masse der Erde,

s das Gewicht der Kubikeinheit der Erdmasse von mittlerer Dichte und

r der Erdradius der als kugelförmig gedachten Erde,

so erhält man aus Formel (6) des § 163 für die Länge des Sekundenpendels, wenn man daselbst $T = 1$ setzt

$$g = L \pi^2$$

und als Beschleunigung derselben durch die Erdmasse, wenn man eine der Kugeln A oder B als schweren Körper des Sekundenpendels sich denkt

$$g = e \frac{M}{r^2}.$$

Setzt man diese beiden Werte von g einander gleich, so folgt

$$(13) \quad L \pi^2 = e \frac{M}{r^2}.$$

Eliminiert man e aus (12) und (13), so wird

$$(14) \quad T = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{a \varphi'}{2bhL} \cdot \frac{M}{m}}.$$

Die Massen M und m sind den Gewichten der Erde und der Bleikugeln C, D proportional. Wir nehmen daher an, es bezeichnen M, m die Gewichte dieser Körper, so ist

$$M = \frac{4}{3} r^3 \pi s.$$

Führt man diesen Wert von M in (14), so folgt der gesuchte Wert

$$(15) \quad s = \frac{3}{2\pi} \cdot \frac{bh}{a \varphi'} \cdot \frac{L}{r} \cdot T^2 m.$$

Bei Versuchen, welche Cavendish von 1797 bis 1798 anstellte, wurde der Zoll als Längenmass und das Gewicht von 1 Kubikzoll Wasser als Einheit der Gewichte angenommen. Bei diesen Versuchen ergaben sich nach Schmidt's mathematischer und physikalischer Geographie im Mittel

Gewicht einer der Bleikugeln C, D = 9662,3,

Länge der Arme a = b = 36,65,

Winkel $\alpha = 13^\circ 58' 26''$,

Bogen (für den Radius = 1) $\varphi' = 0,0079373$,

Schwingungszeit T = 424,5 Sekunden.

Berechnet man mittelst der Werte von a, b, α die Grössen p und q nach (3), sodann nach (6) die Grösse h, so erhält man

$$\log \text{ brig } h = 6,53156 - 10.$$

Ferner hat man für das Verhältnis $\frac{L}{r}$ den briggschen Logarithmus

$$\log \text{brig} \left(\frac{L}{r} \right) = 3,19329 - 10.$$

Für diese Daten wird nach (15)

$$s = 5,52,$$

d. h. ein Kubikzoll Erdmasse wiegt durchschnittlich 5,52 mal mehr als 1 Kubikzoll Wasser; also ist die mittlere Dichte der Erdmasse = 5,52.

382. Schwingungen des Pendels in der Luft. Es sei

a die Länge der Pendelstange AB (Fig. 147),

α, φ die Winkel BAF und CAF, um welche diese Stange im Anfange der Bewegung und nach der Zeit t von der vertikalen Richtung AF abweicht,

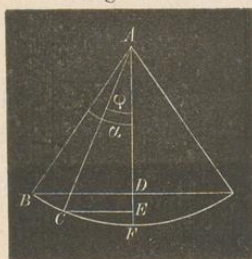
$s = a(\alpha - \varphi) = BC$ der Bogen, welcher vom Beginne der Bewegung an vom schweren Punkt in der Zeit t durchlaufen wird und

g die Beschleunigung beim freien Fall der Körper, also

$g \sin \varphi$ die Beschleunigung der Bewegung in der Richtung der Tangente an den Schwingungsbogen in C.

Diese Beschleunigung wird durch den Luftwiderstand vermindert. Dieser Luftwiderstand ist für sehr langsame Bewegungen sehr nahe der ersten, für rasche Bewegungen sehr nahe der zweiten Potenz der Geschwindigkeit proportional. Wir setzen sehr kleine Schwingungsbogen voraus, und nehmen an, es sei der Luftwiderstand der Geschwindigkeit proportional. Also wird die Beschleunigung $g \sin \varphi$ vermindert um den Betrag $k \frac{ds}{dt}$, worin $\frac{ds}{dt}$ die Geschwindigkeit in C und k eine Konstante bezeichnet. Somit ist die Beschleunigung des Pendels

Fig. 147.



$$(1) \quad \frac{d^2 s}{dt^2} = g \sin \varphi - k \frac{ds}{dt}.$$

Nun ist aber $s = a(\alpha - \varphi)$, also

$$ds = -a d\varphi; \quad d^2 s = -a d^2 \varphi$$

und

$$\sin \varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{2 \cdot 3} + \frac{\varphi^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots$$

Vernachlässigt man in der letzten Reihe, wegen der Kleinheit von φ , die Glieder von φ^3 an, so wird (1) vermöge dieser Werte zu

$$(2) \quad \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + k \frac{d\varphi}{dt} + \frac{g}{a} \varphi = 0.$$

Diese Differentialgleichung ist eine lineare (§ 337) und stimmt mit der in § 352 I behandelten überein.

Behufs der Integration dieser Gleichung (2) setze man

$$(3) \quad \varphi = c e^{\beta t};$$

worin c und β konstante Grössen und e die Basis der natürlichen Logarithmen bezeichnen. Durch Differentiation von (3) folgt

$$\frac{d\varphi}{dt} = \beta c e^{\beta t}; \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \beta^2 c e^{\beta t}.$$

Setzt man diese Werte von φ , $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ in (2), so kommt

$$(4) \quad \beta^2 + \beta k + \frac{g}{a} = 0.$$

Durch Auflösung dieser Gleichung in Hinsicht β findet man

$$(5) \quad \beta = -\frac{k}{2} \pm \sqrt{\frac{k^2}{4} - \frac{g}{a}}.$$

Die Grösse k ist sehr klein, folglich die Grösse unter dem Quadratwurzelzeichen negativ. Man setze daher zur Abkürzung

$$(6) \quad \frac{k}{2} = m; \quad \sqrt{\frac{k^2}{4} - \frac{g}{a}} = n\sqrt{-1},$$

so gibt (5) für β folgende zwei Werte

$$-m + n\sqrt{-1} \quad \text{und} \quad -m - n\sqrt{-1}.$$

Verfährt man nun, wie auf S. 397 Abteilung „zweiter Fall“ geschehen, so erhält man als allgemeines Integral

$$(7) \quad \varphi = e^{-mt} [\mathfrak{M} \cos nt + \mathfrak{N} \sin nt].$$

Das Differentialverhältnis dieser Gleichung ist

$$(8) \quad \begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} = & -me^{-mt} (\mathfrak{M} \cos nt + \mathfrak{N} \sin nt) \\ & + ne^{-mt} (-\mathfrak{M} \sin nt + \mathfrak{N} \cos nt). \end{aligned}$$

Für den Anfangszustand der Bewegung ist $t=0$, $\varphi=\alpha$ und die Geschwindigkeit $a \frac{d\varphi}{dt} = 0$. Vermöge dieser Werte erhält man aus

(7) und (8)

$$\alpha = \mathfrak{M}; \quad 0 = -m\mathfrak{M} + n\mathfrak{N}.$$

Also sind die Werte der Konstanten

$$\mathfrak{M} = \alpha; \quad \mathfrak{N} = \frac{m}{n} \alpha.$$

Setzt man diese Werte in (7) und (8), so erhält man

$$(9) \quad \varphi = \alpha e^{-mt} \left(\cos nt + \frac{m}{n} \sin nt \right),$$

$$(10) \quad \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{\alpha}{n} e^{-mt} (m^2 + n^2) \sin nt.$$

Nun ist aber nach (6)

$$m^2 = \frac{k^2}{4}; \quad -n^2 = \frac{k^2}{4} - \frac{g}{a}; \quad m^2 + n^2 = \frac{g}{a}.$$

Vermittelst dieser Werte wird (10)

$$(11) \quad a \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{\alpha g}{n} e^{-mt} \sin nt.$$

Die Gleichung (9) bestimmt den Wert von φ und (11) die Geschwindigkeit für irgend eine Zeit.

Am Ende jeder Schwingung ist die Geschwindigkeit $\frac{a d\varphi}{dt} = 0$. Hierfür gibt (11)

$$0 = -\frac{\alpha g}{n} e^{-mt} \sin nt.$$

Diese Gleichung findet statt, wenn $\sin nt = 0$, also wenn nt ein Vielfaches von π ist. Setzt man

$$(12) \quad nt = \pi, \quad \text{also} \quad t = \frac{\pi}{n},$$

so bezeichnet dieser Wert von t die Zeit der ersten Schwingung. Setzt man

$$nt = 2\pi, \quad \text{also} \quad t = \frac{2\pi}{n},$$

so bezeichnet t die Zeit der zwei ersten Schwingungen, etc. Man ersieht hieraus, dass die Zeit für jede Schwingung den gleichen Wert hat oder dass die Schwingungszeit konstant ist.

Es bezeichne T diese konstante Schwingungszeit, so hat man aus (12)

$$T = \frac{\pi}{n}$$

oder indem man aus (6) den Wert von n einführt

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{1 - \frac{ak^2}{4g}}} \sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Denkt man sich den Luftwiderstand weg, so ist $k=0$ und es geht diese Formel über in die für kleine Schwingungsbogen in § 163 angegebene. Die Schwingungszeit desselben Pendels im Luft erfüllten Raume ist also grösser als im leeren Raum im Verhältnis von

$$1 : \sqrt{1 - \frac{ak^2}{4g}}.$$

Es seien $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ die Schwingungsbogen, welche während der ersten, zweiten, dritten, .. Schwingung durchlaufen werden. Aus (9) folgt als Ablenkung der Pendelstange von der vertikalen Richtung

$$\begin{aligned} \text{für } t=0 & \quad \varphi = +\alpha, \\ \text{für } t = \frac{\pi}{n} & \quad \varphi = -\alpha e^{-\frac{m\pi}{n}}, \\ \text{für } t = \frac{2\pi}{n} & \quad \varphi = +\alpha e^{-\frac{2m\pi}{n}}, \\ \text{für } t = \frac{3\pi}{n} & \quad \varphi = -\alpha e^{-\frac{3m\pi}{n}}, \text{ etc.} \end{aligned}$$

Es liegen somit vom tiefsten Punkt aus links und rechts die Bogen

$$\begin{aligned} \text{für die 1te Schwingung } & +\alpha \quad \text{und } -\alpha e^{-\frac{m\pi}{n}}, \\ \text{für die 2te Schwingung } & -\alpha e^{-\frac{m\pi}{n}} \quad \text{und } +\alpha e^{-\frac{2m\pi}{n}}, \\ \text{für die 3te Schwingung } & +\alpha e^{-\frac{2m\pi}{n}} \quad \text{und } -\alpha e^{-\frac{3m\pi}{n}}, \text{ etc.} \end{aligned}$$

Wenn nun die Bogen rechts mit entgegengesetzten Zeichen zu denen links addirt werden, so erhält man die ganzen Schwingungsbogen. Diese sind somit

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= +\alpha \left(1 + e^{-\frac{m\pi}{n}}\right) = +\varphi', \\ \varphi_2 &= -\alpha \left(1 + e^{-\frac{m\pi}{n}}\right) e^{-\frac{m\pi}{n}} = -\varphi' e^{-\frac{m\pi}{n}}, \\ \varphi_3 &= +\alpha \left(1 + e^{-\frac{m\pi}{n}}\right) e^{-\frac{2m\pi}{n}} = +\varphi' e^{-\frac{2m\pi}{n}}, \\ \varphi_4 &= -\alpha \left(1 + e^{-\frac{m\pi}{n}}\right) e^{-\frac{3m\pi}{n}} = -\varphi' e^{-\frac{3m\pi}{n}}, \text{ etc.} \end{aligned}$$

Die Schwingungsbogen bilden hiernach die Glieder einer geometrischen Progression, deren Exponent die Grösse $-e^{-\frac{m\pi}{n}}$ ist. Diese Bögen nehmen allmählich ab, so dass sich die Bewegung nach und nach erschöpft.

Aus (11) folgt durch Differentiation, indem man die Geschwindigkeit $\frac{d\varphi}{dt}$ mit v bezeichnet

$$\frac{dv}{dt} = \alpha g e^{-mt} \left(\frac{m}{n} \sin nt - \cos nt \right).$$

Setzt man diesen Differentialquotienten $= 0$, so findet man denjenigen Wert der Zeit t , für welchen die Geschwindigkeit v ein Maximum wird. Es folgt aus $\frac{dv}{dt} = 0$

$$\frac{m}{n} \sin nt - \cos nt = 0,$$

$$\tan nt = \frac{n}{m} = \sqrt{\frac{4g}{ak^2} - 1}.$$

Wenn hierin $k=0$ gesetzt wird, so wird $\tan nt = \infty$, $nt = \frac{\pi}{2}$, d. h. im luftleeren Raum tritt die grösste Geschwindigkeit in der Mitte der Schwingungszeit ein. Allein im luftgefüllten Raum ist k nicht $=0$, also auch $\frac{4g}{ak^2} - 1$ nicht unendlich gross; folglich wird $\tan nt$ endlich, also $nt < \frac{\pi}{2}$. Die grösste Geschwindigkeit findet also statt vor Ablauf der ersten Hälfte einer jeden Schwingungszeit. Die grösste Geschwindigkeit, welche wir mit u bezeichnen wollen, tritt ein, wenn die Beschleunigung $\frac{d^2s}{dt^2} = 0$, also wenn nach Formel (1) ist

$$g \sin \varphi = k u,$$

oder da $\sin \varphi$ mit φ vertauscht wird, wenn

$$\varphi = \frac{k}{g} u.$$

Diese Ablenkung φ der Stellung des Pendels von der Vertikalen bei der grössten Geschwindigkeit ist somit der Konstanten k direkt proportional.

Setzt man $\varphi=0$ in (9), so wird t zu derjenigen Zeit, welche zur Erreichung des tiefsten Punktes nötig ist. In diesem Falle muss also sein

$$\frac{m}{n} \sin nt + \cos nt = 0,$$

$$\tan nt = -\frac{n}{m} = -\sqrt{\frac{4g}{ak^2} - 1}.$$

Die Grösse unter diesem Quadratwurzelzeichen ist eine sehr grosse Zahl, welche für $k=0$ unendlich wird; folglich wird der Winkel nt nur wenig von $\frac{\pi}{2}$ abweichen, jedoch wegen des negativen Vorzeichens der Quadratwurzel grösser sein als $\frac{\pi}{2}$, d. h. das Pendel braucht zum Niedergang mehr Zeit als zum Aufgang.

383. Schwingungen des physischen Pendels im leeren Raum. Man denke sich die Masse des Pendels in unendlich kleine Teile zerlegt mit verschiedenen Abständen von der Drehachse, so haben diese Teile die Tendenz, für sich so zu schwingen, wie der schwere Punkt eines einfachen Pendels. Den Teilen zunächst der Drehachse entspricht daher

eine kleinere, den entfernteren eine grössere Schwingungsdauer. Da aber die Teile ein starres Ganzes bilden, so kommen die unendlich vielen ungleichen Schwingungszeiten nicht zur Verwirklichung, sondern es bildet sich eine mittlere Schwingungsdauer. Der Punkt am Pendel, dem diese Schwingungszeit angehört, heisst Schwingungspunkt und sein Abstand von der Drehachse Länge des physischen Pendels. Dieser Schwingungspunkt ist zu unterscheiden vom Schwerpunkt des Pendels. Beide fallen nur dann sehr nahe zusammen, wenn die Masse der Pendelstange sehr klein ist.

Es gelte die Bezeichnung von § 382. Ausserdem bezeichne M die Masse des Pendels, also dM ein Massenelement. Dieses habe den Abstand ϱ von der Drehachse und werde in dem Augenblick, da die Zeit t abgelaufen, getrieben von einer Kraft k mit einer Beschleunigung g' , so ist nach § 174, Formel (6)

$$k = g' dM.$$

Es gehe t über in $t + dt$ und der Bogen s in $s + ds$, so erhält man als Ausdruck für die Beschleunigung

$$g' = \frac{d^2 s}{dt^2},$$

daher durch Elimination von g' der Wert der Kraft

$$k = \frac{d^2 s}{dt^2} dM.$$

Diese Kraft liegt in der Richtung der Tangente an den Schwingungsbogen und durchläuft in der Zeit dt den gleich gerichteten Weg ds , verrichtet also eine Arbeit, welche nach § 166 erhalten wird, wenn man die Kraft, welche während der unendlich kleinen Zeit dt als konstant angenommen werden kann, mit dem Weg multipliziert. Diese Arbeit ist daher $= \frac{d^2 s}{dt^2} ds \cdot dM$.

