

www.e-rara.ch

Die allgemeine Functionentheorie

Du Bois-Reymond, Paul

Tübingen, 1882

ETH-Bibliothek Zürich

Shelf Mark: Rar 22414

Persistent Link: <https://doi.org/10.3931/e-rara-76468>

Cap. V.

www.e-rara.ch

Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien – von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material – from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d'imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L'éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes – des débuts de l'imprimerie jusqu'au 20e siècle.

e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

Nutzungsbedingungen Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titelinformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

Terms of Use This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

Conditions d'utilisation Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

Condizioni di utilizzo Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]

Cap. V.

Ueber den Endverlauf der Functionen.

65. Das allgemeine Convergenz- und Divergenzprincip und der Endverlauf der Functionen, deren Argument ins Unbegrenzte wächst.

Wir haben im vorigen Kapitel den Begriff der Zuordnung der Function zum Argument im weitesten Sinne und mit aller Strenge zu entwickeln versucht, wobei es genügte, das Intervall der Argumentwerthe endlich vorauszusetzen. Erstreckt es sich ins Unbegrenzte, und sind ihm fort und fort Functionswerthe zugeordnet, so würden zunächst wiederum die idealistischen gesetzlosen Folgen in Frage kommen. Doch lehrt die Musterung aller beim Endverlauf der Functionen, d. i. bei schrankenlosem Wachsthum ihres Arguments denkbaren Möglichkeiten, dass, unabhängig von den Grundanschauungen idealistischer oder empiristischer Natur, diesem Endverlauf gewisse allgemeine Eigenschaften zukommen, dass dabei ausnahmslos gewisse Grössen und Aenderungsformen auftreten, deren genaue Feststellung für Grenz- und Convergenzbetrachtungen aller Art unerlässlich ist, und den Gegenstand dieses Capitels bildet.

An die Spitze stelle ich das allgemeine Convergenzprincip, eine Eigenschaft des Endverlaufs der Functionen, welche das Vorhandensein einer festen endlichen Grenze $\lim f(x)$ zur Folge hat.

Hierauf wird der Endverlauf solcher Functionen unter-

sucht, die keinen endlichen festen Limes haben, wobei zwei feste Grössen zum Vorschein kommen, welche dem Limes des convergenten Endverlaufs entsprechen und bei einem solchen auch unter sich und diesem Limes gleich werden. Dies sind die Unbestimmtheitsgrenzen, mit deren Hilfe sogleich das allgemeine Divergenzprincip gefolgert wird, nach welchem der Endverlauf von Functionen, denen die im allgemeinen Convergenzprincip vorausgesetzte Eigenschaft fehlt, auch nicht mit einem festen endlichen Limes abschliesst.

Jene Untersuchung des Endverlaufs der Functionen, welche die Unbestimmtheitsgrenzen ergab, wird sodann späteren Bedürfnisses wegen fortgesetzt, und führt zur Erkenntniss, dass der Endverlauf jeder irgendwie oscillirenden Function eingeschlossen ist zwischen zwei *monoton**) sich ändernden Functionen, die ich Unbestimmtheitsenveloppen nenne.

Schliesslich ist die relative Geschwindigkeit, mit welcher nur *monoton* verlaufende Functionen wachsen oder abnehmen, in Betracht zu ziehen, wobei der Begriff der infinitären Grössenfolge auftritt.

Den letzteren Gegenstand ausgenommen, der wieder auf die Grundanschauungen zurückweist, sind die oben angekündigten Erörterungen der Art, dass der idealistisch-empiristische Gegensatz nur bei dem Begriff: Grenze von numerischen Constructionen oder allgemeiner von *monoton* sich ändernden discreten Werthfolgen zur Geltung kommt, und zwar nur insofern ein genauer oder beliebig genauer Werth als Grenze

*) Diesen von Herrn C. Neumann neuerdings eingeführten bequemen Ausdruck werde ich fortan statt des in dieser Schrift pag. 9, Anm. angekündigten: »einsinnig« anwenden. Angesichts des Umstandes, dass der Druck dieses Heftes vor vier Jahren begann, wird man mir diese kleine Inconsequenz nachsehen.

angesehen wird. Es gilt dies insbesondere von den Schlüssen, durch welche wir das allgemeine Convergenz- und Divergenzprincip nachweisen. Wir dürfen es unterlassen, die beiden Anschauungsformen bei jedem Schritt auseinanderzuhalten, und können von den Grenzwerten so reden, wie der Idealist es thun würde. Ich komme hierauf an dieser Stelle zurück, weil wir gegenwärtig an den Grenzbegriff die letzte Hand legen. Seinen wesentlichsten, wenn auch einfachsten Bestandtheil, die Grenze discreter monotoner Werthfolgen, wiesen wir dem Gebiet des Grössenbegriffs zu, das nur auf diese Weise befriedigend abzuschliessen war. So gehört zwar ein Theil des Grenzbegriffs dem Grössenbegriff an, allein er hat noch einen weiteren ihm natürlich zustehenden Umfang, nämlich die Aufstellung der allgemeinen Bedingungen, unter denen irgend welche auf lineäres Grössenmaass zurückführbare Vorgänge eine Grenze haben oder nicht. Diese Bedingungen enthält das allgemeine Convergenz- und Divergenzprincip.

Wenn also dieses Princip idealistisch wie empiristisch erwiesen ist, so sind die letzten Grundlagen der Analysis, die Begriffe von Grösse und Grenze, beide durchaus gefestigt, und der Lehrer in Schrift und Wort hat keinen Anlass mehr, »den Zugang zur Analysis mit raschen Schritten zu durch-eilen« (pag. 2).

66. Das allgemeine Convergenz- und Divergenzprincip. Vorbemerkung.

Wir gaben dem allgemeinen Convergenz- und Divergenzprincip pag. 6 die Form:

Wenn der Unterschied $f(x_1) - f(x)$, $x_1 > x$ gedacht, von einem hinreichend grossen Werth von $f(x)$ an und für beliebige Werthe des Unterschiedes $x_1 - x$ unter einer beliebig klein ange-

nommenen Zahl bleibt, so hat die Function $f(x)$ einen bestimmten Grenzwert. Wenn aber nach jedem noch so grossen Werth von x sich Unterschiede $f(x_1) - f(x)$, stets $x_1 > x$ gedacht, nachweisen lassen, die grösser als eine beliebig kleine, aber unabhängig vom vorrückenden x gedachte Grösse sind, so hat $f(x)$ keine Grenze.

Hienach zerfällt unsere Untersuchung in zwei Theile, von denen der erste bloss das Convergenzprincip, d. i. das Verhalten berücksichtigt, bei dem $f(x)$ eine Grenze hat, der zweite aber die weitaus umfassendere Möglichkeit des Nichtvorhandenseins einer Grenze ins Auge fasst.

Indem wir, um das Divergenzprincip zu beweisen, die mannigfaltigen Arten, wie eine Function ihrem Argument ins Unbegrenzte folgt, durch feste Grenzpunkte einschliessen: erkennen wir von höherem Gesichtspuncte aus, unter welchen Umständen das Besondere auftritt, welches Grenze genannt wird, und gewinnen so ein wirkliches Verständniss des allgemeinen Princip.

