Lehrbuch der Physik, einschliesslich der Physik des Himmels (Himmelskunde), der Luft (Meteorologie) und der Erde (physikalische Geographie)

Reis, Paul

Leipzig, 1890

Persistent Link: https://doi.org/10.3931/e-rara-75339

Erster Theil der Physik. Die Lehre von der Körperbewegung oder die Mechanik.

Erster Theil der Physik.

Die Lehre von der Körperbewegung oder die Mechanik.

Erste Abtheilung.

Die Mechanik der festen Körper oder die allgemeine Mechanik.

1. Die Lehre vom Gleichgewichte oder die Statik.

Das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten (Johann Bernoulli 1717). 93
Eine Veränderung wird an einem Körper nur hervorgebracht, wenn Kräfte auf denselben einwirken. Doch können auch Kräfte auf einen Körper wirken, ohne eine Veränderung zu erzielen; man sagt dann: die Kräfte sind im Gleichgewichte. Kräfte sind also im Gleichgewichte, wenn sie keine Veränderung an dem Körper hervorbringen, auf welchen sie wirken. Der Körper kann sich hierbei im Zustande der Ruhe oder im Zustande der Bewegung befinden. Wenn ein Körper in Bewegung ist, und wenn die auf ihn wirkenden Kräfte im Gleichgewichte sind, so geht er nach dem Gesetze der Trägheit mit unveränderter Bewegung weiter.

Das Gleichgewicht der Kräfte kommt besonders bei den Maschinen zur Anwendung; wenn die bewegenden Kräfte an einer Maschine mit den Widerständen im Gleichgewichte sind, so ist die Maschine im Beharrungszustande, sie arbeitet ungestört weiter. Ein Eisenbahnzug z. B. oder ein Dampfschiff läuft mit derselben Geschwindigkeit weiter, wenn die Dampfmaschinenkraft jeden Moment im Gleichgewichte ist mit der Reibung, dem Widerstande der Luft, des Wassers u. s. w. Ist die Wirkung der Dampfmaschine größer als die Wirkung der Widerstände, wie dies im Anlaufe der Fall sein muß, so nimmt die Geschwindigkeit zu; ist aber die Wirkung der Widerstände überwiegend, so nimmt die Geschwindigkeit ab, ein Fall, der insbesondere beim Endlaufe eintritt. Der Beharrungszustand oder Fortlauf einer Maschine ist aber der Zweck derselben; folglich ist das Gleichgewicht an bewegten Körpern wichtiger als an ruhenden. Es wird daher auch richtiger sein, die Gesetze des Gleichgewichtes an bewegten Körpern zu finden, als, wie es gewöhnlich geschieht, an ruhenden.

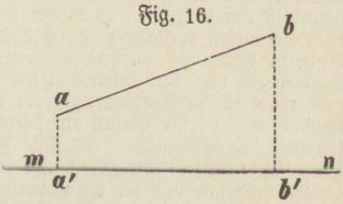
Eine bewegte Masse geht mit unveränderter Geschwindigkeit fort, wenn keine Vermehrung oder Verminderung der lebendigen Kraft stattfindet. Dies ist nach dem Princip von der Erhaltung der Kraft nur dann möglich, wenn die von Kräften producirte Arbeit immer durch die Gegenwirkung anderer Kräfte consumirt wird, wenn also die producirte Arbeit der von Gegenkräften, von Widerständen, von einer Last consumirten Arbeit gleich ist. Denn müßte, um Gleichgewicht hervorzubringen, die producirte Arbeit größer sein als die consumirte, so würde der Ueberschuß der producirten Arbeit verzehrt, ohne eine Wirkung hervorzubringen, es wäre Arbeit vernichtet, was dem Princip widerspricht; und wenn die producirte Arbeit kleiner wäre als die consumirte, so wäre der Ueberschuß der consumirten Arbeit neu entstanden, es wäre Arbeit aus nichts erschaffen, was ebenfalls dem Princip widerspricht; folglich ist die producirte Arbeit im Falle des Gleichgewichtes gleich der consumirten Arbeit. Arbeit ist aber das Product der Kraft mit dem durch ihren Angriffspunkt in der Kraftrichtung zurückgelegten Wege. Man muß demnach, um die Bedingung des Gleichgewichtes zu finden, die Wege aufsuchen, welche die Angriffspunkte unter dem Einflusse dieser Kräfte in den Richtungen derselben zurücklegen würden; man muß sodann diese Kräfte mit den Wegen multipliciren, und die so erhaltenen Arbeiten der gegen einander wirkenden Kräfte einander gleich setzen. Die entstehende Gleichung ist die gesuchte Bedingung des Gleichgewichtes. Diese gilt dann nothwendig auch für den Zustand der Ruhe; denn dieser Zustand ist ja nach der neueren Physik nur das Resultat fortdauernder entgegengesetzter, aber unendlich kleiner Bewegung; die eine Kraft oder Summe von Kräften bewegt den Körper in jedem Augenblicke um ebenso viel nach der einen Richtung, als ihn die andere Kraft oder Kraftsumme nach der entgegengesetzten Richtung bewegt. Dieses ist wiederum nur möglich, wenn die Arbeit der einen Kraft gleich ist der Arbeit der anderen Kraft. Um aber diese Arbeiten zu finden, muß man den Körper in Gedanken eine durch die Kräfte erzeugbare, unendlich klein zu denkende Bewegung ertheilen, die Wege der Angriffspunkte in den Richtungen der Kräfte aufsuchen aus dem geometrischen Zusammenhange des Körpers und der Kräfte, und dann die Producte der Wege mit den Kräften einander gleichsetzen. Dieses Verfahren stimmt ganz mit dem für bewegte Körper überein. Man hat dasselbe zuerst für ruhende Körper angewandt und die unendlich kleinen Wege „virtuelle Geschwindigkeiten" genannt; daher heißt man diese allgemeine Gleichgewichtsbedingung das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten. Man kann dasselbe so aussprechen: Wenn Kräfte an einem ruhenden oder bewegten Systeme im Gleichgewichte sind, so muß die Summe der Arbeiten, welche während eines beliebigen Zeittheilchens von den nach einer Richtung wirkenden Kräften geleistet werden, gleich sein der Summe der Arbeiten, welche von den nach der anderen Richtung wirkenden Kräften in demselben Zeittheilchen geleistet werden, oder die algebraische Summe aller Arbeiten muß gleich Null sein. Dieser Satz ist die allgemeine Gleichgewichtsbedingung.

94 **Gleichgewicht an Maschinen.** Eine Maschine ist eine Verbindung widerstandsfähiger Körper, welche so eingerichtet ist, daß mittels ihrer mechanische Naturkräfte genöthigt werden können, unter bestimmten Bewegungen zu wirken (Definition von Reuleaux, theoretische Kinematik). Fassen wir der Einfachheit wegen zunächst den Fall ins Auge, daß mittels der Maschine nur eine Naturkraft wirksam werden solle; das Wirken einer Naturkraft mittels einer Maschine besteht gewöhnlich in der Ueberwindung eines Widerstandes; wir wollen denselben kurzweg mit Last (Q) bezeichnen und den Druck oder Zug, den die wirksame Naturkraft ausübt, kurzweg mit Kraft (P). Der Zweck der Maschine ist gewöhnlich der Beharrungszustand, d. ist. der Zustand, in welchem die Maschine mit unveränderter Geschwindigkeit weiter läuft, in welchem also Kraft und Last im Gleichgewichte sind; dieser Zustand ist nach dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten erreicht, wenn die Arbeit der Kraft ebenso groß ist als die Arbeit der Last. An einer Maschine ist Gleichgewicht, wenn die Arbeit der Kraft gleich ist der Arbeit der Last.

Bezeichnen wir die Wege der Angriffspunkte von Kraft und Last mit s und s', so ist diese Bedingung durch die Gleichung ausgedrückt $Ps = Qs'$, woraus sich ergibt $P : Q = s' : s$, d. h. die Kraft verhält sich zur Last umgekehrt wie die Wege der Angriffspunkte. Hat demnach die Maschine eine solche Einrichtung, daß die Last nur einen sehr kleinen, die Kraft aber einen großen Weg zurücklegt, so ist s' sehr klein gegen s; folglich muß auch P in demselben Verhältnisse sehr klein gegen Q sein. Man kann folglich durch eine Maschine mit einer sehr kleinen Kraft eine sehr große Last überwinden; es muß aber dann die Kraft einen sehr großen Weg zurücklegen, während die Last nur um sehr wenig fortbewegt wird. So viel durch eine Maschine an Kraft gewonnen wird, ebenso viel geht an Weg oder Zeit verloren. Man nennt diesen Satz die goldene Regel der Mechanik; er zeigt, dem Princip der Erhaltung der Kraft entsprechend, daß durch alle menschlichen Erfindungen Arbeit nicht aus nichts erschaffen werden kann; doch schränkt er die Wichtigkeit der Maschinen nicht ein; denn es schadet nichts, wenn große Wirkungen auch lange Zeit brauchen: wenn sie nur überhaupt geleistet werden.

Durch die Einrichtung einer Maschine kann und muß es vorkommen, daß der Angriffspunkt einer Kraft sich in einer anderen Richtung bewegt als in der Richtung der Kraft selbst. Die Arbeit ist aber das Product der Kraft mit dem Wege, den der Angriffspunkt oder der bewegte Körper in der Richtung der Kraft zurücklegt, weil eben die Wirkung der Kraft in ihrer eigenen Richtung stattfindet. Man muß folglich bei der Anwendung des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten auf Maschinen von den wirklichen Wegen übergehen zu den in der Richtung der Kräfte zurückgelegten Wegen. Diese letzteren sind die Projectionen der ersteren auf die Richtungen der Kräfte; denn wurde z. B. der Punkt a (Fig. 16) durch die Maschine gezwungen, in der Richtung ab den Weg ab zurück zu legen, während die auf ihn wirkende Kraft die Richtung mn hat, so legt der Punkt in dieser Richtung den durch die 2 Lothe aa' und bb' begrenzten Weg $a'b'$ zurück, den man bekanntermaßen die Projection von ab auf mn nennt.

Fig. 16.



Da die Arbeit der Last gewöhnlich von anderer Form ist als die der Kraft, da also die Maschinen häufig eine Verwandlung von Energie vollbringen, so hat man in der letzten Zeit auch den Satz ausgesprochen: Die Maschinen dienen zu Verwandlungen der Energie.

Die Widerstände. Die Widerstände oder Lasten, welche durch eine Kraft 95
mittels einer Maschine überwunden werden sollen, sind Kräfte, welche der wirkenden Kraft entgegenwirken, sie sind Gegenkräfte; die Widerstände oder Lasten sind Kräfte, welche Arbeit consumiren. Wenn z. B. ein Körper gehoben werden soll, so ist sein Gewicht die Last. Wenn ein Körper zerkleinert werden soll, wie es beim Sägen, Schneiden, Hobeln, Feilen u. s. w. geschieht, so ist seine auf der Cohäsion beruhende Festigkeit die Last. Wenn ein vollkommen freier Körper bewegt werden soll, so muß seine Trägheit überwunden werden; manche Forscher haben aus diesem Grunde die Trägheit eine Kraft oder Last (vis inertiae) genannt. Wenn ein Körper auf einem anderen fortbewegt werden soll, so ist ein Widerstand, eine Kraft oder Last zu überwinden, die man Reibung nennt. Wenn ein Körper inmitten eines anderen, z. B. durch Luft oder Wasser, fortbewegt werden soll, so tritt eine Kraft oder Last entgegen, die man Widerstand des Mediums nennt. Wenn eine Bewegung durch widerstandsfähige, aber biegsame Körper, z. B. durch Seile oder Riemen auf andere Körper übertragen werden soll, so tritt durch die Cohäsion der Seile oder Riemen eine Gegenkraft auf, die man die Steifigkeit der Seile nennt. Bei den drei letzten Widerständen, die man auch Hindernisse der Bewegung nennt, wollen wir noch ein wenig verweilen.

1. Die Reibung hat einen sehr zusammengesetzten Ursprung: die Adhäsion der sich berührenden Oberflächentheile, die Festigkeit und die Elasticität der Hervorragungen. Vermöge der Adhäsion ziehen die Oberflächentheilchen sich gegenseitig nach, kehren dann um, gerathen in Schwingungen und verwandeln so einen Theil der wirksamen Arbeit in lebendige Kraft, in Wärme; dasselbe geschieht vermöge der Elasticität an den hervorragenden Theilchen; oder wenn der eine Körper über diese Theilchen weggehoben wird, hierdurch Arbeit verzehrt und dieselbe beim Niederfallen wieder als lebendige Kraft abgibt; werden endlich diese Theilchen abgebrochen und zerrieben, so wird auch ein Theil der Arbeit in Spannkraft verwandelt. Man unterscheidet: a. Die gleitende Reibung d. i. den Widerstand beim Schleifen eines Körpers über einen anderen; eine besondere Art derselben ist die Zapfenreibung, welche bei der Drehung eines Cylindermantels auf der Innenfläche eines Hohlcylinders (liegende Zapfen) oder bei der Drehung einer Grundfläche auf einer anderen (stehende Zapfen)

eintritt. b. Die rollende Reibung d. i. den Widerstand beim Rollen eines runden Körpers über eine Fläche. Die rollende Reibung ist kleiner als die gleitende, weil durch die Rollbewegung selbst die Unebenheiten der einen Fläche über die der anderen gehoben werden.

Wegen des verwickelten Ursprunges der Reibung gibt es keine allgemein giltigen Gesetze über dieselbe. Innerhalb sehr enger Grenzen gelten folgende von Coulomb (1781) und von Morin (1831) gefundenen Gesetze: 1. Die Größe der Reibung, d. i. der Kraftbetrag zur Ueberwindung der Reibung, auch kurzweg die Reibung genannt, ist direct proportional dem Drucke der beiden Körper gegen einander. Man nennt den Bruchtheil des Druckes, der zur Ueberwindung der Reibung nothwendig ist, den Reibungscoëfficient, bezeichnet mit f; folglich ist die Reibung, wenn D den Druck bedeutet, $= fD$. 2. Die Reibung ist unabhängig von der Größe der sich berührenden Flächen; denn wenn auch durch die Vergrößerung der Flächen die Zahl der zu überschreitenden Unebenheiten zunimmt, so nimmt der hierbei zu überwindende Druck auf ein Flächenelement in demselben Maße ab. 3. Der Reibungscoëfficient ist um so größer, je rauher und je weicher die Körper sind; er wird durch Polieren und Schmieren verkleinert, durch Wärme vergrößert. Er ist größer beim Uebergange aus Ruhe in Bewegung (statische Reibung) als in der Bewegung selbst (kinetische Reibung), und unabhängig von der Geschwindigkeit der Bewegung. Zwischen gleichartigen Körpern ist er größer als für verschiedenartige. Er beträgt für Holz auf Holz in der Bewegung (trocken) $^1/_3$, (geschmiert) $^1/_{10}$, für Metall auf Metall (trocken) $^1/_6$, (geschmiert) $^1/_{14}$, für Holz auf Metall (trocken) $^1/_5$, (geschmiert) $^1/_{12}$. Für Zapfenreibung ist f durchschnittlich $^1/_{12}$, für rollende Reibung $^1/_{50}$. Diese Gesetze gelten nach Untersuchungen von Rennie, Hirn, Sella nicht mehr für die Flächendrucke und die Geschwindigkeiten, die in der Maschinenpraxis vorkommen. Sie gelten auch nicht mehr, wo der Druck allzu klein ist, z. B. in Uhrwerken, und wo die sich berührenden Stoffe weich, stark faserig, haarig sind, sich stark abreiben oder in einander einschneiden. Die Zapfenreibung ist kleiner bei alten als bei neuen Zapfen; ihr Coëfficient ist so klein, weil sich die Unebenheiten allmälig Bahnen schleifen. Da die rollende Reibung so viel kleiner ist als die gleitende, so ist es eine große Ersparniß an Kraft, die gleitende Reibung mittels sogenannter Frictionsrollen, wie z. B. an Klavier- und Möbelfüßen in rollende zu verwandeln. Umgekehrt verwandelt man die rollende Reibung der Wagenräder durch Hemmschuhe in gleitende, um an Abhängen die Widerstände zu vergrößern. In ähnlicher Weise macht man mittels der Bandbremsen und der Tauwindungen häufig Anwendung von der Reibung, um Bewegungen von Maschinen und Lasten zu hemmen oder zu verzögern. Ueberhaupt hat die Reibung noch mancherlei Nutzen. Ohne Reibung der Stützflächen am Boden würden weder Menschen, noch Thiere, weder gewöhnliche, noch Eisenbahnwagen sich fortbewegen können, und nur durch sehr verstärkte Reibung mittels sehr schwerer Locomotiven sind Bergeisenbahnen möglich; alles Stehende, Liegende, Angehängte würde ohne Reibung bei dem geringsten Anstoße sich fortbewegen und fallen, alles Zusammengeheftete würde auseinander fallen, alle einander nahen Körper würden zusammenlaufen, wenn die Reibung nicht wäre. Das ganze Maschinenwesen wäre ohne die Reibung unmöglich; denn durch die Reibung übertragen Räder, Rollen, Riemenscheiben die Bewegungen. Pronys Bremse beruht auf der Reibung.

Neueste Forschungen über die Reibung erstrecken sich besonders über den Einfluß der Geschw. auf die Reibung, scheinen jedoch durch die Verschiedenheit der Resultate anzudeuten, daß der Stoff von großem Einfluß auf die Gesetze der Reibung ist. Während eine Untersuchung von Warburg und v. Babo (1877) die von Coulomb und Morin aufgestellte Unabhängigkeit der Reibung von der Geschw. sogar als „charakteristisches Gesetz der Reibung fester Körper“ ausspricht, erklärt Bochet, daß die Reibung mit zunehmender Geschw. abnimmt, und Hirn, daß sie mit zunehmender Geschw. zunimmt. Kimball findet (1877), daß sie bei kleinen Geschwindigkeiten mit wachsender Geschw. rasch zunimmt, dann allmälig langsamer wächst, nachher häufig bei noch wachsender Geschw. längere Zeit constant bleibt, aber nach längerer Beibehaltung dieses Maximums mit weiter wachsender Geschw. wieder abnimmt. Im Gegensatze hierzu stehen wieder die Resultate von Jenkin und Ewing (1867), welche den Unterschied zwischen der statischen und der kinetischen Reibung aufklären wollten und dabei fanden, daß bei sehr langsamer, fast an die Ruhe grenzender Bewegung die Reibung zunimmt, wenn die Geschw. abnimmt, wodurch es sich erkläre, daß die statische Reibung größer als die kinetische sei. — Eine Untersuchung von Reynolds (1875) über die rollende Reibung ergab, daß die Fläche, über welche ein Körper rollt, an der Berührungsstelle für einen Augenblick eine seitliche Ausdehnung und eine Einbuchtung erleide; also finde an der Berührungsstelle immer eine gleitende Reibung statt; hieraus erkläre sich die Abnutzung der Eisenbahnschienen auch ohne das Bremsen und der Vortheil der Stahlschienen, sowie die Existenz der rollenden Reibung überhaupt.

2. Der Widerstand des Mediums besteht darin, daß der sich bewegende Körper wegen der Undurchdringlichkeit die vor ihm liegende Luft oder das Wasser zur Seite drängen muß, um deren Stelle einnehmen zu können, und daß für diese Arbeit ein Theil seiner lebendigen Kraft aufgezehrt wird. Schon Newton (1680) fand, daß dieser Widerstand dem

Quadrat der Geschwindigkeit des Körpers proportional ist; genauere Forschungen ergaben, daß für langsame Bewegungen die erste Potenz ausreicht, und daß für sehr rasche Bewegungen auch noch die dritte Potenz hinzugenommen werden muß, woraus sich der paradoxe Schluß ziehen läßt, daß durch allzu große Geschwindigkeit ein im Wasser fallender Stein von selbst zur Ruhe kommen müßte. Auch ist dieser Widerstand der Dichte des Mediums und der Größe des zur Bewegung senkrechten Querschnittes proportional. Die Wirkung des Widerstandes hängt endlich von der Masse des Körpers ab; die kleine lebendige Kraft eines leichten Körpers ist von dem Widerstande der Luft bald aufgezehrt, besonders wenn derselbe einige Größe im Verhältnisse zu seinem Gewichte besitzt; daher sinken Federn in der Luft langsam zu Boden, und die Dunsttheilchen scheinen ruhig zu schweben, während die kleine, schwere Bleikugel in der Luft fast so wie im leeren Raume fällt. So kraftverzehrend der Widerstand des Mediums auch ist (die Kraft der Dampfschiffe wird hierdurch allein fast aufgezehrt), so hat er doch auch nützliche Anwendungen, wie zu Fallschirmen, zur Regulirung des Ganges von Maschinen z. B. von Uhrschlagwerken durch Windfänge, sodann zum Schlämmen, zum Absondern von Spreu; endlich zum künstlichen Schwimmen, zum Rudern und Fliegen. Auch mildert er die Stärke des Falles; z. B. ein 10 Sec. lang fallendes Hagelkorn von 1g würde ohne den Luftwiderstand eine lebendige Kraft von $\frac{1}{2}$mk haben, also zerstörend wie eine geschossene Pistolenkugel wirken. Newtons Sätze sind in der Fl. $w = c\,d\,q\,v^2$ ausgesprochen, worin d die Dichte des Mediums, q der auf der Bewegungsrichtung senkrechte Querschnitt und v die Geschw. des Körpers bedeutet. Denn ein bewegter Körper setzt in einer Sec. eine Säule des Mediums in Bewegung $= q\,v$, deren Masse demnach $d\,q\,v$; die dafür nöthige Kraft ist nach der Fl. $k = ma$ das Product von $d\,q\,v$ mit v, also $d\,q\,v^2$. Der constante Coëff. c ändert sich mit der Gestalt des Körpers, ist bei Kugeln $\frac{1}{4}$, bei Cylindern $\frac{1}{3}$, bei zugespitzten Cylindern $\frac{1}{8}$.

3. *Die Steifigkeit der Seile* verursacht einen Widerstand, weil sowohl zum Krümmen als zum Geradstrecken eine Kraft erforderlich ist. Diese Kraft wächst (nach Eytelwein 1808) mit der Spannung des Seiles, welche nach Axiom 5. der Zugkraft gleich ist, und mit dem Querschnitte des Seiles, ist aber dem Halbmesser der Rollen und Walzen umgekehrt proportional. Nach Weißbach (1848) sind neue Seile steifer als gebrauchte, getheerte um $\frac{1}{6}$ steifer als ungetheerte.

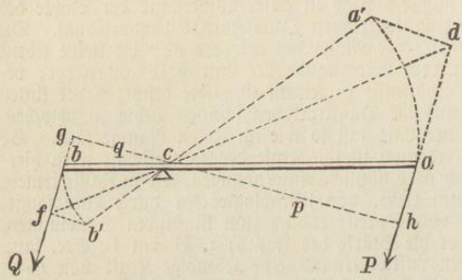
Einfache Maschinen oder mechanische Potenzen (Pappus 500 n. Chr.)

Bei der Betrachtung der Gesetze des Gleichgewichtes an Maschinen sehen wir zunächst von den drei zuletzt betrachteten Widerständen ab und denken uns nur eine Last an denselben, welche durch die Kraft im Gleichgewichte gehalten werden soll. — Alle Maschinen, so verwickelt ihre Construction auch sei, bestehen aus verhältnißmäßig nur wenigen, eigentlich wirksamen Elementen, die man einfache Maschinen nennt; diese sind: der Hebel, die Rolle, das Rad an der Welle, die schiefe Ebene und die Schraube, der Keil.

1. Der Hebel (Archimedes 220 v. Chr.). Der Hebel ist eine an einem Punkte 96
unterstützte unbiegsame Stange, auf welche an verschiedenen Punkten Kräfte wirken. Denken wir uns den Hebel als eine gewichtlose Linie, so haben wir den mathematischen Hebel; jeder wirkliche Hebel ist ein physischer Hebel, bei dessen Betrachtung auch sein eigenes Gewicht in Rechnung gezogen werden muß. Der einfachste Fall ist, daß an einem mathematischen Hebel ein Gewicht (die Last) durch eine Kraft gehoben oder in Ruhe gehalten wird. Liegt der Stützpunkt (Hypomochlion) zwischen den Angriffspunkten von Kraft und Last, so nennt man den Hebel *zweiarmig*; der zweiarmige Hebel kann gleicharmig oder ungleicharmig sein. Liegen die Angriffspunkte an einer Seite des Stützpunktes, so heißt der Hebel *einarmig*. Ursprünglich nannte man die zwei Stücke des Hebels vom Stützpunkte bis zu den Angriffspunkten die beiden Hebelarme; man ist indeß übereingekommen, unter Hebelarm allgemeiner die Entfernung des Stützpunktes von der Kraftrichtung zu verstehen, welche Entfernung nur bei senkrechter Kraftrichtung mit der Länge der wirklichen Arme des Hebels zusammenfällt. Unter dieser Voraussetzung gilt für alle Hebelarten und für jede beliebige Richtung der Kräfte das Gesetz: *Am Hebel ist Gleichgewicht vorhanden, wenn Kraft und Last sich umgekehrt verhalten wie die beiden Hebelarme.*

Beweis für parallele Kräfte. Um das Princip der virt. Geschwindigkeiten auf den Hebel *ab* (Fig. 17) anwenden zu können, denken wir uns den Hebel in Bewegung; dann darf für den Fall des Gleichgewichtes an dieser durch Kraft und Last nichts verändert werden, d. h. es muß die Arbeit der Kraft gleich der Arbeit der Last sein; die Projection des Kraftweges ist ad, die des Lastweges bf; folglich besteht die Gleichung $P \, . \, ad = Q \, . \, bf$ oder $P : Q = bf : ad$. Da nun Viereck $ada'c \backsim bfb'c$, so ist $bf : ad = cb : ca$; weiter folgt aus der Aehnlichkeit der Dreiecke bcg und ach die Proportion $cb : ca = cg : ch = q : p$. Durch Substitution des letzten Verhältnisses für das erstere in unserer Proportion entsteht $P : Q = q : p$, womit der Satz für parallel wirkende Kräfte bewiesen ist. Die Richtigkeit für nicht parallele Kräfte zu beweisen, soll später eine Aufgabe für den Schüler sein. Den experimentellen Nachweis führt man am einfachsten mit einem in gleiche Theile eingetheilten und an allen Theilpunkten mit Hängringen versehenen zweiarmigen Hebel, so daß man an jeder beliebigen Stelle Lastgewichte aufhängen und diese durch die nach dem Gesetze berechneten und auf der anderen Seite angehängten Kraftgewichte an jeder Stelle balanciren kann.

Fig. 17.



Aus der Hebelproportion ergibt sich die Productengleichung $Pp = Qq$; das Product einer Kraft mit ihrem Hebelarme nennt man das statische Moment der Kraft; folglich kann man das Hebelgesetz auch so aussprechen: Am Hebel ist Gleichgewicht vorhanden, wenn das statische Moment der Kraft gleich ist dem statischen Moment der Last. Wenn auf einen Hebel viele Kräfte wirken, so erhält man durch ähnliche Betrachtungen das allgemeine Gesetz: Am Hebel ist Gleichgewicht, wenn die Summe der statischen Momente aller Kräfte, die den Hebel nach der einen Seite zu drehen streben, gleich ist der Summe der statischen Momente aller Kräfte, welche den Hebel nach der anderen Seite zu drehen streben.

Der Hebel hat die zahlreichsten Anwendungen. Jede Hebe- und Brechstange, die vor der Last unterstützt ist, ist ein zweiarmiger Hebel; wird sie unter die Last geschoben und hinter derselben aufgesetzt, so ist sie ein einarmiger Hebel, wie alle Messer, alle Schreib- und Zeichenwerkzeuge. Zangen und Scheeren bestehen aus 2 zweiarmigen Hebeln, von denen der eine den Stützpunkt für den anderen liefert. Schlüssel und Bohrer haben ihren Stützpunkt in der Achse, der Bart oder die Schneide bilden den Hebelarm der Last, der Griff den der Kraft. Zucker- und Brodscheeren sind einarmige Hebel, ebenso der Arm und andere Glieder des Menschen, bei denen indeß die Kraft mittels eines Muskels ganz nahe am Stützpunkte wirkt und daher dem weiter entfernten Ende des Gliedes eine große Bewegung ertheilt (Geschwindigkeits-Hebel). Thürklinken und Klingelhaken sind Winkelhebel. Alle Arten von Hebeln finden sich an Maschinen; besonders wichtig sind die Leithebel an Locomotiven, die Bremshebel an Hebemaschinen, die Bewegungshebel an Geleisekreuzungen, der Balancier an Dampfmaschinen, der ein gleicharmiger Hebel ist, und die Wagebalken, die bald gleicharmig, bald ungleicharmig sind.

97 Aufg. 106. Die Last Q sei $= 1000^{kg}$; die Kraft $P = 50^{kg}$; $q = 0{,}2^{m}$; wie groß muß der Hebelarm p der Kraft sein? Aufl.: $50\,p = 1000 \, . \, 0{,}2$, woraus $p = 4^{m}$. Man kann also mittels des Hebels durch eine geringe Kraft eine große Last heben, wenn nur der Hebelarm der Kraft recht groß ist im Verhältnisse zu demjenigen der Last. — A. 107. Ein Mann schiebt eine Stange von 2^{m} Länge unter einen Stein und stützt sie in einem Abstande von 20^{cm} von der Steinmitte; welche Last kann er heben, wenn er einen Druck von 60^{kg} ausüben kann? Aufl.: $Q = 540^{kg}$. — A. 108. $Q = 667^{kg}$; $p = 2{,}3^{m}$, $q = 0{,}3^{m}$; wie groß ist P? Aufl.: $P = 87^{kg}$. — A. 109. $Q = 800^{kg}$; $P = 32^{kg}$; $p = 96^{cm}$, wie groß ist q? Aufl.: $q = 3{,}84^{cm}$. — A. 110. Eine Last von 6 Ctr. soll durch eine Kraft von 60^{kg} mittels eines Hebels von 4^{m} Länge gehoben werden; wo muß der Stützpunkt sein? Aufl.: Die Kraft ist 5mal so klein als die Last, folglich muß ihr Hebelarm 5mal so groß sein; daher $p = 3^1/_3{}^{m}$ und $q = {}^2/_3{}^{m}$. — A. 111. $Q = 244^{kg}$; $P = 46^{kg}$; Hebellänge $= 580^{cm}$, wo ist der Stützpunkt? Aufl.: $244\,q = 46\,(580 - q)$; daraus $q = 92^{cm}$; $p = 488^{cm}$. — A. 112. $Q = 738{,}3^{kg}$, $P = 58{,}7^{kg}$; Hebellänge $= 383^{cm}$; wo liegt der Stützpunkt? Aufl.: $q = 28{,}2^{cm}$,

$p = 354{,}8^{\mathrm{cm}}$. — A. 113. Die Erde wiegt 14 Quadrillionen Pfund; wenn Archimedes seinen festen Punkt auf dem Monde (51 800 M.) hätte und von der Sonne (20 Mill. M.) aus die Erde mit einem Hebel aus ihren Angeln zu heben versuchen wollte, welche Kraft müßte er aufwenden? Aufl.: 36 000 Trillionen Pfund. — A. 11. Welche Stellung müßte Archimedes haben, wenn er nur eine Kraft von 70^{kg} hätte und den Mond als Stützpunkt benutzen würde? Aufl.: 5180 Quadrillionen Meilen von dem Monde entfernt. — A. 115. An einem Hebel wirken 6 Lasten: 180, 200, 240^{kg} in 40, 60, 70^{cm} Entf. nach oben und 300, 320, 360^{kg} in 50, 80, 90^{cm} Entf. nach unten; wo muß die Kraft von 74^{kg} angebracht werden, um Gleichgewicht zu erzeugen? Aufl.: $74\,p + 180 \,.\, 40 + 200 \,.\, 60 + 240 \,.\, 70 = 300 \,.\, 50 + 320 \,.\, 80 + 360 \,.\, 90$; hieraus $p = 500^{\mathrm{cm}}$.

2. Die Rolle (Archytas aus Tarent 400 v. Chr. ?). Eine Rolle ist eine kreis- 98
förmige, dicke Scheibe, die um ihre Mittelpunktachse drehbar ist und an ihrem Umfange Schnüre, Riemen oder Ketten aufnehmen kann. Die Achse liegt beiderseits in Lagern; kann sich die Rolle nur um ihre Achse drehen, so nennt man sie feste Rolle (Fig. 18 u. 19); kann sie sich aber außerdem mit der Achse fortbewegen, so ist sie eine bewegliche Rolle.

Fig. 18.

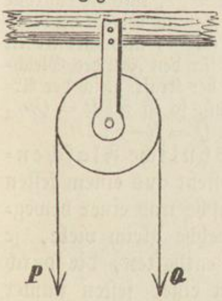


Fig. 19.

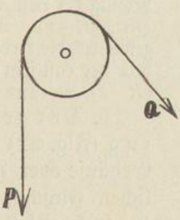
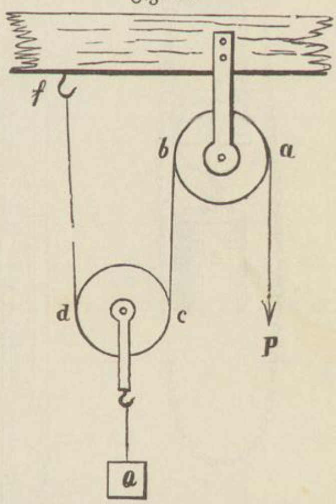


Fig. 20.



a. Die feste Rolle. An der festen Rolle ist Gleichgewicht, wenn die Kraft gleich der Last ist.

Beweis. Ziehen wir an dem Kraftseile P (Fig. 18) um x, so ist der Weg der Kraft $= x$, also die Arbeit der Kraft $= Px$. Wenn so das Kraftseil um x verlängert wird, so wird das Lastseil um x verkürzt, die Last Q um x gehoben; folglich ist die Arbeit der Last $= Qx$. Da für den Fall des Gleichgewichtes die Arbeit der Kraft gleich der Arbeit der Last sein muß, so ist $Px = Qx$, woraus $P = Q$. Mittels der festen Rolle wird nicht an Kraft gewonnen; sie dient daher zum Heben von nur kleinen Lasten. Eine bedeutendere Verwendung hat sie zur Aenderung der Kraftrichtung (Fig. 19).

b. Die bewegliche Rolle. An der beweglichen Rolle ist Gleichgewicht, wenn die Kraft sich zur Last verhält wie 1 zu 2.

Beweis. Ziehen wir am Kraftseile aP (Fig. 20) um x, so ist der Weg der Kraft $= x$, also die Arbeit der Kraft $= Px$. Wenn aber das Kraftseil aP um x verlängert wird, so müssen sich die 2 Lastseile cb und df um x, also jedes um $x/2$ verkürzen; die Last wird also um $x/2$ gehoben, der Weg der Last Q ist $x/2$, und demnach die Arbeit der Last $= Q \,.\, x/2$. Da für den Fall des Gleichgewichtes die Arbeit der Kraft gleich der Arbeit der Last sein muß, so ist $Px = Q \,.\, x/2$, woraus $P = {}^1/_2\, Q$ oder $P : Q = 1 : 2$.

Die Flaschenzüge. a. Der Differentialflaschenzug, eine Anwen- 99
dung der beweglichen Rolle (Fig. 21), besteht aus 2 zu einem Stück gegossenen Rollen a und b von verschiedenem Radius, R und r; die Kette geht über die große feste Rolle zu der beweglichen, dann aber nicht an einen festen Punkt, sondern über die kleine feste Rolle und verbindet sich dann mit dem Anfang der Kette zu einer Kette ohne Ende. Beim Heben von Lasten ist am Differential-

flaschenzuge Gleichgewicht, wenn sich die Kraft zur Last verhält wie die Differenz der Radien der beiden festen Rollen zum doppelten Radius der großen festen Rolle.

Fig. 21.

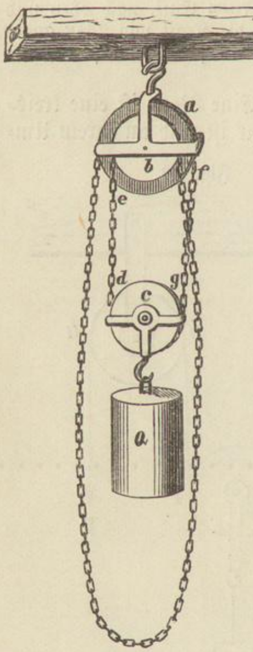
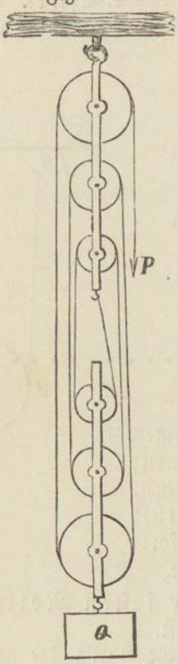


Fig. 22.

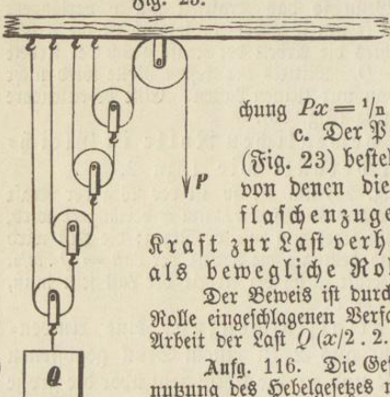


Beweis. Ziehen wir links soviel an der Kraftkette, daß sich die feste Rolle halb umdreht, so ist der Kraftweg πR, also die Arbeit der Kraft πRP. Ginge nun die Lastkette de nach einem festen Punkte, so würde sich die Lastrolle um $\pi/_2\, R$ heben. Weil jene Kette aber an die kleine Rolle b geht, die sich dann auch halb umdreht, so senkt sich der linke Berührungspunkt dieser Kette um πr, also verlängert sich jeder der beiden Kettentheile de und gf um $\pi/_2\, r$, und die Lastrolle senkt sich um $\pi/_2\, r$. Folglich beträgt die Resthebung der Last $\pi/_2\,(R-r)$ und ihre Arbeit $Q\pi/_2\,(R-r)$. Da für den Fall des Gleichgewichtes die Arbeit der Kraft gleich der Arbeit der Last sein muß, so ist $\pi PR = Q\pi/_2\,(R-r)$, woraus $P:Q = R-r:2R$.

b. Der gewöhnliche Flaschenzug (Fig. 22) besteht aus einem festen Gehäuse oder Flasche und einer beweglichen Flasche, welche gleich viele, je 2 gleiche Rollen enthalten, die durch ein einziges, von einer festen immer zu der gleichen beweglichen Rolle gehendes Seil verbunden sind. An dem Flaschenzuge findet Gleichgewicht statt, wenn sich die Kraft zur Last verhält wie 1 zur Anzahl der Lastseile.

Beweis. Ziehen wir wieder an dem Kraftseile um x, so ist die Arbeit der Kraft $= Px$. Wenn sich nun das Kraftseil um x verlängert, so müssen sich alle n Lastseile zusammen um x verkürzen; daher wird jedes Lastseil, da sie gespannt bleiben und sich sonach um gleichviel verkürzen müssen, um $^1/_n \,.\, x$ verkürzt; der Weg der Last ist $^1/_n \,.\, x$ und die Arbeit der Last $^1/_n \,.\, xQ$. Durch die allgemeine Gleichgewichtsbedingung entsteht daher die Gleichung $Px = {}^1/_n \,.\, Qx$, woraus $P:Q = 1:n$.

Fig. 23.



c. Der Potenzenflaschenzug oder Rollenzug (Fig. 23) besteht aus einer festen und n beweglichen Rollen, von denen die unterste die Last trägt. Am Potenzenflaschenzuge ist Gleichgewicht, wenn sich die Kraft zur Last verhält wie 1 zur sovielten Potenz von 2, als bewegliche Rollen vorhanden sind.

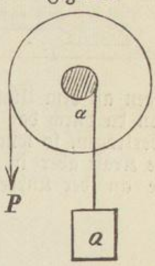
Der Beweis ist durch wiederholte Anwendung des bei der beweglichen Rolle eingeschlagenen Verfahrens zu führen; die Arbeit der Kraft ist Px, die Arbeit der Last $Q\,(x/2\,.\,2\,.\,2\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,.) = Q\,(x/2^n)$, woraus $P:Q = 1:2^n$.

100 Aufg. 116. Die Gesetze für die feste und bewegliche Rolle sind mit Benutzung des Hebelgesetzes nachzuweisen. Andeutung: Die feste Rolle ist ein Hebel, dessen Stützpunkt in der Achse liegt; bei der beweglichen Rolle ist der Stützpunkt in dem Berührungspunkte d der Rolle mit dem Anhängseil df (Fig. 20). — A. 117. Das Gesetz des Differentialflaschenzuges für das Herablassen der Last, wobei am rechten losen Kettentheil (Fig. 21) gezogen wird, zu finden? Aufl.: $P:Q = r - R:2r$. —

A. 118. Die Kraft zum Heben und Herablassen der Last R zu finden für den Fall, daß der Durchmesser der kleineren Rolle $^3/_4$ von dem der größeren sei? Aufl.: $P = {}^1/_8\, Q$ und $P = {}^1/_6\, Q$. — A. 119. Aus dem Hebelgesetze zu schließen, daß an dem Differentialflaschenzuge (Fig. 21) beim Senken mehr Kraft zum Gleichgewichthalten nöthig ist als beim Heben. Andeutung: der Unterschied der beiden festen Rollen a und b. — A. 120. Welcher Theil der Last ist an dem in Fig. 23 abgebildeten Rollenzuge zum Gleichgewichte nöthig? Aufl.: Der 16te Theil. — A. 121. Warum wird trotz dieser großen Kraftersparniß derselbe nur selten angewendet? — A. 122. Bei genauer Berechnung muß für den Rollenzug auch das Gewicht der Rollen berücksichtigt werden. Der Rollenzug enthalte 3 bewegliche Rollen von 10^{kg}, 8^{kg} und 6^{kg} Gewicht Die Last sei $= 300^{kg}$. Wie groß muß die Kraft sein? Aufl.: $P = ([(300 + 10)\, {}^1/_2 + 8]\,.\, {}^1/_2 + 6\,.\, {}^1/_2 = 42^3/_4{}^{kg}$. — A. 123. Wie groß müßte die Zahl der beweglichen Rollen (ohne Rücksicht auf das Gewicht) sein, um mit einer Kraft von 20^{kg} eine Last von 640^{kg} zu heben? Aufl.: $20 : 640 = 1 : 2^n$; hieraus $n = log\, 32 : log\, 2 = 5$. — A. 124. Wie groß ist die Kraft P, welche einen Rollenzug von n gleichen beweglichen Rollen mit dem Gewichte G und die Last Q im Gleichgewichte hält? Aufl.: $P = \frac{1}{2^n}\left(Q + G + \frac{1}{2^{n-1}}\, G + \frac{1}{2^{n-2}}\, G + \ldots \frac{1}{2}\, G\right) = \frac{Q}{2^n} + \frac{2^n - 1}{2^n}\, G = \frac{Q}{2^n} + \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) G = \frac{Q - G}{2^n} + G$. Bei Ableitung dieser Formel muß man die Summenformel für eine geometrische Reihe anwenden. — A. 125. Ein Rollenzug enthält 10 bewegliche Rollen vom Gewichte von 1^{kg}, welche Kraft ist nöthig, um 1000^{kg} zu tragen? Aufl.: $P = 1^{999}/_{1024}{}^{kg}$.

3. Das Rad an der Welle. Die Last wirkt (Fig. 24) an dem Umfange einer 101
cylindrischen Walze, während die Kraft an dem Umfange eines mit der Walze unauflöslich verbundenen Kreises wirkt. Dieser Kreis kann ein Rad sein, dessen Arme und Zähne von der Kraft gezogen oder gedrückt werden, wie beim Spillenrade oder dem Räderwerke; er kann auch der Weg einer Stange sein, welche durch die Welle gesteckt ist, wie bei Erdwinden und Haspel, oder welche an das eine Ende der Welle befestigt ist und dann Kurbel genannt wird. Es kann auch ein hohles Rad sein, in welchem auf dem Umfange Menschen oder Thiere gehen. Die Welle kann auch aufrecht stehen und mit einem langen Arme versehen sein, an dessen Ende ein Mensch drückt oder ein Pferd angeschirrt ist, wie in den alten Oehlmühlen u. dergl. — Beim Rad an der Welle ist Gleichgewicht, wenn sich die Kraft zur Last verhält wie der Radius der Welle zum Radius des Rades.

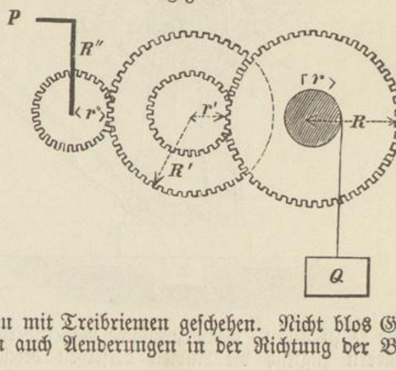
Fig. 24.



Beweis. Wird durch den Zug der Kraft das Rad halb umgedreht, so ist der Weg der Kraft $= \pi R$, also die Arbeit der Kraft $= \pi RP$; in diesem Falle hat sich auch die Welle halb umgedreht und die Last um πr gehoben, so daß die Arbeit der Last $= \pi r Q$. Nach der allgemeinen Gleichgewichtsbedingung ist $\pi RQ = \pi r Q$, woraus $P : Q = r : R$.

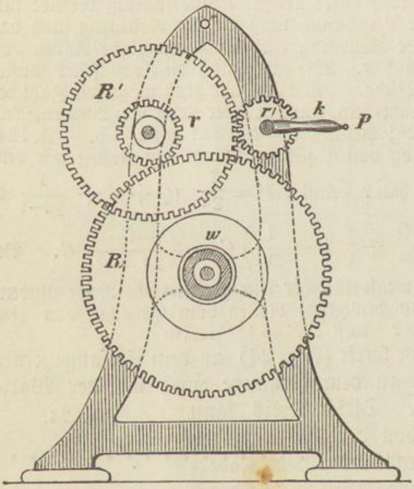
Das Rad an der Welle hat die zahlreichsten Verwendungen; die Kurbel ist eines der häufigsten Maschinenelemente. — Die Kraft eines Wasserrades ist um so größer, je mehr das Rad die Welle an Größe übertrifft. — Alle Arten von Winden, Erdwinden, Wagenwinden, Aufzugwinden, alle Göpel, Tummelbäume und Krahne sind Anwendungen des Wellrades; besonders häufig tritt es in Form des Räderwerkes auf und wird dabei ebenso häufig zur Vergrößerung von Geschwindigkeit mit Verlust von Kraft, als zur Vergrößerung von Kraft mit Verlust von Geschwindigkeit gebraucht; im ersten Falle greifen große auf der Kraftwelle sitzende gezahnte Räder in kleine ein, im letzten kleine auf der Kraftwelle sitzende Räder in große; beides kann auch durch Rollen mit Treibriemen geschehen. Nicht blos Geschwindigkeits- und Kraftänderungen, sondern auch Aenderungen in der Richtung der Bewegung werden durch Räderwerke erzielt.

Fig. 25.



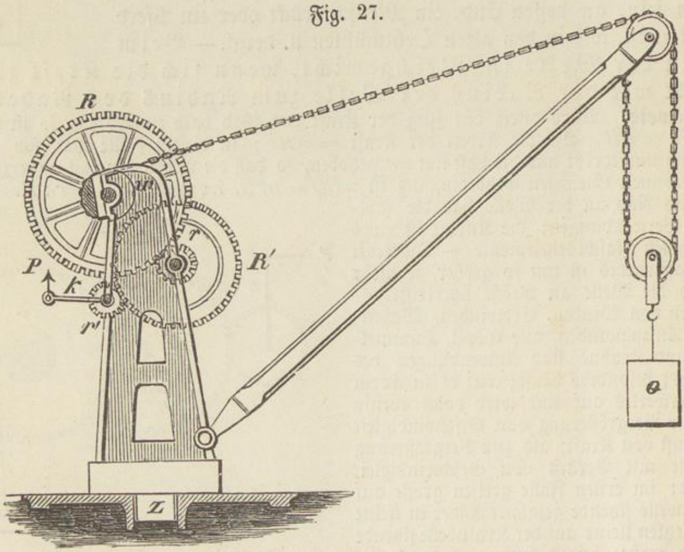
102 **Aufg.** 126. Auf einer Lastwelle (Fig. 25) sitzt ein Zahnrad fest, das in ein anderes kleines Zahnrädchen, Getriebe genannt, eingreift; auf der Achse desselben sitzt ein zweites Zahnrad, das abermals in ein Getriebe greift, auf welchem eine Kurbel sitzt. Wie groß muß die Kraft P sein, welche an dieser Kurbel wirkt, um die Last Q an der Welle zu überwinden?

Fig. 26.



Nennen wir die am Umfange des ersten Rades (R) nöthige Kraft p, so ist $p : Q = r : R$. Diese Kraft drückt auf das erste Getriebe (r'), wirkt also an dem Umfange desselben als Last. Ist die an dem Umfange des zweiten Rades zur Ueberwindung dieses Druckes p nöthige Kraft $= p'$, so ergibt sich $p' : p = r' : R'$. Diese Kraft wirkt als Last an dem zweiten Getriebe, muß also durch die Kraft P balancirt werden; daher entsteht die Proportion $P : p' = r'' : R''$. Multipliciren wir die drei Gleichungen, so entsteht $P : Q = rr'r'' : RR'R''$. Bei dem Räderwerke ist folglich Gleichgewicht, wenn das Product der Radien aller Getriebe zu dem Producte der Radien aller Räder in dem Verhältnisse wie Kraft zur Last steht. Sind z. B. die großen R immer 10 mal so groß wie die kleinen r, so ist $P : Q = 1 : 1000$. Es wird also die Kraft durch das Räderwerk 1000 mal so groß; doch geht durch die Reibung viel von diesem Gewinne verloren, und die Geschwindigkeit wird dabei ebenso viel mal kleiner. Würde dagegen an dem Umfange des Rades R die Kraft wirken und durch das Getriebe r' auf R', von da durch das Getriebe r'' auf ein Rad R'' und von diesem auf eine vierte Welle r''' übertragen, so würde deren Geschwindigkeit in dem Verhältnisse $R\,R'\,R'' : r'\,r''\,r'''$ größer, die Kraft aber in demselben Verhältnisse kleiner geworden sein. — A. 127. Wie groß ist die an der Kurbel k nöthige Kraft P, um mittels der Aufzugswinde (Fig. 26) die

Fig. 27.



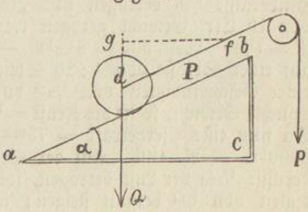
Last Q zu heben, wenn zweifache Räderübersetzung stattfindet, und die Buchstaben an den Rädern zugleich die Radien derselben bezeichnen. Die Last Q hängt an der Welle w.

Aufl.: $P = Q \cdot \frac{r'}{k} \cdot \frac{r}{R'} \cdot \frac{w}{R} = Q \cdot \frac{w}{k} \cdot \frac{r'}{R'} \cdot \frac{r}{R}$. Wenn umgekehrt z. B. $w = 15^{cm}$, $k = 45^{cm}$ und die Uebersetzungszahlen $R : r = 7$ und $R' : r' = 5$ sind, so kann durch eine Kraft von 20^{kg}, die ein Mann leicht aufwenden kann, eine Last gehoben werden von 2100^{kg}. — A. 128. An dem Krahn (Fig. 27) wirkt die Kraft eines Mannes drehend an der Kurbel k mittels des Getriebes r' auf das Rad R', auf dessen Achse das Getriebe r sitzt und das große Rad R bewegt, welches mit der Welle w einerlei Achse hat. Eine an der Welle befestigte Kette geht über eine feste Rolle um eine bewegliche Rolle, an welcher die Last Q hängt. Wie groß muß die Kraft P, abgesehen von den Hindernissen sein, um Q zu heben, wenn die Buchstaben zugleich immer die Radien bezeichnen?

Aufl.: $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{w}{k} \cdot \frac{r}{R} \cdot \frac{r'}{R'} \cdot Q$. Der ganze Krahn läßt sich um den Zapfen s drehen; daher wird der Krahn zum Auf- und Abladen großer Lasten an Flüssen, Eisenbahnen, Bestättereien gebraucht. — A. 129. Wie groß ist die zur Ueberwindung der Zapfenreibung der festen Rolle nöthige Kraft, wenn die Radien des Zapfens und der Rolle r und R sind? Aufl.: Die Reibung ist $= 2 \,.\, {}^1/_{12}\,(2Q + G)$, wenn G das Gewicht der Rolle. Am Umfange der Rolle muß die Kraft sein $P = {}^1/_6\,(2Q + G) \,.\, r/R$. — A. 130. Wie groß ist die am Umfange des Rades nöthige Kraft zur Ueberwindung der Zapfenreibung des Rades an der Welle? Aufl: Die Reibung selbst ist $= 2 \,.\, {}^1/_{12}\,(P + Q + G)$; die Kraft am Umfange des Rades $= {}^1/_6\,(P + Q + G) \,.\, r/R$. — A. 131. Nach Redtenbacher ist die Reibung der Zahnräder $= D/\pi\,({}^1/N + {}^1/n)$, worin N und n die Zahl der Zähne der beiden Räder bedeuten; wenn nun in dem Räderwerke (Fig. 25) das Rad R die Zahnzahl n hat, welches ist dann der an der Kurbel nöthige Kraftbetrag zur Ueberwindung der Reibung an diesem Räderwerke, wobei wir indeß von dem durch diese Kraft erzeugten Drucke absehen wollen? Aufl.: Der Druck zwischen den Zähnen von R und r' ist $= Qr \,/\, R$ und zwischen den Zähnen von R' und r'' ist dieser Druck $= Qrr' \,/\, RR'$; daher ist der auf die Kurbel reducirte Betrag der Reibung $= \frac{Qr}{R} \cdot f\pi \left(\frac{1}{n} + \frac{R}{r'} \cdot \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{r'r''}{R'R''} + \frac{Qrr'}{RR'} \cdot f\pi \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{R}{r'} \cdot \frac{r'}{R'} + \frac{1}{n} \cdot \frac{R}{R'} \cdot \frac{R'}{r''}\right) \frac{r''}{R''} = \frac{Qrr'r''}{R'R''} \cdot \frac{f\pi}{n}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} + \frac{1}{r'} + \frac{1}{r''}\right)$.

4. Die schiefe Ebene. Unter einer schiefen Ebene verstehen wir eine gegen 103
den Horizont geneigte Ebene, auf welcher eine Last liegt. Es soll die Größe der Kraft gefunden werden, welche das Herabrollen der Last verhindert, und welche zum Heben der Last in jedem Augenblicke der Bewegung verwendet werden muß, wobei wir von den Hindernissen der Bewegung, wie Reibung und Widerstand der Luft absehen. Die Richtung der Kraft ist eine beliebige; wir fassen nur die zwei Fälle ins Auge, wo die Kraft parallel zur schiefen Ebene, und wo sie wagrecht wirkt. Die Linie ab (Fig. 28) nennt man die Länge, bc die Höhe und ac die Basis der schiefen Ebene.

Fig. 28.



a. Für den Fall der parallelen Wirkung ist Gleichgewicht, wenn die Kraft sich zur Last verhält wie die Höhe der schiefen Ebene zur Länge derselben.

Beweis. Ziehen wir die Last Q mittels der parallelen Kraft P von dem Fuße a der schiefen Ebene bis zum Gipfel b derselben, so hat die Kraft in ihrer eigenen Richtung den Weg $ab = l$ zurückgelegt, wodurch ihre Arbeit $= Pl$ wird; die Last Q hat sich dann in ihrer eigenen lothrechten Richtung um die Höhe $bc = h$ gehoben, also die Arbeit Qh verzehrt. Nach der allgemeinen Gleichgewichtsbedingung ist demnach $Pl = Qh$, woraus $P : Q = h : l$. Hieraus folgt auch, daß $P = Q \,.\, h \,/\, l = Q \sin \alpha$.

b. Für den Fall der wagrechten Wirkung ist Gleichgewicht, wenn die Kraft sich zur Last verhält wie die Höhe der schiefen Ebene zur Basis derselben.

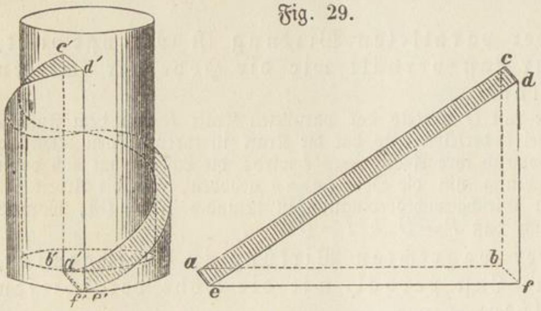
Beweis. Ziehen wir die Last Q mittels der wagrechten Kraft P von dem Fuße der schiefen Ebene bis zum Gipfel derselben, so hat die Kraft in ihrer eigenen Richtung den Weg $ac = b$ zurückgelegt und so die Arbeit Pb vollbracht, während die von der Last Q consumirte Arbeit $= Qh$ ist; hieraus ergibt sich nach der allgemeinen Gleichgewichtsbedingung, daß $Pb = Qh$ ist, woraus $P : Q = h : b$. Hieraus folgt auch, daß $P = Qh / b = Q \tan \alpha$.

104 Die beiden Sätze über die schiefe Ebene kann man experimentell nachweisen mittels eines Apparates mit einer drehbaren schiefen Ebene, welche man in die verschiedensten Stellungen bringen und in denselben durch eine Schraube befestigen kann; auf die schiefe Ebene wird ein Messingcylinder gelegt, von dessen Rähmchen eine Schnur über eine Rolle zu einer Wagschale geht. Die Gewichte, welche den Messingcylinder balanciren sollen, werden nach den beiden Sätzen im voraus berechnet und müssen dann das Gleichgewicht herstellen. — Im Leben wird eine directe Anwendung der schiefen Ebene meist nach der ersten Wirkungsart gemacht; man befördert auf ansteigenden Straßen und Eisenbahnen Lasten in die Höhe mit verhältnißmäßig kleinen Kräften; denn, abgesehen von der Reibung, braucht die Kraft nur einen durch den Sinus des Neigungswinkels bestimmten Bruchtheil der Last zu betragen; macht man daher den Neigungswinkel oder die Steigung sehr klein, indem man die Straßen in Windungen an Bergen hinaufführt, so kann man große Lasten auf denselben befördern. Für den Winkel Null ergibt sich P auch gleich Null; dies ist auch richtig, weil eine einmal in wagrechte Bewegung gesetzte Masse, abgesehen von den Hindernissen, nach dem Gesetze der Trägheit ins Unendliche in derselben Richtung fortgehen würde. Die Hindernisse betragen aber auf gewöhnlichen Straßen $^1/_{15}$—$^1/_{30}$, auf Eisenbahnen $^1/_{180}$—$^1/_{200}$ der Last, und dieser Betrag muß demnach auf einer wagrechten Straße von der Kraft fortwährend überwunden werden, wenn die Masse einmal in Bewegung ist. Dieser Betrag ist zwar bei der schiefen Ebene etwas kleiner, aber vergrößert doch immer die nöthige Kraft beim Hinaufbefördern; beim Niedergleiten auf der schiefen Ebene wird die das Herabrollen hindernde Kraft durch den Betrag der Hindernisse verkleinert. Man benutzt daher die schiefe Ebene als Schleife beim Abladen, beim Herablassen von Lasten in Keller u. s. w.

105 Aufg. 132. Auf einer schiefen, glatten Fläche liegt eine glatte Kugel von 1000^{kg} Gewicht; welche Kraft muß an einem parallelen Seile wirken, wenn die schiefe Ebene auf einer Länge von 10^{m} eine Höhe von 50^{cm}, also eine Steigung von 1 auf 20 hat, um die Last vor dem Herabrollen zu schützen oder die in Bewegung gesetzte Masse weiter zu bewegen? Aufl.: $P : 1000 = {}^1/_2 : 10 = 1 : 20$, woraus $P = 50^{kg}$. — A. 133. Wie viel % dürfte die Steigung blos betragen, wenn ein Mann, der nur mit einer Kraft von 20^{kg} dauernd ziehen könnte, die Last fortbewegen sollte? Aufl.: $20 : 1000 = h : 100$, woraus $h = 2$ auf 100 oder 2%. — A. 134. Mit welcher Kraft muß auf einer Straße, wo die Hindernisse $^1/_{30}$ betragen und die Steigung 5% oder 1 : 20 ausmacht, an einem Wagen von 10 Ctr. Gewicht gezogen werden, um ihn vor dem Hinabrollen zu schützen? Aufl.: $P = ({}^1/_{20} - {}^1/_{30}) \,.\, 500 = 8^1/_3{}^{kg}$. — A. 135. Welches Gewicht darf ein Wagen haben, der auf einer Straße von 1 : 20 Steigung, und wo die Hindernisse $^1/_{40}$ der Last betragen, mit einer Geschwindigkeit von $^1/_2{}^{m}$ durch ein Pferd gezogen werden soll? Aufl.: Sei x das gesuchte Gewicht, so ist die Kraft $= {}^1/_{20}\, x + {}^1/_{40}\, x$; daher der Effect des Pferdes $= {}^{3x}/_{40} \,.\, {}^1/_2{}^{mk}$. Da nun eine Pferdekraft $= 75^{mk}$ ist, so entsteht die Gleichung $^{3x}/_{80} = 75$, woraus $x = 2000^{kg}$. — A. 136. Auf der Semering-Bahn, wo die Steigung 1 : 35 ist und die Hindernisse $^1/_{200}$ der Last betragen, soll ein Zug von 91 Tonnen à 1000^{kg} mit einer Geschwindigkeit von 6^{m} bergan steigen; wie groß müßte der Effect der Locomotive sein? Aufl.: $= 91000\,({}^1/_{35} + {}^1/_{200})\, 6 = 18330^{mk} = 244^2/_5$ e.

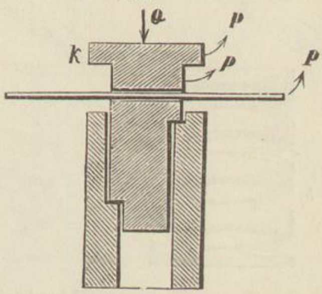
106

Fig. 29.



5. Die Schraube. (Archytas 400 v. Chr.). Die Schraube ist eine schiefe Ebene, welche um einen Cylinder gewunden ist. Schneidet man aus einer dicken Kautschukplatte eine schiefe Ebene, wie $abcdef$ in Fig. 29, deren Basis ab gleich dem Umfange der Grundfläche eines Cylinder ist, und windet dann dieselbe um den Cylinder, so nimmt sie die Lage $a'b'c'd'e'f'$ an; das obere Ende $c'd'$ derselben erscheint dann senkrecht über dem Anfange $a'e'$, die eigentliche schiefe Ebene $acde$ selbst bildet dann ein vollständiges Gewinde oder einen Schraubengang, die Höhe bc der schiefene Ebene bildet die Gewindhöhe oder Höhe eines Schraubenganges $b'c'$, und die Basis der schiefen Ebene erscheint als Umfang des Schraubenbolzens oder der Schraubenspindel, wie man den umwundenen Cylinder nennt. Bringt man nun in das Innere eines hohlen Cylinders, dessen lichte Weite gleich dem Durchmesser der Spindel ist, eine ganz gleiche gewundene schiefe Ebene, eine Einrichtung, die man Schraubenmutter nennt, und setzt dann die Spindel mit ihrer Windung auf diejenige der Mutter, wie es Fig. 30 im Durchschnitte zeigt, so wird die Spindel mit ihrem ganzen Gewichte und einer noch etwa auf derselben liegenden Last Q auf die schiefe Ebene der Schraubenmutter drücken, und würde drehend hinabgleiten, wenn keine Reibung stattfände. Sehen wir von derselben ab, so können wir doch das Hinabgleiten verhüten oder auch die schon in steigende Drehung versetzte Spindel weiter drehen, wenn wir am Umfange derselben eine wagrechte Kraft P anbringen. Alsdann wirken Last und Kraft gerade so auf die schiefe Ebene der Schraubenmutter wie in dem zweiten Falle der Lehre von der schiefen Ebene. Es findet daher nach dem dort gefundenen Satze Gleichgewicht bei der Schraube statt, wenn sich die Kraft zur Last verhält wie die Höhe der schiefen Ebene zur Basis derselben, d. h. wie die Gewindhöhe zum Umfange der Spindel. Gewöhnlich wirkt nun die Kraft P nicht am Umfange der Spindel, sondern am Umfange eines Schraubenkopfes k von größerem Durchmesser, oder am Ende einer Kurbel oder einer durch den Bolzen gesteckten Hebelstange; dadurch wird der Weg der Kraft, also auch die zu überwindende Last um so viel größer, als der Umfang des von der Kraft beschriebenen Kreises den Umfang der Spindel übertrifft. Es hat daher das Gesetz des Gleichgewichtes für die Schraube allgemeiner folgende Fassung: Bei der Schraube verhält sich im Falle des Gleichgewichtes die Kraft zur Last wie die Gewindhöhe zum Umfange des Kraftkreises. Aus diesem Gesetze ergibt sich eine Folgerung, auf welcher die meisten der so zahlreichen Anwendungen der Schraube beruhen: Wenn man nämlich durch eine drehend wirkende Kraft eine Last überwinden kann, welche in der Richtung der Spindelachse wirkt, so muß nach dem fünften Axiom die Kraft in dieser Richtung einen der Last gleichen und entgegengesetzten Druck ausüben. Man kann demnach durch Umdrehen einer Schraube einen Druck in der Richtung der Spindelachse erzeugen; die Richtung dieses Druckes kann man umkehren, indem man die Spindel in entgegengesetzter Richtung dreht.

Fig. 30.



Bei den practisch verwendeten Schrauben ist es nicht eine einzige schiefe Ebene, welche an der Grundfläche der Spindel ihre Windungen beginnt, sondern mehrere in gleichen Abständen; außerdem besitzen die schiefen Ebenen eine solche Länge, daß sie ihre Umwindungen öfter wiederholen; endlich sind eigentlich nicht schiefe Ebenen mit ihrer ganzen massiven Unterlage, sondern nur die der Länge nächsten Streifen um den Kern der Spindel gewunden.

Sind diese Streifen vierkantig rechteckig (Fig. 31 a), so entstehen Schrauben mit flachem Gewinde (Fig. 31 b); sind dieselben aber dreikantig (Fig. 32 a), so entstehen Schrauben mit scharfem Gewinde (Fig. 32 b). Die Gewinde liegen unmittelbar an einander und bedecken die ganze Oberfläche des Bolzens und ebenso die ganze Innenfläche der Mutter. Dadurch wird die Wirkung der Schraube ununterbrochen, ohne daß hierdurch die Reibung vergrößert wird; denn die Reibung ist ja von der Größe der Berührungsflächen unabhängig. Indessen ist dieselbe hier doch sehr groß, weil sie eben gleitende Reibung ist. Gerade von dieser großen Reibung aber macht man die vielfältigste Anwendung; denn diese kann schon für sich allein an einer Maschine eine Last im Gleichgewichte halten; sie macht aber auch die Schrauben zur Befestigung geeignet. Wenn man z. B. eine Schraube mit scharfem Gewinde in Holz hineindreht, so übt dieselbe einen so starken Druck in der Richtung der Achse aus, daß sie die Festigkeit des Holzes überwinden kann; ebenso groß ist aber auch der Widerstand, der Gegendruck des Holzes.

Fig. 31.

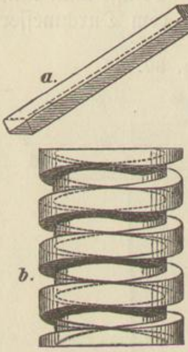
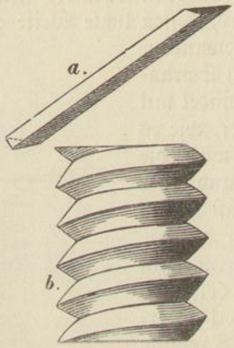


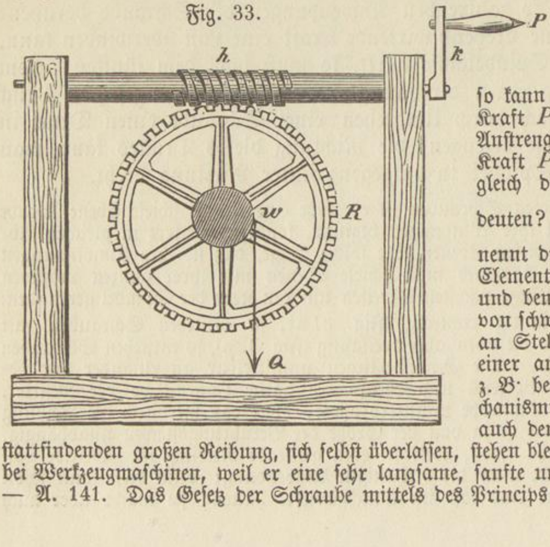
Fig. 32.



Weil demnach die Windungen und das Holz sich fest gegen einander pressen, so entsteht eine so große Reibung, daß die Windungen im Inneren des Holzes fest bleiben, und nur dann zurückkehren, wenn der Gegendruck des Holzes durch eine entgegengesetzte Drehung der Schraube, wodurch sich nämlich der Achsendruck umkehrt, unterstützt wird. Auf dem Drucke in der Richtung der Achse beruht auch die Verwendung der Schraube zu Bohrern, Korkziehern, zur Archimedischen Schnecke (als Pumpe verwendet), zu den außerordentlich zahlreichen Arten von Schraubenpressen, zur Schraubenwinde, besonders aber ihre so wichtige Verwendung zum Fortbewegen der Schiffe als Schiffschraube (erfunden von Ressel 1827 in Triest), an Stelle der Schaufelräder, wodurch nicht nur der Wellenschlag bedeutend vermindert, sondern auch dem wichtigsten Theile des Schiffes eine versteckte Stelle angewiesen wird. — Sind die Windungen der Schraubenspindel genau einander gleich und gleichmäßig geschnitten, so wird für jede Umdrehung die Spindel genau um gleichviel fortbewegt und ebenso für gleiche Bruchtheile einer Umdrehung um gleiche, kleine Strecken fortgeschoben. Die Spindel wird fortbewegt, wenn die Mutter festsitzt, die Mutter dagegen, wenn die Spindel festsitzt. Die letzte Einrichtung ist an vielen Arbeits- oder Werkzeugmaschinen, z. B. zur Verschiebung des Supports an Drehbänken gebräuchlich, die erste an vielen physikalischen Meßapparaten. Sind die Windungen sehr fein, so können mit einer solchen Schraube sehr kleine Bewegungen gemacht und durch die dabei vollbrachte Drehung des Schraubenkopfes dennoch genau gemessen werden; diese Einrichtung nennt man Mikrometerschraube.

107 Aufg. 137. An welchem Hebelarme muß ein Mann mit einer Kraft von 40^{kg} bei einer Schraube von 2^{cm} Gewindhöhe wirken, um eine Last von 60 Ctr. zu heben? Aufl.: $23{,}9^{cm}$. — A. 138. Welche Gewindhöhe muß eine Schraube haben, damit durch eine Kraft von 40^{kg} an einer Kurbel von 50^{cm} Länge eine Last von 200 Ctr. gehoben werden könne? Aufl.: $1{,}2566^{cm}$. — A. 139. Der Kopf einer Mikrometerschraube sei in 360° getheilt und müsse 20mal gedreht werden, um die Spindel um 1^{cm} fortzubewegen; welche Bewegung erzeugt eine Drehung von 13°? Aufl.: $0{,}01\,806^{mm}$. — A. 140. Greift eine Schraube h (Fig. 33) (h bedeute zugleich die Gewindhöhe) in ein Rad R, das auf einer Welle w sitzt, welche die Last Q trägt, so kann eine an der Kurbel k wirkende Kraft P die Last Q mit sehr geringer Anstrengung heben. Wie groß muß diese Kraft P sein, wenn die Buchstaben zugleich die bekannten Dimensionen bedeuten? Aufl.: $P = \frac{w}{R} \cdot \frac{h}{2\pi k} \cdot Q$. Man nennt diese Verbindung von Maschinen-Elementen die Schraube ohne Ende und benutzt sie insbesondere zum Heben von schweren Lasten durch Menschenkraft, an Stellen, wo man nicht leicht mit einer anderen Kraft wirken kann, wie z. B. bei Schleußenaufzügen; dieser Mechanismus hat bei solchen Anwendungen auch den Vortheil, daß er wegen der stattfindenden großen Reibung, sich selbst überlassen, stehen bleibt. Man findet ihn auch häufig bei Werkzeugmaschinen, weil er eine sehr langsame, sanfte und regelmäßige Drehung erzeugt. — A. 141. Das Gesetz der Schraube mittels des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten

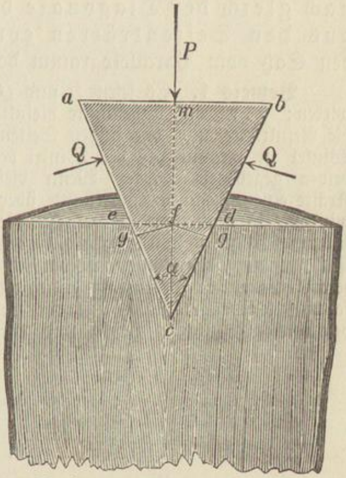
Fig. 33.



zu beweisen. And: Bei einer Umdrehung legt die Last den Weg der Gewindhöhe zurück, die Kraft aber ihren ganzen Kreis.

6. Der Keil. Ein Keil ist ein dreiseitig prismatischer Körper, dessen einer 108
Kantenwinkel ein sehr spitzer ist. Die dieser scharfen Kante gegenüber liegende Fläche des Keiles nennt man den Rücken, die anliegenden Flächen die Seiten desselben; oft bezeichnet man mit diesen Namen nicht die Flächen selbst, sondern ihre Schnitte *ab* und *ac* oder *bc* (Fig. 34) durch die Ebene. Den Keil wendet man an, indem man ihn mit der scharfen Kante in feste Holz- oder Steinmassen treibt, um dieselben zu sprengen oder zwischen andere Holzstücke in der Keilpresse, um zwischen diesen Stücken liegende Stoffe auszupressen (Oelmühlen); man schiebt ihn unter Lasten, um dieselben zu heben; man gebraucht ihn als Meßkeil, um Theile von Meßinstrumenten um sehr wenig zu verschieben. Beim Keile findet Gleichgewicht statt, wenn sich die Kraft zur Last verhält wie der Rücken zur Seite des Keiles.

Fig. 34.



Beweis. Ist der Keil durch die Kraft P um fc eingedrungen, so ist die Arbeit der Kraft $P . fc$; alsdann wurden die 2 auf seine Seiten ausgeübten Pressungen Q um die Wege fg zurückgeschoben, also die Arbeit $2 Q . fg$ consumirt. Nach der allgemeinen Gleichgewichtsbedingung ist daher $P . fc = 2Q . fg$, woraus $P : Q = 2 . fg : fc$. Da nun $\Delta\, cfg \sim cbm$, so ist $fg : fc = mb : bc$ und $2 . fg : fc = ab : bc$. Durch Einsetzung des letzteren Quotienten statt des ersteren in die Proportion für P und Q entsteht $P : Q = ab : bc$ oder $P : Q = r : s$. — Aus der Proportion $P : Q = 2 . fg : fc$ folgt auch $P = 2\, Q\, (fg / fc) = 2\, Q \sin {}^1\!/_2\, \alpha$. Der in der Figur dargestellte Keil, dessen Querschnitt ein gleichschenkeliges Dreieck ist, und für welchen P den angegebenen Werth hat, wird auch doppelter Keil genannt und hauptsächlich zum Sprengen, Spalten und Schneiden benutzt. Zum Heben benutzt man mehr den einfachen Keil, dessen Querschnitt ein rechtwinkeliges Dreieck ist, und für welchen $P = Q \operatorname{tang} \alpha$ ist.

Nach obigem Gesetze kann eine Kraft mit einem doppelten Keile um so mehr wirken, je kleiner der Rücken im Verhältnisse zur Seite des Keiles ist. Wir finden daher alle Schneidewerkzeuge, welche mit einer kleinen Kraft meist einen großen Widerstand überwinden sollen, und welche ohne Ausnahme Keile sind, wie Beile, Meißel, Messer, Scheeren u. s. w. mit fast parallelen Seiten an der Schneide versehen; Rasirmesser werden hohl geschliffen; Schiffe und Vögel haben vorn schmale Kiele, um die Widerstände des Wassers und der Luft leichter überwinden zu können.

2. Die Zusammensetzung und die Zerlegung der Kräfte.

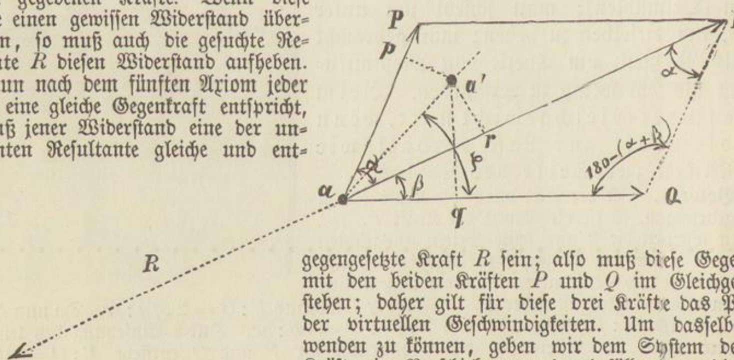
Das Parallelogramm der Kräfte (Newton 1687). Bisher ließen wir an 109
einer Maschine immer nur eine einzige Kraft der Last entgegen wirken; doch können auch mehrere Kräfte zu demselben Zwecke mit einander verbunden sein. Wenn nun mehrere Kräfte auf einen Körper wirken und sich nicht gerade einander aufheben, so kann das Resultat ihrer Einwirkung nur eine Bewegung sein; diese Bewegung kann man sich meistens auch durch eine einzige Kraft entstanden denken; daher lassen sich mehrere Kräfte durch eine einzige ersetzen. Diejenige Kraft, welche dieselbe Wirkung hervorbringt wie mehrere andere Kräfte, wird die Mittelkraft oder Resultante jener Kräfte genannt, die im Gegensatze hierzu Seitenkräfte oder Componenten heißen. Die analytische Mechanik löst allgemein die Aufgabe, die Resultante beliebig vieler und beliebig gerichteter Kräfte sowohl der Größe als der Richtung nach zu finden. Wir betrachten hier

nur einige specielle, aber wichtige Fälle, zunächst den Fall, daß zwei Kräfte unter einem beliebigen Winkel auf einen materiellen Punkt wirken. Bei diesen Betrachtungen stellen wir uns die Kräfte als Linien dar, durch welche wir zugleich die Größe und die Richtung der Kräfte angeben.

Wenn zwei Kräfte unter einem Winkel auf einen Punkt wirken, so ist die Resultante sowohl der Größe als auch der Richtung nach gleich der Diagonale desjenigen Parallelogramms, das man aus den Seitenkräften construiren kann. Man nennt dieses Gesetz den Satz vom Parallelogramm der Kräfte.

Beweis 1. Es seien P und Q (Fig. 35) die zwei Kräfte, welche auf den Punkt a wirken; R sei die unbekannte Resultante, α und β die zwei unbekannten Winkel, welche die Resultante mit den beiden Seitenkräften P und Q bildet; die Summe $\alpha + \beta$ dieser Winkel ist bekannt als der Winkel der beiden gegebenen Kräfte. Wenn diese Kräfte einen gewissen Widerstand überwinden, so muß auch die gesuchte Resultante R diesen Widerstand aufheben. Da nun nach dem fünften Axiom jeder Kraft eine gleiche Gegenkraft entspricht, so muß jener Widerstand eine der unbekannten Resultante gleiche und entgegengesetzte Kraft R sein; also muß diese Gegenkraft mit den beiden Kräften P und Q im Gleichgewichte stehen; daher gilt für diese drei Kräfte das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten. Um dasselbe anwenden zu können, geben wir dem System der drei Kräfte eine Verschiebung aa' und fällen dann die Lothe $a'p$, $a'q$ und $a'r$ auf die Richtungen der drei Kräfte; dann sind ap, aq und ar die Verschiebungen der Kräfte in ihren eigenen Richtungen. Multipliciren wir die drei Kräfte mit diesen Verschiebungen, so entsteht nach dem Princip die Gleichgewichtsgleichung

Fig. 35.



$$R \,.\, ar = P \,.\, ap + Q \,.\, aq \ldots \mathrm{I}$$

Bezeichnen wir den Winkel, den die Richtung der Verschiebung $aa' = \varrho$ mit der Kraft Q macht, durch φ, so ist

$$ar = \varrho \cos(\varphi - \beta) = \varrho \cos\varphi \cos\beta + \varrho \sin\varphi \sin\beta,$$

dann $aq = \varrho \cos\varphi$ und endlich

$$ap = \varrho \cos(\alpha + \beta - \varphi) = \varrho \cos(\alpha + \beta) \cos\varphi + \varrho \sin(\alpha + \beta) \sin\varphi.$$

Durch Substitution dieser 3 Werthe in die Gleichung I erhält diese die Form

$$R\varrho \cos\varphi \cos\beta + R\varrho \sin\varphi \sin\beta =$$
$$= P\varrho \cos(\alpha + \beta) \cos\varphi + P\varrho \sin(\alpha + \beta) \sin\varphi + Q\varrho \cos\varphi \text{ oder}$$
$$\varrho \cos\varphi \,\{R \cos\beta - Q - P \cos(\alpha + \beta)\} = \varrho \sin\varphi \,\{-R \sin\beta + P \sin(\alpha + \beta)\}$$

Weil die Verschiebung ϱ und φ eine ganz willkürliche ist, so muß diese Gleichung für jeden beliebigen Werth von ϱ und φ Geltung haben. Dies ist aber nur möglich, wenn die Klammerausdrücke = Null sind, folglich ist

$$-R \sin\beta + P \sin(\alpha + \beta) = 0 \text{ und}$$
$$R \cos\beta - Q - P \cos(\alpha + \beta) = 0$$

Aus der ersten dieser 2 Gleichungen folgt:

$$\mathrm{II} \ldots P = R \sin\beta \,/\, \sin(\alpha + \beta) \text{ oder } P : R = \sin\beta : \sin(\alpha + \beta)$$

und aus der zweiten, wenn man den Werth von P in diese substituirt:

$$\mathrm{III} \ldots . Q = R \sin\alpha \,/\, \sin(\alpha + \beta) \text{ oder } Q : R = \sin\alpha : \sin(\alpha + \beta)$$

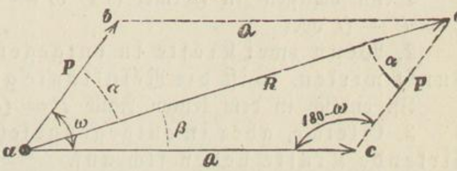
Durch Verbindung dieser 2 Proportionen entsteht die 3 gliedrige Proportion

$$P : Q : R = \sin\beta : \sin\alpha : \sin(\alpha + \beta)$$

Ein solches Verhältniß findet nach den Lehren der Trigonometrie nur in einem Dreiecke statt, dessen drei Seiten P, Q und R sind, und in welchem P dem Winkel β und Q dem Winkel α gegenüber liegt. Solche Dreiecke können aber durch unsere Kräfte P, Q und R mit den Winkeln α und β nur entstehen, wenn R die Diagonale eines Parallelogramms ist, dessen Seiten P und Q sind, und wenn diese mit der Diagonale R die Winkel α und β einschließen; hiermit ist dieser Satz bewiesen.

Beweis 2. Es gibt für diesen wichtigen Satz eine große Anzahl von Beweisen. 110
Für den Schüler, dem die Lehren der Trigonometrie noch fremd sind, wollen wir noch einen zweiten Beweis ausführen, welcher einfacher, wenn auch weniger streng als der obige ist. Dieser zweite Beweis beruht zunächst auf einer Folgerung aus dem vierten Axiom: Es ist einerlei, ob zwei Kräfte gleichzeitig oder nach einander wirken, — und dann darauf, daß nach 24. Kräfte durch die Wege dargestellt werden können, welche ein und derselbe Körper in gleichen Zeiten durch den Einfluß der Kräfte zurücklegen würde. Stellt in dieser Weise ab (Fig. 36) die Kraft P und ac die Kraft Q vor, so würde der Punkt a durch P allein in einer gewissen Zeit nach b gelangen oder durch Q allein in derselben Zeit nach c. Lassen wir zuerst P allein wirken, so gelangt demnach der Punkt a nach b; lassen wir jetzt Q auf denselben wirken, so wird diese Kraft den Punkt b in derselben Richtung und durch einen gleichen Weg forttreiben, wie sie den Punkt a durch den Weg ac fortbewegte; folglich wird der Punkt b den Weg bd durchlaufen, wobei bd gleich und parallel ac ist. Es gelangt also der Punkt a an die gegenüberliegende Ecke des Parallelogramms $abcd$; dahin wäre er aber auch gekommen, wenn eine Kraft von der Größe und Richtung der Diagonale ad auf ihn gewirkt hätte; folglich ist diese diagonale Kraft die Resultante von P und Q.

Fig. 36.



Experimenteller Nachweis. Auch dafür gibt es eine Reihe von Einrichtungen: Eine Trommel, um welche ein Faden mit einem kleinen Gewichte gewunden ist, und welche auf einer erhöhten Fläche fortrollt; man sieht dann das Gewicht den diagonalen Weg durchlaufen. Ein Apparat, ähnlich den Flugmaschinen auf Theatern. Der Crahay'sche Apparat, bestehend aus vier eingetheilten und verstellbaren Holzschienen, mit denen man Parallelogramme von den verschiedensten Seiten und Winkeln bilden kann; an zwei Ecken sind Messingrollen, über welche zwei Schnüre laufen, die von einem Ringe ausgehen, an welchem eine dritte Schnur hängt. Durch Gewichte, welche an den zwei ersten Schnüren gleich den Seiten und an der dritten gleich der Diagonale des Parallelogramms sind, wird immer Gleichgewicht hergestellt.

Algebraischer Ausdruck des Satzes. Nach dem Satze vom Parallelogramm 111
der Kräfte kann man die Resultante sowohl der Größe wie der Richtung nach durch Zeichnung finden; da indessen nur die Rechnung genaue Resultate gibt, so muß man den Satz algebraisch ausdrücken, und zwar ist sowohl die Größe der Resultante R, als auch die Größe der Winkel α und β anzugeben, die sie mit den beiden Componenten P und Q einschließt. Die Größe der Resultante wird berechnet nach der Formel

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2\,PQ \cos\omega} \;\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

und die Winkel werden gefunden nach den Formeln

$$\sin\alpha = \frac{Q \sin\omega}{R} \text{ und } \sin\beta = \frac{P\sin\omega}{R} \;\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

worin $\omega = \alpha + \beta$ den Winkel bedeutet, welchen die Kraftrichtungen einschließen.

Beweis. Schon die Anwendung eines bekannten trigonometrischen Satzes, des sogenannten Cosinus-Satzes auf das $\triangle\ acd$ (Fig. 36) ergibt $R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ\cos(180 - \omega)$, woraus $R = \sqrt{(P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\omega)}$.

Jedoch läßt sich dieser Werth auch aus den in 109. gefundenen Gleichungen II und III berechnen: $P = R\sin\beta / \sin(\alpha + \beta)$ und $Q = R \sin\alpha / \sin(\alpha+\beta)$, worin $\alpha + \beta = \omega$ ist. Aus der ersten dieser Gleichungen ist

$$R = P\sin\omega / \sin(\omega - \alpha) = P\sin\omega / (\sin\omega\cos\alpha - \cos\omega\sin\alpha),$$

und aus der zweiten ergibt sich

$$\sin\alpha = Q\sin\omega / R \text{ und } \cos\alpha = \sqrt{(1 - Q^2\sin^2\omega / R^2)} = \sqrt{(R^2 - Q^2\sin^2\omega)} / R.$$

Setzt man diese Werthe für $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ in den Werth für R ein, so ergibt sich nach einiger Rechnung ebenfalls $R = \sqrt{(P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\omega)}$.

Die Formeln (15) für die Winkel lassen sich ebenfalls aus dem $\triangle\ acd$ (Fig. 36) mittels des Sinussatzes finden; denn nach diesem Satze ist

$$\sin\alpha : \sin(180 - \omega) = Q : R \text{ und } \sin\beta : \sin(180 - \omega) = P : R, \text{ woraus}$$
$$\sin\alpha = Q\sin\omega / R \text{ und } \sin\beta = P\sin\omega / R.$$

Jedoch ergeben sich dieselben auch direct aus den schon in 109. gefundenen Gleichungen II und III, wenn in denselben ω an die Stelle von $\alpha + \beta$ gesetzt wird.

Mittels dieser algebraischen Ausdrücke lassen sich einige Folgerungen gewinnen, von denen eine schon aus Axiom 5. geschlossen und im Beweis 109. enthalten ist. Setzt man in Formel (14) den Winkel $\omega = 0$, so findet man $R = P + Q$ oder

1. **Wenn zwei oder mehrere Kräfte in einer Richtung auf einen Punkt wirken, so ist die Resultante gleich der Summe derselben.**

Wenn dagegen in Formel (14) $\omega = 180^0$ gesetzt wird, so ergibt sich $R = P - Q$ oder

2. **Wenn zwei Kräfte in entgegengesetzter Richtung auf einen Punkt wirken, so ist die Resultante gleich der Differenz derselben.**

Ist endlich in dem letzten Falle $P = Q$, so ist $R = 0$, d. h.

3. **Gleiche, aber in entgegengesetzter Richtung auf einen Punkt wirkende Kräfte heben sich auf.**

Da $\cos \omega$ zwischen $+1$ und -1 liegt, so sind die zwei Werthe $P + Q$ und $P - Q$ der größte und der kleinste, den die Resultante haben kann, oder

4. **Die Resultante zweier auf einen Punkt wirkenden Kräfte ist** (die Grenzfälle ausgenommen) **kleiner als die Summe und größer als die Differenz derselben.**

Aus den Formeln (15) folgt, daß $\alpha = \beta$ ist, wenn $P = Q$ ist, daß dagegen $\alpha > \beta$, wenn $P < Q$ und $\alpha < \beta$, wenn $P > Q$ ist.

5. **Die Resultante zweier gleichen Kräfte halbirt den Winkel der Kräfte**; die Resultante ungleicher Kräfte liegt mehr in der Nähe der größeren Kraft.

Wenn auf einen Punkt mehrere Kräfte wirken und deren Resultante gefunden werden soll, so sucht man die Resultante zweier Kräfte, dann die Resultante dieser Resultante und einer dritten Kraft u. s. w. Für drei nicht in einer Ebene wirkenden Kräfte ergibt sich dann, daß die Resultante gleich der Diagonole eines aus den drei Kräften gebildeten Parallelepipedons ist (Fig. 37); für mehrere in einer Ebene wirkenden Kräfte ist dieselbe die letzte Seite eines Polygons (Fig. 38), das dadurch entsteht, daß man durch den Endpunkt der ersten eine Gerade gleich und parallel der zweiten, durch den Endpunkt dieser eine Gerade gleich und parallel der dritten u. s. w. zieht. (Parallelepipedon und Polygon der Kräfte).

Fig. 37.

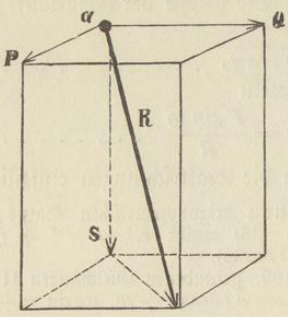
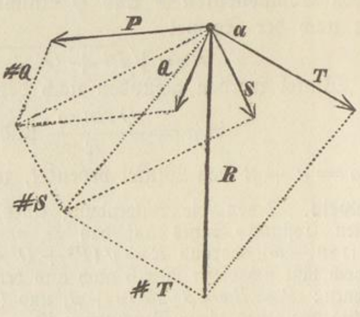


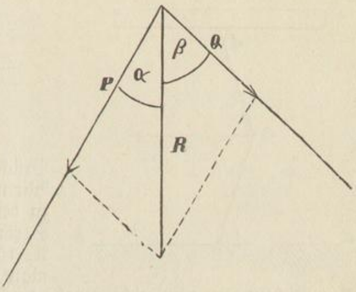
Fig. 38.