Diese Arbeit kommt her vom Sinken der Masse dM in vertikaler Richtung. Nach der Zeit t habe dM in vertikaler Richtung eine Tiefe z unter der Drehachse, so nimmt z während der Zeit dt zu um dz . Daher sinkt das Gewicht gdM des Teilchens in der Richtung des Gewichtes um dz und verrichtet dabei die Arbeit $gdM \cdot dz$. Durch Gleichsetzen dieser beiden Arbeiten folgt

$$gdM \cdot dz = \frac{d^2 s}{dt^2} ds \cdot dM.$$

Für dasselbe Massenteilchen dM mit gleich bleibendem Abstand ϱ von der Achse erhält man die Arbeit, welche während der Zeit t verrichtet wird, wenn man die vorstehende Gleichung integriert. Das Integral ist

$$(1) \quad gdM \cdot z + C = \frac{1}{2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \cdot dM,$$

worin C die Konstante der Integration und $\frac{ds}{dt}$ die Geschwindigkeit des Teilchens dM nach der Zeit t bezeichnet.

Für $t=0$ wird diese Geschwindigkeit $=0$, während z übergehe in z_0 . Hierfür gibt Gleichung (1)

$$g dM \cdot z_0 + C = 0,$$

daher durch Subtraktion

$$(2) \quad g dM (z - z_0) = \frac{1}{2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \cdot dM.$$

Hier sind nun z und s durch die Variable φ auszudrücken. Man erhält

$$z - z_0 = \rho (\cos \varphi - \cos \alpha)$$

und indem man $\cos \varphi$ und $\cos \alpha$ nach § 66 in Reihen entwickelt und die Glieder von der vierten Potenz der Bogen φ und α an vernachlässigt

$$z - z_0 = \frac{1}{2} \rho (\alpha^2 - \varphi^2).$$

Da $ds = \rho d\varphi$, so geht für diese Werte Gleichung (2) über in

$$g(\alpha^2 - \varphi^2) \cdot \rho dM = \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \cdot \rho^2 dM.$$

Man denke sich nun den Winkel φ konstant und dehne das Massenteilchen dM über die ganze Länge des Pendels aus, so erhält man für den Augenblick, da die Zeit t erreicht ist, das Integral

$$(3) \quad g(\alpha^2 - \varphi^2) \int \rho dM = \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \int \rho^2 dM.$$

Nun ist ρ der Abstand des Teilchens dM von der Achse, also ρdM das statische Moment des Teilchens und $\int \rho dM$ die Summe der statischen Momente aller Pendelteile. Diese Summe ist daher gleich dem statischen Moment der ganzen Masse M . Allein der Hebelsarm dieser Masse ist der Abstand des Schwerpunktes der Masse M von der Achse. Er sei mit a bezeichnet, so ist $\int \rho dM = aM$. Ferner ist das zweite Integral $\int \rho^2 dM$ nichts anderes als das Trägheitsmoment (§ 180) des Pendels. Bezeichnet man dasselbe mit E , so erhält man aus (3)

$$a g M (\alpha^2 - \varphi^2) = E \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2$$

und durch Sonderung der Veränderlichen

$$dt = - \frac{E}{a g M} \frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha^2 - \varphi^2}}.$$

Hierin sind die Vorzeichen von dt und $d\varphi$ entgegengesetzt genommen, weil beim Beginn der Bewegung φ abnimmt, wenn t wächst. Die Integration gibt

$$t = \frac{E}{agM} \text{Arc cos } \frac{\varphi}{\alpha}.$$

Die Konstante der Integration ist weggelassen, weil für $t=0$ auch $\varphi=\alpha$ und $\text{Arc cos } 1=0$ wird.

Bezeichnet T die Zeit zu einer einfachen Schwingung, so findet man $t = \frac{1}{2} T$ für $\varphi=0$, also als Zeit $\frac{1}{2} T$ für $\text{Arc cos } 0 = \frac{\pi}{2}$.

Daher ist

$$T = \pi \sqrt{\frac{E}{agM}}.$$

Nun sei die Länge des physischen Pendels $= L$, so ist L auch die Länge eines einfachen, mathematischen Pendels, das mit obigem physischen Pendel gleiche Schwingungszeit hat; daher wird nach § 163 auch

$$T = \pi \sqrt{\frac{L}{g}}.$$

Setzt man die beiden Werte von T einander gleich, so folgt

$$(4) \quad L = \frac{E}{aM}.$$

I. Besteht das physische Pendel aus einer prismatischen Stange mit der Masse M und der Länge l , so wird $a = \frac{1}{2} l$ und $E = \frac{1}{3} M l^2$ (§ 181) und daher nach (4)

$$L = \frac{2}{3} l.$$

II. Das Pendel bestehe aus einer dünnen prismatischen Stange und einer am untern Ende derselben angehängten Kugel.

Es sei M die Masse der Kugel, r ihr Halbmesser und l der Abstand ihres Mittelpunktes von der Drehachse; ferner sei m die Masse der Stange und es könne die Länge $l-r$ derselben mit l vertauscht werden; so hat man zunächst zur Bestimmung von a folgende Gleichung der statischen Momente

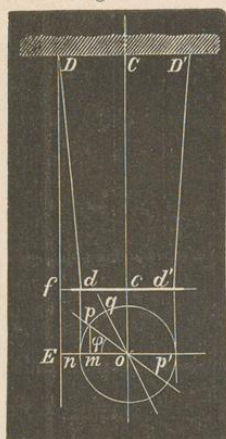
$$(M+m)a = Ml + \frac{1}{2} ml.$$

Das Trägheitsmoment der Kugel für eine Achse durch ihren Mittelpunkt ist nach § 187 $= \frac{2}{5} Mr^2$, also nach § 188 für die Drehachse $= \frac{2}{5} Mr^2 + Ml^2$ und da das Trägheitsmoment der Stange $= \frac{1}{3} m l^2$, so wird die Länge des physischen Pendels nach (4)

$$L = \frac{\frac{1}{3} m + \left[\frac{2}{5} \left(\frac{L^2}{l} \right)^2 + 1 \right] M}{\frac{1}{2} m + M} \cdot l.$$

384. Schwingungen des Bifilarmagnetometers. Bei diesem Apparat, der zum Messen magnetischer und elektrischer Kräfte dient, wird der horizontale Magnetstab an zwei langen, feinen, wenig von einander abstehenden Fäden oder Drähten aufgehängt, welche symmetrisch zur Vertikalen liegen, die durch den Schwerpunkt des Magnetstabes geht. Um diese Vertikale dreht sich der Magnetstab in kleinen Schwingungsbogen, indem er sich abwechselnd etwas hebt und senkt, hin und her.

Fig. 148.



Es seien Cc (Fig. 148) die vertikale Achse, d d' der horizontale Magnetstab und D d, D' d' die Aufhängedrähte. In der Ruhelage befinden sich Drähte und Stab mit der Achse in einer Vertikalebene. In dieser Ebene liege auch die Vertikale Df. Es sei

a = c d = c d' der Abstand der untern Aufhängepunkte von der Achse;

b = C D = C D' derjenige der obern Aufhängepunkte von der Achse;

L = D d die Länge eines Drahtes und

h = D f deren vertikale Projektion, so ist

$$(1) \quad L^2 = h^2 + (b - a)^2.$$

Man gebe dem Magnetstab eine grösste Drehung; er komme dabei aus der Gleichgewichtslage On nach Oq und lege einen Winkel α zurück. Lässt man ihn los, so wird er sinken und sich drehen. Er komme zunächst aus der Lage Oq in die Lage Op und bilde mit der Gleichgewichtslage den Winkel φ ; er durchlaufe also den Winkel $\alpha - \varphi$.

Während dieses Vorganges bewegt sich der Punkt p in einer Kugelfläche, deren Mittelpunkt in D und in einer Cylinderfläche mit der Achse Cc und dem Halbmesser a.

Man nehme nun drei rechtwinkelige Achsen an, mit dem Ursprung in D. Die z Achse liege in DfE, die x Achse in DD', so wird die y Achse senkrecht auf der Ebene xz stehen. Befindet sich der Magnetstab in der Gleichgewichtslage On, so ist Df = z, En = x und y = 0. Allein in der Lage Op ist Em = x, mp = y und z hat sich verkürzt, so dass die drei Koordinaten der Kugelfläche geben

$$x^2 + y^2 + z^2 = L^2.$$

Die horizontalen Koordinaten liefern folgende Gleichung der genannten Cylinderfläche

$$y^2 + (b - x)^2 = a^2.$$

Für die Bahn des Punktes p müssen die Werte von x, ebenso

von y und z in den beiden letzten Gleichungen gleich sein. Eliminiert man aus ihnen y , so folgt

$$(2) \quad z^2 = L^2 + b^2 - a^2 - 2bx.$$

Die Koordinaten x, y in der horizontalen Ebene sind

$$(3) \quad x = b - a \cos \varphi; \quad y = a \sin \varphi.$$

Führt man den Wert von L^2 aus (1) und von x aus (3) in (2), so folgt

$$(4) \quad z = \sqrt{h^2 - 2ab(1 - \cos \varphi)}.$$

Indem der Stab aus der Lage oq in die Lage op gelangt, verfließe eine Zeit t . Man lasse t um dt zunehmen, so ändern sich φ, x, y und z um ihre Differentialien. Ihr Zusammenhang ergibt sich durch Differentiation von (3) und (4). Man erhält

$$(5) \quad dx = a \sin \varphi d\varphi; \quad dy = a \cos \varphi d\varphi; \quad dz = \frac{-ab \sin \varphi d\varphi}{\sqrt{h^2 - 2ab(1 - \cos \varphi)}}.$$

Nun sei M die Masse des Stabes, also nach § 174, Formel (6), gM das Gewicht des Stabes. Während der Zeit dt sinkt dasselbe um den Weg dz und produziert eine Arbeit (Produkt aus Kraft und Weg, wenn Richtung der Kraft und des Weges zusammenfallen) $= gM dz$. Diese Arbeit teilt sich der Masse des Stabes mit und überwindet allfällige Widerstände.

A. Schwingungen ohne Rücksicht auf Widerstände.

Wenn keine Nebenhindernisse in Betracht kommen, so wird die Arbeit, welche während der Periode des Sinkens durch das Gewicht produziert wird, vollständig vom Stab in Form von lebendiger Arbeit aufgenommen, aber auch während der Periode des Steigens verbraucht, weil nunmehr das Gewicht um ebensoviel zu heben ist, als es gesunken war.

Es sei dM ein Massenelement des Stabes im Abstand ρ von der Drehachse, s der Bogen, welchen dasselbe durchläuft, wenn der Winkel α in φ übergeht, v und g' die Geschwindigkeit und Beschleunigung der Masse dM im Augenblick, da die Zeit t eintritt, so wird nach § 369 sein

$$(6) \quad v = \frac{ds}{dt}; \quad g' = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

Längs des Weges ds werde die Masse dM getrieben durch eine Kraft k , die während der Zeit dt als konstant angesehen werden kann. Sie veranlasst die Beschleunigung g' und ist daher nach § 174 $= g'dM$. Daher wird mit Benutzung von (6)

$$k = \frac{d^2s}{dt^2} dM.$$

Nun seien x', y', z' die Koordinaten des Massenpunktes dM nach der Zeit t . Man zerlege die Kraft k in die drei rechtwinkligen Seitenkräfte

$$\frac{d^2 x'}{dt^2} \cdot dM, \quad \frac{d^2 y'}{dt^2} \cdot dM, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} \cdot dM,$$

wo z' mit z vertauscht ist, weil allen Punkten des schwingenden Körpers die gleiche vertikale Bewegung zukommt.

Die erste dieser Kräfte wirkt längs des Weges dx' , die zweite längs dy' , die dritte längs dz . Es entstehen also in der Richtung der drei Koordinatenachsen folgende Arbeiten

$$\frac{d^2 x'}{dt^2} dx' \cdot dM, \quad \frac{d^2 y'}{dt^2} dy' \cdot dM, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} dz \cdot dM.$$

Ihre Summe muss gleich sein der Arbeit, welche das Gewicht gdM der Masse dM längs des Weges dz verrichtet, also $= gdM \cdot dz$. Daher wird

$$gdM \cdot dz = \left[\frac{d^2 x'}{dt^2} dx' + \frac{d^2 y'}{dt^2} dy' + \frac{d^2 z}{dt^2} dz \right] dM.$$

Diese Gleichung gibt für das Massenelement dM , wenn sie in Hinsicht t integriert, also wenn dt als konstant gedacht wird

$$gdM \cdot z + C = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{dx'}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy'}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right] dM.$$

Hier ist C die Konstante der Integration, ferner sind die Glieder in den runden Klammern die Geschwindigkeiten der Masse dM in der Richtung der Koordinatenachsen und zwar nach der Zeit t . Daher wird die Gesamtklammergrösse $= v^2$ sein. Die letzte Gleichung gibt daher

$$gdM \cdot z + C = \frac{1}{2} v^2 \cdot dM.$$

Für $t=0$ wird auch $v=0$; dabei gehe z über in z_0 . Hierfür wird die letzte Gleichung

$$gdM \cdot z_0 + C = 0.$$

Daher durch Subtraktion

$$g(z - z_0) dM = \frac{1}{2} v^2 \cdot dM.$$

Diese Gleichung soll nun auf alle Massenelemente ausgedehnt werden. Zu diesem Zwecke hat man

$$\begin{aligned} ds^2 &= \varrho^2 d\varphi^2 + dz^2 \\ v^2 &= \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = \varrho^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \\ g(z - z_0) dM &= \frac{1}{2} \left[\varrho^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right] dM. \end{aligned}$$

In der letzten Gleichung sind $g(z - z_0)$, $\frac{d\varphi}{dt}$ und $\frac{dz}{dt}$ für alle Punkte des schwingenden Körpers dieselben. Wenn sie als Konstante abgesondert werden, so gibt die Integration für den Moment, da φ erreicht ist

$$2g(z - z_0) \int dM = \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \int \varphi^2 dM + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \int dM.$$

Allein es ist $\int dM$ die Masse M und $\int \varphi^2 dM$ das Trägheitsmoment E (§ 180) des schwingenden Körpers. Daher kann die letzte Gleichung wie folgt geschrieben werden

$$(7) \quad 2gM(z - z_0) = E\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + M\left(\frac{dz}{dt}\right)^2.$$

Um diese Differentialgleichung zu integrieren, müssen $z - z_0$ und dz durch φ ausgedrückt werden.

Zu diesem Zwecke setze man zunächst in (4)

$$\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2} + \frac{\varphi^4}{2 \cdot 3 \cdot 4},$$

indem man nur die Glieder der Reihe bis zur vierten Potenz von φ in Rechnung bringt, so folgt

$$z = h \sqrt{1 - \left(1 - \frac{\varphi^2}{12}\right) \frac{ab\varphi^2}{h^2}}.$$

Die Entwicklung der Wurzelgrösse nach dem binomischen Satze gibt hierfür

$$(8) \quad z = h \left(1 - \frac{ab\varphi^2}{2h^2} + \frac{ab\varphi^4}{24h^2} - \frac{a^2b^2\varphi^4}{8h^4}\right).$$

Für $\varphi = \alpha$ geht z in z_0 über; daher in gleicher Weise

$$z_0 = h \left(1 - \frac{ab\alpha^2}{2h^2} + \frac{ab\alpha^4}{24h^2} - \frac{a^2b^2\alpha^4}{8h^4}\right).$$

Folglich durch Subtraktion

$$z - z_0 = \frac{ab}{2h} (\alpha^2 - \varphi^2) \left[1 - \left(\frac{1}{12} - \frac{ab}{4h^2}\right) \alpha^2 - \left(\frac{1}{12} - \frac{ab}{4h^2}\right) \varphi^2\right].$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{1}{12} - \frac{ab}{4h^2} = k,$$

so wird

$$(9) \quad z - z_0 = \frac{ab}{2h} (\alpha^2 - \varphi^2) (1 - k\alpha^2 - k\varphi^2).$$

Durch Differentiation von (8) folgt, indem man die Glieder von φ^3 an vernachlässigt

$$(10) \quad dz = -\frac{ab\varphi d\varphi}{h}.$$

Dieser Wert ist nur ein Annäherungswert von dem in (5), allein er macht die Durchführung der Integration möglich.