Die Function $f(x)$ sei möglich schrankenlos. Namentlich bemerke ich, dass man zwar der Bequemlichkeit halber $f(x)$ für alle besonderen Werthe des Arguments gegeben, darunter also eine vollständig bestimmte Function (Art. 57) sich denken kann, dass unsere Schlüsse ihr aber nirgends eine solche Beschränkung auferlegen. Wenn daher von einer Function $f(x)$ von x die Rede ist, so handelt es sich nur um diejenigen x , für welche sie vorgeschrieben ist. Ich denke dabei u. A. an die Function $f(n) = u_1 + u_2 + \dots + u_n$, welche die Summe der ersten n Glieder einer Reihe vorstellt, und die nur für ganzzahlige $x = n$ vorhanden ist.

67. Das allgemeine Convergenzprincip mit seinen begleitenden Sätzen.

Es ist also der Verlauf des Unterschiedes $f(x_1) - f(x)$, $x_1 > x$, bei ins Unbegrenzte zunehmendem x , der eine erste Classification des Endverlaufs der Functionen bewirkt.

Der erste Satz ist die Umkehrung einer aus der wesentlichen Eigenschaft der Grenze unmittelbar einleuchtenden Folgerung. Hat $f(x)$ bei unbegrenztem Wachsthum von x eine Grenze Y , so ist damit gemeint, dass Unterschiede der Form $Y - f(x)$, $Y - f(x_1)$ etc. die Grenze Null haben, wenn x , x_1 etc. irgendwelche schrankenlos wachsende Werthfolgen bedeuten. Dann ist Null aber auch die Grenze des Unterschiedes $f(x_1) - f(x)$ zweier solcher Unterschiede $Y - f(x)$, $Y - f(x_1)$. Die Umkehrung lautet:

I. Wenn der Unterschied $f(x_1) - f(x)$, wo $x_1 > x$, bei schrankenlosem Wachsthum von x die Grenze Null hat, so giebt es eine Grösse Y der Art, dass auch $Y - f(x)$ bei solchem Wachsthum von x die Grenze Null hat.

Beweis. Da $f(x_1) - f(x)$, $x_1 > x$, durch hinreichend gross festzusetzende Werthe von x beliebig verkleinert werden kann, so bestimmen wir ein x' so, dass für $x' \leq x < x_1$ der absolute Werth von $f(x_1) - f(x)$ eine beliebig klein angenommene Grösse ϵ' nicht überschreitet. Dann wird für jeden Werth $x \geq x'$ $f(x)$ dem Grössenintervall $(f(x') - \epsilon', f(x') + \epsilon')$ angehören. Wir setzen $f(x') - \epsilon' = \alpha'$, $f(x') + \epsilon' = \beta'$. Weiter bestimmen wir $x'' > x'$ so, dass für $x'' \leq x < x_1$ der absolute Werth von $f(x_1) - f(x)$ eine Grösse $\epsilon'' < \epsilon'$ nicht überschreitet. Dann wird $f(x)$ für $x \geq x''$ allerdings auch dem Grössenintervall $(f(x'') - \epsilon'', f(x'') + \epsilon'')$ angehören, allein

dies braucht nicht vollständig dem Intervall (α', β') anzugehören, sondern einer der Werthe $f(x'') - \varepsilon'', f(x'') + \varepsilon''$ kann ausserhalb (α', β') liegen. Wir bezeichnen mit (α'', β'') den Theil des Intervalls $(f(x'') - \varepsilon'', f(x'') + \varepsilon'')$, der dem Intervall (α', β') angehört. Nun bleibt $f(x)$ von $x = x''$ an im Intervall (α'', β'') , welches $\leq 2\varepsilon''$ ist. Auf dieselbe Weise können wir $f(x)$ fort und fort kleinere Intervalle zuweisen. Wir bestimmen $x''' > x''$ so, dass der absolute Werth von $f(x_1) - f(x)$ für $x''' \leq x < x_1$ die Kleinheit $\varepsilon''' < \varepsilon''$ nicht überschreitet, und bezeichnen mit (α''', β''') den Theil des Intervalls $(f(x''') - \varepsilon''', f(x) + \varepsilon''')$, der dem Intervall (α'', β'') angehört. Es wird $f(x)$ von $x = x'''$ an im Intervall (α''', β''') $\leq 2\varepsilon'''$ verlaufen, u. s. f. Die Werthfolgen:

$$\alpha', \alpha'', \alpha''', \dots$$

$$\beta', \beta'', \beta''', \dots$$

die monoton sich ändern, haben je eine Grenze, und diese Grenzen sind gleich, wenn wir den $\varepsilon', \varepsilon'', \varepsilon''', \dots$ die Grenze Null vorschreiben. Y sei die gemeinsame Grenze der α und der β . Man wird nun stets einen hinreichend grossen Werth $\bar{x}$ von x angeben können, damit für $x \geq \bar{x}$ der absolute Werth des Unterschiedes $Y - f(x)$ unter einer vorgeschriebenen Kleinheit 2ε bleibe. Ist $\varepsilon^{(p)} \leq \varepsilon < \varepsilon^{(p+1)}$, so ist $\bar{x} = x^{(p)}$.

Wenn die Function $f(x)$ nicht etwa von einem Werthe ihres Arguments an constant ist, ein Fall den übrigens unser Beweis nicht ausschliesst, so nehmen die Abscissen x', x'', x''' , ins Unbegrenzte zu. Q. E. D.

Man kann den Satz noch auf andere Art beweisen, namentlich kann man die Grenze Y auch sogleich numerisch construiren. Indessen wird der obige nicht eben lange Beweis den Leser befriedigen.

Ausser dem allgemeinen Satz giebt es einen anderen Satz, der zwar weniger umfassend wie Satz I, aber doch noch allgemein genug ist, und vielfach nützlich sich erweist. Es ist der von discreten Werthen auf Functionen übertragene Satz III des Art. 46:

II. Eine monotone Function $f(x)$, die zwischen endlichen Schranken verläuft, hat bei unbegrenzt zunehmendem Argument stets eine feste Grenze.

Zu einer Zeit, wo ich diesen Satz für ein Axiom hielt, welches den eigentlichen Grenzbegriff bilden sollte, gab ich mir viel Mühe, Satz I direct daraus zu folgern. Ich wollte mich eben davon überzeugen, dass Satz II das obere Princip sei. Indessen möchte vielmehr zwischen beiden Sätzen und dem Satz von der Grenze discreter monotoner Werthfolgen folgende Beziehung bestehen. Der letztere ist in Wirklichkeit das obere Princip, insofern er den Uebergang von den elementarsten Grenzen, die man erdenken kann, wie den von uns zu Grunde gelegten Decimalbruchgrenzen zu den allgemeinen Sätzen I und II vermittelt. Der allgemeinste alle besonderen Fälle einschliessende Ausspruch über das Vorhandensein von Grenzen ist aber ohne Zweifel Satz I.