112 **Zerlegung der Kräfte.** Nachdem wir die Zusammensetzung von Kräften kennen gelernt haben, die auf einen Punkt wirken, wollen wir, bevor diese Aufgabe für einen Körper uns beschäftigen soll, zuerst die wichtige umgekehrte Aufgabe lösen, nämlich die Zerlegung einer Kraft in zwei Kräfte, die auf denselben Punkt wirken. Gewöhnlich ist hierbei die Richtung dieser Seitenkräfte bekannt und soll daher nur die Größe derselben gefunden werden. Diese Aufgabe ist offenbar nur eine Umkehrung des Parallelogramms der Kräfte. Man findet

daher durch Zeichnung (Fig. 39) die Seitenkräfte einer gegebenen Kraft, indem man durch den Endpunkt derselben Parallele zu den gegebenen Richtungen der Seitenkräfte zieht; diese Parallelen schneiden von den Richtungslinien Stücke ab, welche an Größe den Seitenkräften gleich sind.

Fig. 39.



Durch Rechnung findet man dieselben nach den schon gefundenen Formeln

$$P = \frac{R \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \text{ und } Q = \frac{R \sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} \quad . . (16)$$

welche sich aber auch sofort durch Anwendung des bekannten Sinus-Satzes auf eines der beiden Dreiecke finden lassen.

Sollen die beiden Componenten auf einander senkrecht stehen, so ist $\alpha + \beta = 90^0$, daher

$$Q = R \sin\alpha \text{ und } P = R \cos\alpha \quad . . . . (17)$$

Da man jede Componente wieder in Seitenkräfte zerlegen kann, so ist die Zerlegung einer Kraft in mehr als zwei Seitenkräfte eine einfache Aufgabe.

Anwendung des Kräfteparallelogramms. Ein Schiffer wendet es unbewußt an, 113
wenn er mit seinem Kahne eine bestimmte Stelle des gegenüberliegenden Ufers erreichen will. Das Gesetz wird von der Natur selbst ausgeführt, wenn ein Stein von einem Mastbaume oder aus einem Eisenbahnwagen fällt; der Stein fällt in diagonaler Richtung zu Boden. (Vogelflug, Schwimmen der Fische und Menschen 2c.). Die Weltkörper schlagen in jedem Augenblicke die diagonale Richtung zwischen den beiden Kräften ein, die auf sie wirken, zwischen ihrer eigenen Energie und der Anziehung eines Centralkörpers. Zahlreich sind insbesondere die Anwendungen der Zerlegung der Kräfte. Wenn ein Körper sich nicht in der Richtung bewegen kann, in welcher eine Kraft wirkt, so kommt nur die in die Richtung der Bewegung fallende Componente zur Wirkung; umgekehrt kann daher auch eine Kraft in einer anderen Richtung wirken, als in ihrer eigenen, aber nur mit einem Theile ihres Betrages. Diesen Theil findet man, indem man die nach jener Richtung gedachte Componente sucht; ergibt sich dieselbe = Null oder imaginär, so ist die geforderte Wirkung unmöglich; hat sie aber noch einen reellen, wenn auch noch so kleinen Werth, so kann die Kraft noch eine Wirkung in der verlangten Richtung hervorbringen. Soll z. B. eine Kraft einen Druck auf einen Körper hervorbringen, so muß man sie immer in eine zur Druckfläche senkrechte und eine parallele Componente zerlegen; die letztere geht für den Druck verloren, die erstere gibt die Größe des Druckes an. Soll aber ein Körper auf einer Fläche fortbewegt werden, so geht die zu dieser Fläche senkrechte Druckcomponente für jene Fortbewegung verloren, ja sie erzeugt sogar das Haupthinderniß der Bewegung, die Reibung; nur die zur Fläche parallele Componente erzeugt die Bewegung. Diese Grundsätze sind bei den folgenden Aufg. anzuwenden; hierbei sind insbesondere die Fln. (17) wichtig.

Aufg. 142. Welches ist die Resultante zweier auf einander senkrechten Kräfte P u. Q? 114
Aufl.: $R = \sqrt{(P^2 + Q^2)}$. — A. 143. Welches ist die Resultante von 80^{kg} und 100^{kg}, die einen Winkel von 60^0 einschließen? Aufl.: $R = 156{,}205^{kg}$. — A. 144. Welches die von 6 und 11^{kg}, die einen Winkel von 30^0 bilden? Aufl.: $R = 16{,}47^{kg}$. — A. 145. Welches sind die Componenten von 100^{kg}, wenn sie Winkel von 30^0 und 60^0 mit der Mittelkraft machen? Aufl.: $P = 50$, $Q = 86{,}6^{kg}$. — A. 146. Welches ist der Druck, den die Last Q auf eine schiefe Ebene vom Neigungswinkel α ausübt? Anl.: Man zerlege die Last in eine senkrechte und eine parallele Componente und beweise, daß die erste $D = Q \cos\alpha$ (der Druck), die letzte $Q \sin\alpha$. — A. 147. Das Gesetz von der schiefen Ebene für beide Wirkungsarten der Kraft durch das Kräfteparallelogramm zu beweisen. Anl.: Man zerlege die Last für die erste Art, wie es so eben in A. 146 geschehen ist, und für die zweite Art in eine senkrechte und eine wagrechte Componente. — A. 148. Wie groß ist für die zweite Art der Druck auf die schiefe Ebene? Anl.: Gleich der eben gefundenen senkrechten Componente $D = Q \sec\alpha$. Da $\sec\alpha$ immer größer als 1 ist, so ist der Druck immer größer wie die Last; wie ist dies zu erklären? Anl.: D ist nur in dem Grenzfalle $= Q$, wenn $\sec\alpha = 1$, wenn also $\alpha = 0$. — A. 149. Das Gesetz für den Keil durch das Kräfteparallelogramm zu beweisen. — A. 150. Durch die Kniepresse (Fig. 40) kann auf die Unterlage ab ein sehr großer Druck mittels einer kleinen Kraft P ausgeübt werden; dies zu beweisen. Anl.:

Man zerlege P in zwei Componenten in den Richtungen cd und ce, lasse dann den Winkel dce immer größer werden und wiederhole diese Construction, so wird sich herausstellen, daß diese Componenten sogar unendlich werden können. In welchem Falle? — A. 151.

Fig. 40.

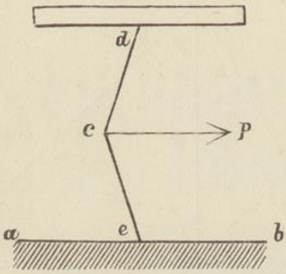
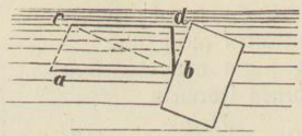


Fig. 41.



Zu zeigen, wie eine fliegende Brücke durch die Stromkraft über den Fluß getrieben werden kann. Anl.: Man zerlege die Stromkraft ab (Fig. 41) in 2 Seitenkräfte, bc senkrecht und ac parallel zu der Brücke; die senkrechte Componente bc kommt allein zur Wirkung. Diese zerlege man in eine Kraft cd, parallel zu dem Strome, und eine Kraft bd, senkrecht zu dem Strome; durch die letztere ist die Ueberfahrt möglich. — A. 152. In ähnlicher Weise (Fig. 42) zu zeigen, daß man auf der See durch Anwendung von Segeln nach allen Richtungen, nur nicht gerade dem Winde entgegen, fahren kann (Kreuzen). Auch bei den Windmühlen wirkt die Kraft in ähnlicher Weise, sowie bei dem Spieldrachen (Windvogel) der Knaben, beim schiefen Stoßen des Wassers gegen Räderschaufeln und Steuerruder u. s. w. — A. 153. Wie groß ist die wirksame Componente der Windkraft R, wenn die Bezeichnungen von Fig. 42 gelten? Aufl.: $P = R \sin\beta \sin\alpha$; sind α und β nur 30^0, so ist P immer noch $= {}^1/_4\,R$. — A. 154. Wie groß ist die Kraft P, welche bei beliebiger Richtung einen Körper vom Gewichte Q mit Ueberwindung der Reibung auf einer schiefen Ebene aufwärts zu ziehen vermag? Anl.: Man zerlege sowohl Q wie P (Fig. 43) in Componenten, parallel und senkrecht zu der schiefen Ebene; die senkrechten Componenten bilden den Druck, der mit f, dem Reibungscoëfficienten multiplicirt die Reibung gibt. Diese und die parallele Componente von Q müssen zusammen der parallelen Componente von P gleich sein. Hieraus folgt $P = Q(\sin\alpha + f\cos\alpha) / (\cos\beta + f\sin\beta)$. Bei wagrechter Richtung von P ist $\beta = -\alpha$, folglich ist dann $P = Q(f + tg\,\alpha) / (1 - f\,tg\,\alpha)$. — A. 155. Hat man eine drehbare schiefe Ebene, die man unter beliebigem Neigungswinkel aufstellen kann, so ist es nach Amonton möglich, den Reibungscoëfficienten f für den Uebergang aus Ruhe in Bewegung zu finden, da im Beginne der Bewegung die Reibung gleich der parallelen Componente der Last ist; wie groß ist der Coëfficient f? Aufl.: $fQ\cos\varphi = Q\sin\varphi$; hieraus $f = tg\,\varphi$; φ wird Reibungswinkel genannt. — A. 156. Wie groß ist die Kraft zur Ueberwindung der Last Q und der Reibung bei der

Fig. 42.

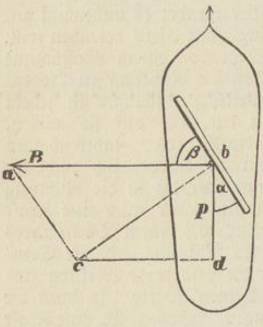


Fig. 43.

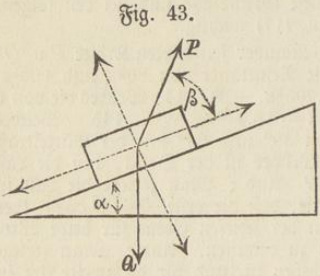
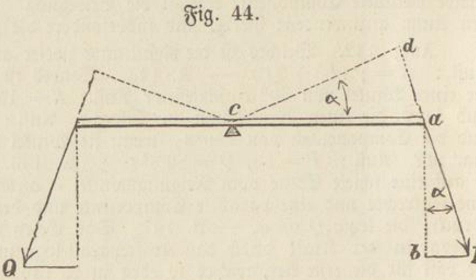


Fig. 44.



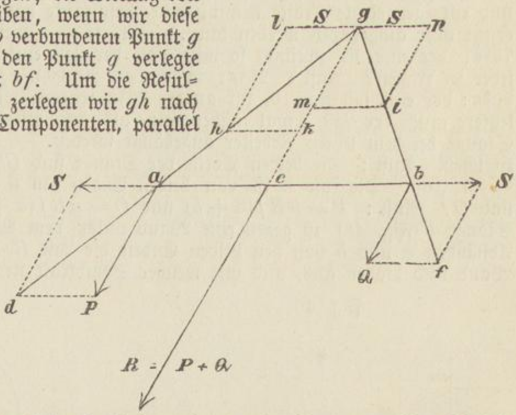
Schraube? Aufl.: Hier gilt die letzte Formel in A. 155. Man kann in derselben $h / 2r\pi$ statt $tg\,\alpha$ setzen. — A. 157. Das Hebelgesetz für beliebig gerichtete Kräfte zu beweisen. Anl.: Man suche (Fig. 44) z. B. die senkrechte Componente ab von P; sie ist $P\cos\alpha$; das Moment derselben ist $P \,.\, ac \,.\, \cos\alpha = P \,.\, cd$, gleich dem Momente von P selbst.

115 **Resultante von Kräften, die auf einen Körper wirken.** Wir betrachten hier nur den Fall, daß die Kräfte einander parallel sind, und daß auch die Resultante den

Seitenkräften parallel sein soll. Zunächst suchen wir die Resultante von zwei parallelen Kräften. In diesem Falle muß nicht blos die Größe der Resultante gefunden werden, sondern auch derjenige Punkt, an welchem die Resultante angebracht werden müßte, um dieselbe Wirkung wie die Seitenkräfte hervorbringen zu können; dieser Punkt heißt der Angriffspunkt der Resultante. Wenn nun, wie vorausgesetzt, die Resultante dieselbe Richtung wie die Seitenkräfte haben soll, so gilt folgender Satz: Die Resultante zweier parallelen Kräfte ist gleich der Summe derselben; der Angriffspunkt der Resultante theilt die Verbindungsgerade der Angriffspunkte der Kräfte in zwei Stücke, die sich umgekehrt verhalten wie die gegebenen Kräfte.

Beweis. Es seien (Fig. 45) P und Q die beiden auf die Punkte a und b wirkenden Kräfte. Zum Zwecke des Beweises bringen wir in a und b zwei gleiche, aber entgegengesetzte Kräfte S an. Da diese einander aufheben, so ist die Resultante der vier Kräfte P, S, Q und S auch die Resultante von P und Q. Die Resultante von P und S ist nach dem Kräfteparallelogramm $= ad$, die von S und $Q = bf$. Wenn wir die Resultante von ad und bf gefunden haben, so haben wir auch die von P und Q. Nun darf man aber nach dem dritten Axiom den Angriffspunkt jeder Kraft in ihrer eigenen Richtung verlegen; die Wirkung von ad und bf wird also dieselbe bleiben, wenn wir diese Kräfte auf den unveränderlich mit ab verbundenen Punkt g wirken lassen. Es sei gh die an den Punkt g verlegte Kraft ad und gi die verlegte Kraft bf. Um die Resultante dieser beiden Kräfte zu finden, zerlegen wir gh nach dem Kräfteparallelogramm in zwei Componenten, parallel zu ab und zu P; die erste Componente gl muß dann $= S$, die zweite $gk = P$ sein; ebenso zerlegen wir gi in $gn = S$ und $gm = Q$. Die beiden Kräfte S heben einander auf, weil sie einander gleich und entgegengesetzt sind; die beiden Kräfte gk und gm wirken nach einer Richtung auf einen Punkt, folglich ist ihre Resultante gleich ihrer Summe $P + Q$. Hiermit ist der erste Theil des Lehrsatzes bewiesen. Für den zweiten Theil benutzen wir die Aehnlichkeit der Dreiecke ghk und gac, sowie der Dreiecke gmi und gcb; hieraus ergeben sich folgende zwei Proportionen: $gk : hk$ oder $P : S = gc : ac$, woraus $S . gc = P . ac$, und $gm : mi$ oder $Q : S = gc : bc$, woraus $S . gc = Q . bc$. Durch Gleichsetzung der zwei letzten einander gleichen Werthe erhalten wir $P . ac = Q . bc$ oder $P : Q = bc : ac$, womit auch der zweite Theil des Lehrsatzes bewiesen ist.

Fig. 45.



Vermittelst dieses Satzes kann man eine auf einen Körper wirkende Kraft in zwei derselben parallele Seitenkräfte zerlegen, deren Summe indeß immer der gegebenen Kraft gleich sein muß. Außerdem ergibt sich aus demselben, daß die parallele Resultante vieler parallelen Kräfte gleich der Summe derselben ist; den Angriffspunkt dieser Resultante findet man, indem man zuerst nach dem Lehrsatze den Angriffspunkt der Resultante zweier Kräfte sucht, dann diesen Punkt mit dem Angriffspunkte der dritten Kraft verbindet und wieder nach dem Satze den Angriffspunkt der Resultante jener ersten Resultante und der dritten Kraft sucht; dann hat man den Angriffspunkt der Resultante dreier Kräfte. Fährt man in dieser Weise fort, so findet man den Angriffspunkt der Resultante vieler parallelen Kräfte, die auf einen Körper wirken.

Den Angriffspunkt der Resultante mehrerer parallelen Kräfte nennt man den Mittelpunkt der parallelen Kräfte; derselbe hat folgende zwei aus seiner Definition hervorgehende Eigenschaften: 1. Bringt man im Mittelpunkte der parallelen Kräfte eine Kraft gleich der Summe derselben an, so hat diese dieselbe Wirkung wie alle Seitenkräfte zusammen. 2. Wenn man in dem Mittelpunkte der parallelen Kräfte eine Kraft anbringt, welche der Resultante gleich, aber entgegengesetzt iſt, ſo werden alle Seitenkräfte dadurch aufgehoben. Dieſe Eigenſchaft hat nur der Mittelpunkt der parallelen Kräfte.

116 Aufg. 158. An den beiden Enden einer Stange von 3^m Länge wirken parallele Kräfte von 87 und 57^{kg}; wie groß iſt die Reſultante und wo muß ſie angebracht werden? Aufl.: $R = 144^{kg}$; iſt der Abſtand der Reſultante von der erſten Kraft $= x$, alſo von der zweiten $= 3 - x$, ſo ergibt ſich $87 : 57 = 3 - x : x$ oder $144 : 57 = 3 : x$, woraus $x = 1^3/_{16}{}^m$. A. 159. An beiden Enden einer 4^m langen Stange wirken parallele Kräfte von 100 und 50^{kg}; wo iſt der Angriffspunkt der Reſultante? Aufl.: Die beiden Abſtände müſſen ſich wie 1 : 2 verhalten, ſind alſo $1^1/_3$ und $2^2/_3{}^m$. — A. 160. Welches ſind allgemein die beiden Theile a und b einer Stange von der Länge l, an deren Enden die parallelen Kräfte P und Q wirken? Aufl.: Nach der Methode in A. 158 iſt $a = l \, . \, Q / (P + Q)$ und $b = l P / (P + Q)$. A. 161. Das Hebelgeſetz mittels der Sätze in 115. zu beweiſen. Anl.: In dem Angriffspunkte der Reſultante bringt man eine der Reſultante gleiche, aber entgegengeſetzte Kraft an, nämlich die Feſtigkeit einer Stütze; dann muß Gleichgewicht ſtattfinden. — A. 162. Wo liegt die Reſultante zweier gleichen, parallelen, aber in entgegengeſetzter Richtung auf eine Linie wirkenden Kräfte? Aufl.: Nimmt man P poſitiv, ſo muß man Q negativ nehmen; es ſind dann die beiden Theile der Linie gleich $- Ql / (P - Q)$ und $Pl / (P - Q)$, welche Werthe für $P = Q$ unendlich groß ſind, während dann die Reſultante $P - Q$ ſelbſt $=$ Null iſt. Dieſes paradox erſcheinende Reſultat, daß die Reſultante Null im Unendlichen anzubringen ſei, bedeutet, daß ein Kräftepaar (couple), wie Poinſot zwei parallele, gleiche und entgegengeſetzte Kräfte nennt, keine Reſultante hat, alſo nicht durch eine einzige Kraft erſetzt oder aufgehoben werden kann. — A. 163. Zwei Arbeiter tragen an einer Stange 75^{kg}; der eine iſt zweimal ſo weit von der Laſt entfernt, wie der andere; wie viel hat jeder zu tragen? Aufl.: 25^{kg}; 50^{kg}. — A. 164. Zwei Leute tragen an einer Stange 90^{kg}; der eine ſoll nur 10, der andere 80^{kg} tragen; wie iſt dies einzurichten? Aufl.: Der letztere muß der Laſt 8 mal näher ſein als der erſtere; folglich muß die Laſt in $^1/_9$ der Stange bei dem letzten Arbeiter angehängt werden. — A. 165. Dieſelbe Aufgabe allgemein zu löſen. Aufl.: Die beiden Theile der Stange ſind Ql / R und Pl / R, wo $R = P + Q$. — A. 166. Die Laſt R iſt von beiden Enden um a und b entfernt; wie groß ſind P und Q? Aufl.: $P = bR / (a + b)$ und $Q = aR / (a + b)$. — A. 167. Die gewichtloſe Stange l (Fig. 46) iſt gegen eine Wand unter dem Winkel α geſtellt und trägt in den Abſtänden a und b von den beiden Enden die Laſt R. Welchen Druck übt dieſelbe gegen Wand und Boden aus, und mit welcher Schubkraft ſtrebt ſie an Wand und Boden hinzu-

Fig. 46.

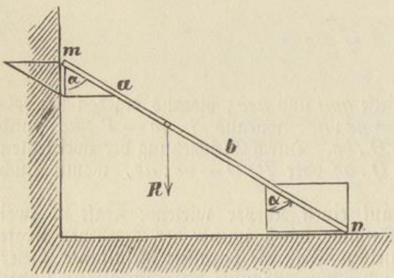
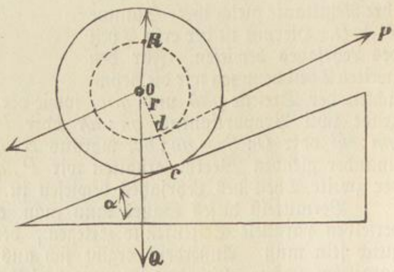


Fig. 47.



gleiten? Aufl.: Verticalſchub bei $m = bR / l$; Druck in der Stabrichtung bei $m = bR / l \cos \alpha$; Druck gegen die Wand bei $m = bR \operatorname{tang} \alpha / l$; Verticaldruck bei $n = bR \cos \alpha / l \cos \alpha + aR / l = R$; endlich Horizontalſchub bei n gleich dem Horizontaldruck bei $m = bR \operatorname{tang} \alpha / l$. — A. 168. Experiment von Komerell in Tübingen (1868). Um eine Walze r, die mit größeren Endſcheiben R (Fig. 47) auf einer ſchiefen Ebene liegt, iſt eine Schnur ſo gewunden, daß das freie Ende derſelben an der unteren Seite der Walze die ſchiefe Ebene hinaufgeht. Welche Kraft muß an dieſer Schnur wirken, um das Gewicht Q der Walze und die Reibung zu überwinden? Aufl.: Die parallele Componente von Q iſt $Q \sin \alpha$, die Reibung $f Q \cos \alpha$. Damit dieſe zwei parallelen nach unten wirkenden Kräfte durch die bei d nach oben wirkende Kraft im Gleichgewicht gehalten werden können, muß nach 115. ſein $od \, . \, Q \sin \alpha = cd \, . \, f Q \cos \alpha$, woraus $tg \, \alpha = f \, . \, cd / od = f (R - r) / r$. Wenn α dieſe Größe hat, und wenn $P = Q \sin \alpha + f Q \cos \alpha$, ſo findet Gleichgewicht ſtatt. Wenn dagegen α kleiner oder P größer wird, ſo rollt die Walze die ſchiefe Ebene hinauf, im umgekehrten Falle hinab. Dieſes Experiment iſt eine Abänderung des bekannten Joujou-Spieles.

Der Schwerpunkt. (Archimedes, 220 v. Chr.)

Von der Einwirkung vieler parallelen Kräfte auf einen Körper gibt uns die Natur selbst ein Beispiel, nämlich die Anziehung aller Atome eines Körpers durch die Erde. Diese anziehenden Kräfte sind bekanntlich alle nach dem Mittelpunkte der Erde gerichtet, weichen also bei den Körpern auf der Erdoberfläche so wenig von einander ab, daß man sie als parallel ansehen muß. Den Mittelpunkt aller dieser parallelen Schwerkräfte eines Körpers nennt man den Schwerpunkt. Dieser Punkt hat folgende Eigenschaften: 117

1. In dem Schwerpunkte eines Körpers kann man sich das ganze Gewicht desselben vereinigt denken. Denn die Wirkung aller Schwerkräfte ist nach dem 1. Satze über den Mittelpunkt paralleler Kräfte genau dieselbe, wie die Wirkung ihrer Resultante d. h. des Gewichtes, wenn man diese Resultante in ihrem Angriffspunkte d. i. im Schwerpunkte anbringt. — Will man daher das statische Moment eines Körpergewichtes finden, so muß man den Abstand des Schwerpunktes dieses Körpers in Rechnung ziehen. Der Schwerpunkt ist auch der Mittelpunkt anderer parallelen Kräfte; der Angriffspunkt der Resultante irgend welcher parallelen, gleichen und gleichmäßig vertheilten Kräfte ist daher in dem Schwerpunkte zu suchen.

2. Wird der Schwerpunkt eines Körpers unterstützt, so ruht der Körper; ist der Schwerpunkt nicht unterstützt, so fällt der Körper. Denn alle Schwerkräfte werden aufgehoben, oder das ganze Gewicht wird getragen, wenn in dem Mittelpunkte dieser Kräfte eine Kraft angebracht wird, welche der Resultante gleich und entgegengesetzt ist, nach dem 2. Satze über den Mittelpunkt paralleler Kräfte. Wenn demnach in dem Schwerpunkte die Festigkeit einer Stütze, welche ja nach dem fünften Axiom einen dem Gewichte gleichen Gegendruck ausübt, angebracht wird, so muß der Körper ruhen. Unterstützt ist der Schwerpunkt, wenn vertical über oder unter demselben eine feste Verbindung mit der Erde hergestellt ist, also auch, wenn ein durch denselben gehendes Loth noch in der Grundfläche des Körpers einmündet.

Experimentelle Nachweise für diese Sätze sind: Platten von verschiedenen Formen, die an ihren Schwerpunkten eine kleine Pfanne haben, mit der man sie auf Spitzen hängt. Die chinesischen Purzelmänner, der Mann mit der Säge, der schottische Dreher. Schiefe Körper wie die Thürme zu Pisa und Bologna, fallen nicht, wenn das durch den Schwerpunkt gehende Loth noch in der Grundfläche eintrifft. Beim Tragen von Lasten biegen wir uns so, daß der durch die Last verschobene Schwerpunkt wieder senkrecht über die von den Füßen begrenzte Stützfläche fällt. Ist ein anderer Punkt als der Schwerpunkt unterstützt, so dreht sich der letztere, bis er in der tiefsten Lage, senkrecht unter dem Stützpunkte ist: berganlaufender Kegel, berganlaufende Schachtel, Stehaufmännchen, falsche Würfel.

Bestimmung des Schwerpunktes. Der Bestimmungssatz des Schwerpunktes lautet: Das statische Moment des in dem Schwerpunkte vereinigt gedachten Körpergewichtes ist gleich der Summe der statischen Momente aller Gewichte der einzelnen Körpertheile in Bezug auf dieselbe Drehachse. Statt der Gewichte können in diesem Satze auch die Massen gesetzt werden, und da bei homogenen Körpern die Massen den Rauminhalten proportional sind, so können bei solchen Körpern die Volumina an die Stelle der Gewichte treten. 118

Beweis. Denken wir uns einen Körper um irgend eine Achse außerhalb seines Schwerpunktes gedreht, so beschreibt bei einer vollständigen Umdrehung jeder Punkt einen Kreis, dessen Radius die senkrechte Entfernung des Punktes von der Drehachse ist; der Weg aber, den jeder einzelne Punkt in der Richtung der hier in Rede stehenden Kraft, der Schwerkraft, also in lothrechter Richtung, zurücklegt, ist zweimal der Durchmesser dieses Kreises. Bezeichnen wir das im Schwerpunkt vereinigt gedachte ganze Körpergewicht mit P und den Abstand desselben von der Drehachse mit R, so ist die Arbeit des ganzen Körpergewichtes $= 4PR$; bezeichnen wir die Gewichte der einzelnen Massenpunkte oder auch der einzelnen Körpertheile mit p, p', p'' ...., und ihre Abstände oder auch die Abstände ihrer Schwerpunkte von der Drehachse mit r, r', r'' ...., so sind die Arbeiten der einzelnen Gewichte $4pr$, $4p'r'$, $4p''r''$ u. s. w. Nach der ersten Eigenschaft des Schwerpunktes ist aber die Wirkung, also auch die Arbeit des im Schwerpunkte vereinigt gedachten Gewichtes gleich der Summe der Wirkungen, also auch gleich der Summe der Arbeiten der Gewichte der einzelnen Körpertheile; folglich

$4PR = 4pr + 4p'r' + 4p''r'' + \ldots$ woraus $PR = pr + p'r' + p''r'' + \ldots$

Bekanntlich wird nun das Product einer Kraft mit dem Abstande ihres Angriffspunktes von einer Drehachse statisches Moment genannt; also sagt die letzte Gleichung aus, daß das statische Moment des ganzen im Schwerpunkte vereinigten Körpergewichtes gleich ist der Summe der statischen Momente der einzelnen Körpertheile. Für homogene Körpergewichte ergibt sich, indem wir einfach jedes einzelne p durch das specifische Gewicht dividiren

$$VR = vr + v'r' + v''r'' + \ldots$$

Nach diesem Satze wird die Lage des Schwerpunktes eines Körpers bestimmt, indem man eine beliebige Gerade als Drehachse annimmt und die statischen Momente der einzelnen Körpertheile in Bezug auf dieselbe aufsucht; da ein Körper aus unendlich vielen Molekülen besteht, so sind zur vollständigen Durchführung der Summirung aller dieser Momente die Mittel der Infinitesimalrechnung erforderlich; indessen sind in manchen Fällen nur die Momente einzelner Körpertheile zu summiren, wie die folgenden Aufgaben zeigen werden; diese Summe wird dann gleich dem Producte des ganzen Körpers mit dem unbekannten Abstande des Schwerpunktes von der Drehachse gesetzt, wodurch eine Gleichung entsteht, aus welcher dieser Abstand gefunden werden kann. — Dreht man einen Körper um eine beliebige Drehachse, so ändern sich weder sein Gewicht, noch die Abstände von der Drehachse; folglich bleibt auch die Lage des Schwerpunktes nach dem Bestimmungssatze dieselben: Die Lage des Schwerpunktes eines Körpers ist demnach unabhängig von der Lage des Körpers und nur bedingt von der Form desselben.

Aus dem Bestimmungssatze folgt auch die zweite Eigenschaft des Schwerpunktes. Wenn nämlich der Schwerpunkt in der Drehachse oder im Stützpunkte liegt, so ist der Abstand desselben von dem Stützpunkte, und demnach das Moment des ganzen Körpers gleich Null; folglich ist auch die zweite Seite der Gleichung, die Summe der statischen Momente aller Körpertheile gleich Null, d. h. es findet nach dem Hebelgesetze Gleichgewicht statt; der Körper ruht, wenn der Schwerpunkt unterstützt ist.

Diese Folgerung aus dem Bestimmungssatze gibt uns die Möglichkeit, für zahlreiche einfache Körper und dadurch nach dem Bestimmungssatze auch für weniger einfache Körper den Schwerpunkt mit den Mitteln der elementaren Mathematik zu bestimmen. Damit nämlich die Summe der statischen Momente eines im Schwerpunkte unterstützten Körpers gleich Null sei, muß zu jedem materiellen Punkte auf der einen Seite des Schwerpunktes ein genau gleich weit entfernter schwerer Punkt auf der anderen Seite vorhanden sein, der durch sein negatives statisches Moment das positive des ersten Punktes aufhebt; dies ist nur dann der Fall, wenn der Schwerpunkt genau in der Mitte liegt, wobei indeß die Homogenität überall vorausgesetzt werden muß; folglich liegen die Schwerpunkte der regelmäßigen Körper, der regelmäßigen schweren Flächen, der materiellen Linie in den Mittelpunkten. Die gerade Linie, der Kreis, die regelmäßigen Vielecke, die Kugel, die regelmäßigen Körper, die Ringe haben ihren Schwerpunkt in ihrem Mittelpunkte; Walzen, regelmäßige Prismen, Rotationskörper, die aus 2 gleichen Hälften bestehen, in der Mitte ihrer Achsen, Parallelogramme und Parallelepipeda im Schnitte ihrer Diagonalen. Der Schwerpunkt eines Dreiecks muß in jeder Transversalen liegen, weil jede Transversale eine Gegenseite und alle zu dieser parallelen Dreieckslinien halbirt; folglich liegt der Schwerpunkt eines Dreiecks im Schnittpunkte der Transversalen, welcher bekanntlich um $1/3$ der Transversalen von ihrem Fußpunkte entfernt ist.

119 Aufg. 169. Schwerpunkt einer Pyramide und eines Kegels. Zieht man in der dreiseitigen Pyramide (Fig. 48) die Transversalen cf und df zweier Seitenflächen, so liegen die Schwerpunkte dieser Dreiecke in den Punkten g und h, für welche $gf = 1/3\, cf$ und $hf = 1/3\, df$. Hierauf folgt, daß $gh \parallel cd$ ist. Der Schwerpunkt der Pyramide muß in der Linie dg liegen; denn diese Linie geht durch die Schwerpunkte aller zu abc parallelen Dreiecke, welche man sich bis zur Spitze hin immer kleiner werdend und die ganze Pyramide ausfüllend denken kann. Ebenso muß der gesuchte Schwerpunkt in der Geraden ch liegen. Diese zwei Geraden dg und ch müssen sich einander schneiden, weil sie sich in der Ebene des Dreiecks cfd befinden. Folglich muß der Schwerpunkt der Pyramide in dem Schnitte s dieser beiden Linien liegen. Es ergibt sich nun leicht aus der Aehnlichkeit der Dreiecke, daß $gs = 1/3\, sd$, also $= 1/4\, gd$ ist. Man findet demnach den Schwerpunkt einer dreiseitigen, wie auch jeder anderen Pyramide und jedes Kegels, indem man die Spitze mit

dem Schwerpunkte der Grundfläche verbindet und von dieser Strecke $1/4$ vom Fußpunkte aus abschneidet. — A. 170. **Schwerpunkt eines Pyramiden- und eines Kegelstumpfes.**

Fig. 48.

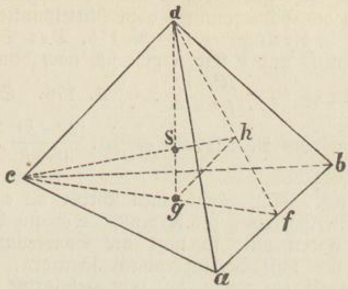
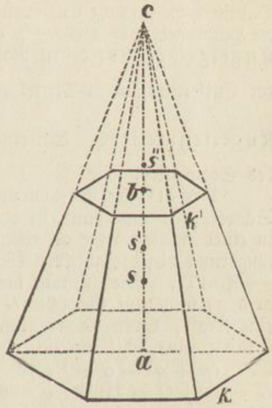


Fig. 49.



Denken wir uns durch den Schwerpunkt a der Grundfläche (Fig. 49) eine Drehachse gelegt, so muß die Summe der statischen Momente des Stumpfes und der Ergänzungsspitze nach dem Bestimmungssatze gleich dem statischen Moment der ganzen Pyramide sein. Sind g, g' und g'' die Volumina des Stumpfes, der ganzen Pyramide und der Spitze, und s, s' und s'' bezüglich die Schwerpunkte derselben, so muß demnach sein: $g \,.\, as + g'' \,.\, as'' = g' \,.\, as'$. Wenn wir nun zwei homologe Seiten der beiden Grundflächen mit k und k' bezeichnen, so ist $g'' = \frac{k'^3}{k^3}\, g'$ und $g = \left(1 - \frac{k'^3}{k^3}\right) g'$, woraus durch Substitution in die Bedingungsgleichung entsteht $\left(1 - \frac{k'^3}{k^3}\right) . as + \frac{k'^3}{k^3} . as'' = as'$. Setzen wir die Verbindungslinie der Schwerpunkte der beiden Grundflächen $ab = h$, und bedenken, daß $ac : bc = k : k'$ oder $ac - bc : bc = k - k' : k'$ oder $bc = \frac{hk'}{k-k'}$, so ergibt sich $as' = 1/4\, ac = 1/4 \left(h + \frac{hk'}{k-k'}\right) = 1/4 \,.\, \frac{hk}{k-k'}$ und $as'' = h + 1/4 \,.\, \frac{hk'}{k-k'} = \frac{h}{4} \,.\, \frac{4k-3k'}{k-k'}$. Wenn wir diese Werthe für as' und as'' in die Bedingungsgleichung substituiren, so entsteht nach einiger Rechnung

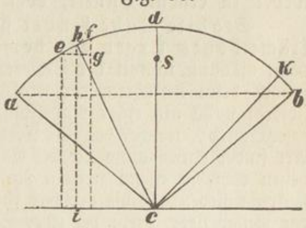
$$as = \frac{h}{4} \,.\, \frac{k^4 - 4kk'^3 + 3k'^4}{(k-k')(k^3-k'^3)} = \frac{h}{4} \,.\, \frac{k^2 + 2kk' + 3k'^2}{k^2 + kk' + k'^2}$$

Sind r und r' die Grundflächenradien eines Kegelstumpfes, so ist

$$as = \frac{h}{4} \,.\, \frac{r^2 + 2rr' + 3r'^2}{r^2 + rr' + r'^2}.$$

A. 171. **Schwerpunkt eines Kreisbogens.** Der Schwerpunkt des Bogens adb (Fig. 50) liegt auf dem mittleren Radius cd. Um die Entfernung cs desselben von dem Mittelpunkt c und der durch denselben gedachten Drehachse zu finden, benutzen wir den Bestimmungssatz.

Fig. 50.



Diesem gemäß muß, wenn α die Länge des Bogens ist, das Product $\alpha \,.\, cs$ gleich der Summe der Momente der einzelnen Bogen-Elemente sein. Das Moment des Bogen-Elementes ef ist $ef \,.\, hi$ oder $ch \,.\, eg = r \,.\, eg$ Daraus folgt, daß die Momentensumme $= r \,.\, ab$ ist, und daß daher die Gleichung stattfindet $\alpha \,.\, cs = r \,.\, ac$, woraus $cs = r \,.\, ab \,/\, \alpha$ oder $= rm/\alpha$, wenn wir die Sehne ab mit m bezeichnen. — A. 172. **Schwerpunkt eines Kreissectors.** Weil ein kleiner Theil bck des Sectors sich als ein Dreieck ansehen läßt, so fällt der Schwerpunkt des Sectors mit dem eines Bogens zusammen, dessen Radius $= 2/3\, r$ ist. Dieser Bogen ist $2/3\, \alpha$ und seine Sehne $2/3\, m$; folglich ist die Entfernung des Schwerpunktes $= 2/3 \,.\, rm/\alpha$. Für den Halbkreis ist dies $4r/3\pi$, für den ganzen $= 0$. — A. 173. **Schwerpunkt eines Segmentes.** Ist der Inhalt des Segmentes $= S$, so findet man durch Benutzung des Bestimmungssatzes und der bekannten Thatsache, daß ein Sector die Summe eines Segmentes und eines Dreiecks ist, den Abstand des Schwerpunktes vom Mittelpunkte $= m^3 / 12S$. — A. 174. **Schwerpunkt eines Kugelsectors.** Da man einen Kugelsector in lauter pyramidalische Elemente zerlegen kann, und da der Abstand des Schwerpunktes eines solchen von der Spitze

$= {}^3/_4\, r$ ist, so fällt der Schwerpunkt des Kugelsectors mit dem einer Kugelhaube von ${}^3/_4$ Radius zusammen. Ist nun die Höhe der die Grundfläche des Sectors bildenden Haube $= h$, so ist die Höhe dieser Schwerpunktshaube $= {}^3/_4\, h$. Der Schwerpunkt einer Haube liegt aber, wie der jeder Zone, in der Mitte ihrer Höhe, folglich um ${}^3/_8\, h$ von ihrem Scheitel entfernt. Daher ist die gesuchte Entfernung des Schwerpunktes vom Mittelpunkte $= {}^3/_4\, r - {}^3/_8\, h$. Für die Halbkugel wird dies $= {}^3/_8\, r$, für die Kugel $= 0$. — A. 175. Der Schwerpunkt eines Kugelgewölbes, dessen Radien R und r sind, ergibt sich nach dem Bestimmungssatze in der Entfernung vom Mittelpunkte $= {}^3/_8 \cdot \frac{R^4 - r^4}{R^3 - r^3}$. — A. 176. Schwerpunkt eines Kugelsegmentes. Entfernung vom Mittelpunkte $= {}^3/_4 \cdot \frac{(2r-h)^2}{3r-h}$, worin h die Höhe des Segmentes.

Practische Bestimmung. Man hängt einen Körper an einem Faden auf; der Schwerpunkt liegt dann in der Verlängerung des Fadens. Sodann hängt man den Körper in einer zweiten Lage an einem Faden auf, so liegt der Schwerpunkt auch in der Verlängerung dieses Fadens. Wo sich diese Verlängerungen schneiden, ist der Schwerpunkt. — A. 177. Wie groß ist die Kraft P, welche an dem Hebelarme p der Last Q (Hebelarm q) und dem Gewichte G des Hebels das Gleichgewicht hält? Aufl.: Das Gewicht ist eine Kraft, deren Angriffspunkt im Schwerpunkte liegt; dieser hat für eine gleichförmige Stange seine Lage im Mittelpunkte; folglich ist der Hebelarm dieser Kraft des Gewichtes $= {}^1/_2\,(p+q) - q = {}^1/_2\,(p-q)$; hieraus folgt $P = {}^1/p\,[Qq + {}^1/_2\, G\,(p-q)]$. — A. 178. $G = 2^{kg}$; $Q = 240^{kg}$; $q = 0{,}02^{m}$; $p = 0{,}2^{m}$; wie groß ist die Kraft P? Aufl.: $P = 24{,}9^{kg}$. Ohne das Gewicht wäre $P = 24^{kg}$, also hat das Gewicht des Hebels meist wenig Einfluß. — A. 179. Wie groß ist der Druck auf den Stützpunkt des Hebels? Aufl.: Der Stützpunkt muß der Angriffspunkt der Resultante sein; folglich der Druck $D = P + Q + G$. — A. 180. Was wiegt ein Hebel von 4^{m} Länge, dessen Gewicht durch 12^{kg}, die in einer Entfernung von 60^{cm} vom Stützpunkte an einem Ende aufgehängt sind, im Gleichgewichte gehalten wird? Aufl.: $0{,}6 \cdot 12 = 1{,}4x$, woraus $x = 5^1/_7{}^{kg}$. — A. 181. Ein Sicherheitsventil ist ein einarmiger Hebel (50^{cm} lang), der in der Nähe des Stützpunktes (5^{cm} entfernt) einen die Oeffnung des Dampfkessels verschließenden Kegel und am anderen Ende ein Gewicht trägt; wie groß muß dieses Gewicht sein, wenn die Spannung des Dampfes nicht über 6^{at} (à $1{,}03^{kg}$ auf den qcm) gehen soll, wenn das Ventil selbst $0{,}3^{kg}$ und der Hebel $1{,}2^{kg}$ wiegt, und wenn die Unterfläche des Ventils selbst 3^{qcm} groß ist? Aufl.: $P \cdot 50 + 1{,}2 \cdot 25 + 0{,}3 \cdot 5 = 1{,}03 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 5$.; hieraus $P = 1{,}224^{kg}$.

120 **Die Arten des Gleichgewichtes oder der Ruhe.** Ein Körper ist in Ruhe, wenn sein Schwerpunkt unterstützt ist. Es gibt drei Arten von Ruhe: stabile labile und indifferente Ruhe. Ein Körper ist in stabiler Ruhe, wenn er nach jeder Veränderung seiner Lage wieder in dieselbe zurückkehrt. Ein Körper ist in labiler Ruhe, wenn er nach einer Veränderung seiner Lage nicht wieder in dieselbe, sondern in eine ganz andere Lage übergeht. Ein Körper ist in indifferenter Ruhe, wenn er in jeder veränderten Lage in Ruhe bleibt. Die drei Arten von Ruhe hängen von der Art der Unterstützung ab. Die Unterstützung kann entweder in einem Punkte, oder in einer Linie oder in einer Fläche stattfinden.

Stabile Ruhe findet statt, wenn Stützpunkt, Stützlinie oder Stützfläche höher liegen als der Schwerpunkt, wenn also der Körper aufgehängt ist; denn alsdann nimmt der Schwerpunkt bei jeder Lagenänderung eine höhere Stelle ein, muß sonach beim Aufhören der Kraftwirkung in die frühere Lage zurückkehren. Eine Münze schwebt stabil auf einer Nadelspitze, wenn auf dieselbe ein Kork mit durchgesteckten Gabeln gesetzt wird, welche den Schwerpunkt unter die Spitze bringen. Die stabile Ruhe dieser Art findet Anwendung bei der Cardanischen oder Schiffslampe; sie hängt in einem Ringe, dessen Achse in einem zweiten Ringe liegt, der ebenfalls um eine wagrechte auf der vorigen senkrecht stehende Achse drehbar ist; das Gewicht der Lampe, welches größtentheils unterhalb der Ringe liegt, dreht bei jeder Schwankung des Schiffes die Ringe der Art, daß die Lampe immer aufrecht hängt. Stabile Ruhe findet auch noch, aber in geringerem Maße statt, wenn die Stützfläche tiefer liegt als der Schwerpunkt. Die Stabilität eines so unterstützten Körpers wächst offenbar mit der Arbeit, welche gerade im Stande ist, den Körper umzukanten. Diese Arbeit, also auch die Stabilität, ist um so größer, je größer das Gewicht des Körpers ist, je tiefer der Schwerpunkt desselben liegt, und je größer seine Grundfläche ist; denn je tiefer der Schwerpunkt liegt, desto größer ist der Winkel, den der Schwerpunkt zurücklegen muß, um über die Stützkante hinauszukommen, desto größer ist also auch die Arbeit; und je größer die Grundfläche ist, desto größer ist der Radius des Bogens, den hierbei der Schwerpunkt zurücklegen muß, desto größer ist also auch hier die Arbeit: endlich wächst die Arbeit mit dem zu hebenden Gewichte. Pyramiden besitzen demnach eine große Stabilität. Säulen von Holz fallen leichter um als solche von Stein. Wagen, Kähne u. s. w. schlagen leichter um, wenn sie hoch geladen sind, oder wenn man sich aufrecht in dieselben stellt. Die Fußgestelle hoher Gegenstände werden mit Blei ausgegossen, beim Beladen werden die schwersten Gegenstände zu unterst gelegt. Die Menschen stehen weniger stabil als die Thiere, lernen daher schwerer gehen, müssen sich beim Gehen fortwährend balanciren und fallen beim geringsten Schwanken des Bewußtseins um.

Labile Ruhe findet statt, wenn Stützpunkt oder Stützlinie oder eine sehr kleine Stützfläche tiefer liegen als der Schwerpunkt; denn alsdann nimmt bei jeder Lagenänderung der Schwerpunkt eine tiefere Stellung ein; er kann demnach beim Aufhören der Kraftwirkung nicht in die ursprüngliche höhere Lage zurückkehren, sondern muß in die tiefstmögliche Lage übergehen. Es kann folglich der Körper nur vor dem Fallen geschützt oder balancirt werden, wenn man mit dem Stützpunkte stets wieder unter den ausgewichenen Schwerpunkt zu gelangen sucht. Dieses Balanciren gelingt um so besser, je schwerer der Körper ist, und je höher sein Schwerpunkt liegt; es gelingt auch leichter, wenn der Körper rotirt, weil dann der Schwerpunkt meist eine Fläche beschreibt, welche leichter zu unterfangen ist als ein bloser Punkt, und weil ein rotirender Körper ein gewisses Beharrungsvermögen besitzt. Diese Verhältnisse benutzen Gaukler und Seiltänzer.

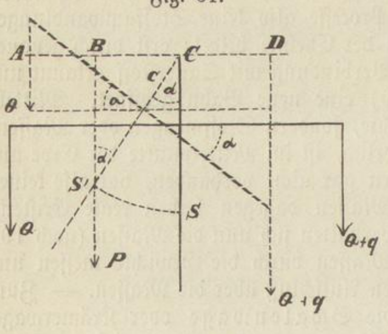
Indifferente Ruhe findet statt, wenn der Schwerpunkt und der Stützpunkt zusammenfallen, wie dies bei den Rädern der Fall ist; oder wenn der Körper eine solche Form hat, daß trotz jeder Drehung der Schwerpunkt immer senkrecht über dem Stützpunkte liegt, wie dies bei Kugeln, bei auf dem Mantel ruhenden Walzen und Kegeln der Fall ist. Die Kraft zur Lagenveränderung ist hier gewöhnlich außerordentlich klein, weil das statische Moment des Körpergewichtes gleich Null ist.

Die Wage. Das wichtigste Werkzeug für den Physiker, noch mehr aber für 121
den Chemiker ist die Wage; erst durch die Anwendung feiner Wagen ergab sich, daß eine gewisse Stoffmenge oder Masse durch viele Aenderungen hindurch immer genau dieselbe bleibt, daß die chemischen Processe also keine Stoffumwandlungen sind, ein Satz, welcher die Grundwahrheit der Chemie bildet; erst durch genaues Wägen wurde die Verbrennung als eine Verbindung mit Sauerstoff erkannt und hiermit der Chemie durch Lavoisier (1770) eine neue Bahn geöffnet. Mittels der Wage mißt man nicht eigentlich Gewichte, sondern Stoffmengen oder Massen; denn das Gewicht eines Körpers ist veränderlich, ist im Mittelpunkte der Erde und an gewissen Stellen zwischen den Weltkörpern gar nicht vorhanden, hat also keinen wirklichen Bestand; die unveränderlichen Massen dagegen haben reale Existenz. An einem und demselben Orte der Erde verhalten sich nun die Massen (nach 19.) wie die Gewichte; folglich kann man die Massen durch die Gewichte messen und vergleichen. Demnach geben uns die Wagen Aufschluß über die Massen. — Zum Messen nicht zu großer Gewichte dient die Schalenwage oder Krämerwage. Sie ist ein gleicharmiger Hebel, Wagbalken genannt, der an beiden Enden Wagschalen trägt; folglich ist bei der Schalenwage Gleichgewicht, wenn die Meßgewichte dem Gewichte der Last gleich sind. Dieses Gleichgewicht besteht darin, daß der Wagbalken horizontal hängt, was man daran erkennt, daß die auf dem Wagbalken senkrecht stehende Zunge auf eine Marke oder auf den Nullpunkt einer Skale einspielt. Demnach müssen an eine gute Wage folgende drei Anforderungen gestellt werden: 1. Sie muß im unbelasteten oder gleichbelasteten Zustande mit Stabilität wagrecht hängen; dies ist nach 120. der Fall, wenn der Schwerpunkt des Wagbalkens unter dem Stützpunkte liegt. 2. Sie muß richtig sein, d. h. die Meßgewichte müssen wirklich das Gewicht der Last angeben; dies ist der Fall, wenn die 2 Hälften des Wagbalkens gleiche Länge und gleiche statische Momente haben, d. h. sowohl nach Form, als Gewicht einander gleich sind, und wenn auch die 2 Wagschalen mit den Ketten oder Schnüren gleich viel wiegen. 3. Sie muß empfindlich sein, d. h. die Zunge muß schon bei einem sehr kleinen Uebergewichte auf der einen Seite einen großen Ausschlag geben. Man mißt die

Empfindlichkeit durch denjenigen Theil des Gewichtes, welcher noch einen Ausschlag hervorbringt, und verlangt für die physikalischen Wagen eine Empfindlichkeit von $^1/_{60\,000}$. Die Empfindlichkeit einer Wage ist um so größer, a. je näher der Schwerpunkt dem Stützpunkte liegt. Denn würde der Schwerpunkt in den Stützpunkt fallen, so wäre indifferentes Gleichgewicht, und das geringste Uebergewicht müßte den Wagbalken zum verticalen Umschlagen bringen; eine solche Wage wäre demnach übertrieben empfindlich und würde der ersten Bedingung nicht genügen; liegt aber der Schwerpunkt möglichst nahe unter dem Drehpunkte, so ist die stabile Lage gewahrt und die Empfindlichkeit möglichst groß gemacht, weil dann der Schwerpunkt beim Ausschlagen den kleinsten Bogen beschreibt, und demnach das Uebergewicht die kleinste Arbeit zu vollbringen hat. b. Je länger der Wagbalken ist; denn das den Ausschlag erzeugende Uebergewicht kann um so kräftiger wirken, an je längerem Hebelarme es wirkt. c. Je leichter der Wagbalken und die Wagschalen sind; denn je geringer die Masse ist, welche durch das Uebergewicht bewegt werden soll, desto größer kann der Ausschlagweg sein, den die Masse zurücklegt. d. Je geringer die Widerstände sind. Deßhalb ist bei feinen Wagen die Drehachse von Stahl und ruht mittels einer scharfen Schneide auf Stahl oder Achat, deßhalb sind auch die Aufhängehaken mit stählernen Schneiden versehen; deßhalb wird mittels eines von außen drehbaren Rädchens, das eine Stange und zwei daran befestigte Arme hebt, der Wagbalken nach dem Gebrauche aus seinem Stützpunkte gehoben.

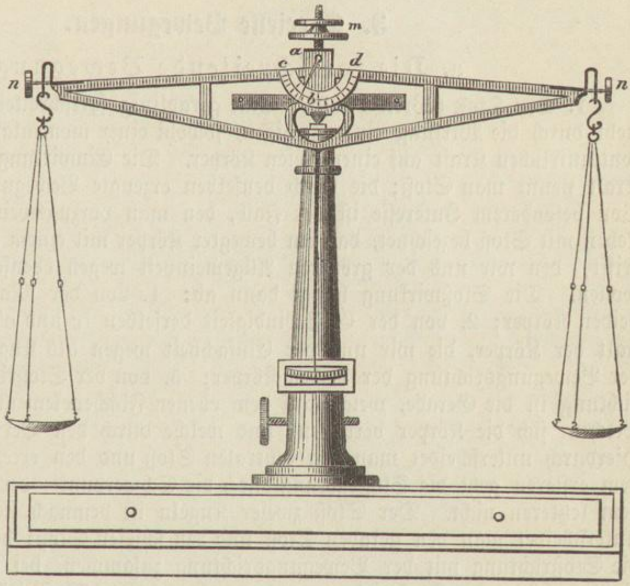
122 Aufg. 182. Die Bedingungen der Empfindlichkeit mathematisch aufzufinden. Aufl.: Es bezeichne P das Gewicht des Wagbalkens, a die halbe Länge desselben, b den Abstand des Schwerpunktes S vom Stützpunkte C (Fig. 51), c den Abstand der Verbindungslinie der beiden Aufhängepunkte von dem Stützpunkte, Q die beiderseits gleiche Last. Wird nun das Uebergewicht q auf die eine Schale gelegt, so nimmt die Zunge CS durch dieses Uebergewicht die Lage CS' an und legt demnach den Ausschlagwinkel α zurück. Nach dem Hebelgesetze ist dann die Bedingung des Gleichgewichtes $(Q+q)\, CD = Q\,.\,AC + P\,.\,BC$ oder $(Q+q)\,(a \cos \alpha - c \sin \alpha) = Q\,(a \cos \alpha + c \sin \alpha) + Pb \sin \alpha$, woraus $\tan \alpha = aq/(bP + c\,(2Q+q))$. Die Bedingungen, unter welchen dieser Bruch seinen größten Werth erhält, sind auch die Bedingungen der Empfindlichkeit. — A. 183. Wie prüft man die Richtigkeit einer Wage? Antw.: Durch Vertauschung zweier Gleichgewicht herstellenden Massen. — A. 184. Wie kann man mit einer unrichtigen Wage richtig wägen? Antw.: Man tarirt den Körper durch Schrot oder Sand und ersetzt ihn dann durch Gewichte (Bordas Doppelwägung). — A. 185. Auf der Weltausstellung von 1867 hatte Horn aus Berlin eine Wage ausgestellt, die bei 1^{kg} Belastung noch $0{,}1^{mg}$ angab, und Sacré aus Brüssel eine große Präcisionswage für 5^{kg} Belastung, die noch bei $0{,}5^{mg}$ Uebergewicht einen Ausschlag gab. Welches war die Empfindlichkeit dieser Wagen? Aufl.: $^1/_{10\,000\,000}$. — A. 186. Wie groß ist die Empfindlichkeit der neuen balance d'essai, die bei 5^{cg} Beschwerung noch $0{,}0001^{mg}$ Unterschied angibt, und was ist trotz geringerer Empfindlichkeit an dieser Wage bewundernswerth? — A. 187. Die letzte Genauigkeit erzielte man früher durch einen Reiter aus feinstem Platindraht (nach Berzelius), der auf verschiedene Stellen des graduirten Wagbalkens gesetzt wurde. Auf der Pariser Ausstellung von 1867 hatte statt dessen der Präcisionsbogen (nach Gallois) vielfache Aufnahme gefunden. In der Mitte des Wagbalkens ist ein drehbares Stäbchen ab (Fig. 52) angebracht, das je nach seiner Stellung einen verschiedenen Gewichtswerth angibt, welcher auf dem Präcisionsbogen cd abzulesen ist. Welchen Vorzug hat diese Einrichtung? Wozu dienen die schweren Eisenplatten, welche jetzt das Fundament der feinen französischen Wagen bilden? — A. 188. Welchen Zweck haben die Schrauben m und n (Fig. 52)? Antw.: m dient zur Veränderung des Schwerpunktes und n zu Correcturen der Länge. Der Lernende suche alle diese Antworten zu begründen.

Fig. 51.



Zum raschen Wägen kleiner Lasten dient die Zeigerwage; dieselbe ist ein Winkel- 123
hebel, dessen einer Arm die Schale trägt, während der andere ein Gegengewicht bildet und den Zeiger trägt, der auf einer empirisch bestimmten Skale das Gewicht anzeigt. Zum raschen Wägen mittlerer Lasten z. B. im Hausgebrauche dient die Familienwage (s. 25.), wie auch häufig kleinere Federwagen als Briefwagen benutzt werden. Zum raschen Wägen großer Lasten dient die Schnellwage, ein ungleicharmiger eiserner Hebel; an dem kurzen Arme hängt die Last, an dem langen wird ein bekanntes Laufgewicht verschoben. Gleichgewicht findet statt, wenn sich die Entfernung des Laufgewichtes vom Nullpunkte zu derjenigen der Last vom Drehpunkt verhält wie die Last zum Laufgewichte. Hieraus könnte man die Last leicht berechnen; doch steht dieselbe gewöhnlich an den eingekerbten Theilstrichen des Hebels angemerkt. Bequemer und genauer sind die Brückenwagen, von welchen die Decimalwage für größere und die Centesimal- oder Mauthwage für sehr große Lasten benutzt wird.

Fig. 52.



Bei der Decimalwage ruht die Last auf einer Brücke *ab* (Fig. 53), welche an einem Ende mittels einer Stange an demjenigen Punkte *c* des Wagbalkens hängt, der dem Stützpunkte 10mal näher ist als die Wagschale, und den wir deßwegen Zehntelspunkt nennen wollen. Mit dem anderen Ende ruht die Brücke auf einem einarmigen Hebel *df*, welcher mittels einer Stange ebenfalls an den Wagbalken gehängt ist, und zwar an einen solchen Punkt *g* desselben, daß die beiden Stücke *gc* und *mc* dieses Wagbalkenarmes sich gerade so zu einander verhalten, wie die beiden Stücke des Traghebels der Brücke. Hiernach wird die auf der Brücke ruhende Last von den Punkten *a* und *b* getragen; der auf *a* wirkende Lasttheil wirkt direct auf den Zehntelspunkt *c*; der auf *b* wirkende Lasttheil wirkt indirect durch die Hebel *df* und *gm* auf diesen Punkt, aber in seiner vollen ungeänderten Größe, weil die Theilung dieser 2 Hebel dieselbe ist, und daher dieser Lasttheil durch den einen ebenso viel vergrößert, als durch den anderen verkleinert wird. Folglich ist die ganze Einrichtung gerade so, als ob die ganze Last an dem Zehntelspunkte *c* hinge; demnach wird dieselbe durch ein Zehntel ihres Gewichtes balancirt.

Fig. 53.

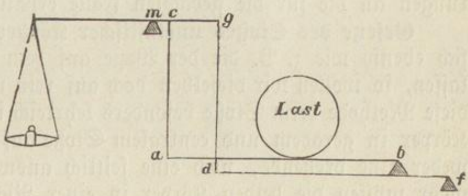
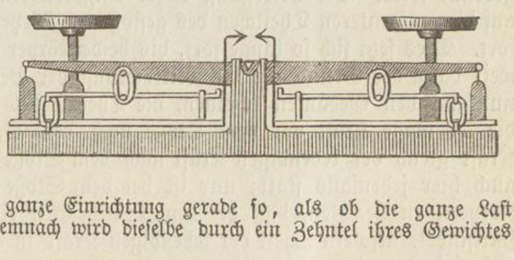


Fig. 54.



Zum raschen und bequemen, aber weniger genauen Abwiegen gewöhnlicher Lasten hat in letzter Zeit die Tafelwage (Fig. 54) viele Verbreitung gefunden. Dieselbe beruht auf dem von Roberval gefundenen statischen Paradoxon, das aber nur ein scheinbares Paradoxon ist, weil die gleichen Lasten zwar scheinbar ungleich weit vom Stützpunkte entfernt sein können, in Wirklichkeit aber auf gleich weit entfernte Punkte wirken.

3. Specielle Bewegungen.

a. Die fortschreitende Bewegung.

124 **1. Der Stoß** (Wren 1669). Eine geradlinig fortschreitende Bewegung entsteht durch die Wirkung einer einzigen, sowohl einer momentanen, als auch einer continuirlichen Kraft auf einen freien Körper. Die Einwirkung einer momentanen Kraft nennt man Stoß; die durch denselben erzeugte Bewegung ist gleichförmig. Von besonderem Interesse ist der Fall, den man vorzugsweise im gewöhnlichen Leben mit Stoß bezeichnet, daß ein bewegter Körper mit einem anderen zusammentrifft, den wir uns der größeren Allgemeinheit wegen ebenfalls bewegt denken wollen. Die Stoßwirkung hängt dann ab: 1. von der Masse (m und m') der beiden Körper; 2. von der Geschwindigkeit derselben (c und c'); 3. von der Gestalt der Körper, die wir uns der Einfachheit wegen als Kugel denken; 4. von der Bewegungsrichtung der beiden Körper; 5. von der Stoßrichtung. Die Stoßrichtung ist die Gerade, welche auf dem ebenen Flächenelement senkrecht steht, in welchem sich die Körper berühren, und welche durch den Berührungspunkt geht. Hierdurch unterscheidet man den centralen Stoß und den excentrischen Stoß; bei dem ersteren geht die Stoßrichtung durch die Schwerpunkte der beiden Körper, bei dem letzteren nicht. Der Stoß zweier Kugeln ist demnach stets central. Dann unterscheidet man den geraden Stoß und den schiefen Stoß; bei dem ersteren fällt die Stoßrichtung mit der Bewegungsrichtung zusammen, bei dem letzteren nicht. Endlich hängt die Stoßwirkung noch 6. ab von der Elasticität der Körper. Es gibt zwar weder vollkommen unelastische, noch über jede Grenze hinaus vollkommen elastische Körper; doch läßt sich gerade für diese zwei äußersten, nur gedachten Fälle die Stoßerscheinung leichter untersuchen; die Fälle der Wirklichkeit sind Annäherungen an die für die gedachten Fälle erhaltenen Resultate.

125 **Gesetze des Stoßes unelastischer Körper.** Obwohl die Gesetze des Stoßes sich ebenso wie z. B. die der Wage auf dem Wege logischer Folgerung gewinnen lassen, so wollen wir dieselben doch auf rein mathematischem Wege ableiten, weil diese Methode beim Stoße besonders lehrreich ist. Zunächst mögen zwei unelastische Körper in geradem und centralem Stoße auf einander treffen. Es kann alsdann weder eine drehende, noch eine seitlich ausweichende Bewegung entstehen; vielmehr müssen die beiden Körper in einer Richtung und mit einer und derselben Geschwindigkeit weiter gehen. Denn der schnellere Körper theilt den nächsten Theilchen des anderen Körpers etwas von seiner Bewegung mit, so daß er selbst etwas langsamer gehen muß, der getroffene aber an der Berührungsstelle etwas platt gedrückt wird. Die Bewegung dieser eingedrückten Theilchen pflanzt sich allmälig auf die entfernteren Theilchen des gestoßenen Körpers und dadurch auf den Körper fort. Dies setzt sich so lange fort, bis beide Körper gleiche Geschwindigkeiten haben, weil dann der Grund für die Mittheilung der Bewegung wegfällt. Man könnte nun auf den Gedanken kommen, die Theorie des Stoßes darauf zu gründen, daß die lebendige Kraft vor dem Stoße nach dem Princip von der Erhaltung der Kraft gleich der lebendigen Kraft nach dem Stoße sein müsse; das Princip findet auch hier jedenfalls statt; nur ist bei dem Stoße von nicht vollkommen elastischen Körpern zu beachten, daß bei dem Plattdrücken eine Lagenänderung der Moleküle stattfindet, also ein Theil der lebendigen Kraft in Spannkraft umgesetzt wird, und daß diese Formänderung nicht ohne eine Verstärkung der molekularen Schwingungen,

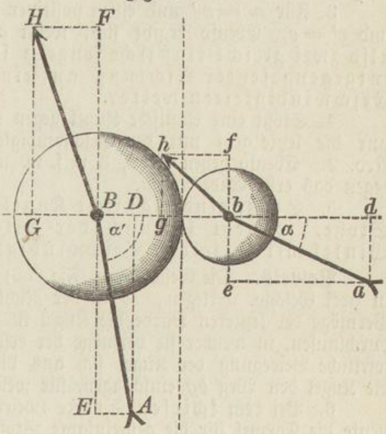
ohne eine Temperaturerhöhung, geschehen kann, daß also jedenfalls ein Theil der lebendigen Kraft nicht am Stoße betheiligt ist. Hiernach kann die lebendige Kraft nicht für die Erforschung des Stoßes benutzt werden, wohl aber der von derselben ausgeübte Druck; denn während des Stoßes ist nach dem fünften Axiom der zwischen beiden Körpern stattfindende Druck nach beiden Seiten gleich groß; folglich hängt die Geschwindigkeitsänderung der Körper nur von der Masse derselben ab; die größere Masse muß die kleinere Aenderung und die kleinere Masse die größere Aenderung erfahren, weil bei gleichen Kräften (nach 19.) die erzeugten Geschwindigkeiten sich umgekehrt wie die Massen verhalten. Ist nun die unbekannte gemeinsame Geschwindigkeit nach dem Stoße $= x$, so ist der Verlust der schnelleren Kugel $c - x$ und der Gewinn der langsameren $x - c'$; daher entsteht die Proportion $m : m' = (x - c') : (c - x)$, woraus sich ergibt $x = \frac{mc + m'c'}{m + m'}$ . . **(18)**

Discussion dieser Formel. 1. Ist der gestoßene Körper in Ruhe, also $c' = 0$, so fällt das Glied $m'c'$ weg; wenn nun gegen eine feste Wand gestoßen wird, so ist m' gegen m unendlich, also $x = mc / \infty = 0$. Stößt ein unelastischer Körper gegen eine feste Wand, so ruht er nach dem Stoße.

2. Ist die gestoßene ruhende Kugel $m' = m$, so ist $x = \frac{1}{2} c$. Stößt eine unelastische Kugel gegen eine ruhende von gleicher Größe, so gehen beide mit der halben Geschwindigkeit der stoßenden weiter.

3. Für $m = m'$ ist $x = \frac{1}{2}(c + c')$. Stoßen zwei gleiche unelastische Kugeln nach einer Richtung zusammen, so erhalten sie die halbe Summe der Geschwindigkeiten.

Fig. 55.



4. Bei entgegengesetzter Richtung muß c' negativ gesetzt werden, wenn c positiv ist; dann ist $x = \frac{1}{2}(c - c')$. Stoßen zwei gleiche unelastische Kugeln in entgegengesetzter Richtung auf einander, so erhalten sie die halbe Differenz der Geschwindigkeiten.

5. Stoßen zwei unelastische Kugeln in schiefem Stoße zusammen, so kommen nur diejenigen Componenten der Geschwindigkeiten zur Wirkung, welche in die Stoßrichtung, hier in die Richtung der Centrallinie Bb (Fig. 55) fallen, während die tangentialen Componenten theils Reibung der platt gedrückten Stellen und hierdurch Rotation bewirken, theils die Kugeln in der tangentialen Richtung weiter treiben. Sind die Winkel, welche die 2 Bewegungsrichtungen mit der Stoßrichtung einschließen, mit α und α' bezeichnet, so sind die tangentialen Componenten $be = c \sin \alpha$ und $BE = c' \sin \alpha'$, während die centralen Componenten $bd = c \cos \alpha$ und $BD = c' \cos \alpha'$ sind; vermöge der letzteren entsteht nach Fl. 18 die gemeinsame Stoßgeschwindigkeit

$$x = \frac{mc \cos \alpha + m'c' \cos \alpha'}{m + m'}.$$

Mit dieser componirt sich nach dem Stoße in der Kugel m die tangentiale Geschwindigkeit $bf = c \sin \alpha$ zu der Geschwindigkeit bh, ebenso wie in der Kugel m' durch Vereinigung der gemeinsamen centralen Geschw. x mit der tangentialen BF die Geschw. BH entsteht, welche leicht nach dem Parallelogramm der Kräfte zu berechnen sind.

Aufg. 189. Wie erklärt sich der scheinbare Widerspruch in dem ersten Satze mit dem Gesetze von der Erhaltung der Kraft? — A. 190. Wie groß ist der Verlust an lebendiger Kraft, der bei dem Stoße unelastischer Körper durch die bleibende Zusammendrückung derselben und die Fortpflanzung der Erschütterungen in die Erde stattfindet. Aufl.: Vor dem Stoße ist die lebendige Kraft $= \frac{1}{2} mc^2 + \frac{1}{2} m'c'^2$, nach dem Stoße $= \frac{1}{2}(m + m') x^2$; daher der Verlust $= \frac{1}{2} mc^2 + \frac{1}{2} m'c'^2 - \frac{1}{2}(m + m')x^2$. Durch Substitution des Werthes für x wird derselbe $= mm'(c - c')^2 / 2(m + m')$. — A. 191. Zwei Körper von 100g und 200g stoßen mit 50 und 20cm Geschw. auf einander; welches ist ihre gemeinsame Geschw. nach dem Stoße? Aufl.: $x = 30^{cm}$.

126 **Gesetze des Stoßes elastischer Körper.** Auch hier betrachten wir zuerst den geraden, centralen Stoß. Der treffende Körper verliert, weil er den nächsten Theil des getroffenen Körpers eindrückt, von seiner Geschwindigkeit den Betrag $c - x$; da aber diese eingedrückten Theilchen mit derselben Kraft zurückkehren, wenn der Körper vollkommen elastisch ist, so üben sie denselben Rückstoß aus, der auf sie ausgeübt wurde, so daß der treffende Körper dieselbe Geschwindigkeit noch einmal verliert; folglich ist seine Geschwindigkeit nach dem Stoße $v = c - 2(c - x) = 2x - c$. Ganz ebenso ergibt sich für den getroffenen Körper $v' = c' + 2(x - c') = 2x - c'$. Setzen wir den Werth für x aus Formel (18) hier ein, so erhalten wir $v = \dfrac{(m - m')c + 2m'c'}{m + m'}$ und $v' = \dfrac{(m' - m)c' + 2mc}{m + m'}$

Discussion dieser Formeln. 1. Ist der gestoßene Körper in Ruhe, also $c' = 0$, und ist $m' = \infty$, so ergibt sich $v' = 0$ und $v = -c$. *Stößt eine elastische Kugel in geradem Stoße gegen eine elastische Wand, so kehrt sie mit derselben Geschwindigkeit in entgegengesetzter Richtung zurück.*

2. Ist die gestoßene Kugel $m' = m$ und in Ruhe, so ergibt sich $v = 0$ und $v' = c$. *Stößt eine elastische Kugel in geradem Stoße gegen eine gleiche ruhende, so ruht die stoßende, und die gestoßene geht mit der Geschwindigkeit der stoßenden weiter.*

3. Für $m = m'$ und einen positiven Werth beider Geschwindigkeiten ergibt sich $v = c'$ und $v' = c$. Ebenso ergibt sich, wenn c negativ ist, $v = -c'$ und $v' = c$. *Stoßen also zwei gleiche elastische Kugeln in geradem Stoße in derselben oder in entgegengesetzter Richtung auf einander, so gehen sie mit vertauschten Geschwindigkeiten weiter.*

4. Stößt eine elastische Kugel gegen eine Reihe von elastischen Kugeln, so ruhen alle, nur die letzte geht mit der Geschwindigkeit der stoßenden weiter. Dies folgt einfach aus Nro. 2. Ebenso gehen die 2, 3 u. s. w. letzten Kugeln weiter, wenn 2, 3 u. s. w. Kugeln gegen das erste Ende stoßen.

5. *Stößt eine elastische Kugel gegen eine elastische Wand in schiefem Stoße, so geht sie nach der entgegengesetzten Seite unter demselben Winkel mit derselben Geschwindigkeit zurück.*

Beweis. Die Geschw. ab (Fig. 56) kann man nach dem Parallelogramm der Kräfte in zwei Geschw. zerlegen, cb in der Richtung der Wand und db senkrecht zu derselben. Vermöge der letzteren würde die Kugel in derselben Zeit den Weg bd (nach Nro. 1) zurück durchlaufen, in welcher sie vermöge der ersteren den Weg $bf = cb$ machen würde. Da die wirkliche Bewegung der Kugel sich aus diesen beiden Bewegungen zusammensetzt, so muß die Kugel den Weg bg einschlagen, für welchen $bg = ba$ und $\measuredangle fbg = \measuredangle cba$ ist.

6. Bei dem *schiefen Stoße* zweier elastischen Kugeln gilt für die centrale Componente die Formel für die gemeinsame Stoßgeschw. x in 5. des ersten Falles, jedoch nur für das erste Zusammentreffen; durch die Rückkehr der plattgedrückten Stellen wird aber nach dem Eingange dieses Abschnittes die centrale Geschw. der ersten Kugel $2x - c\cos\alpha$, welche sich mit der tangentialen Geschw. $c\sin\alpha$ zu der Geschw. nach dem Stoße componirt. Ebenso entsteht die Geschw. der zweiten Kugel als Resultante der centralen Geschw. $2x - c'\cos\alpha'$ und der tangentialen $c'\sin\alpha'$.

Fig. 56.

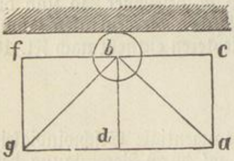
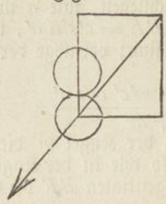


Fig. 57.



Für den speciellen Fall, Fig. 57, daß beide Kugeln gleich sind und die Geschw. c' der gestoßenen gleich Null, also auch $\alpha' = 0$ ist, ergibt sich $x = \frac{1}{2} c\cos\alpha$; daher ist nach dem Stoße die centrale Geschw. der stoßenden $= 2 \cdot \frac{1}{2} c\cos\alpha - c\cos\alpha = 0$, und die tangentiale $= c\sin\alpha$, während die centrale Geschw. der zweiten Kugel $= 2 \cdot \frac{1}{2} c\cos\alpha - 0 = c\cos\alpha$ und die tangentiale Geschw. derselben $= 0$ ist. Es bleibt also für die stoßende Kugel keine centrale, dagegen die tangentiale Geschw. $c\sin\alpha$ übrig, während die gestoßene keine tangentiale, dagegen eine centrale Geschw. $c\cos\alpha$ besitzt. Die Zerlegung der Geschw. ist demzufolge einfach durch Fig. 57 dargestellt.

Wenn von zwei gleichen Kugeln die eine in Ruhe ist und von der anderen in schiefem Stoße getroffen wird, so geht die erstere in der Richtung der Centrallinie, die letztere in der dazu senkrechten Richtung weiter. Die Richtung der ersteren ist im Billardspiel beim Schneiden, die der letzteren beim Caramboliren ins Auge zu fassen. (Die Berührungszeit ist für einen Schallstoß von Helmholtz längst, allgemein von Hertz 1882 mathematisch bestimmt worden; in letzter Zeit erst haben mehrere Physiker durch galvanische Chronoskope die Resultate bestätigt (s. 245.).

7. Durch die verschiedene tangentiale Geschw. tritt beim schiefen Stoße Reibung auf, welche die Kugeln in Rotation versetzt; dieselbe Bewegung entsteht auch, wenn man eine Billardkugel mit dem Queue in schiefem Stoße, also oben oder unten, links oder rechts von dem nächsten Punkte trifft. In diesem Falle wirkt die Reibung der Kugel auf der Unterlage wesentlich ändernd ein; sie bringt nämlich durch die Rotation der Kugel eine zweite fortschreitende Bewegung neben der durch den Stoß erzeugten hervor. Wird die Kugel oben getroffen, so sind die zwei fortschreitenden Bewegungen von gleicher Richtung, daher läuft die Kugel lange fort, selbst noch, wenn sie eine zweite getroffen hat. Wird aber die Kugel unten getroffen, so ist die zweite fortschreitende Bewegung von entgegengesetzter Richtung zu der ersten, so daß eine solche Kugel stehen bleiben oder gar zurückrollen kann, wenn ihre fortschreitende Bewegung durch Reibung oder einen Rückstoß aufgehoben wird. (Klappstöße.) Ebenso kann eine Kugel von einer anderen unter den verschiedensten Winkeln abprallen, je nachdem ihre rotirende Bewegung durch Treffen auf der einen oder anderen Seite eine verschiedene Richtung und Stärke hat. (Caramboliren.) Ueberhaupt bietet das Billardspiel die mannigfaltigsten und überraschendsten Stoßprobleme und eignet sich gut zur Einsicht in die 3 letzten Gesetze; die 4 ersten zeigt man experimentell mit der Percussionsmaschine von Mariotte und Nollet.

Aufg. 192. Wie groß ist der Verlust an lebendiger Kraft bei dem Stoße elastischer Körper? Antw.: $\frac{1}{2}(mc^2 + m'c'^2 - mv^2 - m'v'^2)$. Substituirt man hierin die Werthe von v und v', so ergibt sich der Verlust $= 0$. Dieses ist nur dadurch möglich, daß die Erschütterungen der Theilchen ganz zu den Rückstößen verwendet werden, sich also nicht auf benachbarte Körper fortpflanzen; es geht daher auch von der Stoßkraft nichts verloren. Man macht hiervon Anwendung, um die schädliche Wirkung von Stößen zu vermindern. Die Wägen hängt man in Federn, um die Stöße zu mildern, und um dadurch sowohl den Bau leichter machen, als auch länger erhalten zu können, sowie um an Zugkraft zu sparen. Die Ambose großer Hämmer erhalten ein elastisches Fundament aus eichenen Balken. Der Stoß hat auch viele nützliche Anwendungen: das Eintreiben von Nägeln, das Einrammen der Pfähle, das Sprengen von Steinen durch Eisenkeile und durch Pulver; das Bearbeiten von Holz, Steinen, Eisen und anderer Metalle durch Meißel, Feile, Hämmer u. s. w. beruht auf der Wirkung des Stoßes. — A. 193. Wie groß ist die Geschwindigkeit der 2 Körper in A. 191, wenn sie elastisch sind? Aufl.: $v = 10^{cm}$ und $v' = 40^{cm}$.

2. Der freie Fall. Unter dem freien Falle versteht man die fortschreitende 127
Bewegung eines nicht unterstützten Körpers gegen den Mittelpunkt der Erde hin, hervorgebracht durch die Anziehung der Erde. Um die Gesetze dieser Wirkung in aller Reinheit zu erkennen, müssen wir von Nebenumständen absehen, wie z. B. von dem Widerstande der Luft; ebenso abstrahiren wir von der allmäligen Zunahme der Schwerkraft eines Körpers, wenn derselbe dem Mittelpunkte der Erde durch den Fall näher kommt; denn diese Zunahme ist für die auf der Oberfläche der Erde stattfindenden Fallerscheinungen unmeßbar klein und daher auf die Gesetze derselben ohne Einfluß. — Der freie Fall ist eine gleichförmig beschleunigte Bewegung; denn die Erde übt nach unserer Voraussetzung in jedem unendlich klein gedachten Zeittheilchen stets denselben Einfluß auf den Körper aus, sie muß daher dem Körper in jedem Zeittheilchen dieselbe Geschwindigkeit ertheilen; diese muß er dann nach dem Gesetze der Trägheit beibehalten, um in dem folgenden Zeittheilchen dieselbe Geschwindigkeit ebenfalls zu erhalten und die Geschwindigkeit daher ganz gleichmäßig zu vergrößern. In solcher Weise erhält ein frei fallender Körper in jeder Secunde in 45° geogr. Br. eine Geschwindigkeit von $9{,}808^m$ oder ca. 10^m. Diese ganz allgemein mit g bezeichnete Geschwindigkeit nennt man die Beschleunigung oder Acceleration der Schwere, weil ein fallender Körper sie durch die Schwerkraft in jeder Secunde erhält und dadurch seine Geschwindigkeit in jeder Secunde um g vergrößert. Am genauesten wird diese Größe durch Pendelversuche gefunden. Es wurde schon früher erwähnt, daß sie das Maß der Anziehung der Erde oder der Schwerkraft ist.

Fallgesetze. (Galilei 1602). Die Gesetze der gleichförmig beschleunigten Bewegung, die wir schon in 16. abgeleitet haben, sind auch die Gesetze des freien Falles. Da indessen der freie Fall eine wichtige Erscheinung ist, so werden sie für denselben speciell ausgesprochen, abgeleitet und nachgewiesen.

1. Die Geschwindigkeiten eines frei fallenden Körpers verhalten sich wie die Fallzeiten, oder $v = gt$ . . . . (**2**)

Die Erde ertheilt einem fallenden Körper in der ersten Sec. die Geschw. g; diese muß er nach dem Gesetze der Trägheit in der 2. Sec. beibehalten; in dieser erhält er aber gleichfalls die Geschw. g; folglich hat er am Ende der 2ten Sec. die Geschw. $2g$. Diese muß er nach dem Gesetze der Trägheit in der 3ten Secunde beibehalten; in dieser erhält er aber gleichfalls die Geschw. g; folglich hat er am Ende der 3ten Sec. die Geschw. $3g$ u. s. w., am Ende der 4ten Sec. die Geschw. $4g$ u. s. w., am Ende der t ten Sec. die Geschw. tg, also $v = gt$. Nach dieser Formel berechnet man die Geschw. eines frei fallenden Körpers in Metern, indem man die Secundenzahl mit 10 oder genauer mit 9,808 multiplicirt.

2. Der Weg in der ersten Secunde ist halb so groß als die Endgeschwindigkeit der ersten Secunde, also $= \frac{1}{2} g = 5^m$.

Am Anfange der 1. Secunde hat der Körper die Geschw. 0, am Ende derselben die Geschw. g, also ist die Mittelgeschwindigkeit $= \frac{1}{2}(0 + g) = \frac{1}{2} g$. Es wird (nach 15. a) in Wirklichkeit derselbe Weg zurückgelegt, der bei gleichförmiger Bewegung in 1 Sec. mit der constanten Mittelgeschwindigkeit $\frac{1}{2} g$ zurückgelegt würde, also ist der Weg $= \frac{1}{2} g$.

3. Die Wege in den auf einander folgenden Secunden verhalten sich wie die geraden Zahlen; sie sind: in der 1sten Secunde $= 1 . g/2 = 1 . 5^m$, in der 2ten $= 3 . g/2 = 3 . 5^m$, in der 3ten $= 5 . g/2 = 5 . 5^m$, in der 4ten $= 7 . g/2 = 7 . 5^m$ u. s. w., in der $t$ten $(2t - 1)\, g/2$.

Die Geschw. am Anfange der 2. Sec. $= g$, am Ende derselben $= 2g$; folglich ist die Mittelgeschw. $= \frac{1}{2}(g + 2g) = 3 . g/2$; daher ist der Weg in der zweiten Secunde $= 3 . g/2$ u. s. w. Die $t$te ungerade Zahl ist $(2t - 1)$.

4. Die Fallräume in den ganzen Fallzeiten verhalten sich wie die Quadrate der Fallzeiten, sie sind $1 . g/2 = 1 . 5^m$, $4 . g/2 = 4 . 5^m$, $9 . g/2 = 9 . 5^m$, $16 . g/2 = 16 . 5^m$ u. s. w., überhaupt $s = t^2 . g/2 = \frac{1}{2} gt^2$ . . (**3**)

Durch Addition der Einzelwege aus 3. ergibt sich für 2 Sec. $s = 1 . g/2 + 3 . g/2 = 4 . g/2$; für 3 Sec. $s = 1 . g/2 + 3 . g/2 + 5 . g/2 = 9 . g/2 = 9 . 5^m$; für 4 Sec. $s = 1 . g/2 + 3 . g/2 + 5 . g/2 + 7 . g/2 = 16 . g/2 = 16 . 5^m$ u. s. w. Allgemein: Die Geschw. am Anfange der 1 Sec. ist $= 0$, am Ende der $t$ten Sec. $= gt$; daher ist die Mittelgeschw. $= \frac{1}{2}(0 + gt) = \frac{1}{2} gt$; folglich ist der Weg in t Sec. $s = \frac{1}{2} gt . t = \frac{1}{2} gt^2$. Nach dieser, der Hauptformel des freien Falles, berechnet man insbesondere den Raum in Metern, den jeder frei fallende Körper in beliebiger Zeit zurücklegt, indem man die Zahl der Secunden ins Quadrat erhebt und dieses Quadrat mit 5, genauer mit 4,904 multiplicirt.

5. Die Fallräume verhalten sich wie die Quadrate der Endgeschwindigkeiten, oder $s = v^2 / 2g$ . . . . (**4**)

Das Gesetz ist eine Verbindung der Gesetze 4 und 1; wenn sich nach 4 die Fallräume wie die Quadrate der Fallzeiten, und wenn nach 1 diese sich wie die Geschwindigkeiten verhalten, so müssen die Fallräume auch den Quadraten der Endgeschwindigkeiten proportional sein. Auch die Formel (4) ist eine Verbindung von (2) und (3); denn aus der ersten ergibt sich $t = v / g$, und durch Substitution dieses Werthes in die zweite findet man $s = v^2 / 2g$. Mittels dieser Formel findet man die Höhe s, welche ein Körper durchfallen muß, um die Geschw. v zu erreichen; daher wird der Ausdruck $v^2 / 2g$ auch Geschwindigkeitshöhe genannt.

6. Die Fallzeiten verhalten sich wie die Quadratwurzeln aus den Fallräumen, oder $t = \sqrt{(2s / g)}$ . . . . (**19**)

Dieser Satz ist eine Umkehrung von 4; auch folgt die Fl. (19) aus (3), wenn man aus derselben t sucht.

7. Die Geschwindigkeiten verhalten sich wie die Quadratwurzeln aus den Fallräumen, oder $v = \sqrt{(2gs)}$ . . . . (**4**)

Das Gesetz ist eine Verbindung von 6 und 1, und die wichtige Formel ist nur eine Umkehrung von (4), deßhalb mit derselben Nummer bezeichnet. Nach dieser Formel berechnet sich leicht die Geschw., die ein fallender Körper am Fuße der durchfallenen Höhe s besitzt; sie findet besondere Anwendung in den Lehren vom Pendel und von der Bewegung der Flüssigkeiten.

Nachweise für diese Gesetze sind mehrfach an hohen Thürmen oder tiefen Schachten geführt worden z. B. von Benzenberg (1802) am Michaelisthurme in Hamburg und von Reich (1832) in einem Bergschachte bei Freiberg. Indessen sind derartige Nachweise doch sehr beschränkt, da ein frei fallender Körper schon in 5 Sec. eine Höhe von 125^m, wie sie sich selten an Thürmen findet, durchläuft. Um experimentelle, überall mögliche Nachweise zu führen, handelt es sich darum, die Bewegung in einer solchen Weise zu verlangsamen, daß die Gesetze unverändert bleiben. Dies kann nach 2 Methoden geschehen: 1. Durch Verringerung der Kraft bei unveränderter Masse; 2. durch Vergrößerung der Masse bei gleichbleibender Kraft; nach beiden Methoden wird die Geschw. kleiner, durch erstere, weil nach 19. und 23. bei gleichen Massen die Geschw. sich wie die Kräfte verhalten, und nach der zweiten, weil bei gleichen Kräften sich die Geschw. umgekehrt wie die Massen verhalten. Der erste Gedanke wurde schon von Galilei verwirklicht, der die Fallgesetze auffand, indem er Kugeln auf schiefen Ebenen herabrollen ließ. Die Kraft, mit welcher ein Körper vom Gewicht p auf einer schiefen Ebene herabrollt, ist bekanntlich (nach 103.) nicht p, sondern $p \sin \alpha$; folglich ist nach dem angegebenen Satze die Acceleration nicht g, sondern $g \sin \alpha$, kann also durch Verkleinerung von α auf jeden beliebigen Grad der Kleinheit gebracht werden. In den Formeln des freien Falles ändert sich für die schiefe Ebene nichts als g; hierdurch werden die Verhältnisse einzelner Werthe nicht geändert, die Gesetze also aufrecht erhalten. Der zweite Gedanke ist in Atwoods Fallmaschine (1781) verwirklicht (Fig. 2. S. 33), in welcher ein kleines fallendes Gewicht, etwa von 1^g, noch einen Ballast, z. B. die Masse von 200^g, im Ganzen also die Masse von 201^g zu bewegen hat, wodurch die Acceleration nicht $= 10^m$, sondern $= 10/201 = 5^{cm}$ wird. Der Weg in der ersten Sec. beträgt dann nur $2{,}5^{cm}$ oder $1''$ hessisch. Hat man demnach eine Seitenfläche des Gestelles in hessische Zolle eingetheilt und an demselben eine verschiebbare Grundplatte K angebracht, die man nach und nach in Entfernungen von 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, $81''$ von dem hinaufgezogenen größeren Gewichte befestigt, und läßt man dieses mit einem Secundenschlage los, so schlägt es in 1, 2, 3 .... 9 Sec. auf die Grundplatte K auf, womit das Hauptgesetz No. 4 und damit auch alle übrigen Gesetze, sowie die Größe der Acceleration $= 10^m$ nachgewiesen sind. Von besonderem Interesse ist es indeß, das Gesetz 1. speciell nachzuweisen; zu dem Ende erhält das Uebergewicht die Form eines größeren Ringes oder eines längeren Stäbchens, wie es (Fig. 2) in der Nebenfigur bei H sichtbar ist. Außerdem wird in Entfernungen von 1, 4, $9''$ ... eine durchbrochene Platte angeschraubt, welche das Uebergewicht nach 1, 2, 3 ... Sec. abnimmt, so daß nach diesen Zeiten die Gewichte sich nur durch ihre lebendige Kraft weiter bewegen; man findet dann, daß die Gewichte nach diesen Zeiten in jeder Sec. bezüglich 5, 10, 15^{cm} .... zurücklegen, womit das erste Gesetz und abermals die Acceleration $= 10^m$ nachgewiesen ist. Bei vollkommeneren Apparaten ist ein Secunden schlagendes Pendel so angebracht, daß mit der Auslösung des größeren Gewichtes die Pendelschwingungen und die Bewegungen des Secundenzeigers beginnen. Einfacher ist und sicherer wirkt, besonders zum Nachweise des 1. Fallgesetzes Weinholds Fallmaschine (Physikalische Demonstrationen, Leipzig bei Quandt u. Händel, II. Auflage, S. 63). Doch ist dieselbe erst mit der Kenntniß der Lehre vom Trägheitsmoment verständlich, weßhalb wir sie bis dorthin verschieben (s. 134.).

Fall auf der schiefen Ebene. Da die Acceleration auf der schiefen Ebene 128
$= g \sin \alpha$ ist, so sind die Formeln für diese Fallbewegung

$$v = gt \sin \alpha, \quad s = \tfrac{1}{2} gt^2 \sin \alpha, \quad s = v^2/2g \sin \alpha, \quad v = \sqrt{2gs \sin \alpha} \quad .. (20)$$

Außer den Gesetzen des freien Falles bestehen für die Fallbewegung auf der schiefen Ebene im Verhältnisse zum freien Falle einige interessante Beziehungen, die sich aus diesen Formeln ergeben:

Fig. 58.

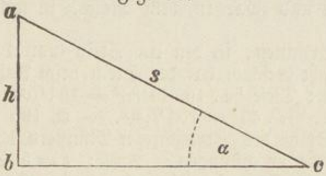
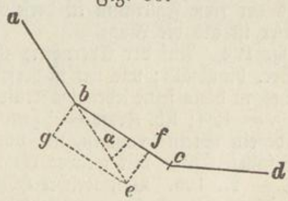


Fig. 59.