Setzt man nun die Werte von $z - z_0$ und dz aus (9) und (10) in (7), so folgt

$$\frac{abgM}{h}(\alpha^2 - \varphi^2)(1 - k\alpha^2 - k\varphi^2) = \left(E + \frac{a^2 b^2 M}{h^2} \varphi^2\right) \frac{d\varphi^2}{dt^2}$$

$$\sqrt{\frac{abgM}{hE}} \cdot dt = \frac{-d\varphi}{\sqrt{\alpha^2 - \varphi^2}} \frac{\left[1 + \frac{a^2 b^2 M}{h^2 E} \varphi^2\right]^{\frac{1}{2}}}{[1 - k\alpha^2 - k\varphi^2]^{\frac{1}{2}}}.$$

Hierin sind für dt und $d\varphi$ entgegengesetzte Vorzeichen genommen, weil beim Uebergang von α in φ die Zeit t zunimmt, während φ abnimmt.

Beim zweiten Bruche rechts bringe man den Nenner in den Zähler mit dem Exponenten $-\frac{1}{2}$, entwickle nach dem binomischen Satze und vernachlässige die Glieder von φ^4 und $\varphi^2 \alpha^2$, so gibt dieser Bruch

$$\left(1 + \frac{a^2 b^2 M}{2 h^2 E} \varphi^2\right) \left(1 + \frac{k \alpha^2}{2} + \frac{k \varphi^2}{2}\right) =$$

$$1 + \frac{k \alpha^2}{2} + \left(\frac{k}{2} + \frac{a^2 b^2 M}{h^2 E}\right) \varphi^2.$$

Daher mittels dieses Wertes die Differentialgleichung

$$\sqrt{\frac{abgM}{hE}} \cdot dt = \frac{-d\varphi}{\sqrt{\alpha^2 - \varphi^2}} \left[1 + \frac{k \alpha^2}{2} + \left(\frac{k}{2} + \frac{a^2 b^2 M}{h^2 E}\right) \varphi^2\right],$$

welche nunmehr zu integrieren ist. Nach § 82 hat man

$$-\int \frac{\varphi^2 d\varphi}{\sqrt{\alpha^2 - \varphi^2}} = \frac{\varphi}{2} \sqrt{\alpha^2 - \varphi^2} + \frac{\alpha^2}{2} \text{Arc cos } \frac{\varphi}{\alpha}.$$

Daher gibt die Differentialgleichung

$$\sqrt{\frac{abgM}{hE}} \cdot t = \left(1 + \frac{k \alpha^2}{2}\right) \text{Arc cos } \frac{\varphi}{\alpha}$$

$$+ \left(\frac{k}{2} + \frac{a^2 b^2 M}{h^2 E}\right) \left(\frac{\varphi}{2} \sqrt{\alpha^2 - \varphi^2} + \frac{\alpha^2}{2} \text{Arc cos } \frac{\varphi}{\alpha}\right).$$

Die Konstante der Integration fällt weg, weil $\varphi = \alpha$ wird für $t = 0$.

Diese Gleichung gibt den Zusammenhang zwischen der Zeit t und dem Schwingungsbogen φ an. Es sei nun T die Zeit zu einer Schwingung, so wird $\varphi = 0$ für $t = \frac{1}{2} T$. Hierfür geht die letzte Gleichung über in

$$(11) \quad T = \pi \left[1 + \alpha^2 \left(\frac{3}{4} k + \frac{a^2 b^2 M}{2 h^2 E}\right)\right] \sqrt{\frac{hE}{abgM}}.$$

Je kleiner der Bogen α wird, um so mehr nähert sich T einem Grenzwert T_0 . Dieser wird erreicht für $\alpha = 0$; daher

$$(12) \quad T_0 = \pi \sqrt{\frac{h E}{a b g M}}.$$

Es bezeichne T, die Schwingungszeit eines einfachen Pendels von der Länge h, so ist für sehr kleine Schwingungsbogen nach § 163

$$T = \pi \sqrt{\frac{h}{g}};$$

daher der Zusammenhang

$$T_0 = T \sqrt{\frac{E}{a b M}}.$$

Die letzte Gleichung zeigt, dass die Grösse $\frac{E}{a b M}$ eine Verhältnisszahl sein muss, was auch am folgenden Beispiel ersehen werden kann.

Der schwingende Körper sei prismatisch von der Länge l und der Masse M, so ist sein Trägheitsmoment $= \frac{1}{12} M l^2$ (§ 181); daher das Verhältniss

$$\frac{E}{a b M} = \frac{1}{12} \frac{l^2}{a b}.$$

Wenn z. B. $a = 6$; $b = 8$ und $l = 48$ Millimeter, so wird dieser Bruch $= 4$; daher $T_0 = 2 T$. Dieser Apparat schwingt also zweimal langsamer als ein einfaches Pendel von der Fadenlänge h.

Die Gleichung (12) kann auch wie folgt abgeleitet werden. In Gleichung (7) ist der Weg dz in vertikaler Richtung sehr klein gegenüber dem Weg $d\varphi$ in drehender Richtung. Vernachlässigt man daher das letzte Glied dieser Gleichung, so folgt unter Benützung des Annäherungswertes von $z - z_0$ aus (9)

$$(13) \quad \frac{a b g M}{h} (\alpha^2 - \varphi^2) = E \frac{d\varphi^2}{dt^2}$$

und

$$dt = - \frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha^2 - \varphi^2}} \sqrt{\frac{h E}{a b g M}},$$

welche Gleichung durch Integration sofort den Wert von T_0 in (12) liefert.

B. Schwingungen mit Berücksichtigung des Luftwiderstandes.

Die Arbeit, welche das Gewicht des schwingenden Körpers beim Sinken verrichtet, wird zum Teil auf die Ueberwindung der Nebenhindernisse verwendet. Unter diesen steht der Luftwiderstand oben an; er sei der Geschwindigkeit $\frac{d\varphi}{dt}$ der Drehbewegung proportional. Zu-

gleich werde vorausgesetzt, es könne dz gegen $d\varphi$ vernachlässigt werden, wie dies bei Ableitung der Gleichung (13) geschehen.

Durch Differentiation von (13) erhält man

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{abgM}{hE}\varphi$$

eine Gleichung für die Beschleunigung, in welcher das Glied noch fehlt, das den Einfluss des Luftwiderstandes darstellt. Es sei dasselbe $2n\frac{d\varphi}{dt}$, wo n eine Konstante bezeichnet, so geht die letzte Gleichung über in

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -2n\frac{d\varphi}{dt} - \frac{abgM}{hE}\varphi.$$

Man setze zur Abkürzung

$$(14) \quad \frac{abgM}{hE} = r^2,$$

so ist die zu integrierende Gleichung der Bewegung

$$(15) \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2n\frac{d\varphi}{dt} + r^2\varphi = 0.$$

Diese Gleichung stimmt mit der in § 352 unter I. behandelten überein. Man setze daher

$$\varphi = ce^{mt},$$

wo c und m Konstante bezeichnen, so wird $\frac{d\varphi}{dt} = cme^{mt}$ und

$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = cm^2e^{mt}$; daher durch Einsetzen dieser Werte in (15) die Gleichung

$$m^2 + 2nm + r^2 = 0,$$

welche für m folgende Wurzelwerte liefert

$$m = -n \pm \sqrt{n^2 - r^2}.$$

Nun ist n , vom Luftwiderstand herrührend, gegenüber r^2 sehr klein, daher $n^2 - r^2$ negativ. Man setze

$$(16) \quad n^2 - r^2 = -\gamma^2,$$

so werden die beiden Werte von m sein

$$-n + \gamma\sqrt{-1} \quad \text{und} \quad -n - \gamma\sqrt{-1}.$$

Daher wird nach (6) des § 352 das Integral von (15) sein

$$(17) \quad \varphi = e^{-nt} (\mathfrak{M} \sin \gamma t + \mathfrak{N} \cos \gamma t),$$

worin $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ konstante Grössen bezeichnen, welche noch zu bestimmen sind.

Für $t=0$ wird $\varphi=\alpha$. Hierfür gibt die Gleichung $\mathfrak{M}=\alpha$. Um $\mathfrak{M}$ zu bestimmen, differentiire man (17). Das Differential ist

$$\frac{d\varphi}{dt} = -n e^{-nt} (\mathfrak{M} \sin \gamma t + \alpha \cos \gamma t) + e^{-nt} (\gamma \mathfrak{M} \cos \alpha t - \alpha \gamma \sin \gamma t),$$

woraus sich für $t=0$ ergibt

$$0 = -n\alpha + \gamma \mathfrak{M}; \quad \mathfrak{M} = \frac{\alpha n}{\gamma}.$$

Setzt man diese Werte von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ in (17), so entsteht die gesuchte Gleichung

$$(18) \quad \varphi = \frac{\alpha}{\gamma} e^{-nt} (n \sin \gamma t + \gamma \cos \gamma t).$$

Für $n=0$ fällt der Einfluss des Luftwiderstandes weg. In diesem Fall wird nach (14) und (16)

$$\gamma = r = \sqrt{\frac{abgM}{hE}},$$

und daher der Wert von φ nach (18)

$$\varphi = \alpha \cos t \sqrt{\frac{abgM}{hE}},$$

welche Gleichung auch wie folgt geschrieben werden kann

$$t = \sqrt{\frac{hE}{abgM}} \text{Arc cos } \frac{\varphi}{\alpha}.$$

Setzt man hierin $\varphi=0$, so wird t zu $\frac{T}{2}$, d. h. zur halben Schwingungszeit und der Bogen rechts zu $\frac{\pi}{2}$. Daher die Schwingungszeit

$$T = \pi \sqrt{\frac{hE}{abgM}}.$$

Dieser Wert von T stimmt mit T_0 in (12), aber auch mit T in (11) überein, wenn daselbst wie hier der Bogen α sehr klein vorausgesetzt wird.

Um die Schwingungszeit für die Bewegung in der Luft zu bestimmen, differentiire man (18) und beachte die Relation (16), so kommt als Geschwindigkeit

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{\varphi r^2}{\gamma} e^{-nt} \sin \gamma t.$$

Nun muss die Geschwindigkeit am Anfang und Ende einer jeden Schwingung $=0$ sein, eine Bedingung, welche erfüllt wird durch die letzte Gleichung für $\sin \gamma t = 0$. Also muss der Bogen γt für den Beginn der Bewegung $=0$ sein; für das Ende der ersten Schwingung

$= \pi$, der zweiten $= 2\pi$, der dritten $= 3\pi, \dots$ Aus $\gamma t = \pi$, $\gamma t = 2\pi, \dots$ folgt aber, dass die Zeit zu zwei Schwingungen zweimal, zu drei Schwingungen dreimal grösser ist als zu einer Schwingung, d. h. es ist die Schwingungszeit konstant. Bezeichnet man sie mit $T_{,,}$, so folgt aus $\gamma t = \pi$

$$T_{,,} = \frac{\pi}{\gamma} = \frac{\pi}{\sqrt{r^2 - n^2}}.$$

Nun setze man

$$D = \frac{abgM}{h}, \quad \text{also} \quad r^2 = \frac{D}{E}.$$

Ferner schreibe man
$$n^2 = \frac{D'}{E},$$

so folgt als Wert der Schwingungszeit

$$T_{,,} = \pi \sqrt{\frac{E}{D - D'}}.$$

Ohne Rücksicht auf den Luftwiderstand ist $D' = 0$, also die Schwingungszeit wie nach (12)

$$T_0 = \pi \sqrt{\frac{E}{D}}.$$

Daraus folgt, dass $T_{,,} > T$, d. h. dass der Apparat in der Luft langsamer schwingt als im leeren Raum.

Die Schwingungsbogen nehmen in ähnlicher Weise ab wie diejenigen des gewöhnlichen Pendels. Es sei in dieser Beziehung auf S. 475 verwiesen.

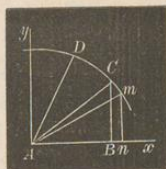
XIII. Aufgaben über die Zentralbewegung.

385. Differentialgleichungen der Bewegung durch Zentralkräfte. Im leeren Raum erhalte ein materieller Punkt durch einen Stoss eine Bewegung. Nach Beendigung dieses Stosses wird sich der Punkt geradlinig und gleichförmig fortbewegen. Ausserhalb dieser geraden Bahn habe eine Kraft ihren festen Sitz und wirke von dem Augenblick an, wo jener Stoss aufhört, kontinuierlich auf jenen materiellen Punkt. Dadurch wird der Punkt aus seiner geraden Richtung abgelenkt und eine Kurve beschreiben, welche in einer Ebene liegt, die durch die ursprüngliche Richtung der Bewegung und durch den Sitz der anziehenden Kraft geht. Diese Kraft heisst Zentralkraft, ihr Sitz Mittelpunkt der Bewegung und die Bewegung im allgemeinen Zentralbewegung.

Der Mittelpunkt der Bewegung sei A (Fig. 149). Man lege durch ihn in der Ebene der Bahn CD zwei rechtwinkelige Achsen Ax, Ay und bezeichne mit

x, y die Koordinaten $A B, B C$ eines Kurvenpunktes C ,
 s den Bogen $D C$ der Bahn, welche in der Zeit t
 von D aus durchlaufen wird,
 v die Geschwindigkeit nach der Zeit t ,
 r den Abstand (Radius vector, Leitstrahl) des Punk-
 tes C vom Mittelpunkt und
 g die Beschleunigung, welche die Zentralkraft dem
 Beweglichen nach der Zeit t in der Richtung
 des Leitstrahls $A C$ beibringt.

Fig. 149.



Man zerlege diese Beschleunigung in zwei Seitenbeschleunigungen
 $g \frac{x}{r}$ und $g \frac{y}{r}$, wovon die erstere parallel zu $A x$, die letztere parallel
 zu $A y$ liegt, so wird sein, wenn man diese Beschleunigungen in ent-
 gegengesetzter Richtung zu den positiven Achsen voraussetzt

$$(1) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = -g \frac{x}{r}, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -g \frac{y}{r}.$$

Erstes Keppler'sches Gesetz. Man multipliziere die erste
 dieser Gleichungen mit y , die zweite mit x und ziehe sie von einander
 ab, so folgt

$$(2) \quad \frac{x d^2 y - y d^2 x}{dt^2} = 0.$$

Der Zähler dieses Ausdrucks ist das Differential von $x dy - y dx$;
 multipliziert man daher (2) mit der Konstanten dt und integriert, so
 erhält man

$$(3) \quad \frac{x dy - y dx}{dt} = c,$$

worin c die Konstante der Integration bezeichnet. Um die Bedeutung
 dieser Formel zu erkennen, setze man

$$(4) \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

so folgt durch Differentiation

$$(5) \quad \begin{cases} dx = \cos \varphi dr - r \sin \varphi d\varphi, \\ dy = \sin \varphi dr + r \cos \varphi d\varphi. \end{cases}$$

Führt man diese Werte von x, y, dx, dy in (3), so kommt

$$(6) \quad r^2 d\varphi = c dt.$$

Nun sei der Sektor DAC , welcher in der Zeit t vom Leitstrahl
 beschrieben wird, $= F$. Dreht sich der Leitstrahl in dem Zeitelement dt
 um den Winkel $d\varphi$ aus der Lage AC in die Lage Am , so ist die
 Fläche CAm gleich (nach § 299)

$$dF = \frac{1}{2} r^2 d\varphi.$$

Mithin wird dF mit Rücksicht auf Formel (6) zu

$$dF = \frac{1}{2} c dt.$$

Durch Integration dieser Formel erhält man

$$(7) \quad F = \frac{1}{2} c t,$$

wobei die Konstante der Integration weggelassen ist, weil t und F gleichzeitig verschwinden.