Der Limes, welchen Satz II auf Grund seiner Voraussetzungen der Monotonie und Endlichkeit der Function $f(x)$ behauptet, lässt sich zwar, wie ich gleich zeigen werde, ohne Weiteres numerisch darstellen, aber ebenso leicht lassen die Voraussetzungen dieses Satzes in jene des Satzes I sich überführen. Man beweist Satz II am Bündigsten wohl so:

Die Voraussetzungen seien: $f(x)$ nimmt monoton zu, während x ins Unbegrenzte wächst, übersteigt nicht eine feste Schranke und bleibt nicht von irgend einem Werth von x an

unverändert. Dann giebt es jedenfalls ein grösstes Vielfache α_0 der Längeneinheit, welches $f(x)$ beim Wachsen überschreitet, da diese Function sonst über alle Grenzen wachsen müsste. Es kann die Function $f(x)$ das nächstgrössere Vielfache nicht erreichen, da sie es auch überschreiten müsste, indem vorausgesetzt ist, dass sie nicht constant bleibt. Nun theilen wir die Strecke von α_0 bis $\alpha_0 + 1$ in Zehntel der Längeneinheit, und es folgt genau auf dieselbe Weise, dass es ein grösstes Vielfaches α_1 von $\frac{1}{10}$ ($\alpha_1 < 10$) giebt, welches von $f(x) - \alpha_0$ überschritten wird, während $\alpha_1 + 1$ Zehntel nicht erreicht werden. Somit verläuft $f(x)$ von einem hinreichend grossen Werthe von x an zwischen α_0, α_1 und $\alpha_0, \alpha_1 + 1$. Weiter von einem noch grösseren Werthe von x an verläuft $f(x)$ zwischen $\alpha_0, \alpha_1 \alpha_2$ und $\alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 + 1$, u. s. f. Es sei

$$Y = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots$$

Falls $f(x)$ für $x = x_p$ die Grösse $\alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p$ überschritten hat, so ist für $x < x_p$

$$\alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p < f(x) < \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p + 1$$

oder

$$f(x) - \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots < \frac{1}{10^p}$$

Es ist auch

$$Y - \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p < \frac{1}{10^p}.$$

Zieht man also von $Y - \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p$ die kleinere Grösse $f(x) - \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p$ ab, so ist a fortiori $Y - f(x) < \frac{1}{10^p}$, und kann durch hinlänglich gross angenommenes p , mithin überhaupt durch hinreichend gross gewählte untere Grenzen für x beliebig verkleinert werden. Also ist Y die Grenze von $f(x)$. Q. E. D.

Es ist noch aus dem monotonen irgend eine

endliche Grenze nicht überschreitenden Wachsthum von $f(x_1)$ die Bedingung des ersten Satzes zu folgern, dass $f(x) - f(x_1)$, $x_1 > x$, bei ins Unbegrenzte zunehmendem x die Grenze Null habe. In der That gäbe es keinen Werth x' , der Art, dass für $x' \leq x < x_1$ der Unterschied $f(x_1) - f(x)$ eine beliebig klein angenommene Grösse ε nicht mehr überschritte, so müsste es für jeden Werth x einen grösseren x_1 geben, für den $f(x_1) - f(x) > \varepsilon$ ist, und wenn eine unbegrenzte Reihe $x, x_1, x_2, \dots$ solcher Werthe gebildet wird, so folgt aus $f(x_1) - f(x) > \varepsilon$, $f(x_2) - f(x_1) > \varepsilon$, etc., dass $f(x)$ gegen die Annahme über alle Grenzen wächst.

Ich knüpfe an diese Erörterungen des Convergenzprincips folgende Zusätze. Die Bedingung des ersten Satzes, $f_1(x) - f(x)$ solle unter jede Grenze sinken, lässt sich bisweilen vortheilhaft durch eine andere ersetzen, wie folgender Satz lehrt:

III. Wenn der Quotient $\frac{f(x_1)}{f(x)}$ bei unbegrenztem Wachsthum von x und x_1 Eins zum Limes hat, so besitzt $f(x)$ stets eine Grenze. Allein $f(x)$ kann auch, ohne dass diese Bedingung erfüllt ist, eine Grenze haben, wenn nämlich Null diese Grenze ist. Dann hat an Stelle des einfachen Quotienten $\frac{f(x_1) + \alpha}{f(x) + \alpha}$, wo α eine beliebige Grösse, den Limes Eins.

Wenn $\frac{f(x_1)}{f(x)}$ den Limes Eins hat, kann $f(x)$ nicht über alle Grenzen wachsen, denn für $x_1 > x$ würde dieser Quotient ja eine Folge beliebig grosser Werthe annehmen können.

Wenn aber $f(x)$ nicht über alle Grenzen wachsen kann, so folgt aus $\frac{f(x_1)}{f(x)} - 1 = \frac{f(x_1) - f(x)}{f(x)}$, dass mit $\frac{f(x_1)}{f(x)} - 1$ auch $f(x_1) - f(x)$ den Limes Null hat. Weiter aber ergibt sich aus: $f(x_1) - f(x) = (f(x) + \alpha) \left(\frac{f(x_1) + \alpha}{f(x) + \alpha} - 1 \right)$, dass mit $f(x_1) - f(x)$ die zweite Klammer rechts verschwindet.

Ein letzter Zusatz betrifft den Unterschied $f(x) - \varphi(x)$ zweier verschiedenen Functionen und lautet:

IV. Wenn der Unterschied zweier Functionen: $f(x_1) - \varphi(x)$ unter jede Grenze sinkt, falls x und x_1 über jede Grenze wachsen, so hat sowohl $f(x)$ als φ eine Grenze, und diese Grenzen sind einander gleich.

Zwischen x und x_1 ist im Satz keine Beziehung vorausgesetzt, sie können gleich oder ungleich sein, immer muss $f(x_1) - f(x)$ die Grenze Null haben. Dies vorausgeschickt schreiben wir:

$$f(x_1) - \varphi(x) = f(x_1) - f(x) + (f(x) - \varphi(x))$$

und $f(x_1) - \varphi(x) = \varphi(x_1) - \varphi(x) + (f(x_1) - \varphi(x_1)).$

Hieraus folgt, dass $f(x)$ und $\varphi(x)$ für sich eine Grenze haben, und aus $\lim (f(x) - \varphi(x)) = 0$ ergibt sich, dass diese Grenzen gleich sind.

Hiermit ist das allgemeine Convergenzprincip erledigt. Der Beweis des Divergenzprincips erheischt jetzt, dass wir den Endverlauf von Functionen betrachten, die keinen Limes haben. Es treten bei ihnen an die Stelle des einen Limes zwei Grenzwerte, die ich Unbestimmtheitsgrenzen genannt habe, und von denen der folgende Artikel handelt.

68. Die Unbestimmtheitsgrenzen.

Die Function $f(x)$ kann offenbar, wenn x endlos wächst, nur 1. eine Grenze besitzen, oder 2. keine Grenze besitzen. Im zweiten Falle kann $f(x)$ entweder fort und fort Werthe annehmen, die an Grösse gleichviel ob in der positiven oder negativen Richtung oder in beiden alle Grenzen hinter sich lassen, oder die Function $f(x)$ wird innerhalb fester Grenzen verbleiben müssen, und, da sie keine Grenze haben soll, endlos auf und nieder schwanken.

Gehen wir näher auf den letzteren Fall ein. Man fühlt, dass, wie dieses Schwanken auch beschaffen sein mag, es, idealistisch gedacht, schliesslich zwischen festen Grenzen erfolgen muss. Genauen Aufschluss über solchen Endverlauf giebt der folgende Satz von den Unbestimmtheitsgrenzen, sein Beweis, und die daran sich knüpfende Erörterung.

