Einleitung in die Infinitesimal-Rechnung zum Selbstunterricht

II. Theil: Integral-Rechnung

Lübsen, Heinrich B.

Hamburg, 1855

Einleitung.

Einleitung.

1.

Die Integralrechnung ist in rein formeller Hinsicht gerade das Umgekehrte der Differentialrechnung. Denn abgesehen von den mancherlei Anwendungen der Differentialrechnung, welche zusammen den eigentlichen materiellen Begriff derselben bilden, ist ihr nächster Zweck, von einer gegebenen Function einer veränderlichen Grösse das Differential dieser Function anzugeben. So ist z. B. von x^5 das Differential $= 5x^4 dx$. In Zeichen: $d \cdot x^5 = 5x^4 dx$.

Umgekehrt ist nun, nach dem ersten, rein formellen, vorläufig noch alle Anwendungen ausschliessenden Begriff der Integralrechnung, ihr nächster Zweck: zu einem gegebenen Differential einer veränderlichen Grösse die zugehörige ursprüngliche Function zu finden, welche dann das Integral des gegebenen Differentials heisst. So ist z. B. x^5 das Integral von $5x^4 dx$.

Um anzudeuten, dass das Integral zu einem Differential gesucht werden soll, ist von Leibnitz das Zeichen $\int$ gewählt, welches man vor das gegebene Differential setzt. So ist z. B. $\int 5x^4 dx = x^5$.

2.

Nach Leibnitzen's Anschauung bedeutet das Wort Integral so viel als Summe einer unendlichen Reihe unendlich kleiner Grössen und das Zeichen $\int$ das Summirungszeichen. Wir werden später bei der Anwendung der Integralrechnung zeigen, dass man in vielen Fällen das Integral eines Differentials wirklich als eine Summe betrachten kann. Vorläufig aber muss der Anfänger sich an dem engen Begriff halten und unter Integral nichts anderes verstehen, als die zu einem gegebenen Differential gehörige Function, welche also differentiirt, das gegebene Differential wieder giebt. Erst müssen wir wenigstens einige Differentiale integriren, d. h. ihre Integrale finden können, bevor wir Anwendungen machen, den Nutzen der Integralrechnung zeigen und so nach und nach zu ihrem erweiterten (materiellen) Begriff gelangen können.

Bemerken wollen wir noch, dass, obgleich wir jede Function zu differentiiren wissen, wir jedoch, strenge genommen, nicht auch umgekehrt jedes Differential integriren können, und in solchen Fällen uns immer mit einer Annäherung begnügen müssen, so wie, vergleichsweise, wir wohl jede Zahl potentiren, nicht aber umgekehrt aus jeder Zahl eine Wurzel ziehen können, weil ja die meisten irrational sind.

3.

Zunächst merke man sich die aus den in der Differential-Rechnung (§ 31) aufgestellten Differentialformeln, sich von selbst ergebenden sogenannten Integrationsformeln, die man im Gedächtniss behalten muss. Diese sind nämlich:

1. $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$	6. $\int \sin x\, dx = -\cos x$
2. $\int e^x dx = e^x$	7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{la}$	8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x$
4. $\int \frac{dx}{x} = lx$	9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{Arc} \sin x$
5. $\int \cos x\, dx = \sin x$	10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{Arc} \operatorname{tg} x$

4.

Zu vorstehenden zehn Fundamentalformeln haben wir noch ein paar Bemerkungen zu machen.

1. Nach der ersten Formel muss man, um das Integral $\int x^m dx$ zu erhalten, zu dem Exponenten m eine Einheit addiren und dann die neue Potenz x^{m+1} durch den neuen Exponenten $m+1$ dividiren. So ist z. B.:

$$\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4};\quad \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \tfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}};\quad \int x^{-4}dx = -\tfrac{1}{3}x^{-3}$$

Diese Regel gilt (den einzigen Fall, wo $m = -1$ ist ausgenommen) für alle, ganze oder gebrochene, positive oder negative, Exponenten. Der Fall, wo $m = -1$ ist, führt auf die vierte Fundamentalformel.

Es ist nämlich: $\int x^{-1}dx = \int \frac{dx}{x} = lx$. Die übrigen neun Formeln sind aber ganz allgemein gültig.

2. Es ist leicht einzusehen, weil es schon aus den Differentialformeln (Diff.-Rechn. § 31) folgt, dass man einen constanten unter dem Integrationszeichen stehenden Factor immer vor dasselbe setzen kann. So ist z. B.:

$$\int 4x^5\,dx = 4\int x^5\,dx = 4\cdot\frac{x^6}{6} = \tfrac{2}{3}x^6.$$

$$\int ax^m\,dx = a\int x^m dx = \frac{a}{m+1}x^{m+1}.$$

$$\int a\cos x\,dx = a\int \cos x\,dx = a\cdot\sin x$$

3. Da die Differentiale zweier Functionen, die sich nur um ein constantes Glied unterscheiden, vollkommen gleich sind (Diff.-Rechn. § 14, 1), so ist klar, dass man jedem gefundenen Integral immer eine ganz beliebige constante Grösse, sowohl mit dem plus- als minus-Zeichen hinzufügen könnte. So ist z. B.:

$$\int e^x dx = e^x;\ \text{aber auch}\ \int e^x dx = e^x \pm c$$

weil sowohl die Function e^x, als auch $e^x \pm c$, differentiirt, das gegebene Differential wiedergiebt. Da wir aber erst bei den Anwendungen der Integralrechnung zeigen können, was für Umstände die Hinzufügung einer constanten Grösse, $\pm c$, zu einem gefundenen Integral zuweilen erheischen, so wollen wir auch bis dahin, des kürzern Schreibens halber, diese, hier noch ganz überflüssige Constante stets weglassen.

5.

Nachdem wir nun die nöthigen Vorbegriffe über den nächsten rein formellen Zweck der Integralrechnung vorausgeschickt haben, wollen wir nun zuerst die wichtigsten der verschiedenen Regeln mittheilen, welche man für die Integration der verschiedenen Differentiale aufgefunden hat. Dass es hier keine einzige allgemeine Integrationsregel giebt, die Verschiedenartigkeit der Functionen vielmehr verschiedene Regeln hervorrufen, ist wohl vorauszusehen. Aus diesem Grunde muss auch, um Ordnung zu erhalten, die Integralrechnung in mehrere Abtheilungen zerfallen. Man wird übrigens bald bemerken, dass fast die ganze Integralrechnung aus lauter mitunter sehr feinen Kunstgriffen besteht und nur Mathematiker ersten Ranges hier etwas leisten, sie erfinden und vervollkommnen konnten.