Aus (7) folgt, dass bei jeder Zentralbewegung die vom Leitstrahl beschriebene Fläche der darauf verwendeten Zeit proportional ist. Keppler hat dieses Gesetz (durch Beobachtung der Bewegung der Planeten um die Sonne) für das Planetensystem zuerst ausgesprochen.

Ausdruck für die Geschwindigkeit. Man multipliziere die erste der Gleichungen (1) mit dx , die zweite mit dy und addiere sie, so kommt

$$(8) \quad \frac{dx dx + dy dy}{dt^2} = -\frac{g}{r} (x dx + y dy).$$

Hierin ist der Zähler links das Differential von

$$\frac{1}{2} (dx^2 + dy^2)$$

und die Grösse $x dx + y dy$ rechts das Differential von

$$\frac{1}{2} (x^2 + y^2) = \frac{1}{2} r^2.$$

Deshalb geht die Formel (8) über in

$$d\left(\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2}\right) = -\frac{g}{r} d(r^2).$$

Nun ist aber $d(r^2) = 2r dr$, also wird die rechte Seite dieser Gleichung zu $-2g dr$. Führt man diesen Wert ein und integriert, wobei g als veränderlich zu betrachten ist, so kommt

$$(9) \quad \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} = A - 2 \int g dr.$$

Hierin bezeichnet A die Integrationskonstante. Da $dx^2 + dy^2 = ds^2$ und die Geschwindigkeit $v = \frac{ds}{dt}$ ist, so erhält man aus (9)

$$(10) \quad v^2 = A - 2 \int g dr.$$

Vermittelst dieser Formel kann die Geschwindigkeit des Beweglichen bestimmt werden, wenn g in Funktion von r gegeben ist.

Allgemeiner Zusammenhang zwischen dem Gesetz der Kraft und dem der Bahn. Führt man die Werte von dx, dy aus (5) in (9), so folgt

$$(11) \quad \frac{r^2 d\varphi^2 + dr^2}{dt^2} = A - 2 \int g dr.$$

Eliminiert man dt aus (6) und (11), so wird

$$(12) \quad \frac{c^2}{r^2} + \frac{c^2 dr^2}{r^4 d\varphi^2} = A - 2 \int g dr.$$

Durch Differentiation dieser Gleichung erhält man

$$-\frac{2c^2}{r^3} dr + d\left(\frac{c^2 dr^2}{r^4 d\varphi^2}\right) = -2g dr,$$

woraus folgt

$$(13) \quad g = \frac{c^2}{r^3} - \frac{c^2}{2dr} d\left(\frac{dr}{r^2 d\varphi}\right)^2.$$

Allein es ist

$$d\left(\frac{dr}{r^2 d\varphi}\right)^2 = 2 \frac{dr}{r^2 d\varphi} d\left(\frac{dr}{r^2 d\varphi}\right)$$

und indem man φ als unabhängig Veränderliche, also $d\varphi$ als konstant betrachtet

$$d\left(\frac{dr}{r^2 d\varphi}\right) = \frac{1}{d\varphi} d\left(\frac{dr}{r^2}\right) = -\frac{1}{d\varphi} d^2\left(\frac{1}{r}\right).$$

Setzt man diese Werte in (13), so wird

$$(14) \quad g = \frac{c^2}{r^2} \left[\frac{1}{r} + \frac{1}{d\varphi^2} d^2\left(\frac{1}{r}\right) \right].$$

Die Beschleunigung g ist aber der Zentrifugalkraft proportional. Folglich kann vermittelt der Gleichung (14) das Gesetz, nach welchem die Zentralkraft wirkt, abgeleitet werden, wenn r in Funktion von φ ausgedrückt, d. h. wenn die Gleichung der Bahn bekannt ist. Umgekehrt kann aber auch aus dieser Formel die Gleichung der Kurve abgeleitet werden, wenn man das Gesetz der Kraft kennt. Die folgenden Aufgaben werden die Anwendung der Formel (14) zeigen. Zuerst nehmen wir die Bahn als gegeben an und suchen die Wirkungsweise der Kraft.

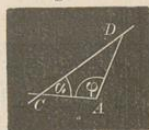
386. Bei einer Zentralbewegung sei die Bahn des Beweglichen eine gerade Linie. Man soll das Gesetz der Zentralkraft suchen. Diese Gerade sei CD (Fig. 150), der Pol A der Mittelpunkt der Anziehung, der Leitstrahl $AD = r$; er bilde mit der festen Richtung AC den Winkel φ . Die Gerade schneide auf dieser Richtung ein Stück $AC = a$ ab und bilde mit a den Winkel α , so ist

$$AC : AD = \sin ADC : \sin ACD,$$

$$a : r = \sin(\alpha + \varphi) : \sin \alpha,$$

$$r = \frac{a \sin \alpha}{\sin(\alpha + \varphi)}.$$

Fig. 150.



Diese letzte Formel ist die Polargleichung der geraden Linie. Wir betrachten in ihr a und α als konstant, r und φ als veränderlich, so erhält man durch Differentiation

$$d\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\cos(\alpha + \varphi)}{a \sin \alpha} d\varphi; \quad d^2\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\sin(\alpha + \varphi)}{a \sin \alpha} d\varphi^2.$$

Setzt man diesen Wert von $d^2\left(\frac{1}{r}\right)$ in Formel (14) des § 385, so folgt

$$g = \frac{c^2}{r^2} \left[\frac{1}{r} - \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{a \sin \alpha} \right] = 0.$$

Aus $g=0$ folgt aber, dass ein Körper sich nur dann in einer geraden Linie bewegen kann, wenn ausserhalb dieser Geraden keine Kraft auf den Körper wirkt.

387. Es bewege sich ein materieller Punkt infolge einer Zentralkraft in einem Kreise. Man soll das Gesetz dieser Kraft bestimmen.

Hier ist der Leitstrahl r konstant, also $d\left(\frac{1}{r}\right) = 0$. Hierfür geht die Formel (14) des § 385 über in

$$(1) \quad g = \frac{c^2}{r^3}.$$

Mithin ist die Zentralkraft verkehrt proportional der dritten Potenz des Halbmessers der Bahn.

Aus der Formel (10) des § 385 folgt, da r konstant, also $dr=0$ ist $v^2 = A$.

Da aber A eine Konstante ist, so wird auch die Geschwindigkeit v konstant. Also ist die Kreisbewegung gleichförmig.

Es bezeichne T die Zeit zu einem Umlaufe, so ist der Weg des Beweglichen in dieser Zeit

$$Tv = 2r\pi.$$

Setzt man T für t in Formel (7) des § 385, so wird F zur Kreisfläche $r^2\pi$; folglich gibt diese Formel

$$r^2\pi = \frac{1}{2} c T.$$

Eliminiert man T aus den beiden letzten Formeln, so erhält man den Wert der Konstanten $c = rv$. Führt man diesen Wert von c in (1) ein, so kommt

$$(2) \quad g = \frac{v^2}{r}.$$

Mithin ist bei einer Kreisbewegung die Zentralkraft direkt proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit und verkehrt proportional dem Radius der Bahn.

Es werde ein Körper in horizontaler Richtung auf der Erdoberfläche abgeworfen. Vermöge der Anziehungskraft der Erde wird er aus der anfänglichen Richtung abgelenkt. Je nach der Geschwindigkeit, welche ihm durch die Wurfkraft erteilt wurde, wird er zur Erde

fallen oder sich in einem Kreise um die Erde herum bewegen oder sich von der Erde entfernen.

Nun ist die durch die Anziehungskraft der Erde bewirkte Beschleunigung

$$g = 9,808 \text{ Met.}$$

und der Halbmesser der Erde annähernd

$$r = 6365000 \text{ Met.}$$

Damit also der Körper sich in einem Kreise um die Erde bewege, muss nach Formel (2) seine Geschwindigkeit per Sekunde sein

$$v = \sqrt{gr} = \sqrt{9,808 \cdot 6365000} = 7902 \text{ Met.}$$

Wird der Körper mit einer kleinern Geschwindigkeit als 7902 Met. abgeworfen, so fällt er zur Erde. Diese Geschwindigkeit ist nahe 17 mal grösser als die Rotationsgeschwindigkeit der Erde unter dem Aequator.

388. Ein materieller Punkt bewege sich in einem Kegelschnitt infolge einer Zentralkraft, welche ihren Sitz in einem Brennpunkt der Kurve hat. Man soll das Gesetz der Kraft bestimmen. Die Gleichung der Kegelschnitte in Polarkoordinaten ist nach § 298, (Formel (6))

$$(1) \quad r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi},$$

worin bezeichnet: p den halben Parameter, e das Verhältniss des Abstandes der Brennpunkte zum Abstand der beiden Scheitel und φ den Winkel, den der Leitstrahl r mit dem Teil der grossen Achse bildet, welcher vom Centrum der Bewegung nach dem nächsten Scheitel führt.

Diese Gleichung drückt eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel aus, je nachdem

$$e < 1, e = 1, e > 1.$$

Aus (1) folgt

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e \cos \varphi}{p},$$

$$d\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{-e \sin \varphi d\varphi}{p}; \quad d^2\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{-e \cos \varphi d\varphi^2}{p}.$$

Setzt man diesen Wert in Formel (14) des § 385, so erhält man

$$g = \frac{c^2}{r^2} \left[\frac{1}{r} - \frac{e \cos \varphi}{p} \right],$$

oder indem man obigen Wert von $\frac{1}{r}$ einführt

$$(2) \quad g = \frac{c^2}{p r^2}.$$

Bei der Bewegung in einem Kegelschnitt muss somit die Zentralkraft dem Quadrat des Leitstrahls verkehrt proportional sein. Wenn

der Kegelschnitt zu einem Kreise wird, so ist $p=r$; also geht in diesem Falle die Formel (2) über in Formel (1) des § 387.

Keppler hat zuerst durch Beobachtung gezeigt, dass die Planetenbahnen Ellipsen sind, in deren einem Brennpunkt sich die Sonne befindet und Newton zeigte, gestützt auf dieses sogenannte zweite Keppler'sche Gesetz, dass die Sonne die Planeten im umgekehrten Verhältniss der Quadrate der Entfernungen anziehe.

389. Die Zentralkraft sei verkehrt proportional dem Quadrate des Leitstrahls. Man soll die Gleichung der Bahn und die Bewegungsverhältnisse ableiten. Diese Zentralkraft bringe demselben materiellen Punkte in den Entfernungen r, r' die Beschleunigungen g, g' in der Richtung der Leitstrahlen bei, so wird der Voraussetzung nach sein

$$g : g' = \frac{1}{r^2} : \frac{1}{r'^2},$$

$$g = \frac{g' r'^2}{r^2}.$$

Man setze $g' r'^2 = k$, so erhält man als Ausdruck für die Beschleunigung

$$(1) \quad g = \frac{k}{r^2}.$$

Hierfür wird

$$(2) \quad \int g \, dr = \int \frac{k}{r^2} \, dr = -\frac{k}{r} + n,$$

worin n die Konstante der Integration sein soll. Setzt man diesen

Wert von $\int g \, dr$ in Formel (12) des § 385, so folgt

$$(3) \quad \frac{c^2}{r^2} + \frac{c^2 \, dr^2}{r^4 \, d\varphi^2} = A - 2n + \frac{2k}{r}.$$

Man setze hierin

$$(4) \quad A - 2n = \beta; \quad r = \frac{1}{\varrho},$$

so wird zunächst
$$dr = -\frac{d\varrho}{\varrho^2},$$

und somit Gleichung (3), indem man sie nach $d\varphi$ auflöst

$$(5) \quad d\varphi = \frac{\pm c \, d\varrho}{\sqrt{\beta + 2k\varrho - c^2\varrho^2}}.$$

Man bringe unter das Wurzelzeichen die Grösse $\frac{k^2}{c^2} - \frac{k^2}{c^2}$, so ergibt sich

$$d\varphi = \frac{\pm c \, d\varrho}{\sqrt{\beta + \frac{k^2}{c^2} - \left(c\varrho - \frac{k}{c}\right)^2}}.$$

Setzt man noch zur Abkürzung

$$(6) \quad \beta + \frac{k^2}{c^2} = \gamma^2; \quad c \varrho - \frac{k}{c} = u,$$

so erhält man

$$(7) \quad d\varphi = \frac{\pm du}{\sqrt{\gamma^2 - u^2}}.$$

Denken wir uns φ und r gleichzeitig wachsend, so werden ϱ und u abnehmen. Also müssen in diesem Falle $d\varphi$ und du entgegengesetzte Zeichen haben. Nun gibt die Integration von (7) für das untere der beiden Vorzeichen

$$\varphi - \varphi' = \text{Arc cos } \frac{u}{\gamma},$$

worin $-\varphi'$ die Konstante der Integration bezeichnet. Geht man vom Bogen zum Cosinus über, so wird

$$(8) \quad \frac{u}{\gamma} = \cos(\varphi - \varphi').$$

Ändern sich φ und r in entgegengesetztem Sinne, so erhalten $d\varphi$ und du gleiche Zeichen. Statt (7) kann man in diesem Falle schreiben

$$-d\varphi = \frac{-du}{\sqrt{\gamma^2 - u^2}},$$

woraus durch Integration, indem man die Konstanten mit φ'' bezeichnet

$$-\varphi + \varphi'' = \text{Arc cos } \frac{u}{\gamma} \quad \text{oder}$$

$$(9) \quad \frac{u}{\gamma} = \cos(-\varphi + \varphi'') = \cos(\varphi - \varphi'').$$

Setzt man $u = \gamma$, so erhält man aus (8) und (9) $\varphi = \varphi' = \varphi''$, und aus (6)

$$\varrho = \frac{k + \sqrt{\beta c^2 + k^2}}{c^2}.$$

Dieser Wert von ϱ ist ein Maximum, wie aus (5) folgt, wenn man $\frac{d\varrho}{d\varphi} = 0$ setzt; also ist der entsprechende Wert von r ein Minimum. Dieser kleinste Leitstrahl r_0 ist somit

$$r_0 = \frac{c^2}{k + \sqrt{\beta c^2 + k^2}}.$$

Zählt man nun den Winkel $\varphi - \varphi' = \psi$ von diesem Leitstrahl aus, so erhält man aus (8) und (9) zugleich

$$u = \gamma \cos \psi$$

oder indem man die Werte von γ und u aus (6) einführt

$$c \varrho - \frac{k}{c} = \sqrt{\beta + \frac{k^2}{c^2} \cos \psi},$$

also auch, wenn man wieder $\varrho = \frac{1}{r}$ setzt und nach r auflöst

$$r = \frac{c^2}{k \left[1 + \sqrt{1 + \frac{\beta c^2}{k^2} \cos \psi} \right]}.$$

Der Einfachheit wegen schreibe man

$$(10) \quad \frac{c^2}{k} = p; \quad 1 + \frac{\beta c^2}{k^2} = e^2,$$

so wird

$$(11) \quad r = \frac{p}{1 + e \cos \psi}.$$

Dies ist die Polargleichung eines Kegelschnittes (§ 388), deren Pol in einem Brennpunkte liegt; der halbe Parameter desselben ist $= p$, das Verhältniss zwischen dem Abstand beider Brennpunkte und dem Abstand beider Scheitel $= e$ und der Winkel zwischen dem Radiusvektor r und seinem kleinsten Wert $r_0 = \psi$.

Diese Gleichung gibt eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem e kleiner, gleich oder grösser als die Einheit ist. Allein in der Relation (10)

$$(12) \quad 1 + \frac{\beta c^2}{k^2} = e^2$$

ist die Grösse $\frac{c^2}{k^2}$ immer positiv. Also wird der Ausdruck links in (12) kleiner, gleich oder grösser als die Einheit, je nachdem β negativ, gleich Null oder positiv ist. Es entsteht somit

eine Ellipse, wenn $e < 1$, also β negativ,
 eine Parabel, „ $e = 1$, „ $\beta = 0$,
 eine Hyperbel, „ $e > 1$, „ β positiv.