V. Wenn eine Function $f(x)$ bei unbegrenzt zunehmendem Argument x innerhalb fester Schranken verläuft, so giebt es zwei feste Grössen U und O , zwischen denen $f(x)$ von hinreichend grossen Werthen von x an sich hin und her bewegt, indem sie entweder unaufhörlich ihnen beliebig nahe kommt, oder sie schliesslich um beliebig wenig überschreitet, oder endlich ihnen, ohne sie zu überschreiten, unbegrenzt oft gleich wird.

Diese Grössen U und O nennen wir die Unbestimmtheitsgrenzen der Function $f(x)$.

Zunächst muss es für jedes x eine kleinste Grösse $o(x)$ geben, die $f(x + \xi)$, wie gross ξ auch gedacht werden mag, nicht mehr übersteigt, weil vorausgesetzt ist, dass $f(x)$ nicht

ins Unbegrenzte wachsen könne (Art. 64, Satz I mit Zusatz). Die Grösse $o(x)$ nimmt bei wachsendem x nicht zu, weil sie die kleinste ist, die $f(x)$ nicht übersteigt. Dann muss aber, da auch sie nicht unter jede Grenze sinken darf, nach Satz II (Art. 67) eine bestimmte Grösse O vorhanden sein der Art, dass $O - o(x + \xi)$ durch hinreichend gross angesetztes x unter jede Grenze der Kleinheit gebracht werden kann. Die Grösse O nennen wir die obere Unbestimmtheitsgrenze. Das Vorhandensein der unteren Unbestimmtheitsgrenze U wird ganz ähnlich erwiesen. Q. E. D.

An diesen Nachweis für das Vorhandensein der Grenzen O und U knüpfe ich einige Erläuterungen und Beispiele.

1. Wie wir bei Gelegenheit der Unbestimmtheitsenveloppen eingehender prüfen werden, sind hinsichtlich der Function $o(x)$ zunächst zwei Fälle denkbar. Entweder nimmt die Function $f(x)$ von hinreichend grossem x an im Intervall (x, X) eine obere Grenze an, die bei unbegrenzt wachsendem X monoton zunimmt oder unverändert bleibt. In diesen Fällen ist $o(x)$ constant und gleich O . Dann ist O die obere Grenze von $f(x)$ im Intervall (x, ∞) , wie gross x auch genommen werden möge. Oder die obere Grenze von $f(x)$ im Intervall (x, ∞) nimmt mit zunehmendem x ab. Dies ist der Fall, in dem $o(x)$ veränderlich ist, und monoton gegen O abnimmt.

Idealistisch ausgedrückt, schwankt im Unendlichen die Function $f(x)$ zwischen den Werthen O und U hin und her, denen sie unaufhörlich wiederkehrend gleich wird.

2. Man pflegt von einer Function, deren Unbestimmtheitsgrenzen O und U verschieden sind (denn sie können ja auch gleich sein), zu sagen, sie wird unbestimmt für $x = \infty$. Falls sie stetig ist, so bedeutet dies, dass sie jeden Werth

des Intervalls $(U + \varepsilon, O - \varepsilon_1)$ unbegrenzt oft annimmt, wo die Grössen ε und ε_1 , die von vornherein Null sein können (z. B. ε_1 falls $o(x)$ constant $= O$ ist), um so kleiner sind, je grösser die Functionsargumente angenommen werden. Man kann dies analytisch so ausdrücken:

$$\lim f(x) = \frac{O + U}{2} + j \frac{O - U}{2}$$

indem j jeden Werth des Grössenintervalls $(-1, +1)$ vorstellt. Das Zeichen j nimmt, so zu sagen, die Unbestimmtheit der Grenze in sich auf.

Wenn dagegen die Function $f(x)$ nicht stetig ist, so wird sie auch nicht jeden Zwischenwerth zwischen O und U anzu-nehmen brauchen, und dann wird j entweder nur $+1$ und -1 , oder diese beiden Werthe und zugleich eine angemessene Anzahl Zwischenwerthe bedeuten.

Es ist vielleicht nicht überflüssig, auf den Unterschied aufmerksam zu machen zwischen dem Zeichen j und dem gebräuchlichen Θ , mit welchem Cauchy einen unbekannten Werth zwischen 0 und 1 zu bezeichnen pflegt, u. A. wo es sich um Restbetrachtungen handelt, bei denen z. B. ein mittlerer Werth zwischen x und $x + h$ mit $x + \Theta h$, $0 \leq \Theta \leq 1$ bezeichnet wird. Diese mit dem Θ bezeichnete subjective Unkenntniss eines bestimmten einem bekannten Intervall angehörigen Werthes ist natürlich himmelweit verschieden von der objectiven durch j angegebenen Unbestimmtheit.

3. Um einige Beispiele von Unbestimmtheitsgrenzen zu geben, sei erstens $f(x) = \cos \alpha x$. Es wird $f(x)$ zwischen -1 und $+1$ schwanken, diese Werthe unbegrenzt oft erhalten, aber nicht übersteigen. Setzt man weiter $f(x) = e^{-\frac{1}{x}} \cos \alpha x$

und $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \cos \alpha x$, so werden die Grenzen der Unbestimmtheit dieser Functionen dieselben sein, nur wird die erstere die Werthe $-1, +1$ nie erreichen, die zweite wird sie stets übersteigen. Bei Functionen mit den Unbestimmtheitsgrenzen $-1, +1$ ist der Limes j . So hat man z. B.

$$\lim e^{\frac{1}{x}} \cos x = \frac{1-1}{2} + j \frac{1+1}{2} = j.$$

Ich erwähne sodann Functionen, die nur sprungweise sich ändern. So können wir bestimmen, dass $f(x)$ für $n \leq x < n+1$ (n eine ganze Zahl) einen constanten Werth $\varphi(n)$ hat, wo $\varphi(n)$ eine gegebene Function der ganzen Zahl n .

Setzen wir z. B. $\varphi(n) = \sin n \frac{\pi}{m}$, so wird $f(x)$ wieder die Unbestimmtheitsgrenzen $+1, -1$ haben, wenn m gerade ist.

Ist dagegen m ungerade, so sind $\pm \left(1 - \sin \frac{\pi}{2m}\right)$ die Unbestimmtheitsgrenzen. Indem man $\varphi(n) = u_1 + u_2 + \dots u_n$, d. i. gleich der Summe n der ersten Glieder einer Reihe setzt, werden die Unbestimmtheitsgrenzen in die Reihentheorie eingeführt, wo sie ganz besondere Dienste leisten.

Geometrisch hat man die Unbestimmtheitsgrenzen als ein Paar gerade der x -Axe parallele Linien sich vorzustellen, die von ihr nur beziehlich U und O abstehen. Die Function $f(x)$, die, wenn vorstellbar, eine ins Unbegrenzte in der Richtung der positiven x sich erstreckende Linie ist, mag zunächst irgendwie verlaufen, schliesslich wird sie immer mehr in den Streifen zwischen den Geraden U und O eingeschlossen, wenn sie ihn nicht von vornherein innehielt.