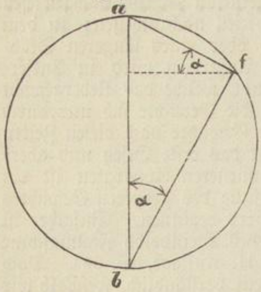


Da nämlich (Fig. 58) $s \sin \alpha = h$, so läßt sich die letzte Formel (20) auch in der Gestalt $v = \sqrt{(2gh)}$ schreiben; dieser Ausdruck $\sqrt{(2gh)}$ gibt aber nach (4) die Geschw. an, die ein Körper erreicht, wenn er die Höhe h frei durchfällt; folglich ist die Endgeschw. in beiden

Fällen gleich groß. Die Endgeschw. eines fallenden Körpers ist dieselbe, wenn er eine und dieselbe Höhe frei oder auf einer beliebig geneigten Ebene durchfallen hat. Geht der Körper jedoch von einer schiefen Ebene auf eine andere über, so erleidet er an jedem Uebergange einen Verlust an Geschw. Denn ist (Fig. 59) seine Geschw. v in der Richtung abe im Punkte $b = be$, so legt er nach dem Parallelogramm der Kräfte in der folgenden Secunde wirklich nur den Weg $bf = be \cos \alpha$ zurück, verliert also an Geschw. den Betrag $v - v \cos \alpha = v(1 - \cos \alpha) = 2v \sin^2 \alpha/_2$. Dieser Verlust ist $=$ Null., wenn $\alpha = 0$, wenn also die gebrochene Linie $abcd$ in eine gerade übergeht; er ist verschwindend klein, wenn α verschwindend klein ist, d. h. wenn sich der Körper auf einer concaven krummen Linie bewegt, da in einer solchen die Richtungsänderung an jeder Stelle verschwindend klein ist; demnach ist die Geschw. auch am Fuße einer concaven krummen Fläche dieselbe wie am Fuße einer schiefen Ebene von gleicher Höhe und wie am Fuße der senkrechten Höhe selbst.

Ist die Anfangsgeschw. am Gipfel der schiefen Ebene $= 0$ und die Endgeschw. am Fuße von s oder h (Fig. 58) $= v$, so ist die Mittelgeschw. in beiden Fällen $= {}^1/_2\, v$. Da bei gleichen Geschw. sich die Zeiten zweier Bewegungen wie die durchlaufenen Wege verhalten, so ergibt sich der Satz: die zum freien Durchfallen der Höhe und die zum Durchlaufen der Länge einer schiefen Ebene erforderlichen Zeiten verhalten sich wie die Höhe zur Länge. Der Körper kommt also am Fuße von s zwar mit derselben Geschw., aber viel später an als am Fuße von h. Hierdurch wird die Frage nahe gelegt, ob es kein Mittel gäbe, den Weg von a bis c in kürzerer Zeit zurückzulegen, als es auf der geraden Bahn ac geschieht. Solche Mittel sind verschiedene concave Bahnen; so wird schon ein Kreisbogen zwischen a und c in kürzerer Zeit durchfallen als die Gerade; in kürzester Zeit gelangt jedoch ein Körper von a nach c, wenn zwischen beiden Stellen eine Bahn von der Form der Radlinie oder Cycloide angebracht ist, einer Linie, welche ein Punkt eines auf ebener Bahn fortrollenden Rades im Raume beschreibt. Die Cycloide ist demnach die Linie der kürzesten Fallzeit, Brachystochrone; sie ist aber auch die Linie gleicher Fallzeit, Tautochrone, weil die Fallzeit dieselbe bleibt, ob der Körper seine Bewegung am höchsten Punkte oder an irgend einem anderen Punkte der Cycloide beginnt. Die Beweise für diese Sätze von Bernoulli und Huyghens sind hier nicht möglich. — Eine interessante Eigenschaft hinsichtlich der Fallzeit haben die Sehnen eines Kreises; es werden nämlich die von dem höchsten und vom tiefsten Punkte ausgehenden Sehnen eines Kreises in derselben Zeit durchfallen wie der senkrechte Durchmesser. Fällt ein Körper (Fig. 60) den Durchmesser $ab = d$ herab, so ist $d = {}^1/_2 gt^2$, woraus $t = \sqrt{(2d/g)}$; fällt er durch die Sehne af, so ist $af = {}^1/_2 gt^2 \sin \alpha$, also $t = \sqrt{(2af/g \sin \alpha)}$; da nun $af/\sin \alpha = ab = d$, so ist auch hier $t = \sqrt{(2d/g)}$; fällt endlich der Körper durch fb, so ist $fb = {}^1/_2 gt^2 \cos \alpha$, woraus $t = \sqrt{(2fb/g \cos \alpha)}$; da nun $fb/\cos \alpha = ab = d$, so ist auch hier $t = \sqrt{(2d/g)}$; die Fallzeit ist in allen Fällen dieselbe.

Fig. 60.



Aus dem Satze, daß die Geschwindigkeiten am Fuße der Länge und der Höhe der schiefen Ebene dieselben sind, und daß die Fallzeiten sich wie die Länge zur Höhe verhalten, darf man nicht etwa schließen, daß in gleichen Zeiten gleiche Wege auf der Länge und der Höhe zurückgelegt würden, vielmehr verhalten sich die auf der Länge und längs der Höhe durchfallenen Wege in gleichen Zeiten umgekehrt wie die Länge zur Höhe. Dies ergibt sich aus der zweiten Formel (20), wonach der Fallraum auf der schiefen Ebene $s = {}^1/_2 gt^2 \sin \alpha$, während der freie Fallraum in derselben Zeit ist $s' = {}^1/_2 gt^2$; durch Division entsteht $s : s' = \sin \alpha = h : l$. Der Weg auf der schiefen Ebene ist also kleiner als der freie Fallraum in derselben Zeit und zwar in dem Maße, in welchem die Höhe kleiner ist als die Länge.

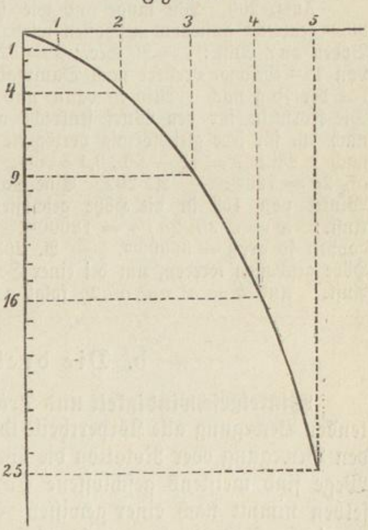
129 Aufg. 194. Auf der Ebernburg ist ein Brunnen, in den ein Stein (von 1 kg) erst in $4^1/_2$ Sec. hinabfällt; wie tief ist derselbe, welche Geschw. hat der Stein beim Aufschlagen, und welches ist dann seine lebendige Kraft? Aufl.: Tiefe $^1/_2 \,.\, 10 \,.\, (4^1/_2)^2 = 101^1/_4{}^{\mathrm{m}}$; Geschw. $= 10 \,.\, 4^1/_2 = 45^{\mathrm{m}}$; leb. Kraft $= {}^1/_2 mc^2 = {}^1/_2 \,.\, {}^1/_{10} \,.\, 45^2 = 101^1/_4{}^{\mathrm{mk}}$. — A. 195. Welche Zeit würde ein Stein brauchen, um von der Spitze des Straßburger Münsters 125^{m} hoch herunterzufallen, und mit welcher Geschw. würde er anlangen? Aufl.: $t = 5$ Sec. und $c = 50^{\mathrm{m}}$. — A. 196. Von welcher Höhe muß ein Stein herabfallen, um eine Geschw. von 100^{m} zu erlangen? Aufl.: $s = c^2/2g = 500^{\mathrm{m}}$. — A. 197. Eine Kugel rollt auf einem Abhange von 30^0 Neigung 120^{m} weit hinab; mit welcher Geschw. und nach welcher Zeit langt sie am Fuße an? Aufl.: $c = \sqrt{(2gs \sin \alpha)} = 34{,}6^{\mathrm{m}}$; $t = \sqrt{(2s/g \sin \alpha)} = 7$ Sec. — A. 198. Ein Eisenbahnzug von 100 Tonnen läuft auf einer Rampe von $^1/_{30}$ Steigung

herab; welche Geschw. und welche lebendige Kraft hat er nach 3 Minuten? Aufl.: $c = gt \sin\alpha = 60^m$; leb. Kraft 18 Mill. mk. — A. 199. Wie groß muß der Neigungswinkel einer schiefen Ebene sein, damit ein Körper eine Beschleunigung von 5^m erhalte? Aufl.: $5 = 10 \sin\alpha$; hieraus $\alpha = 30^0$.

3. Die Wurfbewegung. Auch mehrere Kräfte können eine fortschreitende und sogar eine geradlinig fortschreitende Bewegung erzeugen, z. B. wenn auf einen Körper mehrere momentane Kräfte wirken, oder wenn momentane und continuirliche Kräfte auf einen Körper in derselben geraden Linie ihre Wirkung ausüben. Wirkt eine continuirliche Kraft aber nach einer anderen Richtung auf einen Körper als eine momentane, so wird die erste Kraft den Körper fortwährend von der geraden Linie ablenken, die er vermöge der letzten Kraft einschlagen muß; er wird also eine krummlinig fortschreitende Bewegung annehmen müssen, die unter Umständen zu einer drehenden werden kann. Die Wurfbewegung ist ein Beispiel für die letzterwähnten Fälle; denn eine solche entsteht, wenn ein freier Körper über der Erdoberfläche einen Stoß erhält und dann der Wirkung der Schwere überlassen wird. 130

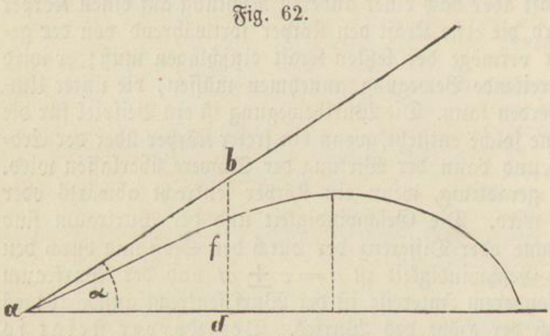
Die Wurfbewegung ist geradlinig, wenn ein Körper senkrecht abwärts oder senkrecht aufwärts geworfen wird. Die Geschwindigkeit und der Wurfraum sind dann einfach gleich der Summe oder Differenz der durch den Stoß und durch den Fall erzeugten Größen; die Geschwindigkeit ist $v = c \pm gt$ und der Wurfraum $s = ct \pm \frac{1}{2} gt^2$. Von besonderem Interesse ist der Wurf senkrecht aufwärts; es entsteht dann die Frage nach der Höhe des Wurfes. Der Körper steigt so hoch, als er hätte fallen müssen, um die Wurfgeschwindigkeit zu erlangen. Denn die gleichförmig verzögerte Wurfbewegung senkrecht aufwärts ist zu Ende, wenn die Geschwindigkeit $v = 0$ ist, wenn also $c - gt = 0$, d. h. wenn $t = c/g$ ist. Setzen wir diesen Werth der Steigzeit in den Wurfraum s ein, so erhalten wir die Steighöhe $s = c^2/2g$. Dies ist aber nach 127. (5) der Weg, den ein Körper durchfallen muß, um die Geschwindigkeit c zu erlangen; hiermit ist der Satz über die Steighöhe bewiesen. Umgekehrt, wenn $c^2/2g = v^2/2g$, so muß $v = g$ sein; d. h. ein senkrecht in die Höhe geworfener Körper langt mit derselben Geschwindigkeit wieder unten an, mit welcher er zu steigen anfing. Eine senkrecht in die Höhe geschossene Büchsenkugel übt also bei ihrer Rückkehr dieselbe zerstörende Wirkung aus, die sie direct auf einen ganz nahen Gegenstand abgeschossen hätte ausüben können; denn sie hat wieder dieselbe Energie, wie beim Austritt aus dem Gewehrlauf, da dieselbe durch $\frac{1}{2} mc^2$ gemessen wird.

Fig. 61.



Die Wurfbewegung ist (abgesehen vom Luftwiderstande) parabolisch, wenn der Körper wagrecht hinaus oder schief in die Höhe geworfen wird. Denn wird ein Körper mit einer Geschwindigkeit von 12^m horizontal hinausgeworfen, so sind seine wagrechten Wege in 1, 2, 3, 4 . . . . Sec. = $1 . 12^m$, $2 . 12^m$, $3 . 12^m$, $4 . 12^m$ . . . ., verhalten sich also wie 1 : 2 : 3 : 4 . . . . In denselben Zeiten aber fällt der Körper um $1 . 5^m$, $4 . 5^m$, $9 . 5^m$, $16 . 5^m$ . . . .; es verhalten sich also seine verticalen Wege wie $1^2 : 2^2 : 3^2 : 4^2$ . . . . ., also wie die Quadrate der wagrechten Wege. Folglich legt der Körper eine Bahn (Fig. 61) zurück, deren senkrechte Dimensionen oder Abscissen sich verhalten wie die Quadrate der zugehörigen wagrechten Dimensionen oder Ordinaten. Und die Curve, welche diese Eigenschaft hat, nennt man eben Parabel. In ähnlicher Weise läßt sich diese Bahn auch für einen schief aufwärts geworfenen Körper beweisen. Nur wirkt hier sowohl wie dort der Widerstand der Luft derartig schwächend auf die ursprüngliche Stoßkraft ein, daß die wagrechten Dimensionen der Curve immer kleiner werden, und daß daher der absteigende Ast der Curve steiler ist als der aufsteigende (Fig. 62). Doch läßt sich auch die gesetzmäßige Bildung dieser Curve berechnen, wenn man ein Gesetz über den Luftwiderstand in die Rechnung einführt. Diese Curve, die man ballistische Curve nennt, ist von großer Wichtigkeit in den Artilleriewissenschaften. Besonders wichtig ist es, die Wurfhöhe h und die Wurfweite w für einen bestimmten Elevationswinkel α und eine bestimmte anfängliche Wurfgeschwindigkeit c zu kennen. Wir wollen diese Größen wenigstens für die rein parabolische Bahn bestimmen. Nach der Zeit t wäre der gerade Stoßweg $ab = ct$; da aber der Körper während dieser Zeit um $bf = {}^1/_2\, gt^2$ fällt, so ist die erreichte Höhe zu dieser Zeit $df = bd - bf = ct \,.\, \sin\alpha - {}^1/_2\, gt^2$, und die wagrechte Entfernung $ad = ct \,.\, \cos\alpha$. Die größte Entfernung oder Wurfweite ist erreicht, wenn die Höhe $= 0$ geworden ist, wenn also $ct \sin\alpha - {}^1/_2\, gt^2 = 0$, oder wenn $t = 2c \sin\alpha / g$.

Fig. 62.



Setzen wir diesen Werth für die Wurfzeit in die wagrechte Entfernung ein, so erhalten wir die Wurfweite $w = 2c^2 \sin\alpha \cos\alpha / g$ oder $w = c^2 \sin 2\alpha / g$. Die größte Höhe der Wurfweite hat der Körper in der halben Wurfzeit, also wenn $t = {}^1/_g \,.\, c \sin\alpha$, wodurch sich ergibt die Wurfhöhe $h = c^2 \sin^2\alpha / 2g$. Aus der Formel für die Wurfhöhe h ergibt sich, daß dieselbe den größten Werth erreicht, wenn $\sin\alpha$ am größten wird, wenn also $\alpha = 90^0$ ist, oder wenn der Körper senkrecht aufwärts steigt; dagegen erhält die Wurfweite ihren größten Werth, wenn $\sin 2\alpha$ ein Maximum ist, wenn also $2\alpha = 90^0$ oder $\alpha = 45^0$ ist.

131 **Aufg.** 200. Wie lange und wie hoch steigt eine Kugel, die mit einer Geschw. von 800^m senkrecht aufwärts geschossen wird, und mit welcher Geschw. langt sie wieder auf dem Boden an? Aufl.: $t = 80$ Sec.; $s = 32000^m$, $c = \sqrt{(2gs)} = 800^m$. — A. 201. Ein Zug von 12^m Geschw. verliert nach Dampfabschluß in jeder Sec. ${}^1/_{10}{}^m$ Geschw.; welche Geschw. hat der Zug nach 1 Min.; wann und nach welchem Wege kommt er zur Ruhe? Aufl.: Die Formeln für den Wurf senkrecht aufwärts $v = c - gt$ und $s = ct - {}^1/_2\, gt^2$ gelten nach 16. für jede gleichförmig verzögerte Bewegung. In diesem Falle ist $g = 0{,}1$, daher nach 1 Min. $v = 12 - 60 \,.\, 0{,}1 = 6^m$; für $v = 0$ ist $t = 12 / 0{,}1 = 120$ Sec. und $s = c^2 / 2g = 720^m$. — A. 202. Eine Kanonenkugel wird mit 600^m Geschw. unter einem Winkel von 15^0 in die Höhe geschossen; in welcher Entfernung erreicht sie den Boden? Aufl.: $w = c^2 \sin 2\alpha / g = 18000^m$. Für den Elevationswinkel 45^0 wäre die Wurfweite doppelt so groß $= 36000^m$. — A. 203. Unter welchem Winkel muß ein Körper in die Höhe geschossen werden, um bei einer Geschw. von 300^m eine Höhe von 1125^m zu erreichen? Aufl.: Aus $h = c^2 \sin^2\alpha / 2g$ folgt $\alpha = 30^0$.

b. Die drehende Bewegung.

132 **Winkelgeschwindigkeit und Trägheitsmoment.** Während bei einer fortschreitenden Bewegung alle Körpertheile identische Wege beschreiben, sind bei einer drehenden Bewegung oder Rotation die Wege der Moleküle nur einander ähnlich. Diese Wege sind meistens geschlossene Curven, am häufigsten Kreise. Die Größe derselben nimmt nach einer gewissen Richtung immer mehr ab, bis sie endlich gleich 0 wird. Die Punkte, welche bei einer drehenden Bewegung in Ruhe bleiben, bilden zusammen die Achse, deren Endpunkte Pole heißen. Manchmal ist die Achse nur eine gedachte Linie und nicht durch Körperatome gebildet; noch häufiger sind es nur einzelne Körper, die sich um die Achse drehen, so daß der größte Theil des Drehungsraumes leer ist, wie z. B. bei den Weltsystemen. Die senkrechte Entfernung eines Punktes von der Achse nennt man Radius oder Radius vector.

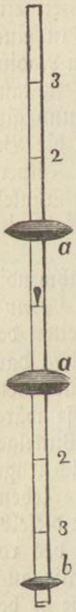
Die Zeit, die der Punkt für seinen geschlossenen Weg braucht, heißt man Umlaufzeit; dieselbe ist für alle Punkte eines rotirenden Körpers gleich groß, während die Geschwindigkeiten dieser Punkte verschieden sind, da diese in gleichen Zeiten verschiedene Wege durchlaufen. Weil indessen alle Radien in der Umlaufzeit eine volle Drehung, einen Winkel von 360° zurücklegen, so müssen sie auch in einer Secunde gleiche Winkel beschreiben. Die Größe des Winkels, welchen ein Radius in einer Secunde beschreibt, nennt man die Winkelgeschwindigkeit; sie kann auch durch die Größe eines Bogens vom Radius 1 angegeben werden und gibt ein Maß für die Schnelligkeit der Drehung. Sie macht indessen auch die Bestimmung der wirklichen Geschwindigkeit aller Moleküle des rotirenden Körpers möglich, sowie deren Radien r_1, r_2, r_3 .... bekannt sind; denn ist die Winkelgeschwindigkeit $= \omega$, so sind nach einem bekannten geometrischen Satze die Geschwindigkeiten jener Moleküle $= r_1\,\omega$, $r_2\,\omega$, $r_3\,\omega$ .....

Um die Arbeit zu finden, welche für eine bestimmte Rotation nothwendig ist, müßte man nach dem ersten Satze über die lebendige Kraft, $ks = \frac{1}{2} mv^2$, die lebendige Kraft des rotirenden Körpers kennen. Da die Geschwindigkeiten der einzelnen Massenpunkte verschieden, aber durch die Winkelgeschwindigkeit ω darstellbar sind, so liegt der Gedanke nahe, die lebendige Kraft durch diese auszudrücken. Man könnte dieselbe durch $\frac{1}{2} T\omega^2$ darstellen, wenn T eine ideale Masse wäre, die, in der Entfernung 1 von der Drehachse angebracht, bei gleicher Winkelgeschwindigkeit ω auch dieselbe lebendige Kraft wie der rotirende Körper in sich trüge. Denn diese Masse T hätte dann die wirkliche Geschwindigkeit ω, also die lebendige Kraft $\frac{1}{2} T\omega^2$. Ließe sich eine solche ideale Masse finden, so würde dieselbe mit $\frac{1}{2}\omega^2$ multiplicirt, ihre eigene und daher auch die lebendige Kraft des rotirenden Körpers ergeben, und sie würde wegen derselben lebendigen Kraft auch dasselbe Beharrungsvermögen, dieselbe Trägheit, wie die rotirende Masse m besitzen; man nennt daher diese gedachte Masse das Trägheitsmoment; das Moment derselben ist nämlich gleich der Masse, da ihr Hebelarm $= 1$ ist. **Unter Trägheitsmoment versteht man also die ideale Masse, die in der Entfernung 1 von der Drehachse angebracht, bei gleicher Winkelgeschwindigkeit dieselbe lebendige Kraft wie der rotirende Körper besitzt.** 133

Um das Trägheitsmoment T zu finden, müssen wir daher sehen, welcher Ausdruck mit $\frac{1}{2}\omega^2$ multiplicirt die lebendige Kraft des rotirenden Körpers ergibt. Zu dem Zwecke bestimmen wir die lebendige Kraft desselben. Sind die Massen der einzelnen Moleküle $= m_1$, m_2, m_3 ...., so sind ihre lebendigen Kräfte $= \frac{1}{2} m_1 r_1{}^2 \omega^2$, $\frac{1}{2} m_2 r_2^2 \omega^2$, $\frac{1}{2} m_3 r_3{}^2 \omega^2$ u. s. w.; daher ist die lebendige Kraft des rotirenden Körpers $= \frac{1}{2}\omega^2 (m_1 r_1{}^2 + m_2 r_2{}^2 + m_3 r_3{}^2 + \ldots)$. Der Klammerausdruck ist die Summe der Producte aller Molekülmassen mit den Quadraten der Radien derselben; bezeichnen wir diese Summe mit Σmr^2, so ist die lebendige Kraft des rotirenden Körpers $= \frac{1}{2}\omega^2 \Sigma mr^2$. Den Ausdruck aber, die ideale Masse, die mit $\frac{1}{2}\omega^2$ multiplicirt, die lebendige Kraft des Körpers gibt, haben wir Trägheitsmoment genannt. **Das Trägheitsmoment eines Körpers ist demnach gleich der Summe der Producte aller Molekülmassen mit den Quadraten der Radien derselben $= \Sigma mr^2$.**

Da das Trägheitsmoment die Summe unendlich vieler Producte ist, so kann dasselbe im Allgemeinen nur durch die Anwendung der Infinitesimalrechnung gefunden werden. In einzelnen Fällen kann man es auch durch elementare Rechnung finden. Hat eine große Masse ein kleines Volumen und ist weit von der Drehachse entfernt, so ist das Trägheitsmoment, genau genug für die Praxis gleich dem Product der Masse mit dem Quadrat ihres mittleren Achsenabstandes. — Zwei rotirende Körper haben gleiches Beharrungsvermögen bei gleicher Winkelgeschwindigkeit, wenn ihre Trägheitsmomente gleich sind, wenn also $MR^2 = mr^2$, oder wenn ihre Massen sich umgekehrt verhalten wie die Quadrate ihrer Achsenabstände. Diesen Satz und damit die ganze Lehre von den Trägheitsmomenten kann man experimentell nachweiſen. An einer leichten Stange (Fig. 63), die in Decimeter getheilt iſt, wird genau in der Mitte eine Tragſchneide angebracht; zu beiden Seiten derſelben in 1dm Entfernung ſind 1kg ſchwere Bleilinſen *a* angeſchraubt. Hängt man die Vorrichtung an einem Pendelgeſtelle auf, ſo iſt ſie in indifferentem Gleichgewichte, alſo in jeder Lage in Ruhe. Bringt man aber unten noch eine Bleilinſe *b* an, ſo iſt jetzt ſtabiles Gleichgewicht; wenn man daher die Vorrichtung aus ihrer Lage dreht, ſo wird ſie durch die Fallkraft des Gewichtes *b* wieder zurückgetrieben und gelangt nach einer Anzahl von Schwingungen wieder zur Ruhe. Aus der Zahl und Größe der in einer Minute ſtattfindenden Schwingungen kann man die Winkelgeſchwindigkeit der Drehung berechnen. Schraubt man nun ſtatt der Linſen *a* von 1kg ſolche von $^1/_4$kg in 2dm Entfernung von der Schneide an, ſo iſt die Zahl der Schwingungen in 1 Min., alſo auch die Winkelgeſchwindigkeit noch dieſelbe wie vorher; folglich haben dieſe 4mal kleineren Linſen in der doppelten Entfernung dasſelbe Beharrungsvermögen, womit der obige Satz nachgewieſen iſt. Es iſt auch leicht erſichtlich, daß die lebendige Kraft noch dieſelbe iſt wie vorher; denn die 4mal kleineren Maſſen haben die doppelte Geſchwindigkeit erhalten; endlich iſt auch die Arbeit, welche die lebendige Kraft erzeugte, in beiden Fällen dieſelbe, nämlich die durch den Fall des Gewichtes *b* entwickelte Arbeit. — Auch mit Schleiermachers Centrifugalapparat (Külp 1. S. 166) laſſen ſich dieſe Geſetze nachweiſen.

Fig. 63.

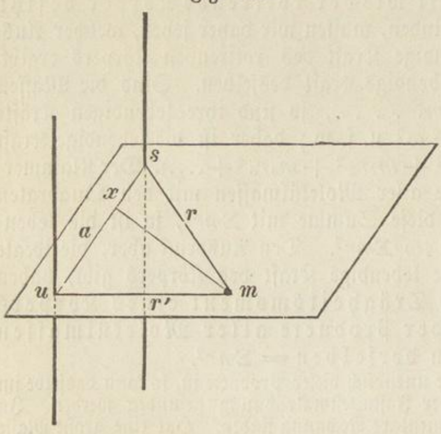


Das Beharrungsvermögen eines rotirenden Körpers iſt um ſo größer, je größer ſein Trägheitsmoment iſt, je weiter alſo die Hauptmaſſe von der Drehachſe entfernt iſt. Eine ſchwere eiſerne Welle hat daher ein geringes Beharrungsvermögen gegen ein Schwungrad von gleichem Gewichte, deſſen Hauptmaſſe in dem äußeren Ringe, dem Schwungringe liegt. In dieſem großen Beharrungsvermögen liegt die Anwendung von Schwungrädern, die Schwankungen in dem Gange einer Maſchine auszugleichen und ſie über todte Punkte hinaus zu reißen.

Das Trägheitsmoment eines Körpers in Bezug auf irgend eine Achſe iſt gleich dem Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf eine parallele Schwerpunktachſe vermehrt um das Product der Körpermaſſe mit dem Quadrat des Abſtandes der beiden Achſen.

Beweis (Fig. 64). Nach einem bekannten geometriſchen Lehrſatze iſt $r_1{}^2 = r^2 + a^2 - 2ax$, alſo auch $mr_1{}^2 = mr^2 + ma^2 - 2max$, und durch Summation aller ſolcher für ſämmtliche Moleküle m geltenden Gleichungen entſteht $\Sigma mr_1{}^2 = \Sigma mr^2 + \Sigma ma^2 - 2a\,\Sigma mx$. Nun iſt aber, wenn s der Schwerpunkt iſt, nach dem Beſtimmungsſatze des Schwerpunktes (118) $\Sigma mx = 0$, und Σm iſt die ganze Körpermaſſe M; alſo iſt $\Sigma mr_1{}^2 = \Sigma mr^2 + Ma^2$. Der erſte Summand iſt aber das Trägheitsmoment in Bezug auf die parallele durch den Schwerpunkt s gehende Achſe, womit der Satz bewieſen iſt.

Fig. 64.



134 Aufg. 204. Das Trägheitsmoment einer Linie in Bezug auf ihren Endpunkt zu finden. Aufl.: Die Linie l werde in n (unendlich viele) Theilchen zerlegt von der Länge d; dann iſt die Maſſe eines ſolchen $= md/l$, und daher das Trägheitsmoment der Linie $T = (md/l)(d^2 + 2^2 d^2 + 3^2 d^2 + \ldots)$ $= md^3 (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots n^2)/l$. Nun iſt nach der höheren Math. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = {}^1/_6 \,.\, n(n+1)(2n+1)$; iſt hierin $n =$ unendlich, ſo verſchwindet der Summand 1, und der Ausdruck wird $= {}^1/_3\, n^3$; alſo iſt $T = {}^1/_3 \,.\, md^3n^3/l$. Nun iſt weiter $dn = l$, alſo $T = {}^1/_3\, ml^2$. Geht die Achſe durch den Schwerpunkt, ſo muß man nach dem ſo eben entwickelten Satze hiervon das Product der Maſſe mit dem Quadrat der Abſtände beider Achſen ſubtrahiren; alſo iſt $T = {}^1/_3 \,.\, ml^2 - m \,.\, ({}^1/_2 l)^2 = {}^1/_{12}\, ml^2$. — A. 205. Das Trägheitsmoment einer rechteckigen Platte von der Maſſe m und den Seiten a und b zu finden. Aufl.: Die Platte werde in n gleiche zu a parallele Streifen getheilt; die Maſſe eines ſolchen iſt ${}^1/_n \,.\, m$, und ſein Trägheitsmoment in Bezug auf ſeine Schwerpunktachſe $= {}^1/_{12} \,.\, {}^1/_n \,.\, ma^2$, in Bezug aber auf die durch den Mittelpunkt der Platte gehende Achſe nach obigem Satze $= {}^1/_{12n} \,.\, ma^2 + {}^1/_n \,.\, md^2$,

wenn d der Abstand jenes Streifens von dieser Achse ist. Sind die Abstände der folgenden Streifen $d_1, d_2, d_3 \ldots.$, so ist das Trägheitsmoment jedes Streifens durch einen ganz analogen Ausdruck zu finden; daher ist das Trägheitsmoment der ganzen Fläche oder der n Streifen

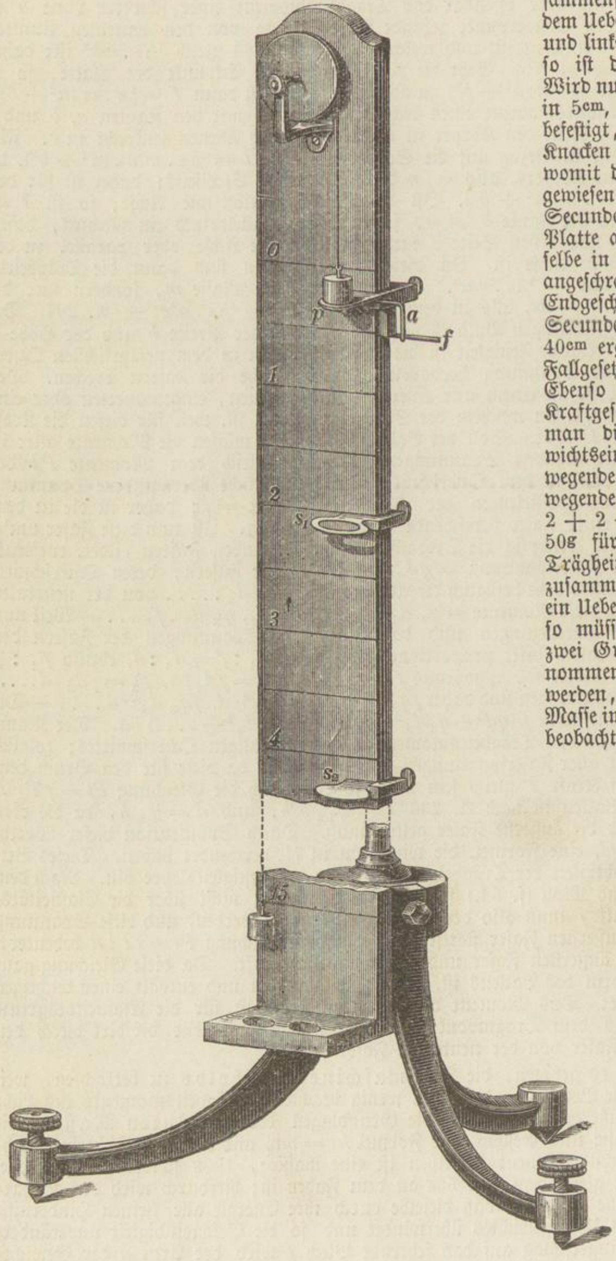
$$T = \frac{n}{12n} \cdot ma^2 + \left(\frac{1}{n} \cdot md^2 + \frac{1}{n} \cdot md_1{}^2 + \frac{1}{n} \cdot md_2{}^2 + \frac{1}{n} \cdot md_3{}^2 + \ldots\right)$$

Der Klammerausdruck ist aber offenbar das Trägheitsmoment einer schweren Linie b in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt gehende Achse, welche von den einzelnen Punkten um $d, d_1, d_2, d_3 \ldots$ entfernt ist, und welches nach Aufg. 204 gleich $^1/_{12} \cdot mb^2$ ist; daher ist endlich $T = {}^1/_{12} \cdot m\,(a^2 + b^2)$. Geht die Achse durch einen Eckpunkt der Platte, so ist hierzu nach obigem Satze $^1/_4 \cdot m\,(a^2 + b^2)$ zu addiren; folglich ist dann $T = {}^1/_3 \cdot m\,(a^2 + b^2)$. — A. 206. Das Trägheitsmoment eines rechteckigen Stabes mit den Kanten a, b und c zu finden. Aufl.: Man theile den Körper in n Streifen durch Ebenen senkrecht zu c. Für einen solchen Streifen ist in Bezug auf die Schwerpunktachse $T = {}^1/_{12} \cdot m/n \cdot (a^2 + b^2)$, da m die Masse des ganzen Körpers, also $m\,/\,n$ die Masse eines Streifens; daher ist für den ganzen Körper $T = {}^1/_{12} \cdot m\,(a^2 + b^2)$. Ist die Kante c selbst die Achse, so ist $T = {}^1/_3 \cdot m\,(a^2 + b^2)$. Wird die Kante $b = 0$, so ist das Parallelepiped ein Rechteck, dessen Seiten a und c sind, und dessen Seite c entweder selbst die Achse oder parallel zu der durch die Mitte gehenden Achse ist. In diesen beiden Fällen sind dann die Trägheitsmomente $= {}^1/_3 \cdot ma^2$ und $= {}^1/_{12} \cdot ma^2$. Hat man nicht die Masse m, sondern nur die Seiten a und c, so ist $m = ac$, also in dem letzten Falle $T = {}^1/_{12} \cdot a^3c$. — A. 207. Die relative Festigkeit eines rechteckigen Balkens von der Länge l, der Breite b und der Höhe h zu finden. Aufl.: Die relative Festigkeit ist die Kraft P, welche in dem gefährlichsten Querschnitte des Balkens eine Spannung hervorruft, durch welche die Fasern brechen. Der gefährlichste Querschnitt ist an einem nur einerseits festgehaltenen, eingemauerten oder eingespannten Balken derjenige, an welchem der Stab eingespannt ist, weil für diesen die Kraft P das größte Moment Pl hat. Soll der Balken brechen, so müssen die Momente aller in jenem Querschnitte stattfindenden Spannungen zusammen gleich dem Momente Pl der brechenden Kraft sein. Die in dem Querschnitte 1 bei dem Bruche überwundene Spannung ist bekanntlich gleich dem Coëfficienten der absoluten Festigkeit $= f$; daher ist die in dem ganzen Querschnitte q einer Faser herrschende Spannung $= fq$. Ist nun diese Faser um d von der neutralen Faser, welche ja die Drehachse der sich biegenden Fasern bildet, entfernt, so ist das Moment der Faserspannung $= qd \cdot f$. Für andere Fasern, deren Querschnitte $q_1, q_2, q_3 \ldots$ sind, und welche bezüglich die Abstände $d_1, d_2, d_3 \ldots.$ von der neutralen Faser haben, sind analog diese Momente $= q_1\,d_1 \cdot f_1, q_2\,d_2 \cdot f_2, q_3\,d_3 \cdot f_3 \ldots$ — Weil nun die Ausdehnungen und Verkürzungen und daher auch die Spannungen der Fasern den Abständen von der neutralen Faser proportional sind, so ist $f_1 : f = d_1 : d$, ebenso $f_2 : f = d_2 : d$, ebenso $f_3 : f = d_3 : d \ldots.$, woraus $f_1 = fd_1/d$, $f_2 = fd_2/d$, $f_3 = fd_3/d \ldots.$; die Momente der Faserspannungen sind daher $fq_1\,d_1{}^2/d$, $fq_2\,d_2{}^2/d$, $fq_3\,d_3{}^2/d \ldots.$ — Die Summe aller dieser Momente ist $f\,(qd^2 + q_1d_1{}^2 + q_2d_2{}^2 + q_3d_3{}^2 + \ldots.)\,/\,d$. Der Klammerausdruck aber enthält das Trägheitsmoment T des rechteckigen Querschnittes; folglich ist die Momentensumme aller Faserspannungen $= fT\,/\,d$, und da diese für den Bruch dem Moment der brechenden Kraft P gleich sein muß, so ergibt sich die Gleichung $Pl = fT\,/\,d$. Für einen rechteckigen Balken ist nach A. 206 $T = {}^1/_{12}\,h^3b$, und $d = {}^1/_2\,h$, da die eben gefundene Gleichung für die äußerste Faser gelten muß. Durch Substitution dieser Werthe entsteht $P = f/_6 \cdot bh^2/l$, eine Formel, die wir schon in 71. verwendet haben. Dieses Beispiel deutet auf die Wichtigkeit der Trägheitsmomente in der Festigkeitslehre hin. Nach dem Satze von Reuleaux und Moll (s. 64.) soll die Faserspannung nicht über die Elasticitätsgrenze hinausgehen; statt f muß also der Tragmodul t gesetzt werden, und diese Spannung darf höchstens in der äußersten Faser stattfinden. In der Gleichung $Pl = tT\,/\,d$ bedeutet d daher den Abstand der äußersten Faser und P die biegende Kraft. Da diese Gleichung ganz unabhängig von der Form des Balkens ist, so gilt sie allgemein und enthält einen wichtigen Satz der Festigkeitslehre: Das Moment der biegenden Kraft ist für die Elasticitätsgrenze gleich dem Product aus dem Tragmodul mit dem Trägheitsmoment dividirt durch den Abstand der äußersten Faser von der neutralen Faser.

Hier und jetzt ist es geboten, die **Fallmaschine Weinholds** zu betrachten, weil sie dem Studirenden die Bedeutung des sonst wenig beachteten Trägheitsmoments ins Licht setzt, und weil sie es außerdem ermöglicht, die Grundlagen des **absoluten Maßes**, die Gesetze über Kraft, Masse und Geschw., die Formel $kt = mv$, mit einfacher Sicherheit nachzuweisen. Das sinnreichste Element derselben ist eine massive, 100g schwere Messingrolle, deren Trägheitsmoment gleich dem von 50g an dem Faden ist; hierdurch wird das Beharrungsvermögen der Rolle so groß, daß dieselbe durch ihre Energie alle kleinen Hindernisse nach dem Abheben des Uebergewichtes überwindet und so die Geschwindigkeit unverändert erhält. Durch einen Fingerschlag auf das federnde Blech f wird der Arm a der Gewicht=

grundplatte frei, diese dreht sich um ein Charnier hinten und das Gewicht p fällt. Sein Uebergewicht von 2g wird von der durchlochten Scheibe s_1 abgenommen, wobei ein leichtes Knacken gehört wird, bewegt sich gleichförmig weiter bis zur ganzen Platte s_2, wo sein Aufschlagen wie das Knacken immer mit einem Glockenschlage zusammenfällt. Werden außer dem Uebergewicht von 2g rechts und links 70 und 2g angehängt, so ist die Acceleration 10cm. Wird nun die durchlochte Platte in 5cm, 20, 45, 80, 125cm befestigt, so hört man das Knacken nach 1, 2, 3, 4, 5 Sec., womit das 4te Fallgesetz nachgewiesen ist. Man hört es eine Secunde später auf die ganze Platte aufschlagen, wenn dieselbe in 15, 40, 75, 120cm Tiefe angeschraubt ist, woraus die Endgeschwindigkeiten der 4 ersten Secunden sich gleich 10, 20, 30, 40cm ergeben, womit das erste Fallgesetz nachgewiesen ist. — Ebenso leicht und sicher sind die Kraftgesetze nachzuweisen. Hat man die eben erwähnte Gewichtseinrichtung, so ist die bewegende Kraft 2g, die zu bewegende Masse 70 + 2 + 70 + 2 + 2 + dem Gewichte von 50g für die Erzeugung des Trägheitsmoments der Rolle, zusammen 196g. Nimmt man ein Uebergewicht von 4 oder 6g, so müssen statt der zwei mal zwei Gramme zwei mal 1 genommen oder ganz weggelassen werden, so daß die bewegte Masse immer 196g beträgt; man beobachtet dann auf obige Weise, wenn das Uebergewicht nach 2 Sec. abgehoben wird, die Wege in der 3ten Secunde 20, 40, 60cm, womit das Gesetz bewiesen ist, daß bei gleichen Massen die Geschwindigkeiten sich wie die Kräfte verhalten. Stellt man die erste Gewichtseinrichtung wieder her, so hat man beim Abheben nach 2 Sec. wieder den Weg in der 3ten Sec. = 20 cm; hängt man nun Gewichte von 70, 98 u. 1g an, rechts aber ein Uebergewicht von 4g, so ist die bewegte Masse 392 = 2 . 196 und die bewegende Kraft 4g; man findet dann eben-

Fig. 65.



falls für die 3te Sec. den Weg von 20c. Denselben findet man für Gewichte von 70 und 2mal 98g und das Uebergewicht von 6g, womit der Satz bewiesen ist, daß bei gleichen Geschwindigkeiten sich die Kräfte wie die Massen verhalten. Ebenso einfach erweist sich der Satz, daß bei gleichen Kräften die Geschw. sich umgekehrt wie die Massen verhalten. Man läßt hier die bewegende Kraft, das Uebergewicht immer 6g sein, benutzt beim ersten Versuch 70 und 70g, wodurch die bewegte Masse wieder 196g = 70 + 70 + 6 + 50 ist; der Weg in der 3ten Sec. ist dann 60cm. Nimmt man beim zweiten Versuch 70 + 98 + 70 + 98 + 6 + 50 = 2 . 196, so ergibt sich der Weg in der 3ten Sec. nur = 30cm und bei 3. 196g nur = 20cm. Nach diesem leichten und sicheren Nachweise der Hauptgesetze der Physik wird man zugeben müssen, daß die Weinhold'sche Einrichtung der physikalischen Instrumente in keiner deutschen höheren Schule fehlen dürften.

1. **Die Pendelbewegung** (Galilei 1602). Ein Pendel ist jeder Körper, der 135
um einen Punkt außerhalb seines Schwerpunktes drehbar aufgehängt ist. Das einfachste Pendel ist das mathematische: ein schwerer Punkt, der durch eine gewichtlose Linie mit dem Drehpunkte verbunden ist. Kein wirkliches Pendel ist ein mathematisches; die wirklichen Pendel werden physische genannt; dem nur gedachten mathematischen Pendel kommt am nächsten eine kleine Kugel von Platin, Gold oder Blei, die an einem feinen Faden hängt.

Ein fast vollkommen mathematisches Pendel hat Bottomley (1887) hergestellt. Ein Schrotkorn von 1/16″ Durchm. hing an einem halbirten Coconfaden, also an einem einfachen Seidenfaden von 2′ Länge in einer Glasröhre, welche mit einem Sprengel'schen Luftsauger auf ein Zehnmilliontel Atmosphäre luftverdünnt, also fast luftleer gemacht worden war. Schwingungen von 3/4″ Ausschlag konnten nach 14 Stunden noch gezählt werden.

Bringt man ein solches mathematisches Pendel aus seiner Gleichgewichtslage und läßt es alsdann los, so ist der Schwerpunkt nicht mehr unterstützt; folglich muß das Pendel fallen. Die Kugel beschreibt hierbei einen Kreisbogen, weil sie immer gleichweit vom Aufhängepunkte entfernt ist; diesen Bogen kann man sich aus unendlich vielen kleinen geraden Elementen bestehend denken, von denen das tiefste wagrecht ist, und die anderen eine um so größere Neigung gegen den Horizont haben, je höher sie liegen: sie können alle als schiefe Ebenen von nach unten hin abnehmender Neigung angesehen werden. In jedem Moment durchläuft die Pendelkugel eine solche schiefe Ebene, erfährt daher in jedem Moment nach 128. die Acceleration $g \sin a$. An dem obersten Punkte ist $\sin a$ und daher auch diese Acceleration am größten; dieselbe nimmt immer mehr ab, bis sie in dem tiefsten Punkte = 0 ist. Weil nun aber nach dem Gesetze der Trägheit die in jedem früheren Moment erlangte Geschwindigkeit erhalten bleibt und in jedem folgenden Moment eine neue, jedoch immer kleiner werdende hinzukommt, so muß die Geschwindigkeit des Pendels fortwährend, aber immer weniger, zunehmen; die Pendelbewegung ist beim Niederfallen eine ungleichförmig beschleunigte Bewegung. In dem tiefsten Punkte der Bahn ist die Geschwindigkeit am größten. Mit dieser Geschwindigkeit muß das Pendel über den tiefsten Punkt hinausgehen und daher auf der anderen Seite in die Höhe steigen. Während dieses Steigens verliert das Pendel in jedem Moment genau dieselbe Geschwindigkeit, die es auf der entsprechenden schiefen Ebene des Niederganges gewonnen hat; folglich muß, abgesehen von den Widerständen, das Pendel mit ungleichförmig verzögerter Bewegung ebenso hoch steigen, als es heruntergefallen ist. Die eben geschilderte Bewegung nennt man eine Schwingung oder Oscillation, die Größe des durchlaufenen Bogens Schwingungsbogen, die hierzu nöthige Zeit Schwingungszeit. Ein mathematisches Pendel würde, einmal in Bewegung gesetzt, ins Unendliche weiter schwingen, weil es nach Beendigung der ersten und jeder folgenden Schwingung immer wieder in derselben Lage wäre, wie am Anfange der ersten Schwingung, und weil ihm keine Widerstände entgegenwirken. Ein physisches Pendel aber hat den Widerstand der Luft und die Reibung an den Aufhängepunkten zu überwinden, wodurch seine Fallkraft immer mehr geschwächt wird, so daß die Schwingungen immer kleiner werden und endlich ganz aufhören.

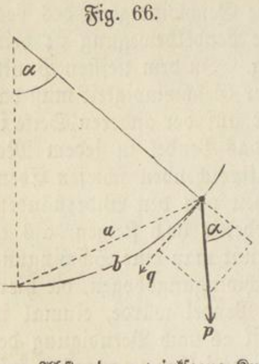
136 Gesetze der Pendelbewegung. 1. Die Schwingungszeit ist für kleine Schwingungsbogen unabhängig von der Größe derselben. 2. Die Schwingungszeit ist proportional der Quadratwurzel aus der Pendellänge. Das erste Gesetz sagt aus, daß ein hoch gehobenes Pendel für seinen großen Weg nur dieselbe Zeit braucht wie ein wenig gehobenes für seinen kleinen Weg; es ist dies erklärlich; denn das hoch gehobene Pendel fällt steiler herab, hat daher eine größere Geschwindigkeit als das andere. Das zweite Gesetz läßt sich aus dem sechsten Fallgesetze ableiten; denn nach diesem verhalten sich die Schwingungszeiten wie die Quadratwurzeln aus den Schwingungsbogen; statt der Schwingungsbogen kann man die Pendellängen setzen, weil sich zwei Bogen von gleichen Centriwinkeln wie ihre Radien verhalten, welche hier die Pendellängen sind. Wir werden sogleich beweisen, daß die Schwingungszeit $t = \pi \sqrt{(l / g)}$ ist. In dieser Formel kommt der Schwingungsbogen gar nicht vor, und die Wurzel aus der Pendellänge steht im Zähler; folglich ist mit dieser Formel bewiesen, daß die Schwingungszeit unabhängig ist vom Schwingungsbogen und direct proportional der Quadratwurzel aus der Pendellänge. Man kann diese Sätze nachweisen mit an Fäden aufgehängten Kugeln. Für kleine Schwingungsbogen macht ein solches Pendel in der ersten Minute ebenso viele Schwingungen wie in der letzten; für größere Bogen aber findet dies nicht mehr statt, also gilt das erste Gesetz nur mit der zugefügten Einschränkung, etwa bis 10°. — Hat man Pendel, von denen das zweite 4 mal, das dritte 9 mal so lang ist als das erste, so macht das zweite in einer Minute halb, das dritte den 3ten Theil so viel Schwingungen als dieses; folglich dauern die Schwingungen des zweiten 2 mal, die des dritten 3 mal so lang, womit der zweite Satz nachgewiesen ist.

137 **Strengerer Beweis der zwei Gesetze.** Die Formel für die Schwingungszeit $t = \pi \sqrt{(l / g)}$ ist nicht genau, sondern muß eigentlich heißen

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left\{ 1 + (1/2)^2 \left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \cdot \left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^6 + \dots \right\},$$

wo α den dem halben Schwingungsbogen entsprechenden Winkel, den sogenannten Elongationswinkel bedeutet; indessen wollen wir doch jene für kleinere Winkel hinreichend genaue und sehr wichtige Formel, welche auch die beiden Gesetze enthält, beweisen. Wir erhalten hierbei gleichzeitig eine Formel für die Schwingungszeit von Körpern, die durch ihre Elasticität schwingen.

Fig. 66.



Es sei (Fig. 66) p das Gewicht der Pendelkugel oder des schweren, an einem Faden befestigten Punktes, der aus seiner Ruhelage gebracht, durch die tangentiale Componente seines Gewichtes p in jene zurückzugehen strebt. Diese Componente ist

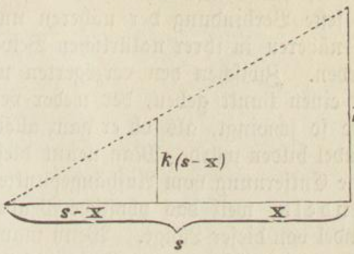
$$q = p \sin\alpha = p \sin\frac{b}{l} = p \cdot \frac{b}{l} = p \cdot \frac{a}{l}, \quad \dots\dots \quad \text{(I)}$$

weil für sehr kleine Bogen der Sinus mit dem Bogen und dieser mit der Sehne vertauscht werden darf. Unter dieser Voraussetzung ist die zurücktreibende Kraft q dem Abstande a von der Ruhelage direct proportional. Da hierbei sehr kleine Bogen vorausgesetzt sind, so gilt das Resultat dieser Betrachtung bei dem Pendel nur für sehr kleine Bogen genau, für kleinere ungenau, für größere gar nicht; für die Schwingungen durch Elasticität ist aber das Resultat genau, so lange das Hooke'sche Gesetz: Ut tensio sic vis (67) gilt. Bezeichnen wir nun die in der Entfernung 1 auf die Masse m wirkende zurücktreibende Kraft mit k, so ist $q = ka$; ebenso ist die in dem Abstande s wirksame Kraft $= ks$ und die in der Entfernung $s - x$ wirksame Kraft $= k(s - x)$. Bedeutet hierbei s den Abstand der äußersten Lage des schweren Punktes von der Ruhelage und $s - x$ seinen Abstand, wenn er (Fig. 67) sich der Ruhelage um x genähert hat, so ist die während dieses Näherns geleistete Arbeit $= {}^1/_2\, x\,[ks + k(s - x)] = {}^1/_2\, kx\,(2s - x)$. Da diese Arbeit nach dem ersten Satze über die lebendige Kraft gleich der lebendigen Kraft des Pendels ist, so erhalten wir die Grundgleichung:

$$\tfrac{1}{2}\, mv^2 = \tfrac{1}{2}\, kx\,(2s - x), \text{ woraus } v = \sqrt{\frac{k}{m}\,(2s - x)\,x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(II)}.$$

Denken wir uns nun über dem doppelten größten Abstande, also über der Strecke $2s$ (Fig. 68) einen Halbkreis beschrieben und am Ende der Annäherung x eine Ordinate y errichtet, so ist dieselbe nach dem Satze vom rechtwinkeligen Dreieck $y = \sqrt{(2s - x)\,x}$. Setzen wir diesen Wurzelausdruck in Gl. (II) ein, so erhalten wir

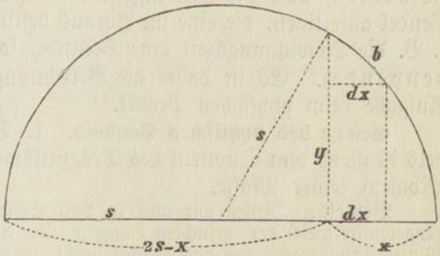
Fig. 67.



$$v = y\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(III)}.$$

Wenn nun weiter dx ein so kleiner Theil von x ist, daß während desselben die Bewegung als gleichförmig angesehen werden kann, und wenn dt die für diesen kleinen Weg dx nöthige Zeit bedeutet, so ist bekanntlich $dx = v\,.\,dt$, woraus durch Einsetzung von Gl. (III) entsteht

Fig. 68.



$$dx = dt\,.\,y\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \ldots\ldots \quad \text{(IV)}$$

Ziehen wir nun auch die Ordinate zu dx und durch ihren Endpunkt die kleine Strecke parallel und gleich dx, so entsteht ein kleines rechtwinkeliges Dreieck, das dem großen von s und y gebildeten ähnlich ist; daher gilt die Proportion $dx : b = y : s$. Wird hieraus dx bestimmt und seinem Werthe aus Gl. IV gleichgesetzt, so erhält man

$$dt\,.\,y\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{by}{s} \quad \text{woraus } dt = \frac{b}{s}\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Das Zeittheilchen dt, das zum Durchlaufen der Theilstrecke dx nöthig ist, wird also gefunden, indem man den zugehörigen Bogen b des Hilfskreises mit nicht variablen Größen dividirt und multiplicirt; also wird die Zeit zum Durchlaufen der ganzen Strecke $2s$, d. i. die Schwingungszeit t gefunden, indem man die Summe aller zugehörigen Hilfskreisbogen, d. i. die Länge πs des Halbkreises mit denselben nicht variablen Größen dividirt und multiplicirt; also

$$t = \frac{\Sigma b}{s}\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{\pi s}{s}\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{oder } t = \pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(21)}.$$

Diese Gl. (21) gilt für alle Schwingungsbewegungen, bei denen die Kraft dem Abstande proportional ist; sie ist die Grundlage für die Theorie der Wellen, die durch Elasticität entstehen, also der Theorie des Schalles, des Lichtes und der Wärme. Die Pendelformel geht aus derselben hervor, wenn wir für die Masse m die bekannte Beziehung $p\,/\,g$ setzen; für k müssen wir nach dem Eingange dieser Entwickelung $q\,/\,a$ setzen oder nach (I) $pa\,/\,la = p\,/\,l$. Werden diese Substitutionen vorgenommen, so folgt

$$t = \pi\sqrt{\frac{p}{g}\,/\,\frac{p}{l}} = \pi\sqrt{\frac{lp}{pg}} \text{ oder } t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} \ldots \text{(Pendelformel) (Huyghens, 1673)} \quad \textbf{(22)}$$

Die Zahl der Schwingungen, die ein Pendel in einer Minute oder in einer Stunde macht, wird ebenso viel mal größer als die Schwingzeit kleiner wird; sie steht in umgekehrtem Verhältnisse zu der Schwingzeit. Die Quadrate der Schwingzeiten verhalten sich aber nach dem zweiten Satze direct wie die Pendellängen; demnach kann man diesem Satze auch folgende Form geben: Die Quadrate der Schwingungszahlen verhalten sich umgekehrt wie die Pendellängen oder $n^2 : n_1^{\,2} = l_1 : l$ (Gesetz der Schwingungszahlen).

Das physische Pendel. (Huyghens 1673). Jedes wirkliche oder physische 138
Pendel, gewöhnlich aus einer Stange mit verschiebbaren Gewichten geformt, besteht aus unendlich vielen mathematischen Pendeln; denn jenes enthält unendlich viele Körpermoleküle, schwere Punkte, von denen jeder durch die übrigen mit dem Aufhängepunkte in Verbindung steht, also ein mathematisches Pendel bildet. Die

dem Aufhängepunkte näheren Moleküle bilden kleine Pendel, welche nach dem zweiten Satze schnell zu schwingen streben; die entfernteren Moleküle bilden lange Pendel, haben also das Bestreben, langsame Schwingungen zu machen. Durch die feste Verbindung der näheren und entfernteren Punkte mit einander müssen die näheren in ihrer natürlichen Bewegung verzögert, die entfernteren beschleunigt werden. Zwischen den verzögerten und den beschleunigten Molekülen muß es daher einen Punkt geben, der weder verzögert, noch beschleunigt wird, der also gerade so schwingt, als ob er ganz allein vorhanden wäre und so ein mathematisches Pendel bilden würde. Man nennt diesen Punkt den Schwingungspunkt und seine Entfernung vom Aufhängepunkte die reducirte Länge des physischen Pendels, weil das physische Pendel genau so schwingt wie das mathematische Pendel von dieser Länge. Wenn man daher den Schwingungspunkt und hierdurch die reducirte Länge von Pendeln beliebiger Formen kennt, so kann man nach Formel (22) auch die Schwingzeit derselben finden, und kann umgekehrt physische Pendel anfertigen, die eine im Voraus bestimmte Schwingungszeit haben; beträgt z. B. die Schwingungszeit eine Secunde, so nennt man das Pendel ein Secundenpendel. Es ist daher die Berechnung der reducirten Pendellänge die erste Aufgabe beim physischen Pendel.

139 **Gesetze des physischen Pendels.** 1. Die reducirte Länge des physischen Pendels ist gleich dem Quotient des Trägheitsmoments des Pendels durch das statische Moment seiner Masse.

Beweis. Denken wir uns in dem Schwingungspunkte, dessen Abstand vom Aufhängepunkte gleich der gesuchten Länge x ist, eine Masse m' concentrirt, welche dieselbe Winkelgeschwindigkeit wie das Pendel besitzt, so muß ihr Trägheitsmoment $m'x^2$ gleich dem Trägheitsmoment T des Pendels sein, woraus $m' = T / x^2$ . . . . . I.

Wenn die Masse des Pendels $= m$ ist, also sein Gewicht $= mg$, und der Abstand des Schwerpunktes vom Aufhängepunkte $= d$, so ist das statische Moment des Gewichtes $= mgd$; soll nun eine in dem Schwingungspunkte auf die Masse m' wirkende Kraft k dieselbe Wirkung hervorbringen wie dieses Gewicht, so müssen die statischen Momente der beiden Kräfte einander gleich sein; also ist $kx = mgd$, woraus $k = mgd / x$ . . . . . II.

Die Acceleration a aber, welche durch eine Kraft k in einer Masse m' hervorgebracht wird, ist nach Fl. (8) bekanntlich $= k / m'$; also ist nach unseren Werthen I und II $a = (mgd / x) / (T / x^2) = mgdx / T$. Die im Schwingungspunkte concentrirte Masse soll nun wie das ganze Pendel schwingen, folglich muß ihre Acceleration gleich der der Schwere sein; also ist $mgdx / T = g$, woraus $x = T / md$, was zu beweisen war.

Practisch findet man die ungefähre red. Länge eines physischen Pendels, wenn man vor dasselbe ein mathematisches Pendel so hängt, daß die Aufhängepunkte in einer Wagerechten liegen, und wenn man nachher das letztere so lange verkürzt oder verlängert, bis die beiden Pendel gleich schwingen, coincidiren; dann befindet sich der Schwingungspunkt genau hinter der schwingenden Kugel. Bestehen Pendel aus leichten Stangen mit schweren Linsen, so liegt der Schwingungspunkt in der Linse; durch Verschieben derselben läßt sich daher die Länge und die Schwingzeit des Pendels ändern.

2. Der Schwingungspunkt liegt tiefer als der Schwerpunkt.

Beweis. Nach dem Satze S. 142 ist das Trägheitsmoment T des Pendels gleich dem Trägheitsmoment T' in Bezug auf eine parallele Schwerpunktachse vermehrt um md^2; also ist $T = T' + md^2$; hieraus ergibt sich nach dem ersten Gesetze $x = (T' + md^2) / md$ $= d + (T' / md)$, d. h. x ist immer größer als d, der Abstand des Schwerpunktes.

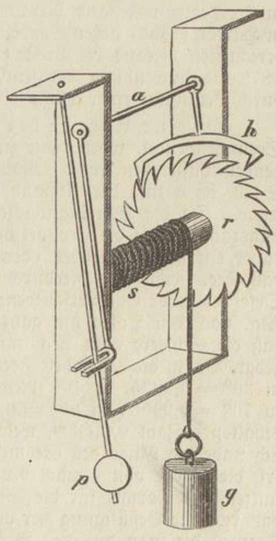
3. Wenn man den Schwingungspunkt mit dem Aufhängepunkte vertauscht, so wird die Schwingungszeit nicht geändert. Man nennt ein Pendel, das auch an seinem Schwingungspunkte eine Schneide trägt, und an welchem man daher Schwingungspunkt und Aufhängepunkt vertauschen kann, ohne die Schwingungszeit zu ändern, ein Reversionspendel.

Beweis. Der Schwingungspunkt ist vom Schwerpunkte um $x - d$ entfernt; wenn wir das Pendel im Schwingungspunkte aufhängen, so ergibt sich hiernach seine reducirte Länge x', indem wir in dem Werthe für x aus dem vorigen Beweise an die Stelle von d den jetzt geltenden Werth $x - d$ setzen; dann ist $x' = x - d + (T' / m(x - d)]$. Nun folgt gerade aus jenem Werthe von x die Gleichung $x - d = T' / md$; setzen wir diesen Werth in den für x' ein, so ergibt sich $x' = \frac{T'}{md} + \frac{T'.md}{mT'} = \frac{T'}{md} + d$, welcher Werth mit dem von x im vorigen Beweise vollkommen übereinstimmt. Wenn nun die reducirte Länge zweier Pendel dieselbe ist, so ist auch ihre Schwingungszeit dieselbe. Nach Bohnenberger (1811) läßt sich jede leichte Stange, welche an einem Ende und um ein Drittel ihrer Länge vom anderen Ende entfernt Aufhängeschneiden und zwischen denselben verschiebbare Gewichte trägt, durch Verschieben der Gewichte zu einem Reversionspendel machen.

Aufg. 208. Den Schwingungspunkt einer dünnen Stange zu finden. Aufl.: Nach 134. Aufg. 204 ist $T = {}^1/_3 . ml^2$. Dividirt man dies durch ${}^1/_2\, ml$, so ist $x = {}^2/_3\, l$, d. h. der Schwingungspunkt ist um ${}^1/_3$ vom unteren Ende entfernt. — A. 209. Wie groß ist die Schwingzeit eines Pendels, dessen Schwingungspunkt um 1^m vom Aufhängepunkt entfernt ist: Aufl.: $t = \pi \sqrt{(l/g)} = 1{,}0031$ Sec. = sehr nahe 1 Sec. — A. 210. Wie lang muß eine Stange sein, die halbe Secunden schwingen soll? Aufl.: ${}^1/_2 = \pi \sqrt{(l/g)}$; hieraus $l = 0{,}2484^m$; nach Aufg. 208 noch die Hälfte hinzu, gibt die Länge der Stange $= 0{,}3726^m$. — A. 211. Welche Schwingungen würde ein Pendel von dieser Länge auf der Sonne machen? Aufl.: $t = \pi \sqrt{(l/27\,g)} = 0{,}0962$ Sec. Das Pendel würde also Zehntel-Secunden schwingen; überhaupt wächst die Schnelligkeit oder auch die Zahl der Schwingungen mit der Quadratwurzel aus der Schwerkraft. — A. 212. Wie lang müßte ein Secundenpendel auf der Sonne sein? Aufl.: $1 = \pi \sqrt{(l/270)}$; hieraus $l =$ nahezu 27^m. — A. 213. Wie viel würde eine vom Aequator auf den Pol versetzte Uhr täglich vorgehen? Aufl.: $3^1/_2$ Min.

Anwendung des Pendels. 1. Zur Regulirung der Uhren (Huyghens 1673). 140
Die Uhren werden entweder durch fallende Gewichte oder durch zusammengerollte Spiralfedern getrieben; nach dem Gesetze der Trägheit muß sowohl die Fallbewegung als auch das Aufrollen der Feder immer schneller werden. Die Anwendung des Pendels verhütet diese Unregelmäßigkeit. Das Pendel ist also ebenso der Regulator der größeren Uhren, wie die Unruhe und Spirale derjenige der Taschenuhren; die Verbindung zwischen dem Regulator und dem Treibwerke nennt man die Hemmung oder das Echappement. Die gewöhnlichste Hemmung für Pendeluhren ist der Graham'sche Haken (Fig. 69). Auf der Drehachse a des Pendels p sitzt ein vförmiger Doppelhaken h, welcher abwechselnd in ein auf der Achse der Seil- oder Federtrommel s sitzendes Rad r eingreift, wenn er durch das schwingende Pendel hin- und herbewegt wird. Hierdurch wird die Drehung der Trommel und der Fall des Gewichtes g bei jeder Schwingung einmal gehemmt, der Fall muß nach jeder Hemmung neu beginnen und geschieht daher regelmäßig. Zugleich übt das Rad bei jeder Fortbewegung einen Rückstoß auf den Haken und dadurch auf das Pendel aus, wodurch die Hindernisse der Pendelbewegung aufgehoben werden. Näheres über Uhren in der Physik des Himmels, 582.

Fig. 69.



2. Zum Tactmessen mittels des Metronoms (Mälzel). Das Metronom besteht aus einem kleinen Pendel mit einem festen unteren und einem verschiebbaren oberen Gewichte; der Drehpunkt ist zwischen beiden Gewichten. Das Trägheitsmoment der beiden Massen ist $md^2 + m_1 d_1{}^2$, das statische Moment $md - m_1\, d_1$; folglich wird durch das obere Gewicht der Zähler der reducirten Länge (von x in 139.) größer, der Nenner aber kleiner; daher wird die Schwingzeit trotz der Kleinheit des Pendels ziemlich groß, etwa $^1/_2$ Secunde. Durch Verschiebung des oberen Gewichtes nach oben wächst der Zähler noch mehr, als der Nenner abnimmt, folglich wird die reducirte Pendellänge und damit die Schwingzeit größer, beim Hinabrücken kleiner. Mälzel hat das Pendel mit einer ähnlichen Einrichtung, wie Fig. 69 verbunden, wodurch nicht nur die Pendelbewegung lange erhalten, sondern auch hörbar gemacht wird. An dem Pendel ist eine Skale angebracht für das Schiebgewicht. In den musikalischen Werken steht gewöhnlich angegeben, an welche Zahl das Schiebgewicht gerückt werden muß, damit das Pendel Viertel, Achtel oder dergl. schlägt und hierdurch das vom Componisten beabsichtigte Tempo des Musikstückes feststellt.

3. Zum Messen sehr großer Geschwindigkeiten (Hutton 1770). Gegen den aus einem mit Eisen beschlagenen Holzblocke von 60 bis 100 Centner bestehenden Gewichtskörper eines Pendels (ballistisches Pendel) wird eine Kugel geschossen und dadurch das Pendel

zum Ausschlage gebracht. Nach den Gesetzen des Pendels und des Stoßes unelastischer Körper kann man aus der Größe des Ausschlages die Geschwindigkeit der Kugel berechnen.

4. Zum Nachweise, daß alle Körper gleich schwer sind (Newton 1680 und Bessel 1832). Pendel von gleicher Länge aus dem verschiedensten Stoffe angefertigt machen in gleichen Zeiten gleich viele Schwingungen, haben also gleiche Schwingzeit; folglich muß auch g d. i. die Fallbeschleunigung in 1. Sec. für alle Stoffe gleich groß sein.

5. Zum Nachweise, daß die Schwere auf Bergen und im Erdinnern kleiner ist als auf der ebenen Oberfläche. Ein und dasselbe Pendel macht auf einem Berge oder in einem Schachte weniger Schw. als auf der ebenen Erdoberfläche, s. jedoch 78, 5.

6. Zum Nachweise, daß die Schwere vom Aequator nach den Polen hin zunimmt (Richer in Paris und Cayenne 1672). Ein und dasselbe Pendel macht in gleichen Zeiten um so mehr Schw., je weiter man vom Aeq. nach den Polen hinkommt.

7. Zum Bestimmen der Größe der Acceleration g und dadurch zum Messen der Schwerkraft der Erde. Läßt man ein P. von beliebiger Länge l eine gewisse Zeit schwingen und zählt die Schw., so kann man die Schwingzeit t desselben finden. Dann kennt man in der Fl. (22) alle Größen bis auf g und kann daher g berechnen. Ist z. B. in Paris ein Secundenpendel 0,9933^{m} lang, so ergibt sich aus jener Formel $g = \pi^2 . l / t^2 = 3{,}1416^2 . 0{,}9933 : 1^2 = 9{,}808^{m}$ (Methode von Borda 1700, von Kater 1818).

8. Zum Vergleichen der Schwerkraft an verschiedenen Orten. Läßt man ein und dasselbe Pendel an verschiedenen Orten schwingen, so ist an dem einen Orte $t = \pi \sqrt{(l / g)}$ und an dem anderen $t_1 = \pi \sqrt{(l / g_1)}$ oder $t^2 = \pi^2 l / g$ und $t_1{}^2 = \pi^2 l / g_1$, woraus $g : g_1 = t_1{}^2 : t^2 = n^2 : n_1{}^2$; es verhalten sich also die Schwerkräfte für die zwei verschiedenen Orte direct wie die Quadrate der Schwingungszahlen eines und desselben Pendels. Durch diese Methode hat man die früher angegebenen Unterschiede der Schwerkraft auf der Erdoberfläche gefunden und dadurch die Abplattung der Erde gemessen.

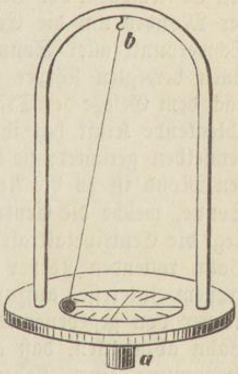
9. Zum Wägen der Erde und hierdurch auch zum Wägen der Sonne, der Planeten u. s. w. — Maskelyne und Hutton beobachteten 1775, um wie viel ein Pendel durch den Berg Shehallien aus seiner lothrechten Lage abgelenkt wird, und fanden hieraus die Dichte der Erde = 4,5; Cavendish (1797) ließ ein wagrechtes Doppelpendel (Drehwage) durch schwere Bleikugeln anziehen und fand hieraus die Dichte der Erde = 5,5; Carlini (1824) verglich die Länge des Secundenpendels auf dem Mont-Cenis mit derjenigen in Bordeaux und fand hieraus die Erddichte = 4,4; Reich in Freiberg (1838) und Airy in Harton (1854) ließen Pendel auf der Erdoberfläche und in tiefen Schachten schwingen und berechneten hieraus die Dichte der Erde, der erstere = 5,5, der letztere = 6,5. Jolly schlug 1878 die Anwendung der feinsten Wagen (Empfindlichkeit $^1/_{20\,000\,000}$) vor und fand (1881) durch Benutzung einer solchen die Erddichte = 5,692. Näheres in der Physik der Erde, 538.

10. Zur Angabe der Secunden. Zu diesem Zwecke fertigt man ein sogenanntes Secundenpendel, wozu man zunächst nach der in 139. betrachteten Methode ein Reversionspendel construiren muß. Man läßt dieses z. B. eine Minute lang schwingen; die Zahl der Schw. sei n und der Abstand der Schneiden $= l$, die gesuchte Länge des Secundenpendels sei x. Da die Schwingungszahl desselben in 1 Min. = 60, so muß nach dem Schwingungszahlengesetze die Proportion stattfinden: $x : l = n^2 : 60^2$, woraus man x berechnen und daher ein mathematisches oder auch mit Hülfe von 139. ein physisches P. anfertigen kann, das Sec. schwingt. Hierdurch hat man erfahren, daß das Secundenpendel für verschiedene Orte der Erde eine verschiedene Länge haben muß, und daß die Länge desselben von dem Aeq. nach den Polen hin ganz allmälig zunimmt, wodurch abermals nachgewiesen wurde, daß die Schwere vom Aeq. nach den Polen hin größer wird. Auf dem Aeq., also in 0° geogr. Br. ist die Länge des Secundenpendels = 0,991^{m}, in 10° = 0,9911, in 20° = 0,9917, in 30° = 0,9925, in 40° (Newyork) = 0,9931, in 50° (Mainz) = 0,9940, in 60° = 0,9949, in 70° = 0,9956, in 80° = 0,9960^{m}. Als Durchschnittszahl merke man sich die leicht zu behaltende Zahl 0,9933^{m}, welche ungefähr für Mailand gilt, und beachte, wie außerordentlich nahe die Länge des Secundenpendels derjenigen des Meters kommt. — Wenn man zuerst die Größe von g nach Nr. 7 für einen Ort genau bestimmt hat, so kann man auch mittels der Formel für die Schwingungszeit die Länge des Secundenpendels berechnen und dadurch eine Bestätigung der obigen Werthe erhalten. Dieselben ergeben sich auch aus einer Formel, die man aus den Beobachtungen gefunden hat; ist φ die geogr. Br., so ist $x = 0{,}991\,033 + 0{,}005\,638 \sin^2 \varphi$. Albrecht, (Bremikers Logarithmentafel 1883) gibt als Mittel aus den 10 besten und neuesten Beobachtungen $L_\varphi = 0{,}99102 + 0{,}00510 \sin^2 \varphi$ entsprechend seiner Formel für die Schwerkraft $g_\varphi = 9{,}7810 + 0{,}0503 \sin^2 \varphi$.

11. Zum Nachweise der Achsendrehung der Erde (Foucault 1851). Obwohl dieser Gegenstand in die Physik des Himmels gehört, möge er doch hier betrachtet werden, weil er eine lehrreiche Anwendung des Pendels und des Gesetzes der Trägheit ist.

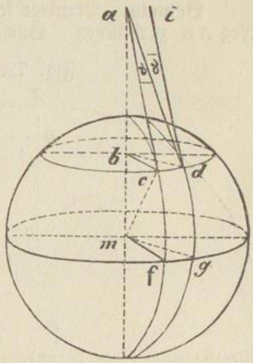
Wenn nämlich ein Pendel nach irgend einer Richtung in Schw. versetzt wird, und wenn keine Kraft vorhanden ist, welche die Richtung der Schw. zu ändern strebt, so muß das Pendel immer in derselben Richtung schwingen, seine Schwingungsebene muß constant bleiben. Man kann diese Folgerung aus dem Gesetze der Trägheit leicht mit dem Apparat (Fig. 70) nachweisen; derselbe wird mittels der Hülse *a* auf eine Schwungmaschine geschraubt und, nachdem man das Pendel in Bewegung gesetzt hat, mit beliebiger Schnelligkeit gedreht; ist diese selbst so groß, daß man den Bügel gar nicht mehr sieht, so wird das Pendel doch noch immer mit unveränderter Bewegung nach einer und derselben Stelle des Zimmers hinschwingen. Doch muß hierbei die Aufhängung in *b* vollkommen frei sein; wäre dies nicht der Fall, so würde sich die Drehung des Bügels dem Pendel mittheilen. Ist aber die Aufhängung frei, d. i. der Faden leicht biegsam und die Verknüpfung möglichst einfach, und ist dabei das Pendel recht schwer und lang, so wird man den Versuch stundenlang fortsetzen können, das Pendel wird immer nach einer Richtung schwingen. Ganz dasselbe würde stattfinden, wenn wir das Pendel mit der Hülse *a* auf den Nordpol setzen könnten; es müßte immer nach derselben Stelle des Himmels hin schwingen, während unter ihm die Erde sich täglich 1 mal dreht; folglich müßte jeden Augenblick ein anderer Meridian unter die Richtung des Pendels treten. Da wir indeß von dieser Bewegung der Erde nichts merken können, so entsteht der Schein, daß die Schwingungsebene des Pendels sich umgekehrt, also von Osten nach Westen täglich 1 mal um sich selbst drehe. Anders dagegen würde die Erscheinung sein, wenn wir auf dem Aeq. ein frei aufgehängtes Pendel schwingen ließen; denn auf dem Aeq. ist durch die Drehung der Erde kein Anlaß vorhanden, eine Veränderung der Schwingungsebene gegen die Kreise der Erde zu bewirken.

Fig. 70.



Schwingt das Pendel z. B. im Aeq. selbst, so wird es immer im Aeq. schwingen, weil während der Drehung der Erde der Aeq. immer in seiner eigenen Ebene bleibt wie das Pendel auch, und es wird daher keine Veränderung des Pendels gegen den Aeq. wahrnehmbar sein. Schwingt das Pendel senkrecht gegen den Aeq., also nach dem Nord- und Südpole hin, so wird ebenfalls keine Aenderung eintreten können, weil der Aeq. immer in sich selbst bleibt und das Pendel, das immer nordsüdlich schwingen muß, dann immer auf demselben senkrecht schwingt. Kurz am Aeq. findet keine Veränderung statt in der Stellung der Schwingungsebene gegen den Aeq. oder gegen den Meridian. Die tägliche Drehung der Schwingungsebene, welche auf dem Pole, in einer Breite von 90 Grad, 1 beträgt, ist auf dem Aeq., in einer Breite von 0 Grad, $= 0$, ist also an diesen Orten gleich dem Sinus der Breite. Hiernach schon möchte man vermuthen, daß die tägliche Drehung der Schwingungsebene überhaupt mit dem Sinus der geogr. Breite im Zusammenhang stehe. Nähere Untersuchung ergibt: D i e t ä g l i c h e s c h e i n b a r e D r e h u n g d e r S c h w i n g u n g s e b e n e e i n e s P e n d e l s i s t g l e i c h d e m S i n u s d e r g e o g r a p h i s c h e n B r e i t e multiplicirt mit 360°.

Fig. 71.

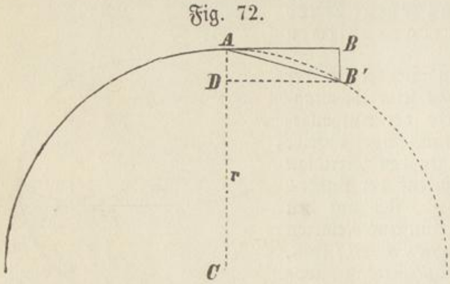


Beweis: Läßt man (Fig. 71) ein Pendel in der Richtung des Meridians schwingen, so ist abc seine Schwingungsebene; ist durch die Drehung der Erde der Aufhängepunkt c nach d gekommen, so hat das Pendel noch dieselbe Richtung $di \parallel ca$; folglich hat es sich gegen den Meridian um den Winkel $ida = dac = \alpha$ gedreht, während der Punkt c selbst, dessen geogr. Breite $= \measuredangle cmf = \varphi$ ist, sich um den Winkel $dbc = \beta$ gedreht hat. Suchen wir nun eine Relation zwischen α u. β. Der Bogen cd ist sowohl $= bc \,.\, \pi \,.\, (\beta / 180)$, sowie auch $= ac \,.\, \pi\, (\alpha / 180)$, folglich ist $bc \,.\, \beta = ac \,.\, \alpha$, woraus $\alpha : \beta = bc : ac$. Nun ist $bc : ac = cos\, bca = sin\, bcm = sin\, cmf = sin\, \varphi$. Hieraus folgt, daß $\alpha : \beta = sin\, \varphi$ oder $\alpha = \beta\, sin\, \varphi$, d. h. der Drehungswinkel der Schwingungsebene des Pendels ist gleich der gleichzeitigen Drehung des betreffenden Erdpunktes, multiplicirt mit dem Sinus der geographischen Breite. Hiermit ist unser Satz bewiesen; wenn der Erdpunkt c eine Drehung (einen täglichen Umlauf) gemacht hat, so beträgt die Drehung der Schwingungsebene nur einen solchen Theil der ganzen Drehung, wie ihn der Sinus der Breite angibt. In Berlin z. B., wo $\varphi = 52^0\, 30'$ ist, beträgt die tägliche Drehung $= 0{,}79335$, in Mainz, wo $\varphi = 50^0$, ist dieselbe $= 0{,}76605$, nahezu $= {}^3/_4$. Die Schwingungsebene dreht sich also in Mainz täglich nur um 3/4 einer ganzen Drehung, braucht also für eine ganze Drehung 1 1/3 Tage. An vielen Orten wurden Rechnung und Versuch, welche die Achsendrehung der Erde zur Voraussetzung haben, angestellt, der Versuch stimmte überall mit dem Resultate der Rechnung, wodurch die Achsendrehung der Erde nachgewiesen ist. Schuller hat (1883) die Einrichtung des Versuches so gestaltet, daß man denselben in einem gewöhnlichen Zimmer anstellen und die Ablenkung schon nach wenigen Minuten wahrnehmen kann (Wied. Ann. 19. S. 249.

141 **2. Die Centralbewegung** (Huyghens, 1703). Unter Centralbewegung versteht man die Bewegung eines Körpers in krummliniger Bahn um einen Punkt, den Centralpunkt der Bewegung. Eine Centralbewegung ist z. B. die Bewegung der Mondes um die Erde, der Planeten um die Sonne, der Sonne um den Schwerpunkt aller Sonnen u. s. w. Eine solche Bewegung entsteht, wenn auf einen bewegten Körper eine Kraft fortwährend einwirkt, die ihn stetig von der nach dem Gesetze der Trägheit einzuhaltenden geraden Linie ablenkt. Diese stetig ablenkende Kraft hat ihren Sitz in dem Centralpunkte oder ist wenigstens nach demselben gerichtet; sie heißt daher Centripetalkraft oder Centralkraft. Für deu Mond ist es die Anziehung der Erde, für die Erde ist es die Anziehung der Sonne, welche die Centripetalkraft bildet; für eine im Kreise geschwungene Kugel liegt die Centripetalkraft in der Festigkeit der Schnur, für einen in fester krummer Bahn rollenden Körper in dem Widerstande der Bahnwand. Es ist gewiß von großem Interesse, aufzufinden, wie groß die Centripetalkraft sein muß, um einen Körper von gegebener Masse und gegebener Geschwindigkeit so von seiner geraden Bahn abzulenken, daß er eine Bahn von bestimmter Krümmung einschlägt. Die Krümmung einer Bahn mißt man durch den Krümmungsradius; es läßt sich nämlich für jeden hinreichend klein gewählten Theil einer krummen Linie ein Kreis angeben, von dem ein entsprechend kleiner Theil mit jenem kleinen Theile der krummen Linie übereinstimmt; der Radius dieses Kreises wird der Krümmungsradius jenes Curventheiles genannt. Wenn wir nun bei der Centralbewegung auch jede Curve als möglich annehmen müssen, so läßt sich doch an jedem Punkte die Curve durch einen Kreis ersetzen; wir können daher die obige Aufgabe enger fassen: Es soll die Centripetalkraft gefunden werden, welche die mit der Geschwindigkeit v begabte Masse m zwingt, sich in einem Kreise vom Radius r zu bewegen. Diese Centripetalkraft $C = mv^2/r$ . . . . (**23**)

Beweis. Vermöge seiner Trägheit würde der Körper A (Fig. 72) den tangentialen Weg AB zurücklegen. Suchen wir zunächst, welche Kraft in C wirken müßte, damit er statt dessen die Sehne AB' durchlaufe. Das müßte eine Kraft C sein, welche ihn zwingt, in der radialen Richtung r den Weg $BB' = AD = w$ in derselben Zeit t zurückzulegen, während welcher er in tangentialer Richtung den Weg AB durchlaufen würde. Hierbei leistet diese Kraft eine Arbeit $= Cw$ und entwickelt in dem Körper eine lebendige Kraft $^1/_2\, mu^2$, vorausgesetzt, daß sie in der Richtung AD eine Geschw. u hervorruft; daher ist nach den Gesetzen der lebendigen Kraft $Cw = {}^1/_2\, mu^2$, woraus $C = mu^2/2w$. Suchen wir nun für u^2 einen in w ausgedrückten

Fig. 72.



Werth; nach einer Grundformel der gleichförmig beschleunigten Bewegung ist $w = {}^1/_2\, ut$, während der in der Richtung der Sehne mit der constanten Geschw. v zurückgelegte Weg $AB' = s = vt$ ist. Setzt man den hieraus gefundenen Wert für t in den für w, so folgt $w = us/2v$, woraus $u = 2vw/s$ und $u^2 = 4v^2w^2/s^2$. Um dieses s^2 zu beseitigen, benutzen wir einen bekannten geometrischen Lehrsatz, der uns die Proportion liefert $w : s = s : 2r$, woraus $s^2 = 2rw$. Wird dieser Ausdruck für s^2 in den für u^2 eingeführt, so erhält man $u^2 = 4v^2w^2/2rw = 2v^2w/r$. Nachdem so ein geeigneter Werth für u^2 gefunden ist, setzen wir denselben in den Bruch für C ein und erhalten

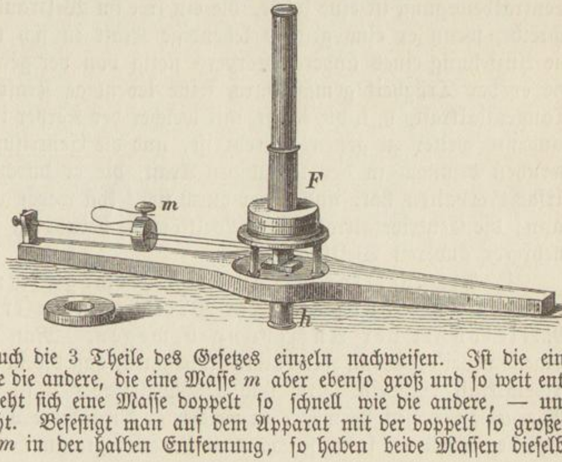
$$C = \frac{mu^2}{2w} = \frac{2mv^2w}{2rw} \text{ oder } C = \frac{mv^2}{r}.$$

Da dieser Ausdruck von der Länge der Sehne unabhängig ist, so gilt er auch noch, wenn die Sehne unendlich klein ist, also für die Kreisbewegung selbst.

Es ist dies dieselbe Formel, die wir in 46. für die Centrifugalkraft angegeben haben. Diese Gleichheit ist auch vollkommen begründet; denn nach dem fünften Axiom entspricht jeder Kraft eine gleiche Gegenkraft; folglich muß auch der Centripetalkraft eine gleiche Kraft entgegenwirken; es muß also in jeder sich in krummer Linie bewegenden Masse ein Druck oder Zug von dem Centralpunkte nach dem Umfange hin gerichtet, vorhanden sein, welcher genau dem entgegengesetzt gerichteten Drucke oder Zuge der Centripetalkraft gleich ist, welcher also durch dieselbe Formel ausgedrückt wird; und dieser Druck oder Zug in radialer Richtung nach außen ist eben die **Centrifugalkraft**, Fliehkraft oder Schwungkraft. **Centripetalkraft und Centrifugalkraft sind gleiche und entgegengesetzt gerichtete Kräfte.** Die Centrifugalkraft ist einfach eine Folge der Trägheit, vermöge welcher ein in krummer Bahn bewegter Körper an jedem Punkte in der Richtung der Bahntangente mit seiner ursprünglichen lebendigen Kraft fortzugehen strebt. Diese lebendige Kraft erzeugt also den Druck nach auswärts, die Centrifugalkraft: die an einer Schnur im Kreise geschwungene Kugel strebt, die Schnur zu zerreißen; Wagen, die schnell um eine wenig stumpfe Ecke fahren, sind in Gefahr nach außen hin umzustürzen; Bahnzüge, die in stark gekrümmten Curven fahren, drohen auszugleißen, wogegen man sie dadurch schützt, daß man den inneren Schienenstrang tiefer legt und dadurch eine Componente des Gewichtes zur Centripetalkraft macht; Kunstreiter, die schnell im Circus reiten, können nach außen geschleudert werden, wenn sie sich nicht durch eine Componente ihres Gewichtes schützen, indem sie sich nach innen biegen; ein Glas Wasser kann, im Kreise geschwungen, eine umgekehrte Lage haben, ohne daß das Wasser ausläuft; in der Centrifugalrutschbahn ist man oft mit dem Kopfe unten, ohne herauszufallen. In allen diesen und vielen anderen Erscheinungen ist ein von der lebendigen Kraft erzeugter Druck oder Zug nach außen vorhanden, die Centrifugalkraft, welche nach dem fünften Axiom der Centripetalkraft gleich ist; folglich ist die Centrifugalkraft $F = mv^2 / r$ . . . . (23)
d. h. **die Centrifugalkraft ist direct proportional der Masse und dem Quadrat der Geschwindigkeit, aber umgekehrt proportional dem Krümmungsradius der Bahn.**

Man weist diesen wichtigen Satz mit der Schwungmaschine nach, in welcher eine Achse durch eine Räderübersetzung in rasch rotirende Bewegung versetzt wird; auf diese Achse schraubt man Gefäße, die unten schwere Stoffe enthalten; beim raschen Drehen gehen dieselben nach oben oder nach außen (der Quecksilbergürtel). Ein aufgeschraubtes Gestell trägt auf einem Drahte 2 lose Kugeln, die durch eine Schnur verbunden sind; ist die eine Kugel doppelt so schwer wie die andere, aber dem Mittelpunkte zweimal näher als diese, so bleiben die Kugeln selbst bei der schnellsten Drehung stehen, womit die drei Theile des Satzes nachgewiesen sind. Man kann mit dieser Maschine auch die Richtigkeit der Formel selbst nachweisen; siehe A. 72. Hierzu benutzt man den Apparat Fig. 73, der auf die Schwungmaschine geschraubt wird. Die Masse m, ihre Entfernung vom Centrum, also der Radius r, ihre Geschw. v sind aus dem Apparat zu entnehmen und in die Fl. einzusetzen; bei F wird ein Gewicht, gleich der berechneten Centrifugalkraft aufgesetzt; dann wird dasselbe gehoben, wenn die Maschine in die gehörige Drehung versetzt wird. Mittels zweier Apparate wie Fig. 73, die man auf 2 Treibrollen der Maschine setzt, lassen sich auch die 3 Theile des Gesetzes einzeln nachweisen. Ist die eine Treibrolle doppelt so groß wie die andere, die eine Masse m aber ebenso groß und so weit entfernt wie die andere, so dreht sich eine Masse doppelt so schnell wie die andere, — und hebt dann das 4fache Gewicht. Befestigt man auf dem Apparat mit der doppelt so großen Treibrolle die gleiche Masse m in der halben Entfernung, so haben beide Massen dieselbe

Fig. 73.



Geschw., — aber die mit der halben Entfernung, dem halben Radius hebt das doppelte Gewicht. Sind die Treibröllen und Radien gleich, ist aber das eine m doppelt so groß als das andere, — so hebt jenes das doppelte Gewicht.

Die Centrifugalkraft hat viele Anwendungen: der Centrifugalregulator an Dampfmaschinen, das Centrifugalpendel an Uhren, die Centrifugaltrockenmaschine, die Centrifuge in Zuckerfabriken, die Centrifugalpumpe, die Schleuder, der Lasso, die Centrifugalrutschbahn, der Ventilator u. s. w. In der Wissenschaft erklärt man die abgeplattete Gestalt der Erde (1719 gegen 1713 Meilen) und der anderen Planeten, sowie die Abnahme der Schwere von den Polen gegen den Aequator hin durch die Centrifugalkraft. Der letztere Gegenstand wurde schon in 78. besprochen. Daß die Abplattung der Erde durch die Schwungkraft entstanden sein könne, sucht man durch eine aus losen Blechringen angefertigte Kugel nachzuweisen, die man auf der Schwungmaschine durch Rotiren leicht zum Abplatten bringen kann, sowie durch den Plateau'schen Versuch, eine in Flüssigkeit schwebende Oelkugel, die sich stark abplattet, wenn man sie mittels einer durchgesteckten Achse in Rotation versetzt. Neuere Geologen erklären die Abplattung durch die Wirkung von Polargletschern, weil sie den feurig flüssigen Urzustand der Erde nicht zugeben wollen; diese Erklärung geschieht jedoch ebenfalls durch die Centrifugalkraft, indem diese Geologen annehmen, daß das Weltmeer eine abgeplattete Kugel bilde.

Die Centrifugalkraft gibt ein lehrreiches Beispiel über den engen Zusammenhang zwischen lebendiger Kraft und Druckkraft; denn die Centrifugalkraft ist ein Druck, der durch eine lebendige Kraft hervorgebracht wird. Sie zeigt aber auch, daß ein Druck für sich allein keine Bewegung hervorbringen kann; denn das von dem geschwungenen Faden sich losreißende Gewicht bewegt sich nicht in radialer Richtung, sondern in tangentialer Richtung weiter; die Centrifugalkraft ist also keine Arbeitskraft, sie ist in jedem Punkte der Bahn nur ein momentaner Druck, der in radialer Richtung keine Bewegung erzeugen kann. Setzen wir in den Ausdruck für die Arbeit Cw der Centrifugalkraft $C = mv^2 / r$ und $w = s^2 / 2r$, so ergibt sich $Cw = mv^2 s^2 / 2r^2$. Lassen wir auch hier, um auf die Kreisbewegung überzugehen, $s = 0$ werden, so ergibt sich die Arbeit $Cw = 0$, womit bewiesen ist, daß die Centrifugalkraft keine Arbeit leistet. Daß bei den physikalischen Schwungmaschinen dennoch radiale Bewegungen entstehen, hat in den Rückwirkungen der dabei mitwirkenden festen Körper seinen Grund.