Für die Parabel hat man als halben Parameter, nach (10) und (11)

$$p = \frac{c^2}{k}.$$

Folglich die Gleichung der Parabel für den Scheitel in rechtwinkligen Koordinaten

$$y^2 = \frac{2c^2}{k} x.$$

Es seien a, b die halbe grosse und halbe kleine Achse der Ellipse und Hyperbel, so folgt aus der Lehre von den Kegelschnitten

$$p = \frac{b^2}{a}; \quad e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}.$$

Somit geben die Formeln (10)

$$(13) \quad \frac{b^2}{a} = \frac{c^2}{k}; \quad 1 + \frac{\beta c^2}{k^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2}.$$

Aus diesen beiden Formeln findet man

$$(14) \quad a = -\frac{k}{\beta}; \quad b^2 = -\frac{c^2}{\beta}.$$

Für die Ellipse ist β negativ, also b^2 positiv; für die Hyperbel ist β positiv, also b^2 negativ, wie es sein soll.

Die Bedeutung der Konstanten β ergibt sich wie folgt. Die Gleichung (10) des § 385 gibt, wenn man den Wert von $\int g dr$ aus (2) einführt

$$(15) \quad v^2 = A - 2n + \frac{2k}{r}.$$

Nun bezeichne V die anfängliche Geschwindigkeit, welche dem Beweglichen durch einen Stoss im Raum beigebracht wurde und R den entsprechenden Leitstrahl, so folgt aus der letzten Gleichung

$$V^2 = A - 2n + \frac{2k}{R}.$$

Also auch, wenn man nach (4) $A - 2n$ durch β ersetzt

$$(16) \quad \beta = V^2 - \frac{2k}{R}.$$

Nun entsteht eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, wenn β negativ, null oder positiv ist. Es wird daher die Bahn

$$\text{eine Ellipse, wenn } V^2 < \frac{2k}{R},$$

$$\text{eine Parabel, „ } V^2 = \frac{2k}{R},$$

$$\text{eine Hyperbel, „ } V^2 > \frac{2k}{R}.$$

Somit entscheidet die Geschwindigkeit V , welche dem Beweglichen durch den Stoss anfänglich erteilt wird, über die Art des Kegelschnittes.

Wenn V^2 gerade gleich ist dem Werte $\frac{2k}{R}$, so entsteht eine Parabel. Lässt man von diesem Werte an V^2 stetig abnehmen bis Null oder stetig zunehmen bis unendlich, so entstehen unendlich viele elliptische oder hyperbolische Bahnen. Man kann daher unendlich viel gegen 1 wetten, dass materielle Punkte im Raum, welche sich infolge der Gravitation bewegen, eher elliptische oder hyperbolische als parabolische Bahnen haben.

Addiert man (16) zu (15), so folgt zur Bestimmung der Geschwindigkeit

$$(17) \quad v^2 = V^2 + 2k \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right).$$

Setzt man den Wert von $\beta = A - 2n$ aus (14) in (15), so kommt

$$(18) \quad v^2 = k \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right).$$

Nun werde die elliptische Bahn zu einem Kreise vom Halbmesser R , so wird in der letzten Formel $r = a = R$. Bezeichnet man den korrespondierenden Wert von v mit V , so folgt aus (18)

$$(19) \quad V^2 = \frac{k}{R}.$$

Dieser Wert von V^2 ist zweimal kleiner als derjenige von V^2 , welcher eine Parabel zur Folge hat. Lässt man daher V wachsen bis $V\sqrt{2}$ und abnehmen bis auf Null, so erhält man zwei Gruppen von elliptischen Bahnen, zwischen denen der Kreis liegt.

390. Anwendung auf die Bewegung der Himmelskörper. Es seien M, m die Massen der Sonne und eines Planeten. Diese Körper ziehen sich an, wie wenn ihre Massen in ihren Mittelpunkten vereinigt wären. Die Entfernung dieser Mittelpunkte sei r . Ferner bezeichne f die Anziehung zweier Masseneinheiten in der Entfernung 1 von einander, so ist nach dem Newton'schen Gesetze der Gravitation $f \frac{Mm}{r^2}$ die Anziehungskraft der Sonne und des Planeten; folglich $f \frac{M}{r^2}$ die Beschleunigung, welche die Sonne jeder Masseneinheit des Planeten und $f \frac{m}{r^2}$ die Beschleunigung, welche der Planet jeder Masseneinheit der Sonne in der Richtung des Abstandes r erteilt (§ 174). Denkt man sich die Sonne ruhend, so nimmt der Planet in der Richtung von r die Summe dieser Beschleunigungen an, so dass seine Beschleunigung sein wird

$$f \frac{M+m}{r^2}.$$

Setzt man diesen Wert gleich der Grösse g in der Formel (1) des § 389

$$g = \frac{k}{r^2},$$

so folgt als Wert der Konstanten

$$(1) \quad k = f(M+m).$$

Setzt man diesen Wert von k in die Formeln des § 389, so erhält man die Elemente der Bahn und der Bewegung des Planeten mit Rücksicht auf die Massen. Da aber die Bahnen der Planeten geschlossene Kurven, also Ellipsen sind, so soll hier nur noch für

diese Bahnen die Zeit zum Durchlaufen irgend eines Bahnteiles ermittelt werden.

Man eliminiere aus den Gleichungen (3) des § 389 und (6) des § 385:

$$\frac{c^2}{r^2} + \frac{c^2 dr^2}{r^4 d\varphi^2} = A - 2n + \frac{2k}{r},$$

$$r^2 d\varphi = c dt$$

die Grösse $d\varphi$, so folgt, wenn man $A - 2n = \beta$ setzt und nach dt auflöst

$$(2) \quad dt = \frac{+r dr}{\sqrt{\beta r^2 + 2kr - c^2}}.$$

Den Scheitel der Ellipse, für welchen r ein Minimum ist, nennt man Perihel, den andern Aphel. Man zähle die Zeit t vom Perihel aus.

Bewegt sich der Planet von diesem Scheitel zum Aphel, so wächst r mit t und es ist somit für diese Bewegung das obere Zeichen in (2) zu nehmen.

Für die Ellipse liegt r immer zwischen den beiden Stücken, in welche die grosse Achse von einem Brennpunkt geteilt wird, also zwischen den Werten $a(1 - e)$ und $a(1 + e)$; man kann daher setzen

$$(3) \quad r = a(1 - e \cos u),$$

worin a die halbe grosse Achse, e das Verhältnis zwischen dem Abstand der Brennpunkte und dem der Scheitel und u eine Variable bezeichnet. Hieraus folgt

$$(4) \quad dr = a e \sin u du.$$

Setzt man noch nach den Formeln (14) und (12) des § 389

$$\beta = -\frac{k}{a}, \quad c^2 = ak(1 - e^2),$$

so erhält man durch Verwendung von (3) und (4)

$$r dr = a^2 e (1 - e \cos u) \sin u du,$$

$$\beta r^2 + 2kr - c^2 = a k e^2 \sin^2 u,$$

indem man zunächst $(1 - e \cos u)^2$ entwickelt und $\cos^2 u = 1 - \sin^2 u$ setzt. Führt man diese Werte in (2) ein, so kommt nach der obigen Voraussetzung

$$dt = a \sqrt{\frac{a}{k}} (1 - e \cos u) du.$$

Das Integral dieser Gleichung ist, wenn man mit t' die Integrationskonstante bezeichnet

$$t + t' = a \sqrt{\frac{a}{k}} (u - e \sin u).$$

Für $u=0$ ist nach (3) $r=a(1-e)$. In diesem Falle befindet sich der Planet im Perihel. Somit ist für $u=0$ auch $t=0$. Dies gibt $t'=0$. Die vorstehende Gleichung wird daher

$$(5) \quad \frac{t}{a} \sqrt{\frac{k}{a}} = u - e \sin u.$$

Dies ist die gesuchte Gleichung. Für irgend einen Wert von r kann vermittelt (3) der Winkel u und somit die Zeit t berechnet werden. Ueberhaupt können vermittelt der zwei Formeln (3) und (5) je zwei der Grössen r, u, t bestimmt werden, wenn man die dritte kennt.

Die Zeit, welche ein Planet zu einem Umlauf braucht, sei T . Lässt man in (5) den Bogen von $u=0$ bis $u=2\pi$ wachsen, so wächst t von $t=0$ bis $t=T$. Für eine Umlaufszeit wird daher die Formel (5)

$$\frac{T}{a} \sqrt{\frac{k}{a}} = 2\pi.$$

Setzt man hierin den Wert von k aus (1), so folgt

$$(6) \quad T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{f(M+m)}.$$

Somit hängt die Umlaufszeit T eines Planeten nur von der grossen Achse seiner Bahn und von der Masse der Sonne und des Planeten ab. Würde sich ein Körper von der gleichen Masse m des Planeten in einem Kreise um die Sonne bewegen, dessen Radius $=a$ ist, so hätte er gleiche Umlaufszeit mit dem Planeten. Und da die Bewegung jenes Körpers im Kreise gleichförmig ist (§ 387), so ist seine Geschwindigkeit die mittlere von der Geschwindigkeit des Planeten.

Es seien T', m', a' Umlaufszeit, Masse und halbe grosse Achse der Bahn irgend eines Planeten, so folgt aus (6)

$$T'^2 = \frac{4\pi^2 a'^3}{f(M+m')}.$$

Dividiert man Gleichung (6) durch die letzte, so folgt

$$(7) \quad \frac{T^2}{T'^2} = \frac{a^3}{a'^3} \cdot \frac{M+m'}{M+m}.$$

Wenn somit $m=m'$ oder wenn m und m' gegen M vernachlässigt werden können, so verhalten sich die Quadrate der Umlaufszeiten zweier Planeten wie die dritten Potenzen der grossen Achsen ihrer Bahnen. Keppler hat dieses Gesetz durch Beobachtung gefunden, wobei er allerdings die Massen der Planeten nicht berücksichtigte. Es enthält demnach die Formel (7) das berichtete dritte Keppler'sche Gesetz.

XIV. Partielle Differentialgleichungen der ersten Ordnung.

391. Art der Gleichungen. Es sei die Funktion $z = a x^2 y^3$ gegeben, worin a als konstant zu denken ist. Man differenziere zuerst nach x , dann nach y , so erhält man

$$(1) \quad \frac{dz}{dx} = 2 a x y^3; \quad \frac{dz}{dy} = 3 a x^2 y^2.$$

Diese Differentialverhältnisse heisst man partielle (§ 28) und zwar der ersten Ordnung.

Hat die Funktion nur eine unabhängig Veränderliche, z. B. x , ist etwa $z = b x^2$, so wird $\frac{dz}{dx} = 2 b x$. Allein in diesem Falle kann $\frac{dz}{dx}$ kein partielles Differentialverhältnis sein. Man erkennt hieraus, dass eine Funktion nur dann partielle Differentialverhältnisse liefern kann, wenn sie zwei oder mehr unabhängig Veränderliche besitzt. Eine Gleichung mit partiellen Differentialverhältnissen heisst kurzweg partielle Differentialgleichung. Ist z eine Funktion von x, y , so wird die vollständige Gleichung mit partiellen Differentialverhältnissen die Form haben

$$(2) \quad f\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}\right) = 0.$$

Fehlen einzelne der Grössen $x, y, \dots$ so entstehen spezielle Fälle. Selbstverständlich muss indessen wenigstens eines der Verhältnisse $\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}$ darin enthalten sein. Im Folgenden sollen nur einige der einfachsten Gleichungen zur Behandlung kommen.

392. Gleichungen mit einem partiellen Differentialverhältnis.

I. Als einfachste Gleichung sei gegeben

$$(1) \quad \frac{dz}{dx} = a,$$

worin z eine Funktion von x und y bezeichne. Wäre z nur eine Funktion von x , so erhielte man durch Integration

$$z = a x + c,$$

die Grösse c wäre dann die Konstante der Integration. Allein im vorliegenden Fall ersetzt man c durch eine Grösse $\varphi(y)$, welche anzeigt, dass z nicht nur von x , sondern in irgend einer Weise auch von y abhängt. Dadurch erhält man als Integral

$$(2) \quad z = a x + \varphi(y)$$

denn diese Gleichung leistet (1) vollständig Genüge, weil die Differentiation von (2) nach x gerade die Gleichung (1) liefert.

Um den Gleichungen (1) und (2) eine geometrische Deutung zu geben, denke man sich drei zu einander rechtwinklige Achsen der

x, y, z , die erstern zwei etwa horizontal, die letztere also vertikal. Alsdann stellt $z = f(x, y)$ allgemein eine Oberfläche dar und es sind x, y, z die Koordinaten irgend eines Punktes derselben. Im vorliegenden Falle wird $z = f(x, y)$ ersetzt durch Gleichung (2).

Die Form der Oberfläche lässt sich wie folgt beurteilen: Man setze $y = 0$ in (2), so ist $\varphi(0)$ eine Konstante, also (2) die Gleichung einer Geraden, welche in der xz Ebene und der fraglichen Oberfläche liegt. Die Kurve wird also von der xz Ebene längs einer Geraden geschnitten. Das ist aber auch der Fall mit irgend einer Ebene, welche zu xz parallel liegt, also senkrecht zur y Achse steht, sofern überhaupt ein Durchschneiden vorkommt; denn setzt man $y = 1, 2, 3, \dots$ in (2), so wird $\varphi(y)$ immer konstant, also Gleichung (2) diejenige einer geraden Linie sein. Die Oberfläche ist daher cylindrisch; ihre Kanten bilden nach (1) mit der xy Ebene einen Winkel, dessen trigonometrische Tangente die Grösse a ist.

Setzt man $x = 0$ in (2), so wird $z = \varphi(y)$ zur Gleichung der Kurve, längs welcher die Cylinderfläche von der yz Ebene geschnitten wird. Allein diese Kurve ist unbestimmt, weil es auch $\varphi(y)$ ist. Daher entsprechen alle denkbaren Kurven der Aufgabe, solange nicht aus irgend welchen anderweitigen Daten dieser Schnitt eine bestimmte Form erhält. Würde man aber verlangen, er solle eine Parabel sein, deren Achse, mit der z Achse und deren Scheitel mit dem Anfangspunkt zusammenfällt, so würde $z = \varphi(y)$ übergehen in $y^2 = 2pz$ und es würden dann alle Schnitte parallel zur yz Ebene, kongruente Parabeln werden.

II. Es sei zu integrieren

$$(3) \quad \frac{dz}{dx} = \frac{1}{\sqrt{ay + x^2}}.$$

Man betrachte im Ausdruck rechts nur x als veränderlich, so erhält man durch Integration

$$(4) \quad z = \log(x + \sqrt{ay + x^2}) + \varphi(y),$$

wo die Konstante der Integration wie in (2) durch $\varphi(y)$ bezeichnet ist. Dass Gleichung (4) das Integral von (3) ist, ergibt sich sofort, wenn von (4) das partielle Differential in Hinsicht x genommen wird.

Gleichung (4) stellt wieder eine Oberfläche dar. Um eine Vorstellung von der Form derselben zu erhalten, lege man Ebenen durch, senkrecht zur y Achse, in bestimmten Abständen von der xz Ebene; man mache z. B. $y = 0, 1, 2, \dots$ so wird die Oberfläche geschnitten längs Kurven, für welche (3) die Steigung angibt, d. h. die Neigung zur Ebene xy und zwar mittels der trigonometrischen Tangente des Winkels, welchen die Bogenelemente mit der xy Ebene bilden. Für $y = 0$, also für die Schnittkurve in der Ebene xz erhält man die gleichzeitigen Werte

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}; \quad z = \log 2x + \varphi(0).$$

Ganz ebenso können Ebenen durch die Oberfläche gelegt werden, parallel zu der yz Ebene und der yx Ebene. Man erkennt, dass der Aufgabe wegen der Unbestimmtheit von $\varphi(y)$ unendlich viele Oberflächen entsprechen.

III. Endlich sei zu integrieren

$$\frac{dz}{dx} = f(x, y),$$

so erhält man nach dem bisherigen Verfahren, indem man mit dx multipliziert, y als konstant betrachtet und integriert

$$z = \int f(x, y) dx + \varphi(y).$$

393. Gleichungen mit zwei partiellen Differentialverhältnissen. Es sei zu integrieren

$$(1) \quad M \frac{dz}{dx} + N \frac{dz}{dy} = P,$$

wo M, N und P Funktionen von x, y, z bezeichnen.