69. Das allgemeine Divergenzprincip.

Nunmehr ist der Functionsendverlauf so weit zergliedert, dass wir das allgemeine Divergenzprincip beweisen können, welches lautet:

VI. Wenn der Unterschied $f(x_1) - f(x)$ nicht für alle Werthe x und x_1 , die oberhalb einer hinlänglichen Grösse befindlich sind, unterhalb einer beliebig kleinen Grenze bleibt, so hat $f(x)$ keinen festen Limes.

Wir führen diesen Beweis durch Mustern der möglichen Fälle des Endverlaufs der Functionen: Falls $f(x)$ über alle Grenzen wächst oder abnimmt, kann $f(x_1) - f(x)$ stets beliebig gross angetroffen werden. Wenn weiter $f(x)$ zwischen endlichen Schranken verläuft, und die alsdann stets vorhandenen Unbestimmtheitsgrenzen O und U der Function $f(x)$ verschieden sind, so kann, da $f(x)$ beiden Grössen O und U schliesslich beliebig nahe kommt, der Unterschied $f(x_1) - f(x)$, $x_1 > x$, dem Unterschiede $O - U$ um so näher gebracht werden, je grösser x ist.

Endlich seien O und U einander gleich. Es bezeichnen $o(x)$ und $u(x)$ beziehlich die obere und untere Grenze der Function $f(x)$ im Intervall (x_1, ∞) , so dass in diesem Falle $\lim o(x) = \lim u(x) = O = U$. Da aber stets $o(x) \geq f(x) \geq u(x)$ ist, so muss, falls $O = U$, der Unterschied $f(x) - f(x)$ die Grenze Null haben, wenn die Argumente x und x_1 schrankenlos zunehmen. Es sind also drei Fälle möglich. 1. Die Function $f(x)$ verläuft nicht zwischen festen endlichen Schranken. 2. Sie thut es, aber ihre Unbestimmtheitsgrenzen sind verschieden. 3. Sie sind einander gleich. Nur im dritten Falle ist nach

dem Obigen der Limes von $f(x_1) - f(x)$ Null, wie x und x_1 auch ins Unbegrenzte wachsen mögen. Wenn $f(x_1) - f(x)$ sich anders verhält, so tritt der dritte Fall nicht ein. Dann wird mithin $f(x)$ entweder endliche verschiedene Unbestimmtheitsgrenzen O und U haben, oder überhaupt nicht zwischen endlichen Schranken verlaufen, und in diesen beiden Fällen heisst ein durch $f(x)$ bezeichneter unendlicher Process divergent.

Hiermit ist denn auch das allgemeine Divergenzprincip erledigt, und der allgemeine Satz über den Zusammenhang des Endverlaufs von $f(x)$ mit dem des Unterschiedes $f(x_1) - f(x)$ ($x_1 > x$) in allen Theilen bewiesen.

Wir sind durch diesen Beweis zu allgemeinen Ueberlegungen über den Gang der Functionen im Unbegrenzten veranlasst worden, die wir noch nicht abbrechen mögen. Die Unbestimmtheitsgrenzen sind schon feste Punkte in der Mannigfaltigkeit des Functionenverlaufs. Wir brauchen aber nur noch ein wenig weiter in den Möglichkeiten, welche diese Mannigfaltigkeit umfasst, sachtend einzudringen, um auch feste Linien zu entdecken, welche jeden noch so schwankenden und zufälligen Vorgang ins Unbegrenzte geleiten. Manchen analytischen Convergenzuntersuchungen wird hierdurch das Eingehen auf die Schwankungen erspart, und der Vortheil gewährt, es nur mit monoton sich ändernden Functionen zu thun zu haben.

Die festen Linien, welche jedem unbegrenzten Vorgang eigenthümlich sind, nenne ich Unbestimmtheitsenveloppen und ihre Beschreibung und Theorie ist folgende.

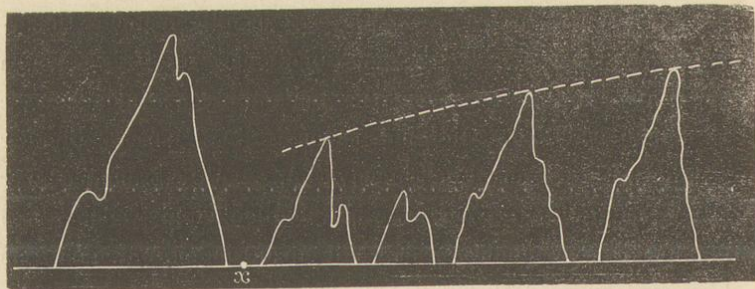
70. Die Theorie der Unbestimmtheitsenveloppen.

Wir unterwerfen gegenwärtig den Functionsverlauf keiner

Beschränkung, $f(x)$ kann endlich bleiben, oder jede Schranke überschreiten. Drei Arten ihres Verlaufs erschöpfen alle Möglichkeiten.

1. Entweder erhält die Function $f(x)$, wenn x von einem hinreichend grossen Werth X an wächst, beständig wiederkehrend Werthe, die grösser sind, als alle früheren von X an. Idealistisch würde man sagen, dass, $x > X$ vorausgesetzt, $f(x)$ erst für $x = \infty$ seinen grösstmöglichen endlichen oder unendlichen Werth annimmt. Figur 2 veranschaulicht solchen Verlauf, falls z. B. $f(x)$ endliche Schranken nicht überschreitet. Dies ist die erste Art des Functionsverlaufs.

Fig. 2.



Oder $f(x)$ nimmt bei wachsendem x unaufhörlich Werthe an, die von keinem folgenden Functionswerth überschritten werden. Ein drittes giebt es nicht. Dies liefert die beiden anderen Arten des Functionsverlaufs:

2. Es nimmt $f(x)$ bei wachsendem x unaufhörlich Werthe an, die für kein grösseres x je wieder erreicht werden.

3. $f(x)$ erhält von einem Werth X von x an unaufhörlich einen gewissen Werth, der zwar für grössere Werthe des Arguments immer wieder erreicht, aber nicht überschritten wird.

Die Figuren 3 und 4 sollen eine Vorstellung vom Functionsverlauf 2 und 3 geben.

Fig. 3.

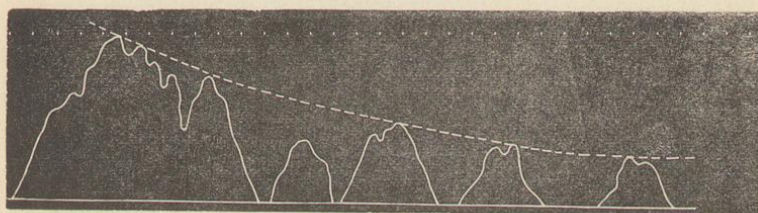
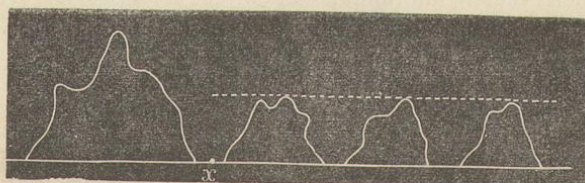


Fig. 4.



Diese Unterscheidungen gestatten den unbegrenzten Verlauf der Functionen überhaupt einzuschliessen zwischen solchen Functionen, bei denen kein Wechsel zwischen Ab- und Zunehmen stattfindet.

1. Im ersten Fall lassen wir von einem hinreichend grossen Werth X von x an diese Veränderliche wachsen, und beschreiben eine monoton zunehmende Function $O(x)$ wie folgt.