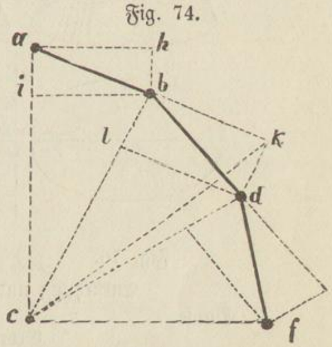
Man kann in die Fl. (23) für die Centrifugalkraft statt der Geschw. v die Umlaufzeit t einführen. In dieser Zeit t durchläuft nämlich der Körper den Weg $2\pi r$, wenn seine Bahn kreisförmig ist; daher legt er in 1 Sec. den Weg $v = 2\pi r / t$ zurück. Setzen wir diesen Werth in Formel (23) statt v ein, so entsteht $F = 4\pi^2 rm / t^2$ . . . . (**24**) Es liegt kein Widerspruch darin, daß nach dieser Formel die Schwungkraft dem Radius direct, nach (23) aber umgekehrt proportional ist; denn das erste findet nur statt, wenn die Geschwindigkeiten dieselben sind, und das letzte, wenn die Umlaufzeiten gleich bleiben. Da jede Kraft das Product aus Masse und Beschleunigung ist und da nach Fl. 24 die Centrifugalkraft $F = m(4\pi^2 r / t^2)$, so ist der Ausdruck $4\pi^2 r / t^2$ die Centrifugalbeschleunigung. Am Aequator ergibt sich dieselbe $f_0 = 0{,}0339$; da dort $g_0 = 9{,}7810$, so ist die Acceleration g_0 für eine ruhende Erde $= 9{,}8149$; auch folgt hieraus nochmals $f_0 : g_0 = 1 : 289 = 1 : 17^2$.

142 **Gesetze der freien Centralbewegung,** Kepplers Gesetze 1609. Eine freie Centralbewegung ist eine solche, die ein frei im Weltraume schwebender Körper beschreibt, wenn er eine gewisse lebendige Kraft in sich trägt, und wenn er durch die Anziehung eines anderen Körpers stetig von der geraden Linie abgelenkt wird, die er der Trägheit gemäß durch seine lebendige Kraft beschreiben müßte. Die Tangentialkraft, d. i. die Kraft, mit welcher der Körper in der Richtung der Bahntangente weiter zu gehen bestrebt ist, und die Centrifugalkraft eines Weltkörpers beruhen demnach in der lebendigen Kraft, die er durch eine uns noch unbekannte Ursache erhalten hat, und die er durch sich selbst weder vernichten, noch vermehren kann; die Centripetalkraft eines Weltkörpers beruht in der Anziehung eines oder mehrerer anderen Weltkörper.

1. Ein Weltkörper muß sich vermöge seiner lebendigen Kraft und der Anziehung anderer Weltkörper in krummer Linie um den Mittelpunkt der Anziehung bewegen. Man zeigt dies gewöhnlich auf folgende Weise: Wenn wir vorerst annehmen, daß die in c (Fig. 74) wirksame Centripetalkraft ruckweise wirke und den Weltkörper a in derselben Zeit durch den Weg ai zu ziehen vermöge, in welcher er durch seine Tangentialkraft den Weg ah zurücklegen würde, so muß nach dem Parallelogramm der Kräfte geschlossen werden,

daß der Körper durch das Zusammenwirken der beiden Kräfte den Weg ab zurücklegen, also am Ende jener Zeit in b anlangen müßte. In gleicher Weise würde er nun den Weg $bk = ab$ beschreiben; da er aber durch die Anziehung in derselben Zeit den Weg bl nach c hin durchlaufen muß, so wird er nach derselben Schlußweise wie vorhin, den Weg bd zurücklegen, und ebenso in einer gleichen Zeit den Weg df. Man sieht hieraus, daß der Körper sich zwar immer von dem Centralpunkte zu entfernen strebt, daß er aber durch dessen Anziehung daran gehindert wird und sich daher um denselben bewegen muß. Wenn die Anziehung nicht ruckweise, sondern stetig wirkt, so wird auch die Richtungsänderung nicht plötzlich, sondern stetig vor sich gehen, es wird also die Bahn nicht eine vieleckige, sondern eine krumme Linie sein. Da die Anziehung der Weltkörper wirklich continuirlich wirkt, so sind folgerichtig die Bahnen der Weltkörper krumme Linien. — Dieses erste Gesetz haben wir erhalten, ohne über die beiden Kräfte Wirkungsgesetze vorauszusetzen. Die Wirkungsgesetze derselben sind uns indessen schon bekannt. Aus diesen Gesetzen kann man mittels der Analysis die Gestalt der Bahnen der Weltkörper berechnen. Da wir aber diese Wissenschaft hier nicht benutzen können, so soll nur das gesetzmäßige Resultat der Rechnung angeführt werden: **Wenn die Anziehung nach Newtons Gravitationsgesetz auf einen durch seine lebendige Kraft fortgetriebenen Körper einwirkt, so ist dessen Bahn ein Kegelschnitt: eine Ellipse, eine Parabel oder eine Hyperbel.** Mathematisch bewiesen wurde dieses Gesetz zuerst von Newton, aber aufgefunden wenigstens im Princip für die Planeten, wurde es schon von Keppler und lautet in Kepplers Form: **Die Planetenbahnen sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkte die Sonne steht.** Es bildet in dieser Form das zweite der drei **Keppler'schen** Gesetze, welche die Grundlage der neueren Astronomie geworden sind; denn auch Newtons Gravitationsgesetz ergab sich erst aus diesen Gesetzen, während man jetzt umgekehrt Kepplers Gesetze aus jenem allgemeineren Grundgesetze ableitet. Nach dieser Ableitung ist also die Bahn jedes Weltkörpers eine der drei Kegelschnittlinien. Welche von diesen drei Linien aber ein Weltkörper beschreibt, hängt offenbar von dem Verhältnisse seiner lebendigen Kraft zu der centralen Anziehung ab. Wäre z. B. die lebendige Kraft verschwindend klein gegen die Anziehung, so würde der Körper in gerader Linie in den Centralkörper stürzen; wäre dagegen die Anziehung verschwindend klein gegen die lebendige Kraft des Körpers, so würde sich derselbe in gerader Linie fort von dem Centralpunkte ins Unendliche bewegen. Wenn der Körper sich in kreisförmiger Bahn um den Centralpunkt bewegen sollte, wenn also die Centralkraft ma constant wäre, so müßte auch die derselben gleiche Centrifugalkraft mv^2/r constant sein; es müßte also immer $mv^2/r = ma$ sein, oder $^1/_2 mv^2$ müßte sein $= {}^1/_2 . ma . r$; es findet also Kreisbewegung statt, wenn die lebendige Kraft gleich dem halben Product der Anziehung mit dem Abstande des Körpers vom Centralpunkte ist. Ebenso ergibt höhere Rechnung im einfachen Anschlusse an die letzte Bemerkung Folgendes: Wenn die lebendige Kraft des Weltkörpers in seinem kleinsten Abstande von dem Centralpunkte kleiner ist als das Product dieses Abstandes mit der Anziehung, so ist die Bahn des Weltkörpers eine Ellipse, von der die Kreisbewegung als specieller Fall erscheint. Ist die lebendige Kraft aber gleich dem Product des

Fig. 74.



kleinsten Abstandes und der Anziehung, so ist die Bahn eine Parabel. Ist endlich die lebendige Kraft größer als jenes Product, so ist die Bahn eine Hyperbel.

143 Fig. 75. Fig. 77. Fig. 79.

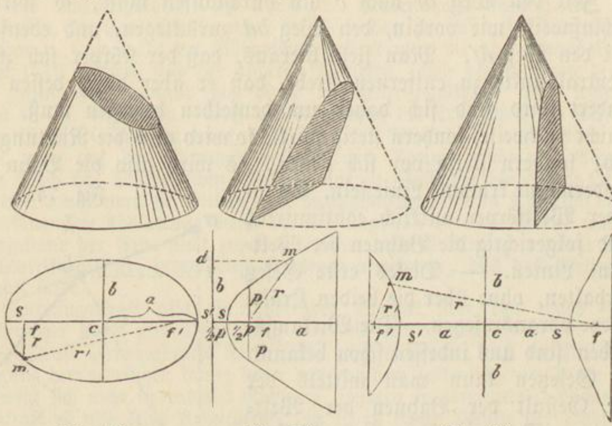


Fig. 76. Fig. 78. Fig. 80.

Entstehung und Zeichnung der drei Kegelschnitte.

Ellipse.	Parabel.	Hyperbel.
	Gebräuchliche Bezeichnungen.	
a = halbe große Achse.	a = Hauptachse.	a = halbe reelle Achse.
b = halbe kleine Achse.	b = Leitlinie od. Directrix.	b = halbe imaginäre Achse.
f und f' = Brennpunkte.	f = Brennpunkt.	f u. f' = Brennpunkte.
s und s' = Scheitel.	s = Scheitel.	s u. s' = Scheitel.
c = Mittelpunkt.	p = halber Parameter.	c = Mittelpunkt.
$cf' = cf = e = \sqrt{a^2 - b^2}$ = Excentricität der Ellipse.	$s's = \frac{1}{2}p$ dem Abstande des Scheitels von b.	$cf = cf' = \sqrt{a^2 + b^2} = e$.
mf und $mf' = r$ u. r' Leitstrahlen od. Radienvectoren.	mf = Leitstrahl $= r$. md = Abstand von b.	mf u. $mf' = r$ u. r' = Leitstrahlen oder Radienvectoren.
$r + r' = 2a$ Bildungsgesetz der Ellipse.	$r = md$ Bildungsgesetz der Parabel.	$r - r' = 2a$ Bildungsgesetz der Hyperbel.
sf = Perihelium (Perigäum).	sf = Perihelium.	sf = Perihelium.
$s'f$ = Aphelium (Apogäum).	Aphelium = unendlich.	Aphelium = unendlich.

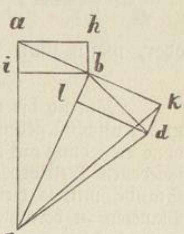
144 Kreisbewegungen von Weltkörpern sind bis jetzt nicht aufgefunden worden; nur die zwei ersten Monde des Jupiter zeigen Bahnen, die sich für uns nicht merklich vom Kreise unterscheiden. Ueberhaupt sind die Bahnen der Nebenplaneten um die Hauptplaneten außerordentlich kreisähnlich, besitzen nur eine sehr geringe Excentricität; am meisten elliptisch ist noch die Bahn unseres Erdmondes, deren Exc. = 0,05 der halben großen Achse beträgt; folglich ist das Perigäum (die kleinste Entfernung des Mondes von der Erde) nicht viel von dem Apogäum (der größten Entfernung) verschieden. Auch die Bahnen der acht großen Planeten um die Sonne sind noch sehr kreisähnliche Ellipsen; so ist die Exc. der Erdbahn = 0,017; nur die Exc. des Mars = 0,09 und des Merkur = 0,2 erreichen einen größeren Betrag. Aus dieser elliptischen Bahnform folgt indessen, daß die Planeten nicht immer gleichweit von der Sonne entfernt sind; die kleinste Entfernung wird Perihelium, die größte Aphelium genannt. Für die Erde ist nach vorläufigen Ergebnissen des Venusdurchganges vom 8. Dez. 1874 das Perihel (1. Jan.) ca 19,7 M. M., das Aphel (2. Juli) 20,3 M. M.; also ist die Erde am 1. Jan. der Sonne um 600 000 M. näher, als am 2. Juli, wodurch uns die Sonne im Sommer kleiner als im Winter erscheint. — Etwas gestreckter sind die Bahnen der bis Ende 1888 aufgefundenen 281 Planetoiden; die Exc. derselben geht bis zu 0,38; solche Bahnen erscheinen uns schon deutlich als Ellipsen, wenn wir sie ganz klein auf ein Blatt Papier zeichnen, während Planetenbahnen in diesem Falle uns als Kreise erscheinen. Noch mehr elliptisch sind die Bahnen der Doppelsterne um ihren gemeinsamen Schwerpunkt; γ virginis, der Stern, welcher in der Jungfrau an der Spitze des V steht, hat die größte Excentricität der Bahn, = 0,88, wodurch die Form der Bahn noch weit

gestreckter als ein Hühnerei ist. Ueber die Bahnen der Fixsterne oder Sonnen um ihren gemeinsamen Schwerpunkt (nach Mädler der Stern Alkyone in dem Sternbilde der Plejaden) ist noch nichts bekannt, als daß unsere Sonne sich in unseren Jahrtausenden gegen den Herkules zu bewegt. Am gestrecktesten erscheinen die Bahnen der Kometen; die Bahn des Encke'schen Kometen hat eine Exc. = 0,85, die des Halley'schen = 0,97; bei vielen Kometen geht die Exc. über 0,99; diese haben meist Umlaufszeiten von Tausenden von Jahren. Die Exc. mancher Kometenbahnen ist sogar = 1 und größer als 1, d. h. sie bewegen sich in Parabeln oder Hyperbeln; sie kommen aus dem unendlichen Weltraume, vielleicht von einem anderen Sonnensystem her, gehen um die Sonne und kehren auf der anderen Seite derselben wieder in das Unendliche zurück. — Nach den Berechnungen von Galle hatte das Meteor vom 30. Januar 1868 bei seinem Vorübergange an der Erde eine Geschw. von 7 M., woraus sich ergibt, daß dasselbe sich in einer Hyperbel mit einer Exc. = 2,3 bewegte; so mögen wohl noch andere Sternschnuppen oder Meteore, wie auch Meteorschwärme in Hyperbeln oder Parabeln um die Sonne gehen. Dies wird insbesondere dadurch wahrscheinlich, daß Schiaparelli, Peters u. A. 1866 eine sehr nahe Uebereinstimmung zwischen den Bahnen von Kometen und von Sternschnuppenschwärmen gefunden haben. Demnach sind diese Kometen entweder ganze Meteorschwärme oder Theile von solchen; daher wird das über die Kometenbahnen Gesagte wohl auch für die Bahnen der Sternschnuppenschwärme und Sternschnuppen gelten. Und wirklich gibt es auch Schwärme, die in sehr gestreckten Ellipsen um die Sonne kreisen; so hat nach Leverrier der Novemberschwarm von 1866 eine Exc. = 0,9; andere Schwärme, wie der vom 13. August, sind im Laufe der Zeiten allmälig zu ganzen Ringen geworden, bilden also ausgefüllte Ellipsen um die Sonne.

Durch das erste Keppler'sche Gesetz ist auch ausgesprochen, daß die Bahnen der Weltkörper Ebenen sind; denn die Kegelschnitte sind ja ebene Figuren; es ist daher nicht nöthig, dies als viertes Keppler'sches Gesetz besonders aufzustellen, wie es manchmal geschieht. Hieran schließt sich naturgemäß die Bemerkung, daß diese Ebenen nicht stark von einander abweichen, wenigstens bei den Hauptkörpern des Sonnensystems. Die acht großen Planeten, der Erdmond, die vier Jupitermonde bewegen sich in Bahnen, die nur wenig gegen die Erdbahn geneigt sind; stärker ist die Abweichung bei den 281 Planetoiden, bei den Ringen und dem berechneten Monde des Saturn, sowie bei den Kometen; doch laufen dieselben meistens noch so, wie sich die Sonne und die Planeten drehen, von Westen nach Osten, und scheinen hierdurch die Laplace'sche Weltbildungstheorie zu bestätigen. Dagegen die Uranusmonde haben sehr steil gegen die Erdbahn gestellte Bahnen, und von den Kometen sind viele sogar rückläufig, haben also Bahnwinkel von mehr als 90°; ebenso ist es mit Meteorschwärmen, z. B. mit dem Novemberschwarme. Nach Leverrier liegt hierin kein Widerspruch mit Laplace; denn diese Schwärme sind aus dem Weltraume in unser Sonnensystem gekommen und haben durch die Anziehung eines Planeten eine Umwandlung ihrer Bahn in eine Ellipse erfahren; Aehnliches wird wohl für die Kometen gelten.

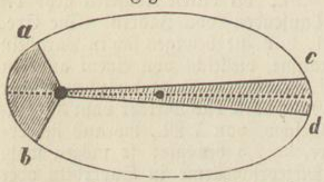
2. **Die Radienvectoren beschreiben in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume.** — Beweis: Sei ab (Fig. 81) ein so kleiner Theil der Bahn 145
eines Weltkörpers, daß wir denselben als gerade ansehen dürfen, so ist $\triangle\, abc$ der von dem Radius vector ac während der Zeit dieser Bewegung beschriebene Flächenraum. In gleicher Zeit würde der Weltkörper danach den gleichen Weg $bk = ab$ durchlaufen, wenn er nur seiner Trägheit folgen würde; durch Mitwirkung der Centripetalkraft aber gelangt er nach d; folglich beschreibt der Radius vector den Raum bdc. Es ist nun leicht zu zeigen, daß $abc = bcd$; denn $\triangle\, abc = \triangle\, bkc$, als Dreiecke, welche gleiche Grundlinien in einer und derselben Geraden und ihre Spitzen in einem Punkte haben. Ebenso ist auch $\triangle\, bdc = \triangle\, bkc$, weil sie dieselbe Grundlinie bc und ihre Spitzen in einer zur Grundlinie Parallelen kd haben. Folglich ist $\triangle\, abc = \triangle\, bdc$, womit das zweite Gesetz für kleine Flächenräume, sowie durch Summation solcher auch für größere bewiesen ist.

Fig. 81.



Dieses Gesetz, das erste der drei Keppler'schen Gesetze, macht es nicht blos möglich, die Stellung eines Planeten, Kometen u. s. w. für jede beliebige Zeit zu berechnen, wenn man einmal die Bahnelemente eines solchen Weltkörpers kennt, sondern es sagt uns auch sofort, daß ein sich im Kreise bewegender Körper immer dieselbe Geschw. hat, daß aber die Geschw. eines in elliptischer Bahn fortschreitenden Körpers eine verschiedene ist; und zwar ist für Planeten, Kometen, Sternschnuppen und Schwärme die Geschw. am größten im Perihel, am kleinsten im Aphel, und nimmt vom Aphel zum Perihel hin stetig zu. Denn im Perihel ist (Fig. 82) bei einer sehr gestreckten Ellipse der in einer gewissen Zeit beschriebene Flächenraum kurz, im Aphel aber lang; damit nun beide denselben Inhalt haben, muß der erstere breit, der letztere schmal sein; folglich muß der im Perihel in gewisser Zeit zurückgelegte Weg *ab* viel größer sein, als der im Aphel in derselben Zeit durchlaufene Weg *cd*. Für Planeten kann der Unterschied nur ein geringer sein, weil sie nur kreisähnliche Ellipsen beschreiben; indessen ist der Unterschied doch groß genug, um die wahren Sonnentage merklich ungleich zu machen, bei uns im Winter länger als im Sommer. Für die Kometen ist der Unterschied groß, oft sehr bedeutend, wegen der lang gestreckten Formen ihrer Bahnen. Denn haben sie auch im Perihel eine noch so große Geschw., ist aber das Aphel 10, 20, 30 . . . mal größer, so ist hier auch die Geschwindigkeit 10, 20, 30 . . . mal kleiner; dies ist der Grund, warum die Kometen überhaupt eine größere Umlaufzeit als die Planeten, manche aber gar Umlaufzeiten von Tausenden von Jahren haben. — Die kleine Geschw. im Aphel macht es erklärlich, daß ein Komet aus unendlicher Weite wieder in die Nähe der Sonne zurückkehrt; denn jene kleine Geschw. hat eine so kleine Tangentialkraft zur Folge, daß die Anziehung trotz der großen Entfernung überwiegend wird und den Kometen wieder herbeiführt; ebenso erklärt die große Geschw. im Perihel und die daraus resultirende überwiegende Tangentialkraft, daß der Komet trotz der großen Anziehung der so nahen Sonne nicht in dieselbe stürzt, sondern wieder ins Unendliche hinaus zieht. — Die durch Abnahme der Geschw. herbeigeführte Abnahme der lebendigen Kraft scheint dem Princip der Erhaltung der Kraft zu widersprechen; in Wirklichkeit ist sie aber diesem Princip gemäß. Denn indem sich der Weltkörper von dem Centralkörper entfernt, vollbringt er eine Arbeit, weil er die entgegenwirkende Anziehung überwindet; für diese Arbeit ist ein Verbrauch von lebendiger Kraft nöthig. Aber diese von dem Weltkörper aufgenommene Arbeit wird wieder in lebendige Kraft verwandelt, wenn er sich dem Centralkörper nähert, und zwar genau in den verbrauchten Betrag; denn im Perihel angelangt, hat der Körper wieder die vorige Geschw. und die vorige lebendige Kraft. — Aus dem 2. Gesetze folgt auch, daß unser Sommerhalbjahr länger ist als unser Winterhalbjahr, sowie endlich die Zeitgleichung (14.).

Fig. 82.



146 3. **Die Quadrate der Umlaufzeiten verhalten sich wie die Cuben der großen Bahnachsen.** — Beweis: Bezeichnen wir die Centripetalkräfte zweier Weltkörper mit k und k_1, ihre mittleren Entfernungen von dem Centralkörper (halbe große Bahnachsen) mit r und r_1, so ist nach Newtons Gravitationsgesetz $k : k_1 = r_1^2 : r^2$. Da die Centrifugalkräfte den Centripetalkräften gleich sein müssen, so haben wir nach Formel (24) auch $k : k_1 = r/t^2 : r_1/t_1^2$; hieraus folgt

$$\frac{r}{t^2} : \frac{r_1}{t_1^2} = r_1^2 : r^2 \text{ oder } \frac{t^2}{r} : \frac{t_1^2}{r_1} = \frac{1}{r_1^2} : \frac{1}{r^2} \text{ oder } \frac{t^2}{r} : \frac{t_1^2}{r_1} = r^2 : r_1^2$$

oder, wenn man beiderseits mit $r : r_1$ multiplicirt

$$t^2 : t_1^2 = r^3 : r_1^3 \text{ (q. e. d.)}$$

Während die zwei ersten Keppler'schen Gesetze sich nur auf einen Weltkörper beziehen, uns Aufschluß geben über die Bahnform und die Bewegungsart eines Weltkörpers für sich ohne Beziehung auf andere, zeigt uns das dritte Gesetz einen Zusammenhang zwischen den verschiedenen Weltkörpern, die zu einem und demselben Centralkörper gehören; wir sind im Stande, mittels dieses Gesetzes die Entfernung und dadurch die Bahn und die Geschw. eines Planeten zu berechnen, wenn wir nur seine Umlaufzeit kennen, welche ja leicht am Himmel zu beobachten ist, und wenn uns diese beiden Elemente von irgend einem anderen Planeten bekannt sind. Der Jupiter z. B. hat eine Umlaufzeit von 11 Jahren; folglich verhalten sich die Quadrate der Umlaufzeiten von Erde und Jupiter wie 1 : 121; ebenso verhalten sich auch die Cuben der ganzen und halben Bahnachsen; folglich verhalten sich die halben Bahnachsen selbst wie 1 : 5; d. h. der Jupiter ist 5 mal weiter von der Sonne entfernt als die Erde. Da nun die Planetenbahnen nahezu Kreise sind, so ist die Jupiterbahn 5 mal länger als die Erdbahn; für diese 5 mal längere Bahn braucht der Jupiter eine 11 mal längere Zeit, sonach ist seine Geschwindigkeit $^{11}/_5$, etwa 2 mal kleiner als die der Erde, $= 2$ M. — Unter der Voraussetzung, daß die Planetenbahnen Kreise seien, läßt sich aus dem dritten Gesetze ein allgemeiner Satz über die Geschw. der Planeten ableiten. Diese Geschw. sind $v = 2\pi r / t$ und $v_1 = 2\pi r_1 / t_1$; daher $v : v_1 = r/t : r_1/t_1$. Erhebt man diese

Gleichung zum Quadrat und verbindet sie mit der obigen, die das dritte Keppler'sche Gesetz ausspricht, so erhält man $v^2 : v_1^2 = r_1 : r$, woraus $v : v_1 = \sqrt{r_1} : \sqrt{r}$, d. h. *die Geschwindigkeiten zweier Planeten verhalten sich umgekehrt wie die Quadratwurzeln der mittleren Abstände von der Sonne.* Der Saturn z. B. ist mehr als 9mal weiter von der Sonne entfernt als die Erde; daher ist seine Geschw. mehr als 3mal kleiner wie die der Erde, ca 1,3 M.

Aufg. 214. Die Erde hat eine Geschw. von 4,1 M., wie groß müßte ihre Geschw. sein, damit ihre Bahn a) eine Parabel, b) ein Kreis würde? And.: Für den ersten Fall muß nach 142. sein $\frac{1}{2}mv^2 = ma \,.\, r$, worin a die von der Sonne auf die Erde ausgeübte Acceleration bedeutet; auf der Sonne selbst ist die Acceleration 9,808 . 27. Die Erde ist vom Mittelpunkte der Sonne 20 000 000 / 95 000 = 211 mal weiter entfernt als ein Punkt der Sonnenoberfläche; folglich ist $a = 9{,}808 \,.\, 27 / 211^2 = 0{,}0059^{\text{m}}$. Daher ist $v^2 = 2ra$ $= 2 \,.\, 20\,000\,000 \,.\, (0{,}0059 / 7420) = 32$, woraus $v = 5{,}7$ M. Ebenso ergibt sich für den Kreis $v = 4$ M. — A. 215. Die kleinste Entfernung des Merkur ist 6 200 000 M., die mittlere 7 850 000 M.; wie groß müßte seine Perihelgeschw. sein, damit er a) eine Parabel, b) einen Kreis beschriebe? Aufl.: a) $v = 7{,}9$ M.; b) $v = 5{,}6$ M. — A. 216. Das Aphel des Encke'schen Kometen = 40 M. M., das Perihel = 3 M. M.; wie groß groß ist die Geschw. im Aphel, wenn die im Perihel = 12 M. beträgt? Aufl.? 0,9 M. — A. 217. Im Aphel der Erde erscheint die Sonne mit einem Durchm. von 1890 Sec., im Perihel mit 1960 S.; wie groß ist die stündliche Bewegung im Winter, wenn sie im Sommer 148 Sec. beträgt? Aufl.: 153″. — A. 218. Die Entfernung des Merkur ist 8 Mill. M., die des Saturn 200 Mill. Meilen; wie groß ist die Geschw. des Saturn, wenn die des Merkur = 6,4 M. ist? Aufl.: 1,3 M. — A. 219. Die Umlaufzeiten vou Neptun und Merkur sind 60 177 und 88 Tage; wie weit ist der erstere von der Sonne entfernt? Aufl.: $(60\,177 / 88)^{2/3} \,.\, 8$ = 620 Mill. M. — A. 220. Wenn die Entfernung des Jupiter und des Saturn von der Sonne 104 und 190 Mill. M. betragen und die Umlaufzeit des ersteren 12 Jahre ist, wie groß ist die des letzteren? Aufl.: 29,63 Jahre. 147

Freie Achsen. Präcession. Nutation. Eine freie Achse ist eine solche, welche durch keine Kraft, keine mechanische Einrichtung in ihrer Richtung festgehalten wird, welche sich also nach jeder Richtung bewegen kann. Eine freie Achse findet sich z. B. in einem tanzenden Toppich oder Brummkreisel, in einem Scheibenkreisel wie etwa an einem tanzenden Knopfe, an einem tanzenden oder rollenden Geldstücke, an einem frei dahin rollenden Rade; freie Achsen sind die Drehachsen aller Weltkörper. Nachgeahmt ist die freie Achse eines Weltkörpers in Bohnenbergers Maschinchen, Fig. 83. In dem festen Ringe A kann sich der Ring B um eine vertikale Achse und in diesem der Ring C um eine horizontale Achse drehen, so daß die Drehachse der in dem Ringe C drehbaren Kugel jede beliebige Richtung annehmen kann. Auch in dem Fessel'schen Rotationsapparate (Fig. 84) ist die Achse der Scheibe A eine freie, ebenso wie in der Schiffslampe die Achse der Lampe. Für die freien Achsen gelten folgende Gesetze: 1. *Gehört die freie Achse einem ruhenden Körper an, so kann sie durch die kleinste Kraft aus ihrer Richtung gebracht werden. Ist sie aber die Drehachse eines rotirenden Körpers, so verharrt sie mit einer Kraft in ihrer Richtung, welche mit der Masse und der Geschwindigkeit des sich drehenden Körpers wächst.* Der erste Theil des Satzes ergibt sich sofort aus der Definition der freien Achse. Für den zweiten Theil muß zuerst gezeigt werden, daß durch die Drehung die Achse nicht unfrei wird. Zwar zieht jedes Molekül des Körpers dadurch an der Achse, daß es eine Centrifugalkraft hat; allein in einem regelmäßig um die Achse geformten Körper von gleichartiger Masse wird jeder Zug nach einer Seite hin durch einen gleichen und entgegengesetzten Zug aufgehoben, den ein in gleicher Lage jenseits der Achse befindliches Molekül ausübt. Demnach wird in einem regelmäßigen Körper durch die Drehung kein Druck auf die Achse erzeugt; dieselbe bleibt frei. Aber gerade so, wie jedes Molekül vermöge der Trägheit in seiner Richtung zu verharren strebt, gerade so muß auch jedes Molekül vermöge der Trägheit in seiner Drehungsebene verharren und demnach einen Widerstand ausüben, wenn eine Kraft es aus seiner Ebene heraus zu bewegen strebt. Dies ist aber der Fall, wenn man die Achse aus ihrer Richtung bringen will; alle Moleküle setzen dann einen Widerstand entgegen, der folglich um so größer ist, je mehr Moleküle vorhanden sind, je größer also die Masse des Körpers ist, und je schneller sich die Moleküle bewegen.

Fig. 83.

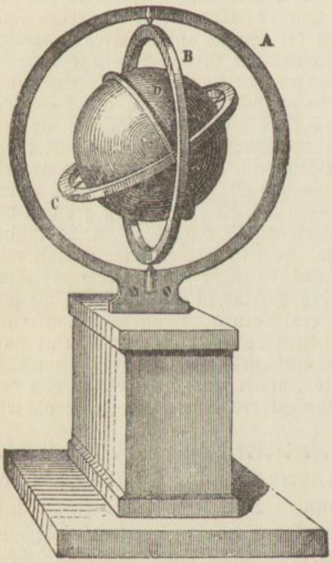
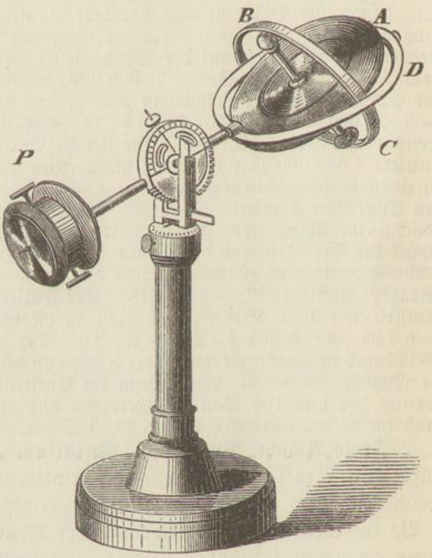
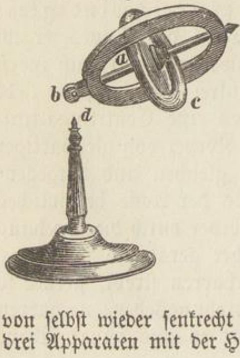


Fig. 84.



149 Ruhende, auf der Spitze stehende Kreisel aller Art fallen sofort um, weil sie in labiler Ruhe sind; ein tanzender Kreisel fällt nicht, selbst nicht, wenn er schief steht. Ruhende Scheiben, wie Räder, Geldstücke und Reifen 2c. fallen leicht um, wenn sie auf der Peripherie stehen, fallen aber nicht, wenn und so lange sie auf der Peripherie rollen oder tanzen. Bringt man die Kugel an Bohnenbergers Maschinchen durch eine um ihre Achse geschlungene Schnur in rasche Drehung, so kann man das Maschinchen wenden, drehen und stürzen, wie man will, man kann es auf der Scheibe einer Schwungmaschine in raschеste Bewegung setzen, die Achse bleibt immer der ersten Lage parallel. So bleiben auch die Achsen der Weltkörper immer in ihrer Richtung, wenn der Körper noch so schnell und mannichfaltig durch den Weltraum fortläuft; so zeigt unsere Erdachse immer gegen den bekannten Nordpolarstern und erhält dadurch den Wechsel der Jahreszeiten in alter Weise constant. Besonders auffallend zeigt sich der Widerstand gegen jede Aenderung der Achsendrehung an dem Maschinchen, sowie an Fessels Rotationsapparat (Fig. 84), an welchem eine ganze Reihe interessanter Versuche gemacht werden kann, und an einer einfachen Abänderung desselben, an **Foucaults Gyroskop** (γῦρος = Kreis) (Fig. 85). Wenn an Fessels Apparat die Scheibe A in rasche Drehung versetzt worden ist, so kann man das Gegengewicht P sogar wegnehmen, ohne daß der ganze schwere Theil $ABCD$ sich senkt. Hat man die Scheibe c des Gyroskops in Rotation versetzt, so kann man die ganze Einrichtung mittels des Pfännchens b auf die Spitze d setzen, ohne daß sie fällt. Hier ist also wegen der großen Masse und wegen der großen Geschwindigkeit der Hauptmasse in dem Ringe das Beharrungsvermögen so groß, daß die verticale Componente desselben das Gewicht der ganzen Einrichtung im Gleichgewichte hält, ja bei rascher Drehung sogar etwas nach aufwärts dreht. In ähnlicher Weise stellt sich ein schief stehender Kreisel von selbst wieder senkrecht auf, wenn er nur rasch genug rotirt. Versucht man es, an den drei Apparaten mit der Hand die Achse zu verändern, so spürt man sofort einen merklichen

Fig. 85.



Widerstand, ein zurückstoßendes Widerstreben der Maschine. An dem Schmidt'schen Kreisel (Fig. 86) tritt die Beharrung der Achsen besonders auffallend hervor, da hier an die Achse *cd* sogar noch ein Gewicht gehängt werden kann; dieser Apparat ist auch deßhalb empfehlenswerth, weil er vermöge der Hülse rechts von *c*, mit der die Scheibe *ab* ein Ganzes bildet, leicht in Gang zu setzen ist, und weil er in manchen Fällen die Schwungmaschine ersetzen kann.

2. Wenn auf einen um eine freie Achse sich drehenden Körper eine nicht 150
allzu große Kraft einwirkt, welche die Richtung der Achse zu ändern strebt, so ändert sich der Winkel der Achse gegen die Hauptachse des ganzen Systems nicht, wohl aber ihre Stellung, indem die Achse mit unverändertem Winkel gegen die Hauptachse eine Kegelfläche um dieselbe beschreibt.

Fig. 86.

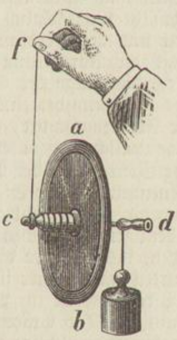
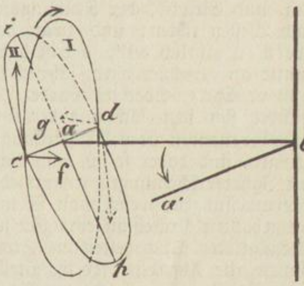


Fig. 87.



Beweis nach Poggendorff. Wir führen denselben am einfachsten an dem Gyroskop. Es sei I (Fig. 87) die mit der Achse *ab* drehbare Scheibe, welche durch eine Kraft in die Lage II gebracht werde. Die Theilchen der Scheibe z. B. *c* und *d* haben das Bestreben, in der früheren Richtung weiter zu gehen, werden demnach von Kräften in den durch vertikale Pfeile angedeuteten Richtungen gezogen. Die Kraft bei *c* wirkt diesseits, die Kraft bei *d* jenseits der neuen Lage der Scheibe schief gegen dieselbe; diese Kräfte enthalten daher jedenfalls senkrechte Componenten *cf* und *dg*, welche an der Scheibe von entgegengesetzten Seiten ziehend wirken, und sie daher um den Durchmesser *ih* zu drehen streben. Dadurch erhält die Scheibe eine in der Figur nicht gezeichnete Lage, durch welche die jetzt sichtbare Seite allmälig verschwindet und die Hinterseite sichtbar wird, sie rückt also aus der vorigen Lage gegen den Beschauer hin und mit ihr kommt die Achse in die Lage *ba'*; sie dreht sich um die vertikale Achse *b*.

Bei dem Gyroskop wird die drehend wirkende Veränderung der Lage in jedem Augenblicke durch das sehr bedeutende Gewicht des ganzen seitlich hängenden Apparates erzielt; die Geschwindigkeit der Drehung muß daher auch sehr bedeutend und dadurch besonders auffallend sein. An dem Fessel'schen Apparat kann man durch Verschieben des Gegengewichtes *P* das Uebergewicht bald auf die eine, bald auf die andere Seite bringen und daher die Drehung wechseln, vermehren oder vermindern, oder auch ganz aufheben. Am interessantesten in dieser Beziehung ist Bohnenbergers Maschinchen, weil es die Kegeldrehung der Erdachse nachahmt. An dem innersten Ringe sind zwei kleine Löcher zur Aufnahme eines kleinen Uebergewichtchens, das die ruhende Achse sofort senkrecht stellt, die rotirende aber zur langsamen Kegeldrehung bringt. In ähnlicher Weise würde sich die ruhende Erdachse, welche mit der Ebene der Erdbahn oder Ekliptik einen Winkel von $66^1/_2{}^0$ bildet, auf dieselbe senkrecht stellen. Denn vermöge der Abplattung der Erde hat dieselbe am Aequator einen größeren Radius als gegen die Pole hin, kann also als eine Kugel betrachtet werden, die um den Aequator herum noch einen Wulst trägt, der nach den Polen zu immer dünner wird. Dieser Wulst nun befindet sich nicht in der Ebene der Ekliptik, sondern ist um $23^1/_2{}^0$ gegen dieselbe geneigt, wird aber von der in der Ekliptik stehenden Sonne angezogen. Durch diese Anziehung müßte er sich der Ekliptik nähern, bis er endlich in dieselbe fiele, und so müßte sich die Erdachse auf die Ekliptik senkrecht stellen, sie müßte der Achse der Ekliptik parallel werden, — wenn eben die Erde sich nicht drehen würde. Da dieses aber der Fall ist, so gilt für die Erdachse der zweite Satz, die Erdachse muß sich mit unverändertem Winkel in einer Kegelfläche um die Achse der Ekliptik drehen. Zwar beträgt die Zeit für eine solche Kegeldrehung der Erdachse 26 000 Jahre (das sog. Platonische Jahr); es zeigt daher die Erdachse wohl Jahrhunderte lang nach einem Punkte des Himmels, unser Polarstern wird noch lange Zeit als solcher gelten können; allein in Jahrtausenden zeigt sie doch allmälig nach anderen Stellen des Himmels, welche indeß alle gleichweit von dem Ende der Achse der Ekliptik, d. i. von dem Pole der Eklipktik, welcher im Sternbilde des Drachens liegt, entfernt sind. Der Nordpol des Himmels beschreibt also in 26 000 Jahren einen Kreis von $23^1/_2{}^0$ Halbmesser um den Pol der Ekliptik, er wird sich z. B. in 12 000 J. in dem Sterne Wega (*α* Lyrae), einem Sterne erster Größe, befinden. Hierdurch verändern sich im Laufe der Zeit manche Erscheinungen. Der große Bär, die Kallisto, die sich zur Zeit der alten Griechen nicht in den reinen Schooß des Okeanos tauchen durfte, geht jetzt theilweise unter; das herrliche Sternbild des südlichen Kreuzes mag wohl den alten Völkern sichtbar gewesen sein, wie Dante uns ahnen läßt, wenn er singt:

Jo mi volsi a man destra, e posi mente
All' altro polo, e vidi quattro stelle
Non viste mai fuorché alla prima gente. (Purgatorio, cant. I, v. 22).

Aus der Veränderung der Polstellung folgt übrigens keine Veränderung der Jahreszeiten; denn die Erdachse verändert ihre Neigung gegen die Ekliptik nicht, und daher behält auch der Aeq. seine Neigung gegen dieselbe, von welcher ja der Wechsel der Jahreszeiten abhängt, vollkommen bei. Allein eine Veränderung der Stellung des Aeq. gegen die Ekliptik findet wohl statt. So wie die Erdachse sich in 26 000 Jahren in umgekehrter Richtung wie die Erde selbst, also von Osten nach Westen, um die Achse der Ekliptik dreht, so muß sich auch der Aeq. in derselben Zeit drehen; folglich müssen die zwei Schnittpunkte von Aeq. und Ekliptik, der Frühlingspunkt und der Herbstpunkt, die zwei Nachtgleichenpunkte, nach Westen rücken; und zwar beträgt die Vorrückung oder Präcession der Nachtgleichen jährlich 50″, so daß hierdurch die Länge der Sterne, da sie von dem Frühlingspunkte an gerechnet wird, jährlich um 50″ zunimmt, eine Thatsache, die schon von Hipparch (130 v. Chr.) beobachtet wurde. Der Frühlingspunkt, der zu jener Zeit im Widder lag, befindet sich jetzt fast auf der Grenze zwischen dem Wassermann und den Fischen; die Kalenderangaben über die Stellung der Sonne und der Planeten, die noch nach alter Weise erfolgen, sind daher falsch, und die Benennungen der Sternbilder des Thierkreises, die meist mit Jahreserscheinungen zusammenhängen, passen jetzt nicht mehr. Ebenso müssen ältere Sternmessungen, wenn man sie mit heutigen vergleichen will, um den Betrag der seitdem stattgehabten Präcession corrigirt werden, insbesondere die Länge, die Rectascension und die Declination. Auch gelten die Sternkarten immer nur für einige Jahrhunderte. Umgekehrt können alte Angaben über die Stellung der Sterne zur Bestimmung der Zeit dieser Angabe dienen. (Der Thierkreis von Denderah). — Die Präcession ist nicht gleichmäßig, weil die Wirkung der Sonne auf den äquatorialen Erdwulst im Lauf eines Jahres verschieden z. B. im Frühlings- und Herbstpunkte = 0 ist; diese Ungleichmäßigkeit nennt man Nutation. Auch der Mond bringt Präcession und Nutation hervor; die Lunarnutation ist größer als die Solarnutation, weil die Bahnveränderungen des Mondes stärker sind; deßhalb sagt man wohl, die Nutation rühre von dem Monde her.

151 **Unfreie Achsen, stabile, labile und indifferente Achsen** (Reuleaux 1858). Nicht jede Drehachse, wenn sie auch der mechanischen Einrichtung nach in keine Lage gezwungen ist, ist bei der Drehung frei; die analytische Mechanik zeigt, daß eine Drehachse während der Drehung nur dann frei ist, wenn sie durch den Schwerpunkt des Körpers geht, und wenn in Bezug auf dieselbe das Trägheitsmoment entweder ein Maximum oder ein Minimum ist; jede andere Drehachse ist unfrei, mag sie auch die freieste Lagerung oder Aufhängung haben; sie erfährt durch die Centrifugalkräfte einen Druck oder Zug, muß sich also drehen oder fortbewegen. Aber auch diejenigen Schwerpunktachsen, welche der genannten Bedingung genügen, zeigen bei der Drehung ein verschiedenes Verhalten, je nachdem das Trägheitsmoment ein Maximum oder ein Minimum ist. Für den letzteren Fall ist nämlich auch die Centrifugalkraft aller Körpertheilchen zusammen ein Minimum; daher muß dieselbe größer werden, sowie die Achse nur die kleinste Veränderung erleidet und dadurch unfrei wird; durch die Centrifugalkraft erleidet sie dann einen Druck, und wird dadurch immer mehr aus ihrer Lage gebracht, bis sie endlich in diejenige Lage gelangt, wo die Centrifugalkraft ein Maximum ist; gewöhnlich ist dann hier auch das Trägheitsmoment ein Maximum, die Achse ist wieder frei und muß bei jeder Veränderung wieder in diese Lage zurückkehren. In dieser Lage ist also die freie Achse stabil, hier gehorcht sie den angeführten zwei Gesetzen. In der vorigen Lage dagegen war sie labil frei, wobei sie dem zweiten Gesetze nicht folgen kann. — Es hängt von der Körperform ab, ob eine Drehachse stabil oder labil frei ist; für die Kugel sind alle Durchmesser stabil freie Achsen. Nach Reuleaux ist in einem Cylinder die geometrische Achse nur dann stabil, wenn die Höhe kleiner ist als $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ oder 0,866... multiplicirt mit dem Radius; ist die Höhe größer als dieser Theil des Radius, so ist jene Achse labil; stabil ist dann eine derjenigen Schwerpunktachsen, welche auf der Cylinderachse senkrecht stehen. Hieraus erklären sich die Erscheinungen Fig 88 und 89. Die beiden Cylinder sind mit Fäden an dem Punkte *m* aufgehängt, der in der Achsenrichtung einer Schwungmaschine liegt. Wird dieselbe rasch gedreht, so wird der Cylinder (Fig. 88) bald die labile Drehachse *ab* verlassen und sich um die stabile Achse *cd* zu drehen streben, wobei ihm die Schwere entgegenwirkt. Dagegen wird die Scheibe (Fig. 89) sich so zu stellen streben, daß sie sich um die Cylinderachse *ab* dreht. Hier ist also die Cylinderachse stabil, während sie in Fig. 88 labil ist. Zwischen diesen beiden Cylinderformen muß offenbar eine

Form liegen, in welcher die geometrische Achse weder labil, noch stabil, sondern indifferent ist, welche Achse also weder mit Kraft in einer Lage verharrt, noch aus einer angenommenen

Fig. 88.

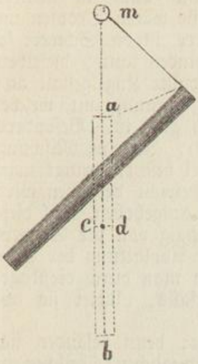


Fig. 89.

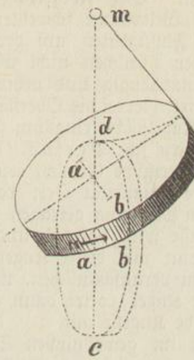
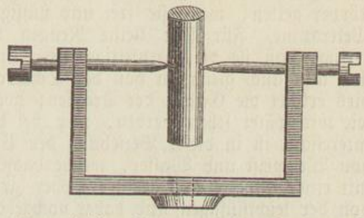


Fig. 90.



Lage leicht herausweicht, sondern in jeder Lage ruhig bleibt. Dieses findet statt, wenn das Trägheitsmoment in Bezug auf die geometrische Achse ebenso groß ist, als in Bezug auf die zu derselben senkrechten Schwerpunktachsen, d. i., wenn (nach Reuleaux) die Höhe gleich 0,866 von dem Radius ist. Aehnliches ergibt sich für andere Körper. Diese interessanten Erscheinungen lassen sich am besten darstellen mittels einer auf die Schwungmaschine geschraubten Gabel (Fig. 90), deren Arme zur Herstellung der freien Achse verschraubbare Stifte tragen, zwischen deren Spitzen die Körper an kleinen Pfännchen gefaßt werden.

Zweite Abtheilung.

Die Mechanik der flüssigen Körper oder die Hydromechanik.

(Hydrostatik und Hydraulik.)

1. Grundeigenschaften der Flüssigkeiten.

Flüssig ist ein Körper, wenn seine Theilchen zwar noch einen Zusammenhang 152
haben, aber durch die kleinste Kraft gegen einander verschoben werden können. Dies ist (nach 18.) der Fall, wenn die lebendige Kraft der Moleküle so groß ist, daß die schwingende Bewegung derselben in jedem Augenblicke in eine fortschreitende übergeht. Je mehr von den Molekülen in fortschreitender Bewegung begriffen sind, desto leichtflüssiger ist der Körper; leichtflüssig sind condensirte Gase, Aether, Alkohol, ätherische und Steinöle, besonders Gasolin und Rhigolin, Schwefelkohlenstoff, Anilin, Wasser; zähflüssig die fetten Oele, Schwefelsäure, Glycerin, Syrup; schwerflüssig sind Quecksilber und andere flüssige Metalle. Aus der Definition der Flüssigkeiten ergeben sich folgende Grundeigenschaften:

a. Die Flüssigkeiten haben selbständiges Volumen; denn ihre Theilchen besitzen Zusammenhang; sie haben aber, wenn sie nicht unabhängig von der Erde und anderen Körpern sind, keine selbständige Gestalt, weil sowohl die Erde als auch andere nahen Körper die leicht beweglichen Theilchen aus ihrer Lage ziehen können.

b. Die Flüssigkeiten nehmen die Formen ihrer Gefäße an, weil jede höhere Schicht durch ihr Gewicht auf die tieferen drückt und daher die Theilchen in jeden, etwa leer gedachten, Raum hineinschieben müßte.

c. Die höchste Oberfläche der Flüssigkeiten ist wagrecht. Wäre sie nicht wagrecht, so könnte man sich unter den obersten Theilchen schiefe Ebenen denken, auf denen dieselben alsdann herabrollen müßten; dies kann so lange geschehen, bis keine schiefe Ebene mehr denkbar, bis also die Oberfläche wagrecht ist, d. h. auf der Richtung nach dem Schwerpunkte der Erde senkrecht steht.

d. Die wagrechte Oberfläche der Flüssigkeiten ist ein Theil einer sehr großen Kugelfläche. Wäre die ganze Erde mit Wasser bedeckt, so müßte jedes Element der Oberfläche auf der Richtung nach dem Schwerpunkte senkrecht stehen; diejenige Fläche aber, deren Elemente sämmtlich auf den Richtungen nach einem Punkte senkrecht stehen, ist die Kugelfläche; das

Meer hat also eine Kugeloberfläche; an Seen, in Gefäßen u. s. w. ist wegen der Kleinheit der Oberfläche im Verhältnisse zur Größe der Kugel die Krümmung unmerklich.

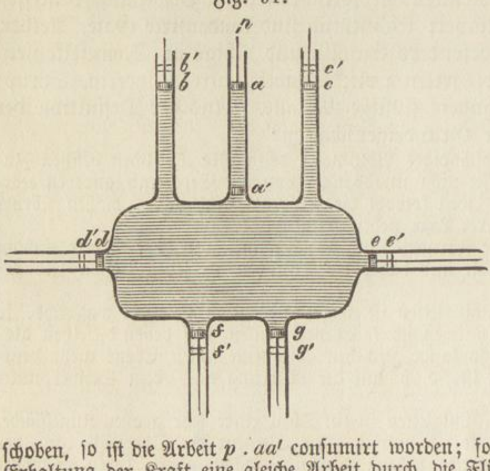
e. Unabhängige Flüssigkeiten haben Kugelgestalt. Bestände die Erde ganz aus Wasser, so müßte sie nach d. ebenfalls eine Kugel sein. Diese Folgerung müßte auch für kleinere Körper gelten, wenn sie frei und flüssig im Weltraume schwebten; sie wären Tropfen im Weltraume. Für sehr kleine Mengen von Flüssigkeiten auf der Erde ist die Schwere so gering, daß sie die gegenseitige Anziehung der Theilchen nicht überwinden kann; dieselben sind also auch gleichsam von der Schwere unabhängig und nehmen daher Kugelgestalt an; dies erklärt die Gestalt der Tropfen; doch wirkt hierbei die Oberflächenspannung mit, welche, wie wir später sehen werden, nur bei der Kugelfläche ringsum gleich groß ist. Besonders interessant ist in dieser Beziehung der Plateau'sche Versuch (1843): In eine Mischung von Weingeist und Wasser, welche dasselbe specifische Gewicht wie Oel besitzt, bringt man mit einer Pipette eine geringere oder größere Quantität Oel; das Gewicht derselben wird von der leichtflüssigen und daher nachgebenden Mischung getragen und aufgehoben, weil diese einen gleichen Gegendruck ausübt; die Oelmasse wird dadurch unabhängig von der Schwere und nimmt daher Kugelgestalt an. Man kann mit dieser Kugel die Abplattung der Erde und das Kant-Laplace'sche Weltbildungssystem veranschaulichen, indem man durch die Kugel eine Achse steckt und diese rotiren läßt. Die Kugel rotirt dann ebenfalls, plattet sich ab, nimmt Ringform an und löst sich in kreisende Kugeln auf.

f. Die Flüssigkeiten haben keine Poren im gewöhnlichen Sinne; denn befänden sich größere Lücken in dem Gewebe der Moleküle, so würden die leicht beweglichen Theilchen in diese Lücken hineinfließen und dieselben erfüllen. Molekulare Zwischenräume besitzen die Flüssigkeiten wie alle anderen Körper, sogar durchschnittlich größere als die festen Körper. Da nun die Gasmoleküle und theilweise auch die Moleküle der Flüssigkeiten in fortschreitender Bewegung begriffen sind, so müssen dieselben, wenn sie in Berührung mit einer Flüssigkeit stehen, zwischen die Moleküle derselben eindringen oder diffundiren und so sich in derselben auflösen, wenn die materielle Verschiedenheit dies gestattet.

g. Die Flüssigkeiten sind nur wenig compressibel, weil sie nicht wie die festen Körper Poren haben, und weil ihre Moleküle nicht wie bei den Luftarten sehr weit von einander abstehen. Näheres s. 53. Hört eine zusammendrückende Kraft zu wirken auf, so kehren die Moleküle vermöge ihrer Bewegung in die frühere Lage zurück, der Körper dehnt sich also wieder aus: Flüssigkeiten sind ausdauernd elastisch.

153 **Die gleichmäßige Fortpflanzung des Druckes** (Pascal 1650). Wird auf eine Flüssigkeit an irgend einer Stelle ein Druck ausgeübt, so pflanzt sich dieser Druck in unmeßbar kurzer Zeit durch die ganze flüssige Masse bis an die Grenzen der Flüssigkeit und zurück fort, so daß jede gleich große Fläche im Innern wie an der Grenze einen gleich großen Druck erleidet, welches die Richtung der Fläche auch sein möge. An der Grenze wird ein Gegendruck von der Grenzwand ausgeübt; ist dieselbe keines Gegendruckes fähig oder ist derselbe kleiner als der ausgeübte Druck, so muß an der betreffenden Stelle die Flüssigkeit mit ihrem Ueberdrucke vordringen.

Fig. 91.



Diese wichtigste Grundeigenschaft der Flüssigkeiten wird am besten durch einen ideellen Versuch klar: Das mit sieben ganz gleichen cylindrischen Röhren versehene Gefäß (Fig. 91) sei mit Wasser gefüllt, das durch gewichtlose Kolben abgeschlossen sei. Wird nun auf den Kolben a ein Druck p ausgeübt und dieser Kolben dadurch bis a' verschoben, so ist die Arbeit $p \,.\, aa'$ consumirt worden; folglich muß nach dem Princip von der Erhaltung der Kraft eine gleiche Arbeit durch die Flüssigkeit producirt werden. Weil diese nicht zusammendrückbar ist, so muß sie dem Drucke p ausweichen. Sie kann dies, indem sie in die übrigen 6 Röhren eindringt, und da sie nach allen Seiten gleich leicht beweglich ist, so wird dies auch geschehen; die flüssige Masse aa' wird sich auf die 6 Röhren vertheilen; es werden daher die 6 Kolben, jeder um $^1/_6\,aa'$ nach außen geschoben. Bezeichnen wir den unbekannten Druck, mit welchem dies an jeder Röhre geschieht, durch x, so ist die producirte Arbeit $6 \,.\, x \,.\, ^1/_6\, aa' = x \,.\, aa'$; daher besteht nach dem Princip die Gl. $x \,.\, aa' = p \,.\, aa'$, woraus $x = p$; es wird also jeder gleiche Kolben mit dem gleichen Drucke p fortgeschoben. Diese gleiche Fortpflanzung des Druckes nach der Grenze ist aber nur möglich, wenn auch im Inneren derselbe Druck herrscht. Das Gesetz gilt nicht blos für bewegte Flüssigkeit, sondern auch für ruhende; die eben ausgeführte Ableitung wird einfach dadurch auf eine ruhende Flüssigkeit ausgedehnt, daß man die Wege unendlich klein setzt.

Durch diesen ideellen Versuch ist das Bestehen des Gesetzes zwar bewiesen, aber nicht erklärt. Dies kann auf folgende Weise geschehen: Durch einen Druck auf eine Flüssigkeit werden die gedrückten Moleküle ein wenig vorangeschoben, d. h. sie erfahren eine Vermehrung ihrer fortschreitenden Bewegung und dadurch eine Verstärkung ihrer lebendigen Kraft. Demnach müssen diese Moleküle auf die folgenden stärker stoßend einwirken und so auch deren lebendige Kraft erhöhen. Weil nun aber die fortschreitende Bewegung der Moleküle jeden Augenblick nach allen Richtungen stattfindet, so muß auch nach allen Seiten die lebendige Kraft der Theilchen erhöht, also der Druck nach allen Seiten fortgepflanzt werden. In einer von festen Grenzwänden umschlossenen Flüssigkeit muß er auch nach rückwärts gleich groß sein; denn in diesem Falle können die Moleküle der Grenzwand keine Arbeit mittheilen, kehren also mit derselben lebendigen Kraft um, so daß in jedem Punkte der Druck von allen Seiten gleich groß wird. Ist aber eine Stelle der Grenzwand beweglich, so empfängt sie Arbeit; die Moleküle kehren daher nicht mit derselben lebendigen Kraft um, der Druck nach rückwärts ist dann im Innern kleiner als der nach vorwärts, die flüssige Masse muß sich voran bewegen nach der beweglichen Grenzwand, nach dem Kolben hin. Daß die Fortpflanzung des Druckes mit der molekularen Bewegung zusammenhängt, dafür spricht ein Versuch von O. E. Meyer (1873), nach welchem die Geschw. der Fortpflanzung des Druckes in Röhren etwa 1000^{m} beträgt, also mit der des Schalles in Wasserröhren übereinstimmt.

Das Gesetz der gleichmäßigen Fortpflanzung des Druckes kommt fast in allen Lehren über die Flüssigkeiten und die Luftarten zur Verwendung. Dasselbe zeigt sich besonders auffallend in folgenden Erscheinungen: Ein mit Wasser gefülltes Glas zerbricht, wenn man in dem Wasser eine Glasthräne zerspringen läßt. — Das Fischprellen besteht darin, daß man mit einem Hammer auf das Eis schlägt, unter welchem im Wasser ein Fisch schwimmt, oder daß man einen stark explosiven Stoff im Wasser entzündet. — Der kartesianische Taucher, eine im Wasser schwimmende hohle Gestalt mit einer Oeffnung an der Seite, sinkt hinab, wenn auf das Wasser ein Druck ausgeübt wird, weil durch diesen Druck das Wasser in die Figur dringt und diese dadurch schwerer macht. — Unter den empfehlenswerthen und billigen Glasapparaten, welche nach Prof. Schäffer in Jena von thüringischen Glasfabriken z. B. in Ilmenau für die Lehre von den Flüssigkeiten und Luftarten angefertigt werden, ist auch der Apparat (Fig. 92), der das Gesetz der gleichförmigen Fortpflanzung durch einen einfachen Versuch ausnehmend deutlich darstellt.

Eine besonders wichtige Anwendung hat die gleichmäßige Fortpflanzung des Druckes in der hydraulischen Presse (Stevin 1600, Bramah 1797). Wenn nämlich der mittels eines Kolbens ausgeübte Druck sich auf jede gleich große Fläche in derselben Größe fortpflanzt, so muß eine $n$mal so große Fläche einen $n$fachen Druck erfahren; man kann demnach einen auf Wasser ausgeübten Druck beliebig vervielfachen, indem man einfach das Wasser auf eine beliebig große, fortschiebbare Fläche einwirken läßt; nur ist dem bekannten Princip gemäß die Bewegung dieser Fläche viel kleiner als die des Kolbens. Hierauf beruht die hydraulische Presse (Fig. 93). Mittels des einarmigen Hebels G wird der Druckkolben B einer kleinen Pumpe auf- und abbewegt und dadurch Wasser in die kleine Pumpe gesogen und durch das Rohr FE in das Reservoir C getrieben. Der hierbei von dem Druckkolben B ausgeübte Druck pflanzt sich auf den Preßkolben in C fort, wird aber dort soviel mal größer, als die Unterfläche dieses Kolbens größer ist als diejenige des Druckkolbens B. Ist z. B. wie bei der großen hydraulischen Presse, die an der großen Röhrenbrücke über den Menai-Kanal nach der Insel Anglesea zum Heben der einzelnen Röhrenstücke benutzt wurde, der Durchmesser des Druckkolbens = 1″ engl. und der des Preßkolbens = 20″, so übt der letztere einen 400mal so großen Druck als der erstere aus; durch den Hebel G kann diese Vergrößerung z. B. 10 bis 20mal vervielfacht werden. So kann ein Mann, der eine Druckkraft von 50^{kg} besitzt, wohl eine Pressung von 400000^{kg} ausüben; an jener Brücke wurden Stücke von über 1 Million kg Gewicht gehoben. Auch benützt man die hydraulische Presse zum Auspressen in Oelmühlen, Rübenzuckerfabriken, Stearinfabriken, zum Glätten von Papier und Zeug, zum Zusammenpressen von Baumwolle, Heu u. s. w., zur Prüfung der Festigkeit von Tauen, Ketten, Platten u. s. w., zum Krümmen der Schiffpanzerplatten, zum Einpressen von Luft in große Räume z. B. in den Mont-Cenis-Tunnel, zum Einkeilen der

Räder auf ihre Wellen u. s. w. — Nahe verwandt mit derselben jedoch rasch wirkend ist **der hydraulische Accumulator** oder Kraftsammler, ein hoher, weiter, starkwandiger Metallcylinder mit einem mächtig belasteten Kolben. Unter den Kolben wird von einem starken Motor z. B. einer Dampfmaschine mittels Druckpumpen Wasser gepreßt, das allmälig den Kolben zu seiner höchsten Höhe treibt; am Fuße des Cylinders übt dann das Wasser einen Druck nach allen Richtungen aus gleich dem Gewichte des Wassers vermehrt um das des Kolbens. Dieses bis zu 100^{at} hoch gespannte Wasser kann durch ein Röhrensystem seinen Druck nach jeder Richtung und ziemlich weit fortpflanzen, so daß diese hydraulische Kraftfortpflanzung in Bahnhöfen, Hafenbauten u. s. w. zahlreiche Arbeiten an Krahnen, Winden u. s. w. rasch leisten kann.

Fig. 92.

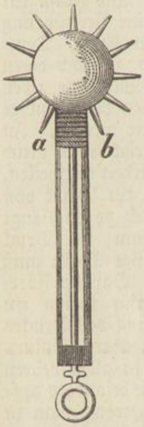
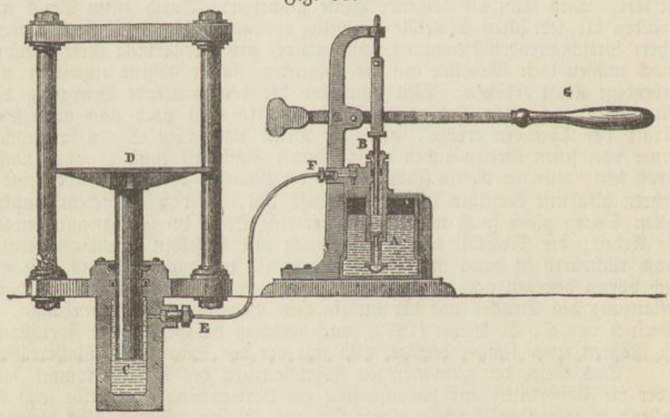


Fig. 93.

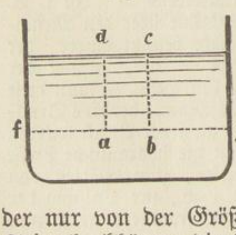


154 Aufg. 221. Wie groß ist der Druck auf einen Kreis von 45^{cm} Durchmesser, auf ein Rechteck von 20^{cm} Höhe und 12^{cm} Breite, auf eine Ellipse von 15^{cm} großer und 8^{cm} kleiner Achse, auf ein Trapez von 25^{cm} Höhe und parallelen Seiten von 40 und 30^{cm}, wenn der Druck auf $1^{qcm} = 24^{g}$ beträgt? Aufl.: $38,17^{kg}$, $5,76^{kg}$, $2,262^{kg}$, 21^{kg}. — A. 222. In einer Presse ist der Durchmesser des Druckkolbens $1,5^{cm}$, der des Preßkolbens 15^{cm}, ein Mann drückt an einem Hebel von 2^{m} Länge, der die Stange in 15^{cm} Entfernung vom Stützpunkte trägt, mit 40^{kg}; wie groß ist der Druck des Preßkolbens? Aufl.: 60681^{kg}. — A. 223. Wie groß mußte an der Menai-Brücke der Nutzeffect der Dampfmaschine sein, wenn die Kolbenstange derselben direct auf den Druckkolben wirkte, und wenn ein Stück von 1 Mill. kg in jeder Stunde 9^{m} gehoben werden sollte? Aufl.: $33\frac{1}{3}^{e}$. — A. 224. Wenn ein Mann von 30^{kg} Druckkraft mit einem Hebel von 10facher Uebersetzung und einem Druckkolben von 2^{cm} Durchmesser einen Druck von $20\,000^{kg}$ ausüben soll, welchen Durchmesser muß dann der Preßkolben haben? Aufl.: $16,3^{cm}$.

2. Das Princip der gleichmäßigen Druckfortpflanzung in Verbindung mit dem Gewichte der Flüssigkeiten.

155 **Druck durch das Gewicht der Flüssigkeiten.** Auf einem beliebigen, wagrechten Flächenelement *ab* (Fig. 94) im Inneren einer Flüssigkeit ruht der flüssige Körper *abcd*; das Flächenelement hat das Gewicht dieser Säule zu tragen, erleidet also denselben Druck, als ob ein Kolben mit einer Kraft, jenem Gewichte gleich, auf dasselbe gesetzt wäre. Da nun ein solcher Druck nach dem Princip sich nach allen Richtungen in gleicher Stärke auf jedes gleiche Flächenelement fortpflanzt, so finden folgende Pressungen statt:

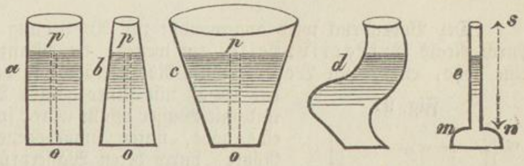
Fig. 64.



1. Jedes gleiche Flächenelement derselben wagrechten Ebene *fg* erleidet einen Druck von oben nach unten, der nur von der Größe des Elementes und seiner senkrechten Entfernung vom Spiegel abhängt; die Größe dieses Druckes ist gleich dem Gewichte einer Flüssig-

keitsäule, deren Grundfläche das Flächenelement und deren Höhe der Abstand desselben vom Spiegel ist. Es ist hierbei einerlei, ob die Wände des Gefäßes senkrecht oder schief nach auswärts, schief nach einwärts, nach oben oder unten eingebogen, oder von jeder beliebigen Form sind; wo das Element die betreffende flüssige Säule nicht über sich hat, rührt der Druck von anderen Elementen derselben wagrechten Ebene her. Jedes Element einer höher gelegenen wagrechten Ebene erleidet einen kleineren Druck, jedes niedriger gelegene Element einen größeren Druck. 2. Dieser Druck auf die Flächenelemente findet nicht blos von oben nach unten, sondern auch in jeder beliebigen Richtung innerhalb der wagrechten Ebene statt; jedes Flüssigkeitstheilchen erleidet von allen Seiten genau denselben Druck und ist daher im Gleichgewichte; auch die Wände erfahren denselben und erwiedern ihn, wenn ihre Festigkeit es gestattet. 3. Derselbe Druck pflanzt sich auch auf den Boden und von diesem zurück aufwärts fort; es findet also auf das Flächenelement *ab* genau derselbe Druck von unten nach oben, wie von oben nach unten statt, wodurch diese Druckkräfte einander aufheben und daher die Ruhe von *ab* nicht stören. Deßhalb aber kann der abwärts gerichtete Druck nicht auch auf tiefere Elemente wirken, diese erfahren von oben und von unten den größeren Druck, der ihrer Flüssigkeitsäule entspricht; er kann sich auch nicht auf höhere Elemente übertragen, diese erleiden nur den Druck von unten, der von den Säulchen auf ihrer wagrechten Ebene herrührt. Dieser Druck von unten nach oben findet auch statt, wenn über dem Element *ab* die Flüssigkeit weggenommen wäre; er rührt alsdann von den seitlichen Elementen derselben wagrechten Ebene her. Er findet auch statt, wenn an die Stelle der Flüssigkeit *abcd* ein anderer Körper gesetzt würde; ja er ist erst dann recht merklich, weil dann der Druck von oben nach unten ein anderer sein kann, und hierdurch die Aufhebung des Druckes noch oben durch den nach unten wegfallen kann.

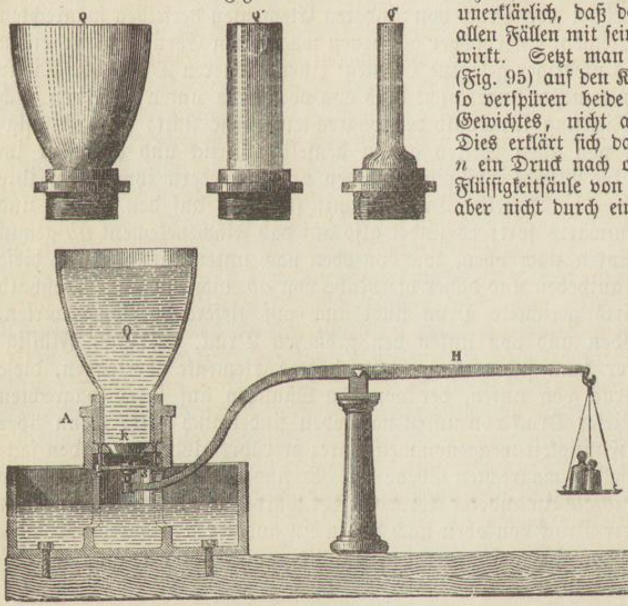
Fig. 95.



Der Bodendruck (Stevin 1600). Das hydrostatische Paradoxon. Unter dem Bodendrucke versteht man den Druck, den der Boden eines mit Flüssigkeit gefüllten Gefäßes durch dieselbe erfährt. 156
Ueber die Größe desselben besteht folgendes Gesetz: Der Bodendruck ist gleich dem Gewichte einer Flüssigkeitsäule, deren Grundfläche der Boden und deren Höhe der Abstand des Bodens vom Spiegel ist. Denn es erfährt irgend ein Flächenelement *o* (Fig. 95) der tiefsten Schicht, das noch senkrecht unter dem Spiegel ist, den Druck des über ihm stehenden Säulchens *op*; dieser Druck aber pflanzt sich nach 155. in gleicher Größe auf jedes gleiche Flächenelement der tiefsten Schicht fort; es hat also jedes gleiche Flächenelement den Druck eines solchen Säulchens zu tragen, mag dieses über dem Element wirklich vorhanden sein oder nicht, wie es z. B. in *b*, *d* und *e* der Fall ist. Der Druck auf die unterste Schicht geht nun direct auf den Boden über; daher hat der Boden den Druck aller dieser Säulchen auszuhalten, d. i. das Gewicht einer Säule, deren Grundfläche der Boden und deren Höhe dessen Abstand vom Spiegel ist.

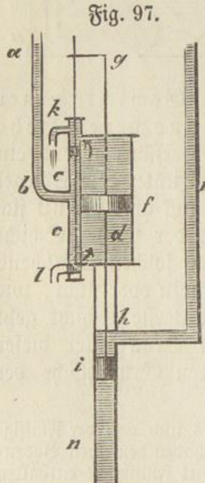
Der Bodendruck ist also unabhängig von der Form des Gefäßes und von der Flüssigkeitsmenge; alle Gefäße von gleichem Boden und gleich hohem Spiegel haben denselben Bodendruck, obwohl vielleicht in dem Gefäße *c* (Fig. 95) zwanzig mal soviel Flüssigkeit enthalten ist als in *e*. Dies erscheint dem gewöhnlichen Sinne unglaublich; daher heißt das angeführte Gesetz das hydrostatische Paradoxon. Besonders unglaublich erscheint es, daß der Boden, wie in *b* und *e* einen viel größeren Druck erleiden soll, als das Gewicht der Flüssigkeit beträgt. Daher ist hier der experimentelle Nachweis besonders wichtig. Man benutzt dazu am besten Haldats Apparat, Fig. 96. Welches Gefäß auch bei *A* aufgeschraubt werde, immer ist dasselbe Gewicht nöthig, um das Ventil *k*, das den Bodendruck zu tragen hat, zu heben und dadurch das Wasser zum Abfließen zu bringen. Wenn nun nach solchen Versuchen die Wahrheit des obigen Gesetzes nicht mehr bezweifelt werden kann, so erscheint es doch unerklärlich, daß der Bodendruck nicht in allen Fällen mit seiner gesetzmäßigen Größe wirkt. Setzt man sich z. B. das Gefäß *e* (Fig. 95) auf den Kopf oder auf die Wage, so verspüren beide nur die Wirkung des Gewichtes, nicht aber des Bodendruckes. Dies erklärt sich daraus, daß bei *m* und *n* ein Druck nach oben herrscht, der einer Flüssigkeitsäule von der Höhe *ns* entspricht, aber nicht durch eine wirklich vorhandene, nach unten drückende Säule *ns* aufgehoben wird. Dieser Druck nach oben pflanzt sich durch die Wände auf den Boden fort, so daß die Unterfläche des Bodens nur mit dem wirklich vorhandenen Gewichte nach unten drückt, während die Oberfläche den gesetzmäßigen Druck tragen muß. Aehnlich erklärt sich auch, daß in *c* auf die Wage ein größerer Druck als der Bodendruck wirkt.

Fig 96.



Der Bodendruck wird angewandt: zur Ausziehung von Extractivstoffen aus Pflanzen durch Reals Extractivpresse, ein weites, die Pflanzen enthaltendes Gefäß, das oben eine hohe, enge, mit Wasser gefüllte Röhre trägt und daher einen Druck erfährt, als ob das Gefäß mit seiner ganzen Weite bis auf dieselbe Höhe ginge und mit Wasser gefüllt wäre; sodann im anatomischen Heber, eine hohe, unten umgebogene, in ein weites Gefäß mündende Röhre, durch deren Wasserdruck eine über das Gefäß gespannte Haut so ausgedehnt wird, daß man die anatomische Beschaffenheit derselben erkennen kann. Auf dem Boden tiefer Meere ist der Druck so groß, daß leere und hermetisch geschlossene Gefäße dort zerdrückt oder angefüllt werden, daß versunkene Fahrzeuge verderben, weil das Holz durch den Druck zu dicht und schwer geworden ist, daß Thiere aus höheren Meeresschichten zu Grunde gehen, wenn sie rasch in große Tiefen gelangen, wie Versuche mit der hydraulischen Presse bewiesen.

Fig. 97.



Der Druck, den die Wassersäule ausübt, wird auch zum Betriebe einer Kraftmaschine, der sogenannten Wassersäulenmaschine benutzt, welche von Reichenbach erfunden wurde und insbesondere zur Beförderung großer Wassermassen angewandt wird. So heben die Wassersäulenmaschinen von Reichenhall die Soole über 300′ hoch und befördern sie 30 Stunden weit fort zu den Siedepfannen. Von der Wirkung dieser Maschine kann uns Fig. 97, welche eine doppelt wirkende Wassersäulenmaschine mit Kolbensteuerung zum Pumpenbetriebe vorstellt, eine Idee geben. Die Säule des Treibwassers kommt durch die Röhre *ab* in die Steuerkammer *c*, in welcher die Steuerkolben so stehen, daß das Treibwasser in den Treibcylinder *d* unter den Treibkolben *f* gelangt und durch seinen Druck diesen Kolben und damit die Kolbenstange *gh* hebt, wodurch auch der Pumpenkolben *i* gehoben wird. Das frühere Treibwasser über dem Kolben *f* kann durch das Abfallrohr *k* abfließen. Ist der Treibkolben oben angelangt, so hat in demselben

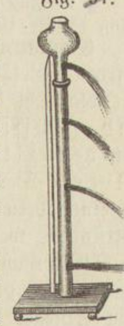
Augenblicke ein Arm g an der Kolbenstange die Steuerkolben so gehoben, daß das Treibwasser jetzt über den Treibkolben gelangt, wodurch dieser sinkt, während das vorige Treibwasser durch das Abfallrohr l fortfließt. So erzeugt das Wasser der Säule ab eine hin- und hergehende Bewegung der Stange gh und hierdurch des Pumpenkolbens i, wodurch das Wasser n in das Rohr m gehoben wird.

Das Gesetz über den Bodendruck gilt auch für jede Stelle innerhalb der Flüssigkeit; nur ist die Grundfläche der Säule hier die gedrückte Stelle.

Aufg. 225. Wie groß ist der Bodendruck in dem mit Wasser gefüllten Gefäße c, 157
Fig. 95, wenn die Grundfläche 6^{cm} Durchmesser hat und die Höhe 20^{cm} beträgt? Aufl.: $565{,}5^{g}$. — A. 226. Eine Reals Presse habe ein cubisches Gefäß von 30^{cm} Kante und eine Röhre von 30^{m} Höhe; wie groß ist der Bodendruck? Aufl.: 2700^{kg}. — A. 227. Wie groß ist in einem Quecksilbergefäße der Druck auf ein gleichseitiges Dreieck von 8^{cm} Seite, welches 10^{cm} unter dem Spiegel liegt? Aufl: $\frac{1}{4} \cdot 8^2 \cdot \sqrt{3} \cdot 10 \cdot 13{,}6 = 3769^{g}$. — A. 228. Welchen Druck hat ein Mann von 120^{qdm} Oberfläche in einer Taucherglocke oder in einem Skaphander zu ertragen, wenn er 30^{m} tief eingetaucht ist? Aufl.: $36\,000^{kg}$. — A. 229. In einem anatomischen Heber soll der Druck auf 1^{qcm} 1^{kg} betragen; wie hoch muß die Röhre über der Haut mit Wasser gefüllt sein? Aufl.: 10^{m}.

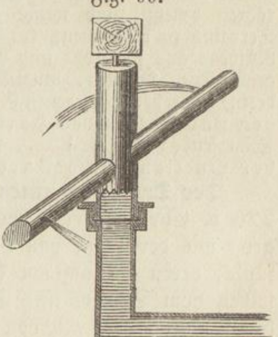
Der Seitendruck (Stevin 1600). Der Seitendruck ist der Druck, den eine 158
Flüssigkeit durch ihr Gewicht auf die Seitenwände des Gefäßes ausübt. Am einfachsten beobachtet man denselben an dem Ausflußgefäße (Fig. 98); bestände kein Seitendruck, so müßte das Wasser wie in einem überlaufenden Gefäße an der Wand herabrinnen; das Herausschießen des Wassers zeigt, daß es einem Seitendrucke unterworfen ist, und das heftigere Herausschießen der unteren Strahlen zeigt, daß er mit der Tiefe wächst. Für denselben gilt folgendes Gesetz: **Der Seitendruck ist gleich dem Gewichte einer Flüssigkeitsäule, deren Grundfläche die gedrückte Stelle und deren Höhe die Entfernung des Schwerpunktes derselben vom Spiegel ist.**

Fig. ~~97.~~ 98



Beweis. Wir denken uns die gedrückte Fläche durch wagrechte Linien in unendlich schmale Streifen s, s', s'' u. s. w. zerlegt, deren Abstände von dem Spiegel $= a, a', a''$ u. s. w. seien. Dann sind nach 155. die Pressungen auf diese Streifen $= ias$, $ia's'$, $ia''s''$ u. s. w., wo i das Gewicht der Cubikeinheit der Flüssigkeit ist. Der Druck auf die ganze Fläche f ist demnach $= i\,(as + a's' + a''s'' + \ldots.)$. Dieser Klammerausdruck ist aber die Summe der statischen Momente der einzelnen Flächentheile in Bezug auf den Spiegel, welche Summe nach dem Bestimmungssatze des Schwerpunktes (s. 118.) gleich dem Moment der ganzen Fläche, d. i. gleich dem Producte der ganzen Fläche f mit dem Abstande h des Schwerpunktes von dem Spiegel sein muß. Folglich ist $i\,(as + a's' + a''s'' + \ldots.) = ifh$ (*q. e. d.*)

Fig. 99.



Will man den Seitendruck als Kraft in Rechnung ziehen, so müßte man den Angriffspunkt dieser Kraft, den Mittelpunkt des Druckes kennen. Dieser fällt nicht mit dem Schwerpunkt zusammen, weil die parallelen Druckkräfte auf die verschieden tiefen Theile der gedrückten Fläche nicht einander gleich sind, sondern er liegt tiefer als der Schwerpunkt; er muß durch eigene Rechnung bestimmt werden. Bei der Anlage von Schleußen und Dämmen muß man den Seitendruck berücksichtigen. In einem gefüllten Gefäße wird der Seitendruck auf die eine Wand durch den gleichen Druck auf die andere Wand aufgehoben. Erhält aber die eine Wand eine Oeffnung, so wird die gedrückte Fläche, folglich auch der Seitendruck auf dieselbe kleiner; daher wird der Druck auf die entgegengesetzte Wand jetzt nicht mehr vollständig aufgehoben, und der Ueberschuß kann bewegend wirken. Wird demnach ein Gefäß an einer Schnur aufgehängt, so neigt es sich nach der dem Ausfluße entgegengesetzten Seite. Wird ein Gefäß drehbar aufgestellt und trägt es Arme, welche seitliche Ausflußöffnungen haben, so muß es sich ebenfalls nach entgegengesetzter Richtung drehen Man nennt diese Wirkung die Reaction des ausfließenden Wassers; auf derselben beruht das Segner'sche Wasserrad, welches directe Anwendung gefunden hat zu dem Reactionsrad von Althans in Vallendar (Fig. 99), dessen Einrichtung durch die Figur deutlich ist. In dieser Kraftmaschine geht ein großer Theil der in dem Wasser vorhandenen lebendigen Kraft verloren, weil das Wasser mit großer Geschwindigkeit aus derselben fließt. Whitelaw brachte daher Sförmig gekrümmte Ausflußröhren an, durch welche das Wasser allmälig ausfließt und deßhalb seine Geschwindigkeit mehr an dieselben abgibt. Man nennt diese Kraftmaschine die *schottische* oder *Reactionsturbine.* Das Bestreben, das Princip des Segner'schen Wasserrades zu Kraftmaschinen zu benutzen, hat zu der Erfindung der horizontalen Wasserräder oder Turbinen geführt; doch beruhen dieselben nicht auf der Reaction, sondern auf der lebendigen Kraft herunter fließenden Wassers, gehören daher nicht hierher.

159 **Aufg.** 230. Wie groß ist der Seitendruck auf eine rechteckige, 20^{cm} breite Wand, an welcher Wasser 50^{cm} hoch steht? Aufl.: 25^{kg}. — A. 231. Wie groß ist der Seitendruck von Quecksilber auf ein gleichseitiges Dreieck von 10^{cm} Seite, wenn die obere Seite dem Spiegel parallel und 6^{cm} von demselben entfernt ist? Aufl.: $^1/_4 \,.\, 10^2 \,.\, \sqrt{3} \,.\, (^1/_6 \,.\, 10 \sqrt{3} + 6)\, 13{,}6 = 5{,}233^{kg}$. — A. 232. Wie groß ist der gesammte Seitendruck auf ein cylindrisches Gefäß von 12^{cm} Durchmesser, das bis zu 15^{cm} Höhe mit Wasser gefüllt ist? Aufl.: 4241,6^{g}. — A. 233. Ein Faß, aus Dauben von 1^{m} Höhe und 30^{cm} Breite bestehend, trägt oben ein 10^{m} hohes Rohr, und ist, sammt diesem, mit Wasser gefüllt; es platzt durch den Seitendruck auf die Dauben; welchen Druck erfuhr eine solche? Aufl.: 2100^{kg}. — A. 234. An einem 6^{m} langen Schleußenthore steht das Wasser einerseits 2,4^{m}, andererseits 1^{m} hoch; wie dick muß dasselbe bei 10facher Sicherheit sein, wenn die abs. Festigkeit des Holzes (nach Tab. 75) = 9 ist? Aufl.: Ueberdruck von der höheren Seite = 14280^{kg}, daher nach 71. die Gleichung $14280 \,.\, 10 = {}^4/_3 \,.\, fbh^2 / l = {}^4/_3 \,.\, 9 \,.\, 2400 \,.\, h^2 / 6000$, woraus $h = 172^{mm}$.

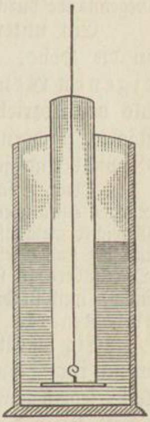
160 **Communicirende Röhren.** Unter communicirenden Röhren versteht man solche aufrechte Gefäße, welche unten mit einander in Verbindung stehen. Für dieselben gilt folgendes Gesetz: *In communicirenden Röhren steht eine und dieselbe Flüssigkeit gleich hoch; die Höhen verschiedener Flüssigkeiten verhalten sich umgekehrt wie die specifischen Gewichte derselben.* Der erste Theil ergibt sich einfach aus der Lehre vom Seitendrucke; an einer beliebigen Stelle des Verbindungsrohres kann nur dann Gleichgewicht stattfinden, wenn der Seitendruck von beiden Seiten her gleich groß ist; da nun die Stelle nach beiden Seiten gleich groß und die Flüssigkeit beiderseits gleich schwer ist, so kann diese Gleichheit des Seitendruckes nur stattfinden, wenn der Abstand vom Spiegel beiderseits derselbe ist. — Für verschiedene Flüssigkeiten wird der Druck von der einen Seite her in dem Maße größer, als die Flüssigkeit schwerer ist wie die der anderen Seite; damit der Druck ebenso groß werde wie von der anderen Seite, muß folglich die Flüssigkeitsäule in demselben Maße niedriger werden.

Das Gesetz der communicirenden Röhren hat Anwendung zu den Standmessern oder *Wasserstandszeigern*, d. i. Glasröhren, welche mit einem gefüllten Gefäße wie Dampfkesseln u. drgl. in Verbindung stehen und dadurch die Höhe der Flüssigkeit anzeigen; sodann zu der Kanal- oder *Wasserwage*, die aus zwei verbundenen mit Wasser gefüllten Glasröhren besteht, und welche dazu dient, den Höhenunterschied verschiedener Punkte eines Terrains zu bestimmen; (zu genaueren Untersuchungen benutzt man die *Nivellirwage*, bestehend aus Fernrohr und Libelle); endlich zu den *Wasserleitungen* in Röhren oder geschlossenen Kanälen, mittels deren man Wasser von einer Stelle zu jeder beliebigen anderen, nicht höher gelegenen Stelle führen kann. Jenes Gesetz erklärt uns auch das *Steigen und Fallen des Horizontal- oder Grundwassers*, des Wassers in Teichen, Sümpfen, Lachen u. s. w., die sich in der Nähe von Flüssen befinden, die *Entstehung der Quellen und der artesischen Brunnen.* (Näheres in d. Physik der Erde.)

161 **Der Druck von unten nach oben oder der Auftrieb** (Archimedes bei Hiero 220 v. Chr.). Der Druck von unten nach oben ist an jeder Stelle gerade so groß wie der Druck von oben nach unten, also ebenfalls gleich einer Flüssigkeitsäule, deren Grundfläche die gedrückte Stelle und deren Höhe der Abstand derselben vom Spiegel ist. Derselbe rührt ebensowohl von der Flüssigkeit oberhalb dieser Stelle her, als von der Flüssigkeit über der ganzen durch jene Stelle gedachten wagrechten Ebene. Er ist also auch vorhanden, wenn über der gedrückten Stelle die Flüssigkeit weggenommen und durch einen anderen festen, flüssigen oder luftförmigen Körper ersetzt wird. Gerade dann ist der Druck von unten nach oben oder der Auftrieb am besten merkbar, und kann man ihn demgemäß experimentell

nachweisen. Hat man eine weite Glasröhre, gegen deren untere Oeffnung man mittels einer Schnur eine Platte anziehen kann, so daß dieselbe einen Boden bildet, so fällt dieser Boden ab, wenn man die Schnur losläßt; senkt man die Röhre aber (Fig. 100) mit dem festgezogenen Boden in Wasser, so kann man die Schnur loslassen, ohne daß der Boden abfällt, weil er durch den Druck von unten nach oben an die Röhrenmündung gepreßt wird. Gießt man nun Wasser in die Röhre, so fällt der Boden ab, sowie das Wasser bis zur Höhe des äußeren Spiegels gestiegen ist; hiermit ist nicht nur das Bestehen, sondern auch die Größe des Auftriebes nachgewiesen.

Fig. 100.



Aus der Größe des Auftriebes folgt ein wichtiges Gesetz, das Archimedische Princip: Jeder Körper verliert in Flüssigkeit so viel von seinem Gewichte, als die verdrängte Flüssigkeit wiegt. Bringen wir einen Körper in Flüssigkeit, so wirkt an seiner Unterfläche als Abtrieb das Gewicht des Körpers und das der Flüssigkeit über demselben; als Auftrieb aber wirkt auf dieselbe das Gewicht der über dieser Unterfläche denkbaren flüssigen Säule. Demnach wirkt die Flüssigkeit oberhalb des Körpers nach unten und nach oben und kann so außer Betracht bleiben. Nach unten wirkt dann noch das Gewicht des Körpers, nach oben das Gewicht der flüssigen Säule, die an seiner Stelle denkbar ist, d. i. das Gewicht der verdrängten Flüssigkeit. Dieses Gewicht wirkt also dem Gewichte des Körpers direct entgegen, d. h. es hebt von diesem Gewichte einen solchen Theil auf, der dem Gewichte der verdrängten Flüssigkeit gleich ist.

Dieses wichtige Gesetz kann man einfach nachweisen mittels der hydrostatischen Wage, d. i. einer gewöhnlichen Wage, deren eine Schale sehr kurz aufgehängt ist und unten einen Haken trägt. An diesen Haken hängt man ein cylindrisches oder vierkantiges Blechgefäß, das inwendig einen ganz genau anschließenden Metallkörper trägt. Wird die Wage balancirt, sodann der Metallkörper aus dem Gefäße genommen, an einen Haken unter dem Boden des Gefäßes gehängt und in Wasser gesenkt, so ist das Gleichgewicht gestört, die andere Wagschale sinkt; sie hebt sich aber wieder auf die frühere Höhe, wenn man das Gefäß voll Wasser gießt; folglich hatte der Körper durch das Einsenken das Gewicht der gleich großen Wassermenge verloren. — Man kann vermöge des Auftriebes im Wasser Körper heben, die man in der Luft kaum zu lüpfen vermöchte. Der Auftrieb und das Archimedische Princip erklären insbesondere das Verhalten der Körper in Flüssigkeiten, das Schwimmen, und finden eine wichtige Anwendung zur Bestimmung des specifischen Gewichtes der Körper.

Das Verhalten untergetauchter Körper; das Schwimmen. Wenn ein un- 162
tergetauchter Körper specifisch schwerer ist als die Flüssigkeit, so sinkt er; ist er specifisch ebenso schwer als die Flüssigkeit, so schwebt er; ist er specifisch leichter, so steigt er in der Flüssigkeit auf.

Denn im ersten Falle ist der Abtrieb, das Gewicht des Körpers, größer als der Auftrieb, das Gewicht der verdrängten Flüssigkeit; im zweiten Falle sind Abtrieb und Auftrieb einander gleich, heben sich also auf (der Plateau'sche Versuch); im dritten Falle ist der Auftrieb größer als der Abtrieb. Die Differenz des Auftriebs und Abtriebs bildet die Steigkraft; ein Körper steigt um so rascher, je größer seine Steigkraft ist. So steigt ein unter Wasser gedrückter Kork beim Loslassen rasch auf, unter Wasser ausgegossenes Oel, unter Quecksilber ausgegossenes Wasser steigen in kugeligen Tropfen in die Höhe, und verschiedene, nicht chemisch auf einander wirkende und nicht ineinander diffundirende Flüssigkeiten lagern sich nach ihrem specifischen Gewichte über einander. Auch das Diffundiren geschieht nur allmälig gegen die Schwere, Weingeist bleibt lange auf Wasser stehen, das oberste Meerwasser ist noch weit außerhalb der Flußmündung süß. Eisen steigt in Quecksilber auf und schwimmt auf demselben wie Kork in Wasser; der Auftrieb von Grundeis kann so groß werden, daß dasselbe Steine und Pflanzen vom Boden reißt. Luft, welche unter Wasser frei wird, erhebt sich in kugeligen Blasen und steigt in einem fast ganz mit Flüssigkeit gefüllten Gefäße an die höchste Stelle. Darauf beruht die Libelle, welche zum Horizontalstellen aller physikalischen und geometrischen Instrumente, zum Nivelliren u. s. w. benutzt wird; dieselbe besteht aus einer, mit Ausnahme der oberen Mittelfläche in Messing gefaßten gläsernen Röhre oder Dose, die mit Alkohol oder Aether beinahe ganz erfüllt ist; die mittelste Stelle der oberen Mittelfläche ist durch Linien markirt. Ist nun irgend eine Randstelle höher als die Mittelstelle, so geht die Luftblase an die Randstelle; steht aber die Libelle genau horizontal, so befindet sich die Blase an der markirten Mittelstelle. Auch das Heben versunkener Gegenstände durch Kautschukschläuche beruht auf dem Emporsteigen von Luft in Wasser.