Es sei $z = f(x, y)$ das gesuchte Integral von (1), so wird das Differential nach § 258 davon sein

$$df(x, y) = \frac{df(x, y)}{dx} dx + \frac{df(x, y)}{dy} dy,$$

oder einfacher

$$(2) \quad dz = \frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy.$$

Man eliminiere $\frac{dz}{dy}$ aus (1) und (2), so kommt

$$dz - \frac{P}{N} dy = \frac{dz}{dx} \left(dx - \frac{M}{N} dy \right).$$

Nun ist in dieser Gleichung der Faktor $\frac{dz}{dx}$ unbestimmt; also kann sie nur bestehen, wenn gleichzeitig sein wird

$$(3) \quad dz - \frac{P}{N} dy = 0; \quad dx - \frac{M}{N} dy = 0.$$

Die Aufgabe besteht daher darin, diese beiden gleichseitigen Gleichungen zu integrieren und die Resultate zusammenzufassen.

Wenn M, N, P nur x und y , oder auch nur eine der Variablen enthalten oder wenn sie konstant sind, entstehen spezielle Fälle. Einige solche sollen im Folgenden zur Behandlung kommen.

I. Es sei $P=0$; ferner seien M und N konstant, so werden die Differentialgleichungen (3)

$$dz = 0; \quad dx = \frac{M}{N} dy,$$

deren Integrale sind

$$(4) \quad z = c; \quad x = \frac{M}{N} y + c'.$$

Die erste dieser Gleichungen stellt eine Ebene A dar, welche parallel zur xy Ebene liegt; die zweite eine Gerade B in dieser Ebene, welche mit der xz Ebene einen konstanten Winkel bildet. Da nun die Grösse c willkürlich ist, so kann man sich denken, sie nehme alle möglichen Werte an; dann schreitet die Ebene A fort und mit ihr die Gerade B. Blicke hierbei c' konstant, so beschreibe B eine Ebene, parallel zur z Achse gelegen. Allein c' ist ebenso willkürlich. Lässt man daher c' sich ändern, so schreitet B in der Ebene A fort. Während dieser gleichzeitigen Aenderungen beschreibt die Gerade B eine konoidische Oberfläche. Die Krümmung derselben hängt von dem jeweiligen Verhältnis zwischen c und c' ab. Das Gesetz der Abhängigkeit beider sei dargestellt durch die Gleichung

$$(5) \quad c = \varphi(c').$$

Setzt man nun die Werte von c und c' aus (4) in (5), so erhält man als gesuchtes Integral

$$(6) \quad z = \varphi\left(x - \frac{M}{N} y\right).$$

Dass diese Gleichung der gegebenen

$$(7) \quad M \frac{dz}{dx} + N \frac{dz}{dy} = 0$$

Genüge leistet, ergibt sich wie folgt. Die partiellen Differentialien von (6) sind

$$\frac{dz}{dx} = \varphi'\left(x - \frac{M}{N} y\right); \quad \frac{dz}{dy} = -\frac{M}{N} \varphi'\left(x - \frac{M}{N} y\right).$$

Setzt man diese Werte in (7) und dividiert mit $\varphi'\left(x - \frac{M}{N} y\right)$, so wird die linke Seite $= 0$, wie es (7) erfordert.

II. Es seien M, N und P konstant, so geben die Gleichungen (3), indem man sie integriert

$$(8) \quad z = \frac{P}{N} y + c; \quad x = \frac{M}{N} y + c'.$$

Diese Gleichungen stellen eine gerade Linie dar. Man denke sich dieselben auf den Koordinaten-Ebenen projiziert, so entspricht die erste der Gleichungen (8) der Projektion auf der yz Ebene, die zweite der Projektion auf der xy Ebene. Nun sind c und c' willkürliche Grössen. Lässt man c sich ändern, so schreitet die Gerade in einer Ebene fort, welche parallel zur z Achse ist; lässt man aber nur c' sich ändern, so bewegt sich die Gerade in einer Ebene, parallel zur x Achse gelegen. Aendern sich c und c' zugleich, so beschreibt die Gerade eine krumme Fläche. Da aber die Grössen $\frac{P}{N}$ und $\frac{M}{N}$ konstant sind, so behalten

die Projektionen der Geraden zu den Achsen eine gleiche Neigung. Die krumme Fläche ist daher cylindrisch. Die Art der Krümmung hängt vom Zusammenhang zwischen c und c' ab. Es sei $c = \varphi(c')$. Man setze hier die Werte von c und c' aus (8) ein, so erhält man als Gleichung der Cylinderfläche

$$z - \frac{P}{N} y = \varphi\left(x - \frac{M}{N} y\right).$$

Führt man den Wert von y aus der ersten der Gleichungen (8) in die zweite ein, so erhält man statt der Gleichungen (8) auch folgende

$$x = az + \alpha; \quad y = bz + \beta,$$

worin a und b konstante und α und β willkürliche Grössen bezeichnen; daher wird die Gleichung der Cylinderfläche

$$x - az = \varphi(y - bz).$$

III. Die Gleichung (1) gehe über in

$$(9) \quad x \frac{dz}{dx} + y \frac{dz}{dy} = 0,$$

es seien also $M = x$, $N = y$ und $P = 0$, so geben die Gleichungen (3)

$$dz = 0; \quad dx = \frac{x}{y} dy.$$

Dividirt man die zweite dieser Gleichungen mit x und integriert sodann beide, so kommt

$$z = c; \quad \log x = \log y + \log c',$$

worin c und $\log c'$ die Konstanten der Integration bezeichnen. Die letzte Gleichung gibt $\log \frac{x}{y} = \log c'$, woraus folgt $\frac{x}{y} = c'$. Daher erhält man folgende gleichzeitige Gleichungen

$$(10) \quad z = c; \quad \frac{x}{y} = c'.$$

Da auch hier $c = \varphi(c')$ sein wird, so folgt als Integral von (9)

$$(11) \quad z = \varphi\left(\frac{x}{y}\right).$$

Die Form der Oberfläche, welche (11) darstellt, kann wieder erkannt werden aus den Gleichungen (10). Es stellt $z = c$ eine Ebene dar, parallel zur xy Ebene und $\frac{x}{y} = c'$ eine Gerade, welche in dieser Ebene liegt und die z Achse schneidet. Lässt man c und c' sich ändern, so schreitet die Gerade längs der z Achse fort und dreht sich um dieselbe. Sie beschreibt eine konoidische Fläche, deren Form von dem Gesetze $c = \varphi(c')$ abhängt.

IV. Die Gleichung (1) sei in einem weiteren speziellen Falle

$$y \frac{dz}{dx} - x \frac{dz}{dy} = 0,$$

so wird $M = y$, $N = -x$ und $P = 0$ sein; daher werden die Gleichungen (3) sein

$$dz = 0; \quad dx + \frac{y}{x} dy = 0.$$

Man multipliziere die zweite dieser Gleichungen mit x , so gibt die Integration

$$(12) \quad z = c; \quad x^2 + y^2 = c'$$

und da wieder $c = \varphi(c')$ angenommen werden kann, so geben die Werte von c und c' aus (12) als Integral

$$z = \varphi(x^2 + y^2).$$

Diese Gleichung gehört einer Rotationsfläche an, deren Achse zusammenfällt mit der z Achse. Die erste der Gleichungen (12) stellt nämlich eine Ebene dar, senkrecht zur z Achse und die zweite einen Kreis, der in dieser Ebene liegt und dessen Mittelpunkt in die z Achse fällt. Rückt die Ebene durch Variation von c fort und ändert sich gleichzeitig auch der Radius $\sqrt{c'}$ des Kreises, so wird die Oberfläche beschrieben.

V. Endlich sei noch zu integrieren

$$(13) \quad (x - a) \frac{dz}{dx} + (y - b) \frac{dz}{dy} = z - c,$$

so geben die Gleichungen (3) sofort

$$\frac{dz}{z - c} - \frac{dy}{y - b} = 0; \quad \frac{dx}{x - a} - \frac{dy}{y - b} = 0,$$

woraus durch Integration folgt

$\log(z - c) - \log(y - b) = \log m$; $\log(x - a) - \log(y - b) = \log n$,
worin $\log m$ und $\log n$ die Konstanten der Integration darstellen. Zieht man links die Glieder zusammen und geht von den Logarithmen zu den Zahlen über, so wird

$$(14) \quad \frac{z - c}{y - b} = m; \quad \frac{x - a}{y - b} = n$$

und da $m = \varphi(n)$ gesetzt werden kann, so erhält man, wenn die Werte von m und n aus (14) in die letzte Relation eingeführt werden, als Integral von (13)

$$\frac{z - c}{y - b} = \varphi\left(\frac{x - a}{y - b}\right).$$

Diese Gleichung stellt eine Kegelfläche dar. Die Gleichungen (14) sind vom ersten Grad; sie sind die Gleichungen der Projektion der Kegelkante auf den Ebenen yz und xy . Diese Kante schreitet fort, sowie die Grössen m und n sich ändern und beschreibt die Oberfläche. Alle Kanten, wie sie auch im Raume liegen mögen, schneiden sich in einem Punkte, dessen Koordinaten a, b, c sind. Um dies zu zeigen, schreibe man die Gleichungen (14) wie folgt

$$z - c = m(y - b); \quad x - a = m(y - b).$$

Nimmt man nun $y=b$ an, so verschwinden die rechten Seiten dieser Gleichungen, also muss auch zugleich $x=a$ und $z=c$ werden. Dieser Punkt ist daher die Spitze des Kegels.

XV. Partielle Differentialgleichungen der zweiten Ordnung.

394. Form der Gleichungen. Werden die in § 391 unter (1) aufgeführten partiellen Differentialverhältnisse der ersten Ordnung nochmals differenziert und zwar zunächst in Hinsicht x , so wird sein

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = 2ay^3; \quad \frac{d^2 z}{dy dx} = baxy^2;$$

sodann in Hinsicht y , so erhält man

$$\frac{d^2 z}{dx dy} = baxy^2; \quad \frac{d^2 z}{dy^2} = bax^2y.$$

Es entstehen somit aus der gegebenen Funktion $z = ax^2y^3$ vier partielle Differentialverhältnisse, wovon indessen zwei einander gleich sind. In § 257 ist in der That nachgewiesen, dass allgemein sein muss

$$\frac{d^2 z}{dx dy} = \frac{d^2 z}{dy dx}.$$

Eine partielle Differentialgleichung der zweiten Ordnung, entsprechend einer Funktion mit den Variablen x, y, z , muss mindestens eines der drei partiellen Differentialverhältnisse der zweiten Ordnung enthalten; es können in ihr aber auch neben den Variablen x, y, z auch partielle Differentialverhältnisse der ersten Ordnung vorkommen. Die allgemeine Gleichung hat daher die Form

$$f\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}, \frac{d^2 z}{dx^2}, \frac{d^2 z}{dx dy}, \frac{d^2 z}{dy^2}\right) = 0.$$

Auch hier sollen nur einige der einfachsten speziellen Fälle behandelt werden.

395. Gleichungen mit einem partiellen Differentialverhältnis.

I. Es sei die Gleichung zu integrieren

$$(1) \quad \frac{d^2 z}{dx^2} = 0.$$

Wäre hierin z nur eine Funktion von x , so gäbe die Integration $\frac{dz}{dx} = c$, wo c die willkürliche Konstante bezeichnet. Da aber z auch von y abhängt, so nehme man $\varphi(y)$ für c und man erhält in der allgemeinsten Weise als Integral von (1)

$$(2) \quad \frac{dz}{dx} = \varphi(y).$$

Wird diese Gleichung in Hinsicht x wieder differentiiert, so ist $d\varphi(y)=0$ und man erhält die ursprüngliche Gleichung, ein Beweis, dass (2) der Gleichung (1) Genüge leistet.

Wird (2) in der Form $dz = \varphi(y) dx$ integriert, indem man y als konstant ansieht, so erhält man als gesuchtes Integral

$$(3) \quad z = x\varphi(y) + f(y),$$

in welchem $f(y)$ die neue willkürliche Konstante bezeichnet.

Gleichung (3) stellt eine Oberfläche dar. Man lege durch sie eine Ebene, parallel zur Ebene xz in einem bestimmten Abstand von der letztern, so wird y konstant. Man bezeichne nun die konstanten Grössen $\varphi(y)$ und $f(y)$ mit a und b , so geht (3) über in

$$(4) \quad z = ax + b.$$

Der Durchschnitt jener Ebene mit der Oberfläche ist daher, wie (4) zeigt, eine gerade Linie. Dies wird der Fall sein für jeden Wert von y . Diese Geraden schneiden die Ebene yz in Punkten, die stetig aufeinander folgen können. Sie bilden daher eine Kurve, deren Gleichung erhalten wird, wenn man $x=0$ in (3) setzt. Daher ist diese Gleichung

$$z = f(y).$$

Macht man $z=0$ in (3), so ergibt sich als Gleichung der Kurve, längs welcher die Oberfläche von der xy Ebene geschnitten wird

$$x = -\frac{f(y)}{\varphi(y)}.$$

II. Es sei gegeben

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = F(x, y).$$

Man multipliziere mit dx , betrachte y als konstant und integriere, so wird

$$\frac{dz}{dx} = \int F(x, y) dx + \varphi(y).$$

Dabei vertritt $\varphi(y)$ die Stelle der Integrations-Konstanten. Wird mit dx multipliziert, so erhält man das gesuchte Integral

$$z = \int dx \left[\int F(x, y) dx + \varphi(y) \right] + f(y),$$

wobei $f(y)$ die nämliche Bedeutung hat wie oben $\varphi(y)$.

Ganz in gleicher Weise kann $\frac{d^2 z}{dy^2} = F(x, y)$ integriert werden.

III. Die Gleichung

$$\frac{d^2 z}{dx dy} = F(x, y)$$

integriere man zuerst in Hinsicht x und das Resultat in Hinsicht y oder umgekehrt. Zunächst hat man

$$\frac{d^2 z}{dy} = F(x, y) dx$$

und daher durch Integration, indem y als konstant angesehen wird

$$\frac{dz}{dy} = \int F(x, y) dx + \varphi(y).$$

Multipliziert man mit dy , betrachtet x als konstant und integriert, so erhält man als gesuchtes Integral

$$z = \int dy [F(x, y) dx + \varphi(y)] + f(x).$$

Wenn $F(x, y) = c$, so wird, wenn $\int \varphi(y) dy$ durch $F(y)$ ersetzt wird

$$\begin{aligned} dz &= [cx + \varphi(y)] dy \\ (5) \quad z &= cxy + F(y) + f(x). \end{aligned}$$

Diese Gleichung (5) stellt wieder eine Oberfläche dar. Für $y = 0$ wird die Gleichung der Kurve, längs welcher die Ebene xz von ihr geschnitten wird, sein

$$z = F(0) + f(x).$$

Da $f(x)$ willkürlich ist, so sind unendlich viele solcher Kurven möglich. Nimmt man $x = 0$ an, so enthält Gleichung (5) alle Punkte der Oberfläche, welche der Ebene yz angehören. Diese Punkte liegen in einer Kurve, deren Gleichung ist

$$z = F(y) + f(0).$$

Auch hier ist $F(y)$ willkürlich; es können also unendlich viele Kurven dieser Art in der Ebene yz angenommen werden. Man erkennt hieraus die Mannigfaltigkeit der Oberflächen, welche in (5) enthalten sind.