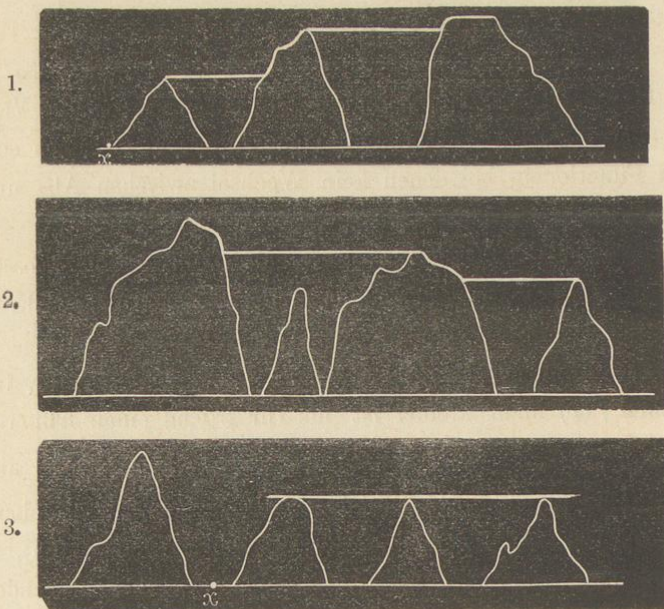
Es sei zunächst X_1 der erste Werth von $x > X$, für welchen $f(x)$ nicht kleiner ist als für irgend einen früheren Werth von x ($X \leq x < X_1$). Im Intervall $X \dots X_1$ sei alsdann $O(x)$ gleich $f(x)$. Von da ab wird $O(x)$ so beschrieben:

Es sei $O(x) = f(x)$ für alle Werthe x (von X_1 an), in denen $f(x)$ grösser ist als irgend einer der vorhergehenden Werthe von x . Für die übrigen Werthe x ist $O(x)$ stets gleich dem letzten Werthe $O(x)$, der gleich $f(x)$ war.

2. Wenn $f(x)$ bei wachsendem x unaufhörlich wiederkehrend Werthe annimmt, die für keinen grösseren Werth x wieder erreicht werden, so sei X der erste dieser Werthe. In diesem Falle bestimmen wir eine nirgend zunehmende Function $O(x)$ so, dass $O(x) = f(x)$ für alle Werthe, in denen $f(x)$ grösser ist, als für alle folgenden Werthe von x . Für die übrigen Werthe von $x > X$ sei $O(x)$ gleich dem ersten darauf folgenden Werthe von x für den $O(x) = f(x)$.

3. Wenn $f(x)$ von einem Werthe X von x an unaufhörlich einen Werth annimmt, der zwar stets wieder erreicht, aber nie überstiegen wird, sei $O(x)$ gleich diesem Werthe.

Die drei Fälle werden durch folgende Figuren verbildlicht, in denen die stärker ausgezogene Linie $O(x)$ vorstellt:



Bei der im Vorstehenden beschriebenen Construction der

Unbestimmtheitsenveloppen hatte ich den Zweck, möglich kurz und allgemein das Vorhandensein solcher jede unbegrenzte Operation ins Endlose einschliessender Linien ausser Zweifel zu setzen. Evident gibt es aber solcher monoton sich ändernder Functionen, welche zum Endverlauf von $f(x)$ genau in denselben Beziehungen stehen, unzählige. Das Gewicht soll nun gerade auf diese Beziehungen gelegt werden, und die Gestalt der Unbestimmtheitsenveloppe, falls sie nur dasselbe leistet, wie die oben beschriebenen, ist unwesentlich. Somit setzen wir den Begriff der Unbestimmtheitsenveloppen durch folgenden Satz fest:

VII. Es sei irgend eine Function $f(x)$ eines Arguments x gegeben, welches wir ins Unbegrenzte wachsend uns denken. Alsdann giebt es stets zwei Functionen $O(x)$ und $U(x)$, die folgende Eigenschaften besitzen:

1. Jede dieser Functionen ändert sich monoton, kann aber auch constant sein.
2. Es wird bei schrankenlos wachsendem x sowohl $O(x) - f(x)$ als auch $f(x) - U(x)$ unbegrenzt oft Null.
3. Es ist stets $O(x) \geq f(x) \geq U(x)$, aber nur im Falle $f(x)$ selbst monoton sich ändert, ist $O(x) = f(x) = U(x)$.
4. Falls die Functionen $O(x)$ und $U(x)$ Grenzen haben, sind dies die Unbestimmtheitsgrenzen O und U von $f(x)$.

Jede Function, welche die vorstehenden vier Eigenschaften der Functionen $O(x)$, $U(x)$ hat, soll Unbestimmtheitsenveloppe heissen. Die Function $f(x)$ wird zwischen ihnen gleich-

sam hin und her geworfen. Unter Enveloppen im Monge'schen Sinne werden freilich anders gedachte Gebilde verstanden, indessen mag mir diese Namengebung zu Gunsten des einhüllenden Charakters der Functionen $O(x)$, $U(x)$, nachgesehen werden.

Dieser mein Begriff der Unbestimmtheitsenveloppen ist schon nützlich, wenn es sich darum handelt, den Verlauf der Functionen kurz zu beschreiben. In der That, es können

1. beide Enveloppen in positiver oder beide in negativer oder die eine in positiver, die andere in negativer Richtung alle Schranken überschreiten.
2. Es kann eine von ihnen alle positiven oder negativen Schranken überschreiten, und die andere eine Grenze haben.
4. Sie können beide eine Grenze haben.
5. Sie können untereinander und mit der Function $f(x)$ identisch sein, falls diese nämlich selbst monoton sich ändert.

Dies sind allgemeinere Unterscheidungen. Weiter kann man sodann fragen, ob sie ihren Grenzen wachsend, abnehmend, oder constant bleibend sich nähern.

Es können nach diesen Principien im Ganzen 24 charakteristische Arten des Functionenverlaufs abgezählt werden, wenn man den Fall, dass $O(x)$ und $U(x)$ dieselbe Grenze haben, besonders in Rechnung zieht, und den Fall der monotonen Aenderung von $f(x)$ einfach rechnet.

Bedeutet w, a, c : zwischen endlichen Grenzen wachsend, abnehmend, constant; ferner $+\infty, -\infty$: alle positiven, alle negativen Schranken hinter sich lassend, so sind dies die Fälle:

	$O(x)$	$U(x)$	
	$+\infty$	$-\infty$	1
	$-\infty$	$-\infty$	1
	$+\infty$	$-\infty$	1
	$+\infty$	wac	3
	wac	$-\infty$	3
$O > U$	wac	wac	9
$O = U$	wac	wac	5
	$O(x) =$	$U(x) = f(x)$	1
			24

Für die Anwendung wird vor der Hand die obige Unterscheidung in 5 Fälle genügen, und diese 24 Fälle sollen hauptsächlich zur Ausführung des Bildes dienen.

Ich gebe zum Schluss dieses Artikels noch einige Beispiele von Unbestimmtheitsenveloppen.

Betrachten wir die Functionen $e^{\frac{1}{x}} \cos x$, $e^{-\frac{1}{x}} \cos x$, $\cos x$.