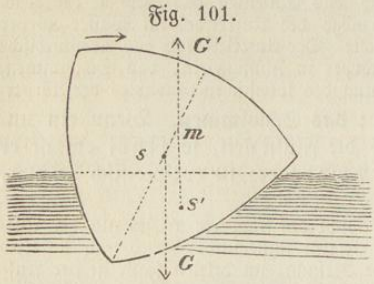
Ein untergetauchter specifisch leichterer Körper steigt in Flüssigkeit so weit in die Höhe, bis das Gewicht der verdrängten Flüssigkeit seinem eigenen Gewichte gleich ist; denn alsdann ist der Auftrieb nur noch so groß als der Abtrieb. Er schwimmt dann natürlich, jedoch nicht auf der Oberfläche, sondern eingetaucht, und zwar um somehr, je größer sein specifisches Gewicht und je kleiner das der Flüssigkeit ist.

Denn je schwerer der Körper und je leichter die Flüssigkeit ist, desto tiefer muß der Körper eintauchen, um das Quantum von Flüssigkeit zu verdrängen, das seinem eigenen Gewichte gleich ist. So sind Ahorn- und Buchenholz specifisch fast ebenso schwer als Wasser, tauchen daher sehr tief ein, während der sehr leichte Kork auf der Oberfläche des schweren Quecksilbers zu schwimmen scheint; ein wirkliches Schwimmen auf der Oberfläche gibt es nicht, weil in diesem Falle keine Spur von Flüssigkeit verdrängt, also auch kein Auftrieb vorhanden wäre.

Ein schwebender oder ein schwimmender Körper schweben oder schwimmen stabil, wenn ihr Schwerpunkt tiefer liegt als der Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeit; jedoch schwimmt ein schwimmender Körper auch noch stabil, wenn sein Schwerpunkt tiefer liegt als das Metacentrum.

Denn die den Körper tragende Kraft ist das als Auftrieb wirkende Gewicht der verdrängten Flüssigkeit, das seinen Angriffspunkt in dem Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeit hat; dieser Schwerpunkt ist so zu sagen der Aufhängepunkt des schwebenden Körpers; liegt nun der Schwerpunkt desselben tiefer als dieser Aufhängepunkt, so findet bekanntlich Stabilität statt. Ein schwimmender Körper kann indeß auch dann stabil schwimmen, wenn sein Schwerpunkt über demjenigen des verdrängten Wassers liegt; indessen muß der erste Schwerpunkt dann wenigstens tiefer liegen als das Metacentrum, d. i. als derjenige Punkt, in welchem eine durch den Schwerpunkt des verdrängten Wassers gezogene Lothrechte die Mittelachse oder Schwimmachse des Körpers schneidet. Denn auf den schwimmenden und aus seiner lothrechten Lage gebrachten Körper (Fig. 101) wirken zwei Kräfte ein, sein eigenes Gewicht G in seinem Schwerpunkte s abwärts und der Auftrieb G' in dem Schwerpunkte s' des verdrängten Wassers nach $s'm$ senkrecht aufwärts. So lange nun das Metacentrum m über s liegt, streben diese beiden Kräfte den Körper in die frühere Lage zurück zu drehen. Dies ist um so länger möglich, und um so größer ist daher die Stabilität, je tiefer der Schwerpunkt des Körpers liegt, je größer das Gewicht des Körpers ist, und je weiter er aus seiner Lage gebracht werden kann, ohne daß m unter s rückt, was vorwiegend von der Gestalt des Körpers abhängt. Diese Verhältnisse sind besonders wichtig bei dem Bau und der Belastung der Schiffe. — Fällt das Metacentrum in den Schwerpunkt s, so heben die beiden Kräfte einander auf, der Körper schwimmt indifferent; fällt das Metacentrum unter den Schwerpunkt, so drehen die beiden Kräfte den Körper in der eingeschlagenen Richtung weiter, er schwimmt labil.

Fig. 101.



Indifferent schwimmt z. B. eine gleichartige Kugel, labil schwimmen aufrechte Stäbe, Balken, Bretter, geschlossene Röhren, sie drehen sich sogleich in die stabile Längenlage. In aufrechter Stellung können sie indessen auch stabil schwimmen, wenn man durch starkes Beschweren des unteren Endes den Schwerpunkt sehr tief legt. Hierauf beruhen die Schwimmstäbe zum Messen der Flußgeschwindigkeit und die Schwimmwagen oder Aräometer zum Bestimmen der Dichte. (Der cartesianische Taucher). Die Fische schwimmen stabil, weil durch die im Rücken liegende Schwimmblase der obere Körpertheil leichter gemacht ist; diese Blase dient den Fischen auch zum Auf- und Absteigen; denn durch Vergrößern derselben vergrößern sie auch ihren Körper und hiermit das Volumen des verdrängten Wassers, also den Auftrieb. — Damit die Schiffe stabil schwimmen, verlegt man mittels des Ballastes den Schwerpunkt möglichst in die Tiefe; ein unbelastetes Schiff muß soviel Ballast einnehmen, daß bei der möglich größten Schwankung das Metacentrum noch über dem Schwerpunkte des Schiffes liegt; im anderen Falle würde das Schiff kentern, d. i. umschlagen. — Die Schiffe können auch von Metall, von Eisen oder Kupfer sein, ohne unterzusinken; denn durch ihren großen Hohlraum kann doch leicht das Gewicht des verdrängten Wassers so groß werden, daß es das Gewicht des Schiffes übertrifft. Man hat hier das Metall gewissermaßen mit Luft verbunden; also kann man auch andere schwerere Körper durch Verbinden mit sehr leichten zum Schwimmen befähigen; darauf beruhen die Transporte riesiger norwegischer Granitblöcke durch Eisberge der Urzeit in die norddeutsche Ebene, sowie die Schwimmgürtel und Schwimmringe, mittels derer des künstlichen Schwimmens Unkundige sich über Wasser halten und Kundige große Strecken durchschwimmen können. Die Menschen sind meist etwas specifisch schwerer als Wasser; das Schwimmen derselben ist daher nicht natürlich, sondern künstlich, ein stetes Wehren mittels des Widerstandes des Mediums gegen das Untersinken, was um so leichter gelingt, je tiefer man eintaucht, und am leichtesten auf dem Rücken, weil dann auch der Kopf eintaucht, und wenn man den Athem anhält, weil sich dann das eingetauchte Volumen vergrößert; nur sehr fette Personen schwimmen natürlich, wie der Neapolitaner Paolo Muccia (1767), der 300 Pfund wog und 30 Pfund weniger als ein gleiches Wasservolumen. Der Bau der Thiere macht sie geschickter zum Schwimmen, als es der Mensch ist; auch sind sie meist etwas leichter wie Wasser. — Schwimmende Gegenstände steigen und fallen mit der Flüssigkeit; darauf beruht die Anwendung von Schwimmern an Dampfkesseln zu Wasserstandszeigern und zu selbstthätigen Speisevorrichtungen, an Gasuhren zum Abschließen des Zuflusses von Gas und zur Constanthaltung des Niveaus u. s. w.

Aufg. 235. Wie groß ist der Gewichtverlust eines rechteckigen Körpers von 50cm 163
Länge, 6cm Höhe und 8cm Breite, der ganz in Wasser taucht? Aufl.: 960g. — A. 236. Wie groß ist der Gewichtverlust einer ganz in Quecksilber getauchten Platinkugel von 4cm Durchmesser; sp. G. von Quecksilber 13,6? Aufl.: 455,7g. — A. 237. Wie groß ist der Auftrieb eines Holzcylinders von 20cm Höhe und 10cm Durch. in Weingeist, dessen spec. Gewicht = 0,8? Aufl.: 1256,6g. — A. 238. Wie groß ist die Steigkraft dieses Cylinders in Wasser, wenn das spec. Gew. des Holzes = 0,6 ist? Aufl.: 628,32g. — A. 239. Wie groß ist die Steigkraft einer Korkkugel, Durchm. = 8cm, spec. Gew. = 0,24, in Wasser? Aufl.: 203,7g. — A. 240. Die Steigkraft einer Eisenkugel (Durch. = 10cm, sp. Gew. = 7,5) in Quecksilber zu finden. Aufl.: 3194g. — A. 241. Wie groß ist der Auftrieb einer Platinkugel (sp. Gew. = 22) von $^1/_2$kg in Wasser? And.: Der Auftrieb, d. i. das Gewicht des verdrängten Wassers ist 22mal kleiner als das abs. Gew., also = 22,7g. — A. 242. Wie groß ist der Gewichtverlust eines Eisenkörpers von 10kg (spec. G. = 7,5) in Wasser? Aufl.: 1,33kg. — A. 243. Was wiegt im Wasser ein Sandstein von 100kg (spec. G. = 2,5)? Aufl.: 60kg. — A. 244. Was wiegt in Quecksilber eine Platinkugel von 300g? Aufl.: 114,5g. — A. 245. Was wiegt in Weingeist eine Holzkugel von 100g; sp. G. = 0,9? Aufl.: 11$^1/_9$g. — A. 246. Der Gewichtverlust eines Körpers in Wasser beträgt 23g, welches ist sein Volumen? Aufl.: 23ccm. — A. 247. Eine Kugel verliert in Wasser 4188,8g; wie groß ist ihr Halbmesser? Aufl.: 10cm. — A. 248. Wie viel kg kann Jemand in der Luft heben, der in Wasser einen 150kg schweren Stein (spec. G. = 2,5) heben kann? Aufl.: 90kg. — A. 249. Was wiegt ein Holzblock, 3m lang, 0,5m breit, der 0,2m tief in Wasser taucht? Aufl.: 300kg. — A. 250. Wie tief sinkt ein kupferner Cylinder (spec. G. = 9) von 10cm Durchm. und Höhe in Quecksilber ein? Aufl.: $x \,.\, 13{,}6 = 10 \,.\, 9$, hieraus $x = 6{,}6$cm. — A. 251. Wie tief sinkt eine silberne Kugel (sp. G. = 10) in Quecksilber ein, $r = 10$cm? Aufl.: $^4/_3\pi r^3 \,.\, 10 = {}^1/_3\pi x^2 (3r - x) \,.\, 13{,}6$, woraus $x = 13{,}2$cm. — A. 252. Wie tief muß ein kegelförmiger Eisberg, der außerhalb des Wassers 60m hoch und 100m breit ist, in das Wasser eintauchen; sp. G. des Eises = 0,9?

$$\text{Aufl.: } \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi r^2 (h + x)^2}{h^2} \cdot (h + x)\, 0{,}9 = \frac{x}{3}\left[\frac{(h + x)^2 \pi r^2}{h^2} + \frac{(h + x)\, \pi r^2}{h} + \pi r^2\right],$$

woraus $x = h(\sqrt[3]{10} - 1) = 69{,}264$m. — A. 253. Wenn der Eisberg etwa ein rechteckiger Körper ist und 1000m Länge, 200m Breite und 100m Höhe hervorragen, wie tief muß er dann eingetaucht sein, und welches Volumen besitzt der eingetauchte Theil? Aufl.: $w = 900$m; eingetauchtes Volumen = 180 Mill. cbm. — A. 254. Welche Last würde dieser Eisberg tragen können, wenn er durch dieselbe ganz eintauchen sollte? Aufl.: 20000 Mill. kg (Erratische Blöcke), — A. 255. Wie viel kg Kork müssen mit einem kg Silber verbunden werden, damit dasselbe im Wasser schwebt? Aufl.: $^1/_{10} + {}^x/_{0,24} = 1 + x$, woraus $x = {}^{27}/_{95}$kg. — A. 256. Wie viel Kork muß ein Mensch von 60kg und 1,2 sp. G. mit sich verbinden, um natürlich zu schwimmen? Aufl.: $60 / 1{,}2 + x / 0{,}24 = 60 + x$, woraus $x = 3^3/_{19}$kg. — A. 257. Ein Kasten von Kupferblech, dessen qcm 3g wiegt, und welcher 50cm lang, 30cm breit und 20cm hoch ist, schwimmt wie tief im Wasser? Aufl.: 12,4cm. — A. 258. Wie tief taucht eine Hohlkugel von 20cm Dm. aus diesem Blech in Wasser ein? Aufl.:

$\pi \,.\, 20^2 \,.\, 3 = \frac{1}{3}\pi x^2\,(30-x)$, woraus $x = 16^{cm}$. — A. 259. Die Krone des Hiero von Syracus wog 10^{kg}; was mußte sie im Wasser verlieren, wenn sie reines Gold oder reines Silber war? Aufl.: Gold $\frac{1}{2}^{kg}$, Silber 1^{kg}, wenn sp. G. des Goldes $= 20$, des Silbers $= 10$. — A. 260. Was mußte sie verlieren, wenn sie 6^{kg} Gold und 4^{kg} Silber enthielt? Aufl.: $\frac{6}{20} + \frac{4}{10} = 0{,}7^{kg}$. — A. 261. Sie verlor $0{,}625^{kg}$, wie viel Gold und Silber enthielt sie demnach? Aufl.; $x\,/\,20 + (10 - x)\,/\,10 = 0{,}625$, woraus $x = 7{,}5^{kg}$ Gold und $2{,}5^{kg}$ Silber.

164 **Bestimmung des specifischen Gewichtes.** Das specifische Gewicht eines Körpers ist, wie schon in 19. angeführt, das Gewicht der Volumeinheit desselben. Bei festen und tropfbar flüssigen Körpern wird die Volum- und die Gewichtseinheit so gewählt, daß das spec. Gewicht des Wassers = 1 ist; hierüber belehrt folgende Zusammenstellung:

Volumeneinheit.			Zugehörige Gewichtseinheit.
1 Cubikmeter oder Kiloliter	Wasser	wiegt	1 Tonne = 1^t
1 Cubikdecimeter oder Liter	„	„	1 Kilogramm = 1^{kg}
1 Cubikcentimeter	„	„	1 Gramm = 1^g
1 Cubikmillimeter	„	„	1 Milligramm = 1^{mg}.

Bei Gasen wählt man häufig das Cubikmeter als Volumeinheit und das Kilogramm als Gewichtseinheit, oder das Cubikdecimeter als Volum-, das Gramm als Gewichtseinheit, versteht also unter dem spec. Gew. der Gase manchmal die Zahl der Kilogramme, die ein Cubikmeter des Gases wiegt. Bei den festen und flüssigen Körpern aber gibt nach obiger Feststellung das spec. Gew. an, wie viele Tonnen ein Cubikmeter, wie viele Kilogramm ein Cubikdecimeter, wie viele Gramm ein Cubikcentimeter und wie viele Milligramm ein Cubikmillimeter des Körpers wiegt. Weil das Gewicht der Volumeinheit Wasser, also das spec. Gew. des Wassers = 1 ist, so gibt das spec. Gew. eines festen oder flüssigen Körpers auch an, wie viel mal so viel ein beliebiges Volumen des Körpers wiegt als ein gleiches Volumen Wasser.

Bezeichnet man das Gewicht eines Körpers mit p, das Volumen desselben mit v und das spec. Gew. desselben mit s, so hat das Volum 1 das Gewicht s, mithin das Volum v ein $v$mal so großes Gewicht $vs = p$, woraus

$$1)\ p = v\,.\,s;\quad 2)\ v = p\,/\,s;\quad 3)\ s = p\,/\,v,$$

welche wichtigen Beziehungen in der Form an diejenigen zwischen dem Gewicht und der Masse eines Körpers, sowie der Beschleunigung der Schwere erinnern, oder allgemeiner an die Relationen zwischen einer Kraft, einer Masse und der Beschleunigung, welche die Kraft der Masse ertheilt. Wie sind die drei Beziehungen in Worten auszudrücken?

Da nach der dritten Beziehung das spec. Gew. eines Körpers gleich dem absoluten Gewichte desselben dividirt durch das Volumen desselben ist, da man also zur Bestimmung des spec. Gew. das abs. Gew. und das Volumen kennen muß, so ist es naturgemäß, die Bestimmung des specifischen Gewichtes mit solchen Fällen zu beginnen, in welchen die beiden nothwendigen Größen leicht der Messung zugänglich sind. Das Gewicht p bestimmt man mit Hilfe der Wage; die Ermittelung des Volumens v hat keine Schwierigkeit 1. bei festen Körpern, die eine einfache geometrische Gestalt haben; in diesem Falle kann die Bestimmung von v durch Berechnung geschehen; Beispiele: Würfel, Parallelepipedon, Prisma, Cylinder, Pyramide, Kegel, Kugel. 2. bei tropfbar flüssigen Körpern; hier benutzt man entweder ein Fläschchen, dessen Inhalt bekannt ist, z. B. = 10 Cubikcentimeter; bestimmt man in diesem Falle das Gewicht der von dem Fläschchen aufgenommenen Flüssigkeit in Grammen, so braucht das Komma an der Zahl des Gewichtes nur eine Stelle nach links gerückt zu werden, wodurch man sofort das spec. Gew. der Flüssigkeit hat. Oder man benutzt ein ganz willkürliches Fläschchen, dessen Inhalt man erst nach der zweiten Beziehung bestimmt; man füllt das Fläschchen mit einer beliebigen Flüssigkeit, deren spec. Gewicht bekannt ist (Wasser, Quecksilber), sucht das Gewicht der eingefüllten Flüssigkeit und berechnet dann v nach der Formel $v = p\,/\,s$. Hat man Wasser gewählt, so enthält das Fläschchen so viele Cubikcentimeter, als das Wasser Gramme wiegt.

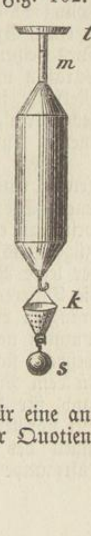
Hat ein fester Körper eine unregelmäßige Gestalt, so kann man sich behufs Ermittelung des Volumens v einer hydrostatischen Wägung bedienen; erfährt der Körper in einer Flüssigkeit den Gewichtverlust p', so bedeutet p' nach dem Archimedischen Princip das Gewicht der verdrängten Flüssigkeit; hat diese ferner das spec. Gew. s', so ist das Volum der verdrängten Flüssigkeit und somit auch das des festen Körpers $v = p' / s'$. Da nun das spec. Gew. des festen Körpers $s = p / v$, so ist s auch $= p / (p' / s') = (p' / p') s'$. Nimmt man die hydrostatische Wägung in Wasser vor, so ist speciell $s' = 1$, daher $s = p / p'$. Das specifische Gewicht eines festen Körpers ist gleich dem absoluten Gewichte desselben dividirt durch seinen Gewichtverlust im Wasser. Der Beweis dieses Lehrsatzes für das spec. Gew. kann auch kurz so gefaßt werden: Wie viele Gramme ein Körper im Wasser von seinem Gewichte verliert, so viele Gramme beträgt das Gewicht des verdrängten Wassers, und ebensoviele Cubikcentimeter das Volumen des verdrängten Wassers, also auch das Volumen des Körpers. Dividirt man mit der Zahl dieser Cubikcentimeter in das absolute Gewicht in Grammen, so erhält man, wieviele Gramme ein Cubikcentimeter des Körpers wiegt, also das spec. Gew. desselben.

Die hydrostatische Wägung hat also den Zweck, das Volumen des festen Körpers zu bestimmen. In früherer Zeit faßte man das spec. Gewicht vorwiegend als die Verhältnißzahl auf, welche angibt, wie viel mal so viel ein Körper wiegt als ein gleiches Volumen Wasser. Bei dieser Auffassung hat die hydrostatische Wägung den Zweck, das Gewicht eines Wasserkörpers zu erfahren, dessen Volumen mit demjenigen des festen Körpers übereinstimmt; denn der Gewichtverlust in Wasser gibt ja das Gewicht des verdrängten Wassers, also des dem Körpervolumen gleichen Wasservolumens an. Kennt man außerdem das Gewicht des Körpervolumens, so hat man nur noch dieses Gewicht durch das Gewicht des gleichen Wasservolumens, also durch den Gewichtverlust zu dividiren, um zu erfahren, wie viel mal so viel der Körper wiegt als das gleiche Volumen Wasser, wodurch der Satz über das spec. Gew. auch von dieser Seite her klar wird.

Die hydrostatische Wägung kann geschehen mittels der hydrostatischen Wage und mittels Nicholsons Aräometer ($\acute{\alpha}\rho\alpha\iota\acute{o}\varsigma$, dünn, locker). 165

1. An den Haken der kurzen Wagschale hängt man mit feinen Fäden den zu prüfenden Körper und bestimmt durch Auflegen von Gewichten auf die andere Schale das absolute Gewicht; dann schiebt man unter den Körper ein Glas Wasser, so daß derselbe tief eintaucht; um das Gleichgewicht herzustellen, legt man Gewichte auf die kurze Schale; diese Gewichte geben den Gewichtsverlust; in Grammen ausgedrückt geben sie aber auch das Volumen des Körpers in ccm an.

Fig. 102.



2. Nicholsons Aräometer, Fig. 102. Man legt den Körper auf den Teller t und fügt so viel Gewicht zu, daß der Apparat bis zur Marke m ins Wasser sinkt, in welchem er vermöge der schweren Kugel s stabil schwimmt. Nimmt man nun den Körper weg und legt an seine Stelle Gewichte, welche wieder das Einsinken bis zur Marke bewirken, so sind die Zulagegewichte das absolute Gewicht des Körpers. Werden auch diese weggenommen und der Körper in das Körbchen k gebracht, so müssen übermals Gewichte auf den Teller t gelegt werden, um das Einsinken bis zur Marke zu veranlassen, und diese geben den Gewichtverlust in Wasser, also auch das Volumen in ccm an.

Diese Apparate können auch zur Bestimmung der spec. Gewichte der Flüssigkeiten benutzt werden. Sucht man mittels der hydrostatischen Wage den Gewichtverlust eines Messingwürfels in Wasser, so hat man das Gewicht eines gleich großen Wasserwürfels; ermittelt man dann in derselben Weise den Gewichtverlust desselben Würfels in einer anderen Flüssigkeit, so kennt man das Gewicht eines gleichen Würfels dieser Flüssigkeit. Dividirt man das letztere Gewicht durch das erstere, so erhält man das sp. G. der Flüssigkeit.

Kennt man das Gewicht des Nicholson'schen Aräometers, und addirt hierzu die Zulagegewichte, welche das Einsinken bis zur Marke bewirken, so erhält man das Gewicht des verdrängten Wasservolums; verfährt man ebenso für eine andere Flüssigkeit, und dividirt das letztere Gewicht durch das erstere, so gibt der Quotient das spec. G. der Flüssigkeit an.

Das Skalen-Aräometer. Volumeter von Gay-Lussac, Densimeter von Schmidt. Je leichter eine Flüssigkeit ist, desto tiefer muß ein und derselbe Körper in dieselbe einsinken, damit das Gewicht der verdrängten Flüssigkeit demjenigen des Körpers gleich sei; die verdrängten Volumina müssen sich umgekehrt verhalten wie die sp. G. der Flüssigkeiten. Hierauf beruhen die Skalen-Aräometer, von welchen das Volumeter das sp. G. einer Flüssigkeit leicht berechnen läßt. Ein geschlossene, unten erweiterte und durch eine mit Quecksilber gefüllte Kugel stabil schwimmende Glasröhre trägt an dem Punkte, bis an welchen sie im Wasser einsinkt, die Zahl 100, und trägt über und unter diesem Punkte Theilstriche, an welchen das Volumen der Röhre um 0,01 größer oder kleiner ist. Sinkt ein Körper bis zu dem Striche 125, so verhält sich das spec. Gew. der Flüssigkeit zu dem des Wassers, wie 100 : 125, ist also = 0,8. — Bei dem Densimeter läßt sich an den Theilstrichen das sp. G. selbst ablesen.

Ist ein Körper im Wasser löslich, so bestimmt man nach einer dieser Methoden, wie viel mal schwerer er ist als eine andere Flüssigkeit, wie Weingeist oder Oel, die ihn nicht löst, deren sp. G. aber schon bekannt ist; das Product dieser beiden Zahlen ergibt dann das gesuchte sp. G. — Ebenso kann man mit Körpern verfahren, die leichter sind als Wasser; oder man kann sie auch mit schwereren Körpern verbinden und von dem Gewichtverluste der Verbindung denjenigen des schwereren Körpers abzählen, wodurch man den des leichteren, d. h. das Gewicht eines gleichen Volumens Wasser erhält. — Bei sehr genauen Bestimmungen, die einen wissenschaftlichen Werth und Zweck haben sollen, muß man auch auf die Reinheit und Temperatur des Wassers, auf Luftblasen und Wasserabsorption, auf das Gewicht der Aufhängefäden u. drgl. aufmerksam sein.

Da die Physiker und Chemiker durch das Molekularvolumen, welches wie leicht ersichtlich mit dem Quotienten des Molekulargewichtes durch das specifische Gewicht gemessen wird, in das Geheimniß der materiellen Verschiedenheit einzudringen hoffen, und daraus sogar die äußeren Eigenschaften der Stoffe, also auch ihre Verwendbarkeit aus dem Molekularvolumen erkennbar sind, so streben sie bei der Bestimmung des spec. Gew. jetzt eine Genauigkeit bis zu 4 Decimalstellen an, vervollkommnen die alten Methoden der Bestimmung und erdenken neue. Eine solche ist die Suspensionsmethode, die darauf beruht, daß ein fester Körper in einer genau specifisch gleich schweren Flüssigkeit weder steigt noch sinkt, sondern suspendirt bleibt. Natürlich kann dieselbe auch zur Trennung von Gemischen von Pulvern benutzt werden, die in der Gesteinslehre so wichtig ist: hat man z. B. eine Flüssigkeit vom sp. G. 3, so sinken in derselben alle Bestandtheile eines Gemenges, deren sp. G. über 3 ist, während die leichteren auf die Oberfläche steigen, die vom sp. G. 3 aber suspendirt bleiben. Gerade auf dem letzteren beruht die Suspensionsmethode; hat man eine sehr schwere Flüssigkeit, der man durch Wasserzusatz z. B. alle sp. G. zwischen 4 und 1 geben kann, so hat ein Körper das sp. G. der Flüssigkeit, wenn er in derselben schwebt, suspendirt bleibt; und das sp. G. von Flüssigkeiten ist ja leichter genau zu finden. Thoulet hat nun 1879 schon eine wässerige Lösung von Kaliumquecksilberjodid hergestellt vom sp. G. 2,77, Victor Goldschmidt hat dasselbe 1881 bis auf 3,2 gesteigert, Klein hat dann das borwolframsaure Kadmium von 3,3 vorgeschlagen und Rohrbach die Bariumquecksilberjodidlösung von 3,6. Alle leichteren Körper als 3,6 können daher genau bestimmt werden. Nun hat Jolly (1886) die Methode auch für poröse und schwerere Körper anwendbar gemacht, indem er einen Splitter des Körpers in ein wohlabgewogenes Paraffinscheibchen durch Annäherung eines heißen Kupferstreifens einschmolz und dann das sp. G. dieser leichten Verbindung von Paraffin und Splitter nach der Suspensionsmethode bestimmte, und Streng hat 1887 die Methode für alle Körper ausgedehnt durch Combination der schweren Körper mit einem becherförmigen Schwimmer von Glas, dessen sp. G. = 2,85 und dessen Gewicht ein für allemal festgestellt ist.

Für pulverförmige Körper hat E. Wiedemann 1882 sein Pyknometer construirt, ein aufrechtes Fläschchen von bekanntem Gewicht und Wassergewicht, mit eingeschliffenem Stöpsel, durch welchen eine Röhre zu einem Trichter zur Wassereinfüllung und dann weiter zu einer Quecksilberluftpumpe geht, die nach dem Einfüllen des Pulvers mit 3 bis 4 Zügen das Pulver luftleer macht. Hat man das Gewicht des Pulvers bestimmt, so wird der leere Raum mit Wasser erfüllt und durch eine zweite Wägung dessen Gewicht gefunden; die Differenz desselben mit dem bekannten ganzen Wassergewicht gibt das Gewicht des verdrängten Wassers, dessen Division in das Pulvergewicht das sp. G. desselben ergibt. Jedoch kommen nach Schulze (1886) Pulver vor, welche die absorbirte Luft nicht völlig loslassen, weßhalb sich nach dem Wassereinfüllen eine Luftblase unter dem Stöpsel bildet; Schulze hat an dem Pyknometer eine Vorrichtung zur Entfernung der Blase angebracht und dadurch auch für diese Pulver wie Wiedemann die Genauigkeit bis zur 4ten Decimale getrieben. Bei porösen und zerreiblichen Körpern wie z. B. Erdschollen benutzt Parize (1887) zum Ausfüllen des übrig bleibenden Pyknometerraumes Leinsamen und Zehnder macht (1887) die Luftpumpe für im Wasser lösliche Körper dadurch entbehrlich, daß er auf pneumatische

Weise die Luft durch Wasser verdrängen läßt, das dabei den löslichen Körper auflöst und gerade hierdurch sein Volumen bestimmt.

Durch solche genaue Bestimmungen hat man erfahren, daß gegossene Metalle außen dichter sind als innen, nach Hennig (1886) bis 7%, wodurch es erklärlich wird, daß Metalle manchmal auf ihren Schmelzmassen schwimmen. Nach Fromme (1886) wird durch das Glühen und Abschrecken des Eisens, besonders des Stahls, die Dichte um 5 bis 10% vermindert.

Luftförmige Körper. Man pumpt einen zum Aufhängen an einer Wage 166
eingerichteten Glasballon luftleer und bringt ihn dann an der Wage ins Gleichgewicht. Läßt man dann Luft einströmen, so sinkt der Ballon; die Gewichte, die man zur Herstellung des Gleichgewichtes auf die andere Schale zulegen muß, geben das Gewicht der eingeströmten Luft an. Ebenso findet man das Gewicht eines gleichen Volumens Wasser und erfährt dann durch Division, daß die Luft das spec. Gewicht 0,001293 hat, d. h. etwa 777mal leichter ist als Wasser. Weil bei der Vergleichung von Luftarten mit Wasser zu kleine Zahlen entstehen, die unserem Vorstellungsvermögen wenig zusagen, so legt man für das sp. G. der Luft- und Dampfarten auch die atmosphärische Luft zu Grunde. Indem man den genannten Ballon mit anderen Luft- oder Dampfarten füllt und die zur Herstellung des Gleichgewichtes nöthigen Zulagegewichte mit denen des ersten Versuches vergleicht, findet man die sp. Gewichte solcher Luftarten.

Diese Methode ist ungenau wegen der Veränderung des Glasballons mit dem Drucke, mit der Temperatur und mit der Luftart, wegen des Gewichtverlustes, den der Ballon auch in der Luft erleidet u. s. w.; Regnault hat daher in neuerer Zeit die Methode vervollkommnet. Die genaue Bestimmung der Dampfdichte gehört der Wärmelehre an.

In neuester Zeit wird die Dichte von Luftarten auch nach dem Archimedischen Princip bestimmt, da auch in Luftarten ein Körper soviel von seinem Gewicht verliert als das verdrängte Luftvolumen wiegt. Lux construirte hiernach 1885 sein Baräometer und Lommel 1886 seine aerostatische Wage: An der kurz aufgehängten Wagschale derselben hängt an einem Haken ein großer zugeschmolzener Glasballon, dessen Volumen genau bekannt ist, wodurch auch das Gewicht der von ihm verdrängten Luft leicht berechnet werden kann. Ist nun der Ballon in der Luft genau balancirt, so sinkt er, wenn er in ein leichteres Gas gebracht wird, weil er dann einen kleineren Gewichtsverlust erfährt; die Zulagegewichte in der anderen Schale geben die Abnahme des Gewichtsverlustes der Luft gegenüber an, woraus das sp. G. des leichteren Gases zu finden ist.

Pneumatische Densimeter sind auch für Flüssigkeiten in Anwendung gekommen. Das von Bohn besteht aus einer umgekehrt U-förmigen Glasröhre, die mit dem einen offenen Ende tief in Wasser, mit dem anderen tief in die fragliche Flüssigkeit taucht. Wird nun die Röhre in die Höhe gezogen, also die Luft beiderseits gleichmäßig verdünnt, so steigen beide Flüssigkeiten, jede soviel, daß ihre Steighöhe die Verdünnung ersetzt; daher verhalten sich die sp. G. der Flüssigkeiten umgekehrt wie die Steighöhen. Handl (1886) bringt die Verdünnung durch einen Kautschukbalg hervor und will hiermit Genauigkeiten bis zu ein Tausendtel erzielt haben.

Tafel einiger specifischen Gewichte bei 0° C. 167

Platin	22,1	Jod	4,95	Bernstein	1,08	Brom	2,97	Joddampf	8,72
Gold	19,3	Schwerspath	4,43	Wachs	0,97	Schwefelſ.	1,85	Schwefeld.	6,65
Wolfram	17,6	Diamant	3,52	Eis	0,88	Salpeterſ.	1,54	Quecksilberd.	6,98
Blei	11,4	Flintglas	3,44	Ebenholz	1,23	Salzsäure	1,19	Chlor	2,45
Silber	10,5	Krystallglas	2,89	Eichenholz	1,17	Glycerin	1,26	Flußsäure	2,37
Kupfer	8,88	Flaschenglas	2,60	Ahorn	0,90	Milch	1,03	Schwefl. S.	2,25
Messing	8,39	Spiegelglas	2,37	Buchenholz	0,80	Meerwasser	1,03	Salzſ.-G.	1,25
Stahl	7,82	Marmor	2,83	Tannenholz	0,70	Rheinwein	0,99	Kohlendioxyd	1,52
Schmiedeeiſ.	7,79	Quarz	2,65	Erlenholz	0,60	Leinöl	0,95	Sauerstoff	1,10
Zinn	7,29	Gyps	2,31	Lindenholz	0,50	Baumöl	0,92	Stickstoff	0,97
Gußeisen	7,21	Schwefel	2,03	Pappelholz	0,40	Erdöl	0,84	Ammoniak	0,60
Zink	7,21	Alabaster	1,87	Korkholz	0,24	Alkohol	0,79	Wasserdampf	0,62
Antimon	6,71	Elfenbein	1,92	Quecksilber	13,59	Aether	0,71	Wasserstoff	0,07

Das sp. G. gibt ein Urtheil darüber, wie schwer, im gewöhnlichen Sinne gesprochen, die Stoffe im Verhältnisse zu einander sind. Das spec. Gew. des Platins ist 22, d. h. 1ccm Platin wiegt 22g, das Platin ist 22mal so schwer als Wasser, es ist der schwerste von allen Körpern. Das sp. G. des Diamantes ist $3\frac{1}{2}$, d. h. 1 hessischer Cubikzoll Diamant, wie der Diamant des türkischen Kaisers, wiegt $3\frac{1}{2}$ Loth (denn 1 c'' hess. Wasser wiegt 1 Loth). Das spec. Gew. des Quecksilbers ist 13,6, d. h. 1^{cdm} oder 1^{l} Quecksilber wiegt $13,6^{kg}$, das Quecksilber ist fast 14 mal schwerer als Wasser, es ist die schwerste Flüssigkeit. Blei ist halb so schwer als Platin, Kupfer doppelt so schwer als Schwerspath, 8 mal so schwer als Bernstein, 37 mal so schwer als Korkholz; Platin, der schwerste Körper, ist 230 000 mal so schwer als Wasserstoff, der leichteste Körper; Wasser ist mehr als 10 000 mal so schwer, wie sein Hauptelement, der Wasserstoff.

Nach dem Metersystem, das wir auch in der Lehre vom sp. Gew. vollständig durchgeführt haben, ist die Berechnung des Gewichtes irgend eines bekannten Körpervolumens eine einfache Aufgabe: man hat einfach das Volumen mit dem sp. G. zu multipliciren, $p = vs$. Bei den alten Maß- und Gewichtssystemen mußte man für derartige Rechnungen, wie in den Aufgaben 284 bis 289 einige vorkommen, das Gewicht γ einer Volumeinheit, z. B. von 1 Cubikfuß (c') Wasser kennen; dann ist $p = vs\gamma$. Ein preußischer c' Wasser wog 61,74 *℔.*, ein badischer c' 54 *℔.*, ein hessischer c' 31,75 *℔.*

168 **Vergleichung der Dichte von Flüssigkeiten.** In vielen Fällen des practischen Lebens ist es von Interesse, die Dichten mehrerer Flüssigkeiten derselben Art zu vergleichen; Salzsoolen, Zuckerlösungen, Most, Schwefelsäure u. s. w. sind um so besser, je dichter sie sind, je weniger tief also ein und dasselbe Aräometer in diese Flüssigkeiten einsinkt; Weingeist, Branntwein u. dgl. sind um so besser, je mehr sie reinen Alkohol enthalten, je weniger dicht sie also sind und je tiefer ein Aräometer in dieselben einsinkt. Man hat daher an beliebigen Schwimmwagen, Senkwagen, Aräometern beliebige Skalen angebracht und schätzt die Flüssigkeiten nach den Graden, bis zu welchen das Aräometer einsinkt. Leider sind bei den meisten Aräometern, von Beaumé, Cartier, Beck u. s. w., die Anfangspunkte und die Skalen ganz willkürlich gewählt, und haben diese daher wohl practischen, aber keinen wissenschaftlichen Werth. Nur die Procent-Aräometer (für Alkohol von Gay-Lussac und Tralles) und die Oechsle'sche Mostwage machen hiervon eine Ausnahme.

Bei gemischten Flüssigkeiten würde man den Gehalt derselben aus dem spec. G. der Bestandtheile und der Mischung berechnen können, wenn das spec. G. der Mischung das arithmetische Mittel aus den sp. Gew. der Bestandtheile wäre. Wenn dies auch manchmal der Fall ist, so gilt es doch meistens dann nicht, wenn die Mischung mit einer Lösung oder einer chemischen Einwirkung verbunden ist. So findet bei dem Mischen von Alkohol mit Wasser eine Raumverminderung statt, welche aber ebenfalls nicht einem bestimmten Gesetze gehorcht. Man hat daher durch Versuche alkoholometrische Tabellen aufgestellt, welche für jeden beliebigen Alkoholgehalt das spec. G. der Mischung angeben. Hat man demnach Aräometer, welche sp. G. angeben, so kann man aus einer solchen Tabelle den Alkoholgehalt entnehmen, wenn man das sp. G. einer Mischung mit einem solchen Aräometer gefunden hat. Besonders brauchbar sind dieselben, wenn sie auf der Skale gerade diejenigen sp. G. enthalten, die nach den Tabellen einem bestimmten Procentgehalte von Weingeist entsprechen; dies ist bei den Alkoholometern von Tralles der Fall, welchen auch noch erweiterte Tabellen für verschiedene Temperaturen beigegeben sind, und welche in Deutschland zum gesetzlichen Messen des Spiritus eingeführt wurden. — In ähnlicher Weise gibt die Oechsle'sche Mostwage den Procentgehalt des Mostes an Traubenzucker an; 100 Grade entsprechen 20, 60 Grade 12 Gewichtprocenten Zucker. Doch ist das Resultat einer solchen Messung nicht ganz zuverlässig, weil auch noch andere Stoffe Einfluß auf die Dichte des Mostes haben. Gleiches gilt von den Salzspindeln, Soolwagen u. s. w.; noch unzuverlässiger sind die Milchwagen; für Bier und Wein sind Aräometer als Maß der Güte ganz verwerflich. — Alle Senkwagen sind ungenau, weil sie nicht allein vom Auftrieb, sondern auch von der so veränderlichen Flüssigkeitshaut getragen werden. Zur Beseitigung dieser Ungenauigkeit hat Marangoni 1886 sein d o p p e l t e s V o l u m e t e r construirt. Es besteht aus 2 Senkwagen aus demselben Glase und identischer Form, wodurch der Einfluß der Flüssigkeitshaut derselbe wird und demnach bei der Vergleichung einer Flüssigkeit mit Wasser wegfällt. Bei jeder Flüssigkeit ist das Product der Dichte mit dem verdrängten Volumen gleich dem Gewichte des Instrumentes vermehrt um die Flüssigkeitshautspannung. Durch die Subtraction der 2 Gleichungen geht letztere weg, so daß das Product der Dichte mit der Differenz der Volumina gleich der Differenz der Gewichte ist, woraus die Dichte genau zu finden.

169 Aufg. 262. Ein Stück Zink von 12^{ccm} wiegt $86,52^{g}$; welches ist das sp. G. des Zinkes? Aufl.: 86,52 / 12 = 7,21. — A. 263. Stücke Silber, Kupfer, Schwerspath, Marmor, Quarz von 10, 11, 12, 13, 14^{ccm} wiegen bezüglich 105; 97,68; 53,16; 36,79; $37,1^{g}$; berechne die spec. Gew. — A. 264. Ein Schoppen Quecksilber wiegt 13,6 *℔.*; wie groß ist

das sp. G.? — A. 265. Ein Liter Schwefelsäure wiegt 1533^{g}; wie groß ist das sp. G.? Aufl.: 1,533. — A. 266. Ein Stück Platin von 1^{kg} verliert in Wasser 45^{g}; sp. Gew.? Aufl.: 22$^{2}/_{9}$. — A. 267. Ein Stück Eisen von 3^{kg} wiegt in Wasser 2,6^{kg}; sp. Gew.? Aufl.: 7,5. — A. 268. Ein Stück Sandstein von 2,4^{kg} wiegt in Wasser 1,4^{kg}; sp. G.? Aufl.: 2,4. — A. 269. Ein Stückchen Flußspath wird auf den Teller der Senkwage gelegt; dazu müssen für das Einsinken bis zur Marke 19,3^{g} und dann an seine Stelle 3,1^{g}; wenn es in das Körbchen gelegt wird, dürfen auf dem Teller nur 21,4^{g} liegen; sp. G.? Aufl.: 3,1. — A. 270. Auf dem Teller liegen 30,5^{g}; neben einem Stückchen Quarz nur 26,3^{g}; wenn der Quarz im Körbchen liegt, dagegen 28,9^{g}; spec. G.? Aufl.: 2$^{5}/_{8}$. — A. 271. Ein Stück Ahornholz von 3,6^{g} wiegt in absolutem Alkohol 0,44^{g}; sp. G.? Aufl.: 0,9. — A. 272. Ein Stück Buchenholz von 3^{g} verliert in Aether 2,66^{g}; sp. G.? Aufl.: 0,8. — A. 273. Ein Stück Kochsalz von 4,5^{g} verliert in Leinöl 2,14^{g}; sp. G.? Aufl.: 2. — A. 274. Ein Stück Kupfervitriol von 6^{g} verliert in Erdöl 2,3^{g}; sp. G.? Aufl.: 2,2. — A. 275. Ein Messingwürfel von 3^{ccm} Inhalt verliert mit einem Stück Holz von 3,5^{g} Gewicht in Wasser 8^{g}; sp. G. des Holzes? Aufl.: 0,7. — A. 276. Eine Messingkugel von 16,78^{g} wiegt mit einem Stücke Wachs von 1,94^{g} in Wasser zusammen 14,72^{g}; sp. G. des Wachses? Aufl.: 0,97. — A. 277. Ein Stück Zink wiegt 36,05^{g}; welches ist sein Volumen? Aufl.: 5^{ccm}. — A. 278. Ein Stück Eis wiegt 88^{g}; Vol? Aufl.: 100^{ccm}. — A. 279. Mittels Kopps Volumenometer fand man das Volumen von 1000^{g} gepulvertem Bimsstein 465^{ccm}, Stärkemehl 641^{ccm}, Flachs 690^{ccm}, roher Seide 640^{ccm}, Baumwolle 787^{ccm}; sp. G.? Aufl.: 2,15; 1,56; 1,45; 1,56; 1,27. — A. 280. Ein Tausendgranfläschchen, d. i. ein Fläschchen, das 1000 Gran Wasser faßt, faßt 13 598 Gran Quecksilber, 2966 Gran Brom, 1848 Gran Schwefelsäure, 1272 Gr. Schwefelkohlenstoff, 1022 Gr. Malaga, 872 Gr. Terpentinöl, 868 Gr. Benzol, 715 Gr. Aether; spec. Gew.? Aufl.: 13,598; 2,966; 1,848; 1,272; 1,022; 0,872; 0,868; 0,715. — A. 281. Ein Platinwürfel verliert in Wasser 2^{g}, in Quecksilber 27,2^{g}; spec. G.? Aufl.: 13,6. — A. 208. Eine Glaskugel verliert in Wasser 8,325^{g}, und Weingeist 5,86^{g}; sp. G.? Aufl.: 0,8. — A. 283. Ein Aräometer wiegt 13,5^{g}; in Wasser muß man für das Einsinken bis zur Marke 7^{g}, in Spiritus 2,9^{g} zulegen; sp. Gew.? Aufl.: 0,8. — A. 284. Was wiegt ein rechteckiges Stück Quarz, 15^{cm} hoch, 8^{cm} breit, 6^{cm} dick; spec. Gew. = 2,654? Gewicht $P = 15 . 8 . 6 . 2{,}654 = 1910{,}88^{g}$. — A. 285. Was wiegt eine gußeiserne walzenförmige Stange von 5^{cm} Durchmesser und 120^{cm} Höhe? $P = \frac{1}{4} . 3{,}1416 . 5^{2} . 120 . 7{,}21 = 16\,988^{g} = 17^{kg}$ ca. — A. 286. Wie groß müßte ein goldener Würfel sein, um 1 Million fl. werth zu sein, wenn das spec. Gewicht des Goldes 19,258 ist und 1^{kg} Gold 1600 fl. kostet?

Zahl der kg = $^{1\,000\,000}/_{1\,600} = 625$.
Seite des Würfels = x^{cm}
Inhalt des Würfels = x^{3ccm}
Gewicht des Würfels = $19{,}258\,x^{3g}$

Daher die Gleichung
$19{,}258\,x^{3} = 625 . 1000$
Daraus $x = \sqrt[3]{\frac{625000}{19{,}258}} = 31{,}897^{cm}$

A. 287. Wie groß müßte ein Kegel von Ahornholz von gleicher Weite und Höhe sein, um 2^{kg} zu wiegen, wenn das sp. G. des Ahorns = 0,76 ist? Weite und Höhe = 21,582^{cm}. — A. 288. Was wog in Baden ein Sandstein von 5′ Länge, 2′ Breite und 3′ Höhe; $P = 5 . 2 . 3 . 54 . 2{,}45 = 3969$ ℔. — A. 289. Was wog in Preußen ein gußeiserner Dampfcylinder ohne Boden und Deckel von 5′ Höhe, 2′ lichter Weite und 3″ Metalldicke? $P = \pi (R^{2} - r^{2})\, hs\gamma = \pi . 27 . 3 . 60 . 7{,}21 . 61{,}74 / 1728 = 3933{,}18$ ℔.

3. Molekularwirkungen der Flüssigkeiten.

Die Flüssigkeitshaut (Robert Norman 1580, Laplace 1819). Die Flüssig- 170
keitshaut ist die äußerste Oberflächenschicht einer Flüssigkeit; sie hat eine größere Cohäsion als die Flüssigkeit im Innern und übt einen Druck auf die Flüssigkeit aus, den man in der ebenen Oberfläche Normaldruck, in der gekrümmten Oberflächenspannung nennt. Ueber diese bestehen folgende Gesetze: 1. Die Oberflächenspannung ist in einer convexen Oberfläche größer als der Normaldruck in einer ebenen, und zwar um so größer, je schärfer die Convexität ist. 2. Die Oberflächenspannung ist in einer concaven Oberfläche kleiner als der Normaldruck in einer ebenen, und zwar um so kleiner, je schärfer die Concavität ist.

Ein Theilchen M (Fig. 103) im Innern einer Flüssigkeit wird innerhalb der Sphäre, in welcher die Anziehung auf dasselbe wirken kann, von allen Seiten gleich stark angezogen, so daß die Anziehungen einander aufheben. Für ein Theilchen A an der Oberfläche aber heben sich zwar auch die Anziehungen der Schicht $defg$ gegenseitig auf; aber die Anziehung des Segments fgh wird nicht aufgehoben. Die Oberflächentheilchen erfahren also eine Anziehung nach unten, üben also auf die Flüssigkeit einen Druck aus, den Normaldruck, und sind hierdurch schwerer aus ihrer Lage zu bringen, bilden die Flüssigkeitshaut.

Die Gesetze der Oberflächenspannung ergeben sich leicht aus Fig. 104, wo die Anziehungssphäre eines Moleküls stark vergrößert dargestellt ist, in A für die ebene Oberfläche de, in B für die convexe Oberfläche de, und in C für die concave Oberfläche de; in allen drei Fällen ist die flüssige Masse, deren Anziehung nach unten nicht aufgehoben ist, mit fhg bezeichnet. Für die convexe Oberfläche ist der nach unten anziehend wirkende Theil

Fig. 103.

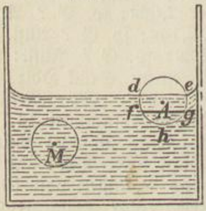
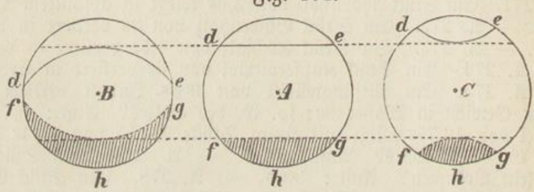


Fig. 104.



größer als für die ebene, und für die concave Oberfläche ist der nach unten anziehend wirkende Theil kleiner als für die ebene; und für die convexe Oberfläche ist der nach unten anziehend wirkende Theil um so größer, je schärfer die Krümmung ist; aber für die concave Oberfläche ist der nach unten anziehend wirkende Theil um so kleiner, je schärfer die Krümmung ist, womit die Gesetze dargethan sind.

Die Flüssigkeitshaut wird in der Natur nachgewiesen durch Wasserinsecten, die unbenetzt über die Flüssigkeit laufen, im Experiment durch Nähnadeln, die man auf eine Wasseroberfläche legen kann, ohne daß sie einsinken, jedoch eine leichte Biegung veranlassen, etwa wie auf Milchhaut. Die Vergleichung mit der Milchhaut ist indessen nicht zulässig, da dieselbe eine feste Haut ist, die wohl einen wagrechten Zusammenhang hat, aber nicht von einem Druck nach unten oder innen herrührt wie die Flüssigkeitshaut. In dieser Beziehung könnte man sie mit einem flachen, wagrechten Gewölbe vergleichen, in welchem ebenfalls durch einen Verticaldruck nach unten, durch das Gewicht der Gewölbesteine, nicht bloß ein fester horizontaler Zusammenhang, sondern auch eine Trägfähigkeit nach oben entwickelt wird. Diese Eigenschaften hat auch die Flüssigkeitshaut durch ihren Normaldruck; nur besteht sie als Flüssigkeit aus absolut leicht verschiebbaren Theilchen, besitzt also durch ihren zähen Zusammenhang die Eigenschaften momentaner Ausdehnbarkeit und Zusammenziehbarkeit, sie ist das veränderlichste Gebilde der Natur. Am schönsten zeigen die zelt- und schildförmigen Abflußfiguren der Park- und Zimmerspringquellen diese Eigenschaften der Flüssigkeitshaut, ihre ausdauernde Zähigkeit bei stetem Wechsel, ihre Beständigkeit bei der Wandelbarkeit; da die unteren Theile solcher Figuren von den oberen getragen werden, so demonstriren sie auch eine Tragkraft in der Richtung der Haut, eine Spannung, wie sie eine gespannte Kautschukhaut hat. Um einen in Wasser getauchten Körper zieht sie sich in demselben Augenblick herum, dehnt sich also aus, zieht sich aber beim Herausnehmen sofort wieder zusammen. So ist es erklärlich, daß einzelne Physiker, wie Laplace, van der Waals, Stefan, riesige Größen, tausende von Atmosphären, für ihren Normaldruck, den man in der mathematischen Capillaritätstheorie mit K bezeichnet, heraus gerechnet haben; jedenfalls ist sie für jede Flüssigkeit eine bestimmte, constante Größe, deren Betrag nicht wesentlich ist, weil er bei den meisten Berechnungen sich aufhebt. Indessen erfährt der Normaldruck doch kleine Veränderungen; so wird er beim langsamen Eintauchen eines steifen Blattes Papier in Wasser, also bei Vergrößerung der Haut kleiner, wie Blondlot (1886) durch einen neben dem Blatt Papier liegenden kugeligen Oeltropfen nachgewiesen hat, indem dieser sich dabei nach allen Seiten ausbreitet und erst beim Herausziehen des Papiers die frühere Kugelform wieder annimmt. Längst bekannt ist schon, daß der Normaldruck und die Oberflächenspannung durch Verunreinigungen der Haut kleiner werden. Bläst man gegen Wasser, in dem ein Aräometer schwimmt, Rauch oder Staub, so hebt sich das Aräometer etwas, woraus hervorgeht, daß der den Auftrieb vermindernde Normaldruck kleiner geworden ist. Auf dieser Verkleinerung der Oberflächenspannung durch Verunreinigung beruht die besänftigende Wirkung des Oeles auf die sturmbewegten Meereswellen, die jetzt feststeht und aus folgendem Beispiel besonders deutlich wird: Ein Capitän der Transatlantischen Generalcompagnie ließ bei einem furchtbaren Sturm im Kanal 8 Säcke, jeder mit 3^{kg} Werg und 10^{kg} Oel gefüllt und mit Nadeln durchstochen, an Fangleinen 5^{m} vom Schiff wegtreiben, wodurch jede auf das Schiff losstürzende Welle schon in 15^{m} Abstand sich völlig glättete. Die Verminderung der Oberflächenspannung vermindert auch die Kräuselung, die von auf der Meeresfläche sich reibenden Winden herrührt und nimmt dadurch dem Sturm die Angriffspunkte auf die Wellen. Zum Nachweise der Verminderung der Oberflächenspannung durch Oel hat daher van der Mensbrugghe (1887) folgenden Versuch angestellt: In einem unten zugekorkten Glastrichter wird destillirtes Wasser durch ein reines Glasstäbchen in rasche Rotation versetzt. Nach Herausziehen des Korkes sinkt die Flüssigkeit in der Mitte mehr als am Rande, weil hier die Centrifugalkraft größer ist; durch dieses Sinken in der Mitte entsteht in dem Wasser ein Luftkanal, den man selbst in dem äußeren Theile des Ausflußstrahles noch wahrnehmen kann. Der Kanal im Inneren zeigt auch die bekannten Anschwellungen und Einschnürungen, die von der großen Oberflächenspannung des Wassers herrühren und bei anderen Flüssigkeiten mit geringerer Spannung viel kleiner ausfallen; auch der äußere Strahl hat außen eine große Anschwellung. Wird nun auf das rotirende Wasser eine nur 0,2mm dicke Terpentinölschicht gebracht, so werden die inneren Knoten und Bäuche viel schwächer, zeigen das Kleinerwerden der Oberflächenspannung. Wenn nun Verunreinigung die Spannung vermindert, so muß das Reinerwerden einer Haut die Spannung vergrößern. Reiner aber wird eine verunreinigte Haut, wenn sie größer wird. Im Gegensatze zu einer reinen Haut, die durch Vergrößerung die Spannung vermindert, muß also eine unreine Haut durch Vergrößern ihre Spannung vergrößern. Dies zeigte 1887 Marangoni mit seiner Cosinuswage, wobei es sich um die Darstellung einer leicht zu vergrößernden Haut handelte; die Seifenblasen sind solche, jedoch mit 2 Häuten, einer äußeren convexen und einer inneren concaven; für diesen Fall könnten sie dennoch dienen, wenn sie etwas beständiger wären. Geeigneter ist deshalb Plateaus Flüssigkeit, aus 2 Vol. Glycerin und 3 Vol. Seifenbrühe bestehend, oder Böttchers Flüssigkeit: 2 Th. fein geschabte Palmölseife in 30 Th. destillirten Wassers heftig umgerührt und mit $^1/_8$ bis $^1/_{10}$ Glycerin versetzt. Taucht man in diese Flüssigkeit Drahtnetzkörper, so wird jede Grenzfläche durch eine Flüssigkeitshaut hergestellt: Plateaus Figuren. Marangoni nahm als obere Grenzlinie seiner Haut einen Draht, als untere den Zeiger einer Zeigerwage; als die Haut verunreinigt war, wurde balancirt; beim Heben des Drahtes, also bei Vergrößerung der Haut hob sich auch der Zeiger. — Solche Glycerinhäute sind auch geeignet, durch Versuche zu zeigen, daß die Flüssigkeitshaut nicht bloß einen Druck nach innen ausübt, daß sie Zusammenhalt und Tragfähigkeit nach außen hat, sondern daß sie auch nach allen Richtungen in ihrer Ebene Zugkraft ausübt, eine Spannung hat, wie die erwähnte dünne Kautschukhaut. Schöntges benutzte (1888) nach dem Vorgange van der Mensbrugghes dafür eine in einem Rahmen aus Eisendraht hergestellte Glycerinhaut. Legt man auf dieselbe einen lockeren Fadenring und sticht die Haut in dessen Mitte durch, so nimmt der Ring vollkommen Kreisform an, weil wegen der Spannung der Lamelle das Maximum der Fläche hergestellt werden muß. Entsprechend bilden leichte Grashalmstäbchen, die durch 2 oder 1 lose Fäden verbunden aufgelegt werden, Sectoren oder Segmente eines Kreises.

Die mathematische Theorie der Capillariät hat als Grundgesetz, daß die Oberflächenspannung dem Radius der Krümmung umgekehrt proportional ist. Für eine Kugel, deren Form der nach unten gebogene Wasserspiegel in einer vollkommen benetzten Glasröhre annimmt, läßt sich dies Gesetz einfach (nach Januschke, Wiener Zeitschrift für das Realschulwesen 1888 XIII, S. 519) beweisen. Bezeichnen wir einstweilen den Druck auf jedes qcm der kugelförmigen Grenzfläche (Fig. 105) mit H, so übt dieser Druck auf die kreisförmige Grenzlinie zwischen Wasser und Glas eine Zugkraft aus, welche gleich der horizontalen Projection aller Druckkräfte auf die Halbkugelfläche, also $= r^2\pi \,.\, H$ sein muß. Jene Zugkraft muß aber gleich sein der Tragkraft der kreisförmigen Grenzlinie gg zwischen Wasser und Glas; das an der Längeneinheit dieser Contactlinie hängende Wassergewicht bezeichnet man mit α; folglich ist die Zugkraft an der ganzen Grenzlinie $= 2r\pi \,.\, \alpha$; hierdurch entsteht die Gl. $\pi r^2 H = 2r\pi\alpha$, woraus $H = 2\alpha / r$, womit das Gesetz der umgekehrten Proportionalität der Oberflächenspannung mit dem Radius bewiesen ist. Zugleich folgt hieraus, daß $H = 2\alpha$ und $\alpha = {}^1/_2 H$ ist, wenn der Radius $= 1$ wird. Da H nur von r und der Natur der Flüssigkeit abhängt, so hat es für den Radius 1 immer dieselbe Größe, heißt daher auch Capillarconstante. Die Einheit der Oberflächenspannung ist daher der Druck auf die Flächeneinheit einer Kugel vom Radius 1; für jeden anderen Radius r ist die Oberflächenspannung $= H / r$.

Fig. 105.

Diese Capillarconstante ist auch $= \alpha / 2$, ist gleich dem halben Gewicht der an der Einheit der Contactlinie hängenden Wassermenge. Deßhalb ist auch $\alpha = 2H$ constant und wurde auch längere Zeit als Capillarconstante bezeichnet. Jetzt gilt als solche vorzugsweise eine dritte Größe H / s oder $2\alpha / s$, der Quotient der Oberflächenspannung oder des doppelten Wassergewichtes an der Einheit der Contactlinie durch das spec. Gew.; man nennt sie specifische Cohäsion und bezeichnet sie mit a^2. Diese 3 Constanten sind eigentlich nur eine und werden daher abwechselnd als zweite Capillarconstante bezeichnet; die erste ist nämlich der Randwinkel. Die Größe a bedeutet dabei die Steighöhe einer Flüssigkeit an einer vollkommen benetzten Wand, aber auch in der Tropfenlehre den Abstand des größten Tropfenquerschnitts vom tiefsten oder höchsten Punkt. Die 3 Größen H, α und a^2, die eigentlich nur eine Constante ausmachen, sind vielfach bestimmt worden. Eine Tafel in Wüllners Experimentalphysik gibt für α bei Wasser 7,7, Schwefelsäure 6,3, Salzsäure 7,1, Salpetersäure 4,3, Alkohol 2,3, Aether 1,8 in mgr des statischen Kräftemaßes, wodurch die weit überwiegende Oberflächenspannung von Wasser erhellt. Für das **absolute Maß** gibt Herwig $a^2 = H / s = 162\, cm^3 sec^{-2}$. Die Spannung ist als Kraft von der Dim. mlt^{-2} (22), verliert aber wegen der umgekehrten Proportionalität das l, und die Dichte als auf die Einheit des Volumens bezogen $= m / l^3 = ml^{-3}$; also ist $H / s = mt^{-2} / ml^{-3} = l^3 t^{-2}$; deßhalb wird a^2 durch $cm^3 sec^{-2}$ gemessen.

Mit dem Gesetze der umgekehrten Proportionalität zum Radius können wir nun das **erste Gesetz der Capillarität** aussprechen, welches die Größe des gesammten **Oberflächendrucks** oder Cohäsionsdruckes ausspricht, der aus dem Normaldruck K und der Oberflächenspannung $H /_2 (1 / R + 1 / R')$ zusammengesetzt ist, wenn die Krümmung wie gewöhnlich nicht kugelförmig ist und R und R' die Radien der 2 Hauptkrümmungen sind, welche Formel für lauter gleiche Radien wie es sein muß in H / R übergeht; hiernach ist der **Oberflächendruck** $= K \pm H /_2 (1 / R + 1 / R')$, wo das Pluszeichen für die convexe Krümmung gilt, weil hier der Gesammtdruck größer ist als der Normaldruck, und das Minuszeichen für die concave Krümmung. — Hierdurch erklärt sich zunächst, daß jede unabhängige Flüssigkeit, auch freischwebende Tropfen, Kugelform haben; denn an jeder Hervorragung sind die Radien kleiner und um so kleiner, je kleiner die Hervorragungen sind. Hierdurch wird der Gesammtdruck nach innen $K + H /_2 (1 / R + 1 / R')$ größer und größer und dadurch die Ausbiegung mit Beschleunigung eingedrückt. Natürlich erklärt sich auch so die Kugelform der Luftblasen in Wasser und der Seifenblasen; es erklärt sich aber auch zweitens die Zusammenziehung der Seifenblasen beim Nachlassen des Blasens. Für die äußere Flüssigkeitshaut ist der Druck nach innen $K + H /_2 (1 / R + 1 / R')$, weil sie convex ist, und für die innere concave der Druck nach außen $K - H /_2 (1 / R + 1 / R')$; der erstere ist, da die Radien nur wenig verschieden sind, um $H (1 / R + 1 / R')$ größer als der innere, wodurch die Blase sich zusammenzieht. Drittens erklärt sich die vollkommene Ebene einer Haut, wenn sie von Kanten in einer Ebene begrenzt ist; denn die 2 Ausdrücke sind nur dann einander gleich, wenn die Summanden mit dem + und — Zeichen wegfallen, wenn also $H /_2 (1 / R + 1 / R') = 0$ ist, was der Fall ist, wenn R und R' gleich unendlich sind, wenn also beide Seiten der Haut eben sind; deßhalb überzieht sich ein Drahtnetz aus 6 Tetraederkanten gebildet entweder mit den 4 Tetraederseiten oder es bilden sich die 6 Halbirungsebenen der 6 Keilwinkel. Der Ausdruck $H /_2 (1 / R + 1 / R')$ wird indeß auch Null, wenn $R = - R'$ ist; dieser Fall wird ausgeführt, wenn man 2 Drahtringe von gleichem Radius in parallelem gleichen Abstand durch seitliche Fortsetzungen verbindet und in Plateaus Flüssigkeit taucht. Man erhält eine concave Seitenfläche und zwei convexe Grundflächen eines Paraboloids.

171 **Die Capillarität** (Leonardo da Vinci 1452—1519, Laplace 1819). Die Lehre von der Capillarität umfaßt die Erscheinungen, welche bei dem Zusammenwirken der Oberflächen fester und flüssiger Körper stattfinden. Diese Erscheinungen sind verschieden, je nachdem die Prosaphie (s. 76.) gegen den festen Körper größer oder kleiner ist als die Synaphie.

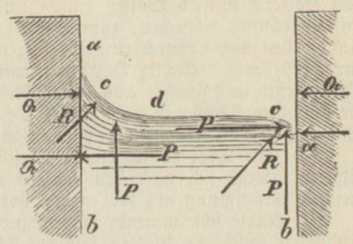
1. Ist die Prosaphie größer als die Synaphie, so finden folgende Erscheinungen statt:

a. Die Flüssigkeit bildet auf dem festen Körper keine Tropfen, sie zerfließt und benetzt ihn. Beispiele: Wasser auf Glas, Quecksilber auf Zinn oder Zink.

b. Die Flüssigkeit zieht sich an dem eingetauchten festen Körper oder an der Gefäßwand, die aus dem festen Körper besteht, in einer concaven Curve aus der freien Oberfläche hinaus.

Denn auf einen Flüssigkeitstheil an der Wand (Fig. 106 links) wirkt nach unten die Synaphie P, senkrecht gegen die Wand hin aber die Prosaphie Q des Wandtheiles über, und des Theiles unter der Oberfläche und senkrecht von der Wand weg ebenfalls die Cohäsion P; die letztere Kraft wird von dem unteren Q aufgehoben, hebt aber dieses, da $Q > P$, nicht ganz auf; es bleibt somit ein Rest von dem unteren Q, der mit dem oberen Q und dem senkrecht nach unten gerichteten P eine Resultante R hat, die schief in die Wand hineingerichtet ist. Die Oberfläche einer Flüssigkeit aber muß auf der dieselbe bildenden Kraft senkrecht stehen; folglich ist die Oberfläche schief nach unten von der Wand ab gerichtet, schließt mit der Wandfläche unterhalb der Flüssigkeit einen Winkel *bac*, **Randwinkel** genannt, ein, der z. B. für Wasser gegen Glas bei völliger Benetzung = 0° ist. Für weiter nach innen, nach *d* zu, gelegene Wassertheile wird die Prosaphie bald verschwindend klein; deßhalb muß die Resultante immer mehr der Richtung senkrecht nach unten näher kommen, die Oberfläche muß immer mehr wagrecht werden. Hieraus erklärt sich die concave Form der Randflüssigkeit. Mit dieser concaven Form ist auch ein Hinausziehen, also ein Heben der Flüssigkeit verbunden. Die Menge der Flüssigkeit in mg, welche an einer Längeneinheit der Contactlinie hängt, also an 1mm, wird **Capillaritätsconstante** genannt, wie oben schon erwähnt.

Fig. 106.



c. Die Oberfläche der Flüssigkeit in einer engen Röhre ist concav, bildet einen concaven Meniskus (*μηνίσκος* ein kleiner Mond).

d. In einer eingetauchten sehr engen (Haar- oder Capillar-) Röhre steht die Flüssigkeit höher als außerhalb derselben, eine Erscheinung, die man **Capillar-Attraction** oder Haarröhrchen-Anziehung nennt.

Denn innerhalb des Röhrchens wäre (nach 170.) wegen der concaven Oberfläche der Druck nach unten geringer als außerhalb desselben, wenn die Höhe der Flüssigkeit beiderseits dieselbe wäre; damit die Gleichheit des Druckes hergestellt werde, muß die Flüssigkeit in dem Röhrchen so hoch steigen, bis das Gewicht der gestiegenen Flüssigkeit dem fehlenden Drucke gleich ist. Die Concavität des Meniskus ist nun aber um so stärker, je enger das Röhrchen ist; und je stärker die Concavität ist, um so größer wird der fehlende Druck; je größer aber dieser ist, desto höher muß die Flüssigkeit steigen. Folglich muß die Flüssigkeit in einem Capillargefäße um so höher stehen, je enger dasselbe ist. Nach Januschke (1888) ergibt sich leicht, was längst durch Messung bekannt war, daß die **Steighöhe im umgekehrten Verhältnisse zum Durchmesser oder Radius** steht. Denn nach 170. ist $H = 2\alpha / r$; dieses H gibt aber den Spannungsunterschied zwischen der ebenen und der gekrümmten Oberfläche an, der das Gewicht des gehobenen flüssigen Säulchens trägt; dieses Gewicht ist für die Flächeneinheit, die hier genommen werden muß, weil auch H für dieselbe gilt, aber gleich hs, wenn s das sp. G. und h die Höhe des Säulchens ist; also ist $hs = 2\alpha / r$, woraus $h = 2\alpha / rs = H / rs$. Diese Ableitung ergibt nicht bloß die umgekehrte Proportionalität zum Radius, sondern auch zum sp. G. und die direkte zur Oberflächenspannung. Wasser steigt also am höchsten. Wenn in einer Röhre von 1mm Weite Wasser 30mm, Olivenöl 15mm, Terpentinöl 13mm, Weingeist 12mm, Aether 9mm hoch steht, so stehen diese Flüssigkeiten in Röhren von 0,1mm Weite bezüglich 300, 150, 130, 120 und 90mm hoch; neueste genaueste Messungen ergeben für Wasser in einer Glasröhre von 0,34mm Weite eine Steighöhe von 41,5mm bei 20° Wärme, was mit den alten Angaben nicht stimmt; von der Temp. kann dieser starke Unterschied nicht kommen; denn Wasser hat bei 30° noch 26mm, Olivenöl bei 150° noch 12mm Steighöhe; steigende Temp. vermindert also die Steighöhe. Die alten Messungen sind wohl ungenau. Auch folgt leicht aus der Formel für h, daß $H = rsh$, $\alpha = {}^1/_2 rsh$ und $a^2 = rh$, daß also alle drei zweite Capillaritätsconstanten aus Steighöhen gefunden werden. Weiter ergibt sich, daß zwischen parallelen Wänden die Flüssigkeit nur halb so hoch steht wie in cylindrischen Röhren von gleicher Weite, daß zwischen zwei gegen einander geneigten Wänden die Oberfläche in Hyperbelform ansteigt, sowie daß in einer aus Flüssigkeit herausgezogenen Röhre eine doppelt so hohe Flüssigkeitsäule hängen bleibt, als sie in einem eingetauchten Harröhrchen steht. Diese letztere Thatsache zeigt besonders deutlich, daß die Adhäsion wohl die Grundursache, aber für sich nicht ausreichend zur Erklärung der Capillar-Erscheinungen ist; denn jene Thatsache erklärt sich nur durch den convexen Meniskus an der unteren Oeffnung des Röhrchens, welcher nach 170. einen Druck nach oben ausübt, der um eben so viel über demjenigen der ebenen Haut steht, als dieser über dem Drucke des ganz gleichen concaven Meniskus am oberen Ende des gehobenen Wassersäulchens.

Die Capillar-Attraction erklärt: das Aufsteigen z. B. von Kaffee in einem nur mit der Spitze eingetauchten Stückchen Zucker, das Aufsteigen von Feuchtigkeit im Boden, in feucht liegenden Sandhaufen, in feucht stehenden Mauern (Mauersalpeter), das Eindringen von Flüssigkeiten in poröse Gegenstände, das Sickern durch poröse Wände (Thonzellen, Alkarazzas, Drainröhren), das Aufsaugen von Flüssigkeiten durch Schwämme, Fließpapiere, Tücher, Humus, durch die menschliche Haut (Nutzen der Bäder), die Endosmose und das Aufsteigen von Pflanzensaft in den Saftgefäßen, wie die Bewegung von thierischen Flüssigkeiten. Man benutzt die Capillarität in den Lampendochten, in welchen sich die Brennflüssigkeit durch diese Kraft hebt, zum Sprengen von Felsen mittels befeuchteter Keile, zum Krümmen von Hölzern mittels Wasser eines- und Feuer andererseits, zum Aufsaugen von Lymphe mittels dünner Röhrchen, zum Sprengen von Schädeln mittels angefeuchteter Erbsen, zum Anschwellen und dadurch zum Verkürzen von Tüchern und Seilen (der Obelisk von Luxor), zur Herstellung verlechter Holzgefäße mittels eingegossenen Wassers, zu der Spielerei, Wasser ohne Gießen und Fließen aus einem Gefäß in ein anderes zu befördern mittels Faserbündel, die aus dem Wasser in das andere Gefäß hineingehen u. s. w. Die Capillar-Attraction ist also eine der verbreitetsten und wichtigsten Natur-Erscheinungen.

e. Ein Tropfen in einem kegelförmigen Haarröhrchen oder zwischen zwei geneigten Platten bewegt sich nach den engeren Raumtheilen hin; denn der weitere Meniskus hat weniger Krümmung als der engere, übt daher einen größeren Druck als dieser aus.

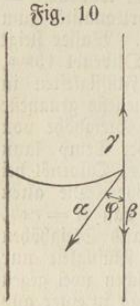
f. Leichte schwimmende Gegenstände z. B. Kugeln, oder an Fäden aufgehängte und in Flüssigkeit tauchende Platten bewegen sich zu einander, wenn sie nahe zusammenkommen.

g. Fließt eine Flüssigkeit unter spitzem Winkel aus einem Gefäße, so läuft sie leicht an der Wand herab; man kann abhelfen durch Befetten oder ein Ausflußstäbchen.

Als Ergänzung zu a. ist zu bemerken, daß auch eine adhärirende Flüssigkeit Tropfen bildet, wenn sie an der Unterfläche des festen Körpers hängt und in so großer Menge vorhanden ist, daß ihr Gewicht ihre Cohäsion und die Oberflächenspannung überwiegt. Sehr gründlich wurde diese Tropfenbildung untersucht von Guthrie 1865. Derselbe fand das Gewicht der Tropfen um so größer, je kleiner die Bildungszeit derselben, je weniger gekrümmt die Unterfläche des festen Körpers und je höher die Temperatur der Tropfen ist; auch ergab sich, daß das Tropfengewicht abhängt von der Adhäsion des festen Körpers und der Tropfen, und zwar, daß es der zweiten Capillarconstanten proportional ist, und endlich, daß die Tropfengröße durch die Art der Cohäsion der Flüssigkeit bedingt ist; sie ist direct proportional der Steifigkeit und indirect der Festigkeit. Ja sogar die Beschaffenheit der Luft soll auf die Tropfen Einfluß haben. Auch bei hängenden Tropfen hat a die genannte Bedeutung, während bei Abreißversuchen von Platten die adhärirende Flüssigkeitsschicht die Dicke $a\sqrt{2}$ hat.

Der Randwinkel, die erste Capillarconstante ist der Winkel, den eine Tangentialebene zur Oberfläche der Flüssigkeit an einer Grenzwand mit dieser innerhalb der Flüssigkeit bildet. Seine Constanz, die als zweites Capillargesetz gilt, läßt sich nach Maxwell und Tait folgendermaßen darthun: An der Grenze zwischen Flüssigkeit und Wand (Fig. 107) wirken 3 Oberflächenspannungen, welche die Oberflächen zu verkleinern streben, die Kraft α in der Trennungsfläche zwischen Flüssigkeit und Luft, die Kraft β zwischen Flüssigkeit und Glas und die Kraft γ in der Grenzwand zwischen Luft und Glas. Gleichgewicht herrscht, wenn die Componenten der 3 Kräfte in der Richtung des Glases sich aufheben, weil die zu Wandrichtungen senkrechten Componenten durch deren Festigkeit verschwinden. Jene Aufhebung aber findet statt, wenn $\alpha \cos\varphi + \beta = \gamma$, wo φ den Randwinkel bedeutet, woraus $\cos\varphi = (\gamma - \beta)/\alpha$. Da die 3 Spannungen nur von der Natur der 3 Körper abhängen, so ist φ constant. Derselbe Werth gilt auch für liegende, sowie für hängende Tropfen. Ist wie bei Steinöl, Luft und Glas γ größer als β, so ist der Randwinkel spitz $= 36^\circ$; bei vollkommener Benetzung ist $\alpha = \gamma - \beta$, also der Randwinkel 0°; für Quecksilber, Luft und Glas ist $\beta > \gamma$, also der Randwinkel stumpf $= 129^\circ$. Die Constanz gilt nur so lange, als die Oberflächenspannungen sich nicht ändern; wie leicht dieselben geändert werden, zeigen die Angaben für Quecksilber, dessen erste Capillarconstante nach Quincke $= 55$, während Magie (in Helmholtz' Laboratorium 1887) nur 34 findet; Temperatur, Reinheit u. s. w. ändern also auch den Randwinkel. Nach de Heen (1883) ändert die Temperatur die Steighöhe u. Oberflächenspannung von organischen Flüssigkeiten so regelmäßig, daß das Diagramm der Aenderung als gerade Linie erscheint, die bei den Gliedern einer homologen Reihe dieselbe Neigung hatte; für Wasser und wässerige Lösungen aber sei es eine Curve mit Wendepunkten, Durchschnittspunkten und mehreren Krümmungsbogen.

Fig. 10



Capillarität und Verdampfung bringt Stefan (1886) in eine fruchtbare Beziehung. In Fig. 104 in der Mitte ist, wenn de die Oberfläche der Flüssigkeit bedeutet, das schraffirte Segment fgh den Normaldruck erzeugend. Ist aber fg die Oberfläche, also ein Dampfmolekül außerhalb der Flüssigkeit, so wirkt dasselbe Segment. Also ist dieselbe Arbeit nöthig, um ein Theilchen aus dem Inneren der Flüssigkeit in die Oberfläche zu versetzen, um den Normaldruck zu überwinden, wie um ein Theilchen aus der Oberfläche ins Freie zu schaffen, es in ein Dampftheilchen zu verwandeln. Hierdurch entsteht ein Zusammenhang zwischen Normaldruck und Dampfwärme; aus der Dampfwärme des Aethers = 96 findet Stefan so den Normaldruck desselben = 2574 at. Bei concaver Oberfläche ist das auf B wirksame Segment größer, bei convexer kleiner als bei ebener; also ist auch bei ersterer die Arbeit größer und dadurch die Dampfdichte kleiner als bei letzterer. Auch folgt aus obigem der Satz: Um die Oberfläche einer Flüssigkeit um den Querschnitt eines Moleküls zu vergrößern, ist dieselbe Arbeit nöthig, wie zur Verdampfung eines Moleküls. Hierdurch wird es möglich, den Quotienten des Molekularvolumens durch den Querschnitt zu berechnen, der für Aether sich $= 21.10^{-9}$ ergiebt, woraus für Kugelform wo der Quotient $^4/_3\, r$ ist, sich der Durchmesser eines Moleküls $= 0{,}32\ \mu\mu$ berechnet.

2. Ist die Prosaphie kleiner als die Synaphie, so finden folgende Erscheinungen statt: 172

a. Die Flüssigkeit bildet auf dem festen Körper Tropfen, zerfließt nicht auf demselben und benetzt ihn nicht. Beispiele: Wasser auf befettetem oder bestäubtem Glase, Quecksilber auf Glas, Holz, Eisen; ein mit Hexenmehl bestäubter Finger kann aus Wasser eine Münze nehmen, ohne naß zu werden.

b. Die Flüssigkeit zieht sich an dem eingetauchten festen Körper oder an der Gefäßwand in einer convexen Curve unter die Oberfläche zurück.

Denn hier sind (Fig. 106 rechts) die von der Wand abziehende und die zur Oberfläche senkrechte Kraft P größer als die nach der Wand hin wirkenden parallelen Kräfte Q; sind sie so groß, daß die beiden Q ganz aufgehoben werden, so bilden sie eine Resultante R schief von der Wand ab in die Flüssigkeit hineingerichtet; daher muß der an der Wand befindliche Oberflächentheil, der auf dieser Resultante senkrecht stehen muß, sich schief nach unten gegen die Wand richten. Demnach wird hier der Randwinkel bac ein stumpfer, beträgt z. B. für Quecksilber gegen Glas 129°. Vom Scheitel dieses Winkels nach c hin wird die senkrechte Cohäsion immer größer, also die Oberfläche immer mehr wagrecht; daher muß sich die Flüssigkeit in einer convexen Curve vom Scheitel nach der wagrechten Oberfläche hin ziehen.

c. Die Oberfläche der Flüssigkeit in einer engen Röhre ist ein convexer Meniskus.

d. In einer eingetauchten sehr engen (Haar- oder Capillar-) Röhre steht die Flüssigkeit niedriger als außerhalb derselben.

Denn innerhalb des Röhrchens wäre (nach 170.) wegen der convexen Oberfläche der Druck nach unten größer als außerhalb desselben, wenn die Höhe der Flüssigkeit beiderseits dieselbe wäre; damit die Gleichheit des Druckes vorhanden sei, muß demnach die Flüssigkeit in dem Röhrchen so tief stehen, daß der Druck des Meniskus und des Säulchens zusammen dem äußeren Drucke der ebenen Haut und der Flüssigkeit zusammen gleich seien. Diese Eigenschaft der Haargefäße nennt man Haarröhrchen-Abstoßung oder Capillar-Depression, dieselbe ist weniger wichtig, als die Capillar-Attraction.

e. Ein Tropfen in einem kegelförmigen Haarröhrchen oder zwischen zwei geneigten Platten bewegt sich nach den weiteren Theilen hin; denn der engere Meniskus ist convexer als der weitere, übt daher einen größeren Druck als dieser aus.

f. Leichte oder an Fäden hängende Gegenstände bewegen sich auch hier zu einander; wird aber ein Gegenstand benetzt und der andere nicht, so gehen sie aus einander.

g. Fließt die Flüssigkeit unter noch so spitzem Winkel aus einem Gefäße, so rinnt sie doch nie an der Wand herab.

Die Diffusion der Flüssigkeiten. Wenn zwei mischbare Flüssigkeiten wie Weingeist und Wasser oder Wasser und wässerige Salzlösungen miteinander in Berührung sind, so dringt durch die molekulare fortschreitende Bewegung die eine nach und nach in die andere ein, sie diffundiren gegeneinander. Wird z. B. Weingeist vorsichtig auf Wasser gegossen, so dringt das schwerere Wasser gegen das Gesetz der Schwere hinauf in den Weingeist, der leichtere Weingeist gegen das Gesetz des Auftriebs hinab in das Wasser. Die durch einen Querschnitt q der Grenzfläche hindurchgehende Menge m des einen Stoffes ist dem Querschnitt und der Dauer t proportional, aber auch der Dichtedifferenz auf die Längeneinheit, also zu d/l, und schließlich der sogenannten Diffusionsconstanten k, die nach den Stoffen verschieden ist. Die diffundirte Menge kann daher durch $m = kqt\,.\,d/l$ gemessen werden. Demnach ist die Diffusionsconstante $k = ml/qtd$, ist also die Menge, die in der Zeiteinheit durch die Querschnittseinheit geht, wenn für die Längeneinheit die Einheit der Dichtedifferenz herrscht. 173

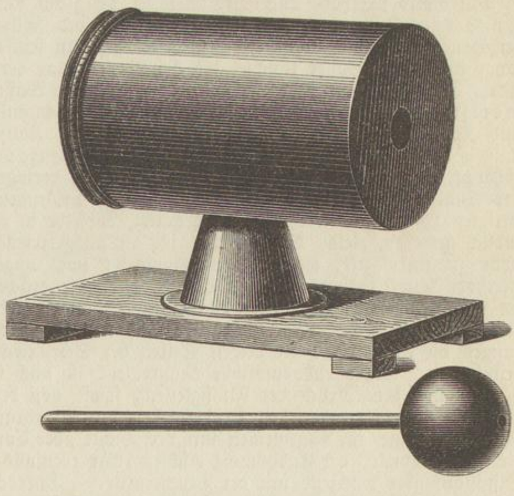
Im absoluten Maße ist die Diffusionsconstante von der Dimension ml dividirt durch l^2, weil q eine Fläche ist, dividirt durch die Zeit t in Sec. und durch die Dichte m/l^3 oder ml^{-3}; also ist $dim\, k = ml/l^2\, t\, ml^{-3} = l^2\, t^{-1}$. Die Diffusionsconstante ist daher in $cm^2\, sec^{-1}$ auszudrücken. So ist nach Herwig die Diffusionsconstante für Zinksulfat gegen Wasser bei $10^0 = 21 \,.\, 10^{-7}\, cm^2\, sec^{-1}$ d. h. in einer Secunde gehen durch 1 qcm 21 Zehnmilliontel Gramm Zinksulfat.

Früher maß man die Diffusion durch ihre Zeit oder Geschwindigkeit; so sagt Graham (1850): Kochsalzlösung diffundirt in Wasser 2,33 mal langsamer als Salzsäure, Bittersalz und Zuckerlösung 7 mal langsamer, Eiweiß 49, Caramel 99 mal langsamer als jene Säure; überhaupt ist die Diffusionsgeschwindigkeit der Krystalloide viel größer als die der Kolloide, weshalb man ein Gemisch beiderlei Substanzen durch Diffusion trennen kann; doch geschieht diese Dialyse sicherer durch Diosmose. Zum genauen Messen ist der Begriff Geschwindigkeit zu unbestimmt; auch gehören zur vollständigen Diffusion ungeheure Zeiten; so braucht nach Stefan 1 mg Chlornatrium 319 Tage, um sich aus 10% Lösung 1 m weit in Wasser fortzubewegen; 1 mg Rohrzucker würde 2 Jahre 7 Mon., 1 mg Eiweiß 14 Jahre brauchen. Endlich wächst die Langsamkeit mit der Zeit; dies sieht man gut mit einer 1 m langen unten geschlossenen Glasröhre, die unten Kaliumchromat, darüber Wasser enthält; in einer Woche steigt die rothe Farbe um 15 cm, nach 5 Mon. erst um 50 cm. Auch nach Beetz-Zott (1886) nimmt die Diffusionsgeschw. der Salze mit abnehmender Concentration ab, jedoch nur bis zu einer gewissen Verdünnung, wonach sie wieder rasch zunimmt.

Um die manchmal bestrittene allseitige Richtung der Diffusion auch gegen Schwere oder Auftrieb einer Schule zu demonstriren, füllt Detleffsen (1886) einen Glascylinder durch Zusammenbringen von Wasserglas und Salzsäure mit Kieselgallerte und läßt seitwärts etwa in der Mitte der Höhe Indigolösung eintreten; die blaue Farbe breitet sich nach allen Seiten aus. Um die Diffusionsgeschw. zu demonstriren, füllt er den längeren Schenkel einer U-förmigen Glasröhre mit Wasser, den kürzeren mit der gefärbten, diffundirenden Flüssigkeit; bei verschiedenen Flüssigkeiten sind auch die Zeiten bis zu gleicher Steighöhe je nach der Diffusionsconstante verschieden; für ein und dieselbe Flüssigkeit sind die Steighöhen den Quadratwurzeln aus der Zeit proportional (Fick'sches Gesetz). Chabry benutzt zur farbigen Demonstration der Diffusion von Säuren (1888) ein etwas weites heb- und senkbares Gefäß, daß die Säurelösung enthält; darein taucht eine 0,5 bis 15 mm weite Diffusionsröhre, die bis über einen Hahn mit destillirtem Wasser, Gelatine oder Knorpel gefüllt ist, die durch Orceïn blau gefärbt sind; die Säure diffundirt in die blaue Substanz und färbt sie roth; die farbige Grenzlinie bleibt mehrere Tage scharf und die Röhre ist mit einer Graduirung versehen, so daß genaue Messungen möglich sind. Man ersieht leicht, daß Concentration und Temperatur den bekannten Einfluß ausüben, daß das Fick'sche Gesetz nur für Mittelwerthe gilt und daß die von Fick angenommene Abhängigkeit von der Schwere nicht gilt, was auch schon Stefan festgestellt hatte. — Daß die Diffusionsconstante nicht absolut constant ist, theilt sie mit allen physikalischen Constanten; da die Diffusion eine Molekularbewegung ist, die bekanntlich mit der Temperatur wächst, so wird wohl auch die Constante mit der Temperatur größer werden; doch soll auch das Gegentheil vorkommen. Schwerer wiegen würden ein feststehender Einfluß der Concentration; so ist nach Grahams Angaben die Constante von Kochsalz $105 \,.\, 10^{-7}\, cm^2\, sec^{-1}$, nach Johannisjanz 53, nach Schuhmeister 99. Diese Verschiedenheiten bewogen Wroblewsky (1881) zu einer eingehenden Untersuchung des Kochsalzes; er fand für eine ⅔ procentige Lösung $768 \,.\, 10^{-8}\, cm^2\, sec^{-1}$, für eine 6 proc. 808 und für eine 18 proc. 889; für Spuren ergab sich sogar $810 \,.\, 10^{-8}\, cm^2\, sec^{-1}$; die Constante von Kochsalz nimmt also bei sehr schwachen Lösungen mit der Concentration ab, bei stärkeren mit der Concentration zu, was auch mit den Versuchen von Beetz-Zott stimmt. Dies kann das Interesse für die Constante nur erhöhen, verpflichtet aber nicht, ihr die Existenz abzusprechen.

Nahe verwandt mit der Diffusion ist die Lösung (§ 174), analog, aber sehr verschieden ist das Eindringen nicht mischbarer Flüssigkeiten ineinander etwa durch die Schwere oder einen anderen Druck, das nach Detleffsen wohl auch Suspension genannt werden kann, obwohl man sonst darunter das Schweben von Körperchen in einer Flüssigkeit von gleichem spec. Gew. versteht. Den Unterschied zwischen jener Suspension und der Lösung oder Diffusion demonstrirt Detleffsen (1886) mit einem nicht zu engen wasserangefüllten Glascylinder, auf dessen Wasserfläche ein Tropfen Eosinlösung gebracht wird; bald gehen von demselben scharfe rothe Fäden bis zum Boden, die etwa nach 1 Min. ihre Schärfe zu verlieren anfangen und sich allmälig zu wolkenartigen Säulen mit Sockeln erweitern, die wohl eine Stunde anhalten; rührt man nun scharf mit einem Glasstäbchen um, so verschwindet diese Suspension in dem gleichmäßigen Roth der Lösung. Viel eingehender hat schon vorher (1884) Bezold diese Figuren untersucht, nannte sie anfangs Cohäsionsfiguren, später Strömungsfiguren, und gibt zu, daß ihre Ursache nur der Temperatur-Unterschied zwischen Wasser und Luft sei und daß sie die Strömungen anzeigen, die in kälterem Wasser durch den Temperaturunterschied entstehen. Auf die Oberfläche von kühlerem Wasser als die Umgebung bringt man etwa in die Mitte eine in hektographische oder Anilintinte getauchte Feder unter möglichst spitzem Winkel, wodurch anfänglich nur eine körnig gestreifte Oberflächenfigur entsteht. Bald jedoch senkt sich ein centraler blauer Faden nach unten, der dort eine Ablenkung nach der wärmsten Seite erfährt, hier nach oben steigt, und dort radial nach der Mitte geht, also offenbar einen Querschnitt der Hälfte eines **Wirbels**, eine **Helmholtz'sche Wirbellinie** vorstellt. Mit etwas mehr Tinte können mehrere solcher Wirbellinien entstehen, die oben ein Rad mit Speichen bilden; bei langsamer Rotation bewegen sich anfangs allein die Wandtheile, die Reibung pflanzt erst allmälig die Rotation nach der Mitte fort, denn die Speichen werden gebogen und erst bei fortgesetzter Rotation wieder gerade, wonach die Flüssigkeit oben und unten an den Rand geht und in der Mitte Kelche entstehen. **Ganze Wirbel** von Flüssigkeiten in Flüssigkeiten hat Reusch schon 1860 erzeugt, vielleicht von der Helmholtz'schen Arbeit (1858) angeregt „Ueber Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen," Wissenschaftliche Abhandlungen I S. 102. Reusch benutzte ein oben geschlossenes Glasgefäß, das in der Mitte der Höhe ein central durchbohrtes Diaphragma mit einem Ventil enthielt und unten mit einer Membran geschlossen war. Ueber dem Diaphragma war es mit Wasser erfüllt, unterhalb mit einer gefärbten, zähen Flüssigkeit z. B. Oel; wurde auf die Membran ein Stoß nach oben ausgeübt, so öffnete sich das Ventil und ein gefärbter Wirbelring stieg durch das Wasser empor. Schon mit einer solchen Einrichtung lassen sich manche Ergebnisse der Helmholtz'schen Theorie darstellen z. B. die Erweiterung eines Wirbelringes bei der Annäherung an eine feste Wand, woraus folgt, daß die bekannten Erweiterungen der Rauchwirbel von dem Widerstand des Mediums herrühren, daß also in einem widerstandlosen Medium die Wirbelringe unveränderlich sind, sich weder vermehren noch vermindern. Diese Folgerung hat W. Thomson bewogen, die Atome für Wirbelringe zu erklären, und die elektromagnetische Theorie des Lichtes anzunehmen, die das Licht für elektrische Wirbel hält. Auch daß zwei Wirbel aufeinander wirken, als ob sie kreisförmige elektrische Ströme seien, läßt sich mit Reuschs Einrichtung einigermaßen erkennen. Wenn zwei Wirbel gleiche Rotation haben, wie es hier der Fall ist, so schreiten sie in gleichem Sinne fort, der vorangehende erweitert sich, schreitet in Folge dessen langsamer fort, der nachfolgende verengert sich und schreitet schneller fort, so daß er den ersten einholt, durch ihn hindurchgeht, dann dasselbe Spiel wiederholt u. s. w. Leichter lassen sich Wirbelringe bekanntlich mit Tabakrauch herstellen, während sie manchmal bei den ersten Locomotivpuffen von selbst entstehen; sicher gelingt ihre Entstehung mit dem **Luftstoßapparat**, dessen Einrichtung wir nach Weinhold folgen lassen. Wie Fig. 108 zeigt, besteht derselbe aus einem wagrechten Blechcylinder, der links mit einem Trommelfell geschlossen ist, während das ebene Blech des rechten Abschlusses in der Mitte kreisförmig durchbohrt ist. Läßt man im Inneren ein Stückchen Zunder verbrennen und schlägt mit dem Klöppel gegen das Fell, so bringt ein Rauchring aus der Oeffnung. An solchen Ringen kann man beobachten, daß die Rauchtheilchen um die kreisförmige Mittellinie des Wirbels rotiren, zu derselben senkrechte Kreise beschreiben, daß sie große Haltbarkeit besitzen, also bei völliger Abwesenheit jedes Widerstandes sich nicht erweitern, nicht verändern würden u. s. w.