396. Gleichung mit dem ersten und zweiten Differentialverhältnis derselben Variablen. Es sei zu integrieren

$$(1) \quad \frac{d^2 z}{dy^2} + P \frac{dz}{dy} = Q,$$

wo P und Q Funktionen von x und y sein sollen. Man setze

$$(2) \quad \frac{dz}{dy} = u, \quad \text{also} \quad \frac{d^2 z}{dy^2} = \frac{du}{dy}$$

in Gleichung (1), so geht sie über in

$$(3) \quad du + P u dy = Q dy.$$

Diese Gleichung stimmt der Form nach überein mit der in § 337 behandelten. Um darin die Sonderung der Veränderlichen durchzuführen, nehme man

$$(4) \quad u = Yt,$$

wo Y und t zwei veränderliche Grössen bezeichnen, so wird

$$(5) \quad du = Y dt + t dY.$$

Führt man die Werte von u und du aus (4) und (5) in (3), so kommt

$$Y(dt + Ptdy) + tdY = Qdy.$$

Man wähle nun Y so, dass

$$(6) \quad t dY = Q dy$$

wird, so muss auch sein

$$dt + Ptdy = 0.$$

Allein aus dieser Gleichung folgt, indem man mit t dividiert und integriert

$$(7) \quad \log t = - \int P dy; \quad t = e^{-\int P dy}.$$

Setzt man diesen Wert von t in (6), so wird

$$dY = Q dy e^{\int P dy}.$$

Man betrachte x als konstant und integriere, so kommt

$$(8) \quad Y = \int Q dy e^{\int P dy} + \varphi(x).$$

Können die in (7) und (8) angedeuteten Integrationen ausgeführt werden, so kann auch Y als bekannt betrachtet werden. Mit Hilfe von (7) und (8) gibt daher Gleichung (4)

$$u = Y e^{-\int P dy},$$

und da nach (2) $dz = u dy$, so wird nunmehr

$$dz = Y dy e^{-\int P dy}$$

und daher das Integral der gegebenen Gleichung

$$z = \int Y dy e^{-\int P dy} + \varphi(x).$$

Es seien P und Q konstant, so wird

$$\int P dy = Py; \quad t = e^{-Py}; \quad Y = \frac{Q}{P} e^{Py} + \varphi(x).$$

$$z = \frac{1}{P} [Qy - \varphi(x) \cdot e^{-Py}] + f(x).$$

397. Gleichung mit zwei zweiten Differentialverhältnissen. Es sei die Gleichung zu integrieren

$$(1) \quad \frac{d^2 z}{dx^2} = a^2 \frac{d^2 z}{dy^2}.$$

Man nehme an, das Integral lasse sich darstellen durch

$$(2) \quad z = e^{m x + n y},$$

wo m und n willkürliche Konstante bezeichnen. Die Differentiation von (2) gibt folgende partielle Differentialverhältnisse

$$\frac{dz}{dx} = m e^{mx+ny}; \quad \frac{dz}{dy} = n e^{mx+ny},$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = m^2 e^{mx+ny}; \quad \frac{d^2z}{dy^2} = n^2 e^{mx+ny}.$$

Setzt man die Werte von $\frac{d^2z}{dx^2}$ und $\frac{d^2z}{dy^2}$ in (1), so folgt

$$(3) \quad m^2 = a^2 n^2; \quad \text{also} \quad m = \pm a n.$$

Es besteht also zwischen den willkürlichen Konstanten ein bestimmter durch (3) gegebener Zusammenhang.

Ersetzt man in (2) die Grösse m durch $\pm a n$, so erhält man zwei Werte von z , die mit z' und z'' bezeichnet seien; dann wird

$$z' = e^{n(y+ax)}; \quad z'' = e^{n(y-ax)}.$$

Diese Werte sind partikuläre Integrale von (1). Also wird auch die Summe $z' + z''$ ein Integral von (1) sein und auch dann noch, wenn jeder der partikulären Werte mit einer Konstanten multipliziert wird. Der Wert von z ist daher

$$(4) \quad z = A e^{n(y+ax)} + B e^{n(y-ax)},$$

wo A und B die neuen Konstanten bezeichnen. Nun ist aber in (4) die Grösse n willkürlich und einer beliebigen Ausdehnung fähig. Gibt man der Grösse n eine Reihe von Werten $n', n'', \dots$, so liefert (4) ebenso viele Integrale, als Werte von n angenommen werden. Die Summe dieser Integrale entspricht der Gleichung (1) allgemeiner als Gleichung (4). Man erhält daher als Ausdruck für das allgemeine Integral.

$$(5) \quad z = \sum A e^{n(y+ax)} + \sum B e^{n(y-ax)}.$$

Allein das erste Glied rechts ist eine Funktion von $y + ax$, das zweite von $y - ax$. Diese Funktionen seien allgemein bezeichnet mit $F(y + ax)$ und $f(y - ax)$. Daher kann (5) auch ausgedrückt werden durch

$$(6) \quad z = F(y + ax) + f(y - ax).$$

Dass dieser Wert von z das Integral ist von (1), zeigt die Probe. Die partiellen Differentialverhältnisse von (6) sind nämlich, da a konstant

$$\frac{dz}{dx} = a F'(y + ax) - a f'(y - ax),$$

$$\frac{dz}{dy} = F'(y + ax) + f'(y - ax),$$

$$(7) \quad \frac{d^2z}{dx^2} = a^2 F''(y + ax) + a^2 f''(y - ax),$$

$$(8) \quad \frac{d^2z}{dy^2} = F''(y + ax) + f''(y - ax).$$

Setzt man die Werte von $\frac{d^2z}{dx^2}$ und $\frac{d^2z}{dy^2}$ aus (6) und (7) in (1), so heben sich sämtliche Glieder auf und es leistet das Integral (6) der Gleichung (1) Genüge. Diese stellt eine krumme Oberfläche dar, deren Form abhängt von dem Gesetz, dem die Funktionen auf der rechten Seite unterworfen sind. Das Integral (6) kann aber auch noch zu andern Zwecken verwendet werden, wie die folgende Aufgabe zeigen wird.

398. Schwingungen einer gespannten Saite. Eine Saite, an beiden Enden festgehalten, werde gespannt und hierauf in Bewegung versetzt, so dass die Schwerpunkte ihrer Querschnitte in einer Ebene, welche durch die festen Endpunkte geht, hin- und herschwingen. Man soll deren Schwingungsdauer bestimmen.

Die Saite bildet in der Schwingungsebene Kurven. Man nehme die Gerade, welche durch die Endpunkte A und B (Fig. 151) der Saite geht, als Abscissenachse und A als Anfangspunkt an. Es sei AmB eine Kurve, welche die Saite bildet zur Zeit t. Ferner seien

x, y die Koordinaten eines Kurvenpunktes m,

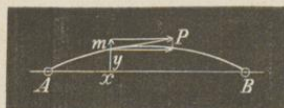
s die Bogenlänge Am,

P die Spannung der Saite im Punkte m,

p das Gewicht der Saite per Längeneinheit und l die Entfernung AB der festen Punkte.

Man lasse x übergehen in $x + dx$, so wird y zu $y + dy$ und s zu $s + ds$. Die Spannung P liegt in der Richtung des Bogenelementes ds. Nun zerlege man P in zwei Seitenkräfte, die eine parallel, die andere senkrecht zu AB. Für die letztere erhält

Fig. 151.



man $P \frac{dy}{ds}$. Wenn x in $x + dx$ übergeht,

so geht $P \frac{dy}{ds}$ über in $P \frac{dy}{ds} + d\left(P \frac{dy}{ds}\right)$.

Also wirken an den Endpunkten von ds zwei Kräfte, senkrecht zu AB, d. h. in der Richtung der Bewegung.

Der Unterschied beider Kräfte ist $d\left(P \frac{dy}{ds}\right)$. Nun kann man längs

der Strecke ds die Grösse P als konstant annehmen, also wird $d\left(P \frac{dy}{ds}\right) = P \frac{d^2y}{ds}$. Daher wird das Bogenelement ds in dem Augen-

blick, da die Zeit t abgelaufen ist, in der Richtung der Bewegung getrieben mit der Kraft $P \frac{d^2y}{ds}$. Man kann annehmen, diese Kraft bleibe

während des nun folgenden Zeitelementes dt konstant; also wird während dieser Zeit eine gleichförmig beschleunigte Bewegung entstehen (§ 151).

Das Gewicht des Bogenelementes ds ist pds. Man denke sich nun dieses Element sei abgelöst von der Saite und sei nur dem Einfluss der Kraft $P \frac{d^2y}{ds}$ ausgesetzt, es bewege sich also im Raume frei.

Der genannten Kraft entspreche die Beschleunigung g', dem Gewichte pds

die Beschleunigung g , so verhalten sich die Beschleunigungen wie die Kräfte, welche sie hervorbringen; daher

$$g' : g = P \frac{d^2 y}{ds} : p ds.$$

Allein nach § 369 ist die Beschleunigung in der Richtung der Bewegung auch

$$g' = \frac{d^2 y}{dt^2}.$$

Eliminiert man g' aus den beiden Gleichungen, so kommt

$$(1) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = g \frac{P}{p} \frac{d^2 y}{ds^2}.$$

Nun machen wir die Voraussetzung, die Ablenkung der Kurve von der Geraden AB sei so klein, dass ds mit dx vertauscht werden könne. Dann kann auch die Spannung P der ganzen Länge der Saite nach als konstant angesehen werden. Man setze zur Abkürzung

$$(2) \quad g \frac{P}{p} = a^2,$$

so geht Gleichung (1) über in

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = a^2 \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

Diese Gleichung stimmt der Form nach mit derjenigen überein, welche in § 397 integriert ist. Ihr Integral wird daher sein

$$(3) \quad y = F(x + at) + f(x - at).$$

Nun nehmen wir an, es gelten für $t=0$ folgende Gleichungen

$$(4) \quad y = \varphi(x),$$

$$(5) \quad \frac{dy}{dt} = \psi(x).$$

Gleichung (4) gibt die Form der Kurve an bei Beginn der Bewegung und (5) die Geschwindigkeit des Punktes x, y zu dieser Zeit. Setzt man daher $t=0$ in (3), so erhält man jenen Wert von y , welcher der Gleichung (4) entspricht; mithin wird für $t=0$

$$(6) \quad F(x) + f(x) = \varphi(x).$$

Durch Differentiation der Gleichung (3) in Hinsicht t erhält man

$$\frac{dy}{dt} = a F'(x + at) - a f'(x - at).$$

Setzt man hierin $t=0$, so geht dieser Wert von $\frac{dy}{dt}$ in jenen der Gleichung (5) über; daher

$$a [F'(x) - f'(x)] = \psi(x).$$

Nun nehme man an, es sei für $t=0$ auch die Geschwindigkeit $\psi(x)$ nach (5) gleich Null, so gibt die letzte Gleichung

$$F'(x) - f'(x) = 0.$$

Das Integral dieser Gleichung ist

$$(7) \quad F(x) = f(x) + C,$$

wo C die willkürliche Konstante bezeichnet. Durch Addition und Subtraktion von (6) und (7) kommt

$$F(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) + \frac{1}{2} C; \quad f(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) - \frac{1}{2} C,$$

also auch, wenn x ausgedehnt wird

$$F(x + at) = \frac{1}{2} \varphi(x + at) + \frac{1}{2} C; \quad f(x - at) = \frac{1}{2} \varphi(x - at) - \frac{1}{2} C.$$

Setzt man diese Werte in (3), so folgt als Gleichung der Kurve

$$(8) \quad y = \frac{1}{2} [\varphi(x + at) + \varphi(x - at)].$$

Für $t=0$ geht diese Gleichung über in $y = \varphi(x)$, wie es nach (4) sein soll.

Gleichung (8) gilt für alle Kurvenpunkte, also auch für A und B . Nun ist aber für A sowohl $x=0$ als auch $y=0$; daher

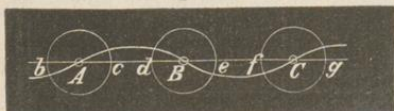
$$(9) \quad 0 = \varphi(at) + \varphi(-at),$$

und für den Punkt B ist $x=1$ und $y=0$; daher

$$(10) \quad 0 = \varphi(1 + at) + \varphi(1 - at).$$

Um diese Gleichungen richtig aufzufassen, denke man sich die Saite über die Punkte A und B hinaus geradlinig verlängert und diese durch feste Punkte $A, B, C, \dots$ (Fig. 152) so gehalten, dass die Saite

Fig. 152.



in eine Anzahl gleich langer Teile zerfällt. Bei dieser Anordnung wird sich die Bewegung des einen Saitenstückes auch auf die andern übertragen, so dass eine wellenförmige Kurve entsteht. Man zeichne um die Punkte $A, B, C, \dots$ als Mit-

telpunkte Kreise mit dem Halbmesser at , welche die Abszissenachse schneiden in b und c , d und e , f und $g, \dots$

Den Punkten c und b entsprechen die Abszissen at und $-at$ und die Ordinaten $\varphi(at)$ und $\varphi(-at)$. Diese sind einander gleich und entgegengesetzt gerichtet, denn sie heben sich nach (9) gegenseitig auf. Da $AB=1$, so entsprechen den Punkten e und d die Abszissen $Ae=1+at$ und $Ad=1-at$, also auch die Ordinaten $\varphi(1+at)$ und $\varphi(1-at)$. Auch diese letztern sind gleich und entgegengesetzt, weil sie sich nach (10) aufheben.

Da $AC = 2l$, so wird die Abscisse $Ag = 2l + at$ und $Af = 2l - at$; die entsprechenden Ordinaten geben folgende Gleichung

$$(11) \quad 0 = \varphi(2l + at) + \varphi(2l - at),$$

welche unmittelbar aus (8) hervorgeht, da $y = 0$ wird für den Punkt C, d. h. für $x = 2l$; also sind nach (11) die Ordinaten für f und g gleich und entgegengesetzt, u. s. w.

Noch ergeben sich folgende Relationen. Man ersetze at in (10) durch $l - at$, so erhält man

$$(12) \quad 0 = \varphi(2l - at) + \varphi(at).$$

Setzt man die Werte von $\varphi(at)$ aus (9) und (12) einander gleich, so wird

$$(13) \quad \varphi(2l - at) = \varphi(-at).$$

Ganz ebenso erhält man, wenn at in (10) durch $l + at$ ersetzt wird

$$\varphi(2l + at) = \varphi(at).$$

In den beiden letzten Gleichungen weichen die Abscissen der Kurvenpunkte, welche je einer Gleichung angehören, um $2l$ von einander ab. Daher sind die Ordinaten solcher Punkte einander gleich und gleich gelegen, d. h. mit gleichem Vorzeichen versehen.

Einer Grenzlage der Kurve entspreche die Zeit $t = 0$. Die nächstfolgende gleiche Grenzlage werde erreicht in der Zeit T , so ist T die Zeit zu einer Hin- und Herschwingung. Für diese beiden Grenzlagen erhält man daher aus (13)

$$\varphi(2l - aT) = \varphi(0).$$

Diese Gleichung wird erfüllt für $2l - aT = 0$, woraus folgt, wenn a durch seinen Wert aus (2) ersetzt wird

$$T = 2 \frac{l}{a} = 2l \sqrt{\frac{p}{gP}}.$$

Die Schwingungszeit hängt also ab von der Länge, dem Gewicht und der Spannung der Saite.

399. Wärmeleitung in einem homogenen prismatischen Stabe. Der Stab befinde sich in einem gewissen Zustand der Erwärmung; hierauf werde er in ein Medium versetzt, worin die Temperatur Null herrsche; gleichzeitig werde dafür gesorgt, dass die beiden Enden des Stabes sofort die Temperatur Null annehmen. Von nun an beginnt der Stab Wärme an das Medium abzugeben. Man soll den Wärmezustand des Stabes nach einer gegebenen Zeit bestimmen. Es sei

q der Querschnitt des Stabes, möglichst klein vorausgesetzt,

u der Umfang seines Querschnittes,

x die Entfernung eines Querschnittes von dem einen Stabende,

y die Temperatur in diesem Querschnitt nach der Zeit t , in allen

Punkten des Querschnittes gleich gross vorausgesetzt,

a die Länge des Stabes,

h, k die äussere und innere Leitungsfähigkeit der Wärme, also z. B.
 h die Wärme, welche in der Zeiteinheit durch die Oberfläche 1
 aus dem Stabe an das Medium übergeht, wenn der Unterschied
 der Temperaturen im Stab und Medium 1^0 beträgt,
 s die spezifische Wärme und
 p das Gewicht der Kubikeinheit des Stabes.

Man lege Querschnitte durch den Stab in den Abständen $x - dx$, x ,
 $x + dx$ und $x + 2 dx$ vom Anfangspunkt aus, so entstehen drei Volumen-
 elemente α, β, γ . Die Wärme bewege sich in der Richtung von α
 nach γ , so nimmt β Wärme auf von α und gibt solche ab an γ und
 an die Umgebung. Dieser Wärmeaustausch finde nach der Zeit t statt
 und dauere während des Zeitelementes dt . Nun verliert β mehr
 Wärme als es bekommt; der Unterschied wird gleich sein der Ab-
 nahme am Wärmegehalt des Stabteilchens.