Bei der ersten kann man setzen $O(x) = e^{\frac{1}{x}}$, $U(x) = -e^{\frac{1}{x}}$,

bei der zweiten $O(x) = e^{-\frac{1}{x}}$, $U = -e^{-\frac{1}{x}}$, bei der dritten

$O(x) = O = 1$, $U(x) = U = 1$. Für $e^{\pm \frac{1}{x}} \cos x$ hat man:

$$O(x) - f(x) = e^{\pm \frac{1}{x}} (1 - \cos x)$$

eine Grösse die unbegrenzt oft verschwindet, aber nicht negativ wird, so dass die Kriterien des Satzes VII erfüllt sind.

Die Unbestimmtheitsenveloppen von $\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} \cos x$, sind $\pm \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$, und die Unbestimmtheitsgrenzen sind $O = U = 0$.

69. Ueber den monotonen Endverlauf der Functionen und die infinitäre Pantachie.

Von grossem Belang ist das im vorigen Artikel nur kurz berührte Verhalten, bei dem die Function $f(x)$ selbst monoton sich ändert, so dass $O(x) = U(x) = f(x)$. Denn an diese Monotonie reiht sich alles, was auf die relative Zu- und Abnahme der Functionen Bezug hat.

Eine monotone Function kann alle positiven und negativen Schranken überschreiten, oder sie kann eine endliche Grenze haben. Im ersten Falle wird es genügen, den zunehmenden Functionsverlauf zu untersuchen. Im zweiten wird man Null als Grenze annehmen dürfen, da eine andere Grenze doch nur von der Function abgezogen zu werden braucht, um die Grenze Null zu ergeben. Weil aber die monotonen Functionen, welche die Grenze Null haben, als solchen, die ins Unbegrenzte wachsen, reciprok angesehen werden können, so dürfen wir uns hier überhaupt auf die Betrachtung letzterer beschränken.

Es handelt sich also um Functionen, die, idealistisch ausgedrückt, nur wachsend unendlich werden. Die Theorie der relativen Geschwindigkeit dieses Wachstums ist der Gegenstand des Infinitärcalculs, den wir an späteren Stellen eingehend entwickeln werden. Nur soviel von den Elementen jener Theorie will ich hier zur Sprache bringen, als für die Grundbegriffe der allgemeinen Functionentheorie, deren Erörterung ich mit diesem Artikel abschliesse, erforderlich scheint.

Wir stellen uns eine Reihe monoton ins Unbegrenzte wachsender Functionen vor, und betrachten irgend zwei Functionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ dieser Reihe. Man wird sagen, dass $f(x)$ rascher ansteigt als $\varphi(x)$, wenn von einem hinreichend grossen Werth X von x an $f(x) > \varphi(x)$ ist, und der Unter-

schied $f(x) - \varphi(x)$ mit x zunimmt. Die Anwendungen verleihen dieser verschiedenen raschen Zunahme der Functionen ein besonderes Interesse, wenn die rascher wachsende Function $f(x)$ so viel rascher wächst als die andere $\varphi(x)$, dass der Quotient $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ ebenfalls schrankenlos wächst.

Der eigenthümlichen Natur gerade dieses Gegenstandes ist übrigens die empiristische Ausdrucksweise so wenig angemessen, sie würde schliesslich so schleppend werden, dass wir wenigstens hier die Anwendung idealistischer Terminologie uns nicht versagen wollen. Wir wissen nunmehr ja doch genau, was wir uns dabei zu denken haben, und ist es nicht gerade ein willkommener Erfolg unserer Untersuchung über die Principien, dass sie, wie jede gründliche Aufklärung, nicht allein dem Gedanken, sondern auch dem Wort freiere Bewegung gestattet?

Je nachdem der Quotient $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ den Limes ∞ oder 0 hat, werden wir sagen: $f(x)$ hat ein grösseres oder kleineres Unendlich als $\varphi(x)$, und wenn dieser Quotient einen von 0 und ∞ verschiedenen Limes hat, so haben $f(x)$ und $\varphi(x)$ ein gleiches Unendlich. Es hat sich als nützlich herausgestellt, hierfür Zeichen einzuführen.

Es bedeutet:

$$f(x) > \varphi(x), f(x) < \varphi(x), f(x) \sim \varphi(x)$$

genau dasselbe wie:

$$\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \infty, \lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0, 0 < \lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} < \infty$$

oder $f(x)$ hat ein grösseres, ein kleineres, das gleiche Unendlich wie $\varphi(x)$. Die Relationen $f(x) \begin{matrix} > \\ \sim \\ < \end{matrix} \varphi(x)$ nenne ich in-

finitäre Gleich- oder Ungleichheiten, und sie lassen mannigfache Operationen zu, die eine eigene Rechnungsart, eben den Infinitärcalcul bilden. Ich erwähne hier nur das Nächstliegende, dass man aus den infinitären Relationen:

$$f(x) > f_1(x), \varphi(x) > \varphi_1(x), \lambda(x) \sim \lambda_1(x)$$

sogleich diese schliesst:

$$f(x) \varphi(x) > f_1(x) \varphi_1(x), f(x) \lambda(x)^{+1} > f_1(x) \lambda_1(x)^{+1}$$

und je nachdem $f(x) > \lambda(x)$ oder $\asymp \lambda(x)$:

$$f(x) \pm \lambda(x) \asymp f_1(x) \pm \lambda_1(x).$$

Auch nur vorübergehend erwähne ich, dass dieselben Benennungen und Formeln für unbegrenzt gegen die Null abnehmende Functionen gelten, nur wird man dort die Relationen

$$\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0 \text{ oder } f(x) < \varphi(x) \text{ in Worten durch: } f(x)$$

hat eine kleinere Null wie $\varphi(x)$ wiedergeben.

Die Grösse der Unendlich liefert offenbar ein Anordnungsprincip für monoton ansteigende Function. Man kann sie so in eine Reihe:

$$f_0(x) \dots f_1(x) \dots f_2(x) \dots$$

anordnen, dass jede folgende ein grösseres Unendlich wie alle früheren hat, und es wird hier jede neu hinzukommende einen ganz bestimmten Platz finden, wobei, falls das Unendlich der neuhinzukommenden Function in der Reihe schon vertreten ist, es als das schon vorhandene deckend angesehen wird, wie in der lineären Grössenfolge 1 und 0,99...

Eine derartige Reihe ist, wenn

$$\log nat = lx, llx = l_2x, llx = l_3x, \text{ etc.}$$

gesetzt wird:

$$\dots (l_3x)^\mu \dots (l_2x)^\mu \dots (lx)^\mu \dots x^\mu \dots e^{\mu x} \dots e^{\mu e^{\mu x}} \dots J.$$

Jeder Quotient einer dieser Functionen durch eine der vorhergehenden hat den Limes ∞ .