Fig. 108.



Die Endosmose (Parrot 1811, Fischer 1812). Wenn zwei Flüssigkeiten durch eine Scheidewand getrennt sind, die viele Haarröhrchen oder auch viele Poren enthält, welche mit einander Haarröhrchen bilden, so müssen diese Haarröhrchen von beiden Flüssigkeiten eine gewisse, im Allgemeinen verschiedene Menge einsaugen, welche Mengen sich durch Diffusion mit einander vermischen. Diese Mischung steht nun mit 174 beiden Flüssigkeiten in Berührung und muß daher in beide diffundiren, und zwar mit verschiedener Geschwindigkeit, also nach einer gewissen Zeit in verschiedener Menge. Durch eine capillare Scheidewand zweier Flüssigkeiten gehen also verschiedene Mengen derselben. Man nennt diese Eigenthümlichkeit solcher Scheidewände die Endosmose (ἔνδον hinein und ὠσμός, Stoß). Am besten zeigen die Erscheinungen thierische Häute (Blase, Herzbeutel, Hornhaut) und Pflanzenmembranen, welche Häute indeß gegen gleiche Flüssigkeiten ein verschiedenes Verhalten zeigen. Trennt man z. B. Wasser und Weingeist durch Blase, so vermehrt sich der Weingeist, trennt man sie durch Kautschuk, so steigt das Wasser; aber in beiden Fällen findet sich nach dem Versuche beiderseits eine Mischung beider Flüssigkeiten. Nach Beetz-Zott (1886) ist das beste Diaphragma für Osmose und Dialyse die Goldschlägerhaut (das feine Oberhäutchen vom Blinddarm des Ochsen, für die Goldschläger mit Hausenblase und Wein präparirt); sie ist doppelt so wirksam wie vegetabilisches Pergament (in Schwefelsäure getauchtes Papier) und 60 bis 70mal wirksamer als Thonzelle, die jedoch für angreifende Flüssigkeiten unentbehrlich ist. Nach diesen Forschern wirken alle Diaphragmen besser osmotisch und dialytisch, wenn sie vorher evacuirt unter der Luftpumpe voll destillirten Wassers gesogen sind.

Zur Untersuchung der durchgehenden Mengen construirte Dutrochet (1826) sein Endosmometer, eine getheilte, unten trichterförmig sich erweiternde Röhre, die unten mit einer Membran geschlossen ist. In dieselbe wird die eine Flüssigkeit, z. B. Kupfervitriollösung gefüllt, und dann wird das untere Ende in die andere Flüssigkeit z. B. in Wasser getaucht. Bald steigt die Flüssigkeit in der Röhre, während an der blauen Farbe des Wassers erkannt wird, daß auch Vitriollösung nach unten gegangen ist. Solche Untersuchungen ergaben, daß die durchgehenden Wassermengen der Dichte der anderen Flüssigkeit proportional sind. Doch ist Dutrochets Methode ungenau, da z. B. bei gleich starker Endosmose beider Flüssigkeiten kein Steigen bemerkt werden kann. Genauer sind Jollys Untersuchungen (1849), der eine gewogene Menge des zu untersuchenden Körpers in sein Endosmometer füllte und dieses so lange in frisches Wasser tauchte, bis der Körper ganz verschwunden und durch Wasser ersetzt war. Die für 1 g des geprüften Körpers eintretende Wassermenge nannte Jolly das endosmotische Aequivalent. Bei Benutzung von Schweinsblase fand er dasselbe für Alkohol und Kochsalz = 4, Zucker = 7, für Glaubersalz, Kaliumsulfat und Bittersalz = 12, für Kali = 230. Da indessen die durchgehende Wassermenge von der Dichte der anderen Flüssigkeit abhängt, und da diese bei Jollys Methode immer geringer wird, so hat Eckhard (1868) in das Endosmometer eine größere Menge des zu prüfenden Körpers zusammen mit einer gesättigten Lösung desselben Körpers gebracht, dasselbe in immer frisches Wasser getaucht und endlich gemessen, welche Wassermenge für die ausgetretene Stoffmenge eingetreten war, und zwar zu einer Zeit, wo das Endosmometer noch ungelösten Stoff enthielt. Nach dieser Methode konnte Eckhard auch den Begriff des endosmotischen Aequivalentes schärfer präcisiren. Es ist diejenige Gewichtsmenge Wasser in Grammen, welche für 1 g eines löslichen Körpers durch eine capillare Scheidewand ausgetauscht wird, vorausgesetzt, daß während des Vorganges die Flüssigkeiten zu beiden Seiten der Scheidewand ihre Beschaffenheit unverändert beibehalten. Dieses endosmotische Aequivalent ist nach Eckhard unabhängig von der Temperatur und dem Drucke der Flüssigkeiten, sowie von der Richtung der Diffusion, dagegen abhängig von der materiellen Beschaffenheit der Membran und der Flüssigkeiten, und, wie Dutrochet zeigte, im Allgemeinen mit der Dichte oder Concentration der Lösung zunehmend; die Geschwindigkeit der Endosmose erschien zwar ebenfalls unabhängig von der Richtung der Diffusion, aber wachsend mit der Temperatur. — Dutrochet gebrauchte anfänglich den Ausdruck Endosmose für die stärker strömende Flüssigkeit, und für die schwächer strömende die Bezeichnung Exosmose; diese Bezeichnungen werden kaum mehr benutzt, während Diosmose oder kurzweg Osmose für die ganze Erscheinung immer mehr vorkommen.

Die Endosmose erklärt das Eindringen des Regens in Früchte (z. B. Traubenbeeren) und Blätter und daher die rasch erfrischende Wirkung desselben; das Ansaugen des Pflanzensaftes durch die Wurzelspitzen und daher durch die Fortdauer dieses Ansaugens das Steigen des Saftes in den Gefäßen der Pflanzen; die Aufsaugung des Milchsaftes oder Chylus mittels der Milchsaftgefäße aus dem Dünndarme und die Bereitung aller Ernährungsflüssigkeiten, wie der Lymphe, der Galle, des Speichels u. s. w. aus dem Blute in den Drüsen. Wibel hat (1883) die Osmose strömender Flüssigkeiten untersucht und gefunden, daß dieselbe durch organische Häute stärker ist als die ruhende, durch unorganische aber schwächer; erstere Thatsache macht die Bedeutung der Osmose für die Thier- und Pflanzenwelt noch deutlicher, letztere macht es unmöglich, daß der Kanalinhalt der Siele durch die Wände in das Erdreich dringe, wenn derselbe nur schnell genug fließt.

Die Lösung im Zusammenhang mit Diffusion und Osmose ist durch van 't Hoff 1887 mittels Zurückführung auf die kinetische Gastheorie (54.) und durch Einführung des osmotischen Druckes ihres bisherigen räthselhaften Charakters entkleidet und der Gasgesetze theilhaftig geworden. Die Diffusion der Gase geschieht umgekehrt proportional zur Wurzel aus der Dichte, weil alle Gasmoleküle die fortschreitende Molekularbewegung haben. Bei der Diffusion der Flüssigkeiten ist die Geschwindigkeit wesentlich geringer, weil nur ein Theil der Flüssigkeitsmoleküle die fortschreitende Bewegung hat; der Vorgang ist aber, abgesehen von der größeren Langsamkeit, im Wesen derselbe: ein Theil der Moleküle schreitet gegen die angrenzende Flüssigkeit fort und dringt in die molekularen Zwischenräume ein. Auch wenn ein fester Körper in der einen Flüssigkeit gelöst ist, sind seine Moleküle zu Flüssigkeitsmolekülen geworden und breiten sich in die angrenzende Flüssigkeit aus, so daß die kinetische Gastheorie auch hier Anwendung hat. Für die Lösung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit z. B. eines Stückes Zucker in Wasser muß eben angenommen werden, daß die Schwingungen der Grenzmoleküle, vielleicht durch Anziehung des Wassers oder dessen Capillarität, ihre Amplitude so vergrößern, daß sie aus dem Wirkungskreis der Zuckermoleküle hinausgelangen und dadurch den Gasmolekülen gleich fortschreitende Bewegung annehmen. Hierdurch üben auch sie wie die Gase einen Druck auf die Grenzfläche aus, der der Luftspannung analog ist und osmotischer Druck genannt wird. Für ihn gelten die Gasgesetze, das Mariotte'sche Gesetz, das Gaylussac'sche Gesetz u. s. w., wodurch sich sowohl die allbekannten, als auch neue, der Wärme- und Elektricitätslehre angehörige Eigenheiten der Lösung erklären.

Traube hatte schon 1867 die Einführung und Messung des osmotischen Druckes vorbereitet durch die Erfindung seiner künstlichen Zelle oder Niederschlagsmembran. Man erhält eine solche z. B., indem man in eine Lösung von Kupfersulfat vorsichtig einen Tropfen Ferrocyankalium träufelt; an der kugelhautförmigen Grenzfläche der beiden Flüssigkeiten bildet sich dann eine Niederschlagsmembran von Ferrocyankupfer, welche den Tropfen umschließend die Entstehung der Zelle nachzuahmen scheint. Man kann derselben durch richtige Concentration der beiden membranogenen Lösungen die hier wesentliche Eigenschaft ertheilen, daß sie keines von den beiden Salzen durchläßt, wohl aber das Wasser, das sie halbdurchlässig, ein molekulares Sieb ist. Uebrigens hat Tamann (1888) zahlreiche Membranogene mittels Töplers Schlierenapparat (366.) während der Zellenbildung beobachtet und gefunden, daß der osmotische Strom in die Zelle geht, wenn die Lösung in derselben eine höhere Dampfspannung besitzt als außerhalb, und umgekehrt, ja daß bei völlig gleicher Dampfspannung keine Osmose stattfindet, für welchen Fall der Ausdruck isosmotisch gebräuchlich ist, da dann jedenfalls auch gleicher osmotischer Druck beiderseits herrscht. Für das Verständniß des osmotischen Drucks ist die halbdurchlässige Membran wesentlich.

Nach Pfeffers „osmotischen Untersuchungen“ (1877) kann auch die Thonzelle halbdurchlässig sein und deshalb zur Darstellung und Messung des osmotischen Druckes dienen. Wird eine solche halbdurchlässige Thonzelle mit einprocentiger Zuckerlösung gefüllt und in reines Wasser getaucht, so übt offenbar jedes Zuckermolekül durch seine molekularen Stöße wegen seiner größeren Masse einen größeren Druck auf die Grenzwand aus, als jedes Wassermolekül jenseits der Grenzwand, aber auch als jedes Wassermolekül zwischen den Zuckermolekülen diesseits der Wand. Ist nun die Wand halbdurchlässig, so müssen von jenseits solange Wassermoleküle hereindiffundiren, bis auf der Innenseite überall der Druck der Wassermoleküle bis zum Druck der Zuckermoleküle gestiegen ist. Ist nun mit der Zelle ein Manometer verbunden, welches den bis zum Druck der Zuckermoleküle gestiegenen Wasserdruck mißt, so gibt dasselbe den osmotischen Druck der Zuckerlösung an. Man findet so denselben gleich $^2/_3{}^{at}$; er läßt sich auch theoretisch berechnen aus dem Druck, den 1^l Wasserstoff ausübt und aus dem Molekulargewicht des Zuckers, das nach der chemischen Formel des Zuckers $C_{12}H_{22}O_{11}$ das 171 fache des Wasserstoffs ist; es ergibt sich dann auch $^2/_3{}^{at}$. Für diesen osmotischen Druck gelten, wie van 't Hoff aus den Grundsätzen der mechanischen Wärmetheorie abgeleitet hat, sämmtliche Gasgesetze, zunächst das Mariotte'sche Gesetz; hier tritt der osmotische Druck an die Stelle des Gasdrucks, der Luftspannung, mit welcher er die gleiche Entstehung durch Molekularstöße besitzt; an die Stelle der Dichte tritt naturgemäß die Concentration, so daß das neue für Osmose, Lösung und Diffusion in gleicher Weise gültige Gesetz heißt: der osmotische Druck ist der Concentration proportional. Schon vor van 't Hoffs mathematischem Beweis war dasselbe durch Versuche von Pfeffers und sogar für lebende Membrane von de Vries nachgewiesen; es erklärt, warum Lösung, Osmose und Diffusion der Concentrationsdifferenz proportional sind. Die Geschwindigkeit der Diffusion läßt sich aus dem osmotischen Drucke berechnen, wenn man die von Kohlrausch bestimmten großen Reibungswiderstände berücksichtigt, welche die diffundirenden Moleküle durch die Flüssigkeit erfahren. Nernst findet sie (1888) eben so groß, als sie durch Versuche bestimmt war. Auch das Gaylussac'sche Gesetz gilt nach van 't Hoff für den osmotischen Druck; er ist bei gleich bleibendem Volumen der absoluten Temperatur T proportional ($p = RT$). Hiermit ist einfach erklärt, warum die meisten Stoffe sich in wärmeren Flüssigkeiten in größerer Menge lösen als in kalten. Natürlich kann aber die Zunahme des Drucks mit der Temperatur nicht $= {}^1/_{273}$ sein wie bei allen Gasen, sie wird einen anderen und nach dem Stoff wechselnden Betrag haben, kann auch Null oder negativ werden, wodurch eine gleiche Löslichkeit bei allen Temperaturen und eine stärkere bei niedriger Temperatur möglich wäre. Dieses Gaylussac'sche Gesetz ist für den osmotischen Druck durch ausführliche Versuche von Donders und Homberger nachgewiesen worden. Das Mariotte-Gaylussac'sche Gesetz $pv = RT$, welches van 't Hoffs Theorie fordert, ist durch Soret für zahlreiche Lösungen nachgewiesen; bei den Salzen der Alkalien zeigte sich jedoch die Abweichung, daß pv zwei bis vier mal so groß auftrat als RT; gleichzeitig zeigte sich auch die Erniedrigung der Dampfspannung und des Gefrierpunktes größer als bei anderen Lösungen; diese Abweichung wird wie die abnormen Dampfdichten durch Spaltung der Moleküle erklärt. Das Avogadro'sche Gesetz läßt sich auch so aussprechen: die den Molekulargewichten proportionalen Gasgewichte haben bei gleichem Druck und gleicher Temperatur gleiche Volumina; analog sind die osmotischen Drucke in Lösungen einander gleich, wenn die gelösten Mengen im Verhältniß der Molekulargewichte stehen; de Vries hat dieses Gesetz besonders für lebende Membranen außer Zweifel gestellt. Derselbe Forscher hat auch die Erniedrigung des Dampfdrucks und des Gefrierpunktes den van 't Hoff'schen Gesetzen entsprechend gefunden, ja spricht den Satz aus: Isosmotische Lösungen sind auch isotonisch, d. h. haben gleiche Gefrierpunkte und gleiche Dampfspannungen; doch wollen wir die nähere Betrachtung, sowie auch den Zusammenhang mit elektrolytischer Leitung und chemischer Reaktionsfähigkeit auf die betreffenden Abschnitte verschieben.

4. Bewegungen der Flüssigkeiten.

175 **Ausfluß aus Gefäßen.** Wenn eine Flüssigkeit aus einer Boden- oder Seitenöffnung eines Gefäßes fließt, so bieten sich hauptsächlich drei Fragen zur Untersuchung dar: die Geschwindigkeit des Ausflußes aus der Oeffnung, die Ausflußmenge in einer gewissen Zeit und die Eigenschaften des Ausflußstrahles.

1. Die Ausflußgeschwindigkeit; Torricellis Theorem (1644): Die Geschwindigkeit des Ausflusses an der Oeffnung ist gleich der Geschwindigkeit eines Körpers, der frei und senkrecht die Höhe von dem Wasserspiegel bis zur Oeffnung herabgefallen ist. Dieses schon von Torricelli durch Beobachtung gefundene, aber nicht bewiesene Gesetz läßt sich auf folgende Art beweisen: Es sei h' die Höhe einer unendlich dünnen Wasserschicht direct über der Oeffnung q, und g' die uns noch unbekannte Beschleunigung, welche diese Schicht durch die auf sie einwirkende Kraft k erfährt; dann ist nach Formel (4) (s. 127. 7) die Fallgeschwindigkeit dieser Schicht $v = \sqrt{(2\,g'h')}$. Die Kraft k, welche die Acceleration g' erzeugt, ist aber der auf die Schicht ausgeübte Druck, welcher durch qhp gemessen wird, wenn h die ganze Höhe des Wassers über der Oeffnung q, die sogenannte Druckhöhe bedeutet, und wenn p das Gewicht der Cubikeinheit Wasser ist; die durch diese Kraft niedergedrückte Wassermasse der genannten Schicht ist nach Formel (6) (s. 19.) $m = qh'\,p/g$, worin g die bekannte Acceleration der Erdschwere bezeichnet. Wenn man aber eine bewegende Kraft und die durch dieselbe bewegte Masse kennt, so kann man nach Fl. (8) (s. 24.) die erzeugte Acceleration finden; dieselbe ist $g' = k/m = qhp/(qh'p/g) = g.(h/h')$. Setzen wir diesen Werth für g' in den für v ein, so ergibt sich leicht $v = \sqrt{(2gh)}$, womit Torricellis Gesetz bewiesen ist.

Dasselbe gilt nur dann, wenn die drückende Kraft dieselbe bleibt, wenn also der Wasserspiegel seine Höhe nicht ändert; dies ist annähernd der Fall, wenn das Gefäß sehr groß und die Ausflußöffnung sehr klein ist. Mit einem solchen Gefäße oder auch mit einer Mariotte'schen Flasche (s. 201.) oder auch mit dem Ausflußgefäße Fig. 97, S. 169, das durch Zugießen immer gefüllt bleibt, läßt sich denn auch die Richtigkeit des Gesetzes nachweisen. Man vergleiche nämlich die aus mehreren gleichen Oeffnungen in verschiedener Höhe des Gefäßes, aber in gleicher Zeit geflossenen Wassermengen, oder auch die aus einer Oeffnung bei verschiedenem Wasserstande geflossenen Quantitäten, so wird man finden, daß dieselben sich direct verhalten wie die Quadratwurzeln aus den Druckhöhen. Da aber die Ausflußmengen für gleiche Zeiten und gleiche Oeffnungen den Geschwindigkeiten proportional sind, so müssen die

Geschwindigkeiten sich ebenfalls wie die Wurzeln aus den Druckhöhen verhalten, was dem Theorem von Torricelli gemäß ist. Dieses Theorem lehrt nebenbei, daß die Ausflußgeschwindigkeit nicht von der Natur der Flüssigkeit und nicht von der Form der Oeffnung abhängt. Auch folgt aus demselben, daß ein Wasserstrahl, der aus einer nach oben gerichteten Oeffnung eines Seitenarmes eines Gefäßes springt, theoretisch betrachtet bis zu der Höhe des Wasserspiegels steigen muß; denn ein steigender Körper erreicht nach 130. dieselbe Höhe, welche er durchfallen muß, um die Steiggeschwindigkeit zu erreichen. In Wirklichkeit steigt ein Springbrunnen nicht so hoch, als das Wasser in dem Speisereservoir steht, weil ein Theil der Steigkraft durch die Reibung, den Widerstand der Luft und die zurückfallenden Wassermassen verzehrt wird; um wenigstens den letzten Einfluß zu vermindern, läßt man Springbrunnen etwas schief aufsteigen, was schon bei einer schief geschnittenen Ausflußöffnung stattfindet (Adhäsion). — Ueberhaupt haben Ausflußöffnungen und Röhrenwände starke Einwirkungen auf die Ausflußerscheinungen; so fanden Hagen (1839) und Poisseuille (1843), daß die Ausflußgeschwindigkeiten aus capillaren Ansatzröhren sich wie die Druckhöhen selbst, und nicht wie die Wurzeln aus denselben verhalten, eine merkwürdige Abweichung von Toricellis Theorem. Hagen (1869) und O. E. Meyer (1873) zeigten, daß Poiseuilles Gesetz auch für Röhren von großem Durchmesser gilt, wenn dieselben nur hinreichend lang sind.

Man erklärt dies durch die innere Reibung der Flüssigkeiten. Wenn eine Flüssigkeit z. B. in einer Röhre fließt, deren Innenwand von der Flüssigkeit vollkommen benetzt wird, so reibt sich dieselbe nicht an der Röhrenwand, sondern an der anhaftenden Flüssigkeitshaut derselben, und zwar ist es die äußerste Schicht, welche sich an dieser Haut reibt; ebenso reibt sich an der äußersten eine weiter nach innen liegende u. s. w., so daß in der Achse die größte Geschw. herrscht; dieser Vorgang heißt innere Reibung. Schon Newton hatte auf diese Weise die Zähigkeit oder Viscosität der Flüssigkeiten erklärt und das Gesetz ausgesprochen, daß zwei Schichten einer solchen eine Reibung gegeneinander ausüben, die ihrem Abstande d umgekehrt proportional sei, dagegen direct proportional ihrer Berührungsfläche s, ihrer relativen Geschw. u und einem Coëfficienten η der inneren Reibung, der das Maß der Zähigkeit sei; demnach kann die innere Reibung ausgedrückt werden durch die Fl. $f = \eta s u / d$. Hieraus läßt sich das Gesetz von Poiseuille in folgender Fl. ableiten $v = \pi r^4 (p_a - p_e) / 8 \eta l$, worin v die Ausflußgeschw. am Fuße einer Capillarröhre, r den Radius und l die Länge derselben, p_a und p_e den Druck am Anfang und am Ende der Röhre bedeuten. Röntgen hat (1883) einen Apparat construirt, mit welchem alle Theile des Gesetzes experimentell nachgewiesen werden können (Wied. Ann. 20. S. 268). Aus dieser Fl. läßt sich umgekehrt der Coëff. η berechnen, wenn die andern Größen durch Versuche festgestellt sind; O. E. Meyer (1862) bestimmte η durch den Widerstand, den eine in der Flüssigkeit schwingende Kreisscheibe erfährt, welche Methode auch Grotrian (1875) benutzte; für sehr zähe Flüssigkeiten kann auch das langsame Fallen von Kugeln durch die Flüssigkeit dienen (Schöttner 1879). Der nach solchen Methoden gefundene Coëff. der inneren Reibung bedeutet, wie aus der ersten obigen Fl. hervorgeht die Kraft, welche auf eine Fläche von 1 ^{qcm} wirkend die Geschw. zweier um 1^{cm} von einander abstehenden Schichten in 1 Sec. um 1^{cm} vermindert. Nach dem absoluten Maßsystem (460.) ausgedrückt ist bei 10° der Coëff. der inneren Reibung des Wassers $\eta = 0{,}013\ gr\ cm^{-1} sec^{-1}$; denn $\eta = (f/s)(d/u)$; also $dim\ \eta = mlt^{-2} . l/l^2 . lt^{-1} = ml^{-1} t^{-1} = gr\ cm^{-1} sec^{-1}$. Die Zähigkeit einer Flüssigkeit ist in hohem Maße von der Temperatur abhängig; so ist für Wasser von 20° der Coëff. $\eta = 0{,}0102$, für Wasser von 30° nur $= 0{,}008$. Merkwürdig ist nach Noack (1887) das Verhalten der Reibung des Alkohols gegen die des Wassers; bei 0° hat Wasser eine größere Zähigkeit als Alkohol; mit steigender Temp. nimmt dieselbe bei Wasser mehr ab als bei Alkohol, so daß bei 0,4° Gleichheit stattfindet und bei 60° für den Alkohol sie 5/4 mal so groß ist als für Wasser. Sonst ist der Coëff. für zähe Flüssigkeiten groß, z. B. für Glycerin von 20° gleich 9, für Glycerin von 3° gleich 40 (Schöttner 1878), und besonders groß für feste Körper, die unter höherem Drucke sich zähflüssig verhalten, z. B. für Schwarzpech = 4000 Million, für Storax = 134000 Million (Obermayer 1877). Zahlreiche Untersuchungen über diese Reibungsconstante wurden in den letzten Jahren angestellt, außer den Genannten von Sprung (1878), Wijkander (1878), Pribram u. Handl (1879), Obermayer (1879). Eine zuerst vermuthete Abhängigkeit von der chemischen Constitution stellte sich nicht als eine gesetzmäßige heraus. Die Temperatur hat im Allgemeinen den Erfolg, bei ihrem Steigen die Zähigkeit in hohem Grade zu vermindern. Während die Reibungsconstante des Wassers bei 50° fast 3 mal kleiner ist als bei 0° (Sprung) und die von Glycerin bei 25° sogar 6 mal kleiner als bei 3°, ist für Quecksilber der Unterschied viel geringer; nach Koch (1881) ist sie bei — 18° nur doppelt so groß als bei + 300; bei 10° ist sie $\eta_{10} = 0{,}01633$, was mit Warburg (1870) sehr nahe stimmt. Einen großen Einfluß hat die Concentration von Salz- und Säurelösungen. Bei Säurelösungen steigt der Coëff. mit der Concentration bis zu einem gewissen Betrage und nimmt dann wieder ab, und dieser Wendepunkt verschiebt sich mit der Temperatur; noch stärker tritt dies bei vielen Salzlösungen hervor, während andere Salzlösungen bei allen Temperaturen größere Zähigkeit als Wasser haben. Diese Untersuchungen können von Bedeutung werden, wenn sich solche Beziehungen als sicher herausstellen, wie die von Grotrian vermuthete, daß der reciproke Reibungscoëfficient, also die Fluidität sich ebenso mit der Temperatur ändert, wie das galvanische Leitungsvermögen. Großmann hat (1883) diese Vermuthung als ein Naturgesetz nachgewiesen, dem er folgende Fassung gibt: das Product innerer Reibung und galvanischer Leitung der Flüssigkeiten ist constant in Bezug auf die Temperatur. Obermayer (1880) erkannte, daß die Zähigkeit der Flüssigkeiten in der Nähe der Oberfläche allmälig zunimmt und daß bei Wasser und wässerigen Lösungen in der Oberfläche selbst die Zähigkeit plötzlich noch sehr starck wächst, während bei Alkohol, alkoholischen Lösungen, Schwefelkohlenstoff statt dieser letzteren plötzlichen Zunahme eine plötzliche Abnahme stattfindet; auch Plateau hatte schon 1869 innere und Oberflächenzähigkeit unterschieden. Natürlich ist die Fluidität überall der Zähigkeit reciprok.

177 2. **Die Ausflußmenge. Die in einer Secunde ausfließende Wassermenge hat ein Volumen gleich dem Product der Ausflußöffnung mit der Ausflußgeschwindigkeit.** Denn in 1 Sec. fließt eine Wassersäule aus, deren Grundfläche gleich der Oeffnung ist, und deren Höhe dem Wege gleich kommt, den das zuerst ausfließende Wassertheilchen in 1 Sec. zurücklegt, welcher Weg bekanntlich durch die Geschwindigkeit gegeben ist; es ist also die Ausflußmenge in t Sec. $= t \cdot q \cdot \sqrt{(2gh)}$.

Indessen zeigen die einfachsten Versuche, daß in den meisten Fällen die wirkliche Ausflußmenge dieser berechneten oder theoretischen nicht gleich, sondern meistens kleiner als dieselbe ist; der Grund dieser Erscheinung liegt in der Zusammenziehung oder Contraction des ausfließenden Strahles. Da nämlich die rings über der Oeffnung seitlich gelegenen Theilchen nach der Oeffnung hinströmen müssen, so haben sie nicht blos die Richtung senkrecht zur Fläche der Oeffnung, sondern auch eine Bewegung nach dem Mittelpunkte derselben; folglich ist die Oberfläche des Ausflußstrahles nicht senkrecht auf der Oeffnung, sondern schief zusammenlaufend; der Strahl zieht sich sofort bei seinem Austritte zusammen, sein Volumen ist nicht das einer Säule, wie bei der Rechnung angenommen wurde, sondern kleiner. Es muß demnach die theoretische Ausflußmenge mit einem ächten Bruche multiplicirt werden, wenn sie der wirklichen gleich kommen soll; man nennt diesen ächten Bruch den Contractionscoëfficient; derselbe beträgt für eine Oeffnung in einer dünnen Wand etwa 0,6, ändert sich aber etwas nach Form und Größe der Oeffnung und mit dem Drucke; für eine Oeffnung in einer dicken Wand oder für eine gleich weite Ansatzröhre ist er = 0,8, für eine conisch sich verengernde Röhre 0,95, für eine wie der Strahl geformte Ansatzröhre = 1 und für eine sich conisch schwach erweiternde Ansatzröhre sogar größer als 1. Die Vergrößerung des Coëfficienten rührt von der Adhäsion der Oeffnungswände gegen die Flüssigkeit her; im letzten der angeführten Fälle reißt der Ausflußstrahl Luft ringsum mit fort, wodurch der Luftdruck auf die Flüssigkeit im Gefäße wirksam wird und die Geschwindigkeit des Ausflusses vergrößert.

Tresca in Paris hat (seit 1864) auch feste Körper, wie Blei, Zinn, Silber, Eisen, Stahl, dann pulverige Körper, wie Sand, weiche plastische Körper, wie Thon, spröde Körper, wie Eis, mittels einer hydraulischen Presse sehr großen Druckkräften (bis zu 100 000^{kg}) ausgesetzt und gefunden, daß dieselben alsdann ausfließen wie flüssige Körper; insbesondere zeigt die innere Bildung des Strahles die Eigenthümlichkeit, daß die ursprünglich horizontalen Trennungsflächen der einzelnen Schichten sich bald nach unten krümmen und zu verticalen Ringflächen werden, in denen sich die einzelnen Cylinderringe des Strahles einander berühren, wodurch obige Erklärung der Contraction bestätigt wird; auch zur Erklärung der Gletscherbewegung tragen Trescas Versuche bei. Endlich zeigen dieselben, daß auch feste Körper einen Druck überall hin fortpflanzen, wenn derselbe nur bedeutend genug ist. Es gibt jedoch auch Körper, welche unter einem Drucke nicht nachgeben, sondern denselben entweder unverändert tragen oder zerquetscht werden, wie Talg und Thonplatten (Obermayer 1877).

178 3. **Der Ausflußstrahl. Die Linie, welche der Strahl beschreibt, ist eine gerade, wenn der Ausfluß durch eine Bodenöffnung stattfindet; sie ist eine Parabel, wenn ein seitlicher Ausfluß oder Abfluß stattfindet, und diese Parabel ist um so flacher, je größer die Druckhöhe (h) ist.**

Beweis. Nach den bekannten Bezeichnungen ist $y = vt$, $x = {}^1/_2\, gt^2$ und $v = \sqrt{(2gh)}$, woraus $y2 = 2gh \cdot t^2 = 2gh\,(2x\,/\,g)$ oder $y^2 = 4hx$, die Gl. einer Parabel, deren Parameter $= 2h$ ist. Die Parabel des aufließenden Wasserstrahles ist um so flacher, je größer die Druckhöhe h ist, weil dann einem und demselben x ein größeres y zugehört. Da indessen tiefere Oeffnungen zwar ein größeres h, aber ein kleineres x haben, so können doch 2 verschiedene Ausflußstrahlen denselben Punkt des Bodens treffen, auf welchem das Ausflußgefäß steht; dies ist der Fall, wenn sie für den Boden dasselbe hx haben, wenn also das h des einen gleich dem x des andern ist. Befindet sich an einem Ausflußgefäße von etwa 1m Höhe die eine Oeffnung 20cm vom Spiegel, die andere 20cm vom Boden entfernt, so treffen die beiden Strahlen denselben Punkt des Bodens, während ein Zwischenstrahl eine größere Sprungweite hat (Krebs 1880).

Hinsichtlich der **Constitution des Ausflußstrahles** sind das Gefüge und die Formwechsel desselben zu beachten. In Betreff des **Gefüges** unterscheidet man den continuirlichen Stamm, in welchem die Flüssigkeit noch vollkommen klar ist, und zwar deßhalb, weil durch kein Mittel eine Trennung in einzelne Theilchen wahrgenommen werden kann, sodann den unklaren Theil, welcher uns zwar noch zusammenhängend erscheint, in welchem aber durch optische und akustische Versuche (Magnus 1859) eine Auflösung in Tropfen nachgewiesen werden kann, und welcher eben wegen dieser Auflösung, wie die Optik zeigt, unklar erscheinen muß, und endlich den in Tropfen aufgelösten Theil, das natürliche Tropfenwerfen, in welchem die Tropfen mit wachsendem Abstande von der Ausflußöffnung sich immer weiter von einander entfernen. Die letztere Erscheinung ist eine Folge des freien Falles, da die vorausgehenden Theile des aufgelösten Strahles wegen ihres längeren Fallens eine größere Geschwindigkeit besitzen und sich daher von den folgenden immer weiter entfernen; zwei um eine Secunde von einander entfernte Tropfen haben nach 1 Secunde Fallzeit des zweiten Tropfens einen Abstand von 15m, nach 10 Sec. von 105m. Man hat auch häufig die unsichtbare Auflösung im zweiten Theile der Fallwirkung zugeschrieben; allein einerseits wäre es denkbar, daß diese Wirkung sich in einer fortwährenden Abnahme der Strahldicke äußern könnte; dann hat Plateau (1856) gezeigt, daß ein Oelcylinder in der bekannten Mischung nur so lange seine Gestalt behält, als seine Höhe nicht viel mehr als das Dreifache seines Durchmessers beträgt, daß er aber bei weiterer Verlängerung zuerst Einschnürungen und Anschwellungen annimmt und sich endlich in Tropfen auflöst, daß also auch ohne Fallwirkung die Tropfenauflösung stattfindet; endlich hat Abendroth (1874) auch bei steigenden Strahlen dieselben drei Theile wahrgenommen, die an fallenden zu beobachten sind, und an dem unklaren Theile die Auflösung in Tropfen durch optische Mittel nachgewiesen. Diese kann hier ebenso wenig, wie das Tropfenwerfen, das in Gestalt von parabolischen Perlenregen auftritt, dem Fallen zugeschrieben werden. Fuchs hat schon (1856) die Adhäsion des ausfließenden Strahles durch den Rand der Oeffnung als die Ursache dieses Perlenregens erkannt. Die Auflösung im unklaren Theile wird hier von den Schwingungen hergeleitet, welche in den Wassertheilchen durch die Reibung der Strahlenoberfläche an der Ausflußröhre, sowie durch die Reibung der inneren, schneller bewegten Strahlentheile an den äußeren stattfinden müssen; unterstützt wird diese Erklärung dadurch, daß durch das Aufsetzen einer tönenden Stimmgabel auf das Gefäß die Auflösung befördert, der continuirliche Stamm verkürzt wird. Diese Schwingungen bringen schon in diesem Stamme seine Einschnürungen hervor, welche nach obigem Plateau'schen Versuche mittels der Oberflächenspannung die Auflösung in Tropfen veranlassen. Bei den fallenden Strahlen werden die Schwingungen durch die seitlichen, die contractio venae bewirkenden Bewegungen noch verstärkt, und beim Ausflusse aus einer dünnen Wand zur höchsten Stärke dadurch ausgebildet, daß eine solche wegen ihrer Elasticität in starke Schwingungen versetzt werden kann. Darum treten hier außer den die Tropfenbildung bewirkenden feineren Einschnürungen und Anschwellungen noch größere Erscheinungen derselben Art auf, die zu den Formwechseln des Strahles gehören.

Die **Formwechsel** bestehen zunächst in den Knoten und Bäuchen, abwechselnden Verdünnungen und Verdickungen des Strahles, sowohl im unklaren, wie im aufgelösten Theile. An den Knoten sind nach Savart (1833), der diese Erscheinungen zuerst studirte, und nach Magnus die Tropfen länger als dick, ellipsoidisch, an den Bäuchen dicker als lang, sphäroidisch, während nach jedem größeren Tropfen ein kleinerer Trabant, von der inneren schnelleren Ader herrührend, zu beobachten ist. Daß die Knoten und Bäuche von den Schwingungen des Randes herrühren, zeigt die Thatsache des Verschwindens jener Formwechsel, wenn man die Schwingungen beseitigt, und das verstärkte Auftreten derselben, wenn die Schwingungen z. B. durch das Anstreichen eines Violoncells verstärkt werden. An ursprünglich cylindrischen Strahlen, die aus einer kreisförmigen Oeffnung fließen, zeigen sich nur diese Formwechsel; hat aber der Strahl einen anderen als kreisförmigen Querschnitt, einen länglich elliptischen oder kantigen, so ist die Oberflächenspannung an den convexeren Stellen stärker, muß daher diesen Theil des Querschnitts nach innen, und durch diesen Druck die weniger convexen, ebenen oder concaven Stellen nach außen treiben, wodurch dieselben mehr convex und die ersteren weniger convex werden, und der Querschnitt in einiger Entfernung in der Stellung geradezu verwechselt erscheint. Die Kanten und Rippen eines Strahles ziehen sich nach innen, während neue Rippen an vorher zurückgezogenen Stellen hervortreten; hierdurch macht der Strahl den Eindruck spiraliger Rotation und bewirkt mit den Knoten und Bäuchen zusammen ein lebhaftes Spiel abwechselnd bewegter Formen.

Sehr mannichfaltige Abflußformen entstehen, wenn Strahlen gegen feste Körper treffen; die Adhäsion verhindert alsdann das Zurückwerfen nach den Regeln der Elasticität und die flüssige Masse hängt durch ihre Cohäsion zusammen. Durch das Zusammenwirken der Adhäsion, Cohäsion und der lebendigen Kraft des Strahles entstehen je nach dem Vorwiegen einer dieser Kräfte allerlei schildförmige und zeltförmige Abflußfiguren, die in Gärten als Schmuck verwendet werden. Aehnliche Figuren bilden sich bei dem Zusammentreffen zweier Strahlen (Savart und Magnus).

178 **Das Fließen des Wassers in Röhren und Kanälen.** In Röhren und Kanälen bewegt sich das Wasser nur fort, wenn nach einer Richtung ein überwiegender Druck ausgeübt wird; sind solche Räume wagrecht oder ansteigend, so muß ein äußerer Druck auf das Wasser in denselben einwirken, wie z. B. der Druck einer Kraftmaschine oder der Druck einer Wassersäule, die mit der zu bewegenden Wassermasse in Verbindung steht. Dagegen in abwärts geneigten Räumen wird der Druck durch das Gewicht des Wassers selbst erzeugt; demnach wird in diesem Falle die Geschwindigkeit des herabfließenden Wassers berechnet, wie diejenige eines auf schiefer Ebene herabgefallenen Körpers. Abgesehen von den Hindernissen, ist daher die Geschwindigkeit, mit welcher Wasser am Fuße einer geneigten Fläche abfließt, gleich der Geschwindigkeit eines Körpers, der die gleiche Höhe, welche das Wasser schief durchfällt, senkrecht herabgefallen ist, also $v = \sqrt{2gh}$, wenn h diese senkrechte Höhe bedeutet.

Hiernach wäre die Geschwindigkeit des fließenden Wassers unabhängig von der Neigung der schiefen Fläche, auf welcher dasselbe herabfließt; dieses Resultat ist aber nur richtig, wenn die Hindernisse der Bewegung außer Acht gelassen werden. Indessen darf dies hier gerade am wenigsten geschehen, weil die Hindernisse sehr bedeutend sind. Das Haupthinderniß ist die äußere und innere Reibung des Wassers; dieselbe ist offenbar um so größer, je länger das Bett ist, auf welchem das Wasser herabfließen muß, um die Höhe h zu durchfallen, je geringer also die Neigung der schiefen Ebene, oder wie man sich hier ausdrückt, das Gefälle ist. Man mißt das Gefälle durch den Sinus des Neigungswinkels oder durch einen Bruch, welcher angibt, um wie viel das Wasser fällt, wenn es um eine Längeneinheit fortfließt; so beträgt z. B. das Gefälle der Moldau zwischen Budweis und Prag 0,001, das des Mississippi im Mittel nur 0,0001 (relatives Gefälle). Auch mißt man das Gefälle durch die Strecke, welche das Wasser senkrecht durchfällt, wenn es um 1 Meile fortfließt; so beträgt das Gefälle des Rheines zwischen Mannheim und Mainz nur 1^m auf die Meile, während es zwischen Laufenburg und Basel 16^m beträgt (absolutes Gefälle). Je geringer das Gefälle ist, desto länger ist nicht blos die Fläche, auf welcher sich das Wasser reibt, sondern desto größer ist auch der Wasserdruck, von dem ja bekanntlich die Größe der Reibung abhängt. Außerdem ist die innere Reibung (175.) ein verwickelter Vorgang; durch all dies ist der Einfluß der Reibung ein so complicirter, daß es noch nicht gelungen ist, denselben durch Rechnung aufzufinden. Man hat diesen Mangel durch zahlreiche Versuche zu ersetzen gesucht und gefunden, daß die Reibung nicht allein von der Länge, sondern auch von der Breite und Tiefe des Bettes abhängt und mit dem Quadrat der Geschwindigkeit selbst zunimmt.

Durch alle diese Einflüsse können die Hindernisse so groß werden, daß, insbesondere bei kleinem Gefälle, die Geschwindigkeit durch das Fallen nicht mehr zunimmt, sondern daß jede neue Fallgeschwindigkeit durch die Hindernisse aufgezehrt wird. Es findet dies besonders bei Flüssen statt, wo die letzteren noch durch Unebenheiten und Richtungsänderungen des Bettes vergrößert werden. Die mittlere Geschwindigkeit hängt dann nicht mehr von der Druckhöhe h, sondern hauptsächlich vom Gefälle ab; so ist sie im Rheine zwischen Mannheim und Mainz etwa 1^m, bei Basel 3^m, wenn das Wasser die mittlere Höhe erreicht hat. Die Geschwindigkeit ändert sich dann nur bei Querschnittänderungen und bei Aenderungen des Wasserstandes: wird das Bett enger und flacher, und wird der Wasserstand höher, so wächst die Geschwindigkeit und die Oberfläche wird schiefer; so ist bei Basel bei Hochwasser die Geschwindigkeit 4^m, im Missisippi aber nur 2^m. Wird das Bett weiter und tiefer oder der Wasserstand niedriger, so wird die Oberfläche wagrechter und die Geschwindigkeit kleiner; so ist bei Basel die Geschwindigkeit des tiefsten Wasserstandes nur 2^m.

Für Kanäle und Röhren, in denen das Wasser eine bestimmte Fallhöhe h durchläuft, hat man (insbesondere Weisbach) Formeln aufgestellt, welche angeben, um wie viel die Druckhöhe h durch die Reibung vermindert wird, man hat also die Reibung in Druckhöhe dargestellt. Ebenso hat man in Druckhöhe durch Formeln denjenigen Verlust ausgedrückt, der von plötzlichen Richtungsänderungen an Knieen, von allmäligen Richtungsänderungen an Krümmungen, von Einschnürungen, Erweiterungen und Formänderungen der Kanäle und Röhren herrührt, von welchen Einflüssen besonders die beiden ersten bedeutende Hindernisse des Fließens bilden und nach vielfachen Versuchen ebenfalls mit dem Quadrat der Geschwindigkeit und mit dem Ablenkungswinkel wachsen. Zählt man alle diese in Druckhöhen ausgedrückten Hindernisse von der ursprünglichen Druckhöhe ab, so kann man durch den Rest h_1 mittels der Formel $v = \sqrt{(2gh_1)}$ die Geschwindigkeit des am Fuße dieser Höhe abfließenden Wassers finden.

Indessen werden solche Rechnungen nur für noch nicht ausgeführte Entwürfe angestellt. Für wirklich bestehende Wasserläufe, besonders für Kanäle, Flüsse und Bäche, sucht man die Geschw. practisch zu ermitteln. Man weiß aus Versuchen mit Schwimmstäben, daß ebenso, wie in Röhren die größte Geschw. in der Achse herrscht, in regelmäßigen Kanälen die größte Geschw. unter der Mitte der Oberfläche stattfindet. Besonders eingehende Versuche wurden im Auftrage des amerikanischen Congresses von 1851 bis 1861 von Humphreys und Abbot am Missisippi angestellt. Zieht man, nach diesen Forschern, an verschiedenen Punkten einer senkrechten Tiefenlinie horizontale Strecken gleich den Geschw., so bilden die Endpunkte dieser Strecken nahezu eine Parabel, welche an dem tiefsten Punkte der Tiefenlinie beginnt, weil dort die Geschw. gleich Null, und deren Achse der Oberfläche näher liegt als dem Boden. Die Achse, an deren Stelle die Geschw. am größten ist, liegt nicht so nahe unter der Oberfläche, wie man bisher allgemein annahm, so daß also der Reibung der Oberfläche an der Luft und der größeren Zähigkeit der Flüssigkeitshaut ein großer Einfluß zugeschrieben werden muß. Im Missisippi liegt nach jenen Forschern die Stelle der größten Geschw., der sogenannte Stromstrich, in 0,317 der Flußtiefe. Bisher hatte man, älteren Versuchen gemäß, die größte Geschw. nahe unter der Oberfläche angenommen; man bestimmte dieselbe mittels Doppelschwimmern, Schwimmstäben oder mit Woltmanns hydrometrischem Flügelrade; dann berechnete man die mittlere Geschw., indem man die größte, nach vielfachen Versuchsresultaten, mit 0,83 multiplicirte. Obwohl nun die Angaben von Henry (1873) mit denen der amerikanischen Forscher in Widerspruch stehen, da nach Jenem in breiten Strömen das Maximum der Geschw. an der Oberfläche herrschen und die Geschwindigkeitscurve eine Ellipse sein soll, deren kleine Achse in der Oberfläche liegt, so gewannen doch die amerikanischen Forschungen so viel Vertrauen, daß Hagen (1876) aus denselben eine höchst einfache Fl. für die mittlere Geschw. c in Flüssen und Strömen entwickelte. Ist α das relative Gefälle und τ der mittlere Radius, d. h. das Querprofil des Wasserlaufs dividirt durch den benetzten Umfang, so ist in Metermaß $c = 3{,}34 \sqrt{\tau}\, \sqrt[5]{\alpha}$; für Kanäle, Ent- und Bewässerungsgräben entwickelte Hagen eine Fl. aus den zahlreichen Messungen von Darcy u. Bazin (1865), die noch einfacher ist als die für Flüsse; es ist nämlich für jedes beliebige Maß $c = 4{,}9\, \tau \sqrt[5]{\alpha}$.

Wenn man nun die mittlere Geschw. gefunden hat, so läßt sich auch die in einem Flusse, Bache oder Kanal per Sec. fortfließende Wassermenge berechnen, indem man den gefüllten Querschnitt mit der mittleren Geschw. multiplicirt. Fließt das Wasser durch einen bestimmten Querschnitt nicht fort, sondern aus, so muß man die Contraction berücksichtigen; der Coëfficient ist 0,9 oder 0,8 oder 0,7, je nachdem der Abfluß an der Oberfläche, am Boden in seiner ganzen Breite, oder am Boden in einem Theile der Breite stattfindet. Diese Fälle treten ein, wenn man durch Anlage eines Wehres, d. i. eines durch ein Wasserbett gebauten Dammes, oder durch eine Schleuße, d. i. eine starke Bohlenwand, das Wasser ansammelt oder aufstaut, eine längere Strecke der Druckhöhe an einem Punkte concentrirt, um das Wasser dann über die Krone des Wehres oder der Schleuße auf einmal die ganze Druckhöhe herabfallen zu

13*

lassen, oder um ihm durch Oeffnen eines Schützen an einer beliebigen Stelle des Wehres oder der Schleuße Ausgang zu gestatten. Häufig leitet man zu diesem Zwecke das Wasser aus seinem eigentlichen Bette mittels Wehr und Schleuße in einen eigenen Kanal und dadurch an eine Arbeitsstelle. Für einen solchen Kanal und nach Redtenbacher die besten Dimensionen des Kanalquerschnittes Q durch folgende Formel zu finden $b/t = 2{,}7 + 0{,}9\,Q$. Hier bedeuten b und t die Breite und Tiefe.

179 **Aufg.** 290. Wie groß ist die Ausflußgeschw. aus einem cylindrischen Gefäße von 20^{cm} Durchmesser und 1^{m} Höhe durch eine Bodenöffnung und durch eine Seitenöffnung in 40^{cm} Höhe? Aufl.: 443^{cm}, 343^{cm}. — A. 291. Wenn durch die erste Oeffnung (von 2^{mm} Durchm.) allein Wasser fortwährend mit der Anfangsgeschw. abfließt, wie groß wird dann die Geschw. nach $^1/_4$ Stunde sein? Aufl.: Inhalt des Gefäßes $= 31416^{ccm}$; Ausflußmenge in $^1/_4$ St. $= 12525^{ccm}$; Rest $= 18891^{ccm}$; Restdruckhöhe 60^{cm}; Ausflußgeschw. 343^{cm}. — A. 292. Welcher Druck muß auf eine 1^{m} hohe Wassersäule ausgeübt werden, damit an ihrem Fuße eine Geschw. von 10^{m} entsteht? Aufl.: Aus der Formel $v = \sqrt{(2gh)}$ folgt die Druckhöhe $h = v^2/2g = 1000^2/2.980{,}8 = 509^{cm}$; da die Säule nur 100^{cm} hoch ist, so muß der zugefügte Druck so groß sein, als eine 409^{cm} hohe Wassersäule schwer ist, also auf jedes qcm 409^{g}. — A. 293. Wie groß müßte der von unten nach oben wirkende Druck sein, damit oben das Wasser mit 10^{m} Geschw. ausspritzt? Aufl.: $509 + 100 = 609^{g}$ per qcm. — A. 294. Wie groß ist die Ausflußmenge in 1 Sec. aus einem ganz gefüllten Gefäße von 80^{cm} Höhe durch eine quadr. Oeffnung von 1^{cm} Seite in einer dünnen Wand? Aufl.: $q\sqrt{(2gh)} = 396^{ccm}$; wirkliche Menge $= 0{,}6.396 = 237{,}6^{ccm}$. — A. 295. Wie groß ist die Ausflußmenge in 1 Min. aus einem Gefäße von 3^{m} Höhe durch eine Kreisöffnung von 1^{cm} Dm. in einer dicken Wand, wenn die Anfangsgeschw. bleibt? Aufl.: $0{,}8\,q\sqrt{(2gh)} = 28915^{ccm}$. — A. 296. Wie hoch muß ein ganz gefülltes Gefäß sein, damit die Geschw. des am Boden ausfließenden Wassers gerade $= 2g$ werde? Aufl.? $19{,}616^{m}$. — A. 297. Wie hoch, damit sie $= g$ werde? Aufl.: $4{,}904^{m}$. — A. 298. Wie groß muß die Seite einer 1^{m} hoch in einer dünnen Seitenwand gelegenen quadr. Oeffnung in einem 4^{m} hohen, gefüllten Gefäße sein, damit in 10 Sec. bei bleibender Anfangsgeschw. 10000^{ccm} ausfließen? Aufl.: $1{,}474^{cm}$. — A. 299. In welcher Zeit wird ein Gefäß (Grundfl. $= f$, Höhe $= h$) durch eine Bodenöffnung q in einer dünnen Wand entleert sein? And.: $fh = x.\,0{,}6q.\,^1/_2\sqrt{(2gh)}$; woraus $x = f\sqrt{2h}/(0{,}6\,q\sqrt{g})$. — A. 300. In welcher Zeit ist z. B. das Gefäß in A. 295. entleert, wenn seine Grundfläche 680^{qcm} ist? Aufl.: $x = 270$ Sec. — A. 301. Wann wird ein Teich von $4{,}5^{m}$ Höhe, 30^{m} Länge und 20^{m} Breite durch eine am Boden aufgezogene Schützenöffnung von 1^{m} Höhe und 2^{m} Breite entleert sein? Aufl.: Contractionscoëfficient $0{,}7$; $x = 7$ Min. ca. — A. 302. Wenn eine Wasseruhr oder Klepsydra (κλέπτω, entwenden; ὕδωρ, Wasser) von 30^{cm} Höhe und 12^{cm} Weite in einer Stunde ausfließen sollte, welchen Durchm. müßte dann die Bodenöffnung haben? Aufl.: $0{,}1284^{cm}$. — A. 303. Wenn die Klepsydra auch Viertelstunden zeigen sollte, wo müssen dann die 3 Marken angebracht werden? And.: Nach 176. verhalten sich die Abflußzeiten wie die Wurzeln aus den Druckhöhen, also diese wie die Quadrate der Zeiten, d. i. wie $1 : (^3/_4)^2 : (^1/_2)^2 : (^1/_4)^2$; folglich sind diese Höhen $= 30^{cm}$, $16^7/_8{}^{cm}$, $7^1/_2{}^{cm}$, $1^7/_8{}^{cm}$.

5. Anwendung der Bewegung des Wassers.

180 **Der Effect des bewegten Wassers.** Das bewegte Wasser enthält wie jeder bewegte Körper lebendige Kraft, ist also ein Motor; die Wasserkraft der Niagara-Fälle entspricht einem Effect von 7 Mill. Pferden, was mehr ist als alle Maschinen auf der ganzen Erde zusammen leisten. Da uns die Natur diesen Motor selbst darbietet, so wurde das bewegte Wasser seit den ältesten Zeiten zur Bewegung von Kraft- und Triebmaschinen verwendet, um mittels derselben Arbeiten zu vollbringen. Der Effect des bewegten Wassers, d. i. die Arbeit, welche das in einer Sec. zur Kraftmaschine herbeifließende Wasser zu entwickeln vermag, wird bekanntermaßen gemessen durch seine lebendige Kraft, d. i. das halbe Product der Masse dieses Wassers mit dem Quadrat der Geschwindigkeit desselben, oder auch durch seine Spannkraft, d. i. das Product des Gewichtes dieser Wassermasse mit der Höhe, welche dieselbe durchfällt oder durchfallen müßte, um jene Geschwindigkeit zu erreichen. Diese beiden Messungsarten liefern dasselbe Resultat.

Denn bedeutet Q das in 1 Sec. herbeiströmende Wasservolumen in *cbm*, ist also das Gewicht desselben $1000\,Q^{kg}$, die Masse des Gewichtes $^1/_g\,.\,1000\,Q$, und die Geschw. des Wassers $= v$, so ist die in 1 Sec. entwickelte lebendige Kraft $= {}^1/_{2g}\,.\,1000\,Q\,.\,v^2$. Nach der zweiten Messungsart ergibt sich die in 1 Sec. entwickelte Arbeit oder Spannkraft $= 1000\,Q\,.\,h$, wenn h die Höhe ist, die das Wassergewicht 1000 Q herabfallen kann. Nun erhält aber das Wasser, welches diese Höhe h herab- oder unter dieser Druckhöhe abfließt, die Geschw. $v = \sqrt{(2gh)}$, woraus $h = v^2 / 2g$. Durch Substitution dieses Werthes von h in den Werth für die Arbeit ergibt sich derselbe $= 1/2g \,.\, 1000\, Q \,.\, v^2$, welches ganz mit der leb. Kft. übereinstimmt; also liefern beide Messungsarten dasselbe Resultat. Indessen ist es doch gebräuchlicher, die Messung des Effectes auf die zweite Art vorzunehmen, durch Multiplication des secundlichen Wassergewichtes mit der nutzbaren Fallhöhe. Das Wassergewicht erhält man nach 178., die Fallhöhe bestimmt man vor dem Anbau durch ein Nivellement; nach der Anlage von Wehr oder Schleuße hat man dagegen nur die Höhe des Spiegels des Oberwassers (oberhalb der Schleuße) über dem Spiegel des Unterwassers (unterhalb der Schleuße) zu messen, und endlich, wo Beides nicht angeht, sucht man nach 178. die Geschw. und aus derselben durch die Formel $h = v^2 / 2g$ die Fallhöhe.

Der also gefundene, in dem Wasser enthaltene Effect wird aber durchaus nicht in seinem ganzen Betrage von der Kraftmaschine auf die Arbeitsmaschinen übertragen, sondern ein Theil dieses theoretischen oder absoluten Effectes geht verloren, und zwar aus folgenden Gründen: das Wasser fließt aus der Kraftmaschine mit einer gewissen Geschw., hat also auch nicht seine ganze Geschw., seinen ganzen Effect an dieselbe abgegeben; bei mancher Kraftmaschine fließt oder spritzt ein Theil des Wassers an derselben vorbei, ohne auf sie einzuwirken; wirkt das Wasser stoßend auf die Kraftmaschine, so entstehen Erschütterungen, die einen Theil der leb. Kft. nutzlos in die Erde fortpflanzen; dieses geschieht auch durch die Reibung des Wassers an dem Wehre oder der Schleuße, an seinem Bette oder Gerinne und an der Kraftmaschine, sowie durch die Reibung der Achse dieser Maschine in ihren Lagern. Durch alle diese Effectverluste bleibt der Nutzeffect, den die Kraftmaschine zu leisten vermag, oft bedeutend hinter dem absoluten Effecte des Wassers zurück. In dieser Beziehung sind aber die Kraftmaschinen sehr verschieden; während ein frei im Flusse hängendes Schiffmühlenrad höchstens einen Nutzeffect von 20 % des absoluten Effectes erzielt, steigt derselbe bei vollkommenen Henschel-Turbinen bis zu 84 % und bei dem Schmid'schen Motor bis zu 90 %: die Wasserkraftmaschinen überragen hierin bedeutend die Dampfmaschinen, denn diese liefern durchschnittlich noch nicht 10 % der durch die verbrannten Kohlen erzeugten Kraft der Wärme.

Aufg. 304. Wie groß ist der absolute Effect des Wassers in einem Kanale von 2^m Breite, Wasserhöhe $0{,}5^m$, wenn das Wasser über ein 3^m hohes Wehr abfällt und in dem Kanale 1^m Geschwindigkeit hat? Aufl.: $3000^{mk} = 40^e$. — A. 305. Am Fuße einer Schleuße, hinter welcher das Wasser 2^m hoch steht, wird ein Schützen aufgezogen, $0{,}6^m$ br. u. $0{,}2^m$ hoch; wie groß ist der abs. Eff.? Aufl.: $1/20 \,.\, 0{,}7 \,.\, 0{,}6 \,.\, 0{,}2 \,.\, \sqrt{(2\,.\,10\,.\,2)}\, 1000 \,.\, (2\,.\,10\,.\,2) = 1062^{mk}$. — A. 306. An einem Schiffmühlenrade, dessen Schaufeln 2^m lang und 1^m breit sind, beträgt die Geschw. des Flusses $1{,}5^m$; welches ist der Nutzeffect? Aufl.: $67{,}5^{mk}$. — A. 307. Ein Bach fließt in der ganzen Breite eines 2^m breiten Gerinnes unter einem Schützen $0{,}5^m$ hoch mit 1^m Geschw. aus und fällt 4^m herab; welches ist der Effect? Aufl.: $3600^{mk} = 48^e$. — A. 308. Das Gerinne für eine gute Henschel-Turbine ist $1{,}5^m$ breit, das Wasser ist 1^m hoch, fließt mit $0{,}4^m$ Geschw. und ist 6^m über dem Unterwasser; wie groß ist der Nutzeffect? Aufl.: 3024^{mk}. 181

Die Wasserräder. Die hydraulischen Kraftmaschinen haben meistens die Form von Rädern, welche an ihren Umfängen ebene oder gekrümmte Schaufeln oder auch Zellen tragen, auf die das fließende Wasser durch seine leb. Kft. oder seine Spannkraft oder durch Beides einwirkt und so dem Rade seine Arbeitskraft mittheilt. Man unterscheidet verticale Wasserräder (Wasserräder im engeren Sinne) und horizontale Wasserräder (Turbinen); durch die ersteren wird eine horizontale, durch die letzteren eine verticale Achse in Umdrehung versetzt. Hieraus ergibt sich schon, in welchen Fällen man Wasserräder, und in welchen man Turbinen anwendet; doch eignen sich die ersteren besonders, und oft ausschließlich (in Flüssen) bei geringerem Gefälle, die letzteren dagegen besonders bei hohem Gefälle mit geringer Wassermenge wie z. B. bei Gebirgsbächen. 182

Läßt man das Wasser durch Herabstürzen von einem Wehre oder durch Ausfluß des angestauten Wassers aus einer Schützenöffnung am Fuße eines Wehres oder einer Schleuße seine ganze mögliche leb. Kft. annehmen, und läßt man es dann erst auf die untersten Schaufeln eines Rades wirken, so hat man das unterschlächtige Wasserrad. Dasselbe wird am Besten angewendet bei einer großen Wassermenge mit geringem Gefälle, wie z. B. an Schiffmühlen. Es gehen 75% des Effectes verloren, weil das Wasser stoßend wirkt und mit großer Geschw. von dem Rade abfließt. Erhält dasselbe nach Poncelet (1826) gekrümmte Schaufeln (Fig. 109), so wird der letztere Mißstand mehr vermieden und das Rad liefert dann über 60% des Effectes. Ebenso viel gibt auch ungefähr das *mittelschlächtige Wasserrad* (Fig. 110), welches mit seinem wirksamen Theile in ein Gerinne mit fast an das Rad herantretenden aufrechten Wänden eingeschlossen ist, so daß das auf die Schaufeln fließende Wasser nicht blos durch seine leb. Kft., sondern auch durch seine Spannkraft wirkt. Weil aber dennoch zu beiden Seiten der Schaufeln Wasser wirkungslos vorbeifließt, und das wirksame Wasser durch Reibung an dem Gerinnboden Kraft einbüßt, so wird dieses Rad noch übertroffen von dem *oberschlächtigen Wasserrade*. Dieses trägt an seinem Umfange beiderseits geschlossene Zellen, in welche das Wasser ohne Stoß an der höchsten Stelle des Rades einfließt; hierdurch wirkt das Wasser mit seiner ganzen Spannkraft. Nur dadurch, daß dasselbe schon vor dem tiefsten Punkte theilweise aus den Zellen fließt, und daß wegen des vom Rade getragenen Wassergewichtes die Achsenreibung groß ist, wird etwa 1/4 von dem Effecte verzehrt, so daß dieses Rad etwa 75% von dem Effecte producirt. Doch ist dasselbe nur bei größerem Gefälle anwendbar; denn anderenfalls müßte es klein werden, müßte sich daher schnell bewegen, wodurch das Wasser wegen großer Schwungkraft aus den Zellen geschleudert würde.

Fig. 109.

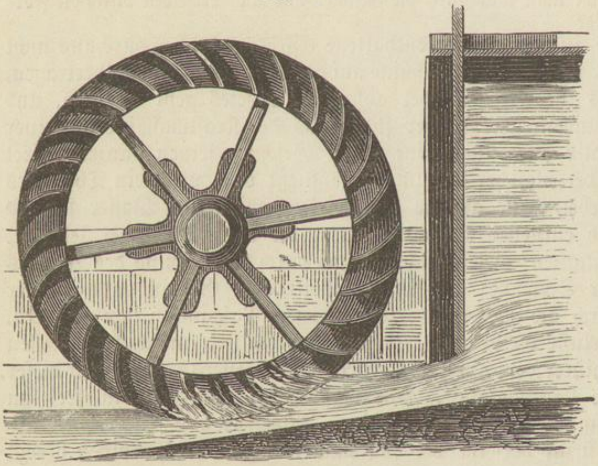
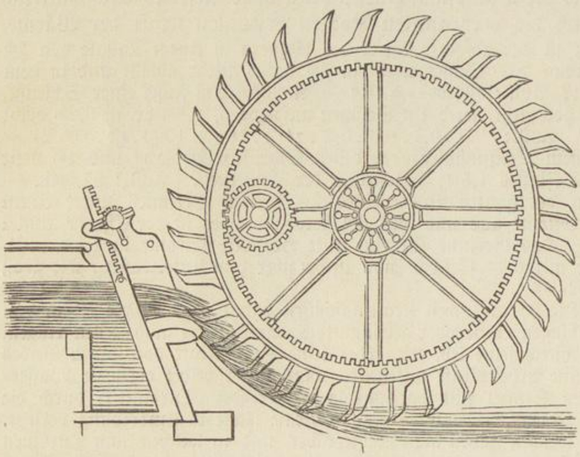


Fig. 110.



183 **Die Turbinen.** Weil die Turbinen aus dem Streben hervorgegangen sind, das Princip des Segner'schen Wasserrades für die Technik nutzbar zu machen, so hat die älteste Einrichtung, *Fourneyrons Turbine* (1834) noch einige Aehnlichkeit mit jenem Reactionsrade; doch wirkt das Wasser hier nicht durch Reaction, sondern durch den Druck seiner lebendigen Kraft. An dem unteren Ende einer aufrechten Achse ist ein Teller befestigt, der auf seinem Rande gekrümmte Schaufeln trägt, welche oben mit einem Ringe bedeckt sind. Innerhalb dieses Schaufelrades befindet sich eine mit Leitschaufeln von entgegengesetzter Krümmung besetzte kreisförmige Eisenplatte, welche an dem festen Gehäuse des Baues befestigt ist. In dieses Gehäuse fließt das Wasser, erhält durch die Leitschaufeln eine radiale Richtung und fließt so gegen die Radschaufeln, drückt auf dieselben und dreht daher das Rad in entgegengesetzter Richtung, als das Wasser ausfließt. Mit dieser Einrichtung kann selbst eine kleine Wassermenge, wenn sie nur eine große Druckhöhe hat, einen bedeutenden Effect erzielen. So findet sich in St. Blasien im Schwarzwalde eine Fourneyron'sche Turbine, welche durch 0,04^{cbm}

Wasser per Secunde mit 108m Gefälle 2300 Drehungen in 1 Min. macht und eine große Spinnerei in Bewegung setzt, obwohl sie nur ca. 30cm Durchmesser hat. Fourneyrons Turbine liefert 75 bis 80 % des Effectes, hat aber den Nachtheil, daß das Rad am tiefsten Punkte der Druckhöhe aufgestellt werden muß, wodurch man nur sehr schwer zu demselben und zu dem noch unter ihm befindlichen Achsenlager gelangen kann; dann daß das Wasser starke Richtungsänderungen erleiden muß, um aus dem Gefäße durch die Leitkanäle an die Radschaufeln zu kommen; und endlich, daß bei einer Abnahme des Oberwassers der Umfang des Rades durch einen ringförmigen, von oben herabgelassenen Schützen theilweise geschlossen werden muß, wodurch ruhendes Wasser im Rade ist, das wirkungslos mitgedreht wird und an welchem sich das abfließende Wasser reibt. Den letzteren Mißstand hat in neuerer Zeit Girard in seiner hydropneumatischen Turbine dadurch zu mildern gesucht, daß er das luftdicht eingeschlossene Rad in comprimirter Luft laufen läßt, wodurch das ruhende Wasser in dem Rade herabgedrückt wird. Aber alle jene Mißstände sind zusammen beseitigt in der Henschel-Turbine, die man gewöhnlich Jonval-Turbine nennt, weil sie zuerst von Jonval (1841) öffentlich beschrieben wurde, während Oberbergrath Henschel in Cassel sie schon 1832 entworfen und 1841 in Holzminden aufgestellt hat. In dieser Turbine befindet sich, wie Fig. 111 und 112 zeigen, das feste Leitschaufelrad über dem Turbinenrad, wodurch die Richtungsänderungen ermäßigt werden. Dann taucht das luftdichte cylindrische Gefäß in das Unterwasser, und der Abfluß wird durch einen Schützen s nach dem Zuflusse regulirt; hierdurch wird die theilweise Füllung des Rades vermieden, Gefäß und Räder sind immer gefüllt, und das Rad kann an jede beliebige Stelle des Gefäßes gebracht und dadurch sammt dem Achsenlager a leicht zugänglich gemacht werden. Diese ganz besondere Eigenthümlichkeit dieser Turbine liegt darin, daß der Druck an allen Stellen des Gefäßes derselbe ist, nämlich gleich dem Gewichte der Wassersäule H (Fig. 111). Denn es sei der Luftdruck $= A$, so wirkt an der unteren Grenze der Leitschaufeln von oben nach unten der Druck $A + h$, aber von unten nach oben $A - (h_1 + z)$; folglich bleibt ein Druck von oben nach unten $= (A + h) - [A - (h_1 + z)] = h + h_1 + z = H$. Wie man nun auch die drei Größen h, h_1 und z wählen möge, immer bleibt ihre Summe $= H$; folglich ist der Druck von oben nach unten an allen Stellen des Rohres derselbe; die beiden Räder können in dem Rohre jede beliebige Lage haben, vorausgesetzt, daß die vom Luftdrucke zu tragende Wassersäule $h_1 + z$ nicht über die Größe des Luftdruckes hinausgehe, also unter 10m bleibe.

Fig. 111.

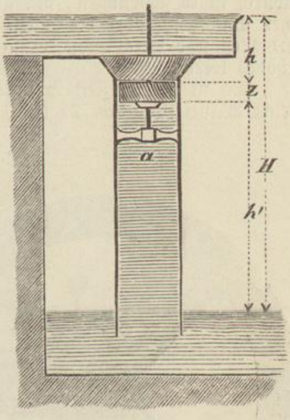
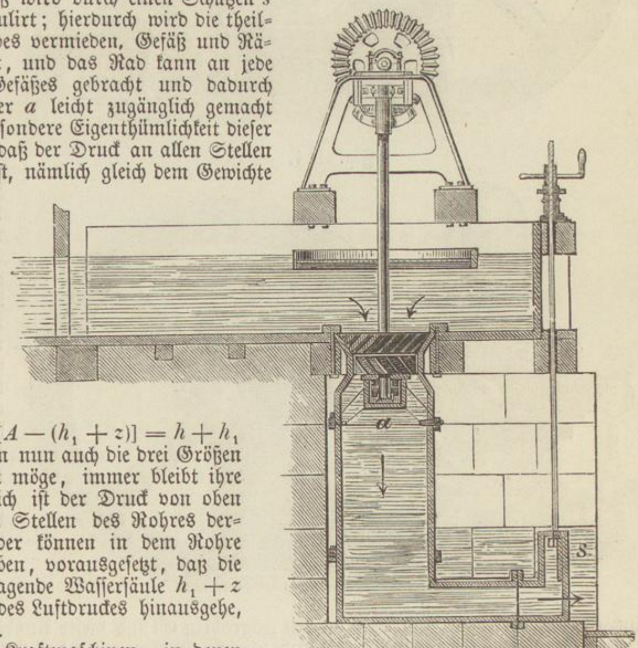


Fig. 112.



Es gibt auch Kraftmaschinen, in denen das Wasser durch Stoß wirkt; alsdann wird aber die leb. Kft. des Wassers nur dann in nennenswerthem Betrage von der gestoßenen Radschaufel aufgenommen, wenn die Fläche derselben 6—8 mal größer ist als der Querschnitt des Wasserstrahles, weil nur dann die von der Aufschlagstelle ringsum mit großer Geschw. abfließenden Wassertheilchen ihre Geschw. großentheils abgeben können. Hieraus folgt, daß Stoßräder nur bei kleinen Wassermengen anwendbar sind. Die Stoßwirkung ist der leb. Kft. proportional, also dem Querschnitte des Strahles und dem Quadrat der Differenz zwischen der Geschw. desselben und der Geschw. der Radschaufel. — Den Stoß des Wassers benutzt man auch in einer Wasserbeförderungsmaschine ohne Kolben, nämlich in dem hydraulischen Widder (Montgolfier 1796). Das aus einiger Höhe in einer Röhre fortfließende Wasser fließt durch eine obere Oeffnung der Röhre aus und erhält an dieser Oeffnung eine solche Energie, daß es ein Ventil an dieser Oeffnung schließen kann; dadurch ist es gezwungen, mit großer Geschw. weiter zu fließen, und kann deßhalb ein in einen Windkessel führendes Ventil aufstoßen, in den Windkessel einströmen, dort die Luft verdichten und durch deren verstärkte Spannung, dem Princip der Windkessel gemäß (s. 204.), gehoben werden.

Da in neuerer Zeit in vielen Städten Wasserleitungen eingerichtet worden sind, durch welche Wasserkräfte von 20 bis 100m Druckhöhe zu Gebote stehen, so hat man Maschinen gebaut, die von diesem Wasser getrieben werden, sogen. Wassermotoren, welche in zahlreichen Fällen, besonders im Kleinbetriebe, nützliche Anwendung finden und möglicherweise zum Betriebe der elektrischen Lichtmaschinen eine große Zukunft haben werden. Wir wollen deßhalb einen solchen Wassermotor näher betrachten. Wie der Längenschnitt (Fig. 113) und die Seitenansicht (Fig. 114) des Motors von Schmid in Zürich zeigen, ist der Hauptbestandtheil ein Cylinder *ab*, in welchem durch das Wasser ein Kolben hin- und herbewegt wird, wie in der Dampfmaschine durch den Dampf. Hierdurch wird auch die mit dem Kolben fest verbundene Stange, die Kolbenstange, welche luftdicht durch die Stopfbüchse des Cylinderdeckels geht, hin- und herbewegt, und dadurch die Welle des Schwungrades in Umdrehung versetzt. Diese Welle ist nämlich an der Stelle, wo die Kolbenstange an sie herantritt, U-förmig ausgebogen, verkröpft, und eben an den wagrechten Grund dieser Ausbiegung ist die Kolbenstange angelenkt, so daß die hin- und hergehende Bewegung der Kolbenstange sich in eine drehende der Welle verwandeln muß. Dies ist die einfache Haupteinrichtung des Motors; ein wesentliches Nebenelement ist die Steuerung, d. i. die Vorrichtung, durch welche das Wasser gezwungen wird, abwechselnd vor und hinter den Kolben zu treten, sowie vor dem Kolben abzufließen, wenn es hinter demselben wirkt, und hinter dem Kolben abzufließen, wenn es vor demselben wirkt. Diese Steuerung besteht aus den unter dem Cylinder sichtbaren zwei Kanälen, die an beiden Enden des Cylinders in denselben einmünden, sowie

Fig. 113.

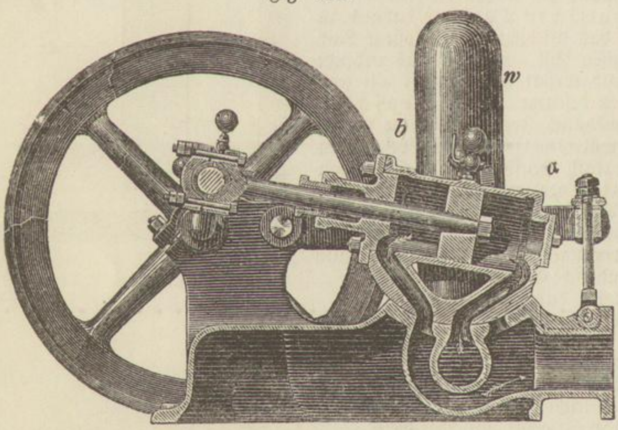
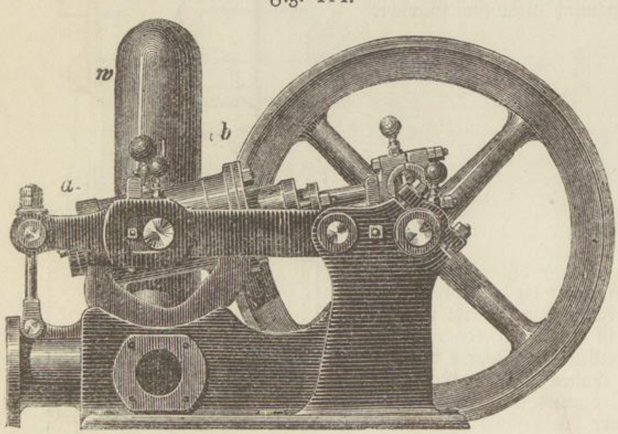


Fig. 114.



daraus, daß der Cylinder ein oscillirender ist. Faßt man z. B. einen runden Bleistift an beiden Seiten zwischen Daumen und Zeigefinger und wiegt an dem einen Ende den Stift auf und ab, so hat man einen oscillirenden, wiegenden oder schwingenden Cylinder. In dem Schmid'schen Wassermotor bewegt sich bei der Drehung der Welle das linke Ende der Kolbenstange (Fig. 113) nicht blos hin und her, sondern auch auf und nieder; folglich muß die Kolbenstange die linke Hälfte des Cylinders ebenfalls auf und nieder drücken. Der Cylinder kann diesem Drucke nachgeben, weil er nicht mit dem Gestelle der Maschine verschraubt ist, sondern vornen und hinten in der Mitte seiner Länge Zapfen trägt, die in Lagern ruhen (Fig. 114). Wenn so der Cylinder oscillirt, dann muß auch das mit ihm verbundene, unten kreisförmig abgeschliffene Gehäuse der beiden Kanäle sich abwechselnd nach links und rechts drehen. Hierbei schleift es auf dem genau kreisförmig abgeschliffenen oberen Rande des Maschinengestells hin und her, der die Zu- und Abflußkanäle des Wassers enthält. Der kleine schwarz schraffirte Kreis ist der Zuflußkanal, und rings um denselben zieht sich der Abflußkanal. In der Stellung, die der Cylinder in Fig. 113 hat, fließt das Wasser aus dem Zuflußkanal in den rechten Cylinderkanal, wie durch Pfeile angedeutet ist, gelangt so hinter den Kolben und treibt denselben durch seinen Druck voran, während das Wasser vor dem Kolben durch den linken Cylinderkanal in den Abflußkanal abströmt. Wenn der Kolben rückwärts geht, so neigt sich der Cylinder links nach unten, wodurch sich das Kanalgehäuse nach rechts bewegt. Hierdurch kommt der linke Cylinderkanal außer Verbindung mit dem Abflußkanal, aber in Verbindung mit dem Zuflußkanal, so daß jetzt das Treibwasser vor den Kolben strömt und denselben zurückschiebt; das Wasser hinter den Kolben fließt dann durch den rechten Steuerkanal und eine rechts von dem schwarzen Loch sichtbare Oeffnung in den Abflußkanal. Die Bewegung der Maschine ist eine sehr ruhige und gleichmäßige, weil das Wasser nur durch seine Druckhöhe, nicht aber durch Stoß wirkt, ein großer Vorzug dieses Motors gegen die kleinen Gas- und Luftmotoren; und damit Stöße, die beim raschen Schließen der Zuflußkanäle oder durch andere Zufälle sich einstellen, unschädlich gemacht werden, steht der Zuflußkanal auf der hinteren Seite der Maschine mit dem hoch emporsteigenden Windkessel *w* in Verbindung. Die Maschine kann auch als Pumpe angewendet werden, wenn sie z. B. von einer anderen gleichen mit Wasser, Dampf oder Luft getriebenen Maschine in Gang gesetzt wird. Die Maschinenfabrik von Schumacher in Köln baut diesen Motor von 0,1 bis 36° zu dem Preise von 300 bis 3000 Mark und der Wasserbetrieb kostet per Pferdekraft und Stunde kaum ½ Mark; der Nutzeffect erreicht die seltene Höhe von 80 bis 90 Procent.

Dritte Abtheilung.

Die Mechanik der luftförmigen Körper oder die Aeromechanik.

(Aerostatik und Pneumatik.)

1. Grundeigenschaften der Luftarten.

Luftförmig ist ein Körper, wenn seine Theilchen durch die geringste Kraft ver- 184
schoben werden können, aber keinen Zusammenhang, sondern im Gegentheil das Bestreben haben, nach allen Richtungen aus einander zu gehen. Dies ist nach 54. der Fall, wenn sämmtliche Moleküle eines Körpers in sehr rascher fortschreitender Bewegung (bis zu 1844^{m} Geschwindigkeit) nach allen Richtungen begriffen sind, so daß durch die lebendige Kraft der Moleküle ihre gegenseitige Anziehung weit überwogen wird. Demnach würde ein frei im Weltraume befindliches Luftvolum sich durch den ganzen unendlichen Raum ausbreiten; die Lufthülle oder Atmosphäre der Erde dagegen kann dies nicht, weil die Anziehung der Erde stärker wirkt als die lebendige Kraft der Luftmoleküle. Die Luftarten stimmen also darin mit den festen und flüssigen Körpern überein, daß sie der Schwere unterworfen sind, daß sie also auch ein Gewicht haben oder einen Druck auf ihre Unterlage ausüben. Sie stimmen mit den Flüssigkeiten in der absolut leichten Beweglichkeit ihrer Theilchen überein und unterscheiden sich mit diesen hierin von den festen Körpern; von den flüssigen unterscheiden sie sich durch ihre Ausdehnsamkeit, ihr Bestreben, sich vermöge der fortschreitenden Bewegung ihrer Moleküle

nach allen Richtungen auszubreiten. Aus dieser Erklärung des Wesens der Luftarten ergeben sich folgende Grundeigenschaften derselben:

a. Die Luftarten haben wie die Flüssigkeiten absolut leicht bewegliche Theilchen; es gelten daher alle Gesetze, die sich für die Flüssigkeiten aus dieser leichten Beweglichkeit ergaben, auch für die Luftarten: so das Gesetz von der gleichmäßigen Fortpflanzung des Druckes nach allen Richtungen, das Gesetz über den Auftrieb, die Gesetze über den Ausfluß.

b. Die Luftarten haben wegen dieser leichten Beweglichkeit keine selbständige Gestalt; wegen ihres Ausbreitungsbestrebens oder ihrer Ausdehnsamkeit haben sie aber auch kein selbständiges Volumen. Hierin unterscheiden sie sich von den Flüssigkeiten, ebenso auch in allen Eigenschaften, die sich aus der Ausdehnsamkeit ergeben.

c. Die Luftarten sind sehr stark und leicht zusammendrückbar; denn vermöge ihrer Ausdehnsamkeit sind die Theilchen der Luft sehr weit von einander entfernt, können also eine starke Annäherung erleiden. Bei einer im Gleichgewichte befindlichen Luftmenge ist das Ausdehnungsbestreben durch einen äußeren Druck aufgehoben; folglich ist der Beginn des Zusammendrückens sehr leicht. Soll das Zusammendrücken weitergehen, so gilt das Mariotte'sche Gesetz (54.), was wir noch näher betrachten werden.

d. Wegen ihrer Ausdehnsamkeit übt jedes Volumen von Luft einen Druck auf die Grenzen des Volumens aus, der entweder durch die Ausdehnsamkeit der umgebenden Luft oder durch die Festigkeit der Grenzwände aufgehoben wird; dieser Druck, Spannung oder Expansion genannt, wächst mit der Dichte, weil mit dieser die Zahl der gegen die Grenze stoßenden Luftmoleküle und der Stöße jedes Moleküls (54.) vermehrt wird (Mariottes Gesetz).

e. Wegen ihrer Ausdehnsamkeit und wegen der weiten Entfernung der Luftmoleküle von einander dringen die Luftarten in einander ein, sie haben Diffusion gegen einander.

f. Ebenso dringen die Luftarten in die Poren der festen Körper und in die Molekularzwischenräume der Flüssigkeiten ein und werden, wenn sie denselben so nahe kommen, daß die gegenseitige Anziehung die lebendige Kraft der zurückprallenden Luftatome überwiegt, von denselben festgehalten oder absorbirt; endlich kann sich auch auf den Oberflächen fester Körper eine Schicht verdichteter Luft, eine Lufthaut, anhäufen.

g. Die atmosphärische Luft wird nach oben immer weniger dicht; denn die unteren Luftschichten werden durch das Gewicht der oberen zusammengedrückt; nach oben wird aber die Höhe und daher das Gewicht der drückenden Luftmasse immer kleiner, also auch die Zusammenpressung immer geringer, die Luft immer dünner. So ist in einer Höhe von 10 M. die Luft 7000 mal dünner als auf der Erdoberfläche, in einer Höhe von 30 M. würde sie 250 Mill. mal dünner sein.

Ueber die Höhe der Atmosphäre sind die Forscher noch nicht einig; jedoch sprechen in der letzten Zeit die meisten Stimmen für 40 bis 50 M. Liais beobachtete in der tropischen Zone, daß die obersten Schichten der Atmosphäre schon Sonnenlicht reflectiren, wenn die Sonne noch 18° unter dem Horizont steht; daraus ergab sich die Entf. der Schichten von der Erdoberfläche gleich 43 M. Das Aufleuchten der Sternschnuppen erklärt man aus ihrer Erhitzung durch den Luftwiderstand; durchschnittlich findet das Aufleuchten in Höhen von 16 bis 18 M. statt; indessen ist es auch schon in 40 M. Höhe beobachtet worden, woraus man schließen muß, daß noch in jener Höhe sich Luft befindet, allerdings vorausgesetzt, daß keine andere Ursache des Leuchtens besteht. Nach den Gesetzen der mechanischen Wärmetheorie fand Ritter (1878) eine Höhe von 4 M., wenn angenommen wird, daß die Gase der Atmosphäre bis zur Grenze vollkommene Gase bleiben, und 47 M. für eine Atm. von reinem Wasserdampf; da jene Annahme in der niedrigen Temp. der oberen Luftschichten keine Geltung haben kann, sondern die Gase dort als condensirbar gedacht werden müssen, so gilt das letzte Resultat. — Der Stoff der Atmosphäre enthält 78,492% Stickstoff, 20,627% Sauerstoff und 0,041% Kohlendioxyd; dazu kommt eine wechselnde Menge von Wasserdampf, im Mittel 0,84%.

185 **Der Luftdruck** (Torricelli 1643). Wenn auch die Luft 777 mal leichter ist als Wasser und nach oben hin immer leichter wird, so ist doch das Gewicht der Atmosphäre oder der Druck auf ihre Unterlage wegen ihrer bedeutenden Höhe sehr groß. Der Druck auf eine beliebige Fläche ist (nach 156.) gleich dem Gewichte einer Luftsäule, deren Grundfläche die Fläche ist und deren Höhe gleich dem Abstande dieser Fläche von der Luftgrenze ist. Da man diese Höhe nicht genau kennt, so kann man auch jenen Druck, den man Luftdruck nennt, nicht berechnen; man muß denselben daher durch einen Versuch bestimmen. Dieser Versuch wurde zuerst von Torricelli angestellt und ist ebenso einfach wie entscheidend. Man füllt eine durch einen Hahn verschlossene, etwa 80^{cm} lange, graduirte Glasröhre mit Quecksilber, verschließt die Oeffnung mit dem Finger, kehrt die Röhre um und taucht sie mit

dem schließenden Finger in ein mit Quecksilber gefülltes Glasgefäß. Zieht man nun den Finger weg, so beginnt das Quecksilber in der Röhre zu fallen, bleibt aber sogleich wieder etwa bei 76cm Höhe stehen und ist durch kein Schütteln und Aufstoßen der Röhre zum Fallen zu bewegen. Es steht also das Quecksilber in der mit dem Gefäße communicirenden Röhre 76cm höher als in dem Gefäße, während es nach dem Satze der communicirenden Gefäße beiderseits gleich hoch stehen müßte. In communicirenden Gefäßen kann der Stand einer Flüssigkeit nur dann verschieden sein, wenn auf den Spiegel in dem einen Gefäße ein größerer Druck ausgeübt wird, als auf den Spiegel in dem anderen Gefäße; der erste Spiegel senkt sich dann, der zweite hebt sich. Folglich muß auch in unserem Versuche auf dem äußeren Spiegel ein größerer Druck vorhanden sein als auf dem inneren. Ueber diesem inneren Spiegel ist keine Luft; man nennt diesen luftleeren Raum Torricellis Vacuum oder Leere; es wird also auf den inneren Spiegel kein Druck ausgeübt. Auf dem äußeren Spiegel ruht aber nichts als Luft; folglich kann es nur die Luft sein, die auf den äußeren Spiegel einen Druck ausübt und dadurch das Quecksilber in der Röhre 76cm in die Höhe treibt. Daß wirklich ein solcher Druck auf den äußeren Spiegel das Quecksilber in der Röhre hebt, kann man durch einen gut schließenden ringförmigen Kolben beweisen, den man auf den äußern Spiegel setzt; ein Druck auf diesen Kolben bringt das Quecksilber in der Röhre zum Steigen. Dagegen fällt dasselbe ganz herab bis zur Höhe des äußeren Spiegels, wenn man durch Oeffnen des Hahnes Luft in das Vacuum treten läßt und dadurch den Druck beiderseits gleich groß macht. Aus diesem Versuche erhellt sonach der Satz: Der Luftdruck ist gleich dem Gewichte einer Quecksilbersäule von 76cm Höhe.