Das Prisma β hat das Volumen $q dx$, also das Gewicht $p q dx$;
 es enthält daher bei der Temperatur y die Wärmemenge $s p q dx \cdot y$.
 Nimmt x um dx zu, so ändert sich diese Wärmemenge um ihr Diffe-
 rential, also um $s p q dx dy$.

Von α erhält β durch innere Leitung in der Zeiteinheit auf die
 Stablänge 1 bei 1^0 Temperaturdifferenz eine Wärmemenge $k q$, also in
 der Zeit dt und bei der Temperaturdifferenz dy die Wärmemenge $k q dt dy$
 und bei der Länge dx die Wärme $k q \frac{dy}{dx} dt$. Wenn sich x um dx
 ändert, so ändert sich auch diese Wärmemenge um ihr Differential,
 also um $k q \frac{d^2 y}{dx^2} dt$. Hiervon muss nun noch abgezogen werden die
 Wärmemenge $h u x y dt$, welche die Oberfläche $u dx$ des Prismas in der
 Zeit dt verliert. Daher die Gleichung

$$s p q dx dy = k q \frac{d^2 y}{dx^2} dt - h u x y dt,$$

oder auch

$$\frac{dy}{dt} = \frac{k}{s p} \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{h u}{s p q} y.$$

Man setze zur Abkürzung

$$(1) \quad \frac{k}{s p} = b; \quad \frac{h u}{s p q} = r,$$

so wird die vorstehende Gleichung sein

$$(2) \quad \frac{dy}{dt} = b \frac{d^2 y}{dx^2} - r y.$$

Das letzte Glied dieser Gleichung kann nun noch beseitigt wer-
 den, indem man setzt

$$(3) \quad y = v e^{-rt}.$$

Denn die Differentiation von (3) gibt, da v veränderlich ist

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dv}{dt} e^{-rt} - r v e^{-rt}; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx} e^{-rt}; \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 v}{dx^2} e^{-rt}.$$

Führt man die Werte von $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$ und y in (2), so folgt als vereinfachte Differentialgleichung der Wärmebewegung

$$(4) \quad \frac{dv}{dt} = b \frac{d^2 v}{dx^2},$$

welche nunmehr integriert werden soll.

Ein Integral dieser Gleichung ist

$$(5) \quad v = A \sin m x \cdot e^{-b m^2 t},$$

worin A und m willkürliche Konstante bezeichnen. Behufs der Verifikation differentiire man (5) in Hinsicht x , nachher in Hinsicht t , so kommt

$$\frac{dv}{dx} = m A \cos m x \cdot e^{-b m^2 t}; \quad \frac{d^2 v}{dx^2} = -m^2 A \sin m x \cdot e^{-b m^2 t};$$

$$\frac{dv}{dt} = -b m^2 A \sin m x \cdot e^{-b m^2 t}.$$

Setzt man diese Werte von $\frac{d^2 v}{dx^2}$ und $\frac{dv}{dt}$ in (4), so werden in der That beide Seiten gleich. Es ist daher (5) ein Integral von (4).

Nun ist zu prüfen, inwiefern Gleichung (5) den Bedingungen entspricht, welche gemäss der Aufgabe gestellt werden müssen.

Die erste Bedingung ist die, dass die Temperatur an den Enden des Stabes gleich Null sein müsse. Für $x=0$ und $x=a$ muss also y in (3) und somit auch v in (3) und (5) zu Null werden. Für $x=0$ wird nun v in (5) ohne Weiteres zu Null; dagegen für $x=a$ nur, wenn $m = \frac{\pi}{a}$ oder ein Vielfaches von $\frac{\pi}{a}$ ist. Nimmt man die willkürliche Grösse $m = \frac{\pi}{a}$ an, so wird $\sin m x = \sin \frac{\pi x}{a}$ und diese Grösse wird $= 0$ für $x = a$. Durch diese Modifikation von (5) erhält man

$$(6) \quad v = A \sin \frac{\pi x}{a} \cdot e^{-\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 b t}.$$

Die zweite Bedingung, welcher das Integral (6) entsprechen soll, ist die, dass dasselbe den ursprünglichen Wärmeszustand des Stabes angibt für $t=0$. Hierfür wird nun (6) zu

$$(7) \quad v = A \sin \frac{\pi x}{a},$$

woraus man nach (3) schliesst, dass A die Anfangstemperatur an jener Stelle bezeichnet, für welche $\sin \frac{\pi x}{a} = 1$, also $x = \frac{1}{2}a$ ist. Von da aus

nimmt vor- und rückwärts die Temperatur ab wie der Sinus von $\frac{\pi x}{a}$.

Somit setzt Gleichung (6) einen ganz speziellen ursprünglichen Wärmezustand voraus. Unter unendlich vielen Wärmezuständen, die willkürlich geschaffen werden, wird sich nur einer finden, der dem Gesetze (6) der Wärmeverteilung entspricht. Es kann daher das Integral (6) nur ein partikuläres sein.

Um das allgemeine Integral zu finden, das alle denkbaren anfänglichen Wärmezustände in sich schliesst, lasse man in (5) die Konstanten A und m sich ändern. Für A erhalte man der Reihe nach $A_1, A_2, A_3, \dots$ und für m, gemäss Formel (6), die entsprechenden Werte $\frac{\pi}{a}, \frac{2\pi}{a}, \frac{3\pi}{a}, \dots$, so bekommt man durch Einführen dieser Werte in (6) ebenso viele partikuläre Integrale, deren Summe

$$(8) \quad v = A_1 \sin \frac{\pi x}{a} \cdot e^{-\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 b t} + A_2 \sin \frac{2\pi x}{a} \cdot e^{-\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 b t} \\ + A_3 \sin \frac{3\pi x}{a} \cdot e^{-\left(\frac{3\pi}{a}\right)^2 b t} + \dots$$

ebenfalls ein Integral von (4) sein wird. Enthält diese Reihe unendlich viele Glieder, so kann ihr Wert als das allgemeine Integral angesehen werden. Die Reihe (8) konvergiert rasch, denn die Exponentialgrösse mit wachsendem, negativem Exponenten, nimmt sehr rasch ab.

Setzt man $t=0$ in (8), so reduzieren sich die Exponentialgrössen auf 1. Der dabei entstehende Wert von v werde mit $\varphi(x)$ bezeichnet, so erhält man

$$(9) \quad \varphi(x) = A_1 \sin \frac{\pi x}{a} + A_2 \sin \frac{2\pi x}{a} + A_3 \sin \frac{3\pi x}{a} + \dots$$

Diese Gleichung stellt eine Kurve dar, welche die Abscissenachse in den Punkten $x=0$ und $x=a$ schneidet. Speziellen Werten von x, wie $x_1, x_2, \dots$ entsprechen die Ordinaten $\varphi(x_1), \varphi(x_2), \dots$. Diese sind nichts anderes als die ursprünglichen Temperaturen des Stabes an Stellen, welche um $x_1, x_2, \dots$ vom Anfangspunkt abstehen. Sind diese Temperaturen gegeben, so kann die Kurve gezeichnet werden und es sind dann die Vorzahlen $A_1, A_2, \dots$ keine willkürlichen Grössen mehr, sondern Ergebnisse der Rechnung.

Man stelle sich in der That die Aufgabe, diese Vorzahlen zu berechnen. Zu dem Zwecke teile man a in $n+1$ gleiche Teile, bezeichne die Abscissen der aufeinander folgenden Teilpunkte mit $x_1, x_2, \dots, x_n$, die entsprechenden Vorzahlen mit $A_1, A_2, \dots, A_n$, so liefert (9) folgende spezielle Gleichungen

$$A_e \left[\sin \frac{c \pi x_1}{a} \sin \frac{e \pi x_1}{a} + \sin \frac{c \pi x_2}{a} \sin \frac{e \pi x_2}{a} + \dots \right] \frac{a}{n+1}.$$

Es liegt also wieder eine Quadratur vor. Der allgemeine Ausdruck der Ordinate ist $A_e \sin \frac{c \pi x}{a} \sin \frac{e \pi x}{a}$; daher die Fläche zwischen den Grenzen $x=0$ und $x=a$

$$(11) \quad A_e \int_0^a \sin \frac{c \pi x}{a} \sin \frac{e \pi x}{a} dx.$$

Es kommt eine Vertikalreihe vor, bei welcher c und e übereinstimmen. Lässt man für diese Reihe e in c übergehen, so erhält man aus (11)

$$(12) \quad A_e \int_0^a \left(\sin \frac{c \pi x}{a} \right)^2 dx.$$

Man denke sich in (11) die Grösse c und e verschieden. Aendert sich dann, wie die Integration dies voraussetzt, die Variable x von 0 bis a , so nehmen die Faktoren $\sin \frac{c \pi x}{a}$ und $\sin \frac{e \pi x}{a}$ positive und negative Vorzeichen an, dasselbe wird auch der Fall sein mit ihren Produkten. Eine Zusammenstellung zeigt, dass je einem positiven Produkt ein gleiches negatives entspricht, so dass das Integral (11) zu Null wird. Ein Beweis für diesen Satz kann auch wie folgt geführt werden. Es ist

$$\sin \frac{c \pi x}{a} \sin \frac{e \pi x}{a} = \frac{1}{2} \left[\cos \frac{(e-c) \pi x}{a} - \cos \frac{(e+c) \pi x}{a} \right],$$

wie sich sofort ergibt, wenn die Cosinuswerte rechts nach der Formel $\cos(\alpha \pm \beta)$ entwickelt werden. Daher statt des Integrals in (11)

$$(13) \quad \frac{1}{2} \int_0^a dx \left[\cos \frac{(e-c) \pi x}{a} - \cos \frac{(e+c) \pi x}{a} \right].$$

Allein es ist $\int_0^a \cos \frac{\delta \pi x}{a} dx = \frac{a}{\delta \pi} \sin \frac{\delta \pi x}{a}$; folglich

$$\int_0^a \cos \frac{\delta \pi x}{a} dx = 0,$$

da δ eine ganze Zahl bezeichnet. Daher verschwinden beide Glieder im Integral (13); also ist auch das Integral (11) gleich Null.

Somit reduziert sich die Summe aller Glieder auf der rechten Seite des vorstehenden Systems von Gleichungen auf das Integral (12). Nun ist nach § 79

$$\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x,$$

$$\int \left(\sin \frac{c \pi x}{a} \right)^2 dx = \frac{a}{c \pi} \left(\frac{c \pi x}{2a} - \frac{1}{4} \sin \frac{2c \pi x}{a} \right),$$

und daher das Integral der letzten Gleichung für die angegebenen Grenzen $= \frac{a}{2}$ und das Integral (12) $= \frac{a}{2} A_c$. Setzt man diesen Wert dem Integral (10) gleich, so folgt

$$(14) \quad A_c = \frac{2}{a} \int_0^a \varphi(x) \sin \frac{c \pi x}{a} dx.$$

Hiermit ist das Bildungsgesetz der Vorzahlen $A_1, A_2, \dots$ gefunden. Dasselbe ist der Art, dass es noch gültig bleibt, wenn man für x eine neue Veränderliche einführt. Diese sei z. B. z , so wird das allgemeine Glied der Reihe (9) sein

$$\frac{2}{a} \sin \frac{c \pi x}{a} \int_0^a \varphi(z) \sin \frac{c \pi z}{a} dz.$$

Daher kann die Summe aller Glieder dieser Reihe dargestellt werden durch

$$(15) \quad \varphi(x) = \frac{2}{a} \sum \sin \frac{c \pi x}{a} \int_0^a \varphi(z) \sin \frac{c \pi z}{a} dz,$$

worin c von 1 bis ∞ auszudehnen ist.

Mit Hilfe des Wertes von A_c in (14) wird nun das allgemeine Glied der Reihe (8)

$$\frac{2}{a} \sin \frac{c \pi x}{a} \cdot e^{-\left(\frac{c \pi}{a}\right) b t} \int_0^a \varphi(z) \sin \frac{c \pi z}{a} dz.$$

Summiert man die Glieder der Reihe, indem man das Zeichen Σ vor das allgemeine Glied setzt, multipliziert man sodann noch nach Vorschrift von (3) mit e^{-rt} , so kommt

$$(16) \quad y = \frac{2}{a} e^{-rt} \sum \sin \frac{c \pi x}{a} \cdot e^{-\left(\frac{c \pi}{a}\right) b t} \int_0^a \varphi(z) \sin \frac{c \pi z}{a} dz.$$

Diese Gleichung gibt die Temperatur y des Stabes für jeden Wert von x und nach jeder gegebenen Zeit, so unregelmässig auch die Wärme im Anfangszustand verteilt gewesen sein mag.

Mit wachsender Zeit nehmen die Glieder der Reihe (8), der Exponentialgrösse wegen, sehr rasch ab und reduzieren sich bald auf das erste Glied. Alsdann fällt das Summenzeichen Σ aus (16) weg, zugleich wird $c=1$ und die Gleichung geht über in

$$(17) \quad y = \frac{2}{a} \sin \frac{\pi x}{a} \cdot e^{-\left(r + \frac{\pi^2 b}{a^2}\right)t} \int_0^a \varphi(z) \sin \frac{\pi z}{a} dz.$$

Welches auch der Wert von $\varphi(z)$ sein mag, so ist das bestimmte Integral immer eine Konstante; sie sei mit B bezeichnet, so wird (17) zu

$$y = \frac{2B}{a} \sin \frac{\pi x}{a} \cdot e^{-\left(r + \frac{\pi^2 b}{a^2}\right)t}.$$

Diese Gleichung zeigt, dass im Stab vom Anfangszustand an die Tendenz herrscht, eine Wärmeverteilung herbeizuführen, welche der Grösse $\sin \frac{\pi x}{a}$, also dem Sinus der Bogen des Halbkreises, proportional ist. Diese Grösse kam aber schon im partikulären Integral (7) vor; also wird der Zustand, den das partikuläre Integral darstellt, bald erreicht und bis zur gänzlichen Abkühlung verbleiben.

Man denke sich die Wärme anfangs ganz regellos verteilt, z. B. so, dass die Temperatur in der Mitte des Stabes kleiner ist als in benachbarten Teilen rechts und links, so wird Wärme von beiden Seiten her nach der Mitte sich bewegen, wie nach den Enden des Stabes. In einem gewissen Augenblick hört der Zufluss nach der Mitte hin auf, von da an sinkt zu beiden Seiten die Temperatur unter jene der Mitte und es ist nunmehr jener Zustand nahezu erreicht, der durch das partikuläre Integral ausgedrückt wird.

Verbesserungen.

Seite 3 Zeile 8 von u. lese y statt x.

„ 5 „ 8 „ u. „ 2π st. $\frac{\pi}{2}$.

„ 14 „ 4 „ o. „ x^n st. n^n .

„ 6 „ o. „ gibt st. gilt.

„ 15 „ 5 „ o. „ $-\frac{a dx}{x^2}$ st. $\frac{a dx}{x^2}$.

„ 17 „ 1 „ u. „ $n(\log x)^{n-1}$ st. $n \log x^{n-1}$.

„ 22 „ 2 „ o. „ z st. r.

„ 25 „ 10 „ o. „ $\log a y$ st. $\log a$.

„ 53 „ 4 „ o. „ $-\frac{9}{16}$ st. $+\frac{9}{16}$.

„ $\frac{11}{4}$ st. $\frac{11}{10}$.

„ 66 „ 10 „ o. „ $\sin x \sqrt{-1}^n$ st. $\sin x \sqrt{-1}^n$.

„ 69 „ 1 „ u. „ x^{-1} st. x_{-1} .

„ 70 „ 7 „ u. „ Differentialien st. Differentialgleichungen.

„ 75 „ 1 „ o. „ $2 d \arcsin$ st. $d \arcsin$.

„ 2 „ o. „ $\frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{x-a} \sqrt{b-x}}$ st. $\int \frac{dx}{\sqrt{x-a} \sqrt{x-b}}$.

„ 84 „ 3 „ o. „ $\sin x dx$ st. $\sin x$.

„ 200 „ 12 „ o. „ $q = \infty$ st. $q = 0$.

„ 250 „ 1 „ u. „ t'' st. t''' .

„ 502 „ 14 „ u. „ $\log(x + \sqrt{ay + x^2})$ st. $\log(x + \sqrt{ay + x^2})$.