Bei diesen und zusammengesetzteren Functionen, welche gleichfalls dem aus dem Potenzbegriff hervorgegangenen analytischen Operationsgebiet angehören, ermittelt man den Quotientenlimes durch Zurückführung auf einen der Quotienten

$\frac{x}{\ln x}$ oder $\frac{e^x}{x}$, die durch Substitution sogleich auf einander zurückführbar sind. Wenn man dem Begriff der Exponentialgrösse

e^x die Reihe $\sum \frac{x^n}{n!}$ zu Grunde legt, so ist $\frac{e^x}{x}$ der fundamentale Quotient, und sein Limes, oder der des allgemeinen Quotienten

$\frac{e^{\mu x^x}}{x^M}$ ist leicht zu bestimmen. In Reihenform lautet dieser Quotient:

$$\sum \frac{\mu^n x^{xn-M}}{n!}.$$

Da nun $xn-M$, wie gross M und wie klein x auch sein mag, mit wachsendem n einmal positiv wird, so ist der fragliche Limes ∞ . Beispielsweise sei der Quotient

$$e^{\mu e^{\mu_1 x^k}} \cdot e^{-mx^k}$$

zu reduciren. Sein Logarithmus ist:

$$mx^k \left\{ \frac{\mu}{m} \frac{e^{\mu x^k}}{x^k} - 1 \right\},$$

und wird nach dem Obigen mit x unendlich.

In der obigen Reihe J bedeuten die Parameter $\mu, \mu_1, \dots, x$ irgend welche positive Zahlen. Jede der darin verzeichneten Functionen bedeutet daher eine unendliche Schaar oder eine vollständige Pantachie von einzelnen Functionen. Allein die

Reihe J lässt sich noch auf sehr mannigfaltige Weise mit Functionen bereichern. Ein solches Verfahren ist folgendes: Es gelte für zwei Functionen u_1 und u_2 die infinitäre Ungleichheit $u_1 < u_2$, und man setze $u_2 = u_1 v$, so hat man:

$$u_1 < u_1 v^{\mu} (lv)^{m_1} (l_2 v)^{m_2} \dots (l_n v)^{m_n} < u_2,$$

wo $u < 1$, und die m irgendwelche positive Zahlen vorstellen. Es ist leicht diese Formeln successive zu bestätigen. Auf diese Weise kann man zwischen irgend zwei Functionen mannigfache Schaaren anderer Functionen einschalten.

Ein anderes Verfahren die Reihe J zu verdichten, ist, dass man an Stelle der Parameter Functionen setzt. So ist für $0 < \mu < 1$; m und $M > 0$:

$$(lx)^M < (lx)^{(lx)^{\mu}} < x^m.$$

Wenn man etwas über diese analytischen Ausdrücke nachdenkt, so erkennt man, dass mit Hilfe jener beiden Verdichtungsmethoden die Reihe J eine Vielheit vorstellt, die alle früheren weit überragen möchte.

Alles wohl erwogen, vermuthe ich in der That, dass die vollständige Pantachie der lineären Grössen an Mächtigkeit (im G. Cantor'schen Sinne) der Vielheit der Unendlich nicht gleichkommt. Die infinitäre Pantachie, wie diese Succession genannt werde, ist ein völlig bestimmter Inbegriff. Alle Functionen, welche in die infinitäre Gleichheit $f(x) \sim f_1(x)$ für $f_1(x)$ eingesetzt, ihr genügen, bilden mit $f(x)$ zusammen eine infinitäre Grösse, einen infinitären Punct, und diese Puncte, so viel ihrer nur immer gedacht werden können, fügen sich einer völlig bestimmten Reihenfolge ein. Allerdings wird durch solche Bestimmung den infinitären Punkten nicht ohne Weiteres ein geometrisch vorstellbarer Ort angewiesen,

wie den Grössen der vollständigen Pantachie. Indessen liegt dies daran, dass die vollständige Grössenpantachie unmittelbar der Grössenvorstellung entspringt, und der vollständigen infinitären Pantachie minder einfache Vorstellungen zu Grunde liegen. Aber für das eigentliche Wesen der vollständigen Grössenpantachie ist der Ort, den ihre Individuen einnehmen, ja nebensächlich, da er durch functionale Zuordnung mannigfach geändert werden kann. Mit der vollständigen Pantachie behält die infinitäre gemein dies Wesentliche, dass beider Punkte nur einer Reihenfolge fähig sind.

Wir können die infinitäre Pantachie empiristisch und idealistisch auffassen. Empiristisch ist sie so zu verstehen, wie wir sie eben beschrieben haben, als beliebig zu verdichtende Menge von Individuen. Idealistisch ist sie ein infinitäres Continuum, ähnlich dem Zahlencontinuum, welches man ebenfalls, wenn auch minder einfach, als Punctvielfheit auf einer Linie auffassen kann. Man hat die Bedingung aufzustellen, dass für irgend zwei Individuen $f(x)$ und $f_1(x)$ der ansteigenden Curvenschaar der Unterschied $f(x) - f_1(x)$ bei wachsendem x sein Zeichen nicht ändert. Dann sei eine auf der Abscissenaxe senkrechte Gerade gedacht, deren Schnittpunkte mit den ansteigenden Puncten wir ins Auge fassen. Theils wegen der vorstehenden Bedingung, theils damit die sämmtlichen höheren Logarithmen aus der Abscissenaxe emporgestiegen seien, werden wir jene Gerade in unendliche Ferne rücken lassen müssen.

Die Punkte der unendlich fernen Geraden sind alsdann das idealistisch-geometrische Aequivalent der infinitären Pantachie.

Es möchte nicht leicht sein, die infinitäre Pantachie mit der vollständigen Pantachie im Sinne Herrn G. Cantor's in

Bezug auf deren relative Mächtigkeit zu vergleichen. Auf alle Fälle sind beide Vielheiten offenbar etwas ganz Verschiedenes. Die Zuordnung von Element zu Element, welche bei abzählbaren Vielheiten ihren guten Sinn hatte, ist hier undenkbar. Schon dem äusseren Anschein nach ist die infinitäre Pantachie, idealistisch wie empiristisch, viel mannigfaltiger zusammengesetzt, als die vollständige. Functionen mit unbegrenzt vielen Parametern, deren jeder eine vollständige Pantachie bedeutet, lassen sich zwischen je zwei Individuen der Pantachie einschalten, und sodann wiederum zwischen je zwei Individuen der eingeschalteten Functionen, u. s. f.

Doch mehr als solche Erwägungen bestimmen mich beide Pantachien für verschiedenartig zu halten die Ergebnisse, zu denen ich in meinen »Paradoxen des Infinitärcalculs« gelangt bin. Dort ist ein wesentlicher Unterschied aufgedeckt zwischen der Annäherung an ein besonderes Unendlich der infinitären Pantachie, und einem besonderen Werth der vollständigen Pantachie. Wir können den Satz so ausdrücken: Jedem besonderen Werth x einer vollständigen Pantachie nähern sich beliebig viele abzählbare Werthfolgen der Art, dass die Unterschiede zwischen x und den x sich nähernden Werthen der verschiedenen Werthfolgen unter jede Grenze sinken. Ist dagegen ein Unendlich $f(x)$ gegeben, so giebt es keine Folge von Functionen $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots$, für die z. B. $\psi_1(x) < \psi_2(x) < \dots < f(x)$ ist, der Art, dass nicht andere Folgen $\varphi_1(x), \varphi_2(x) < \dots < f(x)$ angebbar wären, deren sämtliche Individuen grössere Unendlich wie die sämtlichen $\psi(x)$ haben.

Dies ist eine Verschiedenartigkeit, welche keine Zuordnung der infinitären Folge zur Grössenfolge zu gestatten scheint.