Doch ist dies keine gesetzmäßig feststehende Größe, sondern nur ein Mittelwerth für die ebene Oberfläche der Erde, etwa in der Höhe der Meeresfläche; denn auch auf dieser ändert sich der Luftdruck nach Zeit und Ort und schwankt etwa zwischen 70 und 80cm Quecksilberhöhe; wenn man sich aber gar nach oben von derselben entfernt, so wird der Luftdruck immer kleiner, beträgt z. B. auf dem Chimborasso weniger als halb so viel. Der mittlere Luftdruck von 76cm Quecksilber läßt sich auch als Gewicht ausdrücken. So ist z. B. der Luftdruck auf 1qcm nahezu gleich 1kg, weßhalb man den Druck von 1kg auf 1qcm eine Atmosphäre nennt und mit 1at bezeichnet; denn der Luftdruck auf 1qcm ist gleich dem Gewichte einer Quecksilbersäule von 1qcm Grundfläche und 76cm Höhe, also von 76ccm Inhalt; da nun 1ccm Quecksilber 13,59g wiegt, so ist der Luftdruck auf 1qcm = 13,59 . 76g = 1,0328kg, und auf 1qm = 10328kg. Demnach hat eine gewöhnliche Tischplatte mehr als 200 Ctr. Luft zu tragen. Daß sie unter der Last nicht zerbricht, hat einfach seinen Grund in dem Princip der gleichmäßigen Fortpflanzung des Druckes, vermöge dessen der Druck nicht blos von oben nach unten, sondern auch von unten nach oben stattfindet, ja an jeder beliebigen Stelle nach allen Seiten gleich groß ist. Folglich ist der Druck nur merkbar, wenn er in irgend einer Richtung beseitigt wird; dann kann er in den übrigen Richtungen wirken und sich so manifestiren. Wir werden auf diese Weise durch eine Reihe von Luftpumpenversuchen den Luftdruck nachweisen. Vielleicht erklärt sich so mancher Unglücksfall in Schlachten: wenn eine größere Kugel sehr nahe an einem Menschen vorbeifliegt, so reißt dieselbe die Luft mit sich fort, erzeugt also einen luftleeren Raum auf der einen Seite des Menschen; von der anderen Seite oder auch von innen wirkt dann der Luftdruck mit seiner großen Stärke, schleudert den Menschen zu Boden oder zerstört innere Gefäße. Der Gesammtdruck der Luft auf die ganze Oberfläche des Menschen ist bedeutend; denn der Mensch hat ungefähr 1½qm Oberfläche, erfährt also einen Druck von etwa 15000kg oder 300 Ctr. Dieser große Druck aber quetscht uns ebenso wenig zusammen, als er überhaupt unter gewöhnlichen Umständen uns merkbar wird; denn er findet auch von innen nach außen, ja zu beiden Seiten jedes kleinsten Theilchens statt. Auf kleine Theilchen ist derselbe aber sehr klein, und unter demselben sind die kleinsten Elementar-Organe entstanden, sind also zur Ertragung desselben gebildet. Daß der Luftdruck in dem Menschen auch von innen nach außen wirkt, beweisen uns die Schröpfköpfe und künstlichen Blutegel, sowie das Hervordringen von Blut bei raschem Aufsteigen mit Luftballonen. Der Luftdruck ist dem Menschen sogar sehr nützlich; denn er trägt unsere Arme und Beine. Die Gelenkköpfe derselben füllen nämlich die Gelenkpfannen nicht aus, sondern lassen einen luftleeren Raum übrig, gegen welchen die äußere Luft die Glieder anpreßt. Werden sämmtliche Beinmuskeln und Bänder an einem Cadaver abgeschält, so fallen die Beine noch nicht aus den Gelenkhöhlen; bohrt man aber die Seitenwand der Gelenkhöhle durch, so daß Luft in dieselbe strömen kann, so löst sich sofort das Glied ab. — Man kann den Luftdruck auch mit einer Wassersäule vergleichen: das Wasser ist 13,59 mal leichter als Quecksilber; damit eine Wassersäule dem Luftdrucke das Gleichgewicht halte, muß sie deßhalb $13{,}59 . 76^{cm} = 10{,}328^{m}$ hoch sein. Der Luftdruck ist demnach auch gleich dem Gewichte einer Wassersäule von etwa 10^{m} Höhe. Der Umstand, daß der Luftdruck nicht eine höhere Wassersäule als von 10^{m} heben kann, gab Torricelli die Veranlassung zur Entdeckung des Luftdruckes. Dieses Tragen von Wasser durch den Luftdruck zeigt uns jedes vollgefüllte, mit Papier bedeckte und dann umgekehrte Glas. Wir benutzen es in der pneumatischen Wanne, um Glasgefäße mit Gas zu füllen; das Gefäß wird zuerst mit Wasser gefüllt, mit der Hand verschlossen und dann umgekehrt in das Wasser gestellt; nach weggezogener Hand fällt das Wasser nicht heraus. Bringt man nun die Oeffnung eines Gasentbindungsrohres unter die Mündung, so steigt das Gas in Blasen vermöge des Auftriebes in die Höhe und verdrängt das Wasser. Auch aus anderen gefüllten und oben geschlossenen Gefäßen fließt eine Flüssigkeit nur, wenn durch die Oeffnung Luft eindringen kann, aus sehr engen Bodenöffnungen oder aus etwas ansteigenden Seitenöffnungen gar nicht, aus weiteren Oeffnungen nur dann in einem dicken Strahle, wenn auch oben Luft zugelassen wird; so muß man an Fässern das Spundloch öffnen, an Kannen dürfen die Deckel nicht luftdicht schließen. — Der Luftdruck, welcher irgendwo herrscht, pflanzt sich mit großer Raschheit durch die Umgebung fort und zwar selbst durch die feinsten Risse und Spalten; so herrscht in unseren Zimmern, obwohl dieselben nur wenig Luft enthalten, derselbe Druck wie außen; und zwar ist der Druck in derselben horizontalen Ebene überall gleich groß. Aus der Größe des Luftdruckes auf 1^{qcm} läßt sich der Druck auf die ganze Erdoberfläche, also das Gewicht der ganzen Atmosphäre leicht berechnen; man findet dasselbe $= 5{,}19$ Billionen Kilogramm.

186 Aufg. 309. Wie groß ist der Luftdruck auf einen Tisch von 1^{m} Länge und $^{1}/_{2}{}^{m}$ Br., auf einen Kreis von 1^{dm} Durchmesser, auf ein Haus von 20^{m} Länge und 10^{m} Breite, auf eine Kugel von 1^{dm} Durchmesser? Aufl.: 5164^{kg}, 81^{kg}, 2 Mill. kg, 324^{kg}. — A. 310. Wie groß ist der Druck auf einen Dampfkolben von 8^{dm} Durchmesser durch 2 Atmosphären Dampf, wenn auf der anderen Seite Luftleere ist? Aufl.: 10383^{kg}. — A. 311. Wie groß, wenn anderseits der Luftdruck herrscht? Aufl.: 5191^{kg}. — A. 312. Welchen Druck hat ein Taucher in 100^{m} Tiefe auszuhalten? Aufl.: $150\,000^{kg}$. — A. 313. Wie groß ist der Druck auf 1^{qdm} bei einem Barometerstande von 80^{cm} Höhe? Aufl.: 109^{kg}. — A. 314. Wie hoch müßte eine Aethersäule sein, um bei 71^{cm} Bar. der Luft das Gleichgewicht zu halten? Aufl.: $13{,}6^{m}$. — A. 315. Wie viele At. beträgt der Druck auf den Kolben einer Wassersäulenmaschine, wenn das Wasser $51{,}74^{m}$ hoch steht? Aufl.: 5^{at}. — A. 316. Wie hoch würde die Luft sein, wenn ihre Dichte überall $^{1}/_{777}$ wäre? Aufl.: $76 . 13{,}59 . / \,^{1}/_{777} = 8025^{m}$ $= 1$ Meile ca. — A. 317. Wie hoch muß man steigen, damit der Druck um 1^{mm} Quecksilber kleiner wird? Aufl.: $10{,}5^{m}$. — A. 318. Wie hoch würde die Atmosphäre sein, wenn ihre Schwere allein durch ihre Centrifugalkraft aufgehoben werden sollte? And.: Die Centrifugalbeschleunigung ist auf dem Aequator nach 141. $= v^2 / r = 464^2 / 6\,349\,200 = 0{,}03$. Der Punkt, wo Centrifugalkraft und Schwerkraft gleich sein sollen, sei x mal so weit entfernt; dann ist die Centrifugalbeschleunigung $x^2 / x = x$ mal größer, $= 0{,}03\,x$; die Beschleunigung der Schwere ist dort $9{,}808 / x^2$; hieraus $0{,}03\,x = 9{,}808 / x^2$, woraus $x^3 = 327$, also $x =$ ca. 7; also ist in der Höhe von 6 Erdradien die Luft unmöglich (Laplace).

187 **Das Barometer.** Das Barometer ist ein Instrument zum Messen des Luftdruckes ($\beta\alpha\varrho\acute{v}\varsigma$ = schwer). Der Torricelli'sche Versuch bietet schon ein solches Instrument; doch ist dasselbe in dieser Form zu wenig handlich und hat daher zahlreichen Abänderungen weichen müssen, die indeß alle auf denselben Grundgedanken beruhen. Die so entstandenen Quecksilberbarometer sind entweder Gefäßbarometer, Heberbarometer oder Phiolenbarometer; die Metallbarometer haben einen anderen Grundgedanken.

Im gewöhnlichen Leben findet man am häufigsten das Phiolenbarometer; die Röhre desselben biegt sich unten um und erweitert sich in ein Gefäß von der Form einer kleinen Flasche oder Phiole, welche noch theilweise mit Quecksilber gefüllt ist. Der Luftdruck wird hier gemessen durch den Abstand des Spiegels in der Phiole von dem in der Röhre; da aber der erste Spiegel sich senken muß, wenn der letzte sich hebt, und umgekehrt, und da die Phiole gewöhnlich nicht so weit ist, daß man das Heben und Senken des Spiegels in derselben außer Acht lassen kann, so haben die Beobachtungen des Röhrenspiegels allein, ohne Rücksicht auf den Phiolenspiegel keinen wissenschaftlichen Werth; für das gewöhnliche Leben, für die ohnedies nicht zuverlässigen Wetteranzeigen aber sind sie ausreichend. Genauer schon können Gefäßbarometer sein.

Das Gefäßbarometer kommt nämlich der ursprünglichen Torricelli'schen Einrichtung am nächsten. Es besteht aus Röhre, Gefäß und Skale. Das Gefäß kann so weit genommen werden, daß das Fallen und Steigen in der Röhre höchstens ein unmerkliches Steigen und Fallen in dem Gefäße zur Folge hat, daß also die Skale fest mit dem Apparat verbunden sein kann und zwar so, daß der Anfangspunkt oder Nullpunkt der Skale mit dem Gefäßspiegel zusammenfällt. Die größte Genauigkeit hat Fortin (1820) in seinem Gefäßbarometer erreicht, das auch vortrefflich als Reisebarometer eingerichtet ist. Zu diesem Zwecke ist das Gefäß ganz verschlossen und nur beim Gebrauche wird durch eine Schraubenöffnung Luft zugelassen. Der Boden des Gefäßes ist doppelt; der obere Boden besteht aus einem Lederbeutel, gegen welchen der Knopf einer durch den unteren Boden gehenden Schraube drückt; hierdurch kann der Spiegel im Gefäße bei jeder Beobachtung genau in den Nullpunkt der Skale gebracht werden. Dieser Punkt fällt nämlich zusammen mit der Spitze eines von dem Gefäßdeckel herabragenden Elfenbeinstäbchens und ist erreicht, wenn diese Spitze und ihr Bild im Quecksilberspiegel gerade einander berühren. Hiermit ist die erste Hauptschwierigkeit bei Barometerbeobachtungen überwunden. Die zweite Schwierigkeit besteht in dem richtigen Ablesen der Höhe der Quecksilberkuppe in der Röhre. Um dieses richtige Ablesen möglich zu machen und zugleich die Röhre, welche quecksilberdicht durch eine geliderte Deckelöffnung des Gefäßes tief in das Quecksilber hinabgeht, zu schützen, ist die Röhre von einer an das Gefäß angeschlossenen Messinghülse umgeben, auf der die Skale eingegraben ist. In der Gegend der Kuppe hat die Hülse zwei sich gegenüberliegende Spalten, innerhalb deren durch Zahnstange und Rädchen ein zweifacher Nonius verschiebbar ist. Der vordere und hintere Rand der unteren Kante dieses Nonius müssen für das beobachtende Auge mit der Kuppe in eine Gerade fallen; dann deutet der Nullpunkt des Nonius gerade auf die abzulesende Stelle der Skale. An ihrem oberen Ende ist die Hülse durch eine Cardanische Aufhängung an einem cylindrischen Holzgehäuse befestigt, das den ganzen Apparat umschließt und sich in drei Theile zerlegen läßt, die beim Gebrauche als Füße zum Aufstellen dienen. So genau dieses Barometer auch ist, so leidet es doch daran, daß durch die Capillardepression das Quecksilber in der Röhre etwas tiefer steht, als es durch den Luftdruck stehen müßte. Für Röhren von 20^{mm} Durchmesser und mehr ist dieser Fehler verschwindend klein; festen Barometern gibt man daher einen solchen Durchmesser. Bei Reisebarometern ist dies aber unmöglich; wenn nun auch solche Barometer hauptsächlich zu Höhenmessungen angewendet werden, wo immer zwei Beobachtungen vorkommen, bei deren Vergleichung der Fehler sich verkleinert, und wenn man auch mittels genau angefertigter Tabellen Correctionen anzubringen sucht, so bleibt doch das beste Gefäßbarometer hinter dem Heberbarometer darin zurück, daß bei dem letzteren die Depression wegfällt.

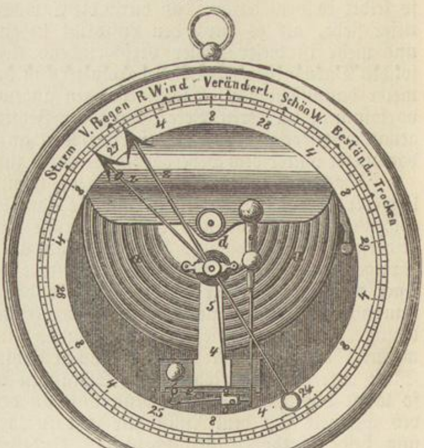
Das H e b e r b a r o m e t e r besteht nämlich nur aus einer umgebogenen Röhre, deren längerer Schenkel geschlossen ist und die eigentliche Barometerröhre bildet, während der kürzere Schenkel offen bleibt und dem Luftdrucke Zugang gestattet. Hierdurch ist die Depression beiderseits gleich groß und hebt sich daher auf. Allein bei diesem Barometer steigt der eine Spiegel immer ebenso viel, als der andere sinkt; es ist daher der untere Spiegel nicht ein fester Anfangspunkt für die Ablesung, sondern ebenso veränderlich wie der obere. Es bietet demnach hier die genaue Ablesung Schwierigkeiten. Entweder muß man eine doppelte Ablesung, bei beiden Spiegeln, vornehmen, und die eine Zahl von der anderen subtrahiren, wodurch die bei der Ablesung möglichen Fehler sich verdoppeln können; oder man muß die Skale oder auch die Röhre durch Schrauben verschiebbar machen, und bei jeder Beobachtung so lange verschieben, bis der Nullpunkt an den unteren Spiegel kommt. Dieses Coincidiren des Spiegels mit dem Nullpunkte ist eben so gut eine Fehlerquelle wie eine Ablesung; daher sind beide Methoden ziemlich gleich. Indessen sind die Heberbarometer doch einer großen Genauigkeit fähig und sind sehr compendiös, also für Reisebeobachtungen sehr tauglich. Für diesen Zweck müssen sie noch Vorrichtungen zum Abschlusse des offenen Schenkels haben, welche sehr mannichfacher Art sind. Auch hatte schon Geißler in Bonn von der Vollkommenheit der neueren Glasarbeiten eine Anwendung auf das Barometer gemacht, indem er dasselbe zusammenlegbar, also für Reisen besonders compendiös construirte, was jetzt von vielen Mechanikern ebenfalls ausgeführt wird.

Außer den in vorstehenden Beschreibungen angedeuteten Umständen, die bei der Anfertigung und dem Gebrauche der Barometer beobachtet werden müssen, wenn die Resultate auf Genauigkeit Anspruch erheben wollen, muß zu demselben Zwecke noch eine Reihe von Einflüssen im Auge behalten werden, die wir im Zusammenhange mit den schon besprochenen anführen: 1. Das Quecksilber muß chemisch rein sein; von gröberen Unreinigkeiten wird es mittels Pressen durch Hirschleder, von feineren durch Waschen mit Salpetersäure und dann mit Wasser befreit. 2. Die Röhre muß überall gleich weit sein; zu dem Zwecke wird sie calibrirt, d. h. ein Quecksilbertropfen wird an verschiedene Stellen der Röhre gebracht. Hat er nicht überall gleiche Länge, so ist die Röhre unbrauchbar. 3. Die Röhre muß luft- und dampffrei sein; um dies zu erreichen, wird sie mit Quecksilber ausgekocht. Nach Untersuchungen von Morren (1865) ist es unmöglich, alle Luft und alle Dämpfe zu vertreiben und ist weder Quecksilber, noch die Röhrenwand luftfrei und daher das Vacuum niemals vollkommen; am vollkommensten ist es, wenn beim Neigen das Quecksilber mit hellem Klange gegen die Röhre stößt; ist der Klang dumpf geworden, so muß man das Auskochen wieder vornehmen. 4. Die Röhre darf nicht zu eng sein, weil sonst das Quecksilber schwer beweglich wird, und weil bei Gefäßbarometern die Unregelmäßigkeiten der Depression bei engeren Röhren größer werden. Vor Beobachtungen gewöhnlicher Barometer klopft man an das Gestell, um die Adhäsion aufzuheben. 5. Die Temperatur muß berücksichtigt werden; denn das Quecksilber dehnt sich für 1° C um $^1/_{5550}$ seines Volumens aus. Gewöhnlich reducirt man die Barometerstände auf 0°, muß also von dem beobachteten Stande so viele 5550 tel abzählen, als Temperaturgrade stattfinden; bei großer Genauigkeit muß man auch auf die Veränderungen des Glases und der Skale durch die Wärme Rücksicht nehmen. 6. Bei Gefäßbarometern muß man wegen der Depression 1^{mm} für Röhren von $4-6^{mm}$ Weite addiren, $0{,}5^{mm}$ für Röhren von $4-10^{mm}$, $0{,}1^{mm}$ für Röhren von $10-15^{mm}$. 7. Bei der Ablesung des Standes muß das Auge in einer Horizontalen mit der Quecksilberkuppe sein; bei feineren Apparaten sind zu diesem Zwecke verschiebbare Mikroskope mit Fadenkreuzen angebracht. 8. Bei Gefäßbarometern muß der Gefäßspiegel mit dem Nullpunkte coincidiren. 9. Soll ein Barometer transportirt werden, so neigt man es, bis das Quecksilber an das Röhrenende stößt und trägt es in dieser Lage. Wollte man es aufrecht tragen, so würde das Quecksilber so stark schwanken, daß Luftblasen eindringen könnten, wodurch das Barometer unbrauchbar würde. 10. Reisebarometer müssen einen sicheren Verschluß haben; der beste für Heberbarometer ist von Greiner in Berlin. 11. Schiffsbarometer müssen in Cardanischen Ringen hängen; doch sind für gewöhnliche Beobachtungen auf Schiffen die Metallbarometer vorzuziehen.

Das Metallbarometer oder Aneroidbarometer (*α* priv. und *νηρός* flüssig). Dieses Barometer ist zwar nicht so genau wie das Quecksilberbarometer, ist also nur dann

Fig. 115.

Fig. 116.



zu wissenschaftlichen Zwecken brauchbar, wenn ihm zuverlässige Correctionstabellen beigegeben sind. Es ist aber besonders geeignet für Beobachtungen in polaren Gegenden, wo das Quecksilber gefriert; dann ist es sehr bequem zu transportiren und daher auch für Höhenmessungen in entlegenen Gegenden sehr tauglich. Endlich ist es nicht so leicht zerbrechlich wie das gewöhnliche Barometer aus Glas und Quecksilber, und paßt daher besser als Zimmerbarometer, wobei es auch einen Zimmerschmuck bildet. Man hat besonders zwei Arten von Metallbarometern: das Holosteric (*ολος* = ganz, *στερεός* = fest) von Vidi und das Metallic von Bourdon. Das Metallic (Fig. 115) besteht aus einem kreisbogenförmigen, luftleeren Messingringe *amb* von langem, linsenförmigen Querschnitte *q*; in der Mitte *m* ist derselbe an dem Gehäuse befestigt, sonst aber frei, und wirkt mit seinen beiden freien Enden *a* und *b* durch die Hebel *ad* und *bc* und den Zahnbogen *dgh* auf den Zeiger. Wird der Luftdruck größer, so erfährt die äußere Ringfläche eine größere Vermehrung des Druckes als die innere, weil die erstere größer ist als die letztere; folglich muß die Krümmung verstärkt werden, wodurch die freien Ringenden den Zeiger drehen. Das Holosteric (Fig. 116) besteht aus einer möglichst luftleeren, hermetisch geschlossenen Messingdose, deren äußerst dünner Deckel durch ringförmige Cannelirungen *a* sehr elastisch ist. Wenn der Luftdruck zu- oder abnimmt, so biegt sich dieser Boden einwärts oder auswärts; diese Bewegung wird durch einen complicirten Mechanismus auf einen langen Zeiger übertragen, der sich auf dem Umfange des kreisförmigen Gehäuses dreht, wo die Gradeintheilung angebracht ist. Balfour Stewart hat 1870 seine Vergleichungsversuche eines Aneroids mit einem Normalquecksilberbarometer bekannt gemacht; nach diesen, sowie nach den Meteorologencongressen in Wien und Leipzig (1872 und 73) ändern die Aneroide ihre Nullpunkte oft plötzlich und sind auch ihre Wärmecorrecturen unzuverlässig; besonders ungenau zeigten sich die Aneroide bei geringen Spannungen, so daß die Angaben bei 60^{cm} Luftdruck unbrauchbar werden. Wäre dieser Mangel nicht zu beseitigen, so würden die Aneroide für Höhenmessungen unbrauchbar sein.

Das Wagbarometer von Morland (1680), welches den Luftdruck durch die Schwingungen eines Wagbalkens angibt, und der Barograph von Secchi (1858), der mittels desselben die Angaben des Barometers selbstthätig aufschreibt, sind in 611. aufzufinden.

Anwendung des Barometers. Die genaue Bestimmung des Luftdruckes ist bei vielen naturwissenschaftlichen Untersuchungen, z. B. zur Erforschung der Wetterverhältnisse der Erde unbedingt nothwendig; daher ist dem Physiker das Barometer ein unentbehrliches Instrument. Außerdem wird dasselbe zu Höhenmessungen (s. 593.) und im gewöhnlichen Leben als Wetteranzeiger (s. 592.) verwendet.

Die Ausdehnsamkeit der Luftarten. Die Ausdehnsamkeit oder Expansibilität der Luftarten ist das Bestreben derselben, sich in jeden dargebotenen Raum auszubreiten. Das Vorhandensein dieser für die Luftarten charakteristischen und unterscheidenden Eigenschaft folgt schon aus der Definition der Luftarten, daß nämlich die Molekule derselben eine lebhafte fortschreitende Bewegung besitzen; dann ist diese Eigenschaft nach dem fünften Axiom eine einfache Folge des Luftdruckes; die Luftarten besitzen keine Festigkeit, folglich müssen sie dem Luftdrucke eine gleiche Gegenkraft, eine ausdehnende Kraft entgegensetzen; endlich kann die Ausdehnsamkeit durch zahlreiche Versuche nachgewiesen werden: Ist ein luftleerer abgeschlossener Raum in Verbindung mit einem lufterfüllten abgeschlossenen Raume, so strömt aus dem letzteren Raume Luft in den ersteren; liegt in einer Glasglocke eine zugebundene zusammengedrückte Blase, so dehnt sich dieselbe bis zum Zerspringen aus, wenn die Glasglocke luftleer gepumpt wird. Steigen in einem hohen mit Wasser gefüllten Gefäße Luftblasen auf, so werden dieselben immer größer, weil sie in den höheren Schichten einem geringeren Drucke ausgesetzt sind. 188

Vermöge der Ausdehnsamkeit übt jedes Gasvolumen, mag es eingeschlossen sein oder nicht, auf seine Grenzen wie im Inneren, einen Druck aus, den man Spannung oder Gasdruck nennt. Die Größe der Spannung ist, so lange das Gas mit der Luft in Verbindung steht, gleich dem Luftdrucke, also gleich einer Atmosphäre, gleich dem Gewichte einer Quecksilbersäule von 76^{cm} Höhe; sie nimmt zu und ab wie der Luftdruck. Ebenso nimmt aber auch die Spannung einer eingeschlossenen Gasmasse zu, wenn der äußere Druck auf dieselbe größer wird, wenn sie also durch einen äußeren Druck auf ein kleineres Volumen zusammengepreßt wird, wie besonders einfach die Knallbüchse der Knaben zeigt. Die Spannung eines Gases nimmt zu, wenn das Volumen desselben kleiner wird; erklärlich ist dies nach der mechanischen Theorie der Gase (54.) dadurch, daß bei abnehmendem Volumen die Dichte des Gases wächst und demnach eine größere Anzahl von Gasmolekülen stoßend gegen die Grenzwände fliegt. Ob die Zunahme der Spannung in demselben Maße erfolgt wie die Abnahme des Volumens, muß eigens untersucht werden. Theoretisch haben wir diese Untersuchung schon in der „mechanischen Theorie der Gase" (54.) geführt; wir fanden dort, daß das Product pv der Spannung p mit dem Volumen v unter der Voraussetzung gleichbleibender Temperatur constant ist, daß also p in demselben Maße zunimmt, wie v abnimmt. Diese wichtige Eigenschaft der Gase wurde schon von Boyle (1662) entdeckt, von Mariotte (1679) bestätigt und veröffentlicht, von Arago und Dulong (1820) im Auftrage der französischen Akademie von Neuem untersucht und endlich von Regnault (1845) für möglichst viele Gase und Temperaturen erforscht, und mit später anzuführenden Beschränkungen bestätigt gefunden. Diese Wahrheit führt den Namen das Mariotte'sche Gesetz; dasselbe läßt sich in verschiedenen Gestalten aussprechen.

189 **Das Mariotte'sche Gesetz.** 1. Bei gleichbleibender Temperatur ist das Product aus der Spannung und dem Volumen einer bestimmten Gasmenge constant.

$$p_1 \cdot v_1 = p_2 \cdot v_2 = \text{Const.}$$

2. Bei gleichbleibender Temperatur verhalten sich die Spannungen einer bestimmten Gasmenge umgekehrt wie die zugehörigen Volumina, oder die Spannung ist dem Volumen umgekehrt proportional.

$$p_1 : p_2 = v_2 : v_1 \text{ oder } p_1 = \frac{p_2 v_2}{v_1} = \frac{\text{Const.}}{v_1}$$

Da die Dichte in demselben Verhältnisse zunimmt, wie das Volumen abnimmt, und umgekehrt, da also Dichte und Volumen einander umgekehrt proportional sind, so kann statt des Volumens die Dichte im umgekehrten Verhalten eingeführt werden und daher das Gesetz auch folgende Gestalten annehmen:

3. Bei gleichbleibender Temperatur verhalten sich die Spannungen eines Gases direct wie die Dichten desselben, oder die Spannung ist der Dichte direct proportional.

$$p_1 : p_2 = d_1 : d_2 \text{ oder } p_1 = \frac{p_2}{d_2} d_1 = \text{Const.}\, d_1.$$

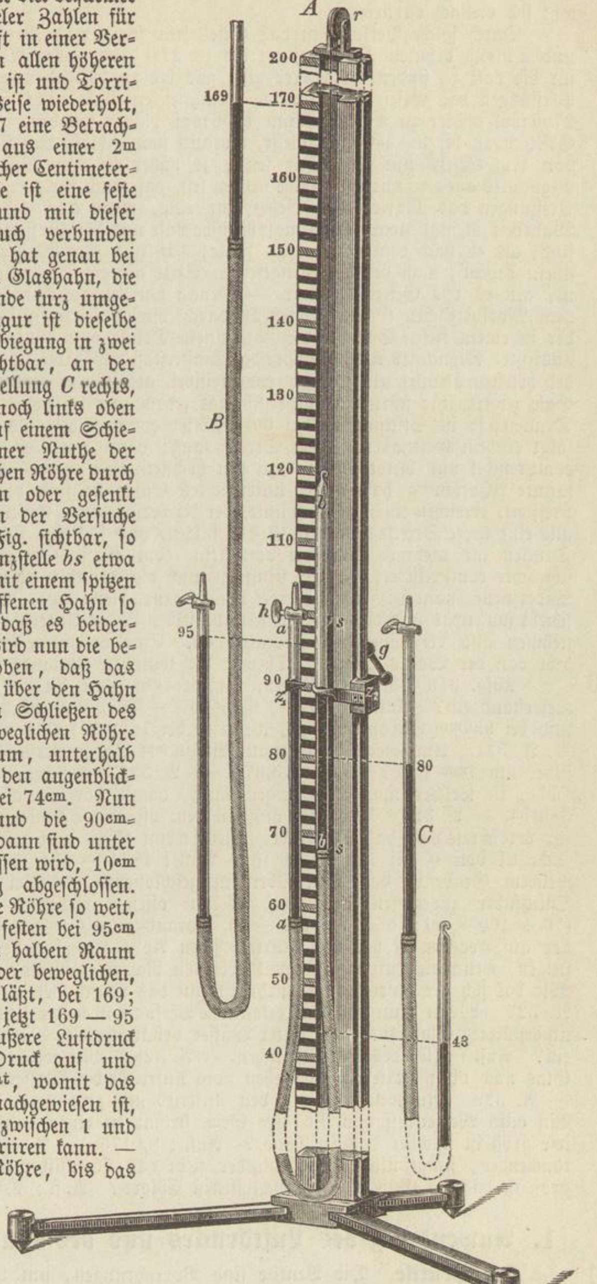
4. Bei gleichbleibender Temperatur ist der Quotient aus der Spannung durch die Dichte eines Gases constant.

$$p_1 / d_1 = p_2 / d_2 = \text{Const.}$$

Die Spannung ist immer gleich dem äußeren Drucke; das Gesetz könnte daher auch für den äußeren Druck in den verschiedenen Gestalten ausgesprochen werden. Ueberhaupt treten in dem Gesetze 4 Größen: äußerer Druck, Spannung, Dichte und Volumen auf; daher sind die möglichen Formen des Gesetzes, deren Aussprache dem Schüler empfohlen wird, noch sehr mannichfaltig; die einfachste und vollständigste Form ist die, daß äußerer Druck, Spannung und Dichte einander direct und dem Volumen umgekehrt proportional sind.

Weil die Versuche von Mariotte leicht anzustellen sind, so wollen wir das Gesetz mittels derselben nachweisen. Für verdichtete Gase benutzt man eine umgebogene Glasröhre mit einem kürzeren geschlossenen und einem möglichst langen offenen Schenkel, die auf einem Gestelle befestigt und mit einer Skale an jedem Schenkel versehen ist. Man bringt zuerst soviel Quecksilber in die Röhre, daß es in beiden Schenkeln bis an den Nullpunkt reicht. In dem geschlossenen Schenkel ist dann Luft von der Spannung der Atmosphäre, weil sie nur dem Drucke derselben ausgesetzt ist. Füllt man nun soviel Quecksilber zu, daß es in dem offenen Schenkel 76cm, 2.76cm, 3.76cm u. s. w. höher steht als in dem geschlossenen, so nimmt in dem letzteren die Luft nur einen 2, 3, 4 u. s. w. mal kleineren Raum ein als vorher, womit das Gesetz für diese Pressungen nachgewiesen ist. Denn z. B. bei 3.76cm Quecksilber hat die abgeschlossene Luft einen Druck von 4at zu erleiden; der Versuch zeigt, daß sie dann wirklich einen 4mal kleineren Raum einnimmt; außerdem muß die innere Spannung auch 4 mal größer sein, da sie ja 4mal so viel zu tragen vermag als vorher, während auch ihre Dichte 4mal größer geworden ist. — Für verdünnte Gase bedarf man eines weiten, hohen, mit Quecksilber gefüllten Glasgefäßes und einer calibrirten, graduirten, mit einem Hahne verschließbaren Glasröhre. Man taucht zuerst die Röhre, den Hahn oben und offen, in das Quecksilber, bis dasselbe bei einem beliebigen Theilstriche, innen und außen gleich hoch, steht. Dann schließt man den Hahn und hat dadurch eine abgeschlossene Luftmenge von der Spannung der Atmosphäre. Zieht man die Röhre nun aus dem Quecksilber, so hoch, daß die abgesperrte Luft den doppelten Raum einnimmt, so wird das Quecksilber in der Röhre auch $\frac{1}{2} \cdot 76 = 38$cm gestiegen sein. Folglich hat die abgesperrte Luft nur noch die halbe Spannung wie vorher, womit das Gesetz auch für diesen Fall nachgewiesen ist. Denn der Druck in der Röhre muß dem äußeren Luftdrucke gleich sein; da aber innen 38cm Quecksilber stehen, so muß die abgesperrte Luft ebenfalls eine Spannung von $38^{cm} = {}^1/_2{}^{at}$ ausüben. — Da der Weinhold'sche Apparat viel bequemer ist, eine rasche Ablesung vieler Zahlen für verdichtete und verdünnte Luft in einer Versuchsreihe gestattet, wohl in allen höheren deutschen Schulen vorhanden ist und Torricellis Versuch in anderer Weise wiederholt, so möge derselbe an Fig. 117 eine Betrachtung finden. Er besteht aus einer 2^m hohen Holzsäule *A* mit deutlicher Centimeter-Eintheilung; an der Säule ist eine feste Glasröhre *aa* angebracht und mit dieser durch einen Kautschuckschlauch verbunden eine bewegliche *bb*. Die feste hat genau bei 100^{cm} einen gut eingefetteten Glashahn, die bewegliche ist am oberen Ende kurz umgebogen und offen; in der Figur ist dieselbe mit ihrer hakenförmigen Umbiegung in zwei verschiedenen Stellungen sichtbar, an der Holzsäule *A*, sowie in der Stellung *C* rechts, die feste sogar 3mal, auch noch links oben bei *B*. Die bewegliche ist auf einem Schieber *ss* befestigt, der in einer Nuthe der Holzsäule sammt der beweglichen Röhre durch Schnur und Rolle gehoben oder gesenkt werden kann. Beim Beginn der Versuche wird sie, wie mitten in der Fig. sichtbar, so gestellt, daß die Schlauchgrenzstelle *bs* etwa bei 70^{cm} liegt; dann wird mit einem spitzen Papiertrichter durch den offenen Hahn so viel Quecksilber eingefüllt, daß es beiderseits bis zu 90^{cm} reicht. Wird nun die bewegliche Röhre so weit gehoben, daß das Quecksilber in der festen bis über den Hahn steigt, so entsteht nach dem Schließen des Hahnes und Senken der beweglichen Röhre unter dem Hahn ein Vacuum, unterhalb dessen der Quecksilberspiegel den augenblicklichen Luftdruck angibt; er sei 74^{cm}. Nun wird der Hahn geöffnet und die 90^{cm}-Stellung wieder hergestellt; dann sind unter dem Hahn, sobald er geschlossen wird, 10^{cm} Luft von 74^{cm} Spannung abgeschlossen. Hebt man nun die bewegliche Röhre so weit, daß das Quecksilber in der festen bei 95^{cm} steht, daß also die Luft den halben Raum einnimmt, so steht es in der beweglichen, wie die Stellung *B* ersehen läßt, bei 169; der Quecksilberdruck beträgt jetzt $169 - 95 = 74^{cm} = 1^{at}$; da der äußere Luftdruck mitwirkt, so beträgt der Druck auf und in dem halben Luftraum 2^{at}, womit das Gesetz für verdichtete Luft nachgewiesen ist, was man für alle Zahlen zwischen 1 und 10 und auch Bruchtheile variiren kann. — Senkt man die bewegliche Röhre, bis das Quecksilber in der festen bei 80^{cm} steht, die Luft also den doppelten Raum einnimmt, so steht das Quecksilber in der beweglichen Röhre bei 43^{cm}, steht in der

Fig. 117.



festen um 80 — 43 = 37cm höher; die äußere Luft hält diese halbe Atmosphäre und die Spannung der 20cm Luft im Gleichgewicht; folglich beträgt die Spannung dieses doppelten Luftvolums auch $^1/_2$at, womit das Gesetz für verdünnte Luft nachgewiesen ist; auch dies läßt sich vielfach variiren.

Durch solche Versuche ist das Gesetz nur für geringe Pressungen nachgewiesen. Arago und Dulong dehnten ihre Versuche bis zu 27at aus, ohne Abweichungen von dem Gesetze für die Luft zu finden. Natterer ging gar bis zu 2700at und fand, daß bei solchen hohen Pressungen das Gesetz selbst für die permanenten Gase nicht mehr gilt, daß dieselben statt 2700 mal dichter zu werden, kaum 1000 mal dichter wurden. Für leicht coëricible gilt das Gesetz schon bei 3 – 4at nicht mehr, woraus man schloß, daß für alle Gase die Abweichungen von dem Gesetze um so größer seien, je näher sie dem flüssigen Zustande kommen. Erst Regnaults ausgezeichnete Versuche stellten fest, daß auch für permanente Gase selbst bei kleinen Pressungen das Mariotte'sche Gesetz nur eine, wenn auch sehr starke, Annäherung an die Wahrheit ist, und zwar, daß atmosphärische Luft und Stickstoff etwas stärker zusammendrückbar sind, als es nach dem Gesetze sein sollte, daß aber der Wasserstoff, auf der anderen Seite allein stehend, nach der entgegengesetzten Seite abweicht, nämlich weniger zusammendrückbar ist, als es das Gesetz verlangt. — Genau wurden die Abweichungen zahlreicher Gase von dem Mariotte'schen Gesetze festgestellt durch die großartigen Versuche von Amagat (1880), der in einem tiefen Schachte die Gase einem Drucke von 400m Quecksilber (mehr als 500at) aussetzte. Regnaults Angaben über den Wasserstoff bewährten sich; dieses Gas erwies sich bis zu den höchsten Drucken als weniger compressibel, als es nach dem Gesetze sein sollte; die anderen Gase zeigten ihre stärkere Compressibilität jedoch nur bei hohen, aber nicht bei den höchsten Drucken; so ist Stickstoff bis zu 60at stärker compressibel, als es das Gesetz verlangt; hier folgt er dem Gesetze eine kurze Strecke lang; dann wird er wie der Wasserstoff schwächer compressibel und bleibt dies bis zu den höchsten Pressungen. Diese von Regnault nicht erkannte Abweichung haben alle untersuchten Gase; sie sind bei hohen Drucken stärker compressibel, erreichen einen Wendepunkt, der bei verschiedenen Gasen verschieden ist, wo sie jedoch alle eine kurze Strecke lang dem Gesetze folgen, und schließen sich bei sehr hohen und höchsten Drucken für mehrere Hunderte von Atm. dem Wasserstoff an, sind sammt und sonders schwächer compressibel; hiermit stimmen auch die Angaben Natterers, die mit Regnault im Widerspruch standen. Bei höherer Temperatur bleibt zwar der Wendepunkt, aber er verschiebt sich etwas und dies- und jenseits desselben ist der Unterschied geringer; die Abweichungen nehmen also bei höherer Temperatur ab. Eine vollendete Erklärung dieser Abweichungen gibt van der Waals in seiner Theorie des kritischen Zustandes (425.).

190 **Aufg.** 319. Welchen Raum nimmt 1cbm Luft bei 267mm und bei 1000mm Barometerstand ein? Aufl.: 2,85cbm, 0,76cbm. — A. 320. Was wiegt 1cbm Luft bei 300cm und bei 950mm Barometerstand, wenn er bei 760mm 1293g wiegt? Aufl.: 5104g, 1616g. — A. 321. Um wieviel muß man bei 500mm Barometerstand steigen, damit das Quecksilber um 1mm sinke? Aufl.: 15,97m. — A. 322. Welcher Barometerstand herrscht in der Höhe, in welcher man 21m steigen muß, damit das Quecksilber um 1mm sinke? Aufl.: 380mm. — A. 323. Wie hoch muß in dem offenen Schenkel des Mariotte'schen Apparates für verdichtete Luft das Quecksilber stehen, wenn es in dem geschlossenen, in 12cm getheilten, Schenkel von 0 auf 7 gestiegen ist? Aufl.: 1824mm über dem Grad 7. — A. 324. Zu welchem Grade ist das Quecksilber im geschlossenen Schenkel gestiegen, wenn man soviel Quecksilber zugegossen hat, daß es im offenen Schenkel 100cm höher steht? Aufl.: $(76 + 100 - x) : 76 = 12 : (12 - x)$, woraus $x = 6{,}6$cm. — A. 335. Wie hoch muß in der aufgezogenen Röhre des Mariotte'schen Apparates für verdünnte Luft das Quecksilber steigen, wenn die Luft einen 3 mal größeren Raum einimmt? Aufl: $50^2/_3$cm. — A. 326. Wie hat sich der Luftraum vermehrt, wenn das Quecksilber 19cm stieg? Aufl.: Um $^1/_8$. — A. 327. Wenn man bei dem bekannten Versuche über die Undurchdringlichkeit der Luft ein umgestülptes Glas 40cm tief unter Wasser drückt, welchen Raum nimmt dann die Luft noch ein? Aufl.: 0,96 des ursprünglichen. — A. 328. Mit welcher Kraft wird das losgelassene Glas nach oben getrieben (abgesehen vom Auftriebe des Wassers)? Aufl.: 0,043kg per qcm. — A. 329. Mit welcher Kraft, den Auftrieb mit gerechnet? Aufl.: 0,083kg. — A. 330. Ein cdm Wasserstoff von 0,07 sp. Gew. strömt in einen luftleeren Raum von 3cdm ein; wie groß ist nachher das sp. Gew.? Aufl.: 0,0175. — A. 331. In einem in Quecksilber tauchenden, umgestülpten Glascylinder steht das Quecksilber 6cm tiefer als außerhalb; wie groß ist das sp. Gew. des eingeschlossenen Chlors? Aufl.: $2{,}44 \cdot {}^{82}/_{76} = 2{,}65$.

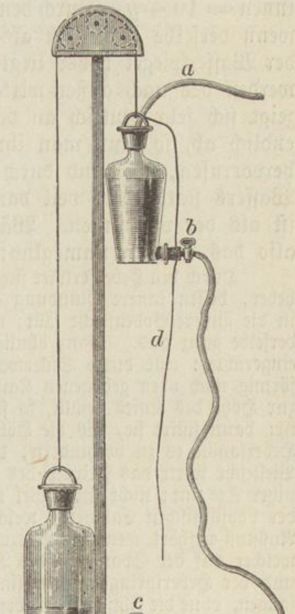
1. Anwendung des Luftdruckes und des Mariotte'schen Gesetzes.

191 **Die Ventile.** Die Ventile sind Vorrichtungen, um hohle Räume abwechselnd zu öffnen und zu schließen. Sie sind entweder Klappventile, Kegelventile, Kugelventile oder Blasenventile. Bei den ersteren ist eine um ein seitlich liegendes Gelenke drehbare Metall-

oder Lederplatte über eine Oeffnung des Hohlraumes gelegt; bei dem zweiten und dritten ist die Wand rings um die Oeffnung kegel- oder kugelförmig ausgehöhlt, und in diese Höhlung ist ein anschließender kegel- oder kugelförmiger Metallkörper eingesenkt; bei dem letzten ist über die Oeffnung eine Haut gespannt und an dem aufliegenden Theile entweder durchlöchert oder nur theilweise befestigt. Wird nun über einem der genannten Ventile die Luft verdünnt, so wird die Spannung derselben nach dem Mariotte'schen Gesetze geringer als der Luftdruck, der im Inneren des Gefäßes herrscht; dieser hebt daher die Ventile, wodurch der Luft das Ausströmen möglich ist; wenn dagegen die Luft unter den Ventilen verdünnt wird, so werden die Ventile durch den äußeren Luftdruck fest gegen die Oeffnung gepreßt, und diese wird dann luftdicht geschlossen. Zu demselben Zwecke kann auch die Spannung der Luft verwendet werden; wenn z. B. die Luft über den Ventilen verdichtet wird, so ist ihre Spannung größer als der unter denselben vorhandene Luftdruck, die Ventile werden also geschlossen; umgekehrt müssen sie sich öffnen, wenn die innere Luft verdichtet wird, also durch ihre Spannung den äußeren Luftdruck überwindet. Die Ventile haben den Hähnen gegenüber den Vorzug, daß sie selbstthätig sind, d. h. durch die Vorgänge innerhalb des Apparates sich selbst nach Bedürfniß öffnen und schließen, während die Hähne entweder der Hand oder eines Mechanismus bedürfen.

Das Saugen und die Pipette. Bei dem Saugen und Trinken erweitern wir die 192
Lungen, daher wird die Luft in den Lungen wie in dem mit den Lippen gefaßten Sauggefäße, Saugröhre, Pipette (eine mit kugeliger Anschwellung versehene Saugröhre) verdünnt; es überwiegt alsdann der Luftdruck die innere Spannung und drückt die Flüssigkeit, in welche das Sauggefäß getaucht ist, in dasselbe hinein. Verschließt man schnell die Saugöffnung mit dem Finger, so kann man die Pipette vollgefüllt aus der Flüssigkeit ziehen, ohne daß dieselbe herausläuft. Ein künstliches Saugen findet in dem Aspirator statt; die ältere Form desselben war einfach eine Flasche mit einem Ausflußhahn am Boden und einer Stöpselröhre; floß aus der gefüllten Flasche das Wasser nach dem Oeffnen des Hahnes aus, so mußte die Luft oder das Gas in den Gefäßen, zu welchen die Stöpselröhre führte, in die Flasche strömen, wurde also aus oder durch jene Gefäße gesaugt. Der neue Aspirator (Fig. 118) besteht aus 2 Fläschen mit Bodentubulus, die untere offen, die obere geschlossen und mit einer Stöpselsaugröhre *a* versehen. Werden die Hähne *b* und *c* geöffnet, so fließt das Wasser durch den Schlauch *bc* in die untere Flasche und saugt so aus der Röhre *a* Gas oder Luft in die obere Flasche. Ist die obere Flasche wasserleer, so zieht man sie mittels des Seiles *d* herab, die untere Flasche kommt hinauf, und kann durch Einsetzen des Stöpsels jetzt die Stelle der oberen übernehmen u. s. w. Ist die untere Flasche ebenfalls geschlossen und mit einem Ausblaserohre versehen, so kann sie, falls das Gestell einige Höhe besitzt, zum Blasen benutzt werden.

Fig. 118.



Der Stechheber. Derselbe besteht aus einer weiten, 193
unten sich verengernden Röhre, die, in eine Flüssigkeit eingetaucht, sich als communicirendes Gefäß füllt. Wird sodann die obere Oeffnung geschlossen, so kann man den Heber, wie die Pipette, aus der Flüssigkeit nehmen, ohne daß solche herausfließt, vorausgesetzt, daß die untere Oeffnung ein gegenseitiges Ausweichen von Luft und Wasser nicht gestattet. Denn würde etwas ausfließen, so müßte oben ein luftleerer oder luftverdünnter Raum entstehen, so daß der äußere Luftdruck die Flüssigkeit in denselben heben würde. Die Zaubertrichter und Zauberkannen enthalten stechheberartige Hohlräume, deren obere Oeffnungen versteckt liegen, so daß durch unvermerktes Schließen und Oeffnen derselben das Fließen bald aufhört, bald wieder beginnt. Auch aus der Sturzflasche der alten Studirlampen kann das Oel nur fließen, wenn die Oeffnung nicht mehr in Oel taucht und daher die Luft in die Sturzflasche steigen kann. Bei dem Füllen der Moderateur-Lampen steht das Oel über einem ringsum fest an den Gefäßwänden liegenden Lederkreise; wird derselbe durch das Aufziehen der daran befestigten Feder gehoben, so entsteht unter ihm ein leerer Raum, der äußere Luftdruck biegt alsdann den Lederkreis so nach unten, daß ringsum Raum frei wird, durch welchen das Oel unter das Leder fließt; der Druck der Feder auf das Leder treibt dann beim Brennen das Oel durch ein lange Röhre in den Docht.

194 **Der Schenkelheber.** Der Schenkelheber ist eine gekrümmte Röhre, deren einer Schenkel in eine Flüssigkeit taucht, während an der Oeffnung des anderen Schenkels gesaugt wird. Es fließt alsdann die Flüssigkeit so lange aus, als die Oeffnung des äußeren Schenkels unter dem Flüssigkeitspiegel im Gefäße liegt. Das Anlassen erklärt sich wie beim Saugen; um das Fortfließen zu erklären, fassen wir die an der höchsten Stelle wirkenden Kräfte ins Auge; denn an dieser wagrechten Stelle kann nur dann ein fortdauerndes Fließen stattfinden, wenn nach einer Richtung überwiegende Kräfte wirken. Sowohl auf den Wasserspiegel im Inneren als auf die äußere Oeffnung wirkt der Luftdruck $= 10^m$ Wasser, und pflanzt sich von beiden Seiten her von unten nach oben an die höchste Stelle fort. Derselbe erfährt aber beiderseits eine Verminderung und zwar durch den hydrostatischen Druck der in den Schenkeln befindlichen Wassersäulen. Von innen nach außen wirkt entgegen die Wassersäule von dem Wasserspiegel an bis zur höchsten Stelle, deren Höhe wir mit x bezeichnen, von außen nach innen die Wassersäule von der Oeffnung bis zur höchsten Stelle, deren Höhe $= y$ sein möge; folglich ist der Druck von innen nach außen $= 10 - x$, von außen nach innen $= 10 - y$. Durch den ersten Druck kann das Fließen nach außen stattfinden, wenn derselbe größer ist als der zweite, wenn also x kleiner ist als y, d. h. wenn der Wasserspiegel höher liegt als die äußere Oeffnung. Das allmälige Kleinerwerden des nach außen wirkenden Ueberdruckes bei dem Sinken des Wasserspiegels zeigt sich sehr deutlich an dem Dünnerwerden des Ausflußstrahles; bricht derselbe endlich ab, so kann man ihn durch rasches Neigen des Hebers nach außen wieder hervorrufen, während durch Neigen nach innen ein sofortiges Zurücksteigen des Wassers stattfindet, weil dann y kleiner als x, also der Druck von außen größer ist als der von innen. Wäre $x = 10^m$, so wäre der Druck von innen $= 0$, also das Fließen unmöglich; ein Heber darf nicht höher als 10^m sein.

Durch den Heber erklärt sich der Vexirbecher; derselbe enthält einen versteckten Schenkelheber, dessen innere Mündung am inneren Boden des Bechers steht, während die äußere in die äußere Bodenfläche fällt; wird der Becher bis zur Höhe des Heberknies gefüllt, so fließt derselbe ganz aus. Ganz ähnlich sind in der Natur die intermittirenden Quellen eingerichtet: eine durch Sickerwasser sich allmälig füllende Erdhöhle steht durch einen knieförmig nach oben gebogenen Kanal mit der Erdoberfläche in Verbindung; ist die Höhle bis zur Höhe des Knies gefüllt, so fließt die Quelle, und zwar so lange, bis die Höhle geleert ist; dann sistirt sie, bis die Höhle wieder gefüllt ist. In ähnlicher Weise sucht man durch Heberkanäle es zu verhindern, daß in Kanälen das Wasser über ein gewisses Niveau steigt. Vielleicht wirkt das Princip des Hebers auch bei intermittirenden Seen, wie z. B. am Zirknitzer See mit; nicht ins Spiel tritt dasselbe 1. bei dem künstlichen intermittirenden Brunnen der physikalischen Cabinete, welcher auf der schon betrachteten Erscheinung beruht, daß der Ausfluß aufhört, wenn der Luftzutritt über den Wasserspiegel abgesperrt ist; 2. bei dem Geiser, welcher auf der Spannung des Dampfes beruht. — Auch die Spielerei der **fraterna caritas** und der Heberspringbrunnen sind Anwendungen des Hebers; den Giftheber kann man ansaugen, ohne die Flüssigkeit zu berühren, und den Doppelheber kann man sogar anlassen, ohne anzusaugen.

195 **Die Handspritze** besteht aus einer Röhre, in welcher ein Kolben luftdicht durch einen Griff auf und ab geschoben werden kann. Wird die Röhre mit der an dem Boden befindlichen engen Oeffnung in Flüssigkeit gesteckt, so steigt dieselbe bei dem Aufziehen des Kolbens. Schiebt man dann den Kolben nieder, so wird die Luft zwischen demselben und der Flüssigkeit verdichtet; ihre Spannung wächst und treibt die Flüssigkeit durch die enge Oeffnung hinaus.

196 **Die Saugpumpe.** Die Hauptbestandtheile einer Saugpumpe (Fig. 119) sind: die ins Wasser reichende Saugröhre ab mit dem sich nach oben öffnenden Saugventil a, der luftdicht mit der Saugröhre verbundene Stiefel ac mit dem Ausflußrohre d, und der durch den Pumpenschwengel auf und ab zu schiebende Kolben k mit dem sich ebenfalls nach oben öffnenden Kolbenventil v. Wird der Kolben aufwärts gezogen, so wird die Luft zwischen demselben und dem Saugventil verdünnt, das Kolbenventil muß sich schließen, das Saugventil muß sich öffnen und

die Luft in der Saugröhre muß sich dann ebenfalls verdünnen. Folglich ist der äußere Luftdruck größer als die Spannung der inneren Luft und treibt das Wasser in der Saugröhre aufwärts. Durch öftere Wiederholung des Spieles gelangt das Wasser über das Saugventil *a* und dann über das Kolbenventil *v*, wonach es durch den Arm *d* ausfließt. Da der Luftdruck nur einer Wassersäule von 10^m Höhe das Gleichgewicht halten kann, so darf sich der Kolben nicht weiter als 10^m von dem Wasserspiegel entfernen. Als man 1643 in Florenz eine höhere Pumpe erfolglos anwandte, gelangte Torricelli zu der Entdeckung des Luftdruckes, während man vorher das Steigen des Wassers in der Saugröhre als eine Folge des horror vacui, einer Abneigung der Natur vor dem leeren Raume erklärt hatte.

Fig. 119.

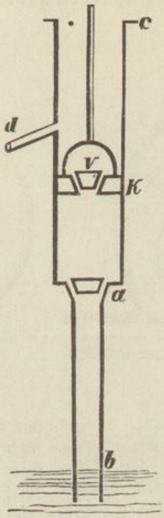
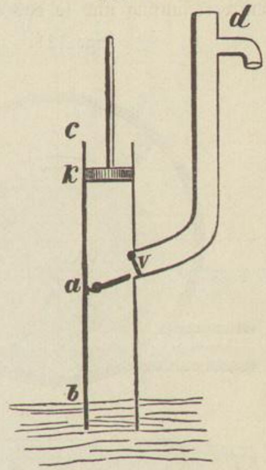


Fig. 120.



Die Druckpumpe. Die Druckpumpe enthält wie die Saugpumpe eine Saugröhre *ab* (Fig. 120), ein Saugventil *a*, Stiefel *ac*, Kolben *k*; aber der Kolben ist nicht durchbrochen und enthält nicht ein Ventil wie bei der Saugpumpe, sondern über dem Saugventil *a* zweigt sich seitlich das sogenannte Steigrohr *vd* ab, das weiter oben das Ausflußrohr *d* trägt. Durch den Kolbenhub findet auch hier wieder Luftverdünnung und Emporsteigen des Wassers in das Saugrohr statt. Bei dem Kolbenschube aber, wo sich das Ventil *a* schließt, öffnet sich das Druckventil *v*, und es strömt anfänglich Luft und später Wasser in das Steigrohr. Soll dasselbe in dem Steigrohre sich hoch erheben, so muß dies durch einen Druck des Kolbens geschehen, ebenso wie in der Saugpumpe an der Kolbenstange eine größere Zugkraft wirken muß, wenn das Ausflußrohr mehr als 10^m von dem Wasserspiegel entfernt ist. 197

Die Rotationspumpen (Ramelli 1588) und **die Centrifugalpumpe** (Papin 1688). 198
Rotationspumpen werden jetzt vielfach angewendet z. B. zur Beförderung von Wein aus einem Keller in einen anderen oder auf die Straße; sie sind aus der alten „Kapselkunst" hervorgegangen; „Ramellis „arteficiose Maschine" ist in Fig. 121 nach Reuleaux' Kinematik dargestellt. In dem Gehäuse oder der Kapsel *a* dreht sich eine Welle *b* und die Trommel *d*, jedoch nicht um die Achse der cylindrischen Kapsel. In die Trommel sind lose 4 Kolbenschleifen *c* eingesetzt, die z. B. durch Federn immer an die Kapselwand angedrückt werden. Durch die Rotation wird der Raum hinter dem *c* links unten immer größer und saugt daher Luft und Wasser an, während der Raum unter dem 4. *c* rechts oben kleiner wird und daher Luft und Wasser austreibt. Auch die Pumpen mit doppelter Rotation, die in neuerer Zeit vielfach verwendet werden, sind aus einer alten Erfindung, Pappenheims Kapselrad (Fig. 122) hervorgegangen, das schon in Kaspar Schotts Hydraulica, Mainz 1657, als ein gebrauchtes Werk beschrieben wird. Da die Zähne unten auseinander gehen, so vergrößern sie den Raum, saugen an, und führen durch die Zahnlücken Luft und dann Wasser nach oben. — Viel energischer als die Kapselkünste und ihre modernen Umformungen wirkt die Centrifugalpumpe; sie hat auch wie jene weder Ventile noch Kolben, aber den Vorzug, daß ihre Theile nicht „schlüssig" sein müssen, daß sie also auch für unreine Flüssigkeiten brauchbar ist. Das Saugrohr *ab* (Fig. 123) theilt sich bei *a* in 2 sanft abgebogene Aeste *ai*, die das Wasser nach dem centralen Raume *i* in der Kapsel *df* führen. In dieser dreht sich sehr rasch ein Flügelrad und treibt Luft und Wasser durch ihre Centrifugalkraft in das Steigrohr *fc*.

— Es gibt auch vielerlei Wasserbeförderungsmaschinen, die nicht auf dem Luftdrucke beruhen, wie die Schöpf-, Wurf- und Schneckenräder, die Paternosterwerke, die Archimedische Schraube u. s. w.

199 **Der Pulsometer** (Henry Hall 1870) wirkt durch Dampf; der Dampf bewirkt die Luftverdünnung und so das Ansaugen; er drückt aber auch durch seine Spannung die Flüssigkeit im Steigrohre hinauf z. B. Wasser 60^{m} hoch, wenn er eine Spannung von 6^{at} besitzt. Durch die obere Oeffnung (Fig. 124) tritt der Dampf eiu, an die untere bei D ist das Saugrohr, an die hintere, punktirt angedeutete, das Steigrohr befestigt. Der Pulsometer besteht aus 2 flaschenförmigen Kammern A, deren enge Hälfte sich bei S vereinigen und den Dampfkanal bilden; in diesem kann ein Kugelventil abwechselnd die beiden Flaschenhälse schließen und öffnen. Ebenso können die unteren Enden der Kammern durch 2 Kugelsaugventile abwechselnd mit dem Saugrohr verbunden und ebenso durch ein Kugeldruckventil h abwechselnd mit dem Steigrohr in Verbindung gesetzt werden. Bei der Stellung in der Fig. ist der Raum links mit Wasser gefüllt und in Verbindung mit dem Dampfrohr; der Dampf drückt daher auf das Wasser, schließt hierdurch das linke Saugventil über D, schiebt das Druckventil h nach rechts und treibt so das Wasser in das Steigrohr. Die Kammer rechts aber steht mit dem Saugrohr in Verbindung, das Wasser steigt in demselben, condensirt den Dampf, steigt dadurch noch mehr und treibt die Dampfventilkugel nach links. Jetzt findet dort Condensation statt, indem das Wasser links nicht total ausgetrieben und der Dampf daher bei A mit einer breiten Wasserfläche in Berührung ist; durch diese Condensation entsteht ein luftverdünnter Raum, der äußere Luftdruck treibt das Wasser im Steigrohr aufwärts, hebt das linke Saugventil, wodurch das Wasser links steigt, während rechts der Dampf durch seinen Druck auf das Wasser das rechte Saugventil schließt und das Druckventil nach links schiebt, so daß jetzt rechts das Wasser ins Steigrohr getrieben wird u. s. w. So interessant dieser Apparat auch ist, so schwierig ist seine Anwendung; das Ingangsetzen ist complicirt, Störungen im Gange kommen oft vor, der Dampfverbrauch ist groß; man sucht einige dieser Nachtheile durch Verbesserungen zn beseitigen, die jedoch die Einfachheit der obigen ursprünglichen Construction wesentlich alteriren.

Fig. 121.

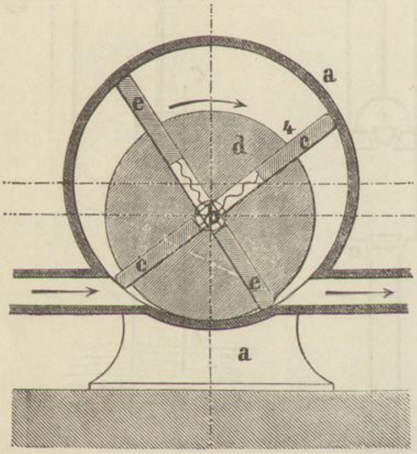


Fig. 122.

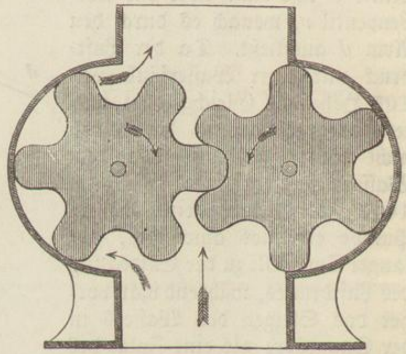


Fig. 123.

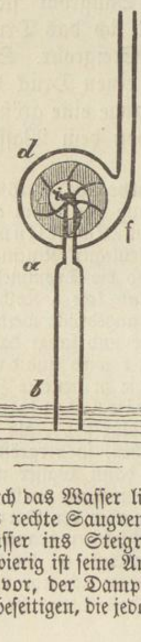
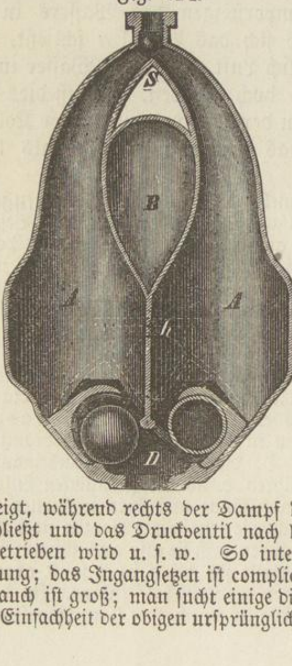


Fig. 124.



Die Quecksilberluftpumpe von Geißler (1855) ist ein Apparat, mittels dessen man 200
in kleineren Gefäßen den höchsten Grad der Luftverdünnung, der an wahre Luftleere grenzt, erreichen kann, während die Leistungen der gewöhnlichen Luftpumpen weit von der Luftleere entfernt bleiben. Geißler construirte dieselbe zu dem Zwecke, die berühmten Geißler'schen Röhren luftleer zu machen und mit verdünnten Gasen zu erfüllen, wodurch dieselben dem elektrischen Funkenstrome mit prächtigen Lichterscheinungen den Durchgang gestatten. Die Quecksilberluftpumpe besteht fast ganz aus Quecksilber und Glas, und verdankt daher nur der großen Geschicklichkeit der jetzigen Glasbläser ihr Dasein. Sie beruht auf dem Grundgedanken des Torricelli'schen Versuches. Eine Barometerröhre *ab* bildet mit dem Gefäße *ac* (Fig. 125) ein Ganzes und steht durch den Gummischlauch *bd* mit dem oben offenen Gefäß *de* in Verbindung. Der doppelt durchbohrte Hahn *h* bringt das Gefäß *ac* bald mit der Geißler'schen Röhre *G*, welche leer zu pumpen ist, bald mit dem offenen Gefäß *i* in Verbindung, oder schließt dasselbe ganz ab. Ist das letztere der Fall und biegt man das Gefäß *de* ganz herab, so muß das Quecksilber in *ac* fallen, *ac* muß luftleer werden, weil *ab* etwa 80^{cm} hoch ist. Wird nun *G* mit *ac* in Verbindung gebracht, so wird die Luft in *G* verdünnt. Wenn endlich das Gefäß *de* wieder gehoben wird, während *ac* von der Geißler'schen Röhre abgeschlossen, aber mit *i* verbunden ist, so steigt das Quecksilber wieder in die frühere Lage herauf, füllt *ac* ganz aus und treibt die Luft durch *i* hinaus. Durch öftere Wiederholung dieses Spieles wird endlich *G* nahezu luftleer. Das Gefäß *s* dient zum Reinigen der Luft, *o* zum Herbeiführen einer fremden Gasart, *m* ist eine Barometerprobe zum Messen der Verdünnung. Diese älteste Einrichtung der Quecksilberluftpumpe, mit welcher Geißler z. B. auf der Gießener Naturforscherversammlung (1864) arbeitete, hat zahlreiche Veränderungen und Verbesserungen erfahren, die großartigste von Töpler (s. 210.) (1862–77). Geißler hatte auf der Pariser Industrie-Ausstellung (1867) Röhren ausgestellt, die so leer waren, daß der elektrische Funke eines riesigen Induktors von Ruhmkorff selbst in einem Abstande der zwei Platinspitzen von 1^{mm} nicht mehr überzuspringen vermochte.

Fig. 125.

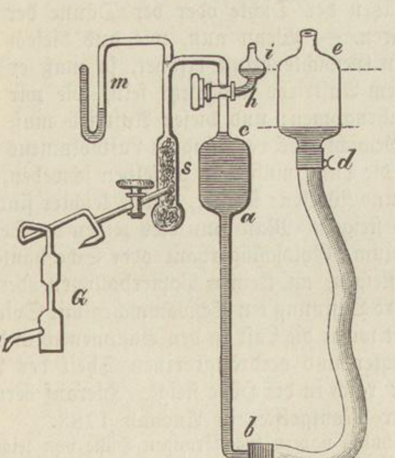
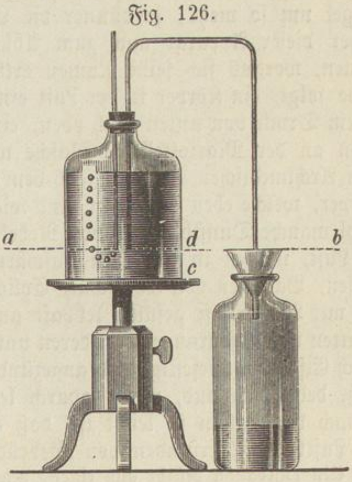


Fig. 126.



Mariottes Flasche. Geht in eine gefüllte Flasche luftdicht durch den Kork eine Röhre 201
bis zu einer gewissen Tiefe *ad* (Fig. 126), so wirkt in der ganzen horizontalen Ebene *ad*, welche durch die Mündung der Röhre geht, der Luftdruck nach unten und nach oben; der Luftdruck nach oben wird durch den Druck des Wassers zwischen *ad* und dem Spiegel und durch den Druck der verdünnten Luft über dem Spiegel aufgehoben, wenn bei *c* Wasser ausfließt; umgekehrt wird aber auch der Druck des Wassers bis *ad* durch den Luftdruck nach oben aufgehoben; also ist in *ad* nur Luftdruck nach unten wirksam; dieser pflanzt sich bis zur Oeffnung *c* fort und ist dort noch vergrößert durch das Gewicht des Wassers zwischen *ad* und *c*, wird aber hier aufgehoben durch den äußeren Luftdruck bei der Oeffnung *c*. Es fließt daher das Wasser nur durch die Druckhöhe *dc* zwischen der Mündung der Röhre und der Oeffnung aus; dieser Druck bleibt aber immer derselbe, so lange noch Wasser über der Höhe der Mündung steht; daher ist eine solche Flasche, Mariotte'sche Flasche, nach ihrem Erfinder benannt, zu Versuchen über die Ausflußgeschwindigkeit geeignet. Eine nützliche Anwendung

hat dieselbe in dem beständigen Filter (Fig. 126), in welchem die Ausflußöffnung *c* durch einen Schenkelheber ersetzt ist, dessen äußere Oeffnung etwas unter *ab* in einen Filtertrichter geht; ist das Wasser bis *ab* in das Filter gestiegen, so hört der Ausfluß auf, beginnt aber sogleich wieder, wenn dieses Wasser sinkt, so daß der Spiegel constant bleibt, so lange die innere Oeffnung des Hebers eintaucht. — Besonders interessant ist die Mariotte'sche Flasche auch dadurch, daß in derselben der Druck des Wassers über der Höhe *ab* der Röhrenmündung ganz aufgehoben ist und zwar durch den aus der Röhrenmündung tretenden Luftdruck nach oben, wodurch uns diese Erscheinung das Vorhandensein des Luftdruckes nach oben erkennen läßt.

202 **Der Auftrieb des Luftdruckes, der Luftballon.** Da die Luftarten mit den flüssigen Körpern in der leichten Beweglichkeit der Theilchen übereinstimmen, so gilt für dieselben auch das Gesetz des Auftriebes, das Archimedische Princip. Jeder Körper verliert in der Luft so viel an seinem Gewichte, als die verdrängte Luftmenge wiegt. Man kann dies nachweisen mittels des Wagmanometers oder Dasymeters (δασύς = dicht). Dasselbe besteht aus einer kleinen Wage, die statt der Schalen eine große und eine kleine Kugel trägt und mit denselben im Gleichgewichte ist. Wenn nun das Archimedische Princip für die Luft Geltung hat, so muß die größere Kugel in der Luft mehr von ihrem Gewichte verlieren als die kleinere; und die Kugeln, die mit diesem Verluste sich das Gleichgewicht halten, können dies ohne den Verlust nicht mehr, weil die größere Kugel durch Beseitigung des Verlustes mehr gewinnt als die kleinere; also muß die erstere an sich mehr wiegen als die letztere. Diese Folgerung aus der Geltung des Archimedischen Princips bewährt sich vollkommen; denn bringt man den Apparat unter die Glocke einer Luftpumpe und pumpt dieselbe allmälig leer, so sinkt die größere Kugel um so mehr, je dünner die Luft durch das Auspumpen wird. Es kann daher dieser Apparat auch zum Abschätzen der Dichte oder der Dünne der Luft dienen, woraus sich seine Namen erklären. — Wenn nun, wie aus diesem Versuche folgt, ein Körper in der Luft einen Gewichtsverlust erfährt, so muß er auch einem Drucke von unten nach oben, einem Auftriebe ausgesetzt sein, wie wir auch schon an der Mariotte'schen Flasche wahrnahmen; und dieser Auftrieb muß nach dem Archimedischen Princip gleich dem Gewichte des verdrängten Luftvolumens sein. Körper, welche eben so schwer sind wie die Luft, müssen in derselben schweben, wie wohl manche Dunstbläschen von Nebel und Wolken; Körper, welche leichter sind als die Luft, müssen in derselben aufwärts steigen. Man kann dies zeigen an Seifenblasen, Ballonen von Kautschuk, Collodium, Goldschlägerhaut oder Schafhäutchen, die mit Wasserstoff gefüllt, lebhaft aufsteigen, an kleinen Papierballonen oder den Matten von Elsenraupen, an deren untere Oeffnung ein Schwämmchen mit Spiritus durch Eisendraht befestigt und angezündet wird; die Luft in den Ballonen wird dann heiß, dehnt sich aus, wird dadurch leichter und verdrängt einen Theil der Luft, wonach der Ballon so leicht ist, daß er rasch in die Höhe steigt. Hierauf beruhen die Luftballone, erfunden von Gebrüder Montgolfier in Anonay 1783.

Ein Luftballon besteht aus einer, gewöhnlich nahezu kugelförmigen Hülle von leichtem, aber starkem Zeuge, welche mit einem sehr leichten Gas, erwärmter Luft, Wasserstoffgas, erfüllt ist. Die Steigkraft des Ballons ist gleich dem Gewichte der verdrängten Luft weniger dem Gewichte des Ballons. Ist d der Durchmesser des Ballons in Centimeter, s und s' das spec. Gew. der Luft und des angewandten Gases und a das Gewicht von 1 qcm des Hüllenstoffes, so ist die Steigkraft $= \frac{1}{6} d^3\pi . s - (\frac{1}{6} d^3\pi . s' + d^2\pi . a) = \frac{1}{6} d^3\pi (s - s') - ad^2\pi$. — Montgolfier wandte erwärmte Luft an, indem er unter dem unten offen gelassenen Ballon ein Strohfeuer anzündete; daher werden Ballone mit erwärmter Luft Montgolfièren genannt. Charles schlug sogleich das vortheilhafteste, weil leichteste Gas, das Wasserstoffgas vor, und stieg mit einem mit Wasserstoff gefüllten Ballon, einer sogenannten Charlière, am 1. Dec. 1783 von den Tuilerien in Anwesenheit des Hofes und mehrerer Hundertausende von bewundernden Zuschauern in einer an dem Ballon hängenden Gondel auf. Die Charlièren haben zwar die größte Steigkraft, aber sind kostspielig und unzuverlässig. Denn der Wasserstoff diffundirt am stärksten durch die Hülle, wodurch die große Steigkraft bald gering wird und der Ballon sinkt; auch dehnt sich das Gas stark aus, wenn der Ballon in Höhen von geringerem Drucke gestiegen ist, und droht durch seine Spannung den Ballon zu zerreißen; man darf daher den Ballon nicht ganz mit Wasserstoff füllen und muß ihn unten offen lassen, damit überflüssiges Gas entweiche; auch muß oben eine Klappe angebracht sein, um Gas herauslassen zu können, wenn das Herablassen beabsichtigt wird; und für den Fall zu starken Gasverlustes muß Ballast, aus Sandsäcken bestehend, mitgenommen werden, um zu rasches Sinken zu verhindern oder neues Steigen zu veranlassen. Solche Gas- und Ballastverluste sind aber auf einer Luftfahrt nicht wieder zu ersetzen, wodurch das Lenken in verticaler Richtung bald unmöglich wird. Diese Nachtheile haben die Montgolfièren nicht; denn man kann bei diesen durch Schüren oder Schwächen des Feuers nach Belieben Steigen und Sinken hervorrufen. Deßhalb verband auch Pilâtre de Rozier, der schon vor Charles zweimal aufgestiegen war, eine kleine Mongolfière mit einer größeren Charlière, um die größere Steigkraft der letzteren mit der leichteren Lenkbarkeit der ersteren zu vereinigen, büßte aber bei dem Versuche, mit einer solchen Carolo-Mongolfière nach England zu reisen, in entsetzlicher Weise das Leben ein; auch Graf Zambeccari hatte kein Glück mit dieser Verbindung. Man hat wegen der Feuergefährlichkeit und der geringen Steigkraft die Montgolfièren trotz ihrer sonstigen Vorzüge verlassen und füllt jetzt die Ballone mit Leuchtgas nach dem Vorgange des Engländers Green, der in neuerer Zeit die meisten Luftfahrten gemacht hat und auf einer derselben in 19 Stunden von London nach Weilburg kam. Das Leuchtgas ist zwar nur halb so schwer als die atm. Luft, besitzt aber doch noch Steigkraft genug für die Schau- und Vergnügungszwecke, denen die Ballone meist gewidmet sind; sie müssen nur hinreichend groß sein, dann resultirt auch einem weniger leichten Gas eine größere und dauernde Steigkraft, weil die Steigkraft nahezu mit der dritten Potenz, die Diffusion aber nur mit der zweiten Potenz des Durchmessers wächst. Der größte Ballon, mit dem je Fahrten unternommen wurden, war „der Riese" von Nadar, der aus zwei über einander stehenden Ballonen bestand, 6000^{cbm} Gas faßte, und 45^m hoch war, fast so hoch wie ein Kirchthurm; wegen dieser Größe konnten zweitägige Fahrten mit dem Riesen unternommen worden; die Gondel enthielt 2 Cajüten für Capitän und Passagiere, 1 Gepäckraum, 1 Provisionskammer, Waschraum, Photographie und Druckerei, 35—40 Personen konnten mitfahren; sie war aus Weiden geflochten, außen mit Seilen und innen mit Kautschuk überzogen, 4^m lang, 2,3^m breit und 3^m hoch, ungefähr wie ein Eisenbahnwagen. Auf der größten Reise, die Nadar unter Oberleitung der Gebrüder Godard unternahm, und auf welcher er am 18. Oct. 1863 Nachmittags 5 Uhr in Paris aufstieg und über Belgien und Holland fliegend am 19. Oct. Morgens 10 Uhr bei Rethem an der Aller im Hannöver'schen niederfiel, versagte das Ventil, die Ankertaue rissen und die Gondel wurde lange Strecken über Wald und Feld geschleift, auf- und abgestoßen, so daß einige von den 9 Reisenden schwer verwundet wurden. Am 15. April 1875 unternahmen Croce-Spinelli, Sivel und Tissandier in Paris eine Luftfahrt zu wissenschaftlichen Zwecken; in einer Höhe von 8000^m erstickten die beiden ersteren, obwohl sie aus mitgenommenen Sauerstoffschläuchen athmeten. Glaisher und Coxwell hatten 1862 schon 11000^m Höhe erreicht, wobei ersterer bewußtlos wurde und letzterem eine Hand erfror. So sind die Luftfahrten noch immer lebensgefährliche Wagnisse.

Nützlich sind die Ballone, außer einigen Verwendungen zu Kriegszwecken (Fleurus 1794, Venedig 1849, Paris 1870), noch nicht geworden, weil man sie noch nicht in horizontaler Richtung zu lenken versteht. Gleich nach der Erfindung wurden schon Versuche gemacht, mit Schaufelrädern und schaufelartigen Flügeln die Gondel und damit auch den Ballon nach verschiedenen Richtungen zu lenken; man fand, was auch die Rechnung ergibt, daß bei ganz ruhiger Luft einige Menschen dem Ballon mit solchen Einrichtungen eine wagrechte Geschw. von ca. 1^m ertheilen können. Dasselbe haben neuere unter Leitung von Helmholtz angestellte, durch die deutsche Reichsregierung veranlaßte Versuche ergeben, sowie die Versuche von Paul Hänlein aus Mainz, der einen Ballon durch eine von einem Gasmotor getriebene Schiffschraube fortbewegte. Um größere Geschw. zu erzielen, müßte, wie die Rechnung ergibt, die Kraft mit der neunten Potenz der Geschw. im Verhältnisse stehen, also für eine Geschw. von 3^m 19683 mal größer werden. Man müßte für größere Geschw. eine Kraftmaschine mitnehmen; dafür müßte wiederum die Steigkraft, also auch der Ballon größer werden, für dessen Bewegung auch die Kraft wieder wachsen würde. In dieser Weise potenziren sich die Verhältnisse gegenseitig, so daß selbst für vollkommen ruhige Luft auch die Anwendung der compendiösesten Gasmaschine zum Treiben eines Schraubenrades wenig Erfolg verspricht. Noch weniger möglich erscheint aber die Lenkung in bewegter Luft; und die Luft ist fast immer in sehr lebhaften Strömungen begriffen, wie Greens und Nadars rasche Fahrten zeigen, sowie der Ballon, der am 16. Dec. 1804 in 22 Stunden von Paris nach Rom flog. Wären diese Strömungen constant und in verschiedenen Höhen in bestimmter Weise verschieden gerichtet, so könnte man dieselben zu Fahrten benutzen, indem man sich zu der Luftschicht erhöbe, welche gerade die beabsichtigte Richtung hätte, oder man könnte auch die verschiedenen Richtungen combiniren; allein die Luftströme sind wechselnd und unregelmäßig, zur einen Zeit von einer Richtung durch bedeutende Höhen, zu einer anderen Zeit schon in geringen Abständen verschieden. Von den 54 Ballonen, die 1870/71 aus dem belagerten Paris aufstiegen, flog einer fast nach Lappland, einer nach Solingen, einer nach München, mehrere verschwanden spurlos, versanken also wohl im Meere, die übrigen flogen weniger weit, aber nach allen Weltgegenden, was hinreichend die Verschiedenheit der hohen Luftströmungen beweist. Wollte man gar den Strömungen entgegenfahren, so müßten ungeheure Kräfte zu Gebote stehen; denn die Ströme haben eine durchschnittliche Geschw. von 10^{m}, haben also gegen den Ballon, wenn derselbe mit der Locomotive wetteifern und eine Geschw. von 12^{m} erreichen soll, eine relative Widerstandsgeschw. von 22^{m}; bei solchen großen Geschw. aber wächst der Widerstand nicht blos mit der ersten, sondern auch mit der zweiten und dritten Potenz der Geschw., wodurch die Kräfte zur Ueberwindung unaufbringlich werden. Nur dann würde wohl die Lenkung erreichbar scheinen, wenn es gelänge, luftleere Räume an den Seiten eines Luftschiffes herzustellen, um durch den Luftdruck selbst das Schiff nach diesen Seiten voranschieben zu lassen.

Wissenschaftliche Luftfahrten wurden unternommen von Robertson in Hamburg 18. Juli 1803, von Biot und Gay-Lussac am 24. Aug. 1804, von Gay-Lussac allein am 16. Sept. 1804, wobei derselbe eine Höhe von 7000^{m} erreichte, von Barral und Bixio am 27. Juli 1850, von der Sternwarte zu Kew im Jahre 1852, von Glaisher 30 unter den Auspicien der „British Association" von 1861–66. Es wurden hierbei besonders beachtet die Abnahme des Luftdruckes und der Temperatur mit der Höhe, die Luftströmungen und sonstige Wettererscheinungen, die Elektricität der Atmosphäre u. s. w. Aßmann erklärt (1889), durch diese Beobachtungen habe sich herausgestellt, daß sämmtliche meteorologische Elemente, vielleicht mit Ausnahme des Luftdrucks, in freier Höhe ein anderes Verhalten annehmen als auf Berggipfeln; auch sind die höchsten Gipfelwetterwarten (Pikes Peak 4313^{m} hoch und leider wieder aufgehoben, Sonnenblick in den Alpen 3100^{m}) 2 bis 3 mal weniger hoch, als Ballone steigen können. Und doch sind die vielen Räthsel der Meteorologie nur durch genaue Kenntniß der Höhenmeteorologie zu lösen. A. hält es daher für eine Aufgabe der nächsten Zukunft, theils durch Fesselballone, theils durch 2 oder mehrere an verschiedenen Orten gleichzeitig aufsteigende Ballone die Wetterverhältnisse der freien Höhen zu erforschen.

203 Aufg. 332. Wieviel Flüssigkeit fließt per Secunde aus einem Schenkelheber von 2^{cm} Durchmesser, wenn der innere Schenkel 20^{cm} frei und der äußere 1^{m} hoch ist? Aufl.: 1244^{ccm}. – Aufg. 333. Wie hoch muß der innere Schenkel frei sein, wenn nur 1000^{ccm} ausfließen sollen? Aufl.: 49^{cm}. — A. 334. Welchen Druck muß der Kolben einer Saugpumpe beim Hube ausüben, wenn die Entfernung des Ausflußrohres vom Wasserspiegel $= d$ ist? And.: Sei die Entfernung des Rohres vom Kolben $= y^{m}$, so drücken auf den Kolben nach unten $10 + y^{m}$, nach oben $10 - (d - y)$; folglich Restdruck nach unten $= d^{m}$ Wasser $= 1000\ d^{kg}$ per qm. — A. 335. Welcher Effect muß bei dieser Pumpe verwendet werden, wenn jede Secunde ein Kolbenhub von der Höhe h stattfindet? Aufl.: $^{1}/_{75} . 1000\ dh$ Pferde. — A. 336. Wie groß ist der Effect, wenn $d = 5^{m}$, $h = 1^{m}$ und die Kolbenfläche $= 1^{qdm}$? Aufl.: $^{2}/_{3}{}^{e}$. — A. 337. Ist der bei der Druckpumpe nöthige Kolbendruck ein anderer? Aufl.: Ebenfalls $1000 d^{kg}$ per qm; nur ist der Druck auf Hub und Schub vertheilt. — A. 338. Welche Wassermenge gibt die Pumpe (A. 336) in 1 Sec.? Aufl.: $1000\ h^{kg}$ per qm; hier per qdm $= 10^{kg}$. — A. 339. Wie groß ist der Gewichtverlust eines Würfels von 1^{m} Kante in der Luft? Aufl.: 1293^{g}. — A. 340. Was wiegen Kugeln von Blei und Lindenholz im luftleeren Raume, wenn sie in der Luft 2 Ctr. wiegen? Aufl : $99988{,}7^{g}$, 99741^{g}. — A. 341. Welches ist der Auftrieb einer Kugel von 20^{m} Durchmesser in der Luft? Aufl.: 5416^{kg}. — A. 342. Wie groß ist die Steigkraft einer Charlière von 10^{m} Durchmesser? Aufl.: 631^{kg}. — A. 343. Wie groß, wenn der qm Taffet 200^{g} wiegt? Aufl.: 568^{kg}. — A. 344. Welchen Durchmesser muß eine solche Charlière haben, damit sie 1870^{kg} tragen und noch 100^{kg} Steigkraft haben kann? And.: $^{1}/_{6}\ d^{3}\pi \,.\, (s - s') - ad^{2}\pi - 1870\,000 = 100\,000$; woraus d ungefähr $= 18{,}7^{m}$. — A. 345. Wie groß ist die Steigkraft einer Greenière von 10^{m} Durchmesser, sp. G. des Gases $= 0{,}6$? Aufl.: 270^{kg}.

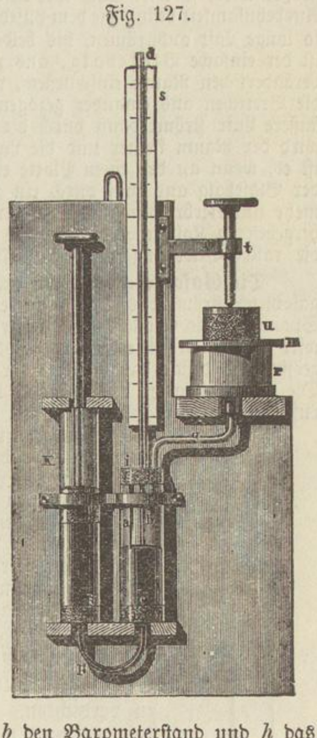
3. Anwendung der Ausdehnsamkeit und des Mariotte'schen Gesetzes.

204 **Der Heronsball** (Heron von Alexandrien 210 v. Chr.). Der Heronsball besteht aus einem theilweise mit Flüssigkeit gefüllten, luftdicht geschlossenen Gefäße, in welches von außen eine bis in die Flüssigkeit gehende Röhre hineinführt. Wird durch diese Röhre Luft eingeblasen, so steigt dieselbe aus der Flüssigkeit in den Luftraum des Gefäßes; hierdurch wird die Luft verdichtet und erhält nach dem Mariotte'schen Gesetze eine größere Spannung. Vermöge dieser Spannung übt die eingeschlossene Luft, wenn das Einblasen unterbrochen wird, einen stärkeren Druck auf das Wasser aus als die äußere Luft; daher muß das Wasser in der Röhre steigen und, wenn der Druck stark genug ist, aus der Röhre ausspritzen.

Der Heronsball findet Anwendung: 1. In der Feuerspritze; dieselbe besteht aus zwei Druckpumpen, welche das Wasser abwechselnd in einen Heronsball, Windkessel genannt, eintreiben, wodurch die Luft über dem Wasser immer mehr verdichtet wird und endlich einen so großen Druck ausübt, daß sie das Wasser aus der Röhre, die in den sogenannten Schwanenhals endet oder in einen Schlauch übergeht, haushoch emportreibt. 2. Zu Springbrunnen mit Windkessel, welche wie die Feuerspritze eingerichtet sind und auch zum Aufsteigen von Flüssigkeiten in Fabrikgebäuden benutzt werden. 3. Zu der Spritzflasche der Chemiker und Apotheker; dieselbe hat eine Einblase- und eine Spritzröhre, wodurch das Einblasen und Spritzen gleichzeitig und dauernd möglich wird. 4. Er erklärt die Geiser (mit Ausnahme des großen), intermittirende heiße Springbrunnen auf der Insel Island, in welchen das Wasser dann steigt, wenn sich durch den Einfluß vulkanischer Hitze Dampf genug über demselben gebildet hat. 5. Im Heronsbrunnen, einem Heronsball, dessen ausspritzendes Wasser in ein Becken fällt, welches durch eine Röhre mit einem zweiten geschlossenen Gefäße verbunden ist, so daß die in demselben verdichtete Luft durch eine zweite Röhre in den Luftraum des Heronsballes steigt und dadurch das Ausspritzen permanent macht.

Das Volumenometer (Kopp 1840). Dieser Apparat (Fig. 127) dient zum Be- 205
stimmen des Volumens kleiner, pulveriger, faseriger u. dergl. Körper. Man kennt das Volumen v der Luft, welche bei dem Barometerstande h das Gefäß r, die Röhre q und den Cylinder ii vollständig erfüllt, wobei das Quecksilber sich noch in dem Cylinder k befindet und blos bis an die Bodenöffnung des Cylinders ii reicht. Wird nun der Kolben in k niedergedrückt und steigt hierdurch das Quecksilber in ii bis an die Spitze des Platinstiftes a, so wird die Luft verdichtet bis zu dem Volumen v'. Ihre Spannung wächst hierdurch um einen Betrag, der durch die Höhe der Quecksilbersäule in der Barometerröhre cd gemessen wird und $^1/_n\, h$ sein möge. Folglich ist nach dem Mariotte'schen Gesetze $v : v' = (h + {}^1/_n\, h) : h$, woraus $v - v' = v / (n + 1)$. Bringt man nun den zu untersuchenden Körper, dessen Volumen $= x$ sei, in das Gefäß r und verfährt ganz in der eben beschriebenen Weise, so ist $v - x$ das anfängliche und $v' - x$ das spätere Volumen der eingeschlossenen Luft. Für das letztere Volumen aber wird das Quecksilber in der Barometerröhre an einem anderen Punkte stehen als bei dem ersten Versuche, weil zum Comprimiren der geringeren Luftmenge eine andere Kraft als bei dem ersten Versuche erforderlich ist; es sei der jetzige Zuwachs der Spannung $^1/_m\, h$, so ist $(v - x : (v - v') = (h + {}^1/_m\, h) : {}^1/_m h$. Substituirt man hierin den obigen Werth für $v - v'$, so ergibt sich das gesuchte Volumen $x = (n - m)\, v / (n + 1)$. Auch Regnault und noch früher Say haben Apparate zu demselben Zwecke construirt, Stereometer genannt, welche aber hinter Kopps Volumenometer zurückstehen. Der linke Theil des Apparates kann auch zur Messung des Luftdruckes benutzt werden und heißt in diesem Falle Differentialbarometer; hierbei muß die Verbindung mit r unterbrochen und i luftdicht geschlossen werden. Bezeichnen hier v und v' das Volumen der Luft im Cylinder vor und nach dem Niederschieben des Kolbens, b den Barometerstand und h das Steigen des Quecksilbers in der Röhre d, so ist $v : v' = (b + h) : b$, woraus man b berechnen kann $= v'h / (v - v')$. Da v und v' constant und bekannt sind, so hat man nur den bekannten Quotient $v' / (v - v')$ mit dem jeweiligen h zu multipliciren, um den Barometerstand zu finden. Dieses Barometer bedarf zwar für jede Beobachtung einer Verschiebung des Kolbens, ist aber sehr compendiös.

Fig. 127.



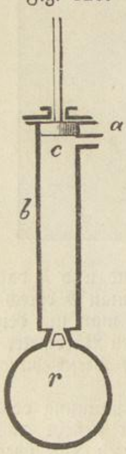
Das Manometer ($\mu\alpha\nu\acute{o}\varsigma$ = dünn) ist ein Apparat zum Messen der Spannung von 206
Luftarten, besonders von heißen Dämpfen. Das offene Quecksilberbarometer besteht aus einem Quecksilber enthaltenden Eisenkasten, in welchen eine Röhre die verdichteten Gase über das Quecksilber führt, während eine zweite gläserne Röhre in das Quecksilber taucht; die Gase treiben das Quecksilber in dieser Röhre 1.76, 2.76, 3.76^{cm} u. s. w. hoch, wenn die Spannung 2, 3, 4 u. s. w. Atmosphären beträgt; daher müssen offene Manometer

unhandlich hoch sein. Man hat deßhalb die Manometerröhre oben geschlossen; dann verdichtet sich über dem steigenden Quecksilber die Luft; es kann daher das Quecksilber nur so hoch steigen, daß das Gewicht seiner Säule und die Spannung der verdichteten Luft zusammen der zu messenden Spannung gleich sind; nach diesem Grundsatze ist die hinter der Röhre angebrachte Skale eingetheilt. Noch bequemer sind die Metallmanometer, die den Metallbarometern ähnlich sind. Das Röhrenmanometer von Schinz, gewohnlich nach Bourdon genannt, enthält wie das Metallic eine kreisförmig gebogene Röhre, deren eines Ende mit dem Dampfe communicirt, während das zweite, freie und geschlossene Ende auf einen Zeiger wirkt und seine durch den Dampfdruck erzeugte Bewegung demselben mittheilt. Bei dem Plattenmanometer von Schäffer und Budenberg wirkt der Dampf wie bei dem Holosteric auf eine cannelirte Platte, welche dadurch je nach dem Dampfdrucke eine mehr oder minder große Einbiegung erleidet, die auf einen Zeiger übertragen wird. Die einfachsten, jedoch nur für geringe Spannungen brauchbaren Manometer sind die doppelt gebogenen Sicherheitsröhren.

207 **Die Gebläse** sind Vorrichtungen zum Einblasen von Luft, gewöhnlich zu dem Zwecke der Verstärkung des Feuers. In irgend einem Raume wird die Luft verdichtet und dieser Raum dann durch eine Röhre mit dem Feuer verbunden, so daß die verdichtete Luft durch ihre Spannung in dasselbe strömt. Wenn nämlich die Spannung der eingeschlossenen Luft größer wird, so wird auch ihre Ausdehnsamkeit größer, während die äußere Luft die geringere Ausdehnsamkeit besitzt, die dem Luftdrucke entspricht; folglich muß aus dem Verdichtungsraume so lange Luft ausströmen, bis beiderseits die Spannung dieselbe ist. Das einfachste Gebläse ist der einfache Blasebalg, aus zwei Brettchen bestehend, die mit gefaltetem Leder einen veränderlichen Raum einschließen, von dessen schmalem Ende eine Röhre ausgeht. Werden die Brettchen aus einander gezogen, so wird der Raum größer und die Luft dünner; die äußere Luft strömt dann durch die Röhre ein. Werden die Platten zusammengedrückt, so wird der Raum kleiner und die Luft dichter; sie strömt dann durch die Röhre aus. Besser ist es, wenn an der einen Platte ein sich nach innen öffnendes Ventil angebracht ist. Besteht der Blasebalg aus zwei durch ein zweites Ventil verbundenen Theilen, so strömt die Luft mehr ununterbrochen aus. In dem Cylindergebläse wird die Luft durch einen hin- und hergehenden Kolben verdichtet und in dem Trommelgebläse und Ventilator durch die rasche Bewegung der Schaufeln eines in einem Gehäuse sich drehenden Schaufelrades.

