

**www.e-rara.ch**

## **Einleitung in die Infinitesimal-Rechnung zum Selbstunterricht**

II. Theil: Integral-Rechnung

**Lübsen, Heinrich B.**

**Hamburg, 1855**

**ETH-Bibliothek Zürich**

Shelf Mark: Rar 22508

Persistent Link: <http://dx.doi.org/10.3931/e-rara-77171>

Einleitung.

---

### **www.e-rara.ch**

Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien – von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material – from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d'imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L'éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes – des débuts de l'imprimerie jusqu'au 20e siècle.

e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

---

**Nutzungsbedingungen** Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titelinformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

**Terms of Use** This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

**Conditions d'utilisation** Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

**Condizioni di utilizzo** Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]

## Einleitung.

### 1.

Die Integralrechnung ist in rein formeller Hinsicht gerade das Umgekehrte der Differentialrechnung. Denn abgesehen von den mancherlei Anwendungen der Differentialrechnung, welche zusammen den eigentlichen materiellen Begriff derselben bilden, ist ihr nächster Zweck, von einer gegebenen Function einer veränderlichen Grösse das Differential dieser Function anzugeben. So ist z. B. von  $x^5$  das Differential  $= 5x^4 dx$ . In Zeichen:  $d \cdot x^5 = 5x^4 dx$ .

Umgekehrt ist nun, nach dem ersten, rein formellen, vorläufig noch alle Anwendungen ausschliessenden Begriff der Integralrechnung, ihr nächster Zweck: zu einem gegebenen Differential einer veränderlichen Grösse die zugehörige ursprüngliche Function zu finden, welche dann das Integral des gegebenen Differentials heisst. So ist z. B.  $x^5$  das Integral von  $5x^4 dx$ .

Um anzudeuten, dass das Integral zu einem Differential gesucht werden soll, ist von Leibnitz das Zeichen  $\int$  gewählt, welches man vor das gegebene Differential setzt. So ist z. B.  $\int 5x^4 dx = x^5$ .

### 2.

Nach Leibnitz's Anschauung bedeutet das Wort Integral so viel als Summe einer unendlichen Reihe unendlich kleiner Grössen und das Zeichen  $\int$  das Summirungszeichen. Wir werden später bei der Anwendung der Integralrechnung zeigen, dass man in vielen Fällen das Integral eines Differentials wirklich als eine Summe betrachten kann. Vorläufig aber muss der Anfänger sich

an dem engen Begriff halten und unter Integral nichts anderes verstehen, als die zu einem gegebenen Differential gehörige Function, welche also differentiirt, das gegebene Differential wieder giebt. Erst müssen wir wenigstens einige Differentiale integrieren, d. h. ihre Integrale finden können, bevor wir Anwendungen machen, den Nutzen der Integralrechnung zeigen und so nach und nach zu ihrem erweiterten (materiellen) Begriff gelangen können.

Bemerken wollen wir noch, dass, obgleich wir jede Function zu differentiiren wissen, wir jedoch, strenge genommen, nicht auch umgekehrt jedes Differential integrieren können, und in solchen Fällen uns immer mit einer Annäherung begnügen müssen, so wie, vergleichsweise, wir wohl jede Zahl potentiiren, nicht aber umgekehrt aus jeder Zahl eine Wurzel ziehen können, weil ja die meisten irrational sind.

## 3.

Zunächst merke man sich die aus den in der Differentialrechnung (§ 31) aufgestellten Differentialformeln, sich von selbst ergebenden sogenannten Integrationsformeln, die man im Gedächtniss behalten muss. Diese sind nämlich:

$$\begin{array}{ll}
 1. \int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} & 6. \int \sin x dx = -\cos x \\
 2. \int e^x dx = e^x & 7. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \\
 3. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} & 8. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cot} x \\
 4. \int \frac{dx}{x} = \ln x & 9. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{Arc} \sin x \\
 5. \int \cos x dx = \sin x & 10. \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{Arc} \operatorname{tg} x
 \end{array}$$

## 4.

Zu vorstehenden zehn Fundamentalformeln haben wir noch ein paar Bemerkungen zu machen.

1. Nach der ersten Formel muss man, um das Integral  $\int x^m dx$  zu erhalten, zu dem Exponenten  $m$  eine Einheit addiren und dann die neue Potenz  $x^{m+1}$  durch den neuen Exponenten  $m+1$  dividiren. So ist z. B.:

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4}; \quad \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}; \quad \int x^{-4} dx = -\frac{1}{3}x^{-3}$$

Diese Regel gilt (den einzigen Fall, wo  $m = -1$  ist ausgenommen) für alle, ganze oder gebrochene, positive oder negative, Exponenten. Der Fall, wo  $m = -1$  ist, führt auf die vierte Fundamentalformel.

Es ist nämlich:  $\int x^{-1} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln x$ . Die übrigen neun Formeln sind aber ganz allgemein gültig.

2. Es ist leicht einzusehen, weil es schon aus den Differentialformeln (Diff.-Rechn. § 31) folgt, dass man einen constanten unter dem Integrationszeichen stehenden Factor immer vor dasselbe setzen kann. So ist z. B.:

$$\int 4x^5 dx = 4 \int x^5 dx = 4 \cdot \frac{x^6}{6} = \frac{2}{3}x^6.$$

$$\int ax^m dx = a \int x^m dx = \frac{a}{m+1} x^{m+1}$$

$$\int a \cos x dx = a \int \cos x dx = a \cdot \sin x$$

3. Da die Differentiale zweier Functionen, die sich nur um ein constantes Glied unterscheiden, vollkommen gleich sind (Diff.-Rechn. § 14, 1), so ist klar, dass man jedem gefundenen Integral immer eine ganz beliebige constante Grösse, sowohl mit dem plus- als minus-Zeichen hinzufügen könnte. So ist z. B.:

$$\int e^x dx = e^x; \text{ aber auch } \int e^x dx = e^x \pm c$$

weil sowohl die Function  $e^x$ , als auch  $e^x \pm c$ , differentirt, das gegebene Differential wiedergibt. Da wir aber erst bei den Anwendungen der Integralrechnung zeigen können, was für Umstände die Hinzufügung einer constanten Grösse,  $\pm c$ , zu einem gefundenen Integral zuweilen erheischen, so wollen wir auch bis dahin, des kürzern Schreibens halber, diese, hier noch ganz überflüssige Constante stets weglassen.

## 5.

Nachdem wir nun die nöthigen Vorbegriffe über den nächsten rein formellen Zweck der Integralrechnung vorausgeschickt haben, wollen wir nun zuerst die wichtigsten der verschiedenen Regeln

mittheilen, welche man für die Integration der verschiedenen Differentiale aufgefunden hat. Dass es hier keine einzige allgemeine Integrationsregel giebt, die Verschiedenartigkeit der Functionen vielmehr verschiedene Regeln hervorrufen, ist wohl vorauszusetzen. Aus diesem Grunde muss auch, um Ordnung zu erhalten, die Integralrechnung in mehrere Abtheilungen zerfallen. Man wird übrigens bald bemerken, dass fast die ganze Integralrechnung aus lauter mitunter sehr feinen Kunstgriffen besteht und nur Mathematiker ersten Ranges hier etwas leisten, sie erfinden und vervollkommen konnten.