Die Gasometer sind Vorrichtungen zum Aufsammeln von Gasen. Bei dem Glockengasometer strömt das Gas durch eine Röhre in eine schwimmende Glocke, hebt durch seine Spannung die Glocke immer mehr aus dem Wasser und schafft sich so selbst seinen Raum; wird der Hahn dieser Röhre geschlossen und der einer zweiten ins Freie führenden Röhre geöffnet, so drückt das Gewicht der Glocke das Gas zusammen und dieses muß ausströmen. Die Gefäßgasometer der Chemiker beruhen auf dem Auftriebe, auf dem Emporsteigen von Luft in Wasser.

Fig. 128.



208 **Das Athmen.** Bei dem Ausathmen werden die Rippen gesenkt und das Zwerchfell gehoben; dadurch wird der Brustkasten verengert und die Luft in den Lungen verdichtet, wonach dieselbe ins Freie strömen muß. Das Einathmen geschieht durch den Luftdruck; das Zwerchfell wird gesenkt, die Rippen werden gehoben, dadurch wird der Brustkorb erweitert und die Luft in den Lungen verdünnt; die äußere Luft strömt durch ihre vom Luftdruck erzeugte Spannung in die Lungen. Durch sehr starke Erweiterung kann man viel Luft einnehmen und dieselbe dann durch allmäliges Verengern langsam ausströmen lassen, worauf das Blasen z. B. mit dem Löthrohre beruht.

209 **Die Compressionspumpe** (Fig. 128) hat den Zweck, in einem beliebigen Raume *r* ein Gas, das durch die Röhre *a* herbeiströmt, zu verdichten. Sie besteht aus einem Stiefel *b* mit einem Kolben *c*; das Einmündungsrohr *a* muß eine solche Lage haben, daß es beim Herabgehen des Kolbens sogleich von dem Hauptraume des Stiefels abgeschlossen wird. Hierdurch verdichtet sich das eingeströmte Gas oder die Luft, drückt das nach außen sich öffnende Ventil auf und strömt in den Raum *r*. Bei dem Rückgange des Kolbens wird die Luft über dem Ventil dünner, daher wird das Ventil durch die verdichtete Luft in *r* geschlossen und läßt das eingetretene Gas nicht wieder zurücktreten. Man wendet die Compressionspumpe an bei Taucherglocken, bei Aquarien, bei Windbüchsen, an welchen

das durch eine Feder angedrückte Ventil für einen Augenblick durch das Anziehen des Hahnes geöffnet wird, besonders aber zu Versuchen über die Condensation der Gase. Man bedient sich hierzu vorwiegend des Apparates von Natterer (1840), an welchem der Raum *r* eine sehr dickwandige Flasche von Schmiedeeisen ist und der Kolben durch ein Kurbelrad hin und hergeführt wird. Mit diesem Apparat kann man die meisten Gase flüssig machen, Salzsäure bei 25, Stickoxydul bei 31, Kohlendioxyd bei 37, Aethylen C_2H_4 bei 43 Atmosphären Druck und einer Temperatur von etwa 0^0 C, die durch um die Flasche gelegtes Eis herbeigeführt wird.

Eine sehr nützliche Anwendung hat die Compressionspumpe an den großen Gebirgstunnels des Mont-Cenis und des St. Gotthardt gefunden; man setzt nämlich bei diesen Werken die Gesteinsbohrer nicht mittels Dampfmaschinen, sondern mittels Luftmaschinen in Thätigkeit, weil jene Luft verzehren und Rauch erzeugen, diese aber gleichzeitig zur Lufterneuerung dienen können. Die Luftmaschinen haben ganz dieselbe Einrichtung wie die Dampfmaschinen, nur werden sie statt des Dampfes mit comprimirter Luft von 5 Atm. Spannung getrieben. Die Compressionspumpe ist in Fig. 129 schematisch dargestellt; *a* ist die Welle, die von einem Wasserrad umgedreht wird, und welche mittels Kurbel *b* und Pläuelstange *c* den Kolben *d* im Stiefel hin- und herbewegt, wodurch die Luft in den beiden Cylindern *e* und *f*, in ersterem beim Schub, in letzterem beim Hub verdichtet wird. Geht der Kolben nach rechts, so schließt sich in *e* das Druckventil *h*, während das Saugventil *g* sich öffnet und Luft aus der Atmosphäre einläßt; dagegen schließt sich in *f* das Saugventil *g*, während sich das Druckventil *h* öffnet und die verdichtete Luft durch das Rohr *i* in das Gefäß *k* führt, wo sie unter dem Drucke einer 50^m hohen Wassersäule auf ihrer Spannung von 5^{at} erhalten wird. Durch eine Röhrenleitung *l* strömt nun diese Luft in den Tunnel bis zu den Bohrwagen, wo sie die genannten Luftmaschinen treibt; diese haben nicht nur die Bohrwagen vorwärts und zurück zu bewegen, sondern auch die Bohrer in das Gestein zu stoßen, darin zu drehen und vorwärts zu schieben, wenn das Bohrloch tiefer geworden ist. In Fig. 130 ist der wesentliche Theil einer Bohrstoßmaschine skizzirt, woraus zu erkennen ist, wie der Bohrer rasch vorangestoßen und langsam zurückgeführt wird, und wie die verdichtete Luft selbst den Schieber bewegt. Eine Luftmaschine eingerichtet wie eine Dampfmaschine versetzt die Welle *a* in Umdrehung, welche außer anderen Bewegungen die Drehung des schiefen Rades *b* zu vollbringen hat; gegen dasselbe drückt die in dem Schiebkasten *c* immer vorhandene verdichtete Luft die Schieberstange *d*, so daß der Schieber *s* in der gezeichneten Stellung die äußerste Lage links einnimmt, und die verdichtete Luft durch den Kanal *e* hinter den Kolben *g* strömen und durch ihren Druck auf dessen große Hinterfläche voranstoßen kann. Es schadet nichts, daß der Raum vor dem Kolben mit dem Schiebkasten in freier Verbindung steht und demnach ebenfalls mit verdichteter Luft erfüllt ist; denn diese kann nur auf die kleine ringförmige Vorderfläche wirken. Der geringe Druck auf dieselbe reicht jedoch zur langsamen Rückbewegung des Kolbens aus; denn gleichzeitig mit dem Vorangange desselben hat sich das Rad *b* halb gedreht, die Luft hat den Schieber in die äußerste Stellung rechts geführt und dadurch den Kanal *e* geschlossen, während der Hohlraum des Schiebers mit dem in die freie Luft gehenden Hohl-

Fig. 129.

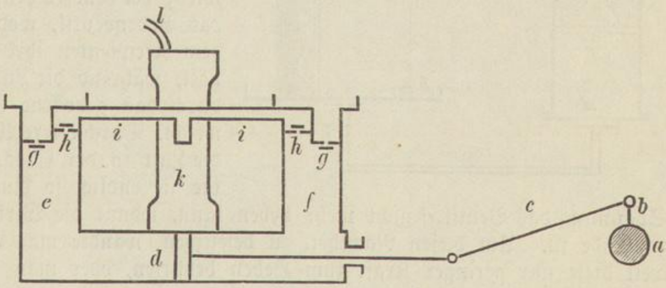
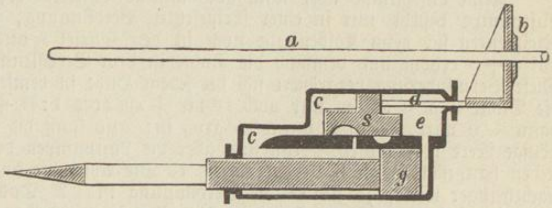


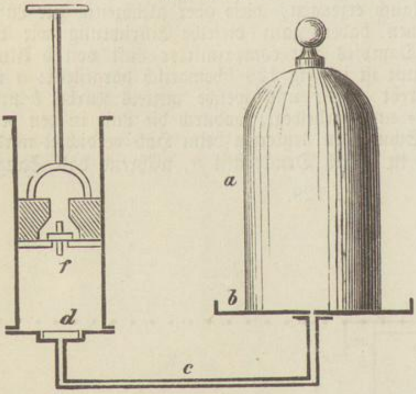
Fig. 130.



raume der Cylinderwand communicirt; und in den Hohlraum des Schiebers kann jetzt, da der Kolben seine äußerste Stellung links hat, die Luft hinter dem Kolben strömen, so daß hinter dem Kolben nur 1^{at} Druck vorhanden ist; folglich kann jetzt der Druck der verdichteten Luft vor dem Kolben, da er nur auf die kleine Ringfläche wirkt, den Kolben langsam zurücktreiben. Die übrigen nicht weniger interessanten Theile der Tunnelmaschine müssen wir übergehen.

210 **Die Luftpumpe** (Otto von Guericke, Bürgermeister von Magdeburg, ca 1650) hat den Zweck, Räume luftleer, oder besser gesagt, luftverdünnt zu pumpen; am häufigsten benutzt man Glasglocken *a* (Fig. 131), Recipienten genannt, welche mit dem abgeschliffenen und mit Schmiere versehenen Rande auf den ebenen und abgeschliffenen Teller *b* gesetzt werden, wodurch sie mittels der Röhre *c* mit der eigentlichen Luftpumpe in Verbindung stehen. Diese hat dieselbe Einrichtung und dieselbe Wirkungsweise wie die Saugpumpe. Bei dem Kolbenhube schließt sich das Kolbenventil *f*, das Bodenventil *d* hebt sich, wodurch die Luft in dem Recipienten verdünnt wird; bei dem Kolbenschube schließt sich das Bodenventil, wodurch die Luft in dem Recipienten ihre Verdünnung behält, während die Luft in dem Stiefel durch das gehobene Kolbenventil entweicht. Durch öftere Wiederholung wird die Luft in der Glocke immer dünner, bis sie endlich so dünn ist, daß ihre Spannung das Ventil *d* nicht mehr heben kann, womit die Wirksamkeit derselben zu Ende ist. Um diesen Nachtheil zu beseitigen, wandte man Blasenventile an, weil diese nur geringer Kraft zum Heben bedürfen, oder man befestigte das an der Seite des Bodens sitzende Kegelventil an einer durch den Kolben gehenden Stange, welche von dem Kolben mit nach oben genommen wird, bis ein hoch oben befindlicher Ansatz der Stange gegen den Cylinderdeckel stößt; durch das Heben der Stange wird das Ventil geöffnet und beim Kolbenschube durch die mitgenommene Stange wieder geschlossen. Auch hat man Hähne statt der Ventile, welche indessen von der Hand oder durch einen eigenen Mechanismus gedreht werden müssen.

Fig. 131.



Keine Luftpumpe aber kann vollkommene Luftleere erzeugen; denn die Wirkung der Luftpumpe besteht nur in einer fortgesetzten Verdünnung, indem das Luftvolumen r des Recipienten sich beim Kolbenhube noch in den Stiefel s ausdehnt, so daß das Volumen auf $r+s$ erhöht und demnach die Dichte in dem Verhältnisse $r:(r+s)$ vermindert wird. Diese Verminderung vergrößert sich bei jedem Hube in demselben Verhältnisse; also beträgt die Dichte nach n Hüben nur noch $r^n:(r+s)^n$ oder $1:(1+s/r)^n$, welcher Ausdruck nur dann $=0$ wird, wenn n unendlich groß ist; also kann die vollkommenste Pumpe niemals völlige Leere hervorrufen. Nun sind aber die Luftpumpen durchaus nicht vollkommen; sie leiden hauptsächlich an 3 Uebelständen 1. Die Abschlüsse sind nicht hermetisch, was um so nachtheiliger wirkt, je stärker die Verdünnung ist. 2. Das Schmiermittel absorbirt Luft und diese strömt bei dem Hube in den Verdünnungsraum. Deleuil läßt deßhalb seinen Kolben die Cylinderwand nicht berühren, so daß sich zwischen beiden eine dünne Luftschicht befindet, die durch Adhäsion so fest haftet, daß sie sich nicht in den Verdünnungsraum ergießt; diese Maschine bedarf auch weniger Kraft und beseitigt den Nachtheil des Eintrocknens der Schmiere, des Verstopfens der Röhren und Ventile. Auf der großen Ausstellung von 1867 war eine große Deleuil'sche Pumpe, welche einen Raum von 250 Liter Inhalt in $^1/_4$ Stunde bis auf 10^{mm} Druck verdünnte, während kleinere Räume auf 1^{mm} herabgetrieben wurden. 3. Der schädliche Raum. Der Kolben schließt nie absolut an den Stiefelboden; auch hebt sich beim Schube sein Ventil; in der tiefsten Stellung des Kolbens ist also zwischen den beiden Ventilen ein Raum übrig, der mit äußerer Luft erfüllt ist. Dieser

Raum wird der schädliche Raum (v) genannt. Denn beim Hube dehnt sich diese Luft in den Stiefel aus und verdünnt sich hier im Verhältnisse $v:s$. Hat die Luft in dem Recipienten diesen Grad der Verdünnung erreicht, so hat weiteres Pumpen keinen Erfolg. Ist in Pumpen nicht für Verminderung dieses Nachtheils gesorgt, so wird man unter 3mm Spannung nicht gelangen. Staudinger in Gießen schließt den Stiefel oben und bringt an dem Deckel ein Ventil an, so daß über dem Kolben auch nur verdünnte Luft vorhanden ist, und der schädliche Raum sich daher nur mit solcher füllen kann. In den zweistiefeligen Ventilluftpumpen ist durch Babinets Hahn etwas abgeholfen, weil dieser bei dem Schube den schädlichen Raum mit dem anderen Stiefel verbindet, in welchem gerade der Hub geschieht, so daß der schädliche Raum nur verdünnte Luft enthält. In den zweistiefeligen Hahnluftpumpen verfolgt der Graßmann'sche Hahn denselben Zweck. Hierdurch sind Verdünnungen bis zu 1mm Spannung erreichbar. Es gibt auch einstiefelige doppeltwirkende Luftpumpen (von Bianchi und Staudinger), in welchen also der Kolben nicht blos beim Hube, sondern auch beim Schube Luft saugt. — Der Grad der Verdünnung wird gemessen durch die B a r o m e t e r p r o b e, ein nur 20cm hohes Barometer, welches auf die Verbindungsröhre zwischen Stiefel und Teller aufgeschraubt werden kann; das Quecksilber in demselben sinkt erst, wenn die Verdünnung auf 1/4 gebracht ist. Die besten Luftpumpen geben nur eine Verdünnung bis zu 1—2mm Quecksilberdruck; unsere von Staudingers Nachfolger, v. Gehren, bezogene neue Luftpumpe hielt sogar die Spannung vom 1mm acht Tage lang; doch kann nach G.'s Aussage diese Güte nur durch Weglassung der Versuche mit Aether u. drgl. erhalten bleiben, muß also die erreichte Verdünnung höchstens als 760fach bezeichnet werden. Weit überboten wird diese Leistung von den Quecksilberluftpumpen; schon mit Geißlers ältester Construction (200.) war die Verdünnung eine 7000fache, die neueren Constructionen derselben erreichen jedoch eine 90 000fache Verdünnung. Geißlers Pumpe ist eigentlich (200.) ein oft wiederholter Torricelli'scher Versuch, ein drehbares Barometer. Töpler (1862—77) erreichte durch Combination von drei Barometern das Ideal, ohne Hähne und Ventile eine 80 millionfache Verdünnung herzustellen. Sprengels Luftsauger (214.), der auf der saugenden Wirkung von Quecksilberstrahlen beruht, ließ gleich anfänglich eine 17 millionfache Verdünnung zu; Giminghams Verbesserungen (1887) mit drei Fallröhren trieben dieselbe sogar auf 100 millionfache Verdünnung. Für rasche Wirkung im Laboratorium genügt Bunsens Wasserluftpumpe (214.), die jedoch nur die Spannung des der herrschenden Temperatur entsprechenden Wasserdampfes erreicht.

Versuche mit der Luftpumpe. Den Luftdruck zeigen folgende Versuche: 1. Das Festhaften des Recipienten. 2. Das feste Zusammenhalten der Magdeburger Halbkugeln. 211
3. Das Sprengen einer Blase über einem leergepumpten Gefäße; auch der Seitendruck der Luft und der Druck nach oben sind durch einen ähnlichen Versuch zu zeigen. 4. Der Springbrunnen im luftleeren Raume. 5. Der Quecksilber-Regen. 6. Das Barometer unter einem Recipienten. — Die Ausdehnsamkeit der Luft zeigen: 7. Das Anschwellen und Springen einer Blase unter dem Recipienten. 8. Das Schäumen von Bier, das Aufsteigen von Luftblasen in Wasser, das Umgeben eines Stückes in Wasser liegenden Holzes mit Bläschen. 9. Das Glattwerden eines runzeligen Apfels, das Austreten des Eiweißes aus einer Oeffnung in der Schale. 10. Ein Heronsball spritzt unter der Glocke; stellt man aber seine Spitze in Wasser, so tritt die Luft in Blasen aus, und die Flüssigkeit steigt nach dem Zulassen von Luft in den Ball. 11. Wasser steigt aus einem Gefäße in das andere, wenn dieselben durch ein Knierohr verbunden sind, welches luftdicht in das eine Gefäß geht. — Andere interessante Versuche sind: 12. Das Kochen von warmem Wasser unter der Glocke. 13. Das Fallen von Körpern in einer luftleeren Röhre. 14. Das Verlöschen brennender Körper. 15. Das Ersticken kleiner Thiere. 16. Das Nichtentzünden von Pulver durch den Funken. 17. Die schwache Fortpflanzung des Schalles in verdünnter Luft. 18. Das Dasymeter. 19. Das Gefrieren von Wasser durch Aether oder Ammoniak.

So zahlreich die Anwendungen der Luftpumpe in der Physik und Chemie sind, so selten sind sie im Leben. A t m o s p h ä r i s c h e E i s e n b a h n e n werden wohl noch zu Beförderungen von Briefen und Packeten benutzt, z. B. in London zur raschen Verbindung der Filialposten mit der Hauptpost, haben aber wenig Ausdehnung gefunden; auch in den Zuckerfabriken ist die Luftpumpe nur noch selten in Verwendung; so bleibt nur ihre Verwendung bei dem Imprägniren von Körpern mit Farb- und Gerbstoffen, beim Befeuchten und Trocknen in Fabriken u. dergl.

4. Bewegung der Luftarten.

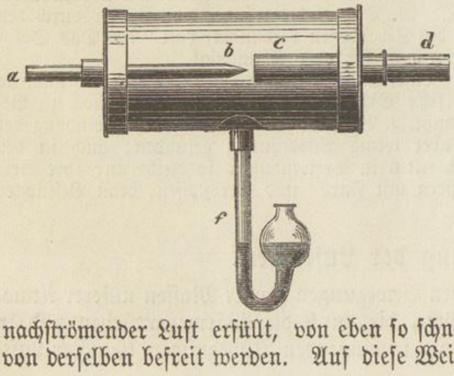
Die fortschreitenden und drehenden Bewegungen großer Massen unserer Atmosphäre bilden die Winde und Luftströme, die durch die Wärme entstehen und in der Meteorologie betrachtet werden; die schwingenden Bewegungen kleinerer Luftmengen bilden den Schall und werden in der Akustik betrachtet; die Bewegung der einzelnen Luftmoleküle bildet die Luftwärme und gehört daher der Lehre von der Wärme an; diese Molekularbewegungen der Luftarten werden hier nur insofern in's Auge gefaßt, als sie Wirkungen von Luftarten auf feste, flüssige oder andere luftförmige Körper hervorbringen. Außer diesen Molekularwirkungen der Luftarten bleiben hier noch einige specielle Bewegungen kleinerer Luftmengen übrig, das Aufsteigen von Luft in Flüssigkeiten, dann umgekehrt das Mitreißen von Luft durch Ströme flüssiger und luftartiger Körper, und endlich das Ausfließen von Luft aus Gefäßen.

212 **Die Luftblasen.** Die Luftblasen sind Gasmengen, die in Flüssigkeiten vermöge des Auftriebes in die Höhe steigen. Die Spannung einer solchen, frei in einer Flüssigkeit schwebenden Gasmenge muß gleich sein der Spannung der äußeren Luft vermehrt um das Gewicht der Flüssigkeitssäule über der Gasmenge und um die Oberflächenspannung der Flüssigkeitshaut rings um die Gasmenge. Das erste dieser 3 Glieder ist in allen Fällen, das zweite bei kleinen Gasmengen ringsum gleich groß; folglich muß auch, weil die Spannung der Gasmenge nach allen Richtungen dieselbe ist, die Oberflächenspannung ringsum gleich groß sein; dies ist aber nach 170. nur der Fall, wenn die Krümmung ringsum dieselbe ist, d. h. wenn die Gasmenge Kugelform besitzt. Die Luftblasen sind also kugelförmig.

Diese Form ist um so genauer, je kleiner sie sind. Bei großen Blasen ist der Druck der Flüssigkeit von unten her größer als von oben; folglich muß, damit die Gesammtwirkung von unten dieselbe sei, die Oberflächenspannung unten kleiner werden, d. h. die Krümmung muß unten schwächer als oben sein, wodurch die Kugelblase unten etwas abgeplattet erscheint. Besonders deutlich tritt dies an ruhig schwebenden Kugeln, z. B. an dem Plateau'schen Tropfen hervor; an steigenden Blasen erfährt die obere Seite einen Widerstand, wodurch auch dort die Form geändert werden kann; dieser Widerstand wächst mit der Dichte der Flüssigkeit und mit der Leichtigkeit der Luftart, so daß eine Blase in Quecksilber sogar oben schwächer wie unten gekrümmt ist. Wird aber der stärkere Druck von unten noch unterstützt durch die Adhäsion einer festen Wand, wie bei dem Aufsteigen von Blasen in Glasröhren, so nimmt nach Melde (1865) die Blase gar Glockenform an; die Basis dieser Glocke zeigt mehrere Ringe, weil die Glocke sich immer neu bildet, und daher immer mehrere Grundflächen von Glocken wegen ihrer weniger leichten Auflöslichkeit übereinander sitzen. Nach Guthries Untersuchungen (1865) wächst die Größe der Blasen unter übrigens gleichen Umständen mit der Dichte der Flüssigkeit, eigentlich aber mit der Steifigkeit derselben, welche bei dichteren Flüssigkeiten größer wird, während die Festigkeit einer Flüssigkeit die Größe der Blasen zu vermindern strebt. — An eingetauchtern Körpern, sowie an Gefäßwänden haften kleine Bläschen, weil von der Berührungsstelle aus kein hydrostatischer Druck stattfindet, also der auf die entgegengesetzte Stelle nicht aufgehoben ist und daher das kleine Kügelchen, das durch seine große Oberflächenspannung seine Stabilität erhält, anpreßt.

213 **Das Mitreißen von Luft durch Flüssigkeitstrahlen.** Wenn ein schnell dahinschießender Strahl einer Flüssigkeit oder auch einer Luftart durch Luft geht, so reißt er die ringsum adhärirende Luft mit sich fort; in den verdünnten Raum strömt neue Luft mit bedeutender Geschwindigkeit, kommt dadurch auch wieder mit dem Strahle in Berührung und wird von demselben ebenfalls fortgerissen; in manchen Fällen, besonders wenn der Strahl durch dünne Röhren geht, mögen einzelne Theile des Strahles wie Kolben die Luft vor sich hertreiben und dadurch luftleere Räume hinter sich erzeugen, die von schnell nachströmender Luft erfüllt, von eben so schnell folgenden flüssigen Kölbchen wieder von derselben befreit werden. Auf diese Weise entsteht ein fortwährendes Strömen

Fig. 132.



von Luft rings um den Strahl herum in der Richtung desselben und dadurch rings um den Strahl eine Luftverdünnung, welche wieder ein dauerndes Zuströmen von Luft zur Folge hat. Am deutlichsten läßt sich diese Erscheinung zeigen mit dem Apparat von Buff, Fig. 132. Bläst man durch *ab* einen Luftstrom, so entsteht bei *cb* eine Luftverdünnung, welche durch Steigen des Quecksilbers bei *f* ersichtlich ist. Beiläufig gesagt, wenn man bei *d* einbläst, so entsteht bei *bc* eine Luftverdichtung, angezeigt durch Fallen des Quecksilbers bei *f*.

Durch die saugende Wirkung des Strahles erklärt sich die zuerst von Clement und Desormes (1826) beobachtete Erscheinung, daß eine leichte Scheibe einem Luftstrahl entgegen gehen kann. Bläst man mittels des Rohres *mn* (Fig. 133) durch die Scheibe *vz* gegen die leichte Papierscheibe *st*, die locker zwischen einigen Stiften schwebt, so geht dieselbe nach *vz* hin und klebt beinahe auf dieser Scheibe.

Fig. 133.

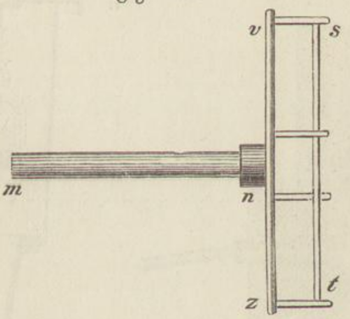
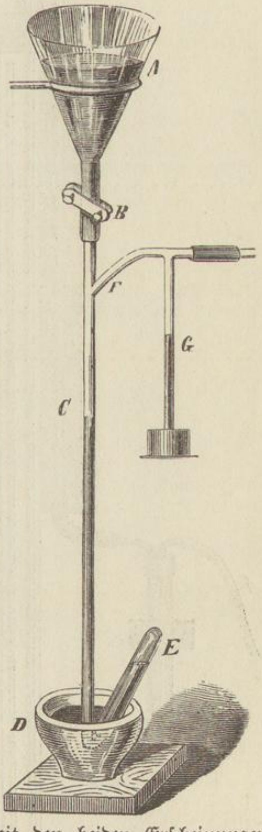


Fig. 134.



Diese saugende Wirkung von Strahlen ist uns schon begegnet bei der Ausflußmenge eines sich erweiternden Ausflußrohres. Sie hat indeß noch mehrere nützliche Verwendungen gefunden; schon das alte Wassertrommelgebläse beruht auf derselben: herabstürzendes Wasser reißt Luft mit in seinen Kanal, welche durch ein seitliches Rohr in das Schmiedefeuer strömt. Durch das Locomotivenblasrohr geht ein Dampfstrahl in den Kamin der Locomotive, reißt dort die Luft fort, so daß neue Luft durch den Herd nachströmen muß, wodurch der Zug erhalten bleibt. Giffards Injector oder Dampfstrahlpumpe (1860) pumpt durch einen Dampfstrahl Wasser in einen Dampfkessel. Im gewöhnlichen Leben am wichtigsten ist der Inhalationsapparat geworden, in welchem ein Dampfstrahl gleichzeitig ansaugt und zerstäubt. Physikalisch am wichtigsten ist Sprengels Luftsauger (1865), Fig. 134. Durch den Quetschhahn *B* läßt man Quecksilber das Rohr *C* herabfallen; hierdurch wird irgend ein Gas aus einem mit dem Arme *F* in Verbindung stehenden Körper ausgesaugt und zu näherer Untersuchung in den Cylinder *E* geleitet. Graham bediente sich dieses Apparates bei seinen Untersuchungen über Absorption und Diffusion; für die Crookes'schen Röhren und andere physikalische Untersuchungen hat er in mannichfaltigen Constructionen zahlreiche Anwendung gefunden. — Magnus erklärte 1853 mit den beiden Erscheinungen des Apparates (Fig. 132) die seitliche Ablenkung der Geschosse: die Luft um ein Geschoß herum sei ebenfalls in Rotation und stoße auf der einen Seite durch Voranbewegung auf die entgegenkommende Luft, während sie auf der anderen Seite derselben ausweiche; so geschehe auf der ersten Seite eine Luftverdichtung und auf der zweiten eine Verdünnung, folglich müsse das Geschoß allmälig nach dieser Seite abgelenkt werden. — Auf die saugende Wirkung von Luftstrahlen gründete ich 1855 einen Vorschlag zur Lenkung der Luftschiffe. — Eine neue wichtige Anwendung des saugenden Strahles ist das Schnellfilter von Bunsen (1868). Der Hauptbestandtheil ist Bunsens Wasserluftpumpe, Fig. 135. Diese besteht aus einem weitem Glasgefäße *b*, in welches das Luftrohr *d* oben luftdicht eingeschmolzen und fast bis zum unteren Ende herabgeführt ist, während das Glasgefäß unten in das Wasserrohr *c* übergeht. Wird nun aus der Wasserleitung *l* mittels des Quetschhahnes *a* Wasser in das Gefäß *b* hineingelassen, und stürzt dasselbe durch das Wasserrohr mehr als

10m tief hinab, so reißt dieses Wasser die Luft aus dem Luftrohre *def* und den Gefäßen, die noch mit *f* in Verbindung stehen und entleert dieselben so vollständig, daß nur noch die Spannung des bei der gerade herrschenden Temperatur möglichen Wasserdampfes von 7—10mm übrig bleibt, wie man aus dem von *e* ausgehenden offenen Quecksilbermanometer zu erkennen vermag.

Fig. 135.

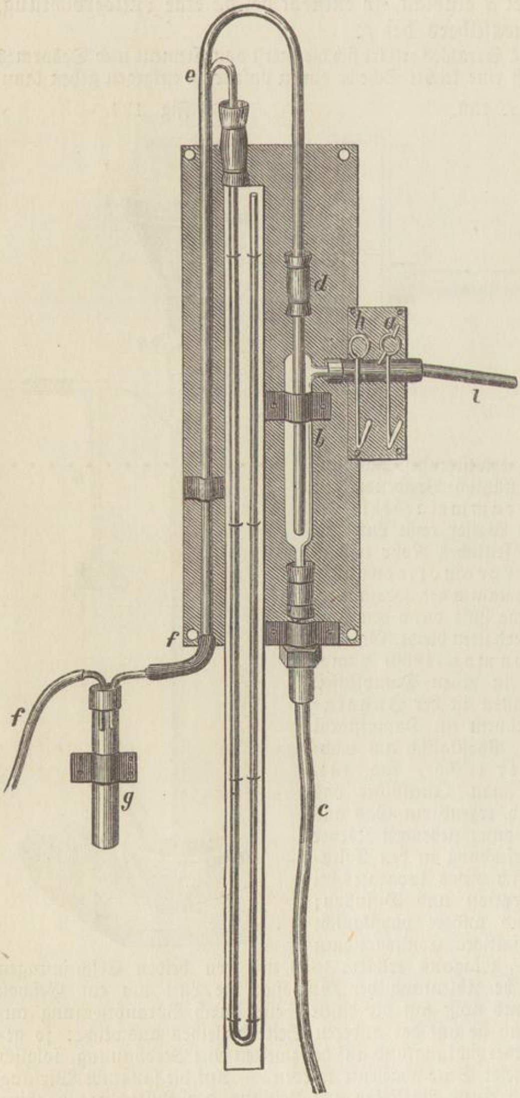
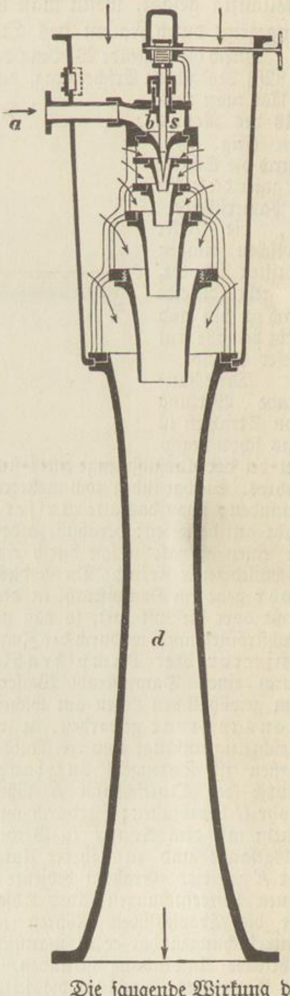
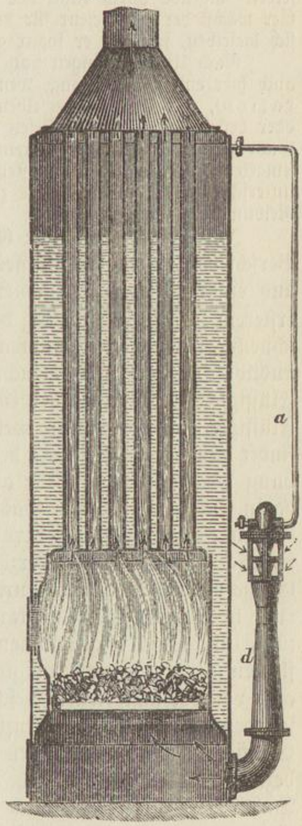


Fig. 136.



Die saugende Wirkung der Dampfstrahlen hat in den letzten Jahren so zahlreiche neue Anwendungen erfahren, daß es jetzt Fabriken von Dampfstrahlapparaten gibt; die größte Ausbreitung fand Körtings Dampfstrahl-Unterwind-Gebläse, das jedoch wegen der Einführung von Wasserdampf in die Feuerstätten nicht in allen Fällen anwendbar ist. Die innere Einrichtung desselben ist aus Fig. 136, seine Verbindung z. B. mit dem Heizraume eines Röhrenkessels aus Fig. 137 zu ersehen. Durch den Dampfkanal *a* strömt der Dampf in ein nach unten sich verengerndes Gefäß *b*. Die untere Mündung desselben, die sogenannte Dampfdüse, kann durch die Regulirspindel *s* mehr oder weniger geöffnet werden, indem man mittels des Handrädchens c diese Spindel mehr oder weniger heben kann. Es entsteht hierdurch ein zwischen der Spindel und der Dampfdüse freibleibender Ring, durch welchen der Dampfstrahl in das folgende, etwas weitere Gehäuse, schießt und dadurch Luft mit sich fortreißt, die, wie die Pfeile andeuten, durch seitliche Oeffnungen des Gehäuses herbeiströmt. Dabei erhält diese Luft dieselbe Geschwindigkeit, welche der Dampf nach seiner Expansion in dieser Zwischendüse besitzt, und diese Geschwindigkeit der Luft und des Dampfes wird benutzt, um beim Ueberspringen in die zweite Zwischendüse wieder Luft anzusaugen u. s. w., bis endlich im engsten Theile des Druckconus d die Geschwindigkeit des Gemisches von Dampf und Luft nur noch so groß ist, daß sie dem unter dem Roste zu erzeugenden Drucke entspricht. Mit Hilfe der durch das Handrädchen c zu bewegenden Dampfregulirspindel s hat man es ganz in seiner Gewalt, die Luftmenge, welche angesogen und unter den Rost gepreßt werden soll, zu reguliren.— Die Fabrik von Gebrüder Körting in Hannover baut außer den Dampfstrahlgebläsen auch Dampfstrahlinjectoren zum Speisen der Dampfkessel mit vorgewärmtem Wasser, Dampfstrahlleckapparate, um Schiffslecke unschädlich zu machen, Elevatoren für Korn, Syrup, Wasser u. s. w., Exhaustoren, Scrubbers und Regenerirgebläse für Gasfabriken, Dampfstrahlventilatoren für Trockenräume und Waggons, Dampfstrahlkohlensäuregebläse u. s. w. für Zuckerfabriken, Zerstäubungs- und Diffusions-Injectoren für chemische Fabriken und zahlreiche andere Strahlapparate.

Fig. 137.



Ausfluß der Gase. Ein Gas kann nur dann aus einem Raume in einen anderen fließen, wenn es in dem ersten eine höhere Spannung hat als in dem zweiten, wenn also z. B. ein lufterfüllter Raum mit einem leeren Raume verbunden wird. Die Geschwindigkeit des Ausflusses wird dann durch die bekannte Formel $v = \sqrt{(2gh)}$ berechnet, worin h die Druckhöhe ist, unter welcher das Gas ausströmt, ausgedrückt in der Höhe einer Gassäule von gleicher Dichte, wie das ausströmende Gas sie besitzt. Für Luft, die in den leeren Raum strömt, wird die Druckhöhe bekanntlich gemessen durch eine Quecksilbersäule von 76^{cm} Höhe, also durch eine Luftsäule von $76.10500^{cm} = 7980^{m}$ Höhe, weil die Luft von gewöhnlicher Dichte 10500 mal leichter als Quecksilber ist. Folglich ist die Geschwindigkeit des Ausflusses $= \sqrt{(2.10.7980)} = 400^{m}$, was an die Clausius'schen Angaben über die Geschwindigkeit der Luftmoleküle erinnert. Diese Geschwindigkeit des Ausströmens von Luft in einen leeren Raum gilt aber nur für den ersten Moment, weil nach diesem sich schon Luft in diesem Raume befindet, die einen immer größeren Gegendruck ausübt, so daß die Geschwindigkeit immer kleiner und endlich bei beiderseits gleichem Drucke gleich Null wird. Kennt man die dem äußeren Drucke entsprechende Luftsäulenhöhe h_1, so kann man die Geschwindigkeit nach der Fl. $v = \sqrt{[2g(h-h_1)]}$ berechnen. Für leichtere Gase als Luft muß in der Fl. eine größere Höhe, für schwerere eine kleinere gesetzt werden, und zwar muß diese Höhe der Dichte umgekehrt proportional sein; folglich *verhalten sich die Ausflußgeschwindigkeiten verschiedener Gase umgekehrt wie die Wurzeln aus ihren Dichtigkeiten.* Hieraus folgt als einfache Umkehrung der Satz, daß die Dichten zweier Gase sich umgekehrt wie die Quadrate ihrer Ausflußgeschwindigkeiten verhalten. Auf diesen Satz hat Bunsen 1857 in seinen „Gasometrischen Metho- 214 den" ein interessantes Verfahren zur Bestimmung der Dichte von Gasen und Dämpfen gegründet.

Die Ausflußmenge in einer Sec. ist auch hier gleich dem Product des Oeffnungsquerschnittes mit der Geschw. $= qv$. Doch findet auch hier eine Contraction statt. Für eine dünne Wand ist der Contractionscoëfficient zwischen 0,5 und 0,6; Buff gibt für denselben folgende durch zahlreiche Versuche bewährte Formel $v = 0{,}626\,(1 - 0{,}789\,\sqrt{h})$; auch hier wächst der Coëfficient für dicke Wände, cylindrische und conische Ansatzröhren; erweitern sich dieselben, so wird er sogar größer als 1, gleich 1,12.

Nach Untersuchungen von O. E. Meyer (1866 und 1873) erfahren die Ausflußgesetze auch hier eine Veränderung, wenn der Ausfluß durch capillare Röhren geschieht (Transpiration), und zwar in derselben Weise wie bei den Flüssigkeiten, so daß auch hier Poiseuilles oder besser gesagt Hagens Gesetz gilt: das durch eine Capillarröhre in 1 Min. ausströmende Gasvolumen ist der 4ten Potenz des Halbmessers der Röhre direct und der Länge derselben umgekehrt proportional und steht im geraden Verhältnisse zur ersten Potenz des Druckunterschiedes. Meyer gelangte zur Auffindung dieses Gesetzes durch seine Versuche über die Reibung der Gase.

215 **Innere Reibung der Gase** (Maxwell 1860, O. E. Meyer 1865—73). Die Verschiedenheit des Ausflusses von Gasen aus Capillarröhren und des Ausflusses aus einer Oeffnung in einer dünnen Wand ist nur dadurch erklärlich, daß in ersterem Falle die Reibung des Gases an den Wänden der Röhre und der inneren schneller strömenden Schichten an den äußeren langsamer bewegten einen Einfluß ausübt. Nach den Untersuchungen von Meyer haftet nun sowohl bei benetzenden Flüssigkeiten als auch bei Gasen an den Gefäßwänden eine dünne Schicht von Flüssigkeit oder Gas, an welcher sich die folgende bewegte Schicht reibt; nach ihm findet daher keine Reibung der Gase an den Wänden, sondern nur eine innere Reibung der Gase statt. Die allgemeinste und einfachste Erscheinung derselben besteht darin, daß zwei bewegte Gasschichten von verschiedener Geschwindigkeit sich in einer ebenen Trennungsfläche berühren; die Reibung äußert sich dann dadurch, daß die schneller bewegte Schicht verzögert, die langsamer bewegte beschleunigt wird, und die Größe der Reibung wird durch den Druck gemessen, der für sich allein jene Verzögerung hervorzubringen imStande ist. Die Reibung ist offenbar, wie auch schon Newton für Flüssigkeiten angenommen hat, direct proportional der Größe der Berührungsflächen und der Geschwindigkeitsdifferenz der beiden Schichten; außerdem hängt sie auch von der materiellen Beschaffenheit der Gase ab, ist für verschiedene Gase verschieden groß. Dieser Einfluß der materiellen Beschaffenheit wird durch einen Coëfficient ausgedrückt, den man die Reibungsconstante nennt und mit η bezeichnet: dieselbe ist nach Maxwells und Meyers Theorie unabhängig von der Dichte des Gases, also auch von dem Drucke, unter welchem dasselbe steht, hängt aber von der Temperatur desselben ab, und zwar ist sie der Quadratwurzel aus der absoluten Temperatur direct proportional; endlich ist sie für verschiedene Gase verschieden. Sie bedeutet die verzögernde Kraft, welche eine Schicht von 1^{qcm} Oberfläche ausübt, wenn die Geschwindigkeit derselben um 1^{cm} geringer ist, als die einer um 1^{cm} entfernten Schicht. Meyer bestimmte dieselbe für die Luft aus Transpirationsversuchen Grahams (1846), aus horizontalen Schwingungen horizontal aufgehängter Platten, wie auch Maxwell (1866) gethan hatte, aus eigenen und Bessel'schen Pendelversuchen, endlich aus zahlreichen Ausflußbeobachtungen, und fand sie für Luft $= 0{,}00019\ gr\,cm^{-1}\,sec^{-1}$, für Sauerstoff $= 0{,}00021$, für Wasserstoff, wo sie den kleinsten Werth besitzt, $= 0{,}00009$. Diese Zahlen sind deßhalb von besonderem Interesse, weil man mittels derselben die Entfernung der Gasmoleküle von einander, die mittlere Weglänge der Moleküle und die Größe derselben ausrechnen kann.

Die verzögernde und die beschleunigende Einwirkung zweier Gasschichten kann man nach der mechanischen Theorie der Gase folgendermaßen erklären. Wenn zwei ruhende Gasschichten von gleicher Dichte einander berühren, so wird vermöge der molekularen, fortschreitenden Bewegung der Gasmoleküle, die bekanntlich nach allen Richtungen stattfindet, in einer gewissen Zeit eine ebenso große Zahl von Molekülen aus der ersten in die zweite fliegen, als von der zweiten in die erste; dasselbe muß auch stattfinden, wenn die beiden Schichten in Bewegung sind. Nur werden die Moleküle, welche durch ihre molekulare Bewegung schon theilweise die Richtung der Bewegung beider Schichten besitzen, in der schnelleren Schicht eine größere Geschw. haben als in der langsameren; da nun die Moleküle der schnelleren in die langsamere, die der langsameren in die schnellere diffundiren, so werden erstere allmälig die langsamere beschleunigen, letztere die schnellere verzögern. Aus dieser Erklärung erhellt auch sofort, warum die Reibung der Größe der Flächen und der Geschwindigkeitsdifferenz proportional ist. Auch die Unabhängigkeit von der Dichte läßt sich ungefähr einsehen; denn bei z. B. 3facher Dichte mögen wohl 3 mal so viele Moleküle übergehen, sie haben aber auch dann die dreifache Masse zu beschleunigen. Endlich ist auch die Abhängigkeit von der Temperatur ersichtlich; denn bei höherer Temperatur ist die Geschwindigkeit der Moleküle größer, und zwar wächst dieselbe proportional zu der Quadratwurzel aus der absoluten Temperatur, da diese durch die lebendige Kraft $\frac{1}{2}mv^2$ der Moleküle ausgedrückt wird; also muß auch die Wirkung der Reibung jener Größe proportional sein. Die Ableitung der Dimension $gr\ cm^{-1}\ sec^{-1}$ im absoluten Maß geschah bei der inneren Reibung der Flüssigkeiten (175.). Doch entspricht sie auch der kinetischen Gastheorie; denn diese ergibt $\eta = \delta lc/\pi$, wo δ die Gasdichte, l und c die mittlere Weglänge und die mittlere Geschw. der Gasmoleküle; also ist $dim\ \eta = ml^{-3}\ .\ l\ .\ lt^{-1} = ml^{-1}\ t^{-1} = gr\ cm^{-1}\ sec^{-1}$; denn Dichte ist = Masse/Volumen, also $= m/l^3 = ml^{-3}$.

Da die Versuchsresultate von den theoretischen Gesetzen mannichfach abweichen, so suchten Kundt u. Warburg (1875) darzuthun, daß die Reibung der Gase keine ausschließlich innere sei, daß es vielmehr auch eine äußere Reibung der Gase gebe, die aus einem Gleiten der Moleküle an den Grenzwänden bestehe; für den Gleitungscoëfficient ergab sich, daß er der Dichte umgekehrt und der mittleren Weglänge der Moleküle direct proportional sei. Als sie den Einfluß der Gleitung aus ihren Versuchsresultaten eliminirten, blieb der Reibungscoëff. der Gase von 750 bis 1mm unabhängig vom Drucke. Kundt stellte hierfür (1876) ein sehr schlagendes Experiment an: über dem Flügelrade eines Radiometers wurde eine leicht drehbare Glimmerscheibe angebracht; war nun das Flügelrad in Rotation versetzt, so fing die Scheibe bald an, in derselben Richtung sich langsam mit zu drehen, was beweist, daß auch in der höchsten Verdünnung die Luftreibung noch beträchtlich ist. Crookes sagt zum Verständnisse einer analogen Erscheinung: ein Ballon von 13,5cm Dm. enthält eine Quadrillion Gasmoleküle; wird diese Luft millionfach verdünnt, was wir für Luftleere zu halten geneigt sind, so enthält der Ballon immer noch eine Trillion von Molekülen. Auch für Dämpfe verschiedener Art ergab sich die Reibungsconstante als unabhängig vom Druck, wenn auch meist noch kleiner als beim Wasserstoff, so für Alkoholdampf 78, Benzoldampf 76, Aetherdampf 73 Milliontel (Puluj 1878); für sehr starke Verdünnungen gilt nach Puluj das Gesetz der Unabhängigkeit vom Drucke nicht mehr; so soll η, das für die Luft bei 7mm noch 181 Milliontel beträgt, bei 0,03mm nur noch 71 Milliontel betragen, was indeß anzeigt, daß die Reibung doch nur wenig kleiner geworden ist. Auch Kundt und Warburg hatten schon mathematisch gefunden und durch Versuche bestätigt, daß die Unabhängigkeit vom Drucke nur so lange gilt, als die mittlere Weglänge der Moleküle verschwindend klein gegen die Dimensionen des untersuchten Gasraumes ist; sie hatten die Schwingungsmethode angewendet; das logarithmische Decrement war bei jener Voraussetzung constant, nahm aber bei sehr geringer Dichte ab. Lothar Meyer (1878) schloß aus einer Untersuchung im Gegensatze zu den meisten früheren Forschungen, daß für gesättigten Benzoldampf die Constante der Quadratwurzel aus der Spannung proportional sei. Crookes veröffentlichte 1881 seine langjährigen Arbeiten über diesen Gegenstand; er hatte, geleitet von dem Bestreben, seinen ultragasigen Zustand, die strahlende Materie, zu retten, die Versuche für H, O, N, Luft, CO_2 u. CO bis zur Verdünnung von einigen Milliontel at fortgeführt, und fand, daß H dem Maxwell'schen Gesetze am längsten folgt, CO_2 am wenigsten, daß aber bei allen Gasen ungefähr für ein Tausendtel at die Gültigkeit aufhört, und daß bei einigen Milliontel at die Constante sehr rasch abnimmt. Lothar Meyer findet 1882 ebenfalls nach langjährigen Arbeiten, daß die verschiedenen Dämpfe homologer Reihen dieselbe Constante haben. Noch mehr verschieden als für den Druck sind die Versuchsresultate von der Theorie bei dem Einfluß der Temperatur. Während nach der Theorie der Coëff. proportional sein soll zu der Quadratwurzel oder Potenz $\frac{1}{2}$ der absoluten Temperatur, glaubte Maxwell schon aus seinen ersten Versuchen schließen zu dürfen, daß er der absoluten Temperatur selbst, also ihrer Potenz 1 proportional sei. Genauere Versuche von O. E. Meyer (1878) u. A. ergaben, daß die Wahrheit zwischen der theoretischen und Maxwells Angaben liege; für permanente Gase scheint η der Potenz $\frac{3}{4}$, für coercible der Potenz 0,9 und für Dämpfe fast der Potenz 1 proportional zu sein. Ja Koch fand sogar (1883) für Quecksilberdampf aus Transpirationsversuchen den Exp. = 1,6. Schon Maxwell fühlte sich durch diese Widersprüche bewogen, die Fundamente der kinetischen Gastheorie etwas abzuändern, während O. E. Meyer meint, die Abweichungen rührten davon her, daß in der theoretischen Betrachtung der Radius der Wirkungssphäre der Moleküle nicht richtig erfaßt worden sei. Es sind daher über diesen Gegenstand nähere Forschungen abzuwarten, die von besonderer Bedeutung sind, da aus dem Coëff. η der inneren Reibung die Abstände und Größe der Moleküle berechnet werden. Oefter wurde schon erwähnt, daß der Abstand oder die mittlere Weglänge der Gasmoleküle etwa ein Zehntausendtel mm betrage. Puluj hat (1878) die mittlere Weglänge für verschiedene Gase und Dämpfe neu berechnet und gibt sie in Milliontel Millimetern mit folgenden Zahlen an: Luft 82, Wasserstoff 151, Wasserdampf 58, Alkoholdampf 33, Chloroformdampf 24, Aetherdampf 22; die Moleküle der gesättigten Dämpfe haben also 2 bis 4mal kleinere Abstände als die der permanenten Gase.

5. Molekularwirkungen der Luftarten.

216 **Die Diffusion der Luftarten gegen einander** (Dalton 1802). Wenn verschiedene Luftarten einander berühren, so bleiben dieselben nicht getrennt wie Oel und Wasser, sondern sie durchdringen sich gegenseitig wie Wasser und Weingeist, so daß in verhältnißmäßig kurzer Zeit ein gleichmäßiges Gemenge der Luftarten entstanden ist. Diese Erscheinung nennt man die Diffusion der Gase. Wir haben schon in 54. aus der neuen Anschauung über das Wesen der Luftarten das Grundgesetz der Diffusion abgeleitet: die Diffusionsgeschwindigkeit, also auch das diffundirte Gasvolumen ist umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus der Dichte der Gase. Dieses Gesetz wurde von Graham 1834 aus Versuchen gefolgert, bei denen sich Gase allerdings nicht direct berührten, sondern durch künstliche Gypsscheiben getrennt waren; für diese Einrichtung kann, wie Bunsen 1858 zeigte, das Gesetz nicht mit Genauigkeit gelten, weil hier die Capillarität des porösen Gypses mitwirkt, eine Erscheinung, die der Endosmose der Gase angehört.

Nach dem angeführten Graham'schen Gesetze hat der Wasserstoff die stärkste Diffusion, 4 mal stärker als die des Sauerstoffs und auch ungefähr als die der Luft; deßhalb dringt der Wasserstoff auch durch künstliche Zeughüllen, welche so porös sind, daß sie eine directe Berührung der Gase gestatten, mit großer Raschheit, was der Verwendung des Wasserstoffs zu Luftballonen sehr hinderlich ist. — Vermöge der Diffusion der Luftarten hat unsere Atmosphäre überall, in der Tiefe wie in der Höhe, in den gefülltesten Sälen wie in den zugigsten Räumen denselben Procentgehalt von Sauerstoff; vermöge dieser Eigenschaft geht das Kohlendioxyd an die Pflanzen und der durch diese befreite Sauerstoff von denselben weg in die Luft, wodurch die Luft immer von Kohlendioxyd gereinigt und lebensvoll erhalten wird. Doch sinkt dies schwere Kohlendioxyd leicht an die tiefsten Stellen und diffundirt von dort weniger rasch in die Luft hinaus, daher findet es sich häufig in tiefen Brunnen, Gruben u. s. w. — Grahams Gesetz kann auch als eine Folgerung des in 316. gefundenen Ausflußgesetzes verschiedener Gase aufgefaßt werden.

Auch die Diffusion der Gase ist in neuerer Zeit nach der kinetischen Theorie erforscht und durch Versuchsresultate geprüft worden; es ergaben sich auch hier großentheils Uebereinstimmungen der theoretischen und der Versuchsresultate, wodurch die Theorie erneute Bestätigungen gewinnt, jedoch auch wie bei der inneren Reibung Abweichungen, welche uns zeigen, daß die kinetische Gastheorie entweder nicht richtig durchgeführt oder noch nicht völlig genau erkannt wurde. Um die Forschungen über die Diffusion der Gase zu verstehen, müssen zuerst die eingeführten Größen erklärt werden, wofür wir an Daltons Grundversuch der Diffusion anknüpfen. Sind 2 Hohlkugeln durch eine Röhre verbunden, die obere luftleer, die untere gaserfüllt, so dringt das Gas in kürzester Zeit in die obere Kugel ein und erfüllt beide gleichmäßig; genau dasselbe geschieht, wenn die obere Kugel gaserfüllt, die untere luftleer ist. Aber auch, wenn beide Kugeln mit verschiedenen Gasen erfüllt sind, einerlei ob das obere schwerer oder leichter ist als das untere, so breiten sich dennoch beide Gase so aus, daß ein Gemisch von ihnen bald beide Kugeln gleichmäßig erfüllt. Nur geschieht diese Diffusion nicht so schnell, als wenn eine von beiden Kugeln leer ist; jedes Gas setzt daher der Ausbreitung des andern einen Widerstand entgegen, der offenbar der Dichte und molek. Geschw. des Gases proportional ist. In dem Verbindungsrohre aber fließt von beiden Gasen in gleichen Zeiten eine gleiche Menge in entgegengesetzter Richtung; jedes Gas verhält sich abgesehen von dem verzögernden Einflusse des Widerstandes so, als ob es einerseits dem Drucke der Atmosphäre ausgesetzt sei und anderseits in einen leeren Raum fließe, wo ihm kein Gegendruck oder der Druck Null entgegenwirkt. Unter der Diffusionsconstante k versteht man nun das in 1 Sec. durch ein Rohr von 1qcm Querschnitt und 1cm Länge strömende Gasvolumen, vorausgesetzt, daß constant einerseits der Druck der Atmosphäre, anderseits der Druck Null herrscht. Die Entwickelung der Dimension $cm^2 sec^{-1}$ der Diffusionsconstante im absoluten Maß geschah bei der Diffusion der Flüssigkeiten (173.); so ist bei 0° und mittlerem Druck die Diffusionsconstante von Wasserstoff gegen Sauerstoff $= 0,7\ cm^2 sec^{-1}$, d. h. in einer Sec. dringen 0,7ccm Wasserstoff in Sauerstoff durch 1qcm Trennungsfläche. Diese Diffusionsconstante ist nach den Ergebnissen der Theorie proportional der Quadratwurzel aus dem Product der Dichten beider Gase und dem Gesammtdruck derselben, dagegen direct proportional der Potenz $^3/_2$ der absoluten Temperatur (Stefan 1872); die Versuchsresultate Loschmidts (1871) stimmen gut mit den zwei ersten Gesetzen, dagegen ist nach diesen die Diffusionsconstante nahezu dem Quadrat der absoluten Temperatur proportional; dies stimmt mit den neueren Arbeiten über die innere Reibung; denn nach der Theorie soll der Temperatur-Exponent für die Diffusion um 1 größer sein, als der der inneren Reibung; jener ist aber (215.) $^1/_2$ bis $1^1/_2$, also muß dieser $1^1/_2$ bis $2^1/_2$ sein; wirklich fand Obermayer (1880) die meisten Exponenten nahezu $= 2$. Auch fand dieser Forscher 1882 eine Abhängigkeit der Constante von der Diffusionszeit; für kurze Zeiten sei sie klein und nähere sich für wachsende Zeiten immer mehr einem Grenzwerthe; das bestätigte Waitz (1882). Indessen ist doch wenigstens nach Obermayer (1883) die Veränderlichkeit des Coëff. mit der Temp. von der Zeit unabhängig.

Die Lufthaut und die Hauchbilder (Moser 1820). Jedes Kind entdeckt die 217
Erscheinung der Hauchbilder; man schreibt mit dem Finger auf eine trockene Fensterscheibe, ohne die Züge wahrzunehmen; haucht man sodann auf die Scheibe, so treten die Züge deutlich hervor, und zwar dadurch, daß die unbeschriebenen Stellen durch den Hauch trüber werden als die beschriebenen. Hat man die Scheibe vorher kräftig abgewischt, so tritt die Erscheinung viel schwächer oder gar nicht auf. Aehnliche Erscheinungen zeigen sich, wenn man auf eine frisch polirte Metallplatte einen Stempel mit eingegrabenen oder hervorragenden Zügen, eine Münze oder dgl. legt und nach Wegnahme des Stempels die Platte behaucht oder Quecksilberdämpfen aussetzt. Ja sogar die Züge von Bildern, die lange dicht hinter einer Glastafel lagen, treten später auf der Glastafel hervor.

Moser, der diese Erscheinung zuerst näher untersuchte, erklärte sie irrthümlicher Weise für Folgen eines in allen Körpern vorhandenen latenten Lichtes. Die richtige Erklärung nebst zahlreichen Versuchen zu derselben gab Waidele 1843. Sie beruht auf der Lufthaut, d. i. einer dünnen Schicht von stark verdichteter Luft, von Dämpfen und unendlich feinen Stäubchen, die sich auf jedem Körper bildet, weil die Luftmoleküle vermöge ihrer molekularen Bewegung ganz in die Nähe der Körper gelangen und dort durch die Anziehung derselben festgehalten werden. Diese Haut ist es, die bei der Anfertigung eines Barometers durch sorgfältiges Auskochen mit Quecksilber von der Innenwand der Röhre entfernt werden muß. Wischt man diese Haut durch Schreiben auf eine Glasplatte weg, so condensiren sich beim Behauchen an den beschriebenen Stellen die Dämpfe nicht; denn diese Stellen erscheinen genau so, wie eine behauchte Stelle, von der man durch starken Wischdruck den condensirten Dampf beseitigt hat. Beim Schreiben der unsichtbaren Züge wischt man nämlich den Staub weg, der nach Aitken und R. v. Helmholtz zur Nebelbildung nöthig ist; es findet nur an den unbeschriebenen Stellen Nebelbildung statt, von den beschriebenen werden die Dampftheilchen uncondensirt zurückgeworfen. Wird eine polirte Metallplatte mit frisch ausgeglühtem Trippel abgerieben, so nimmt dieser die Lufthaut weg; setzt man dann einen Stempel auf die Platte, so theilt sich dessen Lufthaut der Platte durch die Diffusion mit, aber nur an den Berührungsstellen; deßhalb entsteht nachher durch Behauchen ein Bild der Stempelzüge. Ebenso entsteht ein Bild, wenn die Platte nicht geputzt, der Stempel aber abgerieben ist. Sind dagegen beide abgerieben oder beide künstlich mit gleichen Lufthäuten versehen, so entsteht kein Bild. Wenn aber beide längere Zeit gelegen haben und nicht abgerieben werden, so haben sie eine verschiedene Lufthaut; es wird daher auch bei der Berührung die Diffusion gegen einander verschieden sein, es muß ein theilweiser Austausch der Lufthäute an den Berührungsstellen stattfinden, wodurch in diesem Falle schwache Bilder entstehen können. — Besonders merkwürdig sind die elektrischen Hauchbilder (Rieß 1838, Karsten 1842), welche sich an den Stellen bilden, über die ein elektrischer Funke geschlagen ist, oder durch welche Elektricität zur Erde abgeleitet wurde; solche Stellen geben nach Jahren noch Hauchbilder.

In den 80er Jahren hat man diese Lufthaut an Glaswänden genauer untersucht und sogar diese Eigenschaft, Gase an glatten Oberflächen zu verdichten, Adsorption genannt, zum Unterschiede vom Eindringen ins Innere, Absorption. Manche wollten auch das Aufschlucken durch Kohle zur Absorption rechnen; als aber ihre eigenen Untersuchungen ergaben, daß dies nach denselben Gesetzen (proportional dem Druck und umgekehrt zur Temperatur) stattfinde, wie die Absorption, mußte man es wohl dahin zählen. Die Absorption folgt nämlich den Gesetzen nicht; als Kayser 1883 die Absorption von Ammoniak und schwefliger Säure durch Glasfäden und Glaspulver untersuchte, ergaben sich für den Druck entgegengesetzte Resultate und kein Zusammenhang mit der Oberflächengröße. Bunsen fand sogar bei seinen Versuchen mit Glasfäden und Kohlensäure (1881—84): daß auch im dritten Jahre die Absorption von Kohlensäure durch Glas noch fortdauerte, Aenderungen im Druck brachten keine Aenderung der Absorption hervor, bei steigender Temperatur zeigte sich Steigerung, bei sinkender Temp. Verminderung der Absorption. Als Kayser 1884 einwarf, die Kohlensäure möge durch das Fett der Schliffstücke entwichen sein, wiederholte Bunsen die Versuche ohne Fett und erhielt dieselben Resultate. Seine späteren Versuche (1885) zeigten die Bedeutung der Wasserhaut, welche die obigen Glasfäden offenbar hatten, für die Absorption. Als mit größter Sorgfalt die Wasserhaut beseitigt war, fand die Absorption von CO_2 in merklich geringerem Grade statt. Die Glasfäden mit Wasserhaut mußten ihm deßhalb das Mittel bieten, die Luftspannung, den Capillardruck der Lufthaut zu messen: er erhöhte die Temperatur und ließ sie dann lange constant; es mußte dann Verdunstung der Wasserhaut eintreten, aber sehr langsam und lange dauernd; als sie schließlich aufhörte, mußte die dann herrschende Dampfspannung gleich dem Capillardruck der Haut sein. So fand er, daß

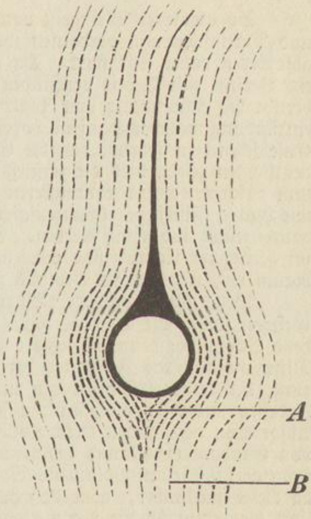
bei 23°	die Dicke der Haut $10^{\mu\mu}$,	der Capillardruck	$0{,}03^{at}$,
„ 107°	„ „ „ „ $7^{\mu\mu}$	„ „	$1{,}3^{at}$,
„ 215°	„ „ „ „ $6^{\mu\mu}$	„ „	21^{at}

betrug, daß dieser also in dem berührenden Theil der Haut wohl Hunderte von at betrage, denn diese würde erst bei 500° vertrieben. Wenn diese großen Zahlen unglaublich erscheinen, so braucht nur daran erinnert zu werden, daß der Normaldruck der Flüssigkeitshaut nach drei Forschern auf Tausende von at geschätzt wird; hierdurch ist auch der Name Capillardruck erklärlich und ein Hinweis zur Erklärung gegeben. Dem entspricht auch, daß nach Joulin die Dichte von Ammoniak in Kohle und auf Glaspulver so groß ist, daß sie eine Gasspannung von 246^{at}, resp. 2^{at} zur Folge haben muß. Nach Voigt (1883) ist die unterste Schicht eines absorbirten Gases einem festen Körper vergleichbar, da sie sich weder durch Druck noch durch Flüssigkeit beseitigen läßt, die mittlere hat die Constitution einer Flüssigkeit und erst die oberste läßt sich verdichtetes Gas nennen. Nach Bunsen besteht die Lufthaut bei altem Glas aus einer Wasserhaut; so lange diese dünn ist, hat sie einen großen Capillardruck, absorbirt daher viel CO_2; beim Dickerwerden absorbirt sie noch CO_2, aber nicht mehr soviel als früher; jedoch kann der Kohlensäuregehalt das 2000fache Volumen der Wasserhaut übersteigen. Diese permanente Lufthaut ist natürlich nicht zu verwechseln mit dem nassen Beschlag, der sich auf Glasscheiben bildet, wenn die Temperatur unter den Thaupunkt sinkt, aber auch nicht mit der ebenfalls capillaren temporären Wasserhaut, die durch Capillarität in feuchter Luft entsteht und in trockener Luft wieder schwindet und das Haupthinderniß der elektrischen Versuche bei feuchter Luft bildet; diese ist 1886 von Warburg und Ihmori und 1887 von letzterem allein eingehend studirt worden. Es stellte sich heraus, daß alkalifreies Glas diesen Beschlag nicht annimmt, wohl aber alkalihaltiges, das sich als schlechter Isolator erwiesen hatte; ebenso gefirnißtes Metall, das schon in 20 Min. einen $27^{\mu\mu}$ dicken Beschlag hatte; wie auch reines Messing, während Platin keine Haut annahm; Achat hatte eine $100^{\mu\mu}$ dicke Haut, Bergkrystall keine Spur. Für sehr feine Wagen sind also Achat und messingene Gewichtstücke nicht rathsam, Bergkrystall und platinirtes Messing zu empfehlen.

Wenn nun Wasser und Kohlensäure als Hauptbestandtheile der permanenten Lufthaut auf Glas bekannt sind, so muß doch auch feiner Staub vorhanden sein. Daß unendlich feiner Staub existirt, ist nach O. Wieners Metallzerstäubungsversuchen, nicht zweifelhaft; fand er ja durch optische Versuche die Dicke eines Zerstäubungsspiegels $= 0{,}2^{\mu\mu}$; zwischen diesem unendlich feinen und den mit bloßem Auge sichtbaren Sonnenstäubchen von vielleicht $0{,}01^{mm}$ Dicke liegen zahllose mögliche Dimensionen von Staubkörnchen, von denen viele ganz unsichtbar bleiben, manche wie Tabakrauch, Salmiaknebel, Magnesiumrauch nur in großen Mengen sichtbar werden. Tyndall entdeckte nun 1870 schon, daß in solchen stauberfüllten Räumen durch einen wärmeren Körper, (nach Rayleigh 1881 auch durch einen kälteren) staubfreie Räume entstehen und daß diese staublosen Räume dunkel sind, wie Fig. 138 zeigt; die Luftmoleküle, die den warmen Körper berühren, werfen nämlich durch ihre größere Energie die Staubkörnchen aus dem aufsteigenden Luftstrom hinaus, wodurch dieser dunkel wird; folglich können Tageshelle und Dämmerung nur durch Staub entstehen, wofür am meisten die kurze Dämmerung der tropischen Gegenden spricht (592.). Bei 18° Dämmerungszone nun berechnet sich die oberste reflectirende Luftschicht als 43 M. von der Erde entfernt; die höchste beobachtete Nordlichtkrone lag in 72 M. Höhe; durch Nahrwold

(1887) ist aber festgestellt, daß staubfreie Luft nicht elektrisirt werden kann; für die Elektricität der Nordlichtkrone muß also der Staub bis in die Höhen von 72 M. vorkommen. Aitken fand 1880 schon, daß in filtrirter, staubfreier Luft kein Nebel entsteht; seine neuesten Untersuchungen 1888 sprechen noch entschiedener dafür: nach einer regnerischen Nacht, wo der Staub als Nebelbildner (wie auch durch den Regenfall) niedergeschlagen wurde, zählte Aitken in 1ccm Luft nur 32000 Staubkerne, bei schönem Wetter in Luft aus dem Freien dagegen 130 000, in mittelhoher Zimmerluft 1 860 000, in Luft aus der Nähe der Zimmerdecke 5 420 000, in Luft über einer Bunsenflamme sogar 30 000 000; drei Cubikzoll dieser Luft enthalten soviel Staubtheilchen, als Menschen auf der Erde leben; ein Cubikzoll Luft aus einem gasbeleuchteten Zimmer enthält soviel Staub, als Großbrittanien Menschen; die Zahlen sind eher zu klein als zu groß, denn in einer Stunde schlägt sich die Hälfte alles Staubes zu Boden. Aitken wandte hierbei die v. Helmholtz'sche Methode, durch Druckerniedrigung Dampf als Nebel niederzuschlagen, so oft wiederholt an, bis kein Nebel mehr fiel; dann, erklärt er, ist auch kein Staub mehr da. R. v. Helmholtz hatte nämlich nach dieser Methode 1886 aus unfiltrirter Luft stets Nebel niederfallen sehen, selbst bei der geringsten Druckverminderung; dagegen aus filtrirter, staubloser Luft keine Spur von Nebel, selbst als die Druckerniedrigung $^1/_2$ at betrug. Dabei bestimmte er den Radius der kleinsten Nebelkugeln, der ja mit dem der Staubkerne zusammenfällt, auf 150 bis 260 $\mu\mu$, erklärt also die Größe dieser Staubkerne als von derselben Größenordnung, wie die Längen der Lichtwellen, die ja zwischen 100 und 1000 $\mu\mu$ liegen. Wenn nun sowohl v. Helmholtz als auch Aitken in speciellen seltenen Fällen Nebelbildung ohne Staub für möglich erklären, so muß doch gewöhnlich zur Nebelbildung Staub vorausgesetzt werden, wird also die einfachste Erklärung der Hauchbilder mit dem Staub geschehen müssen.

Fig. 138.



Die Absorption der Luftarten (Diffusion der Gase in Flüssigkeiten und feste Körper). Nicht blos auf der Oberfläche der Körper befindet sich Luft, sondern die Luftatome dringen auch durch die Poren und die molekularen Zwischenräume in das Innere der Körper ein und haften dort durch die Attraction fest. Diese Erscheinung nennt man die Einsaugung, Verschluckung oder Absorption der Gase. Man kann dieselbe einfach und auffallend zeigen, wenn man in einem umgestülpten Glascylinder über Quecksilber Kohlendioxyd auffängt und dann ein Stück frisch ausgeglühter Kohle in den Raum bringt; das Quecksilber steigt dann rasch in die Höhe. Noch rascher geschieht das Steigen, wenn man Ammoniakgas durch Wasser verschlucken läßt. — Die Gewichtsmenge des absorbirten Gases ist nach Henry (1803) dem Drucke proportional, unter welchem das Gas steht. Dann wächst dieselbe, wenn die Temperatur niedriger wird; doch steht sie zu der Temperatur in einem verwickelten Verhältnisse. So gibt z. B. Bunsen (1857) für den Absorptionscoëfficienten des Ammoniaks im Wasser, d. i. für das Gasvolumen, welches von der Volumen-Einheit der Flüssigkeit bei 760mm Luftdruck verschluckt wird, folgende Formel: $1049{,}63 - 29{,}496\,t + 0{,}6769\,t^2$, worin t die Temperatur bedeutet, woraus folgt, daß bei 0° das Wasser 1049, bei 20° aber nur 731 Volumina Ammoniak verschluckt. Umgekehrt wird durch Verminderung des Druckes die Absorption geringer, worauf das Schäumen der Flüssigkeiten beruht; ebenso durch Erhöhung der Temperatur, weßhalb durch Ausglühen Körper ihre Gase verlieren. — Die Menge des absorbirten Gases hängt auch wesentlich von der Natur des Gases und des absorbirenden Körpers ab. Im Allgemeinen werden Gase um so leichter absorbirt, je leichter coërcibel sie sind; so verschluckt die Buchsbaumkohle unter denselben Umständen 90 Volumina Ammoniak, 218 unter denen sie kaum 2 Volumina Wasserstoff aufnimmt; so absorbirt Wasser 1000 Volumina Ammoniak, während es nur 0,02 Volumina Wasserstoff verschluckt. Ueber den Einfluß des absorbirenden Körpers ist noch wenig erforscht; im Allgemeinen scheint die Absorption um so größer zu sein, je geringer die Dichte und je poröser der Körper ist.

So absorbirt Weingeist von allen Gasen ein größeres Volumen als Wasser. Kohle und Platinschwamm verdanken ihrer Darstellungsweise eine starke und feine Porosität; sie absorbiren daher sehr stark. Da nun mit der Absorption eine Verdichtung der Gase, also ein Verlust von Arbeit verbunden ist, so muß bei der Absorption Wärme entstehen; darauf beruht die Anwendung von Platinschwamm im Döbereiner'schen Feuerzeug und die Selbstentzündung manches Haufens poröser Pulverkohle. — Aus der leichteren Absorption coërcibler Gase scheint zu folgen, daß die Gase bei der Absorption flüssig oder gar fest werden. Am deutlichsten zeigen dies die zerfließlichen Salze, wie Chlorcalcium, Soda u. s. w., welche in dem absorbirten und condensirten Wasserdampf zerfließen, sodann die hygroskopischen Stoffe, wie Haare, Fischbein, Pflanzenfasern, welche durch den absorbirten und condensirten Wasserdampf feucht und schlaff werden. Außerdem nehmen Ammoniak und Salzsäure, die sich schon bei geringerer Compression condensiren, durch die Absorption einen vieltausendfach kleineren Raum ein, wodurch sie ebenfalls flüssig werden müssen.

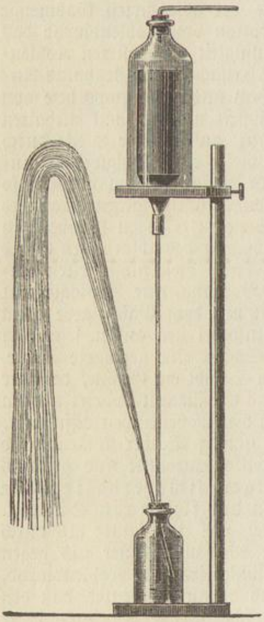
Wenn nun auch die Absorption von Luftarten durch Flüssigkeiten nahezu denselben Gesetzen folgt, wie diejenige durch poröse feste Körper, so sind dies doch zwei ganz verschiedene Vorgänge; denn die letztere Absorption ist nur ein Eindringen der Luftmoleküle durch Diffusion und das Festhalten derselben durch die Anziehung, während die erstere eine Lagerung der Luftmoleküle in den molekularen Zwischenräumen, eine Art von Auflösung ist. Indessen findet sich auch bei den festen Körpern eine dieser ähnliche Absorption, nämlich die Absorption von Gasen durch Kolloide und durch gluthweiche Metalle, welche in neuerer Zeit von Graham (1867 und 1868) näher untersucht worden ist. Dieser Forscher fand, daß Kautschuk 0,6 seines Volumens Wasserstoff und sein ganzes Volumen Kohlendioxyd aufnimmt; da dieses stattfindet, ohne daß das Volumen des Kautschuk um eine Spur zunimmt, so liegt hier ebenfalls die Vermuthung nahe, daß die Gase durch Absorption flüssig werden. Diese Absorption wird in der Wärme, wodurch der Kautschuk sich mehr dem flüssigen Zustande nähert, größer, woraus sich die Aehnlichkeit dieser Absorption mit der Lösung ergibt. Noch auffallender tritt dies bei den kolloiden Metallen hervor. Bei Grahams Versuchen nahm Platin sein 4faches Volumen Wasserstoff auf, Silber 1—4 Vol. Sauerstoff, Eisen ½ Volumen Kohlenoxyd, Palladium sogar über 900 Volumina Wasserstoff. Dies geschah aber nur, wenn den Metallen in glühendem Zustande diese Gase geboten, und wenn sie dann langsam abgekühlt wurden; beim Erhitzen entwichen die Gase wieder. Hierin liegt wieder eine Uebereinstimmung mit der Lösung. Da der Wasserstoff in dem Palladium ein vieltausendmal kleineres Volumen als gewöhnlich hatte, so konnte er unmöglich noch gasförmig, er mußte flüssig sein; dies wird auch noch dadurch bestätigt, daß er in höherer Temperatur wie jede Flüssigkeit rascher verdampfte. Da er endlich nach der Abkühlung selbst im Vacuum nicht entwich, so liegt die Vermuthung sehr nahe, daß er bei niederer Temperatur sogar fest war. So wäre denn Graham das Problem der Condensation des Wasserstoffs, wenigstens einstweilen in einem anderen Körper, gelungen; der flüssige und feste Wasserstoff bildet hier Legirungen mit dem Palladium, was dem sonstigen metallischen Verhalten des Wasserstoffs ganz gemäß ist. Noch besser gelang Graham diese Legirung, als er die elektrische Anziehung statt der Wärme benützte. Er brachte (1860) ein Stück Palladium an den negativen Pol eines Wasserzersetzungsapparates; dann wurde durch die elektrische Anziehung des negativen Palladiums zu dem an sich positiven Wasserstoff die Absorption bedeutend verstärkt, so daß das Palladium sein 800—1000faches Volumen Wasserstoff zu absorbiren vermochte. Graham nannte diesen Wasserstoff, der im Palladium fest vorhanden ist, und der in ähnlicher Weise auch in vielen Palladiumlegirungen und nach Böttger (1874) auch in Nickel, Kobalt und Zinn fest erhalten werden kann, Hydrogenium, und bestimmte das spec. Gew. desselben = 0,8, wodurch abermals der feste Zustand angedeutet wird. Graham hält Hydrogenium für activen Wasserstoff = HHH, wie Ozon activer Sauerstoff ist; die active Eigenschaft zeigt derselbe in seiner stark reducirenden Wirkung; so reducirt er Ferricyankalium, Kaliumnitrat, Ferrisulfat, was der gewöhnliche Wasserstoff nicht thut. Graham beobachtete schon, daß Palladiumdraht beim Hydrogeniren sich stark verlängert und sich, wenn das Hydrogenium durch starkes Erhitzen oder Sprengels Luftsauger entfernt wird, unter seine frühere Länge verkürzt. Böttger beobachtete, daß Blech beim Hydrogeniren sich spiralig krümmt. Das Palladiumblech wird nach Böttger viel stärker hydrogenirt, wenn es vorher mit fein vertheiltem Palladium, mit Palladiumschwarz überzogen wird; ein solches hydrogenirtes Blech entwickelt, wenn es aus der Zersetzungszelle kommt, Gluthhitze, explodirt, wenn es mit Schießwolle umwickelt ist und brennt längere Zeit fort; wird es in Aether getaucht, so steigt der Wasserstoff stürmisch auf. Jedoch geht nicht aller Wasserstoff aus dem schwarzen Blech heraus: während ein blankes Blech, wie Böttger aus einer der Palladium-Hydrogenium-Münzen ersah, die Graham seinen Freunden geschenkt hatte, in wenigen Jahren allen Wasserstoff verliert, fand derselbe ein schwarzes Blech, das den überschüssigen Wasserstoff durch Eintauchen in Aether abgegeben hatte, wenigstens nach 30 Tagen noch stark hydrogenirt. — Glas gehört ebenfalls zu den Kolloiden; seines dichten Stoffes wegen traute man ihm keine Absorption zu. Hannay fand (1881), daß es bei nicht zu hoher Temp., etwa 200°, Gase unter sehr hohem Drucke (200^{at}) in großer Menge verschlucke und festhalte, wenn die Abkühlung bei gleichem Drucke stattfinde. Bei raschem Schmelzen entweichen dann die Gase unter starkem Schäumen; ebenso diffundiren dieselben durch Gas und ähnliche Stoffe, wenn Druck und Temp. des Absorbirens andauern.

Bergmans „Opuscula" (1779) enthalten schon die Angabe, daß das sp. G. des mit Kohlendioxyd gesättigten Wassers auf 1,0015 steigt; Thomson (1802) gibt an, daß 1 Volumen Wasser durch Sättigung mit Ammoniak auf $1^1/_3$, mit Salzsäure auf $1^1/_2$, mit Chlor auf 1,002 steige. Mackenzie und Nichols (1877) bestimmten genau die Ausdehnung einer Flüssigkeit bei der Absorption von Gasen und fanden, daß sie der absorbirten Gasmenge proportional sei; insbesondere betonten sie, daß durch Absorption von Kohlendioxyd das Wasservolumen soviel zunehme, als das Volumen des zu Flüssigkeit condensirten Kohlendioxyds betrage. Während diese und die erwähnten anderen Thatsachen für Grahams Ansicht zu sprechen scheinen, spricht v. Wroblewski (1879) den Satz aus: die Hypothese von Graham, nach welcher von Kautschuk absorbirte Gase als Flüssigkeit im Kautschuk enthalten seien, ist falsch; nach seinen Versuchen gehen nämlich Gase ganz auf dieselbe Weise durch Kautschuk wie durch eine künstliche Graphitplatte; da nun in dieser ein Flüssigwerden unmöglich angenommen werden kann, sondern die Gaseigenschaften völlig erhalten bleiben, so muß dies auch für die Absorption im Kautschuk gelten. Allerdings scheint gegen Grahams Ansicht auch eine theoretisch-experimentelle Untersuchung von Stefan (1878) zu sprechen, in welcher derselbe den inneren Vorgang der Absorption, das Fortschreiten des absorbirten Gases im Innern von Wasser und Weingeist, die Diffusion der Gase durch diese Flüssigkeiten eingehend prüft. Wie Wroblewski (1878) zeigt St., daß dieser Vorgang eine Analogie mit der Wärmeleitung habe; die Oberflächenschicht sättige sich zuerst mit dem Gase, gebe dann einen Theil desselben an die folgende Schicht ab, nehme aber ebensoviel neu auf u. s. w.; in solcher Weise habe das diffundirende Gas in jeder folgenden Schicht eine geringere Dichte, diese Dichte habe von der aufnehmenden bis zu der auslassenden Schicht ein Gefälle, dem der Diffusionsstrom proportional sei. Der Factor, mit welchem das Gefälle multiplicirt werden muß, um die Gasmenge zu erhalten, die in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit diffundirt, heißt der Diffusionscoëfficient; derselbe ist per Tag und qcm z. B. für Kohlendioxyd und Wasser 1,4, für Kohlendioxyd und Weingeist 2,7. Theoretisch entwickelt und praktisch bestätigt wird das Gesetz, daß die diffundirten Gasmengen sich verhalten wie die Quadratwurzeln der Zeiten und wie die Längen der flüssigen Säulen. Jedoch geschieht die Diffusion durch Flüssigkeiten außerordentlich viel langsamer als durch die Luftarten; so ist der Coëff. der Kohlensäure gegen Wasser 8000 mal kleiner als gegen Luft. Sauerstoff und Stickstoff diffundiren schneller auch in Flüssigkeiten als Kohlendioxyd, und die größte Diffusionsgeschw. kommt dem Wasserstoff zu, was darauf hindeutet, daß den absorbirten Gasen die Gaseigenschaft verbleibt. Das Stefan'sche Gesetz der Zeit hatte Wroblewski (1878) auch für die Absorption von Kohlensäure in Salzlösungen, Glycerin, Oelen und Kolloiden nachgewiesen. Dasselbe Gesetz hatte schon Fick (1856) für die Diffusion von Flüssigkeiten gegen einander und Lösungen theoretisch abgeleitet und Johannisjanz (1877) experimentell bestätigt. Eine interessante Untersuchung über Absorption von CO_2 durch Salzlösungen hat Setschenow (1876) angestellt: Diejenigen Salze, auf welche CO_2 nicht chemisch wirkt, absorbiren dasselbe nach Henrys Gesetz proportional dem Drucke, und um so weniger, je concentrirter sie sind; diejenigen aber, die mit CO_2 einen chemischen Proceß eingehen, absorbiren nicht nach Henrys Gesetz, und um so mehr, je concentrirter sie sind; es gibt doch auch Salze, welche theils chemisch, theils physikalisch absorbiren. Indessen hält Setschenow dafür, daß das Wachsen der physikalischen Absorption der ersten Klasse von Salzlösungen bei der Verdünnung mit der Dissociation derselben in Zusammenhang stehe, also auch chemischen Wirkungen zuzuschreiben sei. Auch in der Pflanzen- und Thierphysiologie, wie in der Agriculturchemie scheint allmälig die Erkenntniß durchzudringen, daß nicht blos die Umbildung oder Assimilation der aufgenommenen Nährstoffe, sondern auch deren Aufnahme selbst hauptsächlich in chemischen Vorgängen ihre Erklärung finden, und daß die rein physikalische Absorption nicht die bisher angenommene hohe Bedeutung dabei habe.

Die Osmose der Luftarten (Diffusion der Gase durch Scheidewände). Die 219
Luftarten gehen durch dünne Scheidewände wie die Flüssigkeiten; sie zeigen also

auch die Erscheinung der Osmose. Diese Erscheinung ist verschieden nach der Beschaffenheit der Scheidewände. Die Scheidewände können so große Poren haben, daß dieselben mit einander dünne Röhren bilden, durch welche die Gase direct ausströmen können; dann geht die Vermischung der Gase durch Diffusion vor sich; solche Scheidewände sind z. B. Platten von künstlichem Graphit, künstliche Gypsplatten u. dgl. — Viel kleiner schon sind die Poren in thierischen und Pflanzenstoffen, in den meisten Mineralien; denn die Elementargebilde der Natur, die Zellen, Gefäße und Krystallkeime sind meist noch viel kleiner als die feinsten künstlichen Pulverkörner; folglich können durch Scheidewände natürlicher fester Stoffe die Gase nur mit Hilfe eines äußeren Druckes oder der capillaren Anziehung der Porenwände gehen. Am kleinsten sind die Poren der Kolloide und der Kolloidmetalle; ihre Poren sind nur die molekularen Zwischenräume; durch solche Scheidewände können Gase nur dringen, wenn sie sich in den Scheidewänden auflösen und auf der anderen Seite verdunsten.

Fig. 139.



Da die Osmose durch künstliche Scheidewände nur eine Diffusion ist, so müßte sie eigentlich nach Grahams Gesetz, also umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus der Dichte geschehen, Wasserstoff müßte 4 mal schneller als Sauerstoff und 5 mal schneller als Kohlendioxyd durchgehen. Nach den eingehenden Untersuchungen von Bunsen (1857) gilt aber dieses Gesetz nicht genau, weil die Porenwände einen capillaren Einfluß auf die Gase ausüben, der auch durch den von Meyer entdeckten veränderten Ausfluß der Gase durch Capillarröhren angezeigt wird, sondern nur mit einer entfernten Annäherung, so daß die leichten Gase doch immer schneller durchgehen als die schwereren. Diese Eigenschaft springt durch Versuche mit dem Apparat (Fig. 139) deutlich in die Augen; derselbe besteht aus einer auf eine lange Trichterröhre gekitteten porösen Thonzelle, über welche eine Glasglocke mit einem Gaszuleitungsrohr gestülpt wird, während die Röhre in ein mit gefärbter Flüssigkeit gefülltes Glasgefäß tief herabgeht, aus dem sich ein Spritzrohr erhebt. Ist die übergestülpte Glocke mit Wasserstoff gefüllt, so diffundirt derselbe in größerer Menge durch die Thonzelle in die Trichterröhre, als die Luft heraus diffundirt; die Gasmenge und deren Spannung über dem Wasser steigen demnach und treiben einen Wasserstrahl aus dem Gefäße. Ist jedoch die Glocke mit Kohlensäure gefüllt, so dringt diese in geringerer Menge ein, als die Luft herausdringt, die Gasmenge und deren Spannung über dem Wasser mindern sich, und die Flüssigkeit steigt in der Trichterröhre rasch in die Höhe. Der Apparat zeigt, entsprechend der Diosmose der Flüssigkeiten, daß auch bei den Gasen die Osmose von beiden Seiten her stattfindet. Auf der raschen Osmose des Wasserstoffs beruht die Gefährlichkeit der Wasserstoffballone; eine interessante Anwendung ist Ansells Wetter-Indicator (1868), Fig. 140. Durch die poröse Thonplatte des Gefäßes dringt das leichte Grubengas der schlagenden Wetter rasch ein und hebt daher das Quecksilber in dem anderen Schenkel des Apparates; durch die auf solche Art beförderte Berührung des Quecksilbers mit der Schraubenspitze wird ein elektrischer Strom geschlossen, der eine telegraphische Schelle in Bewegung setzt.

Fig. 140.

Auch kolloide Scheidewände werden am leichtesten und schnellsten von den leichtesten Gasen durchdrungen, weil das Gas an die Scheidewand heran und von dieser wegdiffundiren muß; so dringt durch glühendes Palladium und Platin am meisten Wasserstoff. Indessen gilt diese Regel keineswegs allgemein, weil eben das Durchdringen der kolloiden Wände nur ein Verdunsten des eingedrungenen und gelösten Gases ist, und weil die Lösung in noch unbekannter Weise auf einer Art von chemischer Anziehung beruht. So geht z. B. durch Kautschuk mehr Kohlendioxyd als Wasserstoff, aber doch nur 2mal soviel, während Kautschuk 20mal soviel Kohlendioxyd als Wasserstoff absorbirt, was sich dadurch erklärt, daß der Wasserstoff beiderseits 5mal schneller diffundirt als Kohlendioxyd; so geht durch Kautschuk mehr Sauerstoff als Stickstoff, trotzdem der Sauerstoff schwerer als Stickstoff ist, welche Eigenschaft benutzt werden kann, durch öftere Kautschuk-Osmose aus der atmosphärischen Luft eine sauerstoffreichere, wenn auch nicht ganz stickstofffreie Luft zu erzeugen; v. Wroblewski (1876) erklärt dies als eine Consequenz des Gesetzes von Henry, das nach seinen Untersuchungen auch für die Diffusion der Gase durch absorbirende Substanzen gilt. — Eisen läßt viel mehr Kohlenoxyd als Wasserstoff durch, obwohl das erstere Gas schwerer ist als das letztere; vielleicht wirkt hier die Verwandtschaft des Eisens zum Kohlenstoff mit, und wahrscheinlich beruht die Stahlbereitung auf der Durchdringung des Eisens mit Kohlenoxyd, welches durch Abgabe von Kohlenstoff an das Eisen zu Kohlendioxyd wird, das dann entweicht. Daß Palladium, Platin u. s. w. nur in glühendem Zustande durchdringlich sind, beruht wohl nicht allein darauf, daß die Diffusion der Flüssigkeiten in der Hitze größer wird und daß die Verdunstung mit der Hitze zunimmt, sondern wohl hauptsächlich auf dem Festwerden der absorbirten flüssigen Gase bei niederer Temperatur. — Exner hat (1874) die Diffusion der Dämpfe durch Seifenblasenlamellen untersucht und gefunden, daß sie dem Absorptionscoëff. direct und der Quadratwurzel aus der Dichte umgekehrt proportional ist, sich also an das Diffusionsgesetz der mechanischen Wärmetheorie anschließt, während Pranghe (1877) für Leinöllamellen ähnliche Abweichungen constatirt wie Bunsen für poröse Diaphragmen.

Aufg. 346. Wie groß ist in einer vollkommenen Luftpumpe die Dichte der Luft nach 220
10 Zügen, wenn die Volumina des Stiefels und des Recipienten bezüglich 2 und 3^{cdm} sind? Aufl.: 0,006046 oder 4,595^{mm}. — A. 347. Wie viel Züge sind nöthig, um mit dieser Pumpe die Verdünnung auf 1^{mm} zu bringen? Aufl.: 13. — A. 348. Wie groß ist der Stiefel, wenn durch 2 Züge die Luft in einem 4^{cdm} großen Recipienten auf $^1/_3$ der Dichte gelangt? Aufl.: 2,9284^{cdm}. — A. 349. Welchen Inhalt hat das Verbindungsrohr, wenn der Stiefel und der Recipient bez. 1 und 2^{cdm} groß sind und die Verdünnung nach 4 Zügen $^1/_4$ beträgt? Aufl.: 0,4^{cdm}. — A. 350. Wenn diese Pumpe zu Compression verwendet wird, wie groß ist die Verdichtung nach 4 Zügen? Aufl.: 4. — A. 351. Mit welcher Geschw. strömt Wasserstoff in einen luftleeren Raum? Aufl.: 1520^{m}. — A. 352. Welche Geschw. besitzt Luft von 3^{at} Spannung, wenn sie in die Atm. strömt? Aufl.: 692^{m}. — A. 353. Welche Luftmenge strömt in 1 Min. durch 1^{qdm} aus bei gleichbleibendem Drucke von 1^{at} einerseits und gleichbleibender Leere anderseits? Aufl.: 203,4^{cbm} (Contraction mitgerechnet). — A. 354. Welche Geschw. muß ein Körper besitzen, damit er einen für kurze Zeit luftleeren Raum hinter sich zurücklasse? Aufl.: Etwas über 400^{